

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>13</b>
<b>Abstract</b>	<b>15</b>
<b>Remerciements</b>	<b>17</b>
<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>1 Modélisation des géomatériaux : d'une forme solide à une forme fluide</b>	<b>25</b>
1.1 Comportement élasto-plastique et rupture dans les géomatériaux <i>in situ</i> . . .	26
1.1.1 Modèles rhéologiques élasto-plastiques . . . . .	26
1.1.2 Analyse de la stabilité matérielle . . . . .	31
1.1.3 Conclusion . . . . .	37
1.2 Comportement visqueux des suspensions granulaires de type boue . . . . .	37
1.2.1 Difficultés de l'étude rhéologique des mouvements de terrain de type écoulement . . . . .	37
1.2.2 Caractères principaux de la rhéologie des suspensions concentrées . . .	38
1.2.3 Diversité des seuils d'arrêt considérés . . . . .	40
1.2.4 Conclusion . . . . .	41
1.3 La transition solide-fluide dans les géomatériaux . . . . .	41
1.3.1 Introduction : physique de la transition frictionnelle-visqueuse . . . . .	41
1.3.2 L'évolution vers un comportement fluide des sols à la rupture . . . . .	42
1.3.3 L'évolution vers un comportement solide des suspensions concentrées	44
1.3.4 Modèles de transition solide-fluide dans les géomatériaux . . . . .	46
1.3.5 Conclusion . . . . .	47
1.4 Méthode numérique adaptée aux écoulements de matériaux complexes . . . . .	48
1.4.1 Principaux critères pour la modélisation d'un mouvement de terrain dans son intégralité . . . . .	48
1.4.2 Les méthodes numériques classiques et leur spécificités . . . . .	49
1.4.3 La méthode MEFPIIL . . . . .	54
1.4.4 Présentation du code Ellipsis . . . . .	58
<b>2 Intégration de l'élasto-plasticité dans Ellipsis</b>	<b>65</b>
2.1 Prise en compte de la plasticité de manière explicite . . . . .	66
2.1.1 Formulation globale . . . . .	66
2.1.2 Calcul des déformations locales . . . . .	68
2.1.3 Benchmarks . . . . .	70
2.1.4 Influence du chargement . . . . .	76
2.2 Plasticité et discrétisation élémentaire . . . . .	79
2.2.1 Notion de contrainte cinématique . . . . .	79

2.2.2	Gestion du champ de pression . . . . .	81
2.2.3	Extension de la formulation mixte à la loi élasto-plastique . . . . .	88
2.2.4	Gestion des éléments hétérogènes en plasticité . . . . .	91
2.3	Analyse de stabilité de pentes heuristiques . . . . .	94
2.3.1	Comparaison MEFPIL / équilibre limite . . . . .	94
2.3.2	Comparaison MEFPIL / MEF Lagrangienne . . . . .	97
2.3.3	Influence du matériau de remplissage pour les modèles à bords libres . . . . .	100
<b>3</b>	<b>Un modèle rhéologique de transition solide-fluide-solide</b>	<b>105</b>
3.1	Présentation du modèle de transition . . . . .	106
3.1.1	Principe général du modèle . . . . .	106
3.1.2	Présentation du modèle intégrant les lois Plasol et Bingham . . . . .	108
3.2	Intégration dans Ellipsis du critère du travail du second ordre . . . . .	110
3.2.1	Calcul du travail du second ordre . . . . .	111
3.2.2	Validation du calcul de $d^2W_n$ . . . . .	112
3.3	Implantation dans Ellipsis du seuil de Bingham 3D . . . . .	119
3.3.1	Inversion de la loi classique en 3D . . . . .	119
3.3.2	Formulation et prise en compte du seuil 3D . . . . .	120
3.3.3	Validation . . . . .	122
3.4	Premiers calculs réalisés avec le modèle de transition . . . . .	124
3.4.1	Cas de la transition pour une rupture diffuse . . . . .	125
3.4.2	Étude paramétrique sur les paramètres visqueux . . . . .	127
3.4.3	Cas de la transition pour une rupture localisée . . . . .	128
<b>4</b>	<b>Application aux coulées de boue de Campanie</b>	<b>133</b>
4.1	Introduction : présentation des coulées de Sarno et Quindici . . . . .	134
4.2	Détermination des paramètres physiques . . . . .	137
4.2.1	Paramètres matériaux . . . . .	137
4.2.2	Prise en compte des conditions hydriques au travers du choix des paramètres . . . . .	138
4.2.3	Paramètres élasto-plastiques . . . . .	141
4.2.4	Paramètres visqueux . . . . .	144
4.3	Étude de la transition sur un modèle de longueur réduite . . . . .	146
4.3.1	Description du modèle . . . . .	146
4.3.2	Étude de l'amorçage . . . . .	147
4.3.3	Étude de l'écoulement et de l'arrêt sur un obstacle . . . . .	150
4.4	Étude de la coulée de Palma Campania . . . . .	156
4.4.1	Présentation du modèle étudié . . . . .	156
4.4.2	Étude de l'amorçage . . . . .	159
4.4.3	Étude de la propagation et de l'arrêt de la coulée contre un ouvrage . . . . .	165
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>171</b>
	<b>Annexe</b>	<b>175</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>179</b>

# Table des figures

1	Mouvements de terrain de la Clapière ( <a href="http://lithotheque.ac-aix-marseille.fr/">http://lithotheque.ac-aix-marseille.fr/</a> ) (a), Sarno et Quindici (b), et Las Colinas ( <a href="http://landslides.usgs.gov/">http://landslides.usgs.gov/</a> ) (c) .	20
1.1	Résultat d'un essai œdométrique sur sable sec (source personnelle) . . . . .	26
1.2	Passage de la configuration initiale à la configuration actuelle . . . . .	27
1.3	Représentation de la surface de charge de Van Eekelen dans l'espace des contraintes principales (a), comparaison des surfaces limites de Van Eekelen, Mohr-Coulomb et Drücker-Prager dans le plan déviatoire (b), pour $\phi_e = \phi_c = 19^\circ$ et $c = 25kPa$ . . . . .	29
1.4	Dépendance de la loi d'écrouissage de $\phi$ au paramètre $B_p$ . ( $\phi=20$ à $35^\circ$ ) . . .	30
1.5	Rupture localisée au cours d'un essai triaxial drainé (Desrues et Chambon, 2002)(a), diffuse au cours d'un essai triaxial non drainé (Servant <i>et al.</i> , 2005)(b). Etat de contrainte à la rupture pour le deuxième essai (Darve <i>et al.</i> , 2004)(c).	32
1.6	Condition de discontinuité des déformations dans une bande de cisaillement .	33
1.7	Détermination du domaine de bifurcation par une recherche directionnelle en trois chargements (d'après Prunier (2008)) . . . . .	36
1.8	Mise en évidence de la ségrégation Iverson (2003) dans un canal à écoulement 2D (matériaux argileux en couleur claire, graveleux en couleur sombre)(a). Schéma de l'hétérogénéité à l'échelle d'une coulée de débris, d'après Pierson (1986)(b) . . . . .	38
1.9	Morphologie d'une coulée de débris à l'arrêt sur des pentes non nulles (coulée de débris de Super-Sauze, France, d'après Malet <i>et al.</i> (2004)) . . . . .	39
1.10	Mise en évidence de la viscosité à seuil : dans les fines ( $<100 \mu m$ ) de coulées de débris réelles à différentes fractions solides (d'après Coussot et Piau (1994)) (a), dans un mélange artificiel kaolinite+eau à différentes fractions solides (d'après Coussot <i>et al.</i> (1996))(b), dans un béton haute performance (d'après Hu et de Larrard (1996)) . . . . .	40
1.11	Contacts frottants entre les grains d'une suspension concentrée dans le régime Coulombien (a) ou lubrifiés dans le régime visqueux (b). Les traits matérialisent les contacts directs entre les particules (d'après (Huang, 2006)) . . . . .	42
1.12	Marques d'éclaboussures des coulées de boues sur une maison de Quindici (Revellino <i>et al.</i> , 2004) . . . . .	43
1.13	Barres d'immeuble s'enfonçant dans un sol liquéfié lors du séisme de Niigata 1964 ( <a href="http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/world/events/1964_0616.php">http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/world/events/1964_0616.php</a> ) . . . . .	43
1.14	Régimes "fluide à seuil" (a) , "landslide" (b) et "solide figé" (c) lors de l'écoulement sur plan incliné d'un mélange eau/bentonite d'après Coussot <i>et al.</i> (2005)	44

1.15	Courbe couple $C$ /vitesse de rotation $\omega$ . Essais 1 à 6 : profondeur croissante du scissomètre (9 à 54 mm) pour une même taille de bille (a). Influence de la profondeur $h$ du scissomètre sur le couple, pour différents fluides interstitiels (b). . . . .	45
1.16	Illustration d'un intervalle inaccessible de taux de déformation lors d'un essai de cisaillement d'un matériau à seuil, piloté en contrainte (Huang, 2006) . . .	46
1.17	Loi de comportement de type Perzyna 1D . . . . .	47
1.18	Champ de vitesse pour un écoulement fluide avec une MEF Eulérienne (instabilité de Von Karman). Le champ de déplacement de la matière est visible, même si tous les points de calculs sont fixes. . . . .	49
1.19	Exemple d'un calcul de crash automobile : configuration déformée du maillage en approche Lagrangienne . . . . .	50
1.20	Domaine d'influence $S$ de la particule $i$ sur les autres particules de $S$ , et fonction d'interpolation. $kh$ (avec $k$ une constante) détermine la limite de $S$ (d'après Bui <i>et al.</i> (2007)) . . . . .	52
1.21	Points de calculs et domaine d'influence de chaque point, sur le domaine $\Omega$ . . . . .	53
1.22	Les trois configurations utilisées dans la méthode ALE et comparaison pour l'exemple d'écrasement d'un solide des configurations initiale, déformée selon une MEF Lagrangienne et déformée selon l'ALE (d'après Rodríguez-Ferran <i>et al.</i> (2002)) . . . . .	54
1.23	Double discrétisation dans la MEFPIL . . . . .	55
1.24	Répartition de la matière pour deux matériaux en écoulement convectif (Moresi <i>et al.</i> , 2003) (a). Sédimentation de grains solides dans un fluide visqueux (b) . . . . .	56
1.25	Positionnement de la MEFPIL parmi les autres méthodes numériques. . . . .	58
1.26	Éléments de type Q4. Position des particules dans la configuration initiale du calcul (a.) et dans une configuration quelconque (b). . . . .	62
1.27	Position des nœuds et particules avant et après l'application d'une condition aux limite en vitesse normale (a), conditions aux limites périodiques pour un modèle de couche infinie (b) . . . . .	63
2.1	Modèle rhéologique visco-élasto-plastique en 1D . . . . .	66
2.2	Algorithme de résolution de Plasol . . . . .	70
2.3	Conditions aux limites du modèle oedométrique . . . . .	71
2.4	Comparaison des résultats de l'essai oedométrique avec la référence sur un point matériel . . . . .	72
2.5	Modèle pour l'essai de compression simple . . . . .	73
2.6	Algorithme de Newton Raphson : réponse d'un point matériel sous sollicitation mixte . . . . .	75
2.7	Comparaison des résultats point matériel seul / modèle Ellipsis . . . . .	76
2.8	Influence de la taille des incréments de gravité pour une gravité croissante linéairement. Courbe entière (a), zoom sur l'entrée en plasticité (b). . . . .	76
2.9	Évolution de la norme du tenseur d'incrément de déformation plastique . . . . .	77
2.10	Comparaison des résultats pour une gravité continument croissante en 10 incréments (les résultats après l'arrêt du chargement ne sont pas représentés) et pour une gravité en 10 'paliers' . . . . .	78
2.11	Évaluation d'éléments 2D déformation plane vis-à-vis de l'incompressibilité ou de la quasi incompressibilité d'après Nagtegaal <i>et al.</i> (1974) . . . . .	80
2.12	Fonctions de forme bilinéaires associées aux 4 nœuds d'un élément Q4 . . . . .	82
2.13	Champ des dérivées des fonctions de forme des Q4 selon $x$ (a) et selon $y$ (b) . . . . .	82
2.14	Modèle de matériau pesant en configuration initiale et déformée (Ellipsis) . . . . .	83



2.15	Composantes de déformation sur un profil vertical de points d'intégration (a.), pression sur ce profil sans utiliser la formulation mixte (b.) et en l'utilisant (c.)	84
2.16	Comparaison des profils verticaux de contrainte obtenus pour le modèle EP avec Abaqus et Ellipsis . . . . .	86
2.17	Profils verticaux de contraintes en élasto-plasticité pour Abaqus et pour Ellipsis (avec l'interpolation constante par les dérivées des fonctions de forme pour Ellipsis) . . . . .	88
2.18	Géométrie et conditions aux limites du modèle de colonne pesante de 10 m de hauteur . . . . .	89
2.19	Résultats en formulation 'classique' au début du chargement ( $g=1,04 \text{ m/s}^2$ ) pour le maillage initial (a) et pour le maillage plus fin (b). Résultats en formulation mixte en fin de chargement ( $g=9,8 \text{ m/s}^2$ )(c) . . . . .	89
2.20	Mise en évidence d'un locking à l'entrée en plasticité pour $g=1,7 \text{ m/s}^2$ (a : maillage initial, b : maillage fin); déformée en après modification de Plasol pour un chargement $g=3,8 \text{ m/s}^2$ (c) . . . . .	91
2.21	Mise en évidence d'une plasticité numérique sur les éléments en frontière de l'échantillon, pour $g=1,7 \text{ m/s}^2$ (a) et $g=3,7 \text{ m/s}^2$ (b). Résultats pour $g=3,7 \text{ m/s}^2$ avec un maillage plus fin . . . . .	92
2.22	Effet de la prise en compte des éléments hétérogènes pour $g=1,7 \text{ m/s}^2$ (a) et $g=3,7 \text{ m/s}^2$ (b) . . . . .	93
2.23	Calcul sans traitement des éléments hétérogènes sol-air pour $g=5,4 \text{ m/s}^2$ (a) et avec traitement de ces éléments (même gravité) . . . . .	94
2.24	Configuration considérée pour l'analyse de stabilité avec l'Équilibre Limite et la MEFPIL (a). Modèle effectivement réalisé avec Ellipsis (b). . . . .	95
2.25	Mise en évidence d'un domaine de stabilité pour chaque méthode (Cuomo <i>et al.</i> , 2012) . . . . .	96
2.26	Vérification, avec la méthode de l'Équilibre Limite, de la stabilisation du modèle obtenue avec la MEFPIL grâce à la prise en compte des déformations (Cuomo <i>et al.</i> , 2012) . . . . .	97
2.27	Géométrie et conditions aux limites du modèle de talus vertical . . . . .	97
2.28	Comparaison, sur un profil vertical de nœuds, des déplacements horizontaux en élasticité (a), à l'entrée du domaine plastique (b) . . . . .	98
2.29	Trajet de chargement pour le calcul mené avec Ellipsis ( $x=22,5 \text{ m}$ , $y=15 \text{ m}$ ), dans l'espace des contraintes principales (a) et dans un plan $J_{2\sigma}$ -p (b) . . . . .	99
2.30	Trajet de chargement dans le repère des contraintes principales, et position vis-à-vis des surfaces de rupture plastique de Van Eekelen et de Mohr-Coulomb	100
2.31	Modèle rhéologique 1D analogue au modèle Ellipsis de talus élasto-plastique à bord libre : (a) avant la rupture, (b) après la rupture . . . . .	101
2.32	Second invariant des contraintes obtenues dans l'air (a); profil des déplacements horizontaux pour 3 valeurs de viscosité de l'air (b) . . . . .	102
3.1	Modèle rhéologique 1D analogue au modèle de transition . . . . .	107
3.2	Modèle de transition (forme 1D) avec les lois de Bingham et Plasol, et la viscosité numérique . . . . .	109
3.3	Modèle de Bingham modifié pour $s_o=2000 \text{ MPa}$ , $\eta=100 \text{ MPa.s}$ , et 3 valeurs de $m$ : $m=1$ (courbe a), $m=10$ (b), et $m=100$ (c) . . . . .	109
3.4	Représentation des enveloppes caractéristiques du modèle de transition pour des paramètres élastoplastiques et visqueux réalistes (VE : Van Eekelen) . . . . .	110
3.5	Calcul du travail du second ordre local normalisé dans Ellipsis . . . . .	112
3.6	Chargement cinématique en 2 phases . . . . .	113

3.7	Trajet de contrainte dans le plan $q/p$ (a), Représentation du travail du second ordre en fonction de $p$ (b) . . . . .	114
3.8	Géométrie du modèle et positionnement des 2 particules de suivi des résultats	115
3.9	Résultats en $J_{2\sigma}$ et $d^2W_n$ pour les particule p1 (a,b), p2 (c,d) . . . . .	116
3.10	Zonage du travail du second ordre local sur l'échantillon à $g=1,85 \text{ m/s}^2$ . . . . .	116
3.11	Suivi de $D^2W_n$ au cours du calcul avec traitement des éléments hétérogènes (a), et sans ce traitement (b) . . . . .	117
3.12	Évolution du second invariant de contraintes dans l'air (a). Évolution du maximum de différence (pour deux viscosités de l'air, 1 et 5 Pa.s) de déplacement horizontaux (b) . . . . .	118
3.13	Inversion de la relation de Bingham en 1D . . . . .	119
3.14	Modèle de couche infinie pesante inclinée . . . . .	122
3.15	Comparaison des résultats analytiques et numériques (Ellipsis) pour un matériau de Bingham élastique sous le seuil . . . . .	124
3.16	Évolution de $J_{2\sigma}$ en fonction de $p$ en comparaison avec $J_{2\sigma}$ pour un comportement élasto-plastique (EP) sans transition (a). Zoom (b) . . . . .	126
3.17	Évolution temporelle de $J_{2\sigma}$ (b) vis-à-vis de l'évolution de la déformation verticale appliquée (a). Comparaison avec la solution analytique après la transition (c) . . . . .	127
3.18	Influence de la viscosité sur la réponse post rupture (Référence : le calcul élasto-plastique EP) . . . . .	128
3.19	Influence du seuil de Bingham $s_o$ sur la réponse post rupture . . . . .	128
3.20	Chemin de chargement en contrainte dans le repère temporel (a) et le repère de contrainte $q-p$ (b). . . . .	129
3.21	Contrainte déviatoire $q$ en fonction de la contrainte axiale $\varepsilon_a$ . . . . .	130
3.22	Evolution de $d^2W_n$ au cours du calcul (a), zoom (b). Déclenchement de la transition solide-fluide (c). . . . .	130
3.23	Immobilisation du fluide (b) lors du passage de $J_{2\sigma}$ sous le seuil de Bingham (a). . . . .	131
4.1	La Campanie (a), localisation de la zone du Pizzo d'Alvano (b) . . . . .	134
4.2	Géomorphologie type de la région du Pizzo d'Alvano (Guadagno <i>et al.</i> , 2005) (a) et exemple d'une séquence stratigraphique (Revellino <i>et al.</i> , 2004) (b) . . . . .	135
4.3	Différentes configurations menant à l'amorçage d'après Guadagno <i>et al.</i> (2005) . . . . .	136
4.4	Forme de l'écoulement sur la ville de Sarno (a), Marques d'éclaboussure de la boue et hauteur de dépôt à Quindici (b)(Revellino <i>et al.</i> , 2004) . . . . .	136
4.5	Granulométrie des cendres et des pierres ponces (a) (Salciarini <i>et al.</i> , 2006), des paléosols (b) (Prete <i>et al.</i> , 1998) . . . . .	137
4.6	Capillarité de l'eau dans un tube fin, force de tension à l'interface eau/air . . . . .	138
4.7	Courbe de rétention d'eau typique (d'après Tarantino (2010)), et mesurée en séchage dans une argile de Boom (d'après Romero (1999)) . . . . .	139
4.8	Stabilité d'un échantillon de sable partiellement saturé (a), perte de stabilité par augmentation du degré de saturation (b) (Tarantino, 2010) . . . . .	140
4.9	Synthèse de Crosta et Negro (2003) pour la cohésion et l'angle de frottement drainés à la rupture. Valeurs pour les paléosols (en ligne continue), les pierres ponces (en pointillé), et les cendres (en trait-pointillé). . . . .	142
4.10	Essai triaxial non drainé sur des pyroclastes type cendre . . . . .	142
4.11	Limite élastique et de critère limite de plasticité dans l'espace des contraintes principales pour $s=10 \text{ kPa}$ . Cas sans correction ( $\varphi'=0 - 38^\circ$ et $C'_m=10-15 \text{ kPa}$ ) (a), et avec correction ( $\varphi'=8 - 38^\circ$ et $C'_m=3-15 \text{ kPa}$ ) (b) . . . . .	143

4.12	Calibration de l'angle de dilatance sur un essai triaxial non-drainé : résultats expérimentaux de référence, résultats obtenus avec Ellipsis . . . . .	144
4.13	Calibration de $s_o$ dans la zone de dépôt (a), de $\eta$ dans la pente d'amorçage (b)	145
4.14	Géométrie du modèle de coulée de longueur réduite (dimensions en m) . . . .	146
4.15	Configuration finale pour un comportement purement visqueux et $s_o=6\text{kPa}$ .	147
4.16	Comparaison des configurations, en fin d'application de $g$ , pour le calcul avec (a) et sans (b) traitement spécifique des éléments hétérogènes . . . . .	148
4.17	Influence de la cohésion sur l'entrée en plasticité, la première rupture et la première transition solide-fluide . . . . .	148
4.18	Représentation des zones en rupture et en transition au cours du chargement avec $C'_m=0,18-0,9$ kPa (a) et $C'_m=2-10$ kPa (b) . . . . .	149
4.19	Géométrie du modèle bi-matériaux (a), configuration aux incréments 53 (b) et 83 (c) (dimensions en m) . . . . .	150
4.20	Configuration finale sans obstacle . . . . .	151
4.21	Différentes phases de l'écoulement . . . . .	151
4.22	Mise en évidence d'une zone morte (incrément 195) . . . . .	152
4.23	Configuration en fin de calcul pour les différents seuils de viscosité . . . . .	153
4.24	Influence de $s_o$ sur $U_x(P)$ (a) et $J_{2\sigma}(P')$ (b) . . . . .	153
4.25	Force résultante générée sur l'obstacle d'après Preisig et Zimmermann (2010) (les différentes courbes représentent plusieurs manières de prendre en compte les phases 'eau' et 'grains') . . . . .	154
4.26	Influence de $E$ sur $U_x(P)$ (a) et $J_{2\sigma}(P')$ (b) . . . . .	155
4.27	Influence de $H$ sur l'efficacité de l'obstacle . . . . .	155
4.28	Aspect du terrain après la coulée et relevé topographique (Guadagno <i>et al.</i> , 1988) . . . . .	156
4.29	Coupe topographique et lithologique simplifiée . . . . .	157
4.30	Modèle adapté à la topographie . . . . .	157
4.31	Stabilisation d'une couche à front libre pour $s_o=19$ kPa. Configuration initiale (a), finale (b) . . . . .	158
4.32	Effets de bords -pour un comportement élastique- dans la répartition du second invariant de déformation. Extension de la zone sur laquelle nous ne considérons pas la plasticité dans le vrai modèle . . . . .	159
4.33	Géométrie du modèle (dimensions données en mètres) . . . . .	160
4.34	Influence de la cohésion sur l'amorçage . . . . .	160
4.35	Résultats pour $C'_m= 5 - 25$ kPa et $s_o=19$ kPa . . . . .	161
4.36	Zonage du travail du second ordre local normalisé à l'incrément 117 ( $g=6,8$ m/s <sup>2</sup> ) . . . . .	162
4.37	Coupes verticales de second invariant de contrainte (a) et de vitesse selon x (b) réalisées à l'incrément 176 (coupe C sur la figure 4.35). EP : élasto-plastique - V : visqueux . . . . .	162
4.38	Résultats obtenus pour un amorçage par excavation . . . . .	163
4.39	Chargement appliqué (gravité et excavation), et positionnement des incréments présentés à la figure 4.38 . . . . .	163
4.40	Mécanisme de diminution progressive de la succion dans les cendres . . . . .	165
4.41	Résultats après amorçage par diminution de la succion . . . . .	165
4.42	Géométrie du modèle avec ouvrage de protection . . . . .	166
4.43	Influence du changement d'orientation du maillage sur la cinétique une particule P . . . . .	167
4.44	Suivi des déplacements horizontaux en tête de l'ouvrage (a) et du second invariant de contrainte en pied (b) . . . . .	167

---

4.45	Résultats obtenus pour le modèle global . . . . .	169
4.46	Modèle de matériau pesant compressible (a) et configuration à $t=0.29$ s (b) .	176
4.47	Évolution au cours du calcul du profil vertical de $\rho$ (valeurs aux points d'intégration) . . . . .	176
4.48	Évolution de l'intégrale de $\rho$ sur la hauteur selon que $\rho$ est actualisée ou non	177

# Liste des tableaux

2.1	Paramètres élasto-plastiques de l'essai oedométrique . . . . .	71
2.2	Paramètres physiques pour l'essai de compression simple . . . . .	73
2.3	Paramètres numériques pour l'essai de compression simple ( $\Delta t_e=0,01$ s) . . .	74
2.4	Paramètres numériques du modèle de bloc sous poids propre ( $\Delta t_e=5.10^{-4}$ s)	84
2.5	Paramètres physiques du modèle de bloc sous poids propre . . . . .	85
2.6	Paramètres physiques du bloc sous poids propre de grandes dimensions . . . .	91
2.7	Paramètres numériques pour l'essai de couche infinie avec talus ( $\Delta t_e=0,01$ s)	95
2.8	Paramètres physiques du talus . . . . .	98
2.9	Paramètres physiques du talus chargé à la rupture . . . . .	102
2.10	Paramètres numériques du talus chargé à la rupture ( $\Delta t_e=10^{-3}$ s) . . . . .	102
3.1	Paramètres élasto-plastiques de l'essai triaxial non-drainé . . . . .	113
3.2	Paramètres physiques du bloc pesant chargé à la rupture . . . . .	114
3.3	Paramètres physiques de la couche visqueuse à seuil de Bingham . . . . .	122
3.4	Paramètres numériques de la couche visqueuse à seuil de Bingham ( $\Delta t_e=10^{-2}$ s)	123
3.5	Paramètres mécaniques de l'essai triaxial non-drainé mené à la transition . .	125
4.1	Synthèse des principales propriétés matériaux . . . . .	138
4.2	Synthèse de la cohésion et de l'angle de frottement effectifs à la rupture . . .	142
4.3	Caractéristiques de 6 coulées de débris (Revellino <i>et al.</i> , 2004) . . . . .	145
4.4	Bilan des paramètres physiques pour les géomatériaux de Sarno et Quindici .	146
4.5	Paramètres numériques pour la coulée simplifiée ( $\Delta t_e=10^{-2}$ s) . . . . .	147
4.6	Paramètres retenus pour l'étude de la coulée . . . . .	159
4.7	Paramètres de l'échantillon compressible . . . . .	176



# Résumé

Les géomatériaux sont présents dans la nature sous des formes très diverses : sols et roches *in situ* solides, argiles ductiles, boues quasiment liquides, etc... La géomécanique s'intéresse à la compréhension du comportement solide des géomatériaux. Cependant, il arrive que sous l'effet de conditions extérieures particulières, des terrains initialement solides se transforment en fluides : c'est ce qui se produit par exemple lors de coulées de boues ou de débris. Dans un tel contexte, il existe peu d'outils numériques capables de modéliser les différentes phases du comportement. Il semble de plus, qu'il n'existe pas à ce jour de modèle constitutif satisfaisant pour décrire une telle transition.

Nos travaux s'intéressent de manière générale à la transition solide-fluide dans le comportement des géomatériaux, et à l'élaboration d'un modèle constitutif décrivant la phase solide, la phase fluide, ainsi que la transition entre les deux. Nous avons choisi dans ce cadre de mener les calculs en nous basant sur la méthode MEFPIL (Méthode aux Éléments Finis avec des Points d'Intégration Lagrangiens) qui a déjà montré de fortes potentialités pour décrire des comportements très variés (dont des comportements à variables d'histoire), dans un même modèle.

Après avoir implanté et validé la première loi élasto-plastique dans Ellipsis (code basé sur la MEFPIL), nous avons pu introduire dans ce code le modèle de transition. Celui-ci se base sur l'évolution du comportement solide élasto-plastique vers un comportement fluide, visqueux à seuil, et ce, au moment de la rupture matérielle détectée par le critère du travail du second ordre.

Après quelques applications du modèle de transition solide-fluide sur des cas simples et homogènes (en considérant la loi élasto-plastique Plasol et loi visqueuse de Bingham), nous avons appliqué ce modèle à la modélisation des coulées de boue de Sarno et Quindici (Italie, 1998). Les premiers modèles montrent la possibilité de décrire les trois phases de ce mouvement de terrain (l'initiation, la propagation et l'immobilisation), et nous avons pu étudier l'effet de différents paramètres sur l'arrêt contre un ouvrage de protection.

**Mots Clés :** Géomatériaux, glissements de terrain, rupture, travail du second ordre, transition, visco-élasto-plasticité, MEFPIL.





# Abstract

Geomaterials are present in nature in many forms : solid soil or rock, soft clay, almost liquid mud, etc... Geomechanics deals with the understanding the solid behavior of geomaterials. However, solid ground can happen, under specific external conditions, to turn into fluid : as for example during mudflows or debris flows. In such a context, there are few numerical tools able of modeling the different phases of the behavior. Furthermore, it seems that there is, nowadays, no satisfactory constitutive model to describe such a transition.

Our work concerns, in a general way, solid-fluid transition in geomaterials behavior and the development of a constitutive model describing both the solid phase, fluid phase, and the transition between the two. In this framework, we chose to carry out calculations with the FEMLIP numerical method (Finite Element Method with Lagrangians Integration Points) which has shown a strong potential to describe a wide variety of behaviors (including history dependant behavior), in a unique model.

Having implemented and validated the first elasto-plastic law in Ellipsis (FEMLIP based code), we have introduced in this code the solid-fluid transition model. This last is based on the evolution, at the failure state detected by the second order work criterion, of the solid elasto-plastic behavior towards a viscous fluid behavior, exhibiting a yield stress.

After validation of the solid-fluid transition model in homogeneous cases (considering Plasol elasto-plastic law and Bingham viscous one), we applied this model to the modeling of Sarno and Quindici mudflows (Italy, 1998). The first models shows the possibility to describe the three phases of the flow (initiation, propagation and immobilization), and we could study the effect of various parameters on the stop against a protection work.

**Key Words :** Geomaterials, landslide, failure, second order work, transition, visco-elasto-plasticity, MEFPIIL.



# Remerciements

L'"épreuve" de la thèse étant terminée, je tiens aujourd'hui à remercier un certain nombre de personnes qui m'ont aidé à arriver jusque là.

Tout d'abord, un grand merci à Frédéric et Félix, de m'avoir fait confiance en me choisissant pour ce sujet de thèse, puis dans ces trois années de travail en me laissant une grande part d'autonomie. Ils ont été d'une grande aide devant mes (très !) nombreuses interrogations et toujours de bons conseils.

Puis, je souhaiterais remercier Anne Mangeney et Claudio di Prisco d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse et d'avoir apporté leur point de vue sur mon travail. Merci également à Mohamed Naaim et Pierre Yves Hicher d'avoir lu mon manuscrit et d'avoir été membres de mon jury de soutenance.

Par ailleurs, merci à toute l'équipe du 3S-R, et spécialement aux informaticiens Rémi et Jérôme pour leur grande patience devant mes déboires informatiques ! Merci également à tous mes collègues de l'IUT avec lesquels cela a vraiment été un plaisir de travailler.

Merci aussi à Florent Prunier pour sa disponibilité par mail lors de mes régulières questions et Sabatino Cuomo (et l'équipe de Salerno) pour les nombreuses collaborations.

Je souhaiterais adresser aussi une spéciale dédicace à tous les copains rencontrés pendant ces 3 années au laboratoire. Ils m'ont permis de retrouver la motivation pendant les moments de découragements, et de garder la bonne humeur ! Je garderai un souvenir impérissable des pauses madeleines-café au bureau E052, mais aussi des folles virées après le boulot. D'abord, merci Ema, Donia, et Ewa d'avoir été des co-bureaux adorables pendant ma dernière année de thèse et d'avoir supporté mes râlements réguliers ! Et puis, par ordre d'apparition, je tiens donc à remercier vivement : Cédric D. pour son sérieux en toute circonstance (!), Stéphane pour ses coups de main toujours très utiles et son éternel esprit jeune, Cédric G. pour son hyper-motivation communicative, Ludo pour son approvisionnement en tablettes de chocolat, Jérôme H. pour son aide précieuse et patiente en programmation, François pour les bons conseils et pour son look stylé, Clément pour avoir été mon compagnon de galère pendant les derniers mois de thèse, Florent pour son talent musical, Antoine pour son esprit d'organisation, Lauriane pour la connection Legi-3SR (et le transfert d'information...), Sylvie pour sa pêche, les pauses papotages, les sorties danse... (enfin une fille au labo !). Merci aussi à Adeline, Edward, Audrey L., Johnny, Guilhem... pour les bons moments passés au labo et en dehors.

Je souhaiterais également remercier mes parents pour avoir relu l'orthographe de mon manuscrit et surtout pour m'avoir toujours encouragée, ainsi que mes frères et sœur pour être venus de loin pour secouer les pompons le jour de la soutenance.

Enfin, Christophe, merci pour ta présence, rassurante lorsque j'en ai eu besoin, et tes vifs encouragements.



# Introduction

Le point de départ de cette thèse a été la volonté de mieux appréhender les glissements de terrain dans leur ensemble (de l'initiation à l'arrêt), dans la perspective d'évaluer leur impact sociétal.

Ceux-ci constituent, en effet, un aléa naturel particulièrement élevé, tant leur déclenchement peut être soudain (et difficilement prévisible avec les outils actuels) et leur amplitude élevée, en terme de volume de matériau mobilisé et de rayon d'impact. De plus, la croissance de l'urbanisation mondiale a pour conséquence une augmentation du risque pour les populations. Un article très récent de Petley (2012) fait état d'un bilan exhaustif des glissements de terrain dans le monde entre 2004 et 2010, et les conséquences sont lourdes puisque 32322 décès ont été recensés pendant cette période.

Ces phénomènes naturels particulièrement dangereux sont d'une très grande diversité. Parler de "glissement de terrain" pour désigner l'ensemble des mouvements de terrain est d'ailleurs un abus de langage, puisqu'un glissement de terrain représente en fait un type particulier de mouvement gravitaire. Dans la suite de ce document, nous utilisons donc le terme de "mouvement de terrain" pour désigner l'ensemble des instabilités et mouvements de pente. Afin d'illustrer cette diversité, nous avons choisi de comparer brièvement 3 exemples très conséquents de mouvements de terrain.

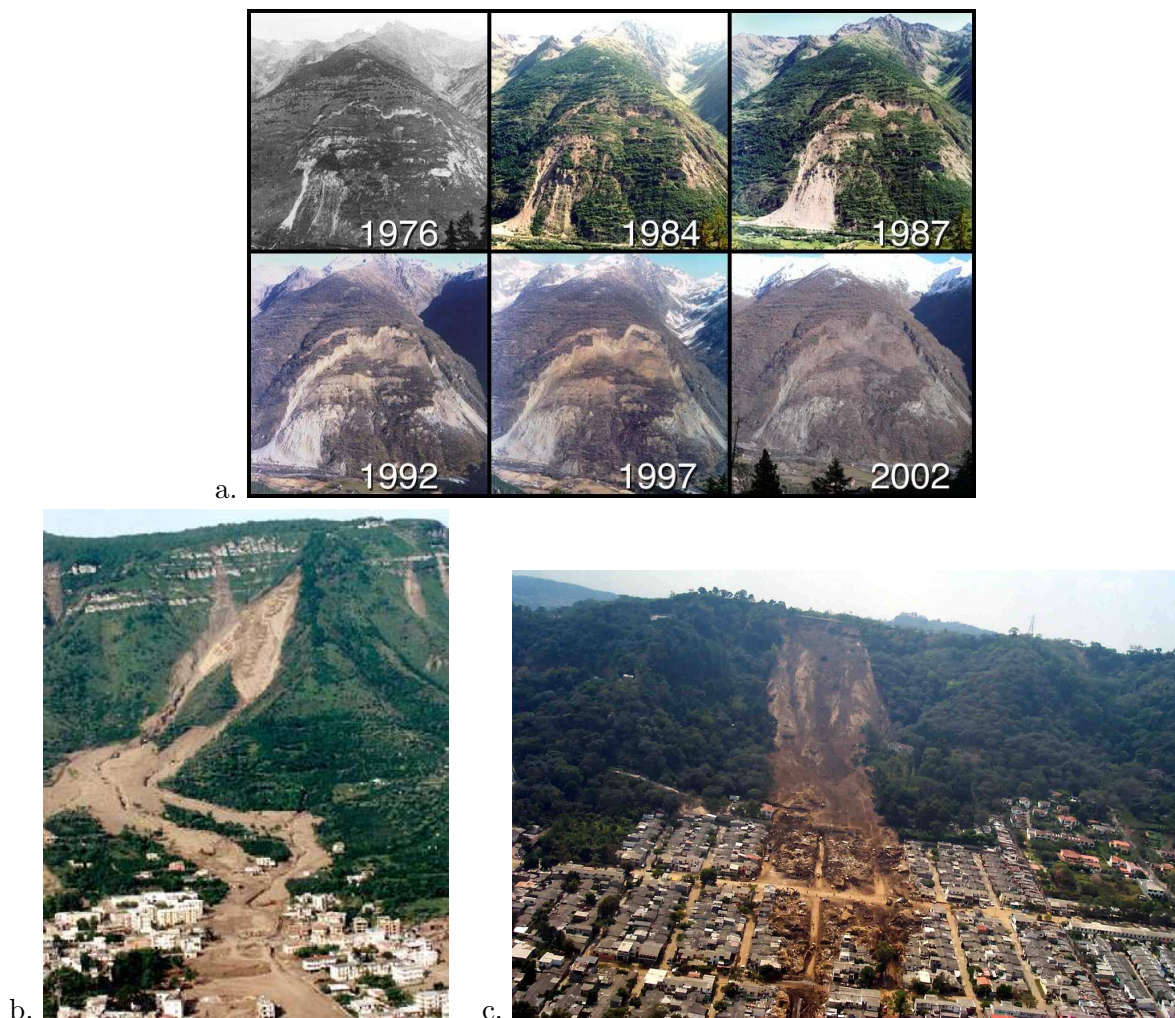
## Comparaison de quelques mouvements de terrain : La Clapière, Sarno et Quindici, Las Colinas

**La Clapière** Le mouvement de terrain de la Clapière, en cours depuis les années 1970 dans la vallée de la Tinée (Alpes Maritimes), est le plus volumineux d'Europe avec 50 millions de m<sup>3</sup> de débris de roches en mouvement lent (1 cm/an en moyenne d'après Tric *et al.* (2010), voir figure 1a). Il représente un danger extrêmement important puisque l'écroulement de ce flanc de montagne menace d'obstruer la vallée et le cours d'eau y circulant, et ainsi de mener à des situations dramatiques : submersion des villages amont par accumulation d'eau derrière les terrains écroulés, brusque inondation des villages aval en cas de rupture de la retenue, etc... Cette zone est donc fortement instrumentée et analysée, et il a été montré que le mouvement des terrains est dû au glissement des roches le long de plans de fracture majeurs, qui se sont développés avec l'altération, par l'eau de pluie infiltrée, des failles du rocher orientées selon la pente (Bois *et al.*, 2008; Guglielmi *et al.*, 2000).

**Sarno et Quindici** Les 5 et 6 mai 1998, les villes de Sarno et de Quindici, situées en contrebas du massif du Pizzo d'Alvano (Italie), ont été partiellement détruites par des masses de boue provenant des pentes environnantes et évoluant à plus de 10 m/s (voir figure 1b). Cet évènement très soudain et de grande ampleur (environ 70 km<sup>2</sup> affectés et 1 million de m<sup>3</sup> de matériau déplacé sur près de 2 km d'après Guadagno *et al.* (1999)) a provoqué la mort de 161 personnes dans les 2 communes. L'instabilité des sols a été déclenchée par des pluies intenses pendant plusieurs jours, qui ont saturé les terrains volcaniques présents sur les fortes pentes.

**Las Colinas** Le mouvement de terrain de Las Colinas a eu lieu le 13 janvier 2001 a Santa Tecla (El Salvador) et a causé 485 décès dans la ville en contrebas des pentes instables (fig 1c). Il détient ainsi le triste record du mouvement de terrain le plus meurtrier jamais enregistré. Les terrains en jeu sont également d'origine volcanique (lapillis, pierres ponce et cendres), et de nature granulaire. Ils se sont déstabilisés et déstructurés suite à un épisode sismique de magnitude de l'ordre de 7 sur l'échelle de Richter, et leur vitesse sur les pentes était de l'ordre de plusieurs mètres par seconde (Crosta *et al.*, 2005). Au total, un volume d'environ 180 millions de m<sup>3</sup> de sol s'est déplacé sur une distance de 800 m. Il n'a pas été trouvé d'eau expliquant l'amorçage de ce glissement et celui-ci est souvent considéré comme un cas rare de glissement sec.

FIGURE 1: *Mouvements de terrain de la Clapière* (<http://lithotheque.ac-aix-marseille.fr/>) (a), *Sarno et Quindici* (b), et *Las Colinas* (<http://landslides.usgs.gov/>) (c)



### **Différentes classes de glissement de terrain et diversité du comportement des géomatériaux**

Étant donné cette diversité des mouvements de terrain, de nombreux systèmes de classification ont été élaborés pour les distinguer (Varnes, 1954, 1978; Hutchinson, 1988). Ces classifications

sont loin d'être unifiées et, de plus, les phénomènes sont souvent complexes, sans mécanisme unique.

Cependant, nous avons souhaité dégager ici les principaux types de mouvements de terrain, notamment à partir de la classification de Coussot et Meunier (1996). Celle-ci reste relativement simple tout en considérant les principaux critères : le type de fraction solide (matériau cohérent ou granulaire) et la fraction d'eau, elle-même influençant la vitesse de déplacement. Cette classification permet de distinguer 6 principales classes de mouvements de terrain :

- *Les glissements de terrain* (terme anglais : landslides) sont des mouvements gravitaires, déclenchés en général à partir de surfaces de rupture internes (failles ou surfaces de glissements), sans que la masse globale des terrains soit déformée (sa forme originale peut être reconnue dans le dépôt final) (Coussot et Meunier, 1996).
- *Les suspensions et coulées de boue* (mudflows) sont des écoulements très rapides<sup>1</sup> de sols saturés et plastiques le long de chenaux, et dont la teneur en eau est supérieure à la teneur en eau des sols en place. L'index de plasticité des sols est supérieur à 5% (Hungry *et al.*, 2001).
- *Les coulées de débris* (debris flows) sont des écoulements très rapides<sup>1</sup> de sol saturé le long de chenaux en forte pente. La différence avec les coulées de boue est la teneur en matériau argileux plastique : en général l'index de plasticité est  $< 5\%$  dans la fraction de fines (Hungry *et al.*, 2001).
- *Les écoulements granulaires* (granular flows) sont des écoulements très rapides<sup>1</sup> de matériaux granulaires sur des pentes modérées, pouvant être provoqué par un mécanisme de liquéfaction (Hungry *et al.*, 2001).
- *Les avalanches rocheuses* (debris or rock avalanches) sont des éboulements rapides<sup>1</sup> et massifs de roches fragmentées dus à un glissement rocheux ou une chute de bloc (Hungry *et al.*, 2001).
- *Les nappes de charriage* (hyperconcentrated flows) sont des écoulements très rapides<sup>1</sup> de sols saturés et peu plastiques dans lesquels, contrairement aux coulées de débris, les matériaux déplacés ne constituent pas une phase homogène : les débris sont roulés et trainés au fond du lit de la coulée, et leur vitesse diffère du mélange eau/fine présent en surface (Coussot et Meunier, 1996).

D'après ces définitions, le mouvement de la Clapière est ainsi un glissement de terrain, et la morphologie de la masse déplacée reste d'ailleurs très reconnaissable avec le développement du glissement (voir figure 1a). D'autre part, le mouvement de terrain de Las Colinas peut être identifié comme un écoulement granulaire. Enfin, même si nous ne l'avons pas précisé dans cette partie, les matériaux en jeu dans les épisodes de Sarno et Quindici présentent une assez forte composante de sols argileux. Le mouvement gravitaire répond donc à la définition d'une coulée de boue.

Il apparaît, au vu des 3 cas de mouvements de terrain que nous avons présentés, que le comportement observé des géomatériaux est extrêmement variable. Ils peuvent se déplacer très rapidement ou pas, et se déformer extrêmement dans la masse ou seulement se rompre localement. Notamment, les sols impliqués dans les mouvements de type coulées (coulées de débris, coulées de boue...) évoluent de telle manière qu'ils ne se comportent plus comme des solides, mais comme des fluides (ce qui augmente d'ailleurs le rayon de d'impact du mouvement de terrain).

De manière plus générale, la modélisation de matériaux complexes, solide ou fluide selon les conditions (et l'histoire du matériau), représente un fort enjeu scientifique, non seulement pour les géomatériaux, mais aussi pour tous les matériaux de type suspensions concentrées

---

1. Bien que des valeurs précises de vitesses ne soient pas indiquées dans les classifications trouvées dans la littérature, ces mouvements gravitaires ont en général une vitesse supérieure au m/s.

(tels que les peintures, les cosmétiques, le béton frais...). Du point de vue comportemental, la frontière entre l'état solide et l'état fluide est en effet encore mal comprise. La définition même de ces deux états ne permet pas de les différencier rigoureusement puisque, d'après le Larousse, un solide est un "*corps qui présente une consistance relativement ferme, par opposition à un fluide*" et un fluide un "*corps qui coule ou a tendance à couler*". Or, non seulement cette distinction dépend de la durée d'observation du matériau (chaque matériau possédant un temps caractéristique d'écoulement), mais en plus, même pour un temps d'observation donné, la frontière reste peu précise entre ces deux comportements. Une argile à très forte teneur en eau peut, par exemple, être assimilée à la fois à un solide et à un fluide.

## Cadre de modélisation mécanique des géomatériaux

Concernant la modélisation, dès lors que les géomatériaux perdent leurs propriétés solides, il devient impossible de décrire leur comportement dans le cadre de la géomécanique (basée sur des lois de comportement élasto-plastiques). Les matériaux ainsi fluidifiés forment alors ce qu'on appelle une suspension concentrée qui, par définition, est le mélange d'un fluide et de particules solides d'une taille caractéristique supérieure à environ 1 nm (Coussot et Ancey, 1999). Dans cette forme, ils sont alors décrits par une autre théorie : celle de la rhéologie des fluides (rappelons ici que la rhéologie est la branche de la mécanique qui regroupe la mécanique des solides non-élastiques et des fluides complexes non-newtoniens).

Les mouvements de terrain sont donc, en général, modélisés en partie seulement : certains modèles -basés sur la géomécanique- s'intéressent uniquement à l'amorçage du mouvement par rupture au sein des géomatériaux solides, et d'autres -basés sur la rhéologie des fluides- étudient spécifiquement l'écoulement post-rupture. À notre connaissance, il semble qu'aucun modèle n'ait décrit de comportement solide/fluide à transition dans les géomatériaux.

Par ailleurs, ce cloisonnement entre une approche solide et une approche fluide existe non seulement du point de vue des lois de comportement mécanique, mais aussi du point de vue numérique. En effet, les méthodes numériques sont souvent adaptées soit à des comportements de type solide, à variables d'histoire et avec des transformations limitées (méthodes Lagrangiennes), soit à des comportements de type fluide en grandes transformations et en général indépendants de l'histoire matérielle (méthodes Eulériennes). Les méthodes numériques classiques constituent donc un second verrou à la modélisation des géomatériaux sous toutes leurs formes.

## Enjeux de cette thèse et organisation du manuscrit

Dans ce contexte, nos travaux se sont orientés afin de répondre aux interrogations suivantes :

- Quelles sont les théories mécaniques existantes pour décrire d'une part, le comportement des géomatériaux solide, et d'autre part le comportement des suspensions granulaires concentrées ? Y-a-t-il déjà des avancées concernant la modélisation de la transition solide/fluide au sein des matériaux granulaires ?
- Quelle méthode numérique serait adaptée à la modélisation d'une telle diversité de comportement ?
- Comment décrire les géomatériaux, dans un cadre unique de modèle de comportement, en prenant en compte à la fois les caractéristiques des sols *in situ* (solides) et des suspensions concentrées (fluides), et les différentes transitions de comportement ? Et notamment, sur quels critères de transition se baser ?
- En définitive, un modèle de transition permettrait-il effectivement de décrire l'amorçage, l'écoulement et l'arrêt d'un écoulement gravitaire ?



Dans l'objectif de résoudre ces problématiques, ce manuscrit s'organise de la façon suivante.

Un premier chapitre bibliographique présente les bases mécaniques et numériques nécessaires à la modélisation des géomatériaux. Nous avons souhaité rassembler et rappeler ici les notions essentielles en termes de lois comportement pour les géomatériaux solides (obéissant à la géomécanique) et fluides (obéissant à la rhéologie des fluides). Notamment, les avantages d'un critère de stabilité basé sur le calcul du travail du second ordre sont présentés. À ce niveau, il nous a semblé particulièrement intéressant de mettre en parallèle les transitions solide→fluide rencontrées dans un sol et les transitions fluide→solide rencontrées dans les suspensions concentrées, afin de mieux comprendre physiquement ces phénomènes.

Enfin, le choix d'une méthode numérique est particulièrement important étant donné la diversité des comportements des géomatériaux (par exemple dans le cas d'un modèle de mouvement de terrain). Nous avons donc dressé un bilan des critères qu'une méthode numérique doit remplir pour modéliser correctement un mouvement gravitaire. La méthode MEFPIIL qui est retenue d'après ces exigences, est présentée, ainsi que le logiciel de calcul utilisé pendant cette thèse.

L'objectif du Chapitre 2 est de prendre en compte, pour la première fois dans le code de calcul, la plasticité dans le cadre d'un comportement élasto-plastique. Les développements que nous avons menés pour modifier la résolution du code sont tout d'abord présentés, puis l'implantation validée à partir d'essais matériaux. Pour des modèles plus complexes, la difficulté de la résolution élasto-plastique est mise en évidence pour des raisons numériques qui sont, soit classiques, soit spécifiques à la méthode MEFPIIL. Nous proposons plusieurs solutions pour pallier ces difficultés et obtenir les résultats les plus précis possibles.

Enfin, l'élasto-plasticité est appliquée à l'analyse de stabilité pour deux pentes heuristiques, et les résultats obtenus sont comparés à ceux d'autres méthodes numériques.

Le troisième chapitre de ce manuscrit représente le cœur de ce travail de thèse, avec l'élaboration d'un modèle global de comportement décrivant à la fois les formes solide et fluide des géomatériaux, ainsi que la transition continue entre les deux phases. Le modèle est validé en trois étapes, avec tout d'abord l'intégration, dans le code, du critère de transition choisi (le travail du second ordre) et sa validation en élasto-plasticité, puis l'implantation d'une loi visqueuse à seuil tridimensionnel et sa validation. Enfin, les trois composantes du modèle global (loi élasto-plastique, critère de transition et loi visqueuse à seuil) sont considérées simultanément et le modèle est validé sur des cas tests homogènes.

Le quatrième chapitre consiste à appliquer le modèle global de transition que nous avons élaboré, à des géomatériaux impliqués dans une coulée de boue réelle, ayant eu lieu à Sarno et Quindici. Dans un premier temps, les différents paramètres visco-élasto-plastiques sont calés à partir de la bibliographie concernant ces coulées. Puis un modèle géométrique simplifié est réalisé afin de tester les possibilités du modèle de transition et de la MEFPIIL. L'influence de différents paramètres sur les phases d'amorçage, d'écoulement, et d'arrêt sur un obstacle est évaluée. Enfin, une dernière application concerne une géométrie de pente réelle, constituée du même matériau, à partir de laquelle nous modélisons l'amorçage, la propagation et l'arrêt de l'écoulement contre un ouvrage de protection.

Enfin, une conclusion générale permet de revenir sur les principaux résultats de ces travaux et d'en dégager les perspectives majeures.



# Chapitre 1

## Modélisation des géomatériaux : d'une forme solide à une forme fluide

### Sommaire

---

<b>1.1 Comportement élasto-plastique et rupture dans les géomatériaux <i>in situ</i></b> . . . . .	<b>26</b>
1.1.1 Modèles rhéologiques élasto-plastiques . . . . .	26
1.1.2 Analyse de la stabilité matérielle . . . . .	31
1.1.3 Conclusion . . . . .	37
<b>1.2 Comportement visqueux des suspensions granulaires de type boue</b> <b>37</b>	
1.2.1 Difficultés de l'étude rhéologique des mouvements de terrain de type écoulement . . . . .	37
1.2.2 Caractères principaux de la rhéologie des suspensions concentrées . .	38
1.2.3 Diversité des seuils d'arrêt considérés . . . . .	40
1.2.4 Conclusion . . . . .	41
<b>1.3 La transition solide-fluide dans les géomatériaux</b> . . . . .	<b>41</b>
1.3.1 Introduction : physique de la transition frictionnelle-visqueuse . . . .	41
1.3.2 L'évolution vers un comportement fluide des sols à la rupture . . . .	42
1.3.3 L'évolution vers un comportement solide des suspensions concentrées	44
1.3.4 Modèles de transition solide-fluide dans les géomatériaux . . . . .	46
1.3.5 Conclusion . . . . .	47
<b>1.4 Méthode numérique adaptée aux écoulements de matériaux complexes</b> . . . . .	<b>48</b>
1.4.1 Principaux critères pour la modélisation d'un mouvement de terrain dans son intégralité . . . . .	48
1.4.2 Les méthodes numériques classiques et leur spécificités . . . . .	49
1.4.3 La méthode MEFPIIL . . . . .	54
1.4.4 Présentation du code Ellipsis . . . . .	58

---

Comme nous l'avons vu en introduction, les géomatériaux peuvent adopter un comportement très variable, pouvant être de type solide, comme observé par exemple pour les terrains impliqués dans le glissement de la Clapière, ou fluide, comme observé par exemple lors des coulées de Sarno et Quindici. Dans une première partie, le comportement élasto-plastique et la théorie de la rupture pour les géomatériaux solides sont rappelés, en se plaçant dans l'hypothèse de la continuité du milieu. Une deuxième partie aborde, toujours dans cette hypothèse, les modèles de comportement fluides adaptés à la description des suspensions concentrées. Dans un troisième temps, les transitions entre les comportements de type solide et fluide sont caractérisées. Enfin, différentes méthodes numériques sont passées en revue, afin de trouver la méthode la plus appropriée pour modéliser un géomatériau sous toutes ses formes, par exemple pour décrire un mouvement de terrain de son amorçage à son arrêt.

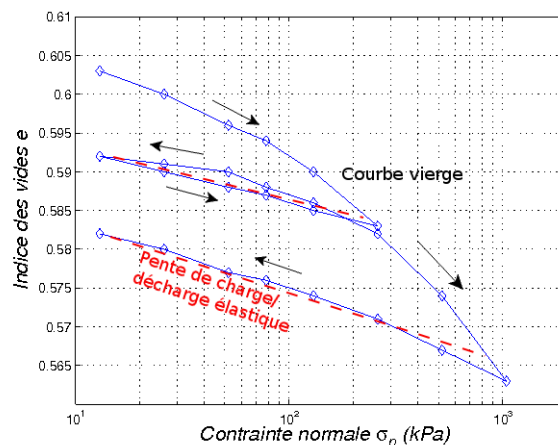
## 1.1 Comportement élasto-plastique et rupture dans les géomatériaux *in situ*

Dans leur état de stabilité (et pour un temps d'observation "humain"), les terrains naturels *in situ* sont considérés comme des solides, puisque ils n'ont -en général- pas tendance à s'écouler sous leur poids propre. Voyons comment se caractérise leur comportement.

### 1.1.1 Modèles rhéologiques élasto-plastiques

#### Mise en évidence expérimentale du comportement élasto-plastique d'un sable

FIGURE 1.1: Résultat d'un essai œdométrique sur sable sec (source personnelle)



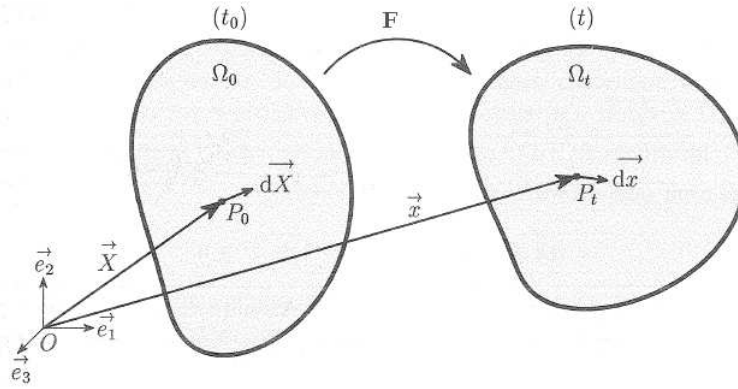
La figure 2.4 présente les résultats d'un essai œdométrique réalisé en laboratoire géotechnique sur un sable sec. Lors de la première décharge-recharge cette figure met en évidence que le comportement est réversible et donc que le sable est élastique sur ce trajet aller-retour. Par contre sur la courbe vierge de chargement, c'est-à-dire pour des valeurs de contrainte normale rencontrées pour la première fois, il y a beaucoup plus de variation d'indice des vides (donc de déformation) que pour les trajets élastiques, et de plus, une partie de la déformation est permanente. Le sable est donc un matériau élasto-plastique.

Il est important de mettre en évidence, dans cet essai simple, la notion de "courbe vierge" qui est un trajet de contrainte/déformation qui ne peut être parcouru qu'une fois. Le comportement d'un matériau plastique donné va donc être déterminé non seulement par le chargement appliqué mais aussi par son histoire de chargement.

### Écriture incrémentale des lois élasto-plastiques

D'après le principe de déterminisme, "The physical state of a body at a time  $t$  should depend only on its past history, i.e., on what happened to it at times  $\tau < t$ " (Noll, 1958). Autrement dit, et comme il vient d'être vu, les contraintes obtenues en un point donné dépendent non seulement de la sollicitation mais aussi de l'histoire des déformations. Mathématiquement ce principe s'exprime ainsi : Soit  $\mathbf{F}$  l'application linéaire tangente qui relie au temps  $\tau$  le vecteur  $d\mathbf{X}$  du milieu continu dans la configuration initiale  $\Omega_0$  et le vecteur  $d\mathbf{x}$  dans la configuration actuelle  $\Omega_t$  ( $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$ ) (voir figure 1.2).

FIGURE 1.2: Passage de la configuration initiale à la configuration actuelle



La contrainte au temps  $t$  s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}[\mathbf{F}(\tau)], \quad (1.1)$$

avec  $-\infty < \tau \leq t$  et  $\mathcal{F}$  une fonctionnelle. Si le comportement n'est pas élastique, alors  $\mathcal{F}$  ne peut pas être explicitée car son argument prend un nombre infini de valeur :  $\mathbf{F}(\tau)$  n'est ni plus ni moins que toutes les applications linéaires tangentes qui, depuis le début de la sollicitation, permettent de passer d'une configuration à l'autre à chaque incrément.

Il est donc très compliqué d'obtenir directement la valeur à  $t$  de la réponse  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ , puisque pour cela il faudrait remonter toute l'histoire du chemin de contrainte. D'où l'idée de garder en mémoire, à chaque pas de temps, ce qu'il s'est passé au pas de temps précédent. C'est sur ce principe qu'ont été développées les formes incrémentales des lois de comportement.

Sous forme incrémentale, le principe de déterminisme s'exprime ainsi : l'incrément de réponse d'un matériau est donnée uniquement par l'incrément de sollicitation pendant l'intervalle de temps  $dt$ , ce qui s'exprime, d'après Darve *et al.* (1987), :

$$\mathbf{F}_h(d\boldsymbol{\varepsilon}, d\boldsymbol{\sigma}, dt) = 0, \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{F}_h$ , comme son nom le traduit, est une fonction dépendante de l'histoire au travers de paramètres qui évoluent avec le chemin de chargement (les déformations plastiques peuvent par exemple faire partie de ces paramètres).

Une fois que les variables d'histoire ont été mises à jour au début d'un pas de chargement, elles sont supposées constantes pendant tout l'incrément, et la résolution sur cet incrément se fait de manière classique.

Si la composante visqueuse du comportement est négligée, l'équation 1.2 se traduit par :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}(d\boldsymbol{\sigma}), \quad (1.3)$$

avec  $\mathbf{G}$  une fonction tensorielle homogène de degré 1, non linéaire, et anisotrope si le matériau considéré est anisotrope. En considérant la notation suivant laquelle  $\mathbf{G}$  et  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  s'expriment comme des vecteurs à 6 composantes, l'identité d'Euler donne :

$$d\varepsilon_i = \frac{\partial G_i}{\partial (d\sigma_j)} \cdot d\sigma_j, \quad (i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket \quad (1.4)$$

Posons :

$$N_{ij}(\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial G_i}{\partial (d\sigma_j)}, \quad (i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket \quad (1.5)$$

Comme les  $6 \times 6$  fonctions  $N_{ij}$  sont homogènes de degré 0, alors :

$$N_{ij}(\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}) = N_{ij} \left( \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\|} \right), \quad (i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket \quad (1.6)$$

En définissant le vecteur  $\mathbf{d}$  comme  $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} / \|\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\|$ , nous obtenons enfin :

$$d\varepsilon_i = N_{ij}(\mathbf{d}) \cdot d\sigma_j, \quad (i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket \quad (1.7)$$

$N_{ij}$  dépend donc de la direction  $\mathbf{d}$  de l'incrément de contrainte  $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$ . Cette dépendance est primordiale car elle caractérise toute loi élasto-plastique. Dans certains cas, les lois élasto-plastiques peuvent être incrémentalement linéaires par morceaux : chaque faisceau directionnel où la loi est incrémentalement linéaire forme alors une zone tensorielle. Cependant dans le cas le plus général, à chaque faisceau ne correspond qu'une seule direction, ce qui génère une infinité de zones tensorielles. Dans ce cas, la loi est dite incrémentalement non linéaire.

*Remarque : Une loi classique élastique plastique possède deux zones tensorielles : une en charge plastique, l'autre en décharge élastique. Par ailleurs, à titre d'exemple, le sol impliqué dans l'essai œdométrique présenté à la figure 2.4 présente effectivement un comportement distinct en charge (où il plastifie) et en décharge (où il redevient élastique).*

### Exemple d'une loi élasto-plastique incrémentale : Plasol

La loi Plasol, bien adaptée aux géomatériaux, a été développée à l'Université de Liège pour être initialement implantée dans le code aux éléments finis Lagamine (Barnichon, 1998). Elle dépend de 13 paramètres indépendants qui doivent être entrés par l'utilisateur.

**La surface de charge** La loi se base sur une surface de charge soit de type Drücker-Prager (Drücker et Prager, 1952), soit de type Van Eekelen (VanEekelen, 1980). La surface limite de Drücker-Prager ayant une trace circulaire dans le plan déviatoire (figure 1.3), la dépendance du critère à la direction dans ce plan n'est pas prise en compte. La surface limite de Van Eekelen, plus proche de la surface limite de Mohr-Coulomb mais sans points singuliers (figure 1.3), peut donc être considérée plus représentative des sols. C'est donc cette surface de charge qui a été choisie dans nos travaux.

La surface de charge est fonction de 4 paramètres indépendants :  $\phi_e$  et  $\phi_c$  les angles de frottements en extension et en compression,  $n$  un paramètre contrôlant la convexité de la surface, et  $c$  la cohésion. Le choix du rapport entre  $\phi_c$  et  $\phi_e$ , comme le choix de  $n$ , contrôle la non-circularité de la trace du critère dans le plan déviatoire. La valeur de  $n$  de -0.229 donne la convexité la plus vraisemblable (VanEekelen, 1980; Barnichon, 1998), ce qui fait qu'en pratique cette valeur est toujours retenue.

Définissons tout d'abord les 3 invariants du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  (c'est-à-dire 3 scalaires indépendants des changements de base du tenseur) :

$$J_{1\sigma} = tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad J_{2\sigma} = \sqrt{tr(\mathbf{s}^2)} \quad J_{3\sigma} = \sqrt[3]{tr(\mathbf{s}^3)}, \quad (1.8)$$

avec  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - 1/3.J_{1\sigma} \cdot \mathbf{1}$  étant le tenseur unité, et  $tr(\mathbf{a}) = a_{ii}$ . Le troisième invariant est parfois considéré comme étant l'angle de Lode  $\theta$ , plutôt que  $J_{3\sigma}$ , définit de la façon suivante :

$$\cos 3\theta = \sqrt{6} \left( \frac{J_{3\sigma}}{J_{2\sigma}^3} \right)^3 \quad (1.9)$$

A partir de ces définitions, la surface de charge de Van Eekelen s'exprime de la manière suivante :

$$f = J_{2\sigma} + m \cdot \left( J_{1\sigma} - \frac{3c}{\tan\phi_c} \right), \quad (1.10)$$

où  $m$  est un coefficient défini par :

$$m = a(1 + b \sin(3\theta))^n \quad (1.11)$$

avec :

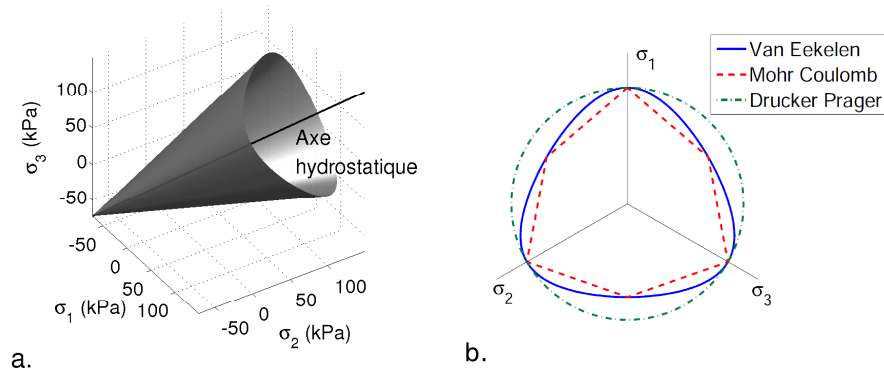
$$b = \frac{\left(\frac{r_c}{r_e}\right)^{1/n} - 1}{\left(\frac{r_c}{r_e}\right)^{1/n} + 1} \quad \text{et} \quad a = \frac{r_c}{(1+b)^n} \quad (1.12)$$

Les rayons réduits en compression et en extension  $r_c$  et  $r_e$ , sont définis par  $J_{2\sigma}/J_{1\sigma}$  pour l'essai triaxial, et leur expression déduite du cercle de Mohr donne :

$$r_c = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{2\sin\phi_c}{3 - \sin\phi_c} \right), \quad r_e = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{2\sin\phi_e}{3 + \sin\phi_e} \right) \quad (1.13)$$

L'annulation de  $f$  (équation 1.10) définit dans le repère des contraintes principales une surface pseudo-conique à rayon non constant (fig 1.3).

FIGURE 1.3: Représentation de la surface de charge de Van Eekelen dans l'espace des contraintes principales (a), comparaison des surfaces limites de Van Eekelen, Mohr-Coulomb et Drucker-Prager dans le plan déviatoire (b), pour  $\phi_e = \phi_c = 19^\circ$  et  $c = 25\text{kPa}$



**L'écroissage** La loi Plasol permet de décrire un écroissage de la surface de charge, définissant ainsi un domaine de plasticité compris, dans l'espace des contraintes principales, entre la surface de limite élastique et la surface du critère de rupture plastique. Les paramètres  $c$ ,  $\phi_c$  et  $\phi_e$  sont donc définis d'une part pour la limite élastique (ils sont indexés dans toute la suite avec '0'), d'autre part pour le critère de plasticité (indexés avec 'f'). Leur variation

depuis une valeur originelle (à l'entrée en plasticité) à une valeur limite (à la rupture) est déterminée par les paramètres d'érouissage  $B_p$  et  $B_c$  donnés par l'utilisateur (équation 1.15), et par la déformation plastique équivalente  $\varepsilon_{eq}^p$ . Celle-ci s'exprime :

$$\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p}, \quad (1.14)$$

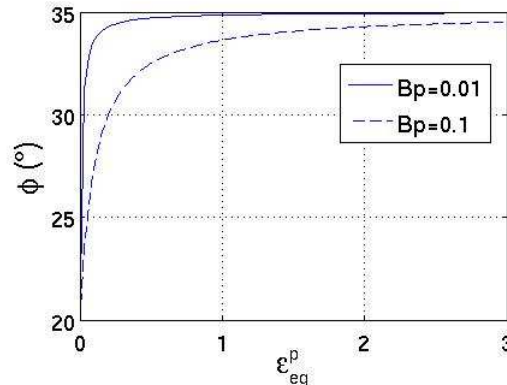
avec  $e^p = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{3} \mathbf{1}$  le tenseur déviatoire des déformations plastiques.

$\varepsilon_{eq}^p$  représente donc, à un facteur près, le second invariant du tenseur des déformations plastiques.

$$\begin{aligned} \phi_c &= \phi_{c0} + \frac{(\phi_{cf} - \phi_{c0}) \varepsilon_{eq}^p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \\ \phi_e &= \phi_{e0} + \frac{(\phi_{ef} - \phi_{e0}) \varepsilon_{eq}^p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \\ c &= c_0 + \frac{(c_f - c_0) \varepsilon_{eq}^p}{B_c + \varepsilon_{eq}^p} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Concrètement,  $B_c$  et  $B_p$  correspondent aux valeurs de déformations plastiques équivalentes pour lesquelles la moitié de l'érouissage entre  $c_0$  et  $c_f$  et entre  $\phi_0$  et  $\phi_f$  est atteint (fig 1.4).

FIGURE 1.4: Dépendance de la loi d'érouissage de  $\phi$  au paramètre  $B_p$ . ( $\phi=20$  à  $35^\circ$ )



D'après la définition de l'érouissage donnée à l'équation 1.15, celui-ci est isotrope puisque l'évolution des paramètres plastiques ne dépend pas de la direction. De plus, bien qu'il soit possible en théorie de modéliser un érouissage négatif (radoucissement) en choisissant des valeurs finales de  $c$  et  $\phi$  moins élevées que les valeurs initiales, nous avons considéré dans ces travaux un érouissage toujours positif (durcissant), plus classique avec la loi Plasol. Ainsi, il est impossible de décrire le comportement d'un échantillon qui présenterait un pic dans sa courbe contrainte-déformation, traduisant une localisation des déformations dans les zones où les paramètres plastiques sont amoindris (ceci correspond à une rupture localisée).

**L'écoulement plastique** L'écoulement plastique décrit par Plasol a la particularité de pouvoir être non associé, c'est-à-dire que les déformations plastiques n'ont pas forcément une direction perpendiculaire à la surface de charge, mais cette direction est définie par la perpendiculaire à une autre surface : la surface d'écoulement. Cette surface de l'espace des contraintes principales est définie par le critère d'écoulement  $g = 0$ .  $g$  a la même expression que le critère de plasticité  $f$  :



$$g = J_{2\sigma} + m' \cdot \left( J_{1\sigma} - \frac{3c}{\tan\phi_c} \right), \quad (1.16)$$

où  $m'$  a la même expression que  $m$  dans l'équation 1.10, à ceci près que les angles  $\phi_c$  et  $\phi_e$  sont remplacés par d'autres angles,  $\psi_c$  et  $\psi_e$ , appelés respectivement angles de dilatance en compression et extension. De ces angles, l'utilisateur de Plasol n'a besoin de donner que la valeur finale (bien que les angles de dilatance évoluent avec l'écroutissage comme les autres paramètres plastiques) car d'après la loi de Taylor (1948), la différence entre l'angle de dilatance et l'angle de frottement est toujours constante.

La résolution en contraintes et déformations plastiques pour un incrément de chargement en déformation se fait grâce à un algorithme implicite de type Backward Euler (voir partie 2.1.2).

La notion de critère de rupture plastique est ainsi liée à la notion de stabilité des matériaux élasto-plastiques. Voyons à présent les différentes analyses possibles de cette stabilité.

### 1.1.2 Analyse de la stabilité matérielle

Un système en condition de stabilité est défini de manière relativement universelle comme, d'après Lyapunov (1907) : un système où "[...] *toute sollicitation bornée produit une réponse bornée.*" Parmi les instabilités peuvent être distinguées les instabilités géométriques, qui sont dues à des conditions aux limites particulières (comme le cas du flambement pour une forme de matériau particulièrement élancée) et les instabilités matériaux, qui sont dues aux caractéristiques intrinsèques du matériau. Au sein des instabilités matériaux il existe également 2 types d'instabilités : celles de type divergence, dans lesquelles les déformations augmentent continuellement jusqu'à des valeurs très élevées, et les instabilités par flottement qui sont caractérisées par des cycles de déformation d'amplitude de plus en plus importante.

Dans le cadre des mouvements de terrain, nous pouvons très raisonnablement faire l'hypothèse d'instabilités de type divergence.

#### Analyse par la théorie de la plasticité

La théorie de la plasticité s'est beaucoup développée pendant la première moitié du XXe siècle, avec une application en grande partie aux matériaux métalliques. De grands noms ont laissé leur marque dans la théorie de la plasticité. Parmi eux, nous pouvons citer Tresca (1864), Prandtl (1924), VonMises (1928) et Drücker et Prager (1952) dont les travaux ont porté sur la définition d'une règle d'écoulement par rapport au critère de chargement (règle de normalité), la décomposition des déformations en part élastique et en part plastique, la notion d'écroutissage du critère de rupture. Plus tard, les travaux de Hill (1950) ont balisé ces approches d'un point de vue théorique, avec la formalisation de ces concepts par l'algèbre linéaire.

À partir de ces nombreux travaux, la théorie de la plasticité a été formalisée de la manière suivante :

Soit  $d\sigma$  et  $d\epsilon$  les vecteurs incrément de contrainte et incrément de déformation (exprimés avec la notation ingénieur, sous forme de vecteur à 6 composantes) reliés entre eux par la matrice constitutive tangente  $\mathbf{M}$  tels que :  $d\sigma = \mathbf{M}d\epsilon$  (relation inverse de celle de l'équation 1.7).

La traduction de la définition de Lyapunov, donnée en introduction de cette partie, est la suivante : s'il existe un vecteur non nul  $d\epsilon$  associé à un incrément de contrainte  $d\sigma$  nul, alors il y a rupture. En d'autre terme : "...*the deformation process continues 'on one's own'*", d'après Darve *et al.* (2004).

Cette condition est strictement équivalente à :

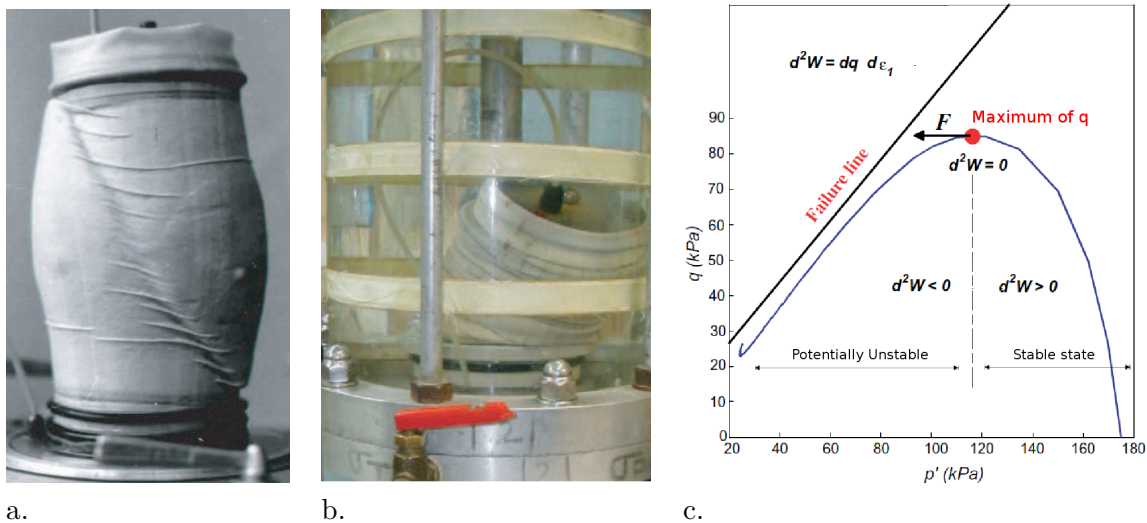
$$\det(\mathbf{M}) = 0 \quad (1.17)$$

Cette égalité est obtenue lorsque l'état de contrainte est situé sur le critère de rupture plastique puisque, dans ce cas, les déformations ne peuvent atteindre de valeurs qui équilibrent cet état de contrainte. Ce type de rupture est dit 'classique'.

Le critère de l'équation 1.17 est toujours vérifié à la rupture pour les matériaux qui, comme les métaux, sont associés (Rice, 1971), c'est-à-dire que la surface d'écoulement est confondue avec la surface de charge. De plus, la matrice constitutive tangente est symétrique dans ce cas.

Cependant, pour les matériaux non-associés, et en particulier dans le cas des sols, la rupture peut avoir lieu alors que le critère de rupture plastique n'est pas atteint (ruptures dites 'non-classiques'). De telles ruptures peuvent se manifester dans le cas de ruptures localisées (exemple à la figure 1.5a), mais elles sont surtout typiques pour le chargement non drainé d'un sable lâche, par exemple lors des ruptures diffuses de type liquéfaction (voir figure 1.5b). Au cours d'un essai triaxial non drainé piloté en contrainte, l'échantillon s'effondre de manière très brusque sur lui-même (fig 1.5b) sans que le critère de rupture plastique soit rencontré (fig 1.5c).

FIGURE 1.5: Rupture localisée au cours d'un essai triaxial drainé (Desrues et Chambon, 2002)(a), diffuse au cours d'un essai triaxial non drainé (Servant et al., 2005)(b). Etat de contrainte à la rupture pour le deuxième essai (Darve et al., 2004)(c).



Pour le cas des géomatériaux, le critère de rupture plastique n'est donc pas suffisant pour détecter tous les modes de rupture. Or, les conditions non-drainées ne sont pas des conditions extraordinaires dans un terrain naturel. Il est donc nécessaire de s'intéresser à d'autres théories de la rupture.

### Analyse par le critère de localisation de Rice (Rudnicki et Rice, 1975)

Parmi les ruptures dont le mécanisme ne satisfait pas la théorie de la plasticité, certaines présentent un mode dit localisé : les déformations plastiques se concentrent dans une bande étroite de cisaillement (cf. fig 1.5a.). L'apparition d'un tel mécanisme de rupture répond à 2 conditions.

La première est une condition cinématique, qui traduit le fait que sur la frontière de la

bande de cisaillement il y a une discontinuité des déformations. D'après Thomas (1961) ceci s'exprime de la manière suivante :

Soit  $dF^0$  et  $dF^1$  les tenseurs d'incrément de déformation respectivement à l'extérieur et l'intérieur de la bande de cisaillement (cf. figure 1.6). On peut écrire leur relation :

$$\underline{dF}^1 = \underline{dF}^0 + \underline{g} \otimes \underline{n}, \quad (1.18)$$

avec  $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$  un vecteur normal à la bande et  $\underline{g} \in \mathbb{R}^3$  un vecteur quelconque traduisant l'intensité de la déformation dans la bande.

La deuxième condition exprime la continuité des contraintes au travers de la surface de la bande cisailée :

$$\underline{d\sigma}^1 \underline{n} = \underline{d\sigma}^0 \underline{n}, \quad (1.19)$$

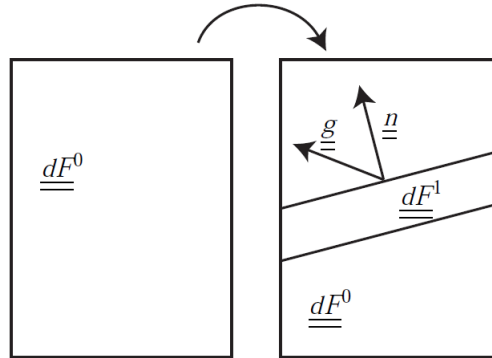
où  $\underline{d\sigma}^0$  et  $\underline{d\sigma}^1$  sont les incréments de contrainte à l'extérieur et l'intérieur de la bande de cisaillement. En écrivant la loi de comportement à l'intérieur de la bande :

$$d\sigma_{ij}^1 = M_{ijkl} dF_{kl}^1, \quad (1.20)$$

et en combinant les équations 1.18 et 1.19, nous obtenons :

$$\exists \underline{n} \neq \underline{0}, \exists \underline{g} \neq \underline{0} \quad \text{tels que :} \quad (M_{ijkl} n_k n_l) g_j = 0 \quad (1.21)$$

FIGURE 1.6: Condition de discontinuité des déformations dans une bande de cisaillement



Ainsi, d'après le critère de localisation de Rice, une bande de cisaillement est créée si et seulement si :

$$\det(\underline{L}) = \det(n_i M_{ijkl} n_l) = 0 \quad (1.22)$$

$\underline{L}$  est appelé 'tenseur acoustique'. L'expérience montre que le critère permet effectivement de déterminer des ruptures non décrites par la théorie de la plasticité.

Cependant, certains modes de rupture restent toujours inexpliqués par l'une ou par l'autre de ces théories, notamment les ruptures diffuses. Voyons à présent une autre théorie de détermination de la rupture, permettant de détecter ce genre d'instabilités.

### Analyse par le critère du travail du second ordre

**Définition du critère du travail du second ordre** En 1958 Hill a établi un critère suffisant de stabilité pour les solides (Hill, 1958). Dans l'hypothèse des petites déformations et en négligeant les effets géométriques, ce critère s'écrit :

$$\int_V d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV > 0 \quad \forall \|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\| \neq 0 \quad (1.23)$$

où :

- $V$  est le volume occupé par le solide à l'instant  $t$ ,
- $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}$  sont les incréments de contrainte et de déformation. Le produit  $d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}$  correspond à un scalaire, défini au niveau du point matériel, qui est nommé 'travail du second ordre' et est noté  $d^2W$ .

Si le matériau considéré est homogène, ce critère suffisant de stabilité peut s'écrire au niveau du point matériel et il est alors nommé 'critère du travail du second ordre'. Il s'exprime par :

$$d^2W = d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} > 0 \quad \forall \|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\| \neq 0 \quad (1.24)$$

L'expression normalisée de ce critère s'écrit :

$$d^2W_n = \frac{d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\|\|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\|} > 0 \quad \forall \|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\| \neq 0 \quad (1.25)$$

D'après cette dernière relation, si les contraintes et les déformations sont exprimées sous forme vectorielles (notation ingénieur), le travail du second ordre normalisé correspond à un produit scalaire. Et c'est bien cette notion de direction relative entre les tenseurs de contrainte et de déformation qui définit s'il y a rupture ou non. D'après Darve *et al.* (2004), si la condition n'est pas vérifiée, cela signifie que le système est toujours soumis à des déformations, alors qu'aucune énergie ne lui est plus transmise (il s'agit de la définition de la rupture selon Lyapunov). Plus précisément, lorsque le travail du second ordre prend des valeurs négatives dans au moins une direction de chargement, une faible perturbation dans cette direction peut provoquer une explosion de l'énergie cinétique (Nicot *et al.*, 2011b) et peut mener à une transition d'un régime quasi statique à un régime dynamique (Nicot *et al.*, 2011a).

Le travail du second ordre étant susceptible de s'annuler sur un certain domaine de l'état de contrainte-déformation d'un point matériel, voyons quelles sont les bornes de ce domaine de bifurcation.

**Définition du domaine de bifurcation** Le domaine de bifurcation est un domaine de l'espace des contraintes principales où le point matériel est susceptible, selon la direction de chargement imposée, soit de rester stable soit d'atteindre la rupture (il y a donc perte d'unicité de la réponse du matériau). Ce domaine est inclus dans le domaine d'écrouissage, puisqu'au-delà du critère de rupture plastique l'échantillon est nécessairement en rupture et en deçà de la limite élastique, l'échantillon est nécessairement stable. La borne 'supérieure' du domaine de bifurcation correspond donc naturellement au critère de rupture plastique  $\det M = 0$ . Il y a plusieurs manières de mettre en évidence la borne 'inférieure' de ce domaine, notamment en considérant des combinaisons linéaires des contraintes et déformations, appelées 'variables conjuguées' (voir démonstration présentée par Prunier (2008)). Nous avons choisi une manière qui nous semble plus simple à exposer.

L'annulation du travail du second ordre local  ${}^t\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$  peut s'écrire :

$${}^t\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (1.26)$$

La quantité  ${}^t\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}$  est la forme quadratique de  $\mathbf{M}$ . Comme la forme quadratique d'une matrice antisymétrique est nulle, nous obtenons que l'équation 1.26 est équivalente à :

$${}^t\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_s\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad (1.27)$$

$\mathbf{M}_s$  étant la partie symétrique de  $\mathbf{M}$ .

A présent plaçons nous dans le cas simplifié de la dimension 2 pour comprendre la relation entre la limite 'inférieure' du domaine de bifurcation (c'est-à-dire la première annulation du travail du second ordre) et les caractéristiques intrinsèques de  $\mathbf{M}_s$ . Soit :

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

La forme quadratique  $Q$  de  $\mathbf{M}_s$  est pour tout vecteur  $u = (x, y), x, y \in \mathbb{R}^2$  :

$$Q = {}^t\mathbf{u}\mathbf{M}_s\mathbf{u} = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (1.29)$$

Si, pour la première fois lors du chargement, le travail du second ordre s'annule pour au moins une direction de chargement ( ${}^t\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ ), c'est que l'équation  $Q = 0$  admet au moins une solution. Ceci implique, si  $y \neq 0$  :

$$a \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2b \left(\frac{x}{y}\right) + c = 0 \quad (1.30)$$

Le calcul du discriminant nous donne  $\Delta = 4b^2 - 4ac$ , et nous remarquons qu'il est égal à  $-4(\det\mathbf{M}_s)$ .

Faisons l'hypothèse suivante :

(H1) :  $\det(\mathbf{M}_s)$  et  $\det(\mathbf{M})$  sont strictement positifs au début du chargement -à l'état de stabilité- et varient de manière monotone.

D'après H1, le système est initialement stable (pas de solution à l'équation 1.30), et la première rupture peut être potentiellement rencontrée dès que le déterminant est négatif ou nul, c'est-à-dire dès que  $\det(\mathbf{M}_s) = 0$ .

En admettant que ce raisonnement peut être généralisé pour un tenseur  $\mathbf{M}$   $6 \times 6$ , le critère  $\det(\mathbf{M}_s) = 0$  forme donc la borne 'inférieure' du domaine de bifurcation qui est donc délimité par les critères  $\det(\mathbf{M}_s) = 0$  et  $\det(\mathbf{M}) = 0$ . Afin de visualiser ces deux critères, le résultat d'une recherche directionnelle des incréments de chargement provoquant la rupture est présentée à la figure 1.7 pour un essai triaxial drainé (la loi Plasol est considérée). La représentation de cônes directionnels de plus en plus ouverts sur chacun des trois trajets de chargement correspond à des incréments qui mènent à la rupture dans de plus en plus de directions. La première ouverture de ces cônes au cours du chargement correspond à la condition  $\det\mathbf{M}_s = 0$ .

**Inclusion des autres critères dans le critère du travail du second ordre** Interrogeons-nous à présent sur la relation entre le critère du travail du second ordre et les critères précédemment présentés.

D'après la théorie de la plasticité à l'état limite :

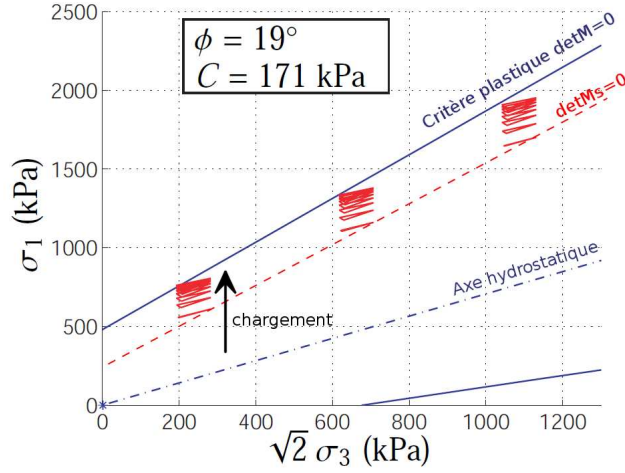
$$RUPTURE \iff \det\mathbf{M} = 0 \quad (1.31)$$

Or, si  $\mathbf{M}_s$  est la partie symétrique de  $\mathbf{M}$  ( $\mathbf{M}_s = 1/2({}^t\mathbf{M} + \mathbf{M})$ ), alors un des résultats de l'algèbre linéaire nous donne :

$$\det(\mathbf{M}_s) < \det(\mathbf{M}) \quad (1.32)$$

De là, si l'hypothèse H1 énoncée plus haut est considérée, nous obtenons nécessairement que si le déterminant de  $\mathbf{M}$  s'annule alors  $\det(\mathbf{M}_s) < 0$ , autrement dit le domaine de bifurcation, défini par la théorie du travail du second ordre, est atteint.

FIGURE 1.7: Détermination du domaine de bifurcation par une recherche directionnelle en trois chargements (d'après Prunier (2008))



Le critère de rupture du travail du second ordre inclut donc le critère de rupture plastique.

Par ailleurs, la théorie de la localisation stipule qu'il y a création d'une bande de cisaillement si la condition 1.22 est remplie. Cette condition est équivalente à la suivante :

$$\exists \mathbf{g} \neq 0 \quad \text{tel que :} \quad (n_i M_{ijkl} n_l) g_k = 0 \quad (1.33)$$

Ce qui implique (sans équivalence) :

$$\exists \mathbf{g} \neq 0 \quad \text{tel que :} \quad g_j (n_i M_{ijkl} n_l) g_k = 0 \quad (1.34)$$

Par ailleurs, en posant :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{g} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}) \quad (1.35)$$

( $d\boldsymbol{\varepsilon}$  est bien une matrice symétrique non nulle), l'expression du travail du second ordre devient :

$$d\varepsilon_{ij} M_{ijkl} d\varepsilon_{kl} = \frac{1}{4} (n_i g_j + n_j g_i) M_{ijkl} (n_k g_l + n_l g_k) \quad (1.36)$$

ce qui équivaut, d'après les symétries de la matrice constitutive, à :

$$d\varepsilon_{ij} M_{ijkl} d\varepsilon_{kl} = n_i g_j M_{ijkl} n_l g_k = g_j n_i M_{ijkl} n_l g_k \quad (1.37)$$

On peut donc écrire le résultat suivant :

$$\det \mathbf{L} = 0 \quad \implies \quad d\varepsilon_{ij} M_{ijkl} d\varepsilon_{kl} = d\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = 0 \quad (1.38)$$

Le critère du travail du second ordre inclut donc également le critère de localisation.

In fine, le très gros avantage de ce critère est que non seulement il est capable de décrire des instabilités qui ne peuvent pas être mises en évidence par les critères de ruptures classiques, mais qu'il est assez général pour englober ces autres critères.

Le critère du travail du second ordre a été appliqué avec succès à l'analyse de stabilité des géomatériaux (Darve et Laouafa, 2000; Laouafa et Darve, 2002), avec notamment l'exemple typique de l'essai triaxial non drainé pour lequel  $d^2 W_n$  change de signe à l'intérieur du domaine plastique, au pic de la contrainte déviatoire  $q = \sigma_{11} - \sigma_{33}$  (fig 1.5).

### 1.1.3 Conclusion

Ainsi, les lois de comportement élasto-plastiques sont adaptées à la compréhension et la modélisation du comportement des géomatériaux *in situ*. En particulier, la loi Plasol a été retenue puisque elle décrit les caractéristiques principales des géomatériaux et qu'elle est en même temps applicable à une large gamme de sols (granulaires, argileux, etc.). Un critère très intéressant quand à la détermination de cette rupture est le critère du travail du second ordre, puisqu'avec une seule (et simple) expression il permet de détecter tous les modes de ruptures (de type divergence) mis en évidence jusqu'au jour d'aujourd'hui.

Ces théories mécaniques permettent donc de décrire, dans le contexte des mouvements de terrain, les phénomènes d'amorçage par rupture dans les sols. Dans certains cas, la phase de propagation des mouvements gravitaires peut être également décrite par la mécanique des solides puisque, lors d'évènements comme celui de la Clapière, le déplacement des terrains est du à un glissement entre blocs rocheux. Cependant, certains mouvements de terrain se propagent sous forme de coulées fluides (voir le cas de Sarno et Quindici présenté en introduction générale). Intéressons-nous à présent à cette forme des géomatériaux, de type suspension granulaire, et à sa description par la rhéologie des fluides.

## 1.2 Comportement visqueux des suspensions granulaires de type boue

De nombreux matériaux, aussi bien industriels (peintures, encres, béton frais, produits alimentaires, cosmétiques, etc...) que naturels (neige, boue, magma, etc...), font partie des suspensions granulaires. Leur étude constitue donc un enjeu scientifique important.

Dans le contexte des mouvements de terrain, analysons tout d'abord -brièvement- la faisabilité de l'étude des coulées gravitaires à leur échelle globale.

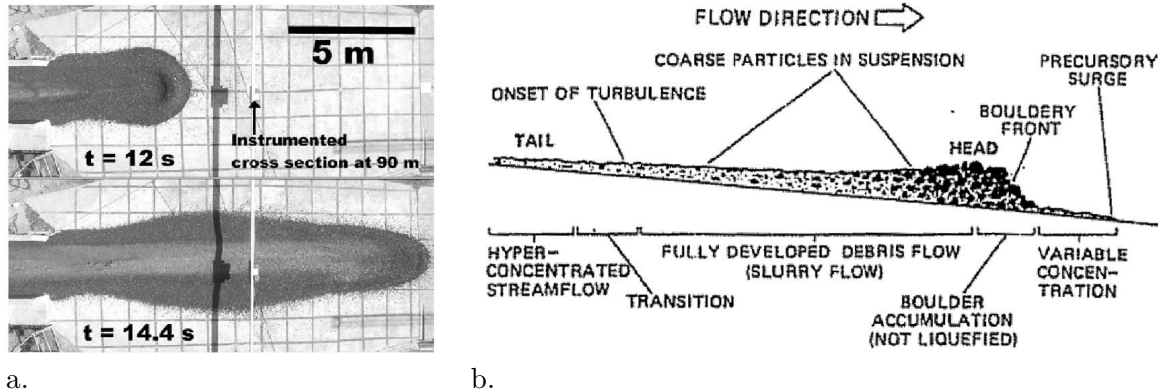
### 1.2.1 Difficultés de l'étude rhéologique des mouvements de terrain de type écoulement

Concernant les mouvements de terrain de type coulée, la première difficulté de leur étude rhéologique réside dans leur hétérogénéité dans la masse. En effet, du fait du phénomène de ségrégation, les éléments les plus volumineux sont concentrés sur les frontières de l'écoulement, en front de coulée et latéralement. Lorsqu'il y a une forte dispersion granulométrique (comme dans les coulées de débris), ce phénomène est très visible (voir expérimentations de Iverson (2003) et schéma de Pierson (1986) à la figure 1.8).

Dans le cadre de nos travaux, nous considérons, en première approche, que les matériaux d'une coulée gravitaire peuvent être approximés par un mélange homogène (bien que de granulométrie polydisperse). Cette hypothèse n'est cependant pas négligeable puisque dans le cas de coulées réelles, le front chargé en matériau grossier a tendance à ralentir tout l'écoulement.

La deuxième difficulté est la grande taille de certains éléments solides. Une coulée de boue naturelle, par exemple, contient une part importante de particules fines, mais peut transporter une proportion non négligeable de graves, et même des blocs décimétriques à métriques. La taille des éléments devant être négligeable devant les dimensions d'un rhéomètre afin que le volume étudié puisse être considéré représentatif de tout le matériau, il devient impensable d'étudier ces matériaux dans des rhéomètres classiques (de dimension décimétrique). Coussot et Piau (1993) ont défini les dimensions minimales de différents rhéomètres par rapport à la taille des éléments. Des appareils d'expérimentation bien particuliers ont donc

FIGURE 1.8: Mise en évidence de la ségrégation Iverson (2003) dans un canal à écoulement 2D (matériaux argileux en couleur claire, graveleux en couleur sombre)(a). Schéma de l'hétérogénéité à l'échelle d'une coulée de débris, d'après Pierson (1986)(b)



parfois été conçus pour l'étude spécifique de la rhéologie des écoulements gravitaires en condition naturelle. Ils sont alors de très grandes dimensions comme le tapis roulant de Hubl et Steinwendtner (2000) ou de Chambon *et al.* (2009), de longueur plurimétrique et de largeur décimétrique.

En général la rhéologie des écoulements gravitaires est donc étudiée en se concentrant sur la phase la plus fine des matériaux en mouvements. Une autre stratégie est d'étudier des matériaux simplifiés, comme des mélanges artificiels eau+bentonite ou eau+kaolinite.

Pour ces raisons, la rhéologie des mouvements de terrain de type écoulement est relativement peu étudiée. Nous nous concentrons dans la suite de cette section à l'état de l'art sur la rhéologie des suspensions granulaires de type boue.

### 1.2.2 Caractères principaux de la rhéologie des suspensions concentrées

#### Une viscosité à seuil

La principale caractéristique des suspensions concentrées est la présence d'un seuil de contrainte, en deçà duquel les vitesses de déformations sont nulles, et le matériau acquiert alors un comportement de type solide (il ne "tend pas à s'écouler"). Leur comportement n'est donc pas Newtonien (viscosité linéaire sans seuil).

Ce caractère apparaît de manière qualitative au regard des masses immobilisées issues des mouvements de terrain de type coulées. En effet, si ces coulées étaient des fluides Newtoniens, elles s'arrêteraient nécessairement sur des zones horizontales avec une épaisseur qui tendrait à être nulle. Or, non seulement les matériaux d'une coulée se stabilisent avec une épaisseur non nulle, voire conséquente, mais en plus ces coulées s'immobilisent souvent sur des surfaces en pente (voir figure 1.9).

De manière quantitative, plusieurs travaux ont mis en évidence ce seuil de contrainte grâce à des expériences au rhéomètre (figure 1.10). En conséquence, un modèle rhéologique basique qui représente relativement bien les suspensions concentrées est le modèle de Bingham. Ce dernier dépend de deux paramètres, la viscosité  $\eta$  (en Pa.s) et le seuil de contrainte  $s_0$  (en Pa). Son expression 1D est la suivante :

$$\tau = s_0 + \eta \dot{\gamma}, \quad (1.39)$$

avec  $\tau$  la contrainte de cisaillement et  $\dot{\gamma}$  le gradient de vitesse.



FIGURE 1.9: Morphologie d'une coulée de débris à l'arrêt sur des pentes non nulles (coulée de débris de Super-Sauze, France, d'après Malet et al. (2004))



Il a été largement utilisé pour représenter, à plus grande échelle les mouvements de terrain de type coulées (Johnson, 1970; Jeyapalan *et al.*, 1983; Pastor *et al.*, 2008; Soga, 2011; Blasio *et al.*, 2004).

Certains modèles, plus élaborés, prennent en compte la relation entre les paramètres visqueux et la fraction volumique solide  $C_v$  des coulées (cette influence de  $C_v$  est visible sur les courbes de la figure 1.10.a et b.). Il en résulte des modèles où  $\eta$  et  $s_0$  sont fonctions de  $C_v$ , comme dans le modèle de Fei (1981) où :

$$\eta = \eta_0 \left(1 - \frac{C_v}{C_m}\right) - 2.5, \quad s_0 = \exp \left[ 8.45 \left( \frac{C_v - 1.26(C_m)^{3.2}}{C_m} \right) + 1.5 \right], \quad (1.40)$$

avec  $C_m$  un coefficient dépendant de la dispersion granulaire et de l'épaisseur d'eau liée autour des particules et  $\eta_0$  la viscosité de l'eau.

Comme  $\eta$  et  $s_0$  dépendent également de la nature de la fraction solide (matériau fin, sableux ou plus grossier), ils présentent donc une grande variabilité et il n'est pas possible d'en donner des valeurs précises. Cependant, d'après plusieurs études portant sur l'analyse de coulées gravitaires à l'aide du modèle de Bingham (Jeyapalan *et al.*, 1983; Pastor *et al.*, 2008; Soga, 2011; Blasio *et al.*, 2004) nous avons pu relever des valeurs de viscosité comprises entre 30 et 1000 Pa.s et des seuils de contrainte entre 0,1 et 12 kPa.

### Une viscosité non linéaire

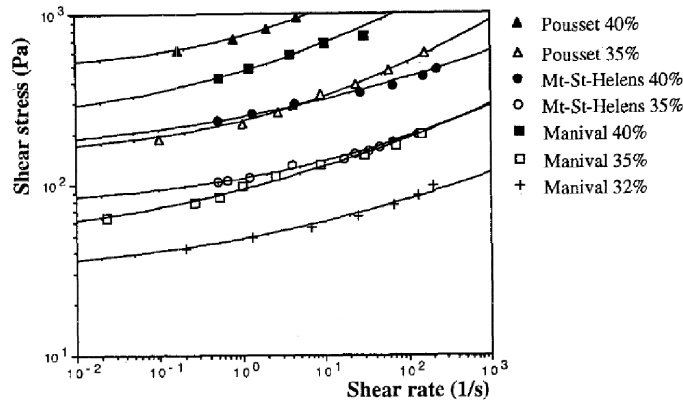
La deuxième caractéristique des suspensions concentrées (et donc des mouvements de terrain de type coulée) est la non-linéarité de la viscosité. Les figures 1.10a et b mettent en évidence l'augmentation de la viscosité (augmentation de la pente des courbes) avec le taux de déformation : les suspensions granulaires sont dites 'rhéo-épaississantes'. En effet, à faible vitesse de sollicitation les grains sont libres dans le fluide, alors qu'à vitesse élevée ils entrent en contacts les uns avec les autres.

Le modèle de comportement qui représente au mieux cette caractéristique des suspensions concentrées est celui d'Herschel Bulkley. La relation constitutive est la suivante :

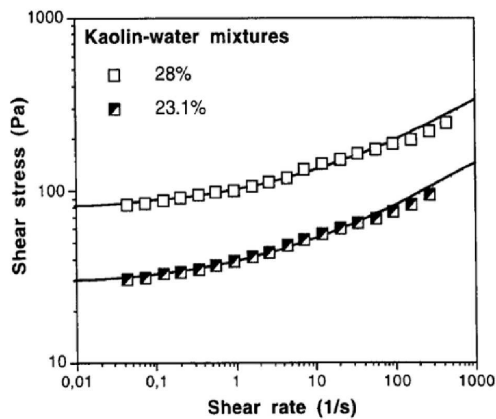
$$\tau = s_0 + \eta \dot{\gamma}^n, \quad (1.41)$$

où le coefficient  $n$  conditionne la concavité de la courbe rhéologique. Pour  $n < 1$ , le matériau est rhéo-fluidifiant et pour  $n > 1$  le matériau est rhéo-épaississant.

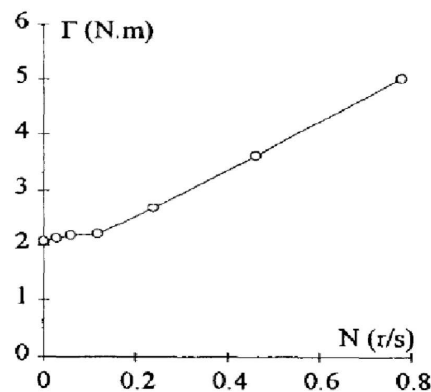
FIGURE 1.10: Mise en évidence de la viscosité à seuil : dans les fines ( $<100 \mu\text{m}$ ) de coulées de débris réelles à différentes fractions solides (d'après Coussot et Piau (1994)) (a), dans un mélange artificiel kaolinite+eau à différentes fractions solides (d'après Coussot et al. (1996))(b), dans un béton haute performance (d'après Hu et de Larrard (1996))



a.



b.



c.

## La thixotropie

Enfin, la réponse d'une suspension granulaire évolue également même pour un chargement constant. Ce caractère, nommé thixotropie, traduit le mécanisme de structuration du matériau au repos par création de contacts granulaires (ou 'aging' en anglais) et de déstructuration de ces réseaux de contacts sous cisaillement (ou 'rejuvenation').

La thixotropie d'un matériau est donc une dépendance du comportement à l'histoire du matériau. Nous reviendrons sur cet aspect dans la section 1.3.

En définitive, même si le modèle d'Hershel-Bulkley est utilisé pour décrire les coulées de débris (Malet *et al.*, 2004), dans l'ensemble, le modèle de Bingham est beaucoup plus répandu pour décrire ces phénomènes, et le seuil de contrainte constitue ainsi la caractéristique majeure des suspensions concentrées. Voyons à présent la diversité des seuils qui ont pu être considérés.

### 1.2.3 Diversité des seuils d'arrêt considérés

Plusieurs théories ont été élaborées pour capter au mieux cette frontière fluide-solide.

- La définition du seuil classique est celle de la loi de Bingham. Dans la formulation 1D le seuil  $s_0$  est un scalaire. L'expression tridimensionnelle suppose -pour l'expression classique des contraintes en fonction des déformations- une direction du seuil donnée par celle du tenseur du taux de déformation. L'expression classiquement utilisée est la suivante (Duvaut et Lions, 1972; Balmforth et Craster, 1999) :

$$\tau_{ij} = \eta \dot{\gamma}_{ij} + s_0 \left( \frac{\dot{\gamma}_{ij}}{\|\dot{\gamma}\|} \right) \quad (1.42)$$

- Certaines approches estiment qu'il est plus réaliste de considérer une surface d'arrêt qui soit cohérente avec la mécanique des sols, puisqu'une suspension concentrée n'est autre qu'une masse de grains (plus ou moins fins) mélangés à de l'eau. Ainsi les modèles de Johnson (1970) et Daido (1971) font apparaître l'idée d'un seuil dépendant de la contrainte normale (comme le critère de rupture plastique de Mohr Coulomb) :

$$T = C + N \tan \phi + \eta \dot{\gamma}, \quad (1.43)$$

avec  $C$  la cohésion du matériau,  $N$  la contrainte normale et  $T$  la contrainte tangentielle. De nombreux modèles rhéologique récents ont été élaborés en considérant un tel seuil d'écoulement, notamment pour la description des suspensions denses : citons par exemple les travaux de Jop *et al.* (2006), de Rognon *et al.* (2011).

- D'autres modèles considèrent important de prendre en compte l'histoire de la suspension concentrée (temps de repos, périodes de cisaillement) dans la définition du seuil, afin de prendre en compte les phénomènes de structuration et de déstructuration de la suspension (thixotropie). Ainsi Coussot *et al.* (2002a) ont présenté un modèle dans lequel apparaît un paramètre d'histoire ' $\lambda$ '. ' $\lambda$ ' peut prendre différentes significations selon le matériau considéré. Par exemple pour une suspension d'argile il correspond au degré de floculation, c'est-à-dire à la proportion de particules d'argiles regroupées en agrégats qui précipitent au fond de la suspension.

### 1.2.4 Conclusion

Il est important de retenir que, malgré la difficulté d'étudier la rhéologie des mouvements de terrain de type écoulement dans leur ensemble, les modèles visqueux à seuil sont reconnus pour bien décrire la phase la plus fine (de type suspension concentrée) de ces coulées. Les phénomènes de structuration et de déstructuration des suspensions (thixotropie) ont mené à développer des modèles à variables d'histoire, ce qui est non courant pour les fluides (mais ici, le matériau est mixte fluide-grains).

Après avoir détaillé les approches solides et fluides pour la modélisation des géomatériaux, interrogeons-nous maintenant sur le passage d'une approche à l'autre, c'est-à-dire à la transition solide-fluide. Celle-ci semble bien être un point clé de toute modélisation de matériaux de type suspensions, et notamment de la description des mouvements de terrain dans leur ensemble.

## 1.3 La transition solide-fluide dans les géomatériaux

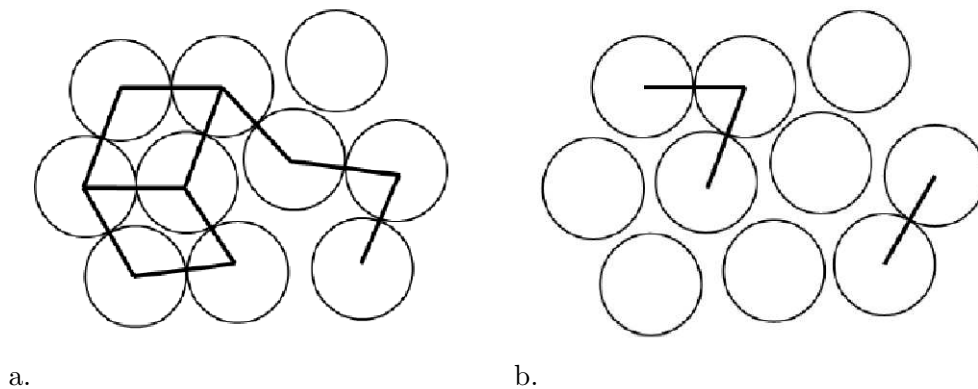
### 1.3.1 Introduction : physique de la transition frictionnelle-visqueuse

La transition solide-fluide d'un matériau granulaire partiellement ou totalement saturé peut être expliquée au niveau microscopique. Lorsque les grains sont en contact les uns avec les autres (figure 1.11a) des interactions frottantes transmettent à l'échantillon un comportement

solide de type Coulombien, caractérisé par une dépendance à la contrainte normale. Les contraintes appliquées sur un tel échantillon sont alors majoritairement transmises au réseau granulaire.

Lorsque ce réseau de contact se désorganise, le fluide qui circule entre les particules lubrifie les contacts, voire les fait disparaître totalement (figure 1.11 b) ce qui se traduit, au niveau macroscopique, par un comportement de type visqueux. Les contraintes appliquées sur un échantillon de cette forme sont alors transmises principalement à la phase hydrique.

FIGURE 1.11: *Contacts frottants entre les grains d'une suspension concentrée dans le régime Coulombien (a) ou lubrifiés dans le régime visqueux (b). Les traits matérialisent les contacts directs entre les particules (d'après (Huang, 2006))*



Cette organisation grains-eau dépend, dans une suspension granulaire, non seulement de la vitesse de sollicitation, mais aussi de l'histoire du matériau (qui peut se structurer ou se déstructurer).

Ainsi, la transition solide-fluide dans les géomatériaux, qu'elle soit décrite d'un point de vue géomécanique ou d'un point de vue de la rhéologie des fluides, s'explique par l'unique phénomène physique de modification des contacts entre les grains (contacts frictionnels, visqueux ou perte de contact).

Intéressons-nous maintenant à la caractérisation macroscopique de ces phénomènes de transition, d'une part dans les sols *in situ* qui peuvent évoluer vers un comportement fluide, et d'autre part dans les suspensions concentrées, lors de leur solidification sous le seuil de contrainte. Enfin, faisons une synthèse des différentes approches existantes au niveau de la modélisation de cette transition.

### 1.3.2 L'évolution vers un comportement fluide des sols à la rupture

#### Illustration : les coulées de boue de Sarno et Quindici

Comme il a été vu, de nombreux mouvements de terrain se présentent comme des coulées fluides. Le cas des coulées de boue de Sarno et Quindici en est un exemple typique. Les matériaux en cause dans cet événement sont pourtant des terrains initialement stables, qui ont été très étudiés du point de vue de leur comportement solide avec des essais expérimentaux de mécanique des sols. Pourtant, lors des événements du 5 et 6 mai 1998, ces matériaux ont évolué en coulées très fluides comme le montrent les traces d'éclaboussures boueuses sur les maisons de Quindici (fig 1.12). Il y a donc eu une transition solide-fluide du comportement des sols.

FIGURE 1.12: *Marques d'éclaboussures des coulées de boues sur une maison de Quindici (Revellino et al., 2004)*



### Cas de la liquéfaction

Considérons à présent le cas d'un essai triaxial non drainé sur un sable lâche, semblable à celui présenté à la figure 1.5b. Piloté en déformation, un tel essai peut être mené jusqu'à son terme, même après la rupture, et en fin d'essai les contraintes déviatoires s'annulent. Cela signifie qu'à l'état final, le sol ne peut plus supporter de contrainte de cisaillement sans se déformer : il a donc acquis la principale propriété comportementale d'un fluide, et on parle alors de "liquéfaction". Si cet essai est piloté en contrainte, l'échantillon s'effondre de manière très brutale sur lui-même au moment de la rupture, ce qui montre que la liquéfaction et la rupture sont liées.

Ce phénomène peut être expliqué par le caractère lâche du sol. Puisque celui-ci a tendance à se contracter, l'eau tend à s'échapper du milieu. Le non-drainage imposé entraîne alors une augmentation de la contrainte interstitielle  $u$ , et pour un chargement suffisamment important,  $u$  dépasse alors la contrainte intergranulaire maintenant le contact entre les particules. Le réseau granulaire est alors totalement détruit et le comportement principalement dicté par la phase hydrique.

Une illustration très parlante du phénomène de liquéfaction dans les sables lâches est le basculement et l'enfoncement dans le sol de barres d'immeubles à Niigata en 1964, suite à un tremblement de terre (voir figure 1.13).

FIGURE 1.13: *Barres d'immeuble s'enfonçant dans un sol liquéfié lors du séisme de Niigata 1964 ([http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/world/events/1964\\_0616.php](http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/world/events/1964_0616.php))*



Cette transition solide-fluide des sols à la rupture n'est cependant pas systématique : il existe bien sûr des ruptures qui surviennent sans cette profonde transformation du comportement, par exemple dans le cas des ruptures localisées pour lesquelles seule une bande de cisaillement

est hautement déformée (voir fig1.5a). La transition d'un sol à la rupture semble donc être *a priori* un phénomène qui survient uniquement dans le cas spécifique de rupture diffuse comme la liquéfaction.

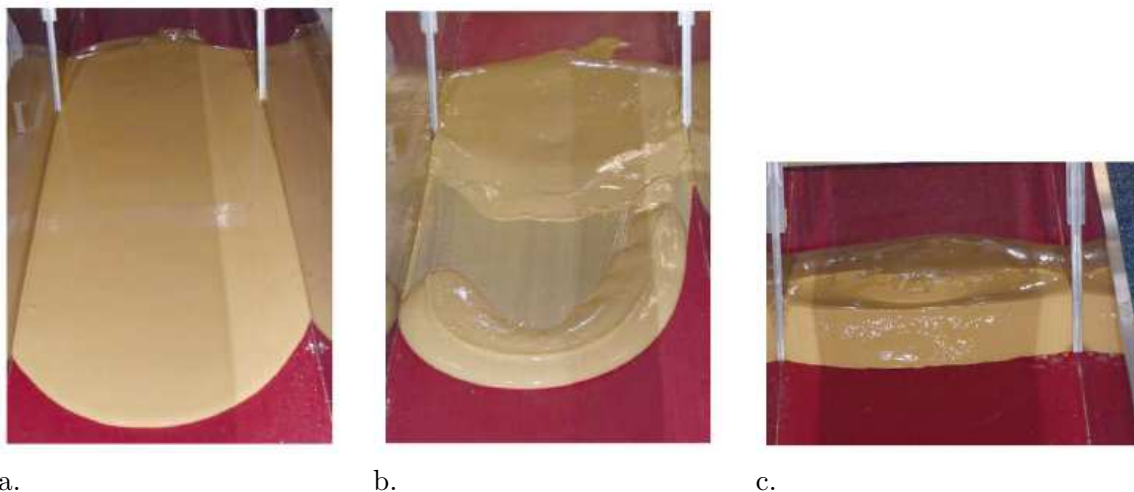
### 1.3.3 L'évolution vers un comportement solide des suspensions concentrées

#### La fracturation dans les suspensions concentrées

De nombreux travaux expérimentaux de rhéométrie ont mis en évidence, dans les suspensions concentrées, des localisations des déformations dans une bande de cisaillement. Ce phénomène est nommé fracturation. Notamment, les travaux de Coussot *et al.* (2002b); Ovarlez *et al.* (2009) ont montré que pour certains matériaux, ces zones de localisation apparaissent même pour un essai de cisaillement homogène.

Une illustration de cette fracturation peut être donnée grâce aux résultats des travaux de Coussot *et al.* (2005), portant sur les conditions d'écoulement et d'arrêt des suspensions concentrées. Pour un certain temps de repos et une certaine fraction solide, un mélange d'eau et de bentonite déposé sur un plan incliné l'écoulement présente la morphologie visible à la figure 1.14b. Il apparaît une séparation de la masse de matériau le long de surfaces bien définies (il y a eu, comme pour un comportement solide, une rupture), alors que le champ initial de contrainte cisailante est globalement homogène latéralement. Ce régime d'écoulement est nommé par l'auteur régime "landslide"; ce qui attire particulièrement notre attention sur ce phénomène, au vu du contexte de cette thèse.

FIGURE 1.14: Régimes "fluide à seuil" (a) , "landslide" (b) et "solide figé" (c) lors de l'écoulement sur plan incliné d'un mélange eau/bentonite d'après Coussot et al. (2005)



#### Transition frictionnelle-visqueuse

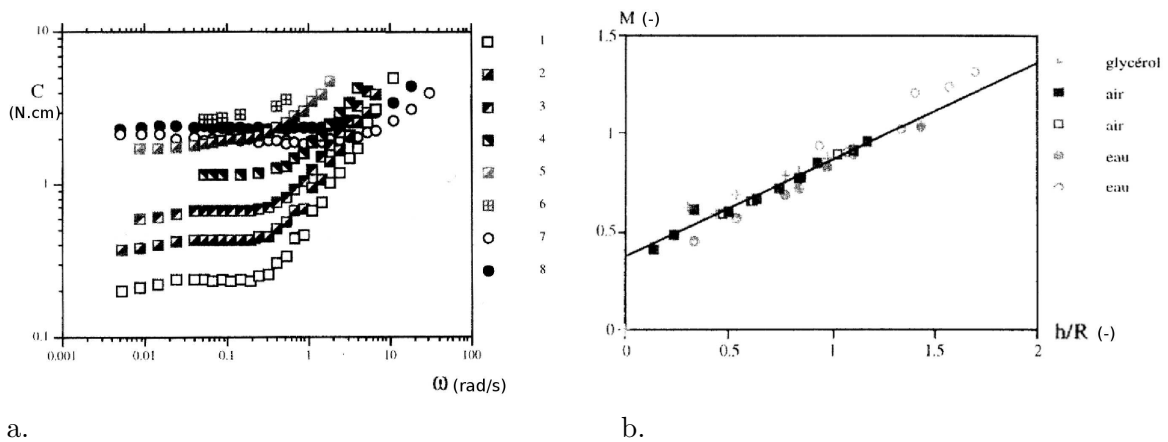
**Mise en évidence de la transition frictionnelle-visqueuse** Les résultats des expériences de Coussot présentées à la figure 1.14 font apparaître au total 3 régimes différents d'écoulement : le régime d'écoulement de fluide à seuil (a), le régime "landslide" (b), et un régime figé (c). Or, entre ces 3 cas, seul le temps de repos préalable a été changé : 1, 40 et 1035 minutes respectivement. La modification de la réponse est donc due à l'histoire du matériau (ce qui justifie la prise en compte de variables d'histoire dans les lois visqueuses des suspensions concentrées comme nous l'avons vue à la partie 1.2.3).

Cette modification du comportement s'explique-t-elle uniquement par une variation de viscosité ?

Les travaux de Ancey et Coussot (1999) démontrent qu'il s'agit en fait d'une vraie transition de type frictionnelle-visqueuse.

Leur expérience est basée sur un matériau simplifié, mélange de billes de verre (de taille variable) et d'un fluide visqueux interstitiel (de viscosité variable), au sein duquel un scissomètre applique une vitesse de cisaillement. Le couple est mesuré pour différentes profondeurs de fonçage du scissomètre et les résultats de cet essai sont présentés à la figure 1.15.

FIGURE 1.15: Courbe couple  $C$ /vitesse de rotation  $\omega$ . Essais 1 à 6 : profondeur croissante du scissomètre (9 à 54 mm) pour une même taille de bille (a). Influence de la profondeur  $h$  du scissomètre sur le couple, pour différents fluides interstitiels (b).



Sur la figure 1.15a, 2 régimes de comportement peuvent être distingués suivant la vitesse appliquée :

- Pour les faibles valeurs de vitesse angulaire  $\omega$ , il apparaît que le couple obtenu ne dépend pas de la vitesse appliquée, ce qui est contraire à une loi de viscosité. Par contre, il dépend de la profondeur à laquelle est placée le scissomètre (essais 1 à 6), donc de la contrainte normale appliquée. Cette dépendance linéaire est visible à la figure 1.15b.
- Pour les valeurs élevées de  $\omega$ , et à partir d'environ 0,3 rad/s le couple résultant devient proportionnel à la vitesse, alors que la réponse ne semble plus dépendante de la profondeur du scissomètre.

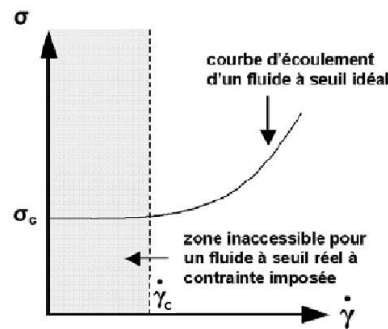
Ainsi, avant  $\omega_{critique}=0,3$  rad/s le comportement est de type frictionnel Coulombien (force de cisaillement dépendante du confinement), alors qu'au-delà l'écoulement est de type visqueux (couple dépendant de la vitesse de cisaillement).

**Notion de bifurcation visqueuse** Une transition frictionnelle-visqueuse a donc été mise en évidence pour un essai de cisaillement sur une suspension concentrée en taux de déformation imposé. Pour un essai de cisaillement en contrainte imposée, voyons ce qui se passe au niveau du seuil de contrainte, à partir des résultats de Huang (2006) (voir figure 1.16) :

- Pour une contrainte appliquée très légèrement inférieure au seuil de contrainte, la suspension concentrée est bloquée et sa viscosité est infinie.
- Pour une contrainte appliquée très légèrement supérieure au seuil de contrainte, la vitesse de déformation prend soudainement une valeur non nulle et la viscosité est passée instantanément d'une valeur infinie à une valeur finie (et faible).

Ce dernier point est très important, car il est alors impossible en pilotant en contrainte d'obtenir des valeurs faibles (inférieures à une certaine valeur  $\dot{\gamma}_c$ ) de taux de déformation

FIGURE 1.16: Illustration d'un intervalle inaccessible de taux de déformation lors d'un essai de cisaillement d'un matériau à seuil, piloté en contrainte (Huang, 2006)



comme le permet le modèle classique de Bingham. Pour cela, ce phénomène est appelé en rhéologie une 'bifurcation visqueuse'.

De manière plus précise, il a été mis en évidence que le comportement sous le cisaillement critique  $\dot{\gamma}_c$  était instable; il dépend notamment de l'histoire du matériau (voir figure 1.14).

### 1.3.4 Modèles de transition solide-fluide dans les géomatériaux

D'après les travaux présentés au paragraphe précédent, il existe donc, entre le comportement purement élasto-plastique et le comportement purement visqueux, une gamme étendue de comportements intermédiaires, complexes, où le passage d'un état solide à fluide peut être provoqué par de faibles perturbations. Ce domaine de comportement est si particulier que Coussot *et al.* (2005) parlent d'un "quatrième état de la matière", en plus des solides, liquides et gaz.

Du point de vue de la modélisation, de nombreux modèles visqueux ont été élaborés pour capter ces transitions solide-fluide. Notamment :

- Des modèles visqueux sans seuil avec une double viscosité (viscosité artificielle très élevée jusqu'à une certaine contrainte, puis de valeur correspondant à celle de l'écoulement (Dent et Lang, 1983)
- De nombreux modèles à seuil (seuil isotrope, de Mohr-Coulomb, seuil dépendant de variables d'histoire - voir partie 1.2.3).

Il est très intéressant de constater qu'en rhéologie des fluides un grand intérêt est porté à la détermination de l'état de transition solide-fluide (c'est-à-dire au seuil de viscosité). Notamment, le fait de concevoir un seuil de contrainte visqueux dépendant linéairement de la pression, exactement comme les critères de rupture plastique pour les sols (Johnson (1970), Daido (1971), voir partie 1.2.3), est déjà une manière d'envisager ces deux phases des géomatériaux comme le prolongement l'une de l'autre. Pourtant, même si Coussot dans sa thèse (Coussot, 1993) s'interroge sur la possibilité "d'une théorie qui suppose un comportement solide dans certaines conditions et un comportement fluide dans d'autres conditions", les modèles rhéologiques ne décrivent pas le comportement solide en deçà du seuil (ou alors, avec les modèles à double viscosité, par un comportement qui n'est pas de type solide).

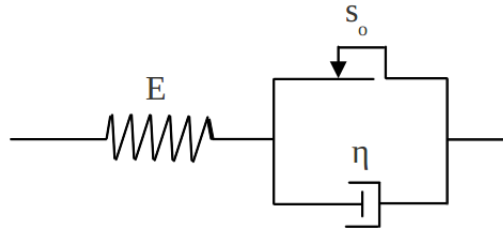
De la même manière avec les lois élasto-plastiques, le comportement n'est pas défini au-delà des contraintes à la rupture.

Il existe cependant un type de modèle rhéologique qui traduit l'idée de continuité du comportement lors de la transition solide-fluide : il s'agit des modèles de type Perzyna (Perzyna, 1963), dont le schéma rhéologique (en 1D) est présenté à la figure 1.17, et l'expression (en 1D et en plasticité parfaite) est la suivante :



$$\dot{\epsilon}_{total} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_{vp} = \dot{\epsilon}_e + \frac{\sigma - s_0}{\eta} \quad (1.44)$$

FIGURE 1.17: Loi de comportement de type Perzyna 1D



Effectivement pour cette loi, un seuil unique traduit à la fois le critère de rupture solide et le seuil de viscosité. Les modèles de type Perzyna permettent donc de décrire, en plus d'un comportement fluide de type visqueux à seuil, un vrai comportement solide de type élastique. Des modèles élasto-visco-plastiques de ce type ont été développés par exemple pour modéliser des matériaux complexes comme les émulsions ou le sang (Saramito, 2009).

Cependant, ce modèle suppose que l'érouissage et les déformations plastiques sont dépendantes du temps et, en conséquence, il n'y a pas de déformation plastique instantanée. Ce point est discutable étant donné le comportement élasto-plastique reconnu pour les sols *in situ*.

### 1.3.5 Conclusion

Ainsi, il est important de voir que la transition solide-fluide (ou inversement fluide-solide) est un phénomène tout à fait mis en évidence dans les géomatériaux, que ce soit dans le domaine d'investigation de la géomécanique ou de la rhéologie. Beaucoup de travaux s'intéressent à cette transition en rhéologie. En mécanique des solides, les travaux s'approchant le plus de cette thématique de la 'transition' sont sans doute les travaux portant sur la rupture de type diffuse, avec la conséquence possible de liquéfaction des sols (voir partie 1.3.2). Il est tout à fait intéressant de constater que de nombreux termes relatifs à la rupture en géomécanique sont aussi employés en rhéologie dans le contexte de la viscosité à seuil. Ainsi, les notions de 'fracturation', 'localisation', 'bifurcation' et 'instabilité' sont retrouvées dans les deux domaines scientifiques.

Cependant, ni dans l'approche solide, ni dans l'approche fluide, il ne semble exister de modèle élaboré pour décrire non seulement la transition, mais aussi ce qui se passe *après* la transition. Or, l'étude des mouvements de terrain de type écoulement est un exemple d'application qui requiert les deux types de mécanique, et beaucoup de travaux tentent dans cette optique de 'combiner' les deux approches sans qu'il y ait, à notre connaissance, de vraie loi solide fluide à transition.

Du point de vue numérique, la description d'un matériau en transition solide-fluide représente également un point clé puisque cette modélisation requiert à la fois les exigences des méthodes adaptées aux solides et des méthodes adaptées aux fluides. Passons en revue les méthodes numériques les plus classiques et leur potentialité dans cette optique.

## 1.4 Méthode numérique adaptée aux écoulements de matériaux complexes

Tout d'abord, précisons que les méthodes numériques que nous abordons dans cette partie s'intéressent à la résolution d'un problème mécanique classique, dans lequel nous négligeons en première approche les effets d'inertie. Le principe fondamental de la statique est donc l'équation mécanique qui gouverne le système. Il s'écrit, rappelons-le :  $\text{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0$  ( $\boldsymbol{\sigma}$  étant le tenseur de contrainte interne et  $\mathbf{f}$  la somme des forces extérieures).

Nous faisons l'hypothèse de la continuité du champ cinématique dans les géomatériaux d'étude. De plus, bien que les méthodes discrètes soient bien adaptées à la modélisation des géomatériaux (qui sont des milieux granulaires) et présentent une grande flexibilité, il est impensable de les utiliser pour des systèmes de grande échelle, tels que les mouvements de terrain. L'analyse des méthodes numériques est donc restreinte aux méthodes continues.

Voyons, dans un premier temps, quelles sont les conditions nécessaires à la modélisation d'un mouvement de terrain dans son ensemble (donc d'un géomatériau sous toutes ses formes).

### 1.4.1 Principaux critères pour la modélisation d'un mouvement de terrain dans son intégralité

**Des grandes transformations** Le premier, et plus évident critère, est celui de la possibilité de modéliser les grandes transformations. En effet les matériaux d'un mouvement de terrain parcourent une distance généralement conséquente (appelée communément le 'run-out'), de quelques mètres à plusieurs kilomètres. Leur déformation est aussi très importante pour les matériaux situés dans la bande de cisaillement, dans ce cas d'un glissement, ou pour toute la masse du matériau, dans le cas d'une coulée gravitaire.

**Un suivi précis des matériaux dans l'espace** Un mouvement de terrain est un phénomène à surface libre qu'il est nécessaire de suivre au cours du temps et dans l'espace.

Un autre point d'importance est la potentielle interaction entre des sols de nature différente (amorçage par exemple d'un glissement dans une couche particulièrement lâche).

Enfin selon la morphologie de la pente, et notamment si des obstacles sont présents dans la pente (obstacles naturels, ou structures), le matériau en écoulement ou glissement va entrer en contact avec d'autres matériaux de nature différente de la sienne.

Pour ces 3 raisons, il est très important que la méthode numérique puisse permettre un suivi précis de chaque matériau afin d'en connaître son extension spatiale.

**Le suivi de variables d'histoire** La méthode numérique va devoir être appliquée à la modélisation de solides élasto-plastiques. Or la plasticité implique la mémorisation de variables d'histoire associées à chaque point matériau (paramètres d'écrouissage, déformations plastiques), qui varient au cours du temps et doivent être connues pour le calcul d'un incrément à l'autre (voir écriture incrémentale des lois élasto-plastiques, partie 1.1.1). Ces quantités sont hétérogènes dans un même matériau, voire peuvent présenter des champs discontinus par exemple lors de localisations (voir paragraphe 1.1.2 et figure 1.6). La méthode numérique adéquate, en plus du suivi des matériaux et de leur extension spatiale, doit donc permettre d'associer à chaque point matériau des variables d'histoire, et de suivre précisément dans l'espace et le temps leur évolution.

Voyons à présent comment se situent les méthodes numériques classiquement utilisées par rapport à ces 3 critères. Nous nous intéressons dans un premier temps aux méthodes basées

sur une approche Eulérienne, puis à celles basées sur une approche Lagrangienne, et enfin aux méthodes hybrides.

### 1.4.2 Les méthodes numériques classiques et leur spécificités

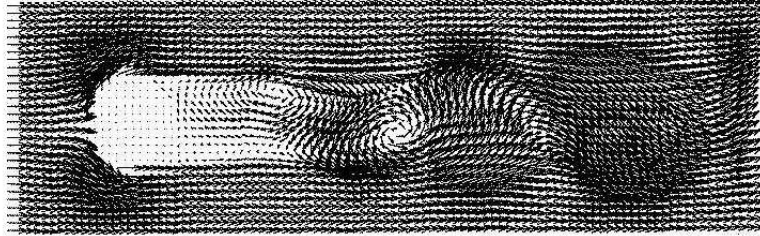
#### Les méthodes basées sur une approche Eulérienne

L'approche Eulérienne consiste à décrire le mouvement de la matière à partir d'une configuration de référence qui évolue au cours du calcul.

Ainsi, pour un point matériel  $P$  dont la position est  $(X_1, X_2, X_3)$  dans la configuration initiale  $\Omega_0$  et  $(x_1, x_2, x_3)$  dans la configuration  $\Omega_t$  à l'instant courant  $t$ , alors les variables associées à la description Eulérienne sont les coordonnées de la position actuelle  $(x_1, x_2, x_3)$  et les inconnues sont les vitesses pour cette position.

Parmi les méthodes en approche Eulérienne, considérons la méthode aux éléments finis (MEF) en description Eulérienne. Dans une telle méthode, le maillage est fixe, nœud et points d'intégration sont donc fixes également. La matière n'est pas attachée au maillage, elle n'est donc pas représentée directement par la méthode (pas de 'point matériel'), mais un champ de variable interne (propriétés matériau par exemple) est connu à chaque instant au niveau des points d'intégration, et est advecté au cours du calcul. Le champ de vitesse est connu grâce aux valeurs calculées nœuds.

FIGURE 1.18: *Champ de vitesse pour un écoulement fluide avec une MEF Eulérienne (instabilité de Von Karman). Le champ de déplacement de la matière est visible, même si tous les points de calculs sont fixes.*



Cette méthode permet donc de modéliser les grandes transformations, puisque l'intégration sur les éléments n'est jamais entravée par la distorsion (les éléments sont fixes). Elle est d'ailleurs classiquement utilisée pour modéliser les écoulements fluides. La première des trois conditions énoncées précédemment est donc remplie.

Par contre, la dissociation des points de calculs et du matériau entraîne une diffusion spatiale des variables aux points matériels. Pour le comprendre, déterminons la dérivée matérielle d'une grandeur scalaire, notée  $g$ , associée au point matériel  $P$  :

La dérivée matérielle de  $g$  n'est autre que la valeur de  $\frac{dg}{dt}$ , avec  $g$  fonction du temps et de la position de  $P$ . Dans la description Eulérienne, cette dernière est donnée par les coordonnées dans la configuration courante  $\Omega_t$ , nous avons donc :  $g(P, t) = g(x_1, x_2, x_3)$ , avec  $(x_1, x_2, x_3)$  qui varie au cours du temps. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
 \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x_i} v_i \\
 &= \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{grad}_x g \cdot \vec{v}
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

Le terme  $\text{grad}_x g \cdot \vec{v}$  traduit cette diffusion spatiale. Or, classiquement, dans la MEF Eulérienne il n'y a pas de surfaces d'interface définies entre les différents matériaux : seules les propriétés physiques, connues en chaque point d'intégration, permettent de reconstituer la position de la ligne (ou surface) virtuelle délimitant les matériaux de différente nature. Si ces propriétés sont diffusées au cours du déplacement de la matière, alors il n'est donc pas possible de suivre précisément les matériaux et leur contours lors du calcul. Il en est de même pour toutes les variables internes (contraintes, déformations plastiques, etc...)

Les conditions 2 et 3 énoncées plus haut ne sont pas remplies, et il s'avère donc qu'une méthode en approche Eulérienne n'est pas adaptée pour modéliser un mouvement de terrain dans sa globalité.

### Les méthodes basées sur une approche Lagrangienne

Beaucoup de méthodes existent en approche Lagrangienne. Détaillons-en 3 principales.

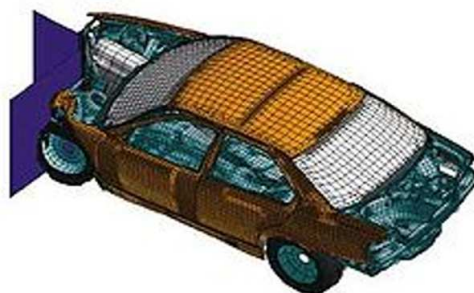
**La MEF Lagrangienne** L'approche Lagrangienne consiste à décrire la matière avec une configuration de référence fixe, qui est par exemple la configuration initiale  $\Omega_0$ , dans laquelle les coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  d'un point matériel  $P$  sont inchangées. Ainsi dans cette approche le mouvement d'un point matériel est décrit "en trajectoire" puisque sa configuration de référence ne change jamais au cours du mouvement.

Une méthode continue basée sur la description Lagrangienne, est typiquement la MEF en description Lagrangienne. Cette méthode est basée sur un maillage déformable attaché à la matière (voir l'exemple d'un résultat de calcul à la figure 1.19). Chaque point d'intégration représente donc un point matériel. Dans la configuration déformée, l'information portée par les points d'intégration s'est déplacée en même temps que le point d'intégration, suivant le champ cinématique résultat. En conséquence, entre deux pas de temps, l'advection de la matière ne provoque pas de diffusion des grandeurs matérielles. En exprimant, de la même manière que pour la MEF Eulérienne, la dérivée matérielle d'une grandeur  $g$  en un point matériel  $P$  au cours du temps, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial t} \\ &= \frac{\partial g}{\partial t} + 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

En effet,  $(X_1, X_2, X_3)$  est fixe comme le reste de la configuration de référence.

FIGURE 1.19: Exemple d'un calcul de crash automobile : configuration déformée du maillage en approche Lagrangienne



Par conséquent, dans un modèle très déformé comme celui présentée à la figure 1.19, les contours des différentes parties du modèle sont bien identifiables en fin de calcul et, de même, les variables d'histoire peuvent être suivies précisément.

Deux conditions sur trois sont donc remplies pour ce type de méthodes. Cependant, comme le maillage se déforme avec le matériau, les MEF Lagrangiennes ne permettent pas de modéliser les grandes transformations : à partir d'une certaine distorsion des éléments il n'est plus possible de calculer les intégrales sur leur volume (ou leur surface).

En approche Lagrangienne, la limitation de la MEF a entraîné le développement d'autres méthodes capables de pallier ces difficultés, notamment en s'affranchissant du maillage.

**La méthode Smooth Particle Hydrodynamics** La méthode Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) est historiquement la plus ancienne méthode 'meshless'. Initialement utilisée dans le domaine de l'astrophysique (Gingold et Monaghan., 1977), elle peut être utilisée pour résoudre des problèmes très variés : problèmes de type fluide (Monaghan, 1994), thermique (Cleary et Monaghan, 1999), d'impact de solides élasto-plastiques (Libersky *et al.*, 1993). Cette méthode est basée, comme les MEF, sur la théorie mathématique de l'interpolation, c'est-à-dire la reconstruction d'une fonction à partir de valeurs connues ponctuellement et d'un certain nombre de règles sur son interpolation là où le champ est inconnu. Ainsi une fonction  $x \rightarrow f(x)$  est approximée par la fonction  $x \rightarrow \langle f(x) \rangle$  telle que :

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x')W(x - x', h)dx', \quad (1.47)$$

où  $\Omega$  est le volume d'intégration qui contient  $x$  et  $x'$ ,  $h$  est la longueur sur laquelle est basée la limite du domaine d'interpolation  $S$ , cette limite étant définie pour ne pas avoir à intégrer sur tout le domaine une fonction prenant des valeurs négligeables sur une grande partie de ce domaine (voir figure 1.20).  $W(x - x', h)$  détermine en quelle proportion chaque valeur de la fonction en  $x'$  va contribuer au calcul de  $f(x)$ . Les fonctions  $W$  forment ce qu'on appelle le noyau d'interpolation de la méthode et peuvent être par exemple de type Gaussienne (tronquées).

Le domaine d'étude est discrétisé en points matériaux qui vont se déplacer dans l'espace avec la matière. Grâce à cette discrétisation, l'intégrale de l'équation 1.47 peut être à son tour approximée par une sommation finie :

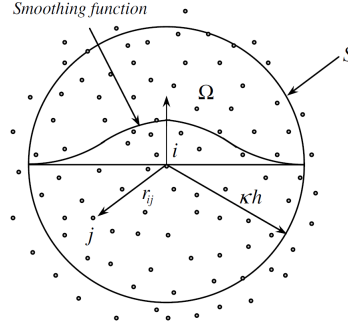
$$\langle f(x) \rangle = \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} f(x_i)W(x - x_i, h), \quad (1.48)$$

où  $m_i$ ,  $\rho_i$ , et  $x_i$  sont respectivement la masse, la masse volumique et la position de la particule  $i$ .

Les équations différentielles du problème sont exprimées à partir de l'expression simplifiée des fonctions (équation 1.48), et de leurs dérivées. La résolution ne passe donc pas par l'intermédiaire d'une équation aux nœuds d'un maillage, mais ces équations sont obtenues et résolues directement sur les points matériels.

Cette méthode possède ainsi les deux grands avantages d'être Lagrangienne (les variables internes et les paramètres physiques d'un point matériel sont advectés directement avec ces points de calculs, sans diffusion), et de n'être pas limitée par des problèmes de distorsion de maillage. Théoriquement cette méthode est donc adaptée vis-à-vis des 3 exigences énoncées dans le paragraphe 1.4.1 (grandes transformations, suivi précis de l'extension des matériaux et suivi des variables d'histoire). Cependant, la méthode implique des domaines d'intégration qui -à la différence des éléments finis- s'interpénètrent (méthode 'smooth'). La SPH capte donc faiblement les condition aux limites (il peut arriver que des particules SPH pénètrent

FIGURE 1.20: *Domaine d'influence  $S$  de la particule  $i$  sur les autres particules de  $S$ , et fonction d'interpolation.  $kh$  (avec  $k$  une constante) détermine la limite de  $S$  (d'après Bui et al. (2007))*



dans les bords) et les discontinuités entre différents matériaux. Ce dernier point est limitant pour traiter de problèmes de rupture, de collision avec obstacles, etc...

**La méthode Element-Free Galerkin (EFG)** Cette méthode est également une méthode sans maillage, mais avec un réseau de points de calcul. L'interpolation se base sur la méthode des moindres carrés mobiles : à partir de la connaissance de valeurs particulières d'une fonction donnée, une expression polynomiale sur tout le domaine en est cherchée. Exprimons cette méthode d'approximation :

Soit  $u$  la fonction cherchée,  $N$  le nombre de points de calcul,  $u_i$  et  $x_i$  la valeur de  $u$  en ces points et leur position. Soit  $p^t(x)$  la matrice de base de la fonction polynomiale cherchée afin d'approximer  $u$  ( $p^t(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots]$  par exemple), et  $a$  la matrice des coefficients du polynôme. Dans la méthode des moindres carrés classique,  $a$  doit être cherchée pour minimiser la quantité  $S$  telle que :

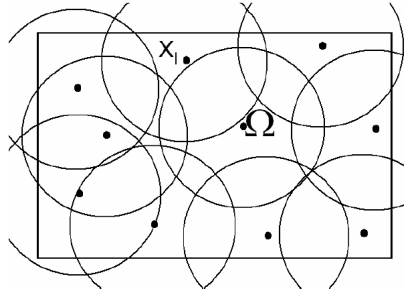
$$S = \sum_{i=1}^N w_i [p^t(x_i)a - u_i]^2 \quad (1.49)$$

La méthode des moindres carrés mobiles se base sur une interpolation qui dépend d'une approximation par sous domaine.  $a$  et  $w$  dépendent ainsi de la coordonnée  $\tilde{x}$  dans ces sous-domaines et la quantité à minimiser est alors :

$$S(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^N w_i(\tilde{x}) [p^t(x_i)a(\tilde{x}) - u_i]^2 \quad (1.50)$$

Les fonctions de pondération  $w_i(\tilde{x})$  sont construites de telle sorte que l'ensemble du domaine  $\Omega$  soit couvert par les domaines d'influence (figure 1.21). Les superpositions de plusieurs domaines d'influence sont à la base de la matrice de connectivité.

Cette méthode est très intéressante pour les modèles dont la création de maillage est très lourde, ou qui nécessite de réadapter le maillage au cours du calcul (comme par exemple lors de fracturation). Elle présente les mêmes avantages que la SPH : elle n'est pas limitée en grande transformation par la présence de maillage, et son approche particulière (donc Lagrangienne) permet de suivre l'extension spatiale des matériaux (en empêchant ainsi la diffusion des paramètres et des variables). Cette méthode est appliquée principalement à la mécanique de la rupture (mécanique solide) (Duflot, 2004; Ghorashi *et al.*, 2010). Elle pourrait potentiellement être adaptée à la modélisation des mouvements de terrain dans leur ensemble, mis à part le fait que, comme les méthodes 'meshless' les conditions aux limites sont difficiles à prendre en compte.

FIGURE 1.21: Points de calculs et domaine d'influence de chaque point, sur le domaine  $\Omega$ 

### Exemple d'une méthode hybride : la méthode Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE)

D'après la section précédente, les méthodes Lagrangiennes s'appuyant sur un maillage permettent de suivre correctement l'extension des matériaux au cours du calcul (sans diffusion spatiale des paramètres et variables internes), mais elles présentent l'inconvénient d'être rapidement limitées pour les grandes transformations à cause de la trop grande distorsion du maillage. Au contraire, les méthodes Eulériennes permettent de décrire les grandes transformations, mais pas de suivre précisément l'extension des matériaux dans l'espace, du fait de la diffusion des variables portées par les points matériels au cours de l'advection. Certaines méthodes avec maillage ont essayé de trouver un compromis entre ces deux approches pour bénéficier des avantages de chacune d'elles. Elles sont appelées 'méthodes hybrides'.

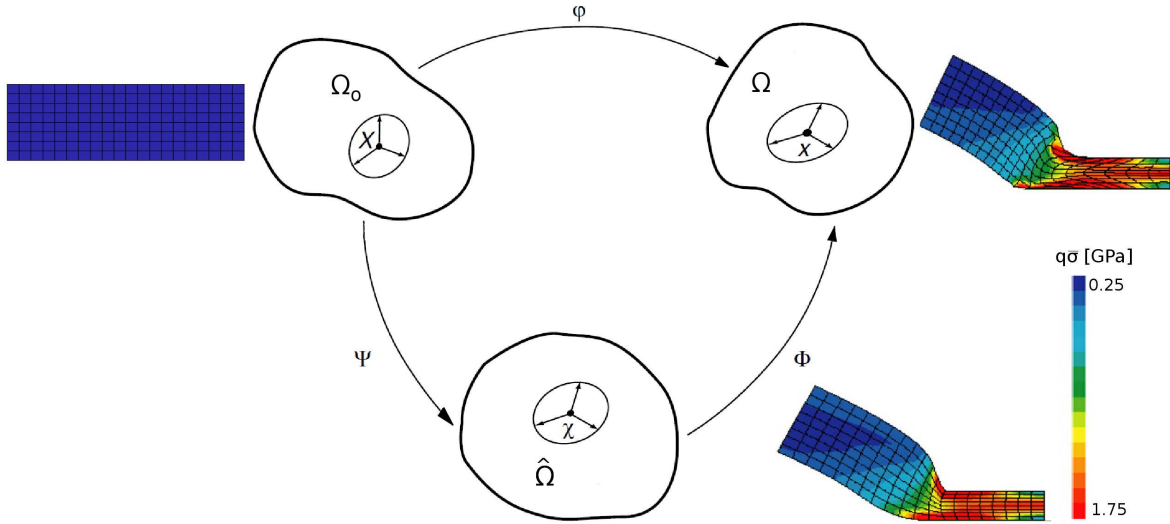
La méthode ALE, fondée sur une MEF classique, est la plus connue des méthodes hybrides. La base de la méthode est le choix de la configuration de référence pour la description du mouvement. Pour l'ALE, La configuration de référence n'est ni la configuration initiale  $\Omega_0$  (comme c'est le cas pour la MEF Lagrangienne), ni la configuration actuelle  $\Omega$  (comme c'est le cas pour la MEF Eulérienne). Une configuration de référence  $\hat{\Omega}$  est en fait choisie arbitrairement entre la configuration initiale et la configuration déformée (voir figure 1.22). Avec cette méthode, il faut donc non seulement définir le mouvement de la matière (grâce à la fonction  $\varphi$ ), mais aussi le mouvement du domaine de référence (grâce à la fonction  $\psi$ ). Ces opérations demandent évidemment plus de calcul que chacune des méthodes Eulérienne ou Lagrangienne.

Grâce à cette configuration intermédiaire, la méthode ALE permet de gérer des déformations relativement importantes en réduisant la distorsions des éléments (voir déformée dans la configuration  $\hat{\Omega}$  figure 1.22 et voir (Huerta et Liu, 1988)).

Cependant, si cette méthode bénéficie des avantages des 2 approches, elle en comporte aussi les inconvénients. Notamment, comme dans une MEF Eulérienne la dérivée particulaire met en jeu un terme convectif, et les variables sont donc diffusées au cours de l'advection du matériau. De plus, son utilisation est limitée dans le cas des très grandes transformations. Cette méthode ne répond donc pas aux critères que nous avons définis.

Les méthodes classiques ne sont donc pas totalement satisfaisantes vis-à-vis des exigences numériques de la modélisation des mouvements de terrain. Étudions à présent les potentialités d'une méthode numérique innovante : la Méthodes aux Éléments Finis à Points d'Intégration Lagrangiens (MEFPIL).

FIGURE 1.22: Les trois configurations utilisées dans la méthode ALE et comparaison pour l'exemple d'écrasement d'un solide des configurations initiale, déformée selon une MEF Lagrangienne et déformée selon l'ALE (d'après Rodríguez-Ferran et al. (2002))



### 1.4.3 La méthode MEFPIIL

#### Origine de la méthode et base de la méthode

Dans l'objectif de modéliser des matériaux à lois de comportement complexes et en grandes transformations, une catégorie de méthode relativement nouvelle a été conçue dans les années 60 : les méthodes 'Particle In Cell' (PIC) fondées sur les travaux de Harlow (1964). Le principe de base des PIC est de bénéficier des avantages des descriptions Lagrangiennes et Eulériennes à partir d'une double discrétisation du domaine d'étude : une discrétisation de l'espace grâce à un maillage fixe (approche Eulérienne), une discrétisation de la matière grâce à des particules mobiles dans le maillage (approche Lagrangienne). Il s'agit donc de méthodes hybrides, mais qui ne présentent pas de diffusion des propriétés matériaux puisque celles-ci sont portées directement par les particules matérielles.

Un des inconvénients de la méthode est que les variables de quantité de mouvement et d'énergie (nécessaire à la résolution dans la PIC) sont portées par le maillage et donc diffusées au cours de l'advection du matériau. Pour remédier à cela une nouvelle méthode a été développée sur la base des PIC : la méthode Fluid Implicit Particle (FLIP). La principale différence avec les PIC est que les deux variables précédemment citées sont Lagrangiennes dans la FLIP. La FLIP traite (comme son nom l'indique) essentiellement des problèmes de type fluide.

Plusieurs méthodes ont par la suite été développées à partir de la FLIP. Citons tout d'abord la Material Particle Method (ou MPM) développée par Sulsky et Schreyer (1996), dont la spécificité, par rapport à la FLIP, est le transport par les points matériels des déformations, des contraintes et des variables d'histoire. La MPM permet ainsi de traiter les problèmes de solides à variables d'histoire. Enfin, une autre de ces méthodes est la MEFPIIL basée sur les travaux de Moresi et al. (Moresi et Solomatov, 1995; Moresi *et al.*, 2003). Ces deux méthodes sont cependant bien différentes (voir plus loin).

Comme son nom l'indique, dans la MEFPIIL, les particules matérielles qui portent les variables internes (d'histoire et d'état) et les paramètres physiques, servent également de points



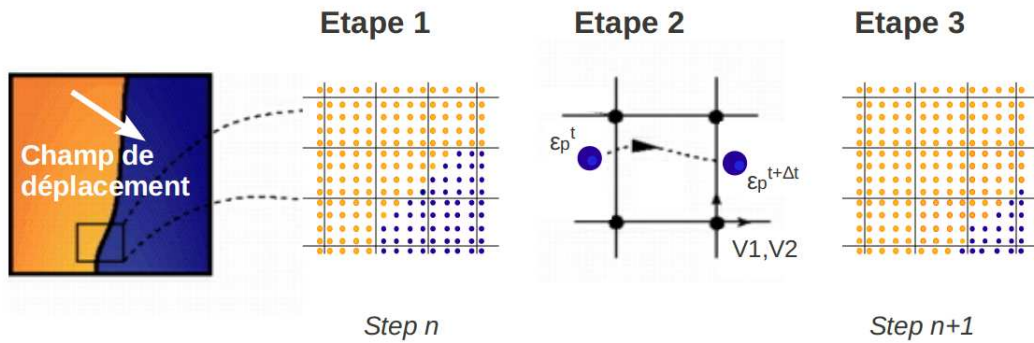
d'intégrations. Les intégrales intervenant dans la forme faible de l'équation d'équilibre sont discrétisées de manière classique. Par exemple l'intégrale d'une fonction  $A$  s'écrit :

$$\int_{\Omega_e} A(u) d\Omega_e = \sum_{i=1}^{N_{pi}} w_i A(\xi_i), \quad (1.51)$$

avec  $\Omega_e$  le volume élémentaire,  $N_{pi}$  le nombre de point d'intégration dans cet élément, et  $w_i$ ,  $\xi_i$  respectivement le poids numérique et la position naturelle de chacun des points d'intégration. L'intégration est ainsi de type Gaussienne.

Comme la FLIP et la MPM, la MEFPIIL est donc basée sur une description totalement Lagrangienne du matériau d'une part, et une résolution des inconnues cinématiques sur un maillage fixe Eulérien d'autre part. Comme pour une MEF Eulérienne, il n'y a pas d'interface définie entre 2 matériaux différents. Seule la position des particules permet d'en connaître l'extension spatiale. L'interpénétration de deux matériaux voisins est cependant impossible compte tenu de la continuité du champ cinématique dont dépend le déplacement des particules.

FIGURE 1.23: Double discrétisation dans la MEFPIIL



La figure 1.23 illustre cette double discrétisation, à partir de 2 matériaux en contact soumis à un champ de déplacement :

- Étape 1 : Pour un zoom suffisant, nous notons tout d'abord que la double discrétisation est visible : les particules d'une part (dont les différentes propriétés sont symbolisées ici par la couleur), le maillage d'autre part (non déformé).

La mobilité des particules par rapport au maillage implique que les positions optimum prédites par l'intégration de Gauss ne peuvent être occupées par les points d'intégration. Afin de garantir cependant une intégration précise, un nombre supérieur de points est considéré par rapport au nombre prévu par l'intégration de Gauss et, surtout, les poids numériques des points d'intégration sont actualisés à chaque incrément.

Dans cette première étape, maillage et particules sont donc temporairement associés afin de recalculer la position naturelle et poids numérique de chaque point d'intégration, par rapport à l'élément qu'il occupe (voir schéma d'itération pour le calcul des poids développé par Moresi *et al.* (2003)).

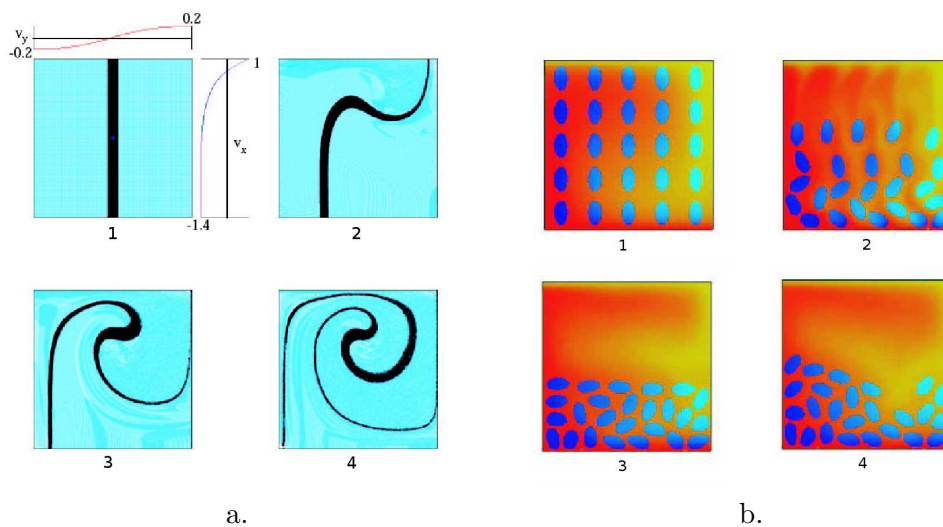
La matrice de rigidité et les forces sont écrites aux nœuds à partir de schémas d'intégration sur les éléments, auxquels contribue chaque point d'intégration de l'élément. Le problème mécanique est alors résolu à partir des équations aux nœuds et il en résulte des variables cinématiques nodales.

- Étape 2 : Entre les pas de temps  $n$  et  $n+1$ , les particules sont advectées au travers du maillage, suivant le champ cinématique résultant. Les variables d'histoire (comme la défor-

- mation plastique) qui sont stockées sur les particules, se déplacent en même temps. Les 2 discrétisations sont donc dissociées dans cette étape.
- Étape 3 : Enfin, au début du pas de temps  $n+1$ , une nouvelle configuration est retrouvée, où l'extension de chaque matériau est connue précisément, et les deux discrétisations sont à nouveau temporairement associées (re-calcul de la position et du poids numérique des points d'intégration, relativement à l'élément occupé).
  - Etc...

### Potentiel de la méthode vis-à-vis de la modélisation des mouvements de terrain

FIGURE 1.24: Répartition de la matière pour deux matériaux en écoulement convectif (Moresi et al., 2003) (a). Sédimentation de grains solides dans un fluide visqueux (b)



Vis-à-vis des exigences détaillées dans la section 1.4.1, la MEFPIL permet donc à la fois de modéliser les grandes transformations (grâce à l'indépendance des particules vis-à-vis du maillage), de suivre précisément l'extension des matériaux et les variables d'histoire (grâce aux particules Lagrangiennes).

La figure 1.24 a., illustre le suivi très précis de la répartition spatiale de deux matériaux visqueux en contact, dans des conditions de fort cisaillement.

Si la MEFPIL a été créée initialement pour modéliser les problèmes de type fluides en géophysique (O'Neill *et al.*, 2006), elle a été aussi appliquée avec succès pour modéliser des géomatériaux visco-élastiques (Moresi *et al.*, 2003; Dufour et Pijaudier-Cabot, 2005). Elle est donc adaptée pour décrire des comportements de nature très différente, pouvant se faire même au sein d'un unique modèle, comme l'illustre la figure 1.24b, où un fluide visqueux déformable 'cohabite' avec des grains visco-élastiques de modules mécaniques élevés. Pour l'ensemble de ces raisons, la MEFPIL est une méthode qui présente de fortes potentialités pour la modélisation de mouvements de terrain.

### Comparaison avec les autres méthodes numériques

**Comparaison de la MPM et de la MEFPIL** Initialement utilisée pour les problèmes d'impacts de solides (Sulsky et Schreyer, 1996), la MPM a été par la suite appliquée aux géomatériaux (Bardenhagen *et al.*, 2000). Elle serait donc *a priori* potentiellement adaptée pour modéliser les mouvements de terrain. Nous souhaitons cependant établir ici une comparaison plus précise entre ces deux méthodes.

Dans la MPM, le théorème des travaux virtuels (qui exprime l'équilibre des travaux des forces extérieures -volumique et de contacts-, intérieures et d'accélération) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} d\Omega = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{g} \mathbf{u} d\Gamma, \quad (1.52)$$

avec  $\Omega$  le domaine d'étude,  $\rho$  la masse volumique du matériau,  $\mathbf{a}$  l'accélération,  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur de contrainte de Cauchy,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur de déformation virtuel,  $\mathbf{b}$  la force volumique appliquée,  $\mathbf{g}$  le vecteur de tension appliqué sur la frontière  $\Gamma$  du domaine, et  $\mathbf{u}$  un vecteur du champ de déplacement virtuel. Le continuum est décrit avec un ensemble de particules pesantes et la masse volumique de la matière est définie comme une fonction dépendant des masses particulières et de la fonction Dirac  $\delta$ , telle que :

$$\rho(x, t) = \sum_{p=1}^{N_p} M_p \delta(x - x_p^t), \quad (1.53)$$

où  $N_p$  est le nombre de particules (dans un élément par exemple) et  $M_p$  et  $x_p$  sont respectivement la masse et la position de la particule  $p$ .  $M_p$  est considérée fixe dans la MPM pour garantir la conservation de la masse (Sulsky *et al.*, 1995). L'intégrale de la masse volumique globale, donc la masse totale, peut alors s'écrire simplement par une sommation :

$$\int_{\Omega} \rho(x, t) d\Omega = \sum_{p=1}^{N_p} M_p \quad (1.54)$$

A partir de cette égalité, l'équation 1.52 peut être exprimée également avec des sommes ponctuelles. Le premier terme se réécrit par exemple :

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} d\Omega = \sum_{p=1}^{N_p} M_p [\mathbf{u}(x_p^t, t) \cdot \mathbf{a}(x_p^t, t)] \quad (1.55)$$

Autrement dit, dans la MPM les poids numériques d'intégration sont égaux aux poids physiques des particules. Ils sont donc constants.

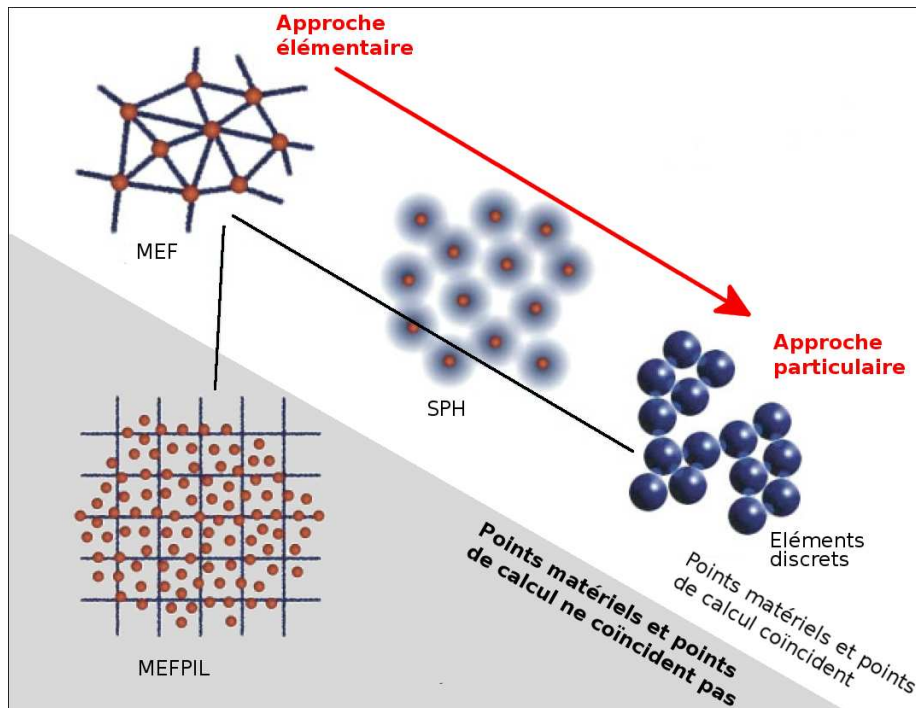
Il peut être ainsi être mis en avant que la MEFPIL garantit une meilleure précision d'intégration : les poids numériques, indépendants des poids physiques, sont recalculés à chaque incrément de manière à respecter les condition de somme constante pour les termes constants, linéaires, quadratiques, (etc...) du polynôme interpolant la fonction  $A(u)$  dans l'équation 1.51 (Moresi *et al.*, 2003).

**Positionnement de la MEFPIL vis-à-vis des autres méthodes** En conclusion, le schéma de la figure 1.25, tiré de (Dufour et Pijaudier-Cabot, 2005), positionne la MEFPIL par rapport à quelques méthodes numériques très classiques. Rappelons que la méthode des éléments discrets, mentionnée dans ce schéma mais non développée ici dans l'hypothèse de la continuité du milieu, a été développée par Cundall et Strack (1979) pour modéliser les matériaux granulaires comme un assemblage de grains en interactions les uns avec les autres par des lois de contact (sans lois de comportement entre les champs du continuum).

Ce schéma fait apparaître la diversité de la représentation de la matière par les méthodes classiques. Celles-ci ont une approche plus ou moins "particulaire" : la matière peut être représentée soit par des éléments (MEF), soit à la fois par des particules et un domaine d'influence associé (SPH), soit par de vrais "grains" en contact les uns avec les autres (méthode des éléments discrets).

Cependant, le point commun à ces 3 méthodes est l'association spatiale des points de calculs (noeuds pour la MEF, particules pour la SPH et les éléments discrets) avec la matière. Au

FIGURE 1.25: Positionnement de la MEFPIL parmi les autres méthodes numériques.



contraire, la particularité de la MEFPIL est la déconnexion des points de calcul (noeuds) et de la matière (représentée par les particules Lagrangiennes). De ce fait, l'approche de la MEFPIL par rapport à la représentation de la matière est à la fois élémentaire et particulaire.

En conclusion nous avons pu mettre en évidence les 3 grandes exigences auxquelles il est nécessaire de répondre pour modéliser un mouvement de terrain dans son ensemble.

En analysant les méthodes numériques classiquement utilisées par rapport à ces critères, il résulte qu'il est difficile de concilier les grandes transformations et le suivi sans diffusion des paramètres mécaniques et des variables d'histoire. Les méthodes type "PIC", avec une double discrétisation, présentent, elles, un caractère tout à fait flexible vis-à-vis de ces deux exigences.

Nous avons donc choisi de travailler, dans la suite de ces travaux, avec la MEFPIL, qui permet une intégration numérique plus précise que la MPM, même si ces deux méthodes restent proches sur le principe.

Le code utilisé tout au long de cette thèse est basé sur la MEFPIL : il s'agit du code nommé Ellipsis, développé à l'origine à l'université de Monash, en Australie (Moresi et Solomatov, 1995; Moresi *et al.*, 2003). Présentons les principales caractéristiques de ce code.

#### 1.4.4 Présentation du code Ellipsis

##### Une résolution en vitesse basée sur la viscosité

Ellipsis a été développé initialement pour des problèmes de mécanique des fluides appliqués à la géophysique, par exemple la convection du manteau terrestre (O'Neill *et al.*, 2006). De ce fait, le code a donc été fortement influencé par cette approche fluide.

Tout d'abord, la résolution mécanique s'appuie sur l'équation de Navier-Stokes de conserva-

tion de la quantité de mouvement qui s'exprime :

$$\rho \left( \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) = -\text{grad } p + \text{div } 2\eta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{f}, \quad (1.56)$$

avec  $\mathbf{v}$  la vitesse,  $\rho$  la masse volumique du matériau,  $p$  la pression,  $\eta$  la viscosité dynamique,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  la partie déviatoire du taux de déformation et  $\mathbf{f}$  la force volumique.  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  est la dérivée particulaire de la vitesse. En considérant qu'il n'y a pas de terme d'advection dans l'expression de la dérivée particulaire (la MEFPIIL utilise les variables de Lagrange, voir chapitre précédent, section 1.4.2), cette expression n'est autre que la deuxième loi de Newton.

Comme l'hypothèse d'écoulement lent, donc d'inertie faible, a été faite, le terme dépendant de l'accélération dans cette équation est donc négligé.

De plus, dans la forme discrète du problème, la matrice de résolution numérique élémentaire  $\mathbf{k}^e$  (reliant forces et vitesses nodales) s'exprime en fonction de la matrice constitutive visqueuse  $\mathbf{D}_v$  :

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T(x, y) \mathbf{D}_v \mathbf{B}(x, y) d\Omega^e, \quad (1.57)$$

avec  $\Omega^e$  le volume de l'élément considéré et  $\mathbf{B}(x, y)$  la matrice constituée des dérivées des fonctions de forme au point  $M(x, y)$ .  $\mathbf{D}_v$  a la forme suivante :

$$\mathbf{D}_v = \begin{pmatrix} \xi + 2\eta & \xi & \xi & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \xi + 2\eta & \xi & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \xi & \xi + 2\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\eta \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

avec  $\eta$  la viscosité et  $\xi$  le deuxième paramètre visqueux (d'après cette expression de  $\mathbf{D}_v$ ,  $\xi$  et  $\eta$  sont les équivalents 'visqueux' des coefficients de Lamé élastiques  $\lambda$  et  $\mu$ ).

Cette matrice élémentaire  $\mathbf{k}^e$  étant basée sur une relation constitutive visqueuse, nous la nommerons par la suite 'matrice de viscosité élémentaire' (même si des problèmes quasi-élastiques peuvent être résolus dans Ellipsis). De même, nous utiliserons le terme de 'matrice de viscosité globale'. Comme dans la plupart des codes basés sur la viscosité, les inconnues nodales sont des vitesses (plutôt que des déplacements).

L'implantation de la visco-élasticité de type Maxwell a été considérée en faisant le choix de conserver cette matrice de résolution visqueuse (voir (Moresi *et al.*, 2003) pour le détail de l'implantation). La résolution se base sur une formulation en temps du problème, de type Euler implicite puisque l'équation différentielle sur la contrainte suppose :

- une différenciation à l'ordre 1 du terme dérivé,
- un terme non dérivé supposé inconnu (valeur à  $t + \Delta t_e$  plutôt qu'à  $t$ )

Cette équation différentielle, obtenue en sommant les taux de déformation visqueux et élastiques, s'écrit donc :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{tot}^{t+\Delta t_e} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t_e}}{\mathbf{D}_v} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t_e} - \boldsymbol{\sigma}^t}{\mathbf{D}_e \Delta t_e} \quad (1.59)$$

avec  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{tot}^{t+\Delta t_e}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t_e}$  les tenseurs de taux de déformation total et de contrainte au pas de temps actuel et  $\boldsymbol{\sigma}^t$  le tenseur de contrainte au pas de temps précédent.  $\mathbf{D}_v$  et  $\mathbf{D}_e$  sont respectivement les matrices constitutives visqueuse et élastique.

En cherchant à relier  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{tot}^{t+\Delta t_e}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t_e}$ , il est possible d'extraire une matrice constitutive de viscosité "effective" (Dufour, 2002). C'est cette matrice (fonctions de 2 paramètres effectifs  $\eta_{eff}$  et  $(K_v)_{eff}$ ) qui est à la base de la résolution des problèmes visco-élastiques dans Ellipsis. La viscosité effective  $\eta_{eff}$  s'exprime en fonction des modules de cisaillement visqueux et élastique ( $\eta$  et  $\mu$ ). Le module de compressibilité volumique effectif  $(K_v)_{eff}$  est, lui, fonction des modules volumiques élastique ( $K_e$ ) et visqueux ( $K_v = \xi + 2/3\eta$ ) :

$$\eta_{eff} = \frac{1}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\mu\Delta t_e}} \quad \text{et} \quad (K_v)_{eff} = \frac{1}{\frac{1}{K_v} + \frac{1}{K_e\Delta t_e}} \quad (1.60)$$

*Remarque : Ces expressions sont similaires à celles du module équivalent pour 2 lois rhéologiques associées en série, dans un cas 1D.*

D'après la première équation, plus  $\eta$  est important vis-à-vis de  $\mu\Delta t_e$ , et plus la viscosité effective est proche de  $\mu\Delta t_e$ . Les déformations de cisaillement sont donc dictées par une loi de plus en plus proche de l'élasticité.

Une autre manière de comprendre cette équation est celle-ci : plus le pas de temps  $\Delta t_e$  est faible devant le temps de relaxation de Maxwell  $\frac{\eta}{\mu}$ , moins la relaxation des contraintes (par effet visqueux) est importante sur ce pas de temps.

*Remarque : Nous considérons que ce temps de relaxation est le même pour les paramètres volumiques et pour les paramètres de cisaillement. Les paramètres doivent ainsi respecter la condition suivante dans Ellipsis :  $\frac{\eta}{\mu} = \frac{K_v}{K_e}$ .*

En définitive, en modulant les paramètres et le pas de temps, nous déterminons un comportement plus ou moins élastique ou visqueux. Nous pouvons ainsi obtenir, au niveau d'un pas de temps, un comportement quasi élastique avec la formulation visqueuse : il suffit pour cela de considérer des valeurs de  $K_v$  et  $\eta$  infiniment grandes devant  $K_e\Delta t_e$  et  $\mu\Delta t_e$ . De même, dans un calcul entier, si la "durée" du calcul (dans le sens de la somme de tous les pas de temps) est très inférieure au temps de relaxation, le comportement est alors quasi-élastique sur toute la simulation. Dans ce cas, les variables  $K_v$  et  $\eta$ , qui ne dictent plus le comportement mais qui restent indispensables à la résolution, ne sont plus que des variables numériques.

Il faut souligner dans Ellipsis la distinction entre le pas de temps d'advection  $\Delta t$ , et le pas de temps matériau  $\Delta t_e$  (Moresi *et al.*, 2003). D'un côté,  $\Delta t$  sert à discrétiser le mouvement effectif de la matière. Par exemple, il doit être tel que la taille  $L$  des éléments soit toujours supérieure au déplacement maximum  $V\Delta t$  de chaque particule sur un pas de temps ( $V$  étant la vitesse), afin que les particules parcourent bien tous les éléments sans en sauter. D'un autre côté,  $\Delta t_e$  est utilisé pour écrire la différenciation correspondant à la relaxation visco-élastique (voir l'équation 1.59). En fin d'incrément, toutes les variables (contraintes, variables d'histoire, ...) sont calculées au pas de temps  $t + \Delta t$ .

Il a été montré que la condition  $\Delta t < \Delta t_e$  devait être respectée pour assurer la stabilité de la résolution (Dufour, 2002). En pratique, dans tous les résultats présentés dans cette thèse, nous avons considéré  $\Delta t = 0.98 \Delta t_e$  en début de calcul.

## Discrétisation en éléments, en particules

A l'heure actuelle, Ellipsis est développé uniquement en 2D déformation plane. La discrétisation de l'espace est assurée par des éléments quadrilatéraux en interpolation linéaire : les Q4.

Soit  $M$  un point d'un élément donné, de coordonnées  $(\zeta_1, \zeta_2)$  dans le repère naturel de l'élément. Pour un Q4, les fonctions de forme associées à chacun des nœuds sont :  $N_1(\zeta_1, \zeta_2) =$

$(1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2)/4$ ,  $N_2(\zeta_1, \zeta_2) = (1 - \zeta_1)(1 + \zeta_2)/4$ ,  $N_3(\zeta_1, \zeta_2) = (1 + \zeta_1)(1 - \zeta_2)/4$  et  $N_4(\zeta_1, \zeta_2) = (1 + \zeta_1)(1 + \zeta_2)/4$ . L'approximation linéaire en  $M$  d'une variable  $V$  s'exprime alors :

$$V(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{i=1}^4 N_i(\zeta_1, \zeta_2) V_i \quad (1.61)$$

On parle d'approximation linéaire, ou plutôt 'bilineaire' car, contrairement aux éléments triangulaires, les fonctions de forme sont le produit de deux fonctions affines (de variables indépendantes). Le terme en  $\zeta_1\zeta_2$  de ce produit implique que la forme du champ interpolé n'est pas véritablement un plan, ce qui peut parfois poser quelques problèmes (voir section 2.2.2).

Il est important de noter que, dans la formulation en 2D déformation plane, à la différence de la formulation 2D simple, la troisième dimension n'est pas totalement absente du problème mécanique. Bien sûr, les équations de résolution ne sont pas écrites dans cette direction hors plan car les vitesses sont nécessairement nulles. Cependant, la contrainte existe dans cette direction, et si l'état 3D du tenseur de contrainte, ou de son incrément, est nécessaire dans le calcul (comme c'est le cas en plasticité), elle est alors calculée, comme les autres composantes de contrainte, à partir de la matrice constitutive. Sa valeur dépend notamment de la déformabilité volumique (visqueuse ou élastique) du matériau.

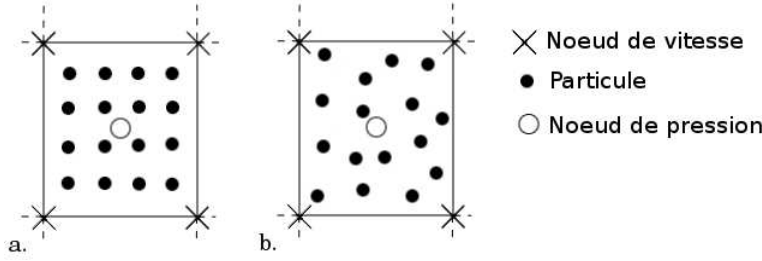
D'après la partie 1.4.3, la MEFPIIL est basée sur l'utilisation -dans une configuration donnée- des particules Lagrangiennes comme points d'intégration. Nous avons vu également, que par rapport à une intégration de type quadrature de Gauss classique, il faut plus de points d'intégration étant donné que ceux-ci ont une position non maîtrisée dans la MEFPIIL. Moresi *et al.* (2003) ont étudié l'influence du nombre de points d'intégration sur le calcul de convection d'un matériau visco-élastique. Le calcul de référence a été mené sans utiliser la MEFPIIL avec 4 points de Gauss (c'est-à-dire fixes, aux positions optimum prévue par l'intégration de Gauss classique), et dans ce cas une erreur due au maillage de l'ordre de 2,8 % a été trouvée. Avec la MEFPIIL et 4 points d'intégration, Moresi *et al* ont mis en évidence que cette erreur était augmentée d'environ 10 % (soit égale à environ 3,1 %) alors qu'elle était augmentée de seulement 3% pour 16 points d'intégration. Les modèles que nous élaborons sont donc constitués d'éléments à 16 points d'intégration en début de calcul. Bien sûr, cette quantité est susceptible de changer quelque peu au cours de la modélisation. Cependant, ce nombre reste relativement stable grâce à des processus de "reproduction" et de "fusion" des points d'intégration qui sont programmés dans Ellipsis, en cas de manque ou de surnombre de particules dans un élément (Moresi *et al.*, 2003).

Cette discrétisation élémentaire et particulière est finalement illustrée dans la figure 1.26. Remarquons qu'en plus des 4 nœuds externes (sur lesquels les vitesses sont calculées), un cinquième nœud central est utilisé pour calculer la pression comme deuxième inconnue en plus de la vitesse. Voyons l'intérêt et le principe d'une telle formulation, dite formulation mixte.

### Une formulation mixte

Ce type de formulation permet de traiter les problèmes en incompressibilité. Initialement proposé par Herrmann (1965), la formulation permet de faciliter la résolution numérique en découplant les équations portant sur les termes déviatoires et sur les termes isotropes. En effet, en cas d'incompressibilité les modules mécaniques des termes isotropes sont d'ordre de grandeur bien supérieur aux modules de la partie déviatoire, et le système à résoudre devient mal conditionné. Une nouvelle inconnue nodale est donc considérée en plus des vitesses

FIGURE 1.26: Éléments de type  $Q_4$ . Position des particules dans la configuration initiale du calcul (a.) et dans une configuration quelconque (b).



nodales : il s'agit dans notre cas de la pression, associée à un nœud supplémentaire, au centre de l'élément.

En plus de l'équation de conservation de la quantité de mouvement ( $\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0$ ), l'équation de compressibilité ( $\text{div } \mathbf{v} + \varepsilon_v = 0$ ) est considérée dans cette résolution ( $\mathbf{v}$  étant le vecteur vitesse et  $\varepsilon_v$  la déformation volumique). Ces deux équations s'expriment également sous la forme :

$$\text{div } (2\eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \text{grad } p + \mathbf{f} = 0 \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{v} + \frac{p}{K_v} = 0 \quad (1.62)$$

avec  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  la partie déviatoire de la matrice de taux de déformation.

L'application de la méthode des éléments finis à ces 2 équations permet d'obtenir le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

avec  $\mathbf{G}$  l'opérateur gradient,  $\mathbf{G}^T$  sa transposée,  $\mathbf{M}$  la matrice prenant en compte l'inverse de la compressibilité pour tous les matériaux du modèle,  $\mathbf{K}$  la matrice de viscosité globale,  $\mathbf{F}$  le vecteur des forces extérieures appliquées aux nœuds,  $\mathbf{v}$  le vecteur des vitesses nodales et  $p$  le vecteur des pressions aux nœuds centraux.

La résolution de ce système à deux types d'inconnues s'effectue ensuite, de manière classique pour ce type de problème, avec un algorithme de type Uzawa :

A partir de la première équation, une composition par  $\mathbf{G}^T \mathbf{K}^{-1}$  donne :

$$\mathbf{G}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{v} + \mathbf{G}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G} p = \mathbf{G}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}, \quad (1.64)$$

qui d'après la seconde équation du système peut être simplifiée de la manière suivante :

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G} - \mathbf{M}) p = (\mathbf{G}^T \mathbf{K}^{-1}) \mathbf{F} \quad (1.65)$$

C'est cette équation unique de forme  $\hat{\mathbf{A}} p = \hat{\mathbf{F}}$  qui est résolue dans Ellipsis pour obtenir  $p$  au nœud central, et par la suite  $\mathbf{v}$  aux nœuds du  $Q_4$ .

L'équation 1.65 est valable pour des matériaux compressibles ou non. Dans la cas de l'incompressibilité, la résolution est menée en considérant simplement  $\mathbf{M}=0$ .

### Application de conditions aux limites

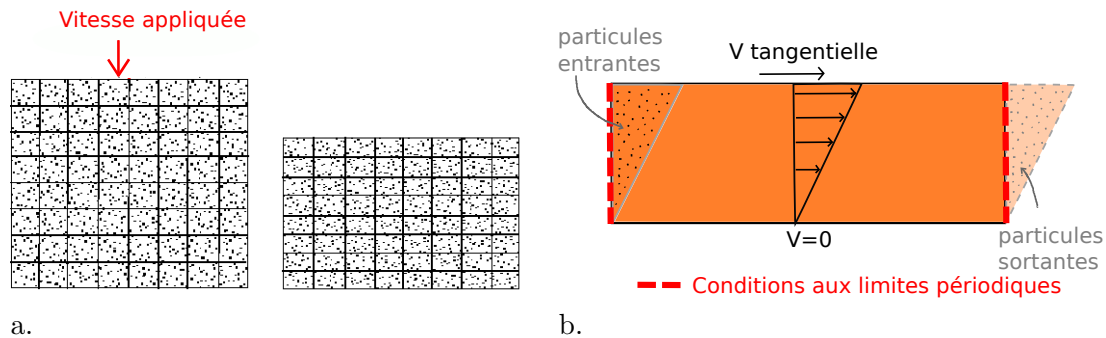
Il faut souligner une particularité de la MEFPIIL par rapport à une MEF classique en ce qui concerne l'application des conditions aux limites. Le maillage servant uniquement de grille de calcul, et non à discrétiser la matière, il n'est pas affecté par la déformation du matériau d'étude. Pendant un calcul, le maillage reste donc fixe, sauf si la cinématique au bord du



modèle est connue et constitue un chargement à appliquer. Dans ce dernier cas, la grille de calcul peut être réadaptée artificiellement, afin de suivre le matériau sans qu'il y ait d'élément vide ou au contraire de particules qui sortent du maillage. Un exemple d'application d'une condition en vitesse normale de compression est donné à la figure 1.27a.

De plus, pour le cas particulier des modèles d'extension infinie dans une direction, l'application de contrainte ou de vitesse tangentielles est possible sans modifier le maillage. En effet, dans Ellipsis les couches infinies sont décrites par des modèles où la matière est suivie par des conditions aux limites "périodiques" plutôt que par une déformation du maillage. Le principe de ces conditions aux limites particulières est de faire circuler les particules en circuit fermé d'un bord à l'autre de la couche : toute particule sortante sur un bord réintègre directement l'autre bord de la couche infinie (voir figure 1.27b).

FIGURE 1.27: Position des nœuds et particules avant et après l'application d'une condition aux limite en vitesse normale (a), conditions aux limites périodiques pour un modèle de couche infinie (b)



Finalement, il est possible, avec Ellipsis, d'appliquer des conditions aux limites en vitesses normales et tangentielles, et en contraintes de cisaillement. Par contre, il est impossible d'appliquer une condition aux limites en contrainte normale : en effet le maillage ne peut être réadapté au matériau car, dans ce cas, la cinématique de celui-ci est inconnue (c'est même le problème à résoudre). Le calcul mènerait donc (selon la sollicitation) à un vidage en particules de certains éléments ou à une sortie de maillage de particules.

\*  
\* \*

A partir de cette analyse bibliographique, il ressort que la transition solide-fluide des sols lors de l'amorçage des mouvements de terrain de type coulée, et la transition fluide-solide lors de l'arrêt résultent de phénomènes tout à fait connus expérimentalement. Il n'existe pourtant pas à notre connaissance de modèle de comportement de transition. Les objectifs de cette thèse sont donc :

- de développer un modèle de comportement adapté à une modélisation solide et fluide, à l'aide de critères de transition pertinents,
- et de l'appliquer aux mouvements de terrain de type coulée, à partir de l'implantation du modèle dans un code basé sur la MEFPIIL (Ellipsis), méthode qui a un fort potentiel vis-à-vis des caractéristiques majeures des mouvements de terrain.



## Chapitre 2

# Intégration de l'élasto-plasticité dans Ellipsis

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Prise en compte de la plasticité de manière explicite . . . . .</b>	<b>66</b>
2.1.1	Formulation globale . . . . .	66
2.1.2	Calcul des déformations locales . . . . .	68
2.1.3	Benchmarks . . . . .	70
2.1.4	Influence du chargement . . . . .	76
<b>2.2</b>	<b>Plasticité et discrétisation élémentaire . . . . .</b>	<b>79</b>
2.2.1	Notion de contrainte cinématique . . . . .	79
2.2.2	Gestion du champ de pression . . . . .	81
2.2.3	Extension de la formulation mixte à la loi élasto-plastique . . . . .	88
2.2.4	Gestion des éléments hétérogènes en plasticité . . . . .	91
<b>2.3</b>	<b>Analyse de stabilité de pentes heuristiques . . . . .</b>	<b>94</b>
2.3.1	Comparaison MEFPIL / équilibre limite . . . . .	94
2.3.2	Comparaison MEFPIL / MEF Lagrangienne . . . . .	97
2.3.3	Influence du matériau de remplissage pour les modèles à bords libres	100

---

Du fait de l'utilisation initiale d'Ellipsis pour les problèmes de type fluide, beaucoup de lois visqueuses y ont été implantées. Par ailleurs, la visco-élasticité (de type Maxwell) a été introduite dans le code pour décrire des problèmes de géophysique (Moresi *et al.*, 2003), comme le développement de plis géologiques (Mühlhaus *et al.*, 2002). Cependant, ce code n'a jamais été utilisé avec de vraies lois élasto-plastiques (au sens de lois générant des déformations permanentes), alors que ce comportement est primordial pour décrire les géomatériaux. La première étape de notre travail a donc été l'introduction de la plasticité dans Ellipsis.

La première partie de ce chapitre présente la prise en compte, de manière générale, des déformations plastiques dans la résolution et l'implantation, en particulier, de la loi élasto-plastique Plasol. 2 benchmarks homogènes sont menés pour tester le comportement élasto-plastique.

La deuxième partie de ce chapitre met en évidence l'interdépendance entre la plasticité et la discrétisation élémentaire. Nous y exposons les choix que nous avons faits dans le but d'améliorer au maximum les résultats.

Enfin, dans une troisième partie, nous nous intéressons à l'étude de stabilité de pentes heuristiques élasto-plastiques. Un parallèle est établi entre les résultats obtenus avec Ellipsis et ceux de 2 autres méthodes de calculs.

*Remarque introductive : Dans les travaux antérieurs à cette thèse, les calculs menés avec le code Ellipsis concernaient des matériaux incompressibles ou quasi-incompressibles et la conservation de la masse dans le modèle était inhérente à la conservation des volumes. Dans le cas des géomatériaux, le phénomène de consolidation entraîne une compressibilité relativement importante, et mène ainsi à la non conservation de la masse. Nous proposons en Annexe un procédé pour remédier à cette erreur.*

## 2.1 Prise en compte de la plasticité de manière explicite

Tout d'abord, intéressons nous à la prise en compte de la plasticité dans la résolution numérique de Ellipsis, indépendamment de la loi plastique choisie.

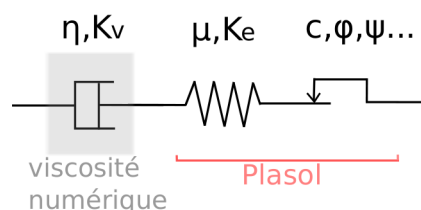
### 2.1.1 Formulation globale

Le comportement visco-élasto-plastique que nous souhaitons décrire *in fine* est basé, comme en visco-élasticité dans Ellipsis, sur la somme des taux de déformation (voir schéma du modèle rhéologique 1D à la figure 2.1) :

$$\dot{\epsilon}_{tot} = \dot{\epsilon}_v + \dot{\epsilon}_p + \dot{\epsilon}_e, \quad (2.1)$$

avec *tot* l'indice relatif au tenseur total, *e* à sa part élastique, *p* plastique, et *v* visqueuse. Notons que, comme en visco-élasticité, le pas de temps peut être choisi tel que le comportement soit quasiment élasto-plastique. La viscosité ne représente, dans ce cas, qu'un paramètre numérique de résolution.

FIGURE 2.1: Modèle rhéologique visco-élasto-plastique en 1D



Suivant le principe de la formulation mixte, cette somme peut être découpée en une partie isotrope et une partie déviatoire :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{tot} &= \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e \\ tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{tot}) &= tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v) + tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p) + tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e) \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  est la partie déviatoire du tenseur de taux de déformation et  $tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  sa trace.

À partir de ces expressions, les lois de comportement visqueuse et élastique permettent d'obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\check{\boldsymbol{s}}}{2\mu} + \frac{\boldsymbol{s}}{2\eta} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{tot} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v \\ \frac{\dot{p}}{K_e} + \frac{p}{K_v} = tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{tot}) - tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p) = tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e) + tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v), \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $\boldsymbol{s}$  est la partie déviatoire du tenseur de contrainte et  $p$  la pression. Pour pouvoir traiter des grandes transformations, la dérivée objective du tenseur  $\boldsymbol{s}$  (dérivée de Jaumann) est considérée ici. Celle-ci s'exprime :  $\check{\boldsymbol{s}} = \dot{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}\boldsymbol{W}$ , où  $\boldsymbol{W}$  est le tenseur de taux de rotation.

À partir de ces deux équations différentielles, considérons, comme pour l'implantation des lois visco-élastiques, une différenciation de type Euler-Implicite de  $\check{\boldsymbol{s}}$  et  $\dot{p}$  sur le pas de temps matériau  $\Delta t_e$ . Celle-ci permet d'obtenir les expressions suivantes pour  $\boldsymbol{s}$  et  $p$  :

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}^{t+\Delta t_e} = 2\eta_{eff} \left( \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{tot}^{t+\Delta t_e} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p^{t+\Delta t_e} \right) + \eta_{eff} \left( \frac{\boldsymbol{s}^t}{\mu\Delta t_e} \right) + \eta_{eff} \left( \frac{\boldsymbol{W}^t \boldsymbol{s}^t - \boldsymbol{s}^t \boldsymbol{W}^t}{\mu} \right) \\ p^{t+\Delta t_e} = (K_v)_{eff} \left[ tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{tot}^{t+\Delta t_e}) - tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p^{t+\Delta t_e}) + \frac{p^t}{K_e\Delta t_e} \right] \end{cases} \quad (2.4)$$

Enfin, en remplaçant ces deux expressions dans l'équation d'équilibre volumique  $\text{div}\boldsymbol{\sigma} = \text{div}(\boldsymbol{s} + p\mathbf{1}) = \boldsymbol{f}_{ext}$  (avec  $\mathbf{1}$  le tenseur unité), nous retrouvons l'équation sur la cinématique déjà présentée à l'expression 1.62 :

$$2\eta_{eff} \left[ \text{div} \left( \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{tot}^{t+\Delta t_e} \right) \right] + (K_v)_{eff} \left[ \text{grad} \left( tr\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{tot}^{t+\Delta t_e} \right) \right] = \boldsymbol{f} \quad (2.5)$$

Le terme de force  $\boldsymbol{f}$  est la somme de trois termes :

- Un terme de force correspondant aux efforts volumiques à distance :  $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_{ext}^{t+\Delta t_e}$
- Un terme de force correspondant aux contraintes déjà développées au pas de temps précédent (ce terme est dû à la "mémoire" élastique) :

$$\boldsymbol{f}_2 = -\eta_{eff} \left[ \text{div} \left( \frac{\boldsymbol{s}^t}{\mu\Delta t_e} \right) \right] - \eta_{eff} \left[ \text{div} \left( \frac{\boldsymbol{W}^t \boldsymbol{s}^t - \boldsymbol{s}^t \boldsymbol{W}^t}{\mu} \right) \right] - (K_v)_{eff} \left[ \text{grad} \left( \frac{p^t}{K_e\Delta t_e} \right) \right]$$

- Un terme de force prenant en compte le taux de déformations plastiques :

$$\boldsymbol{f}_3 = 2\eta_{eff} \left[ \text{div} \left( \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p^{t+\Delta t_e} \right) \right] + (K_v)_{eff} \left[ \text{grad} \left( tr\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p^{t+\Delta t_e} \right) \right]$$

Remarquons au passage, que le terme de force  $\boldsymbol{f}_2$  issu des contraintes au pas précédent, vient réduire la force externe (c'est une force dite "de rappel"), alors que la force issue des taux de déformations plastiques vient, au contraire augmenter la force appliquée au matériau.

Dans l'équation d'équilibre finalement obtenue en 2.5, les termes en  $t + \Delta t_e$  sont inconnus alors que les termes en  $t$  sont connus du pas de temps précédent. Les déformations plastiques de  $\mathbf{f}_3$  font ainsi partie des variables à calculer. Il y a plusieurs manières de résoudre un tel problème où, à la fois les taux de déformation totaux et plastiques sont cherchés. Une possibilité peut être de résoudre les deux variables en même temps, grâce à une résolution implicite par itérations.

Nous avons choisi de considérer des chargements suffisamment faibles pour que les taux de déformations plastiques n'évoluent que faiblement d'un pas de temps à l'autre. Ainsi les taux de déformations plastiques à un pas de temps donné peuvent être approximés dans la résolution par ceux à l'incrément précédent. Ces variables sont donc considérées de manière explicite. La nouvelle expression de  $\mathbf{f}_3$  devient donc :

$$\mathbf{f}_3 = 2\eta_{eff} \left[ \text{div} \left( \dot{\mathbf{e}}_p^t \right) \right] + (K_v)_{eff} \left[ \text{grad} \left( \text{tr} \dot{\mathbf{e}}_p^t \right) \right] \quad (2.6)$$

Enfin, précisons qu'en fin d'incrément, le calcul des contraintes est modifié afin de prendre en compte les déformations plastiques nouvellement calculées. En considérant la formulation mixte par ailleurs, les contraintes pour chaque particule  $m(x, y)$  sont déterminées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{s}^{t+\Delta t_e}(m) = 2\eta_{eff} \dot{\mathbf{e}}_{tot}^{t+\Delta t_e}(x, y) + \eta_{eff} \left( -2\dot{\mathbf{e}}_p^{t+\Delta t_e}(m) + \frac{\mathbf{s}^t(m)}{\mu \Delta t_e} + \frac{(\mathbf{W}^t \mathbf{s}^t - \mathbf{s}^t \mathbf{W}^t)(m)}{\mu} \right) \\ p^{t+\Delta t_e}(m) = P^{t+\Delta t_e} + (K_v)_{eff} \left( -\text{tr}(\dot{\mathbf{e}}_p^{t+\Delta t_e}(m)) + \frac{p^t(m)}{K_e \Delta t_e} \right), \end{cases} \quad (2.7)$$

avec  $P^{t+\Delta t_e}$  la solution en pression sur le nœud central, et  $\dot{\mathbf{e}}_{tot}^{t+\Delta t_e}(x, y)$  la part déviatoire du tenseur des taux de déformation, issue des solutions en vitesse sur les nœuds externes. Tous les termes fonction de  $m$  sont des quantités directement stockées sur les particules.

En définitive, notre formulation visco-élasto-plastique est de type Euler implicite / explicite, implicite pour l'expression de l'équation différentielle, explicite pour la prise en compte de la plasticité.

Voyons à présent comment, pour le cas particulier de la loi Plasol, les déformations plastiques sont calculées au niveau du point matériel.

### 2.1.2 Calcul des déformations locales

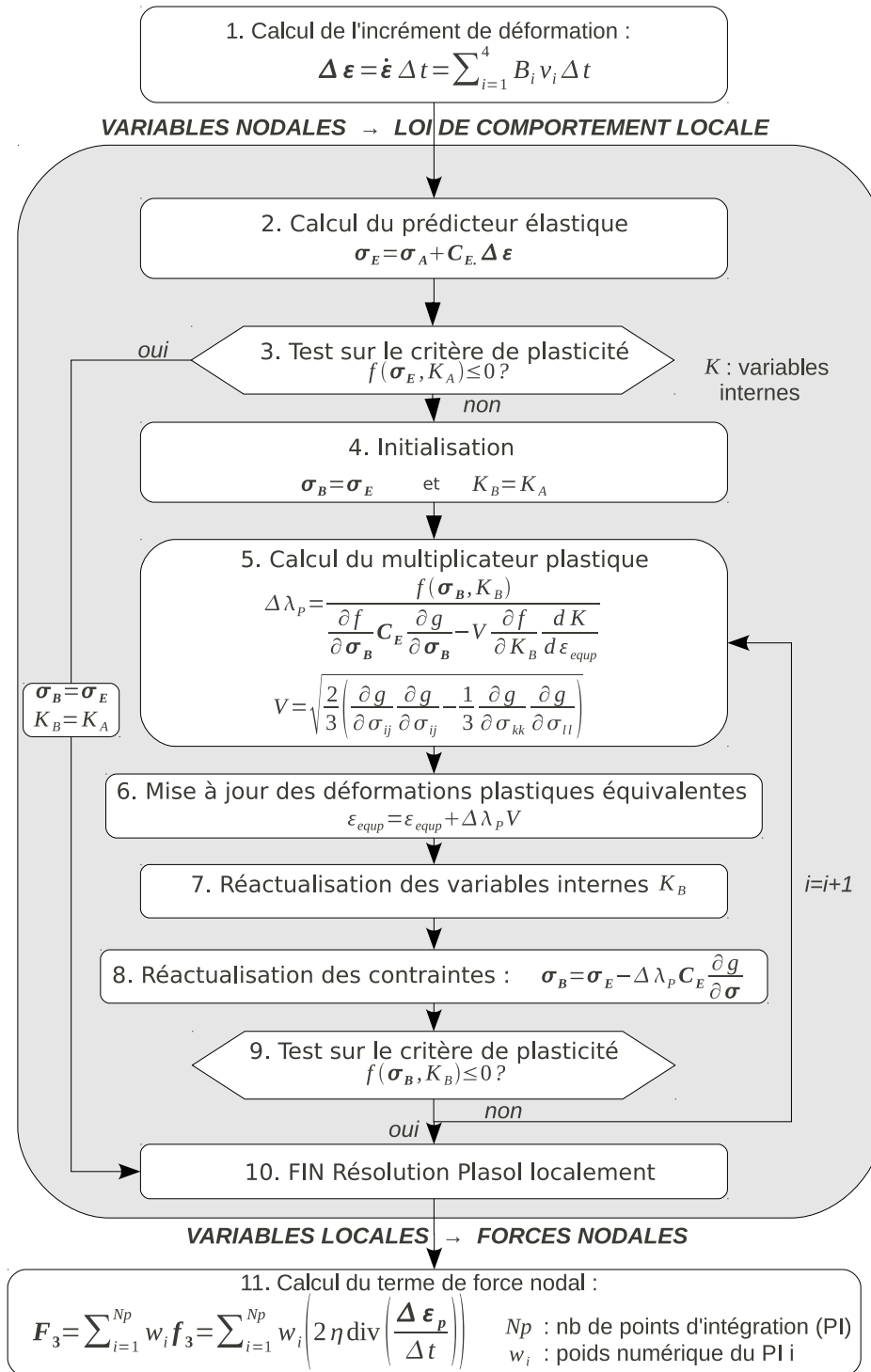
Plasol est résolue au niveau local des points d'intégration. Comme d'autres lois élasto-plastiques, elle permet, à partir d'un état de contrainte initial et d'un incrément de déformation appliqué, de déterminer l'incrément de déformation plastique et l'incrément de contrainte résultants pour un point matériel. L'algorithme de résolution est présenté à la figure 2.2.

La spécificité de son implantation dans Ellipsis -par rapport à un code EF classique-, réside dans le passage obligé de variables de vitesses (celles de la résolution globale en viscosité) à des incréments de déformation. 2 opérations intermédiaires sont nécessaires :

- avant l'entrée dans Plasol, les taux de déformations au niveaux des points sont intégrés linéairement sur  $\Delta t$  afin de revenir à un incrément de déformation,
- en fin de Plasol, l'incrément de déformation est divisé par l'incrément de temps  $\Delta t$ , avant d'être utilisé pour le calcul du terme de force  $\mathbf{f}_3$  (voir équation 2.6).

Comme nous venons de le voir au paragraphe précédent, nous avons considéré les déformations plastiques de manière explicite d'un incrément à l'autre. La routine de Plasol n'est donc pas intégrée dans les itérations globales de résolution du système, mais est appelée une fois par particule à la fin de chaque incrément de calcul. Plus précisément, nous avons inséré la routine après l'obtention des solutions nodales en vitesse et pression, et avant l'actualisation finale des contraintes. Ainsi, l'état de contrainte final, qui dépend de l'incrément de déformation plastique qui vient d'être obtenu (voir équation 2.7), est totalement concordant avec les limites élastique et plastique, et avec le degré d'écoulement.

FIGURE 2.2: Algorithme de résolution de Plasol



### 2.1.3 Benchmarks

Nous avons réalisé 2 essais simples, afin de tester l'implantation de la loi pour deux types de pilotage : celui en vitesse (qui sera testé par un essai oedométrique), et celui en contrainte



(qui sera testé par un essai de compression simple).

En effet, le calcul avec un pilotage en vitesse teste la bonne intégration de la loi dans le code. Par contre, comme le modèle est homogène, et que Plasol ne permet pas la localisation (voir partie 1.1.1), la réponse cinématique aux nœuds est nécessairement homogène et donc déterminée par les conditions aux limites. La modification dans le code de la résolution globale, par prise en compte des déformations plastiques de manière explicite, n'est donc pas testée dans un tel essai. Il est donc nécessaire de considérer un essai cette fois piloté en contraintes, où la cinématique aux nœuds dépend entièrement de la résolution.

### Essai piloté en vitesse : l'essai œdométrique

Le modèle, homogène, est un carré de matériau  $1 \times 1$ , (l'échelle importe peu puisque le matériau est non pesant). Il est discrétisé en  $8 \times 8$  éléments. Les paramètres élasto-plastiques choisis sont les suivants :

TABLE 2.1: Paramètres élasto-plastiques de l'essai œdométrique

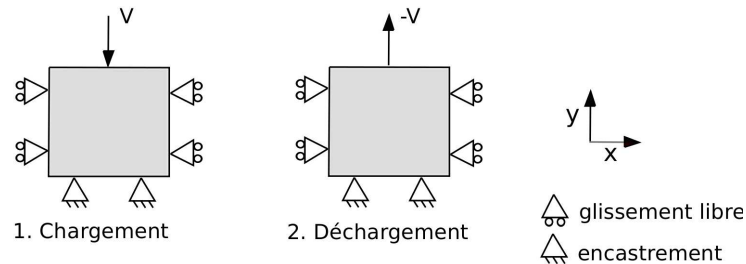
$E$ (MPa)	$\nu$	$\varphi_{e0} = \varphi_{c0}$ (°)	$C_0$ (kPa)	$\varphi_{ef} = \varphi_{cf}$ (°)	$C_f$ (kPa)	$\psi_e = \psi_c$ (°)	$B_p$	$B_c$
2,5	0,2	1	1	28	10	5	0,01	0,02

Les paramètres visqueux ( $\eta = 2.10^{15}$  Pa.s et  $K_v = 2,7.10^{15}$  Pa.s) et le pas de temps matériau ( $\Delta t_e = 10^{-3}$  s) sont choisis de manière à ce que le temps d'application du chargement soit négligeable devant le temps de relaxation  $\eta/\mu$  pour que le comportement soit quasiment élasto-plastique au cours du calcul.

Les conditions aux limites appliquées sont (voir figure 2.3) :

- une vitesse nulle en base,
- un glissement libre latéralement,
- une vitesse normale verticale imposée au sommet du modèle (telle que les incréments de déformations soient de l'ordre de  $10^{-5}$ ). Le maillage est donc déformé dans cet essai comme nous l'avons expliqué en 1.4.4. Cette vitesse au sommet est d'abord dirigée vers le bas (compression), puis lorsque des déformations plastiques significatives sont atteintes (de l'ordre de  $10^{-3}$ ), elle change de sens et l'essai continue jusqu'à l'annulation de la contrainte verticale.

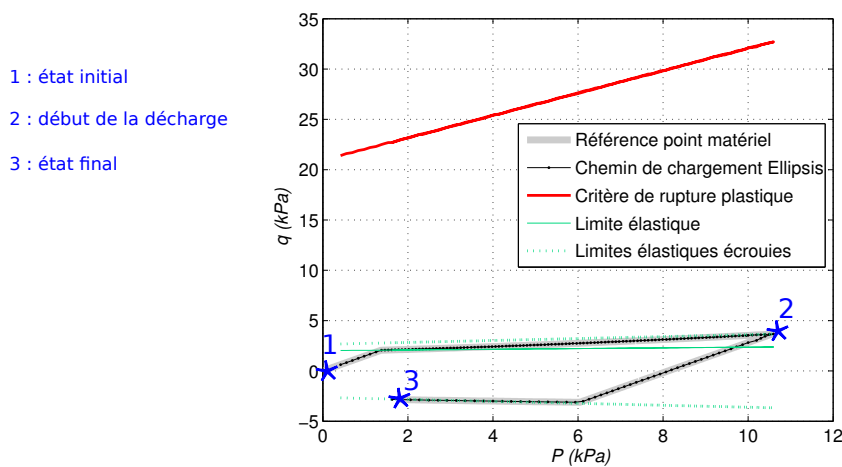
FIGURE 2.3: Conditions aux limites du modèle œdométrique



Les résultats sont comparés à ceux obtenus sur un point matériel avec la loi Plasol seule, indépendamment du code, pour un même chemin de sollicitation (sans oublier la condition de déformation nulle dans la direction hors plan).

La figure 2.4 représente, pour les 2 calculs, l'évolution de la contrainte  $q = \sigma_{yy} - \sigma_{xx}$  en fonction de la pression ( $x$  étant la direction horizontale et  $y$  la direction verticale).

FIGURE 2.4: Comparaison des résultats de l'essai œdométrique avec la référence sur un point matériel



Nous observons tout d'abord que les 2 courbes sont parfaitement superposées. De plus, le trajet de contrainte est concordant :

- avec la limite élastique : il y a changement de pente lorsque celle-ci est atteinte ;
- avec le critère de rupture plastique : le rapport de pente entre le critère limite de plasticité et le trajet de chargement est tel que ce critère ne sera jamais atteint dans cet essai, ce qui est cohérent pour un essai œdométrique où la rupture n'est pas rencontrée ;
- avec l'écroutissage : à la décharge, après une phase élastique, nous observons que le sol plastifie à nouveau, et ceci au niveau de la limite élastique écrouie pendant la phase de charge.

L'implantation de la routine Plasol au sein du code est donc validée.

Étudions maintenant le cas d'un essai de compression simple, piloté en contraintes. En plus de tester la résolution en élasto-plasticité, cette sollicitation est beaucoup plus intéressante vis-à-vis de la problématique des instabilités de terrain, qui sont des événements déclenchés par des chargements en contrainte (augmentation de la contrainte par une surcharge apportée au sol, déconfinement dû à une excavation, ou au déjaugement par une remontée de nappe phréatique, etc...).

### Essai piloté en contrainte : l'essai de compression simple

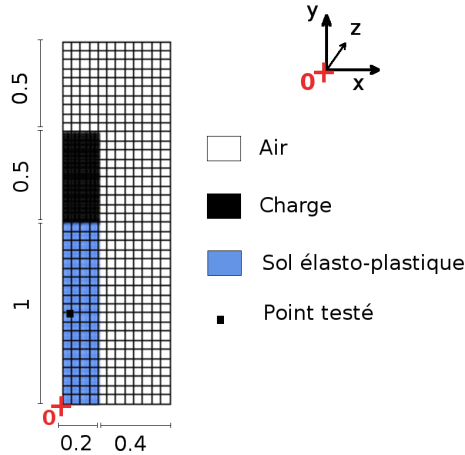
**Modèle Ellipsis** Dans la partie 1.4.4, nous avons expliqué qu'il est impossible avec Ellipsis d'appliquer des conditions aux limites en contrainte normale. Or, pour modéliser un essai de compression simple il faut tout d'abord prendre en compte la surface libre latérale, ce qui correspond à l'application d'une contrainte nulle. Une solution, avec Ellipsis, est de considérer, autour de l'échantillon de sol, un matériau environnant non pesant et de paramètres négligeables devant ceux du sol, où celui-ci peut se déformer librement.

*Remarque : Un rapport maximum de  $10^4$  doit cependant être respecté entre les viscosités effectives des différents matériaux du modèle pour garantir le bon conditionnement de la matrice de viscosité globale et permettre la convergence du calcul. Le matériau de remplissage est, dans la suite de ces travaux, appelé 'air' même si sa viscosité est bien supérieure à celle de*

l'air (pour rappel :  $\eta(\text{air})=10^{-6}$  Pa.s en réalité).

De plus, cet essai nécessite l'application d'une contrainte normale axiale. Nous avons choisi pour cela de définir, à l'intérieur du modèle, un troisième matériau qui a le rôle de charge. La géométrie complète du modèle est présentée à la figure 2.5.

FIGURE 2.5: Modèle pour l'essai de compression simple



Les conditions aux limites du modèle général sont toutes de type glissement libre. Le sol élasto-plastique étant non pesant, la dimension de l'échantillon importe peu ( $1 \times 0,2$  m).

Les paramètres physiques du sol et de la charge sont rassemblés au tableau 2.2.

Au tableau 2.3 sont présentés tous les paramètres qui ne sont pas physiques mais numériques (et donc n'interviennent pas dans la réponse du matériau testé). D'une part, la viscosité et le module de compressibilité effectifs de l'air sont négligeables vis-à-vis de ceux de la charge et du sol, avec un rapport de 1 % environ (rappelons que ces modules effectifs servent à définir la matrice de viscosité globale). Le comportement de l'air n'influence donc quasiment pas le comportement de l'échantillon de sol et la condition de contrainte latérale nulle est bien appliquée.

D'autre part, nous avons vu au paragraphe 1.4.4, que pour modéliser un matériau dont la relaxation visqueuse est négligeable (ce qui doit être le cas ici puisque nous voulons décrire un comportement élasto-plastique) il faut que la "durée" du calcul, au sens de la somme de tous les pas de temps, soit faible par rapport au temps de relaxation  $\eta/\mu$  ( $\mu$  étant le module de cisaillement élastique). D'après le tableau 2.3, et le pas de temps considéré ( $\Delta t \simeq \Delta t_e$  d'après le paragraphe 1.4.4 et  $\Delta t_e=0,01$  s ici), nous pouvons considérer le comportement quasi-élastoplastique pour plusieurs milliers de pas de temps.

Le chargement est piloté par une augmentation linéaire de la gravité de 0 à  $10 \text{ m/s}^2$  en 100 pas de temps.

TABLE 2.2: Paramètres physiques pour l'essai de compression simple

	$E$ MPa	$\nu$	$\varphi_{e0} = \varphi_{c0}$ °	$C_0$ kPa	$\varphi_{ef} = \varphi_{cf}$ °	$C_f$ kPa	$\psi_e = \psi_c$ °	$B_p$	$B_c$	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>
Sol EP	5	0,35	20	2	32	8	10	0,01	0,02	0
Charge	5	0,35	-	-	-	-	-	-	-	4000

Les résultats sont étudiés pour le point présenté dans la figure 2.5. Nous l'avons choisi relativement éloigné du matériau charge, car celui-ci n'étant pas plastique, des déformations

TABLE 2.3: Paramètres numériques pour l'essai de compression simple ( $\Delta t_e = 0,01$  s)

	$\eta_{eff}$ (Pa.s)	$(K_v)_{eff}$ (Pa.s)	Tps de relaxation (s)
Air	200 ( $=\eta$ )	4400 ( $=K_v$ )	-
Charge	$1,85 \cdot 10^4$	$4,6 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^5$
Sol	$1,85 \cdot 10^4$	$4,6 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^5$

moindres du sol sont probables à son voisinage (rappelons que les champs cinématiques sont continus dans la MEFPIIL, et qu'il n'y a pas d'interface entre les matériaux).

**Calcul de référence** Nous souhaitons comparer les résultats, comme pour le cas de l'essai oedométrique, avec les résultats d'une sollicitation identique sur un point matériel indépendant du code. Cependant, il faut souligner que, si dans le plan du modèle les sollicitations correspondent à l'application de contrainte, dans la direction hors plan il y a toujours une condition cinématique en vitesses (et déplacements) nuls. Le point matériel dont le comportement servira de référence devra en définitive être soumis aux sollicitations suivantes pour un pas de temps donné :

- En  $x$  (direction horizontale dans le plan du modèle) : un incrément de contrainte nul  $d\sigma_{xx} = 0$ ,
- En  $z$  (direction horizontale hors plan) : un incrément de déformation nul  $d\varepsilon_{zz} = 0$ ,
- En  $y$  (direction verticale) : un incrément de contrainte appliqué fixe  $d\sigma_{yy} = \text{cste}$ .

D'après l'algorithme de Plasol (figure 2.2), la loi -même indépendamment du code- est généralement pilotée à partir d'incrément de déformation. Il est également possible de la piloter en incréments de contrainte, à la condition de ne pas calculer de prédicteur élastique (étape 2 de l'algorithme), et de ne pas mettre à jour les contraintes (étape 8 de l'algorithme). Cependant, il est impossible d'avoir une résolution directe de la loi pour le pilotage mixte nécessaire dans ce benchmark. Nous avons donc écrit une résolution de type Newton Raphson, qui permet à partir d'une sollicitation  $d\sigma$  donnée dans les directions  $x$  et  $y$ , de retrouver la valeur de  $d\sigma_{zz}$  qui permette de répondre à la condition de déformation nulle dans la direction hors plan. L'algorithme est présenté à la figure 2.6.

**Résultats et analyse** Pour chacun des 2 calculs la différence de contrainte  $q = \sigma_{yy} - \sigma_{xx}$  est représentée en fonction de la déformée  $\varepsilon_{xx}$  (figure 2.7).

Tout d'abord, l'échantillon de sol modélisé avec Ellipsis présente bien une contrainte qui augmente finalement jusqu'à 20 kPa (poids de 10 kN appliqué sur une surface de 0,5 m.mL). De plus, les résultats sont très concordants avec le calcul de référence. Nous remarquons toutefois une légère différence, en fin de calcul, de la courbe obtenue par rapport à la référence. Cette différence apparaît à partir de la fin de l'augmentation de la gravité et, même si aucune charge ne s'ajoute plus à l'échantillon, la déformation horizontale continue alors d'augmenter légèrement. Nous pouvons à ce stade supposer qu'il s'agit d'un effet de la prise en compte explicite des déformations plastiques, entraînant probablement un retard dans la détection de la fin du chargement. Cependant cet effet est de faible ampleur ici.

Par ailleurs, nous avons vérifié, qu'en considérant plusieurs points dans l'échantillon (entre  $y=0$  à  $y=0,75$  m pour être relativement éloignés de la charge), nous obtenons les mêmes résultats : le modèle est bien globalement homogène.

En conclusion, l'implantation de la loi Plasol ainsi que la modification de la résolution globale dans Ellipsis sont bien validées.

FIGURE 2.6: Algorithme de Newton Raphson : réponse d'un point matériel sous sollicitation mixte

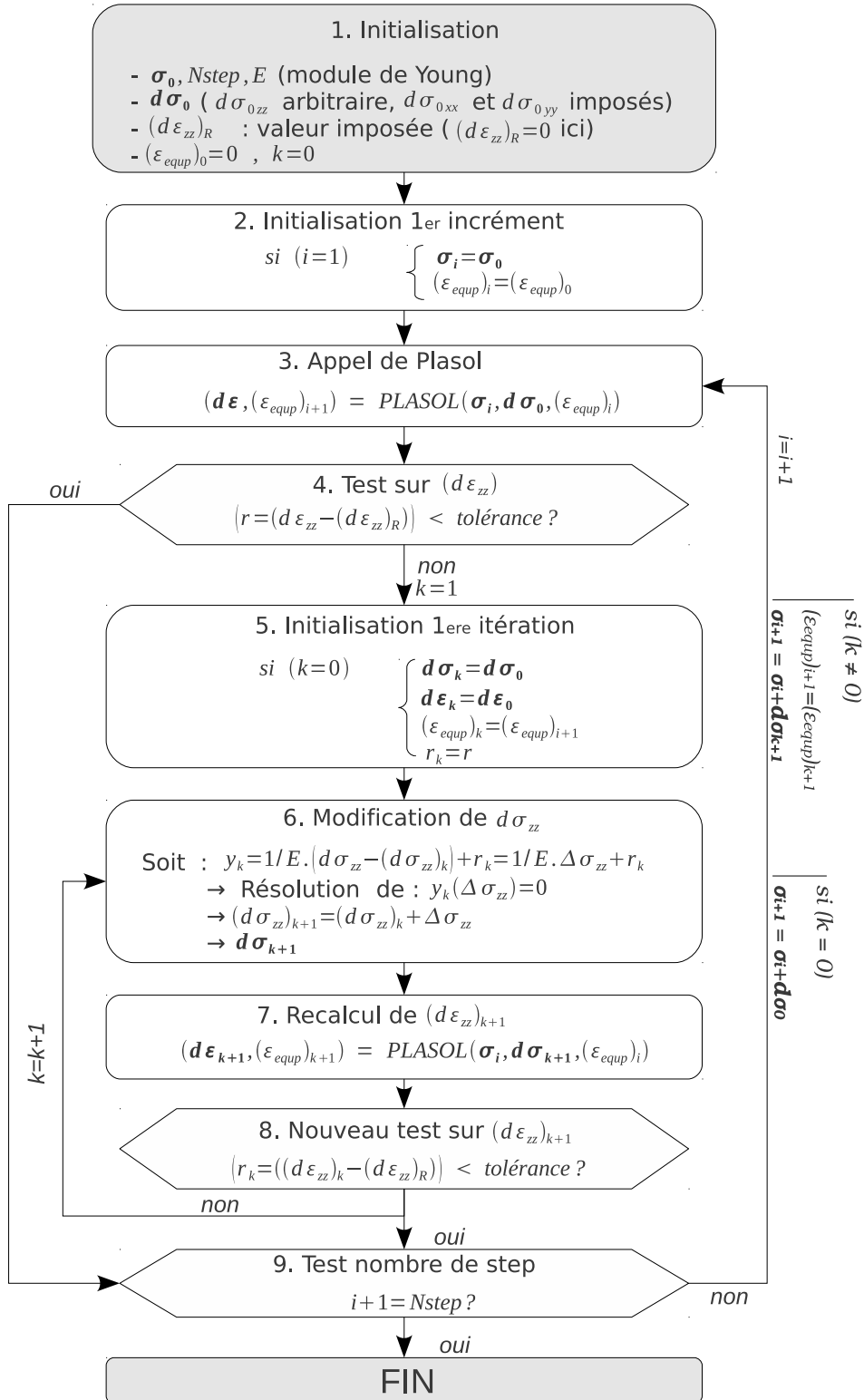
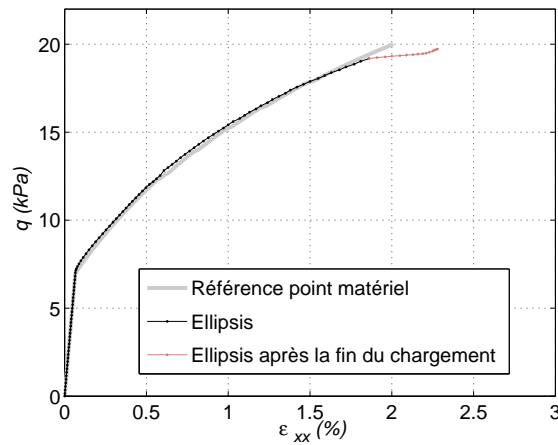


FIGURE 2.7: Comparaison des résultats point matériel seul / modèle Ellipsis



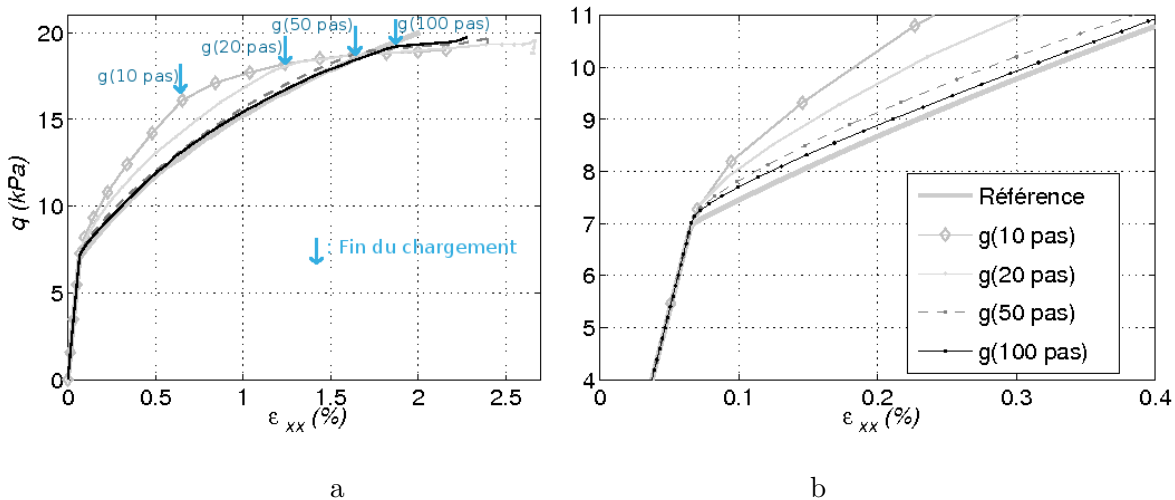
### 2.1.4 Influence du chargement

D'après la prise en compte explicite des déformations plastiques (voir paragraphe 2.1.1), les résultats sont susceptibles d'être dépendants de l'intensité des incréments de chargement. Étudions à présent cette influence de la sollicitation en se basant sur le modèle de compression simple précédemment étudié.

#### Influence de l'intensité du pas de chargement

Tout d'abord, considérons -comme au paragraphe précédent- une gravité croissante de manière continue, mais avec 4 valeurs différentes pour les incréments de charge. Dans le calcul présenté à la partie 2.1.3 les incréments de gravité étaient de  $0,1 \text{ m/s}^2$  ( $g$  appliquée en 100 incréments). Choisissons maintenant des incréments de  $0,2 \text{ m/s}^2$  ( $g$  en 50 incréments),  $0,5 \text{ m/s}^2$  ( $g$  en 20 incréments) et  $1 \text{ m/s}^2$  ( $g$  en 10 incréments). Les résultats en terme de contrainte-déformation sont présentés à la figure 2.8.

FIGURE 2.8: Influence de la taille des incréments de gravité pour une gravité croissante linéairement. Courbe entière (a), zoom sur l'entrée en plasticité (b).



Nous remarquons, que plus l'incrément de gravité est important, plus la courbe s'éloigne de

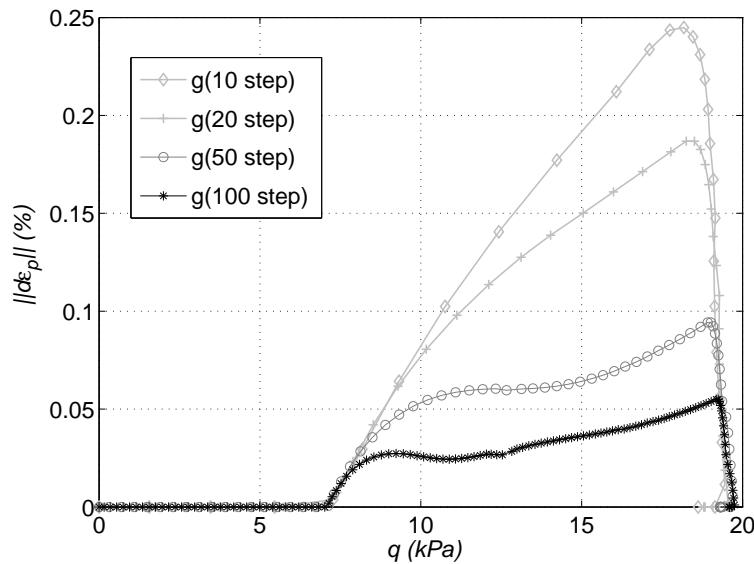
la courbe référence pendant le chargement (voir figure 2.8b). De plus, après la fin du chargement, les déformations  $\varepsilon_{xx}$  continuent d'autant plus à augmenter que  $dg$  est grand (figure 2.8a).

La différence entre les 4 calculs s'explique par le fait que le terme de force engendré par les déformations plastiques n'est pas exact au temps  $t$ , puisqu'il correspond au pas de temps précédent (voir expression de  $\mathbf{f}_3$  à l'équation 2.6). La prise en compte explicite des déformations plastiques engendre donc une imprécision sur les résultats pendant la charge. Notamment, cet effet est confirmé après la fin du chargement. Il semble qu'il y ait, à ce stade, un phénomène de rééquilibrage des déformations, puisque nous observons que les 4 courbes, au bout d'un nombre suffisant de pas de calculs au-delà de la fin du chargement, sont finalement très proches les unes des autres.

Dans le cas de ce modèle, la prise en compte explicite des déformations plastique semblent donc être satisfaisante dès que  $dg$  est inférieur à  $0,2 \text{ m/s}^2$ . Cette condition sur  $dg$  n'est par contre pas généralisable à d'autres modèles de volume différent, de masse volumique différente, etc... Une condition plus générale pourrait porter sur la variation, entre deux pas de temps, de l'incrément de déformation plastique (ou du taux de déformation plastique), qui pilote l'intégration dans le temps.

Afin d'établir un tel critère, nous avons tracé la courbe de la norme du tenseur  $d\boldsymbol{\varepsilon}_p$  par rapport à la contrainte  $q$  (figure 2.9).

FIGURE 2.9: Évolution de la norme du tenseur d'incrément de déformation plastique



Nous notons, à partir de cette courbe, que l'incrément limite de  $dg=0,2 \text{ m/s}^2$  (gravité en 50 step) correspond à une courbe de  $\|d\boldsymbol{\varepsilon}_p\|$  où les points sont séparés par des incréments d'un peu moins de 0,01 %. Cette valeur peut être retenue comme critère.

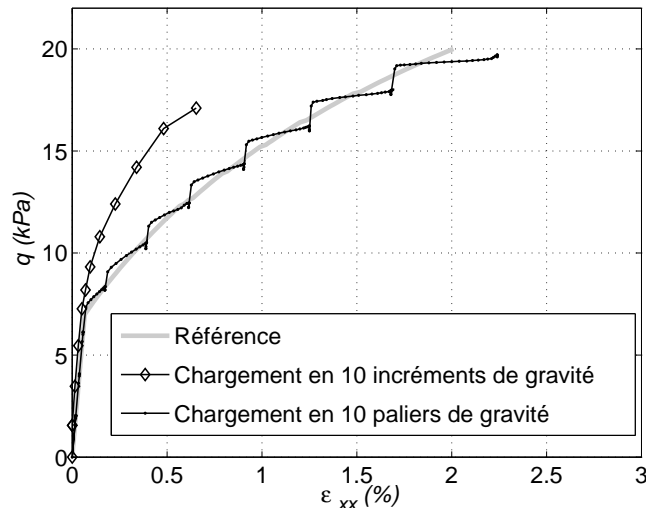
Par ailleurs, nous observons que les déformations plastiques ne s'annulent pas instantanément après la fin du chargement, mais que leur retour à zéro est progressif, en une douzaine d'incrément. Les déformations  $\varepsilon_{xx}$  observées après l'arrêt du chargement dans les courbes 2.7 et 2.8, sont donc de nature plastique et indépendantes d'une relaxation visqueuse.

### Comparaison chargement par gravité linéaire - chargement par palier de gravité

Pour des incréments de déformation très importants, les résultats en terme de contraintes-déformations peuvent être très éloignés de la réponse de référence, comme le montre la figure 2.8. Pour le cas d'une gravité appliquée en 10 incréments seulement, nous pourrions imaginer, pour améliorer les résultats, de laisser le système se rééquilibrer avant de charger par un autre incrément de gravité.

Considérons donc le précédent calcul où  $dg=1 \text{ m/s}^2$ . Après chaque incrément de chargement, nous laissons le système sans sollicitation supplémentaire pendant 10 incréments (chargement en 'palier de gravité'). Les résultats en terme de contrainte-déformation sont présentés sur la figure 2.10.

FIGURE 2.10: Comparaison des résultats pour une gravité continument croissante en 10 incréments (les résultats après l'arrêt du chargement ne sont pas représentés) et pour une gravité en 10 'paliers'



Il apparaît que la courbe obtenue pour ce nouvel essai est beaucoup plus proche de la courbe de référence (obtenue avec la loi seule), que la courbe du chargement continu de 10 incréments de gravité. La 'rigidité' (ou pente de la courbe contrainte-déformation) est surestimée au début du palier de chargement, mais elle diminue ensuite au cours du palier. Elle devient alors plus faible que celle de la courbe de référence : les déformations ont mis quelques incréments à s'équilibrer avec la force appliquée. Ceci s'explique encore une fois par la formulation explicite du problème en élasto-plasticité. Par contre, si les résultats sont bien meilleurs avec les paliers de chargement, le trajet en contrainte déformation est localement assez différent de la référence. Or, nous avons vu au chapitre 1, que le trajet de chargement est primordial en plasticité (il s'agit d'un comportement à variables d'histoire).

Dans la suite de ces travaux, nous considérons donc toujours une gravité appliquée de manière linéaire et continue avec des incréments de chargement qui doivent être suffisamment faibles pour que la résolution explicite en élasto-plasticité soit valable. Cette condition doit être respectée pour des raisons de précision mais pas de stabilité, et en la prenant en compte, le calcul en élasto-plasticité donne des résultats tout à fait précis.

En pratique, le critère de 0,01 % sur la variation de  $\|d\epsilon_p\|$  pourrait être adopté comme critère à ne pas dépasser au cours d'un chargement (cette vérification devant se faire a posteriori



pour un pas de temps donné).

Nous venons donc de voir que l'un des aspects numériques de l'implémentation de la plasticité dans Ellipsis était le choix d'un schéma de résolution (ici explicite vis-à-vis des déformations plastiques).

Intéressons-nous à présent à l'influence de la discrétisation spatiale sur la résolution en plasticité.

## 2.2 Plasticité et discrétisation élémentaire

L'objectif de cette partie, est de pointer les difficultés induites par la discrétisation élémentaire en élasto-plasticité, et de proposer des solutions concrètes pour améliorer les résultats.

Dans un premier temps, la notion de contrainte cinématique et ses conséquences possibles sont rappelées.

Nous revenons ensuite sur la particularité de l'interpolation bilinéaire avec les Q4, rappelons, dans ce contexte, les mesures classiques pour gagner en précision en élasticité, et présentons les mesures que nous avons choisies pour traiter -le plus précisément possible- l'élasto-plasticité (qui fait intervenir une contrainte cinématique).

Nous détaillons, par la suite, un procédé efficace au niveau de l'implémentation de la loi élasto-plastique pour éviter, même en plasticité, le locking dû à l'incompressibilité.

Enfin, bien qu'indépendante des contraintes cinématiques mais toujours liée à la discrétisation élémentaire, la problématique des éléments hétérogènes élasto-plastiques/visqueux à la frontière sol-air est exposée. Nous proposons une solution possible pour mieux prendre en compte le comportement dans de tels ces éléments.

### 2.2.1 Notion de contrainte cinématique

#### Définition du locking et contrainte d'incompressibilité




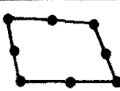
D'après Babuška et Suri (1992), dont les travaux ont largement contribué au développement des éléments finis : *"A numerical scheme for the approximation of a parameter-dependent problem is said to exhibit locking if the accuracy of the approximations deteriorates as the parameter tends to a limiting value."*

Ce phénomène apparaît, par exemple, lorsque le coefficient de Poisson  $\nu$  tend vers 0,5. Il se traduit, s'il y a convergence, par des résultats aléatoires qui peuvent présenter des motifs particuliers, dépendants du maillage (damiers, etc...)

Cependant, même pour des paramètres physiques proches de leur valeur limite, l'apparition de locking n'est pas inéluctable : elle dépend du type d'éléments finis choisi, et certains éléments sont plus susceptibles que d'autres de faire apparaître ce phénomène. Nagtegaal *et al.* (1974) ont étudié le comportement en incompressibilité (ou quasi-incompressibilité) de plusieurs éléments 2D déformation plane. Leur étude met en évidence la relation entre le phénomène de locking et le nombre  $R$  pour un élément donné, qui correspond au rapport du nombre de degrés de liberté par rapport au nombre de contraintes cinématiques. Si le nombre de degré de liberté est inférieur au nombre de contraintes ( $R < 1$ ), alors il est impossible de trouver une solution au problème cinématique. Le tableau de la figure 2.11 présente les valeurs  $R$  pour différents éléments.

Pour les Q4, éléments connus pour leur faible performance dans la résolution de problèmes en flexion ou en incompressibilité (Rice *et al.*, 1979; Nagtegaal *et al.*, 1974), le rapport obtenu est de 2/3 seulement. Le nombre de degré de liberté par élément est donné pour un réseau d'éléments d'extension infinie (les 2 degrés de liberté d'un nœud sont alors partagés entre 4

FIGURE 2.11: Évaluation d'éléments 2D déformation plane vis-à-vis de l'incompressibilité ou de la quasi incompressibilité d'après Nagtegaal et al. (1974)

	Element Type	$\frac{\text{Constraints}}{\text{Element}}$	$\frac{\text{Ratio Nodes}}{\text{Elements}}$	$\frac{\text{Ratio Deg.Freedom}}{\text{Constraints}}$
Plane Strain	 constant strain triangle	1	1/2	1
	 4-node quadrilateral	3	1	2/3
	 linear strain triangle	3	2	4/3
	 8-node quadrilateral	6 to 8	3	1 to 3/4

éléments, et au total chaque élément a donc 2 degrés de liberté). Expliquons à présent comment le nombre de contraintes cinématiques est calculé, pour comprendre ensuite comment il peut être réduit.

Les fonctions de forme bilinéaires des Q4 entraînent que la vitesse au point  $M(x, y)$  est approximée de la forme :  $v(x, y) = \mathbf{A} + \mathbf{B}x + \mathbf{C}y + \mathbf{D}xy$  (avec  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  des vecteurs fonctions des vitesses nodales). D'où l'approximation du champ de taux de déformation (les indices  $x$  et  $y$  sont relatifs à la composante des vecteurs) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}(x, y) = \frac{\partial v_x}{\partial x} = B_x + D_{xy} \\ \varepsilon_{yy}(x, y) = \frac{\partial v_y}{\partial y} = C_y + D_{yx}, \end{cases} \quad (2.8)$$

La condition d'incompressibilité  $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 0$  se traduit alors par 3 équations (ou contraintes cinématiques) :

$$\begin{cases} B_x + C_y = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Nous retrouvons donc  $R=2/3$ .

En pratique, l'incompressibilité peut être traitée avec des Q4 particuliers, possédant un nœud supplémentaire central où une inconnue nodale de pression est résolue (formulation mixte en vitesse-pression ou déplacement-pression). Ceci permet d'obtenir, sur chaque élément, la part isotrope des équations écrite pour un seul point, ce qui réduit à 1 le nombre de contraintes cinématiques ( $B_x + C_y = 0$ , puisque  $x = y = 0$ ). Une autre solution est de choisir des éléments plus adaptés.

### Contrainte cinématique de plasticité

D'après De Borst et Groen (1995), la prise en compte d'un comportement plastique dans un modèle en éléments finis induit, de la même manière que l'incompressibilité, une contrainte cinématique au problème discrétisé. En effet, la loi d'écoulement s'écrit :

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (2.10)$$

avec  $\dot{\lambda}$  le multiplicateur plastique, et  $g$  le potentiel plastique défini, pour l'exemple d'une surface de charge de type Mohr-Coulomb, par :

$$g = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)\sin\psi - \text{constante} \quad (2.11)$$

( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les contraintes principales et  $\psi$  l'angle de dilatance).

Soit, par ailleurs, le taux de déformation plastique volumique  $\dot{\epsilon}_v^p$  et le taux de cisaillement plastique  $\dot{\gamma}_v^p$  définis par :

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_2^p + \dot{\epsilon}_3^p \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}_v^p = \dot{\epsilon}_3^p - \dot{\epsilon}_1^p \quad (2.12)$$

A partir des équations 2.10, 2.11 et 2.12, il vient la relation suivante entre le taux de déformation volumique et le taux de cisaillement plastique :

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\gamma}_v^p \sin\psi \quad (2.13)$$

Cette équation constitue donc une autre contrainte cinématique qui est tout à fait spécifique au comportement plastique. La condition est d'autant plus contraignante pour un état de contrainte proche de la charge limite, puisque -les déformations élastiques étant proches de zéro dans ce cas- la contrainte cinématique porte alors sur les taux de déformations totaux. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la contrainte d'incompressibilité n'est qu'un cas particulier de la contrainte cinématique plastique, qui correspond au cas où  $\psi = 0$ .

La conséquence de cette contrainte cinématique est que la plasticité est souvent difficile à traiter numériquement avec les éléments finis, et d'autant plus avec des Q4. En pratique, plusieurs techniques spécifiques ont été développées pour améliorer les résultats en plasticité. L'intégration réduite pour les Q4 est par exemple utilisée (elle permet notamment d'empêcher l'apparition de locking en réduisant la contrainte cinématique).

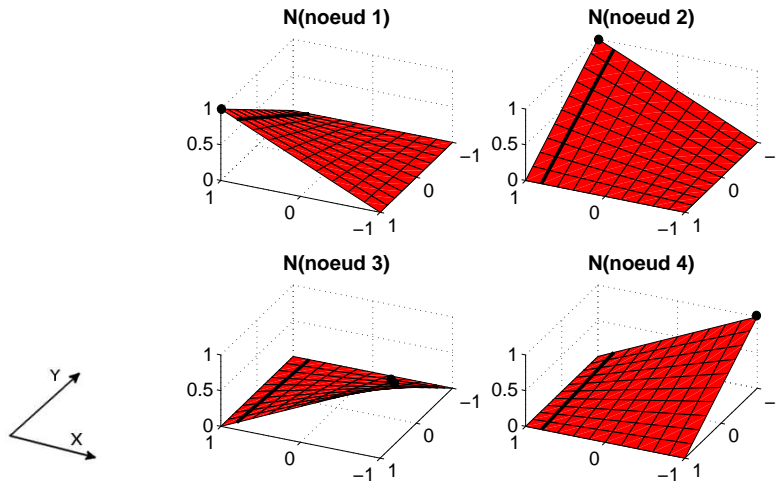
D'autres stratégies ont été développées. Nous pouvons citer, parmi elles, la méthode B-bar (Zienkiewicz *et al.*, 2005), dans laquelle la matrice de dérivées des fonctions de forme est modifiée (grâce à une résolution mixte en vitesse, déformation volumique et pression), ou la méthode de déformation améliorée ("enhanced-strain") proposée par Simo et Rifai (1990), où l'interpolation des déformations est enrichie par rapport leur champ classique.

À présent que la notion de contrainte cinématique est clairement définie, nous allons voir tout d'abord l'effet de la contrainte cinématique plastique dans le cas de l'approximation bilinéaire des Q4 en formulation mixte. Nous devons préciser ici, que pour l'instant les Q4 (en formulation mixte vitesse-pression) sont les seuls éléments utilisables dans Ellipsis, car ils sont les plus adaptés au schéma de résolution multigrille implanté dans le code (dans ce type de résolution la solution nodale est trouvée à partir d'itérations entre les résultats sur différents niveaux de maillage, plus fins ou plus grossiers (Dufour, 2002)).

## 2.2.2 Gestion du champ de pression

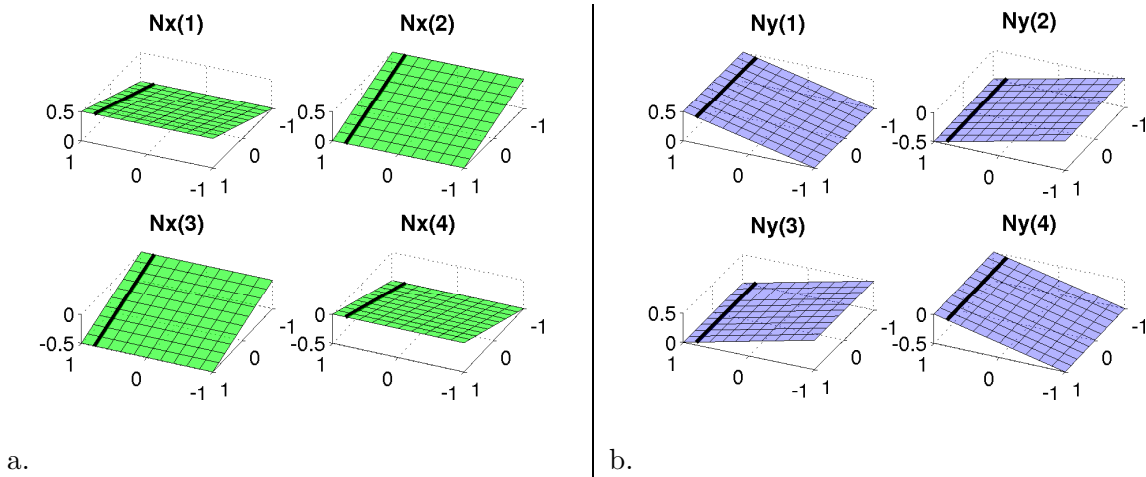
### Limites de l'interpolation avec les Q4

L'expression des fonctions de forme des Q4 a été rappelée dans la partie 1.4.4. La forme des surfaces d'approximation est représentée à la figure 2.12.

FIGURE 2.12: Fonctions de forme bilinéaires associées aux 4 nœuds d'un élément  $Q_4$ 

De plus, nous avons représenté le champ des dérivées des fonctions de forme à la figure 2.13. Cette illustration permet de visualiser que, dans une direction donnée du  $Q_4$ , les dérivées selon  $x$  et selon  $y$  n'ont pas le même degré d'approximation. Si nous considérons par exemple la direction  $y$  du profil en gras sur la figure, les fonctions  $N_x$  varient linéairement sur cet axe, alors que les fonctions  $N_y$  sont constantes. En effet, les équations des fonctions de forme ne sont pas celles de plans puisqu'elles présentent un terme en " $xy$ ".

En termes de géométrie, cette particularité traduit l'impossibilité de faire passer un plan (ou une surface donnée) par 4 points quelconques.

FIGURE 2.13: Champ des dérivées des fonctions de forme des  $Q_4$  selon  $x$  (a) et selon  $y$  (b)

Cette différence, selon la direction, du degré d'interpolation des champs dérivés est une faiblesse caractéristique des  $Q_4$ .

En effet, d'après la méthode des éléments finis, ces dérivées des fonctions de forme servent notamment à approximer le champ des déformations (voir équations 2.14 pour des inconnues nodales de type déplacement). Sur la direction  $y$  d'un élément,  $\varepsilon_{xx}$  varie donc de manière linéaire alors que  $\varepsilon_{yy}$  est constante (pour des inconnues nodales de type vitesse,  $\dot{\varepsilon}_{xx}$  et  $\dot{\varepsilon}_{yy}$  sont respectivement linéaire et constant par élément dans la direction  $y$ ), ce qui peut entraîner des perturbations dans la réponse. Voyons lesquelles.

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}(x, y) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} U_i \\ \varepsilon_{yy}(x, y) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} U_i \end{cases} \quad (2.14)$$

### Illustration des perturbations numériques en élasticité

Soit un modèle de type éléments finis très simple, constitué d'un matériau élastique pesant à surface libre, de hauteur 1 m et de largeur 0.5 m, discrétisé en 2 éléments Q4 (voir figure 2.14 pour un modèle par exemple réalisé avec Ellipsis, où l'air doit être décrit). Les conditions aux limites sont de type glissement libre en base et sur le bord latéral gauche.  $x$  est la direction horizontale et  $y$  la direction verticale.

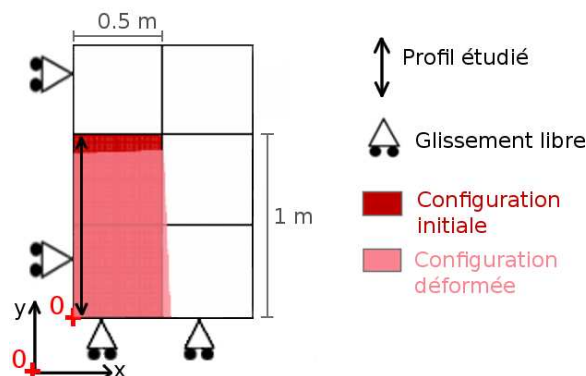
**Solution attendue en éléments finis** Tout d'abord, le calcul analytique permet d'obtenir l'expression suivante des déformations (d'après la loi de Hooke en déformation plane, et  $\sigma_{xx} = 0$  car l'échantillon n'est pas confiné latéralement) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy}(y) &= \frac{1 - \nu^2}{E} \rho g (1 - y) \quad (\text{toujours} > 0) \\ \varepsilon_{xx}(y) &= \frac{-\nu(1 + \nu)}{E} \rho g (1 - y) \quad (\text{toujours} < 0) \\ \text{tr}\varepsilon(y) &= \frac{-2\nu^2 - \nu + 1}{E} \rho g (1 - y) \quad (\text{toujours} > 0) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ces trois fonctions sont donc linéaires sur la verticale, mais pour un calcul de type éléments finis, seule la linéarité de la composante  $\varepsilon_{xx}$  peut être obtenue sur la hauteur des éléments ( $\varepsilon_{yy}$  est constant sur cette hauteur comme nous l'avons vu).

Par conséquent, comme  $\varepsilon_{xx}$  diminue depuis le haut vers le bas d'un élément, le calcul EF devrait donner également  $\text{tr}\varepsilon$  qui diminue sur la hauteur de l'élément, et il en est de même pour la pression.

FIGURE 2.14: Modèle de matériau pesant en configuration initiale et déformée (Ellipsis)



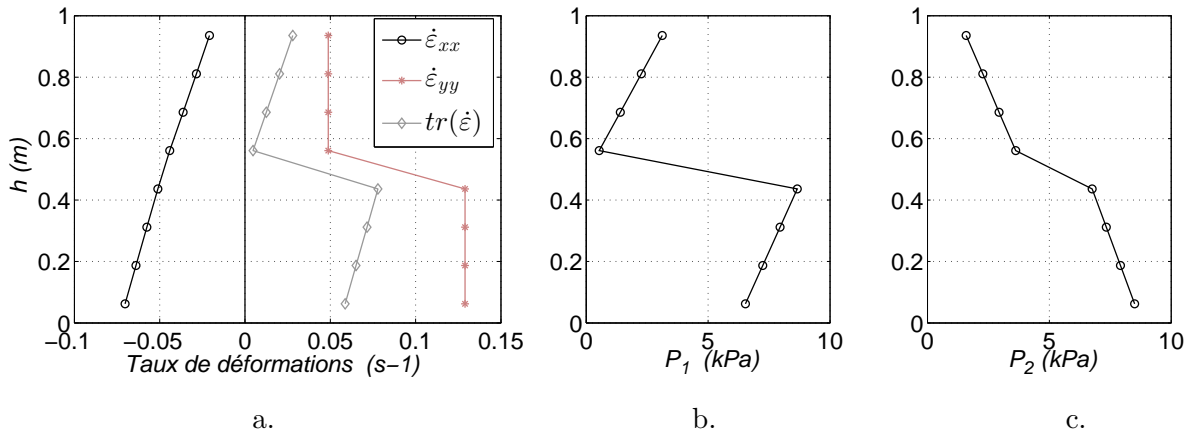
**Modèle** Mettons en évidence cet effet avec Ellipsis. On considère  $E=5$  MPa,  $\nu = 0,35$ ,  $\rho=2000$  kg/m<sup>3</sup>, et  $g$  augmentant linéairement en 40 incréments jusqu'à 9,8 m/s<sup>2</sup>. Les paramètres numériques sont présentés au tableau 2.4. Nous les avons choisis tels que la viscosité et le module de compressibilité effectifs de l'air soient négligeables devant ceux du bloc pesant d'une part, et que le temps d'application de la gravité (0,02 s) soit négligeable devant le temps de relaxation de l'échantillon d'autre part.

TABLE 2.4: Paramètres numériques du modèle de bloc sous poids propre ( $\Delta t_e=5.10^{-4}$  s)

	Air	Bloc pesant
$\eta_{eff}$ (Pa.s)	0,5 (= $\eta$ )	925
$(K_v)_{eff}$ (Pa.s)	1,7 (= $K_v$ )	2780
Temps de relaxation ( $\eta/\mu$ ) (s)	-	91

**Résultats et analyse** Nous obtenons les profils de taux de déformation et de pression présentés à la figure 2.15a et b (valeurs sur les points d'intégration). Comme attendu,  $tr(\dot{\epsilon})$  et  $p$  (calculés à partir des vitesses nodales) augmentent de manière globale avec la profondeur, mais diminuent d'amplitude sur la hauteur de chaque élément. Cette solution n'est pas physique, mais c'est la plus précise qui puisse être obtenue avec un Q4 pour ce type de problème.

FIGURE 2.15: Composantes de déformation sur un profil vertical de points d'intégration (a.), pression sur ce profil sans utiliser la formulation mixte (b.) et en l'utilisant (c.)



Cependant, les codes de calcul permettent en général de résoudre cette imprécision, surtout en élasticité. Dans le code Abaqus Standard une 'intégration réduite sélective' est réalisée, ce qui consiste à ne considérer qu'un point d'intégration pour la part isotrope des équations. Pour un Q4 il n'y a donc qu'une valeur de pression par élément. (Nagtegaal *et al.*, 1974; Abaqus, 2011). En ne considérant pas de gradient du tout sur la hauteur des éléments, l'approximation est plus acceptable que le gradient obtenu avec les Q4 intégrés normalement.

Dans Ellipsis, c'est la résolution par formulation mixte qui permet de pallier cette imprécision en élasticité (elle avait été désactivée dans l'exemple précédent). En effet, rappelons qu'avec cette formulation la pression est calculée en 1 seul nœud central. Le champ de pression élémentaire est ensuite déduit en faisant une interpolation de  $p$  depuis ces nœuds centraux aux 4 nœuds externes, puis des 4 nœuds aux points d'intégration (les fonctions de forme sont bien utilisées dans cette dernière étape, mais pas leurs dérivées, si bien qu'on obtient un champ de pression acceptable). Le profil de pression obtenu avec Ellipsis en utilisant la formulation

mixte est finalement présenté à la figure 2.15 c.

*Remarque : Il est intéressant de noter que les techniques de formulation mixte et d'intégration réduite sélective, utilisées respectivement dans Ellipsis et Abaqus, sont équivalentes d'après Malkus et Hughes (1978).*

### Cas de l'élasto-plasticité

D'après le paragraphe 2.2.1, la prise en compte de la plasticité implique une contrainte cinématique reliant les taux de déformation plastiques déviatoires et volumiques. Cette relation (équation 2.13) re-couple donc des variables qui étaient soigneusement découplées par la formulation, celle-ci permettant notamment une meilleure approximation du champ de pression  $p$  par élément. Étudions cet effet.

**Modèle** Le modèle de bloc pesant précédemment présenté est à présent calculé dans Ellipsis avec un comportement élasto-plastique (dont les paramètres sont donnés au tableau 2.5) et une discrétisation plus fine (l'échantillon de sol occupe cette fois 4 éléments en largeur et 8 en hauteur dans sa configuration initiale). Les paramètres numériques n'ont pas changés, et le matériau est bien quasiment élasto-plastique.

TABLE 2.5: Paramètres physiques du modèle de bloc sous poids propre

$E$ (MPa)	$\nu$	$\varphi_{e0} = \varphi_{c0}$ (°)	$C_0$ (kPa)	$\varphi_{ef} = \varphi_{cf}$ (°)	$C_f$ (kPa)	$\psi_e = \psi_c$ (°)	$B_p$	$B_c$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
5	0,35	15	1	15	8	7	0,01	0,02	2000

D'autre part, nous menons le calcul pour ce même modèle avec Abaqus. Notons que les surfaces de charge adoptées dans les deux codes sont légèrement différentes : surface de Van Eekelen pour Ellipsis, de Mohr-Coulomb pour Abaqus (le code ne prend pas en compte de manière simple le critère de Van Eekelen). Ces deux surfaces limites sont cependant proches d'après la figure 1.3 de la section 1.1.1.

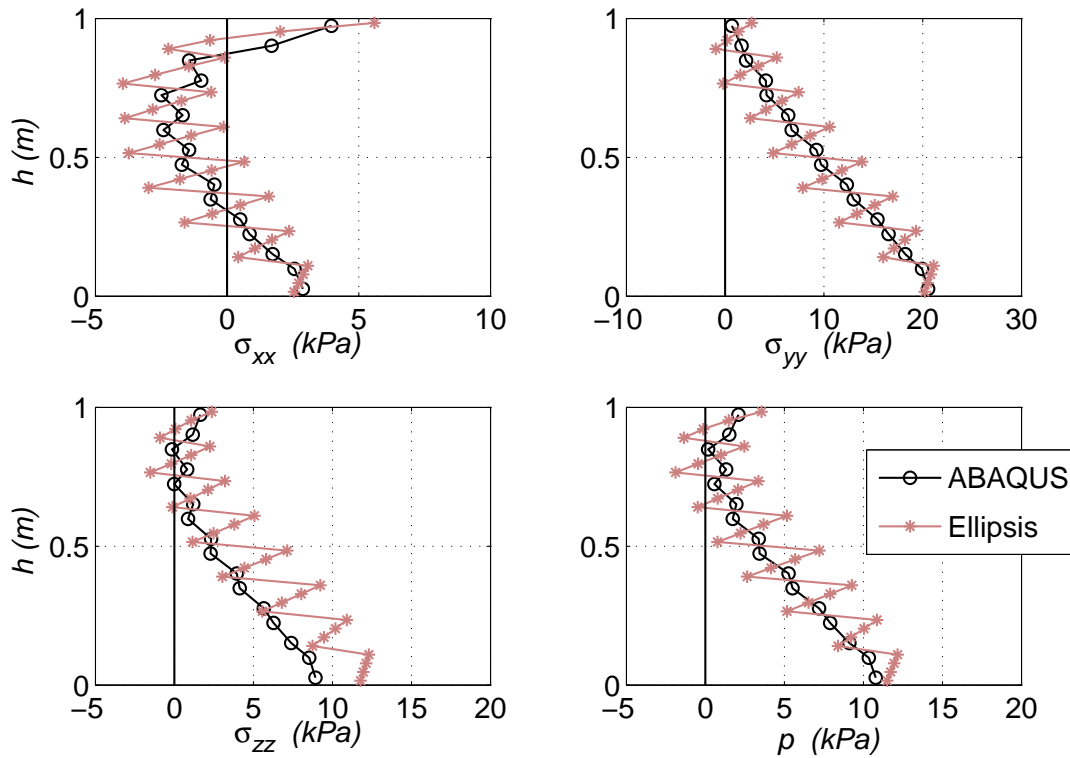
**Résultats et analyse** En s'intéressant aux contraintes obtenues sur le premier profil vertical de points d'intégration (situés en  $x_{initial} = 0,016$  m pour Ellipsis et  $x = 0,053$  m pour Abaqus), nous obtenons les résultats présentés à la figure 2.16.

*Remarque 1 : Les valeurs étant obtenues sur les points d'intégration, il y a plus de données pour Abaqus que pour Ellipsis (16 points d'intégration au lieu de 4, donc 4 au lieu de 2 sur la hauteur d'un élément, voir paragraphe 1.4.4).*

Tout d'abord, à l'exception de la contrainte hors plan, dont le calcul diffère parfois d'un code à l'autre (dans Ellipsis elle est calculée comme les autres composantes de contrainte à partir de la matrice constitutive), les profils sont globalement similaires, dans le sens où les valeurs médianes sur chacun des 8 éléments sont sensiblement les mêmes (nous n'avons pas présenté les contraintes de cisaillement, peu élevées).

Nous remarquons cependant, que le champ de pression obtenu en élasto-plasticité avec Ellipsis varie cette fois, même en formulation mixte, de manière inverse sur la hauteur des éléments, par rapport à l'évolution globale sur le modèle. Il en va de même pour les composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$ . Le champ de contrainte résultant est de ce fait localement assez éloigné de la solution de référence obtenue avec Abaqus.

FIGURE 2.16: Comparaison des profils verticaux de contrainte obtenus pour le modèle EP avec Abaqus et Ellipsis



Cette répartition inverse de la pression est très problématique en plasticité, puisque les déformations plastiques des géomatériaux sont très dépendantes du confinement. Une faible diminution de pression à la base des éléments peut donc entraîner des déformations plastiques beaucoup plus importantes qu'en haut, en accentuant encore le gradient 'inverse' des contraintes (d'après l'équation 2.4), etc... Ce gradient 'inverse' peut ainsi atteindre une grande amplitude.

Par ailleurs, comme la plasticité est un comportement à variables d'histoire, obtenir un état de contrainte très éloigné de la réponse physique aura une répercussion sur toute la suite du calcul.

Devant ce problème, voyons quelle solution nous avons adoptée.

### Interpolation constante par les dérivées des fonctions de forme

Nous avons choisi de rendre constante par élément l'interpolation par les dérivées des fonctions de forme. Cette modification semble forte, mais elle ne l'est pas plus que les solutions d'intégration réduite, parfois choisies pour les Q4 (ou d'autres éléments) en éléments finis, et dans lesquelles il n'y a, de même, qu'une valeur par élément des dérivées des fonctions de forme, puisque un seul point d'intégration est alors considéré.

En pratique, la modification que nous avons faite dans le code est très simple. Pour chaque particule, nous calculons les valeurs de dérivée de fonctions de forme en considérant de manière artificielle une position (0;0) de cette particule dans le repère naturel de l'élément (c'est-à-dire une position au centre de l'élément). Les vraies positions des particules sont bien sûr conservées, puisqu'avec la MEFPIIL elles permettent de décrire l'advection du matériau



par rapport au champ de vitesse calculé.

Soit la particule  $P(x, y)$ . En appliquant cette modification, nous obtenons par exemple l'expression suivante pour le calcul du champ de déformation :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(P) = \sum_{n=1}^4 \frac{\partial N_n(0,0)}{\partial x_i} V_j^n, \quad (2.16)$$

où  $n$  est le numéro local du nœud dans l'élément qu'occupe  $P$ ,  $V_i^n$  est la composante  $i$  de la vitesse au nœud  $n$ ,  $N_n$  est la fonction de forme du nœud  $n$ .

Cette modification est prise en compte à chaque fois que les dérivées des fonctions de forme sont utilisées, c'est-à-dire pour :

- le calcul de l'incrément de déformation appliqué dans Plasol,
- le calcul des contraintes (à partir du taux de déformation),
- le calcul de la déformation volumique pour la correction de densité (voir Annexe),
- le calcul de la matrice de viscosité élémentaire,
- le calcul des forces élémentaires  $\mathbf{f}_2$  et  $\mathbf{f}_3$  qui fait intervenir l'opérateur divergence (voir équation 2.1.1).

Concernant le calcul du tenseur de contrainte, rappelons que celui-ci, à un pas de temps donné et en élasticité ou élasto-plasticité, est la somme d'un incrément de contrainte issu du taux de déformation visco-élastique courant et de la contrainte au pas précédent (voir équations 2.7). Avec la modification du calcul de  $\dot{\varepsilon}$ , l'incrément de contrainte ajouté à chaque pas de temps, qui est proportionnel à  $\dot{\varepsilon}$ , est donc une quantité constante par élément.

Par contre, la part de contrainte issue du pas de temps précédent est spécifique à chaque particule, et peut différer, au sein d'un même élément, d'une particule à l'autre, si celles-ci n'ont pas eu le même parcours au travers du maillage. Même avec cette interpolation constante, le champ de contrainte par élément n'est donc pas forcément constant en élasticité ou élasto-plasticité.

Cette modification est donc très proche de l'intégration réduite, si ce n'est que le nombre de points d'intégration (=particules avec la MEF-PIL) n'est pas modifié et que l'interpolation des vitesses par les fonctions de forme reste linéaire.

## Benchmarks

Afin de valider cette modification de l'interpolation, nous nous sommes basés sur les résultats de contraintes pour l'échantillon élasto-plastique sous poids propre de la figure 2.14. La figure 2.17 présente les profils verticaux obtenus.

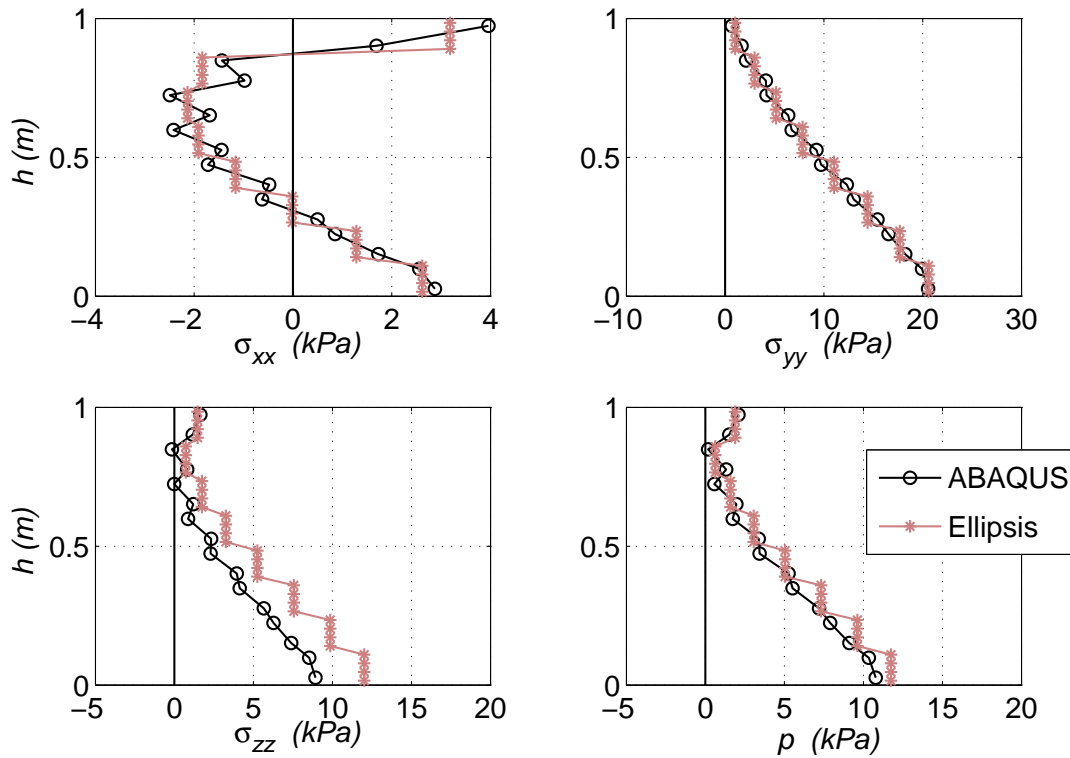
L'interpolation constante n'a pas changé la répartition globale des contraintes (les valeurs médianes sur chaque élément n'ont pas sensiblement changé).

Par contre, sur chaque élément, la répartition constante de contrainte semble plus physique qu'avant, dans le sens où elle est plus continue. Les résultats d'Abaqus et d'Ellipsis sont aussi beaucoup plus proches.

D'après ces résultats, la modification de l'interpolation par les dérivées des fonctions de forme est donc validée.

Les avantages de ce procédé sont donc importants et l'interpolation constante sera adoptée dans la suite de ces travaux dans tous les modèles prenant en compte de la plasticité. Cependant, il faut noter que la solution est appauvrie et les modèles nécessiteront un meilleur raffinement du maillage.

FIGURE 2.17: Profils verticaux de contraintes en élasto-plasticité pour Abaqus et pour Ellipsis (avec l'interpolation constante par les dérivées des fonctions de forme pour Ellipsis)



### 2.2.3 Extension de la formulation mixte à la loi élasto-plastique

#### Rappel du rôle de la formulation mixte en incompressibilité

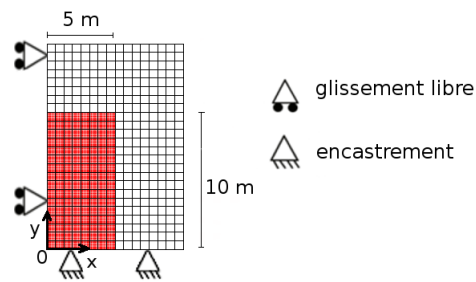
Même si les géomatériaux sont en général compressibles, il est préférable que Ellipsis puisse continuer à donner, en élasto-plasticité, de bons résultats dans le cas éventuel d'une incompressibilité de la phase élastique.

En viscosité et en élasticité, nous expliqués au paragraphe 1.4.4, qu'une formulation mixte était utilisée dans Ellipsis pour résoudre les problèmes en incompressibilité.

Prenons un exemple pour bien visualiser l'amélioration des résultats avec la formulation mixte dans le cas d'un comportement élastique quasi-incompressible. Le modèle que nous avons réalisé, est présenté à la figure 2.27. Nous avons choisi la même géométrie qu'au paragraphe précédent, avec des dimensions multipliées par 10 pour que le chargement par gravité entraîne une sollicitation plus importante (une gravité plus élevée aurait aussi pu être considérée). De plus, un ancrage en base du modèle est rajouté ici et le maillage est plus fin (éléments de dimensions  $0,625 \times 0,625$  m). L'interpolation constante par les dérivées des fonctions de forme n'est tout d'abord pas considérée (pas de plasticité).

Le sol est choisi de module de Young  $E=5$  MPa, de coefficient de Poisson de  $\nu=0,45$  (quasi-incompressible) et de masse volumique  $\rho=1800$  kg/m<sup>3</sup>. Seul le coefficient de Poisson du sol ayant changé (de 0,35 à 0,45) par rapport au modèle présenté dans la partie précédente, les paramètres effectifs du sol et son temps de relaxation sont du même ordre de grandeur que précédemment. Les paramètres effectifs de l'air (qui sont gardés identiques à ceux du modèle précédent) restent donc négligeables devant ceux du sol, et la relaxation visqueuse négligeable pendant quelques centaines d'incrément.

FIGURE 2.18: Géométrie et conditions aux limites du modèle de colonne pesante de 10 m de hauteur

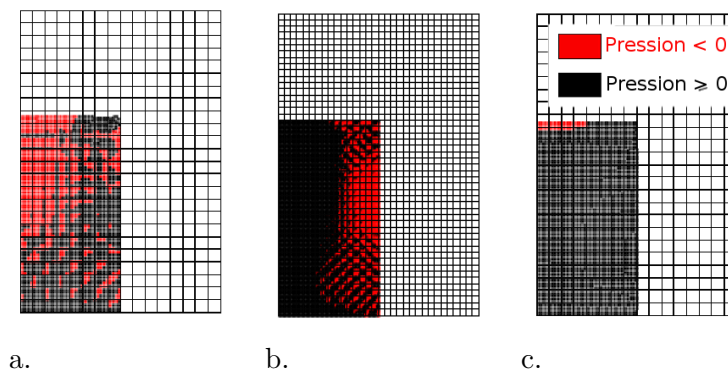


La sollicitation est une augmentation de la gravité jusqu'à  $9,8 \text{ m/s}^2$ , en 75 pas de chargement.

Nous avons présenté à la figure 2.19 les résultats en terme de signe de pression. Lorsque la formulation mixte n'est pas activée, cette représentation fait apparaître un motif en damier (voir figure 2.19a) qui est dépendant du maillage (voir figure 2.19b pour le résultat avec des éléments plus fins). Ce résultat est typique du locking.

Par contre, lorsque la formulation mixte est prise en compte, le calcul est mené jusqu'à son terme sans locking (figure 2.19c). La formulation mixte a donc effectivement permis de résoudre ce problème.

FIGURE 2.19: Résultats en formulation 'classique' au début du chargement ( $g=1,04 \text{ m/s}^2$ ) pour le maillage initial (a) et pour le maillage plus fin (b). Résultats en formulation mixte en fin de chargement ( $g=9,8 \text{ m/s}^2$ )(c)



Intéressons-nous à présent au comportement élasto-plastique de ce modèle incompressible (cette incompressibilité concerne *a priori* uniquement la phase élastique puisque, en général, le comportement plastique est dilatant ou contractant).

### Expression cohérente de l'incrément de déformation appliqué à Plasol vis-à-vis de la solution mixte $(v,p)$

Rappelons tout d'abord que les incréments de contrainte en formulation mixte vitesse-pression sont obtenus en fin d'incrément en sommant (voir équation 2.7) :

- la pression issue du nœud central,
- un terme déviatoire, fonction de la partie déviatoire du tenseur de taux de déformation (lui-même issu des vitesses aux nœuds externes).

La partie isotrope du tenseur de taux de déformation n'est donc pas considérée dans ce calcul et  $p$  ne dépend pas des vitesses nodales. Cette part isotrope est en effet susceptible d'être mal évaluée à partir de la seule résolution en vitesse (la matrice de viscosité globale devient mal conditionnée en incompressibilité, du fait d'une trop grande différence entre les modules mécaniques).

La première étape de Plasol, est le calcul de l'incrément de déformation (étape 1 de l'algorithme de la figure 2.2), à partir du tenseur de taux de déformation. Or, à l'entrée en plasticité, la partie isotrope du tenseur de taux de déformation est mal évaluée du fait de l'incompressibilité de la phase élastique.

Il est donc naturel, comme pour le calcul des contraintes, de ne pas prendre en compte cette partie isotrope, mais de la remplacer par la quantité volumique qui peut être obtenue à partir du nœud de pression. L'incrément de déformation total est donc calculé, selon l'équation 2.17, en distinguant :

- la partie isotrope issue de la résolution au nœud central de pression,
- la partie déviatoire issue de la résolution aux nœuds de vitesse.

Nous remplaçons donc l'étape 1 de l'algorithme de Plasol, présenté à la figure 2.2, par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Delta t \\ &= (\dot{\varepsilon}_{isoP} \mathbf{1} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \Delta t \\ &= \left( \frac{1}{3} \frac{p}{(K_v)_{eff}} \mathbf{1} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) \Delta t,\end{aligned}\tag{2.17}$$

avec  $\dot{\varepsilon}_{isoP}$  le terme isotrope de taux de déformation obtenu à partir la pression au nœud central,  $p$  cette pression,  $(K_v)_{eff}$  le module visqueux effectif de compressibilité volumique, et  $\mathbf{1}$  le tenseur unité.

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  est la partie déviatoire du taux de déformation calculé uniquement avec les vitesses nodales (aux 4 nœuds extérieurs) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{3} tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\zeta_1, \zeta_2) = \mathbf{B}(0,0) \mathbf{V},$$

où  $\mathbf{V}$  est le vecteur regroupant les vitesses nodales des 4 nœuds de l'élément considéré, et  $\mathbf{B}$  la matrice des dérivées des fonctions de forme (considérée à la position (0,0) conformément à l'interpolation constante par les dérivées des fonctions de forme). Nous avons donc bien laissé de côté la partie  $tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$  issue des nœuds de vitesse.

Voyons comment ce procédé permet de gagner en précision en cas d'incompressibilité (ou quasi-incompressibilité), voir d'éviter le locking.

### Validation du procédé

Afin de vérifier l'effet de cette modification, considérons le cas précédent de la colonne verticale de sol, en remplaçant le comportement élastique par un comportement élasto-plastique avec écrouissage. Les paramètres physiques sont présentés au tableau 2.6. L'interpolation constante par les dérivées des fonctions de forme est prise en compte.

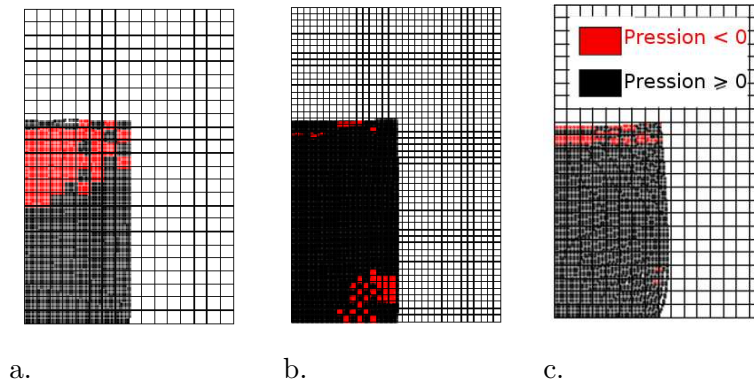
Un premier calcul est mené, dans lequel la modification proposée dans Plasol n'est pas prise en compte. Il apparaît pour la pression, une figure de locking au bout de quelques incréments après l'entrée en plasticité (voir figure 2.20a) et le calcul cesse de converger pour une gravité appliquée de 2,3 m/s<sup>2</sup>. Ici encore le motif en damier est dépendant du maillage (il apparaît aussi pour des éléments plus fins, voir figure 2.20b). De plus, ce locking n'apparaît pas si on

TABLE 2.6: Paramètres physiques du bloc sous poids propre de grandes dimensions

E (MPa)	$\nu$	$\varphi_{e0} = \varphi_{c0}$ (°)	$C_0$ (kPa)	$\varphi_{ef} = \varphi_{cf}$ (°)	$C_f$ (kPa)	$\psi_e = \psi_c$ (°)	$B_p$	$B_c$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
5	0,45	15	1	25	5	5	0,01	0,02	1800

prend un module de Poisson de 0,3, il est donc effectivement dû à l'incompressibilité de la phase élastique.

FIGURE 2.20: Mise en évidence d'un locking à l'entrée en plasticité pour  $g=1,7 \text{ m/s}^2$  (a : maillage initial, b : maillage fin) ; déformée en après modification de Plasol pour un chargement  $g=3,8 \text{ m/s}^2$  (c)



Avec l'extension de la formulation mixte que nous définie dans Plasol, le calcul cette fois converge et la déformation du talus est visible dès un chargement de  $g=3,8 \text{ m/s}^2$  (voir figure 2.20c).

Il faut remarquer que notre modification ne joue sans doute un rôle qu'à l'entrée en plasticité. En effet, par la suite, l'incompressibilité ne porte plus sur les déformations totales du fait du développement des déformations plastiques qui induisent des déformations volumiques (sauf dans le cas où  $\psi=0^\circ$ ). Ce procédé est cependant très important puisqu'il permet de passer du domaine élastique au domaine élasto-plastique sans perte de convergence du calcul.

Intéressons-nous à présent à un autre type de problématique en élasto-plasticité, concernant l'effet des éléments hétérogènes en contenu matériel.

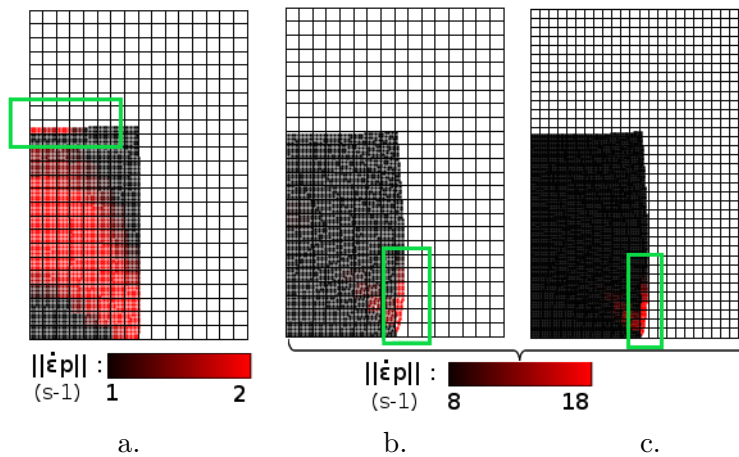
#### 2.2.4 Gestion des éléments hétérogènes en plasticité

En visualisant les taux de déformations plastiques pendant le calcul, nous remarquons que sur certains éléments, contenant à la fois des particules de sol et d'air, des valeurs élevées peuvent être relevées avec une discontinuité du champ à la limite de ces éléments. C'est le cas par exemple des particules que nous avons encadrées aux figures 2.21a (pour  $g=1,7 \text{ m/s}^2$ ) et 2.21b (pour  $g=3,7 \text{ m/s}^2$ ). Nous montrons, grâce à un calcul supplémentaire, que la largeur de ces bandes "sur-plastifiées" dépend de la taille des éléments (voir figure 2.21c pour  $g=3,7 \text{ m/s}^2$  et des éléments de dimensions  $0,625 \times 0,625 \text{ m}$ ).

Nous supposons donc que ce résultat est un effet numérique qui s'explique par le remplissage hétérogène des éléments, à la frontière entre les matériaux sol et air.

Or, nous avons rappelé précédemment qu'il était important pour un comportement irréversible comme la plasticité, d'avoir le moins possible de fluctuation des réponses lors de

FIGURE 2.21: Mise en évidence d'une plasticité numérique sur les éléments en frontière de l'échantillon, pour  $g=1,7 \text{ m/s}^2$  (a) et  $g=3,7 \text{ m/s}^2$  (b). Résultats pour  $g=3,7 \text{ m/s}^2$  avec un maillage plus fin



la recherche de la solution finale. En effet, des particules "sur-plastifiées" pour une raison purement numérique créent une erreur conservée pendant toute la suite calcul. Essayons de comprendre plus précisément cet effet.

### Rappel : Construction de la matrice de viscosité pour un élément hétérogène

Étant donné le déplacement des particules dans le maillage Eulérien avec la MEFPIIL, il est possible (et même fréquent) d'avoir une configuration dans laquelle certains éléments sont hétérogènes, c'est-à-dire constitués de particules de différentes natures. Le calcul de la matrice de viscosité élémentaire intègre donc les paramètres constitutifs de ces différents matériaux. Par exemple, dans le cas d'un modèle de sol à bord libre, la matrice élémentaire d'un élément hétérogène sol-air a des composantes moins élevées que celles d'une matrice élémentaire d'un élément rempli uniquement de sol. De la même manière, ses composantes sont plus élevées que si l'élément était rempli uniquement d'air. Par conséquent, pour un même état de contrainte appliqué, les taux de déformations générés dans cet élément sol-air sont intermédiaires entre ceux -élevés- qui seraient générés dans un élément 'air' et ceux -plus faibles- qui seraient générés dans un élément 'sol'.

Plus particulièrement, si un élément hétérogène est majoritairement constitué de particules 'air', les taux de déformation de toutes les particules vont être typiques de ceux de l'air, c'est-à-dire très élevés. Or, en élasto-plasticité, la loi Plasol est résolue en chaque point matériau, indépendamment du voisinage en particules. Par conséquent, dans un tel élément, les particules 'sol' vont avoir une grande tendance à plastifier (même si, pour le sol considéré, l'état de contrainte appliqué n'est pas critique vis-à-vis de la rupture).

### Solution proposée

L'idée pour traiter ces éléments hétérogènes élasto-plastiques/visqueux, est de ne pas calculer la matrice de viscosité élémentaire avec l'ensemble des points d'intégration de l'élément, mais uniquement avec les points d'intégration du matériau 'majoritaire'.

En pratique, nous procédons de la manière suivante. Au début de chaque incrément, un marqueur *flag* est initialisé à 1 pour toutes les particules  $p$  du modèle. Puis en fin d'incrément, les éléments hétérogènes "de surface libre" sont recherchés :

- Pour chaque élément : si celui-ci est hétérogène, alors, nous comptons le nombre  $n_1$  de particules 'sol' et le nombre  $n_2$  de particules 'air'.
  - Si  $n_1 < n_2$  : Nous considérons que l'élément a un comportement totalement homogène à l'air.  $flag(p)=2$  pour les particules 'sol', minoritaires dans l'élément.
  - Si  $n_1 > n_2$  : Nous considérons que l'élément a un comportement totalement homogène au sol.  $flag(p)=2$  pour les particules de type air, en minorité.
- Pour chaque particule  $p$  : si  $flag(p) = 2$ , alors son poids numérique est annulé.

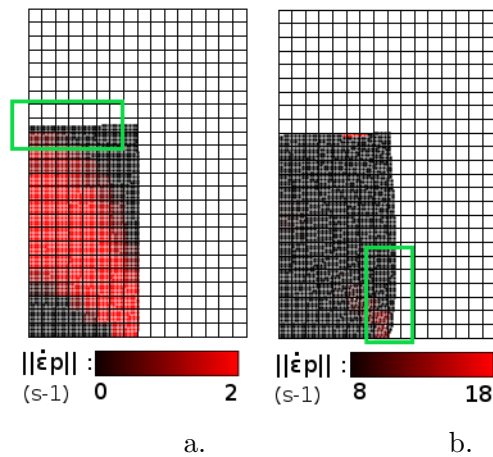
De cette manière, les particules en minorité dans un élément ne sont pas prises en compte dans le calcul de la matrice de viscosité élémentaire ou des différents termes de forces. De plus, pour ces particules, nous considérons que la plasticité est désactivée (il n'y a ainsi pas de risque de plasticité 'artificielle'), et que la densité est constante (pour ne pas mettre à jour la densité des particules 'sol' à partir de déformations volumiques représentatives de l'air, potentiellement très élevées - voir Annexe). Insistons sur le fait que les déformations plastiques ne sont pas toujours interdites pour ces particules, elles sont seulement annulées pour certaines configurations particulières au cours du calcul.

### Effet de la solution

Le modèle précédent est maintenant calculé avec le traitement des éléments de surface libre. Nous présentons à la figure 2.22 les résultats pour les deux étapes de chargement présentées à la figure 2.21 ( $g=1,7 \text{ m/s}^2$  en a et  $g=3,7 \text{ m/s}^2$  en b).

Ces deux vues mettent en évidence que les particules "sur-plastifiées" ne le sont plus. Elles se situaient effectivement dans des éléments où les particules 'air' étaient majoritaires et imposaient leur comportement.

FIGURE 2.22: *Effet de la prise en compte des éléments hétérogènes pour  $g=1,7 \text{ m/s}^2$  (a) et  $g=3,7 \text{ m/s}^2$  (b)*



En continuant le chargement de ce modèle, l'effet de cette modification s'avère très important, puisque nous voyons à la figure 2.23a que sans la prise en compte de ce traitement des éléments hétérogènes les particules de sol se déplacent en "bouffée" dans l'air, alors qu'avec la modification (figure 2.23b), le comportement semble beaucoup plus physique.

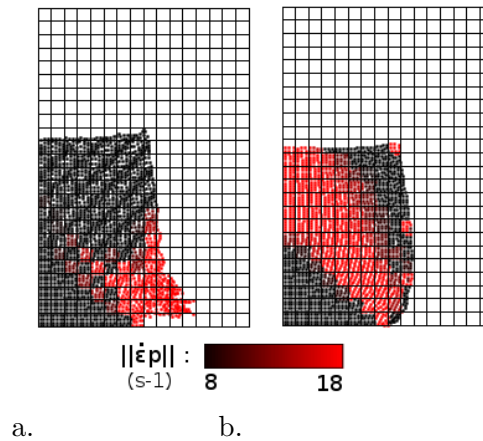
L'instabilité dans le premier cas est-elle d'ordre numérique ou matériel (rupture)? Nous aurons l'occasion de revenir sur cette question au Chapitre 3.

Notons, en tout cas, que le niveau de sollicitation est très élevé au vu des vitesses de déformation plastique atteintes ( $>18 \text{ s}^{-1}$ ). En extrayant la variation de  $||d\epsilon_p||$  d'un incrément à

l'autre, nous obtenons, dès un chargement  $3,8 \text{ m/s}^2$ , des valeurs de l'ordre de  $0,1 \%$  pour les points très plastifiés en base de la bande de cisaillement ( $x=4,5 \text{ m}$  et  $y=1 \text{ m}$ ), ce qui est 10 fois supérieur au critère établi à la partie 2.1.4.

Pour cette raison, nous ne nous intéressons pas à la fin du chargement, même avec le traitement des éléments hétérogènes.

FIGURE 2.23: Calcul sans traitement des éléments hétérogènes sol-air pour  $g=5,4 \text{ m/s}^2$  (a) et avec traitement de ces éléments (même gravité)



## 2.3 Analyse de stabilité de pentes heuristiques

### 2.3.1 Comparaison MEFPIL / équilibre limite

Au cours de cette thèse nous avons eu l'opportunité de collaborer avec l'Université di Salerno (notamment avec Prof. L. Cascini et S. Cuomo). Ce travail a débouché sur une étude comparative entre l'analyse de stabilité d'un talus avec la MEFPIL, et l'analyse de stabilité avec d'autres méthodes numériques. Cette étude a été l'objet d'un article conjointement réalisé (Cuomo *et al.*, 2012).

Une de ces comparaisons implique la méthode analytique explicite de l'Équilibre Limite. Rappelons que cette méthode permet -à partir du bilan des forces stabilisantes et déstabilisantes pour une configuration donnée- de déterminer un facteur de sécurité, supérieur à 1 en cas de stabilité, inférieur en cas d'instabilité.

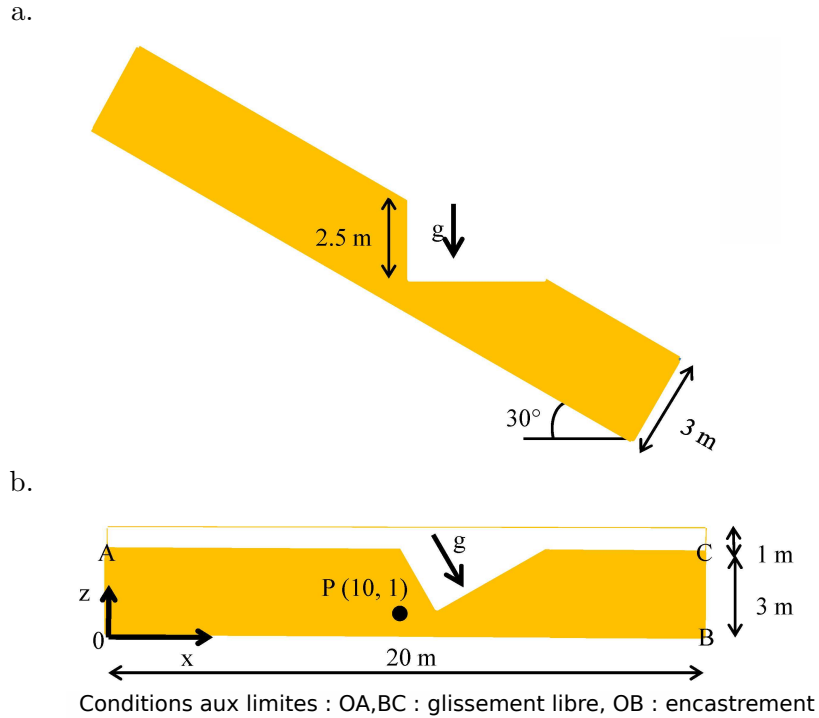
#### Modèle

La configuration considérée, voir figure 2.24, est celle d'un talus vertical de  $2,5 \text{ m}$  excavé dans une couche de terrain de grande extension (effets de bords négligeables). Les sols sont relativement meubles ( $E=5 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0,3$ ), de poids volumique  $\gamma=13 \text{ kN/m}^3$ . La cohésion et l'angle de frottement à la rupture sont variables selon les calculs, compris respectivement entre 1 et 5 kPa et entre  $32$  et  $36^\circ$ . Avec la MEFPIL, un comportement élastique parfaitement plastique est considéré afin de se rapprocher des hypothèses de la méthode analytique, et de plus, un écoulement non-associé est considéré, avec  $\psi=10^\circ$ . Notons que la forme du critère de rupture est légèrement différente pour les 2 méthodes. Le critère de Van Eekelen (implanté dans Ellipsis) n'étant pas disponible dans le code d'Équilibre Limite, nous avons choisi un critère proche, de type Drucker-Prager.

Enfin, dans le cas de la MEFPIL, le chargement se fait par gravité croissante jusqu'à  $g=9,8 \text{ m/s}^2$ . Les paramètres numériques du modèle Ellipsis sont présentés au tableau 2.7, où nous



FIGURE 2.24: Configuration considérée pour l'analyse de stabilité avec l'Équilibre Limite et la MEFPIIL (a). Modèle effectivement réalisé avec Ellipsis (b).



pouvons souligner le caractère négligeable des paramètres effectifs de l'air, et le temps de relaxation, très grand par rapport au temps d'application de la sollicitation (100 incréments de  $\Delta t \simeq \Delta t_e = 0.01$  s).

TABLE 2.7: Paramètres numériques pour l'essai de couche infinie avec talus ( $\Delta t_e = 0.01$  s)

	$\eta_{eff}$ (Pa.s)	$(K_v)_{eff}$ (Pa.s)	Tps de relaxation (s)
Air	20 ( $=\eta$ )	40 ( $=K_v$ )	-
Sol	$1,94 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	515

Nous avons mené, avec les 2 méthodes, un certain nombre de calculs en faisant varier la hauteur de talus  $h$ , la cohésion  $C$  et l'angle de frottement  $\varphi$ . Pour chaque calcul, le paramètre adimensionnel  $C/(\gamma h \tan \varphi)$  a été calculé. Ce paramètre est une forme modifiée du nombre de stabilité  $C/(\gamma h)$  intervenant dans les abaques classiques de stabilité en analyse limite (Taylor, 1937; Janbu, 1968; Michalowski, 1997). Cette expression modifiée, proposée par Bell (1966), est couramment utilisée. Ce nombre de stabilité, qui prend en compte à la fois les paramètres géométriques du modèle et les paramètres matériaux, est d'autant plus grand que la configuration est stable.

### Résultats et analyse

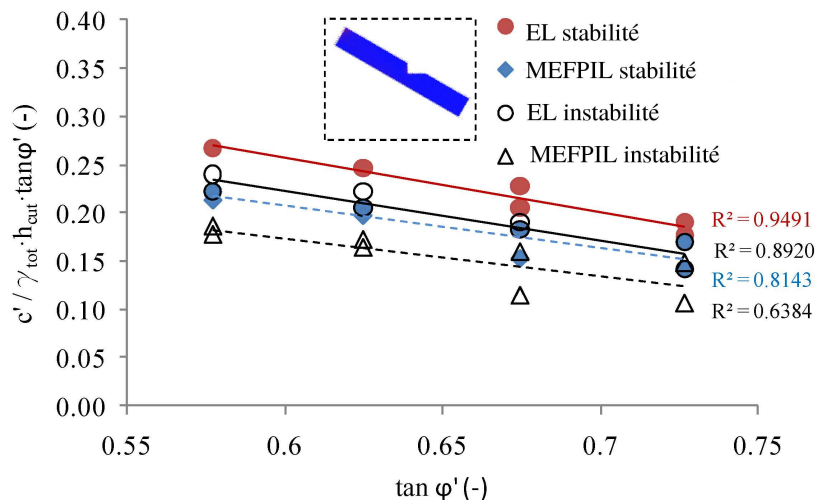
Selon les paramètres plastiques choisis, nous avons pu distinguer les calculs menant ou non à la stabilité. Avec la méthode de l'Équilibre Limite cette distinction s'effectue selon la valeur du facteur de sécurité, tandis qu'avec la MEFPIIL nous considérons qu'une configuration

stable est atteinte si les vitesses tendent à s'annuler rapidement après la fin du chargement.

*Remarque : Ce critère d'analyse de la condition de stabilité avec la MEFPIL est peu précis. Nous considérons au Chapitre 3 un critère plus rigoureux pour statuer sur la stabilité : celui du travail du second-ordre.*

Le nombre de stabilité  $C/(\gamma h \tan \varphi)$  de chaque calcul a été reporté dans le graphe présenté à la figure 2.25 en fonction de l'angle de frottement. Pour chaque méthode, une droite de régression linéaire a été tracée pour les nombres de stabilité correspondant à un état final stable et instable. Finalement, la limite du domaine de stabilité peut être localisée, pour chaque méthode, entre ces 2 droites (le domaine de stabilité, correspondant aux nombres élevés de stabilité, est donc situé au-dessus de cette frontière).

FIGURE 2.25: Mise en évidence d'un domaine de stabilité pour chaque méthode (Cuomo et al., 2012)

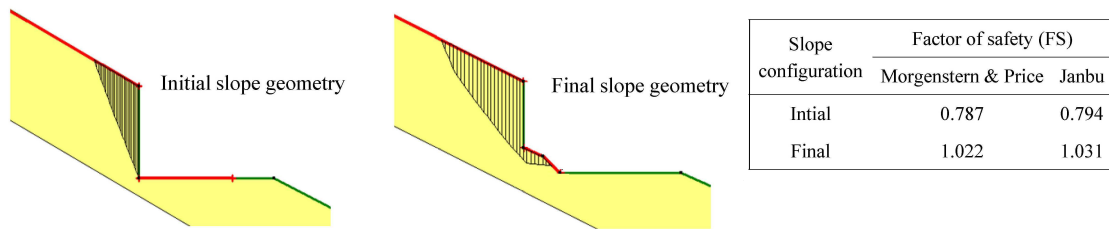


Nous obtenons d'après ces résultats, que le domaine de stabilité est plus étendu pour le calcul avec la MEFPIL que pour le calcul avec l'Équilibre Limite. Cette dernière est donc plus conservatrice dans le sens où elle est plus sécuritaire.

Cette différence peut être analysée comme étant due à la prise en compte des déformations, pas après pas, dans le calcul mené avec Ellipsis. Comme les gradients de contrainte tendent à se dissiper par la déformation, l'état de chargement final est moins déstabilisant. La figure 2.26 démontre cet effet grâce au calcul du facteur de sécurité (avec la méthode de l'Équilibre Limite) pour la configuration initiale du modèle et la configuration finale obtenue à la fin du calcul avec Ellipsis. Le facteur de sécurité est passé d'une valeur inférieure à 1 à une valeur supérieure à 1.

En définitive, la méthode de l'Équilibre Limite permet une bonne approximation sécuritaire de la stabilité des pentes avec la seule connaissance de la géométrie et du critère de rupture. Cependant, la MEFPIL, par l'utilisation de lois de comportement (avec notamment un écoulement plastique non associé) et la prise en compte des déformations, permet une meilleure approximation de la limite de stabilité.

FIGURE 2.26: Vérification, avec la méthode de l'Équilibre Limite, de la stabilisation du modèle obtenue avec la MEFPIL grâce à la prise en compte des déformations (Cuomo et al., 2012)

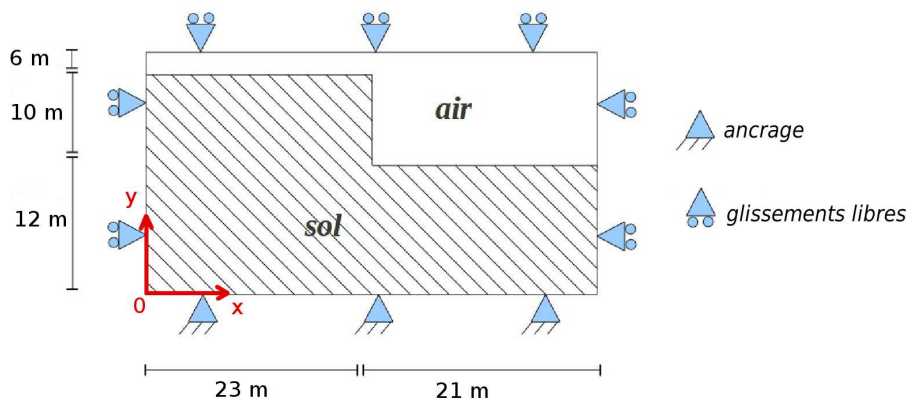


### 2.3.2 Comparaison MEFPIL / MEF Lagrangienne

#### Présentation du modèle

Le modèle étudié est constitué d'un talus vertical de 10 m, présenté à la figure 2.27, maillé avec des éléments Q4, de dimension  $1 \times 1$  m. Les conditions aux limites sont des ancrages sur les 4 bords du modèle et le chargement consiste en une augmentation linéaire de la gravité jusqu'à  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

FIGURE 2.27: Géométrie et conditions aux limites du modèle de talus vertical



Le calcul est mené d'une part avec Abaqus Standard (en MEF Lagrangienne réactualisée), d'autre part avec Ellipsis.

La redistribution du champ de contrainte grâce à la prise en compte des déformations a donc lieu avec ces deux modèles (la configuration est réactualisée dans les 2 cas).

Comme dans le paragraphe 2.2.2, la surface de charge choisie dans Abaqus est celle de Mohr-Coulomb (le critère de Van Eekelen n'est pas proposé par défaut dans Abaqus), alors que nous travaillons dans Ellipsis avec celle de Van Eekelen. Nous considérons dans ce modèle, un comportement du sol plus réaliste que pour le modèle précédent, avec un écrouissage de la surface de charge.

L'évolution de la cohésion  $C$ , entre sa valeur initiale et sa valeur critique, est similaire pour les deux codes (elle a été définie à l'aide de  $B_c$  pour Ellipsis, et d'une table de corrélation  $C - \varepsilon_{eq}^P$  rentrée manuellement pour Abaqus). Nous n'avons pas décrit d'écrouissage de l'angle de frottement, car avec Abaqus, seul  $C$  peut par défaut être écroui.

Les propriétés mécaniques sont présentées au tableau 2.8.

Les paramètres numériques sont les mêmes qu'au modèle du paragraphe 2.2.2 (voir tableau 2.4) car les paramètres élastiques sont les mêmes que pour ce précédent modèle. Les para-

mètres effectifs de l'air restent donc négligeables devant ceux du sol, et la relaxation visqueuse négligeable pendant quelques centaines d'incréments (la gravité étant appliquée en 75 pas de temps).

TABLE 2.8: Paramètres physiques du talus

$E$ (MPa)	$\nu$	$\varphi_{e0} = \varphi_{c0}$ (°)	$C_0$ (kPa)	$\varphi_{ef} = \varphi_{cf}$ (°)	$C_f$ (kPa)	$\psi_e = \psi_c$ (°)	$B_p$	$B_c$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
5	0,35	30	40	30	75	15	0,01	0,02	2000

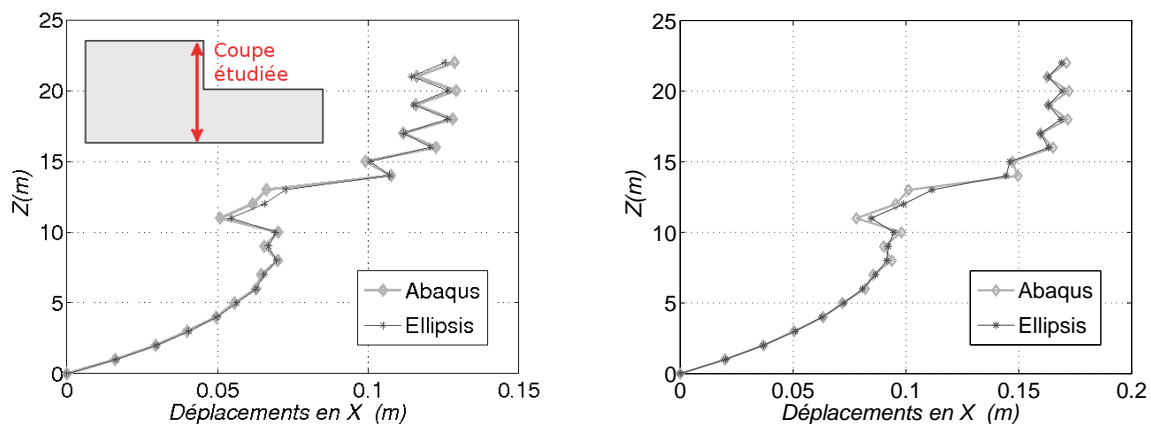
Remarque : Il faut souligner qu'une modélisation avec des éléments  $Q_4$  de  $1 \times 1$  m en interpolation constante par les dérivées des fonctions de forme est beaucoup trop imprécise pour obtenir ici des résultats fiables. Cependant dans cette modélisation, nous nous intéressons moins aux résultats en tant que tels qu'à la comparaison entre les résultats de deux méthodes numériques.

Nous nous sommes dans un premier temps intéressés à un modèle avec une cohésion relativement élevée, afin que la plasticité ne soit que légèrement activée (entrée du domaine de plasticité).

### Comparaison des résultats à l'entrée du domaine de plasticité

Avant de décrire le sol avec un comportement élasto-plastique, nous avons souhaité simplement vérifier le comportement en élasticité, en comparant les déplacements horizontaux sur un profil vertical de nœuds situé à 1 m en retrait du front de talus. Les résultats sont présentés à la figure 2.28 a. et montre que les résultats sont effectivement les mêmes (2,5% de différence relative maximum sur la hauteur de talus). L'aspect 'en dent de scie' des profils est dû à la faiblesse de l'approximation considérée : avec Ellipsis, l'interpolation constante par les dérivées des fonctions de forme est prise en compte et avec Abaqus, nous avons choisi une intégration réduite afin d'être comparable. Cet aspect disparaît pour une interpolation normale.

FIGURE 2.28: Comparaison, sur un profil vertical de nœuds, des déplacements horizontaux en élasticité (a), à l'entrée du domaine plastique (b)



a.

b.

Puis, nous avons mené un calcul élasto-plastique avec les paramètres suivants :  $C=40-75$  kPa et  $\varphi=30^\circ$ .

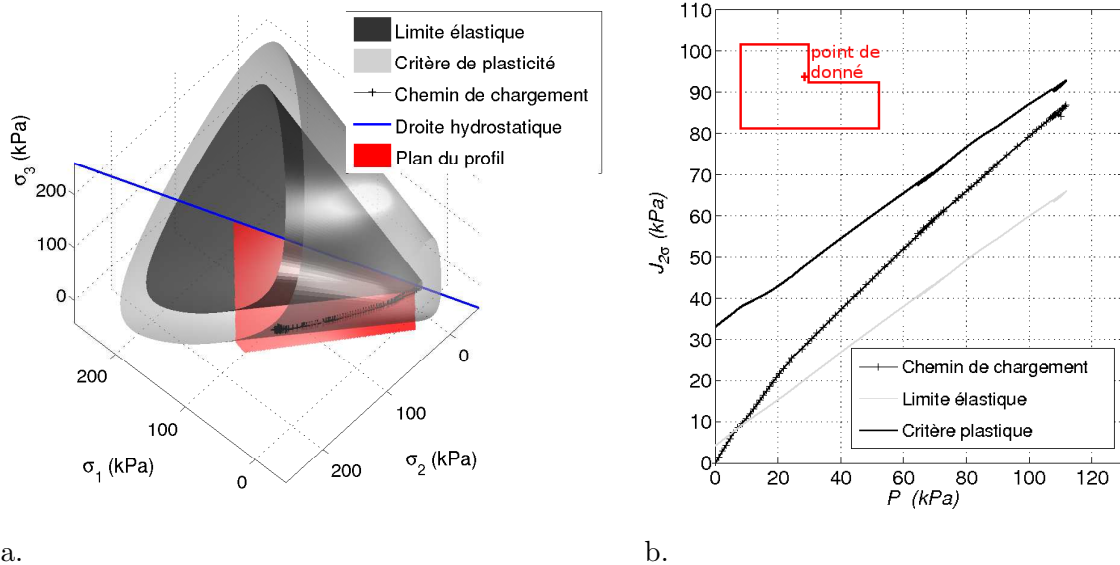
Les résultats de cette modélisation sont donnés à la figure 2.28 b. en terme de déplacements horizontaux : les solutions trouvées avec Abaqus et Ellipsis sont encore concordantes (3,7% de différence relative maximum sur la hauteur de talus). Notons que les déformations plastiques sont bien faibles ici, puisque la déformation principale majeure plastique avoisine seulement 3% au pied du talus.

### Comparaison des résultats pour une sollicitation proche du critère limite de plasticité

Lorsque nous réitérons ces 2 calculs en diminuant progressivement les valeurs de cohésion, il vient que pour  $C=4 - 32$  kPa le calcul réalisé avec Abaqus ne converge plus, alors que le calcul mené avec Ellipsis continue de donner des résultats stables dans le sens où les vitesses nodales tendent à être nulles en fin du chargement.

Pour le calcul avec Ellipsis, le trajet de chargement en contraintes est tracé dans l'espace des contraintes principales et dans un plan  $J_{2\sigma}$  / pression (figure 2.29a et b). Nous observons que le second invariant de contrainte finalement obtenu est proche du critère limite de plasticité, sans l'avoir atteint.

FIGURE 2.29: Trajet de chargement pour le calcul mené avec Ellipsis ( $x=22,5$  m,  $y=15$  m), dans l'espace des contraintes principales (a) et dans un plan  $J_{2\sigma}$ - $p$  (b)

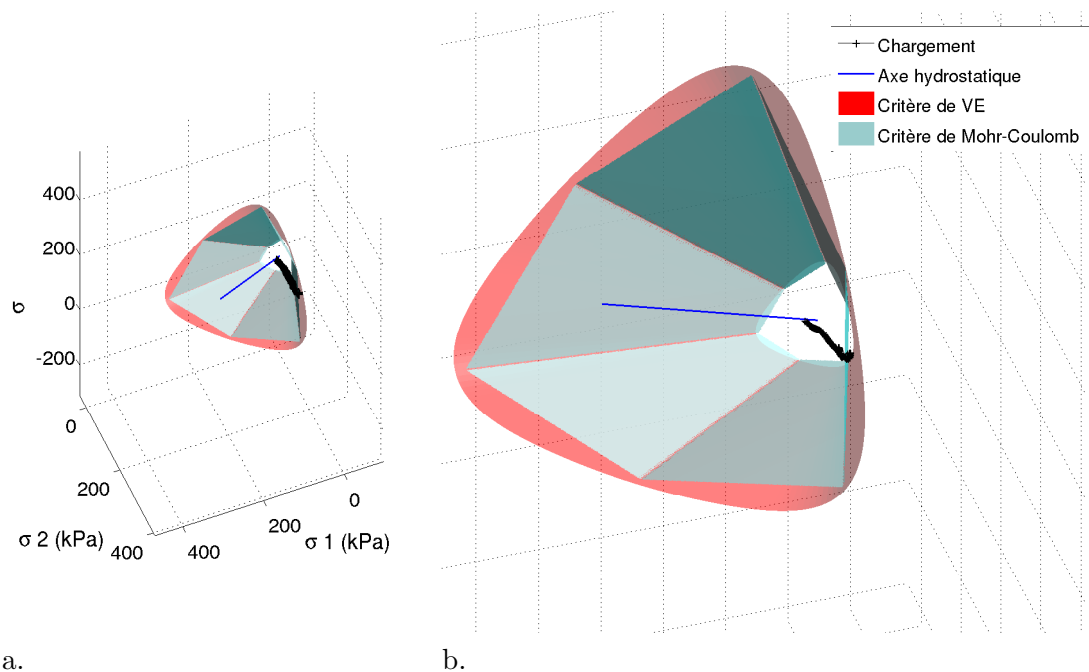


*Remarque :* La représentation  $J_{2\sigma}$ - $p$  de la figure 2.29b est basée sur le calcul -à chaque état de contrainte- du rayon de la limite élastique et du critère limite de plasticité dans la direction définie par l'angle de Lode  $\theta$  (rappelons que la trace de ces 2 surfaces dans le plan déviatoire n'est pas circulaire lorsque celles-ci sont de type Van Eekelen). Dans le cas du chargement décrit ici, toutes les contraintes ont un angle de Lode proche, puisque les points qui les représentent dans l'espace des contraintes appartiennent globalement à un même plan (en rouge sur la figure 2.29a). De ce fait, les enveloppes de limite élastique et du critère limite de plasticité, tracées dans le plan  $J_{2\sigma}$ - $p$  de notre représentation, correspondent quasiment à l'intersection entre les enveloppes 3D et le plan orienté selon l'angle de Lode (en rouge) et sont presque rectilignes. Cette représentation est un substitut à la représentation tridimensionnelle du trajet de contrainte de la figure 2.29a qui ne permet pas de bien visualiser la position d'un état de

contrainte par rapport aux limites élastiques et plastiques. De plus, elle est plus précise qu'un repère  $q = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}), p$  où la variation du critère plastique en fonction de l'angle de Lode n'est pas visible.

Il est communément admis que la perte de convergence d'un modèle numérique et la perte de stabilité d'un système physique sont liés. Est-il possible, puisque le modèle ne prend pas en compte de radoucissement ni de conditions isochore pouvant entraîner une rupture avant le critère plastique, que le calcul mené avec Abaqus ait simplement atteint une rupture due au dépassement du critère plastique ? En supposant que le trajet de chargement est identique pour les 2 calculs, nous l'avons représenté, dans le repère des contraintes principales, en le positionnant par rapport aux surfaces limites de rupture plastique de Mohr Coulomb et Van Eekelen (voir figure 2.30). Cette figure met en évidence que les derniers pas de chargement mènent à un état de contrainte situé au-delà de la surface de Mohr-Coulomb et en deçà de la surface de Van Eekelen.

FIGURE 2.30: Trajet de chargement dans le repère des contraintes principales, et position vis-à-vis des surfaces de rupture plastique de Van Eekelen et de Mohr-Coulomb



La différence de résultats vis-à-vis de la stabilité s'explique donc ici uniquement par la différence des surfaces de charge considérées, et non par la différence des méthodes.

Cependant, voyons à présent qu'il faut être prudent avec les résultats obtenus avec Ellipsis en élasto-plasticité, pour un modèle à surface libre.

### 2.3.3 Influence du matériau de remplissage pour les modèles à bords libres

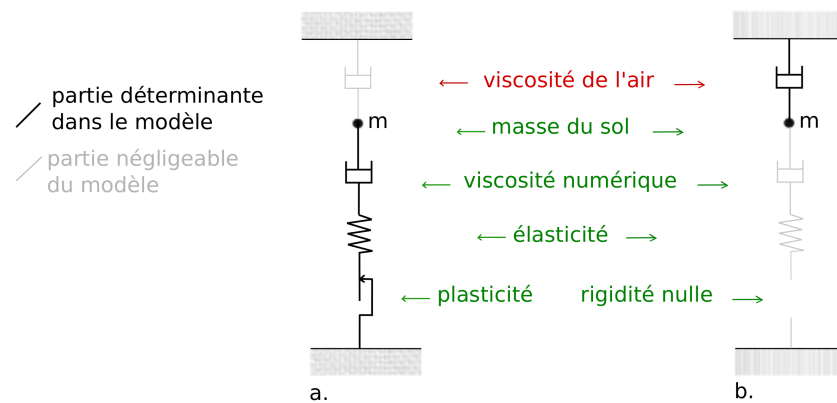
#### Définition d'un matériau environnant visqueux

Comme nous l'avons vu, la contrepartie de la dissociation points matériels / maillage est la nécessité pour les modèles à bords libres, de modéliser un matériau environnant (qui dans nos travaux est toujours considéré visqueux).

Si en pratique on ne s'intéresse jamais aux résultats dans cette zone, il faut cependant garder à l'esprit la présence de ce matériau environnant.

Faisons une analyse rapide du comportement à la rupture d'un matériau à surface libre en considérant l'analogie avec un modèle rhéologique 1D. Les points extrêmes de ce modèle sont fixes, comme le sont le plus souvent les bords des modèles réalisés avec Ellipsis, et les déformations s'additionnent (association en série) :  $\varepsilon_{sol} + \varepsilon_{air} = 0$  (voir figure 2.31 a).

FIGURE 2.31: *Modèle rhéologique 1D analogue au modèle Ellipsis de talus élasto-plastique à bord libre : (a) avant la rupture, (b) après la rupture*



Normalement, comme le matériau de remplissage a un module mécanique négligeable devant celui du sol, l'équilibre du sol, soumis à l'action de la gravité sur sa masse, n'est pas affecté par le comportement de l'air.

Cependant, dans des conditions de chargement extrêmes, comme un chargement à la rupture, le déterminant de la matrice constitutive  $M$  (reliant incréments de contraintes et de déformations) est égal à 0. Ceci correspond à une matrice constitutive nulle, et nous avons choisi de représenter cette caractéristique par une interruption du modèle rhéologique 1D (figure 2.31 b).

Le comportement de l'ensemble étant à présent donné uniquement par le comportement visqueux de l'air, celui-ci est alors sollicité par la masse du matériau sol.

Pour un modèle Ellipsis, nous pouvons donc nous attendre, pour un chargement à la rupture, à ce que la cinématique du modèle soit déterminée par les faibles propriétés visqueuses de l'air.

### Mise en évidence

Considérons un modèle de talus de même géométrie que dans la partie 2.3.2 et d'éléments plus fins, de dimension  $0,5 \times 0,5$  m. Nous avons choisi des paramètres plastiques beaucoup plus faibles que précédemment (voir tableau 2.9), pour 'forcer' la perte de stabilité globale. D'après le tableau 2.10, le temps de relaxation est toujours très long devant la durée du chargement (75 incréments de  $10^{-3}s$ ), et les paramètres de l'air (10 Pa.s pour  $\eta$  et  $K_v$ ) sont négligeables devant les paramètres effectifs du sol.

Les résultats, en terme de second invariant du tenseur de contrainte, sont présentés à la figure 2.32a pour une configuration, obtenue à  $g=2,6$  m/s<sup>2</sup>, où ces contraintes dans l'air nous ont parues particulièrement élevées : à proximité du pied de talus,  $J_2\sigma$  dépasse 1 kPa. Or, pour un matériau de viscosité 10 Pa.s, cette contrainte correspond à des vitesses de déformation de l'ordre de  $100$  s<sup>-1</sup>, ce qui est très élevé.



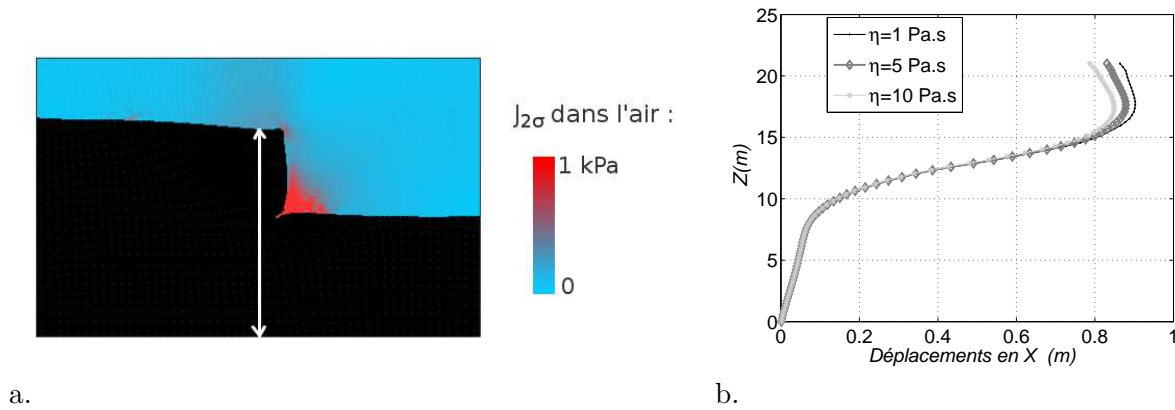
TABLE 2.9: Paramètres physiques du talus chargé à la rupture

$E$ (MPa)	$\nu$	$\varphi_{e0} = \varphi_{c0}$ (°)	$C_0$ (kPa)	$\varphi_{ef} = \varphi_{cf}$ (°)	$C_f$ (kPa)	$\psi_e = \psi_c$ (°)	$B_p$	$B_c$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
5	0,35	15	0,1	15	0,5	15	0,01	0,02	2000

TABLE 2.10: Paramètres numériques du talus chargé à la rupture ( $\Delta t_e = 10^{-3}$  s)

	$\eta_{eff}$ (Pa.s)	$(K_v)_{eff}$ (Pa.s)	Tps de relaxation (s)
Air	10 (= $\eta$ )	10 (= $K_v$ )	-
Sol	1850	5560	91

FIGURE 2.32: Second invariant des contraintes obtenues dans l'air (a); profil des déplacements horizontaux pour 3 valeurs de viscosité de l'air (b)



Nous supposons donc que pour ce chargement important (par rapport aux paramètres plastiques choisis), la rupture est atteinte et que la sollicitation, visible, de l'air a pu avoir un effet sur la convergence globale du système.

Afin d'être convaincu de cette influence pour  $g=2,6$  m/s<sup>2</sup>, nous avons comparé une coupe verticale de déplacement du massif (sur un profil situé initialement à 1,5 m en retrait du talus, voir figure 2.32a) avec deux nouvelles valeurs de viscosité pour l'air, 1 et 5 Pa.s. Les résultats sont présentés à la figure 2.32 b. Nous voyons effectivement que, malgré les faibles valeurs de viscosité de l'air devant la viscosité effective du sol (égale à 1850 Pa.s), les déplacements du talus dépendent de la moindre variation de  $\eta_{air}$ . Notre hypothèse semble donc vérifiée, d'autant plus que la convergence est obtenue pour des chargements beaucoup plus élevés (au-delà de  $g=9,8$  m/s<sup>2</sup>).

Lorsque le comportement est élasto-plastique et que l'on s'approche de la rupture, nous recommandons donc de surveiller les contraintes (et donc les déformations) dans l'air, et de comparer ces déformations à une valeur représentative pour le sol (par exemple les déformations plastiques équivalentes pour la moitié de l'écrouissage,  $B_c$  ou  $B_p$ ).

\*  
\* \*

La conclusion de ce chapitre est que le comportement élasto-plastique peut à présent être décrit avec le code Ellipsis. La loi Plasol a été choisie, pour sa large gamme d'application concernant les sols. Soulignons que, puisque seules les déformations plastiques sont prises en



compte dans la résolution globale, il serait aisé d'implanter d'autres lois élasto-plastiques. Insistons, enfin, sur le choix qui a été fait de la prise en compte explicite des déformations plastiques dans la résolution : ce choix nécessite de prendre des incréments de chargement toujours très faibles pour ne pas s'écarter de la réponse réelle, et un critère a été proposé sur la variation des taux de déformation plastique.

La résolution en élasto-plasticité a été validée pour des benchmarks homogènes, pilotés en contrainte et en vitesse. Pour des modèles plus élaborés (matériaux pesant à bords libres), la solution n'est pas simple, car elle soulève des problèmes numériques dûs à la méthode MEFPIIL elle-même (gestion des éléments de surface libre) et des problèmes plus classiques pour les éléments finis (champ de pression faussé par l'interpolation avec les Q4, locking, etc...).

Nous avons proposé des solutions permettant d'obtenir les résultats le plus précis possible avec les éléments Q4 utilisés dans Ellipsis. La principale de ces modifications concerne la prise en compte d'une interpolation constante par les dérivées des fonctions de forme, qui a comme conséquence une solution proche de l'intégration réduite. Cette modification qui peut sembler limitante ne l'est pas, puisqu'elle permet de mieux décrire les comportements élasto-plastiques. Cependant, pour les modèles sans plasticité elle ne doit pas être considérée car elle entraînerait une perte de précision.

Enfin, nous avons noté une bonne corrélation de l'analyse de stabilité entre la MEFPIIL et la méthode de l'Équilibre limite, cette dernière étant un peu plus conservatrice car elle ne tient pas compte de la redistribution des contraintes par la prise en compte des déformations.

La comparaison entre Ellipsis et Abaqus a montré une bonne corrélation des résultats cinématiques en élasto-plasticité. Cependant, nous avons mis en évidence que, pour l'instant, l'analyse de stabilité peut manquer de précision avec Ellipsis, car la présence d'un matériau visqueux de remplissage (l'air) stabilise la solution. Les résultats doivent donc être précautionneusement analysés.

Pour éviter cet écueil, nous allons développer au chapitre suivant, un modèle de transition solide-fluide pour les géomatériaux qui, à partir d'un critère de rupture précis, permet de décrire un comportement rhéologique post-rupture devant lequel la viscosité de l'air reste négligeable.



## Chapitre 3

# Un modèle rhéologique de transition solide-fluide-solide

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Présentation du modèle de transition</b>	<b>106</b>
3.1.1	Principe général du modèle	106
3.1.2	Présentation du modèle intégrant les lois Plasol et Bingham	108
<b>3.2</b>	<b>Intégration dans Ellipsis du critère du travail du second ordre</b>	<b>110</b>
3.2.1	Calcul du travail du second ordre	111
3.2.2	Validation du calcul de $d^2W_n$	112
<b>3.3</b>	<b>Implantation dans Ellipsis du seuil de Bingham 3D</b>	<b>119</b>
3.3.1	Inversion de la loi classique en 3D	119
3.3.2	Formulation et prise en compte du seuil 3D	120
3.3.3	Validation	122
<b>3.4</b>	<b>Premiers calculs réalisés avec le modèle de transition</b>	<b>124</b>
3.4.1	Cas de la transition pour une rupture diffuse	125
3.4.2	Étude paramétrique sur les paramètres visqueux	127
3.4.3	Cas de la transition pour une rupture localisée	128

---

Dans le Chapitre 1, nous avons mis en évidence que les formes fluide et solide des géomatériaux ne sont pas dissociées puisqu'il existe des phénomènes de transition entre les deux états (liquéfaction des sols, immobilisation des écoulements de suspensions granulaires) et que, dans un sens ou dans l'autre, la transition s'explique par les mêmes mécanismes physiques. Cependant, peu de modèles décrivent en même temps le comportement solide et fluide des géomatériaux (ainsi que la transition entre les deux), et les modèles existant, de type Perzyna, ne sont pas entièrement satisfaisants du point de vue du comportement élasto-plastique (voir paragraphe 1.3.4).

À partir de ces constats, l'objectif de ce chapitre, est de proposer un modèle constitutif unique, permettant de décrire à la fois le comportement élasto-plastique des géomatériaux solides, le comportement visqueux des suspensions granulaires concentrées, ainsi que la transition continue d'un état à l'autre.

Tout d'abord, le principe général de notre modèle de transition est présenté, en explicitant les transitions dans le cas où les lois Plasol et Bingham y sont intégrées. L'implantation du modèle dans Ellipsis est ensuite validée en trois étapes successives. Dans un premier temps, nous exposons l'introduction du critère du travail du second ordre dans le code, celui-ci étant retenu comme critère de transition solide-fluide à la base du modèle de transition. Dans un second temps, nous présentons la prise en compte dans Ellipsis d'un seuil de Bingham 3D, nécessaire à la description de suspensions granulaires, et jouant le rôle de critère de transition fluide-solide. Enfin, l'ensemble du modèle de transition, qui couple -de manière continue- les comportements élasto-plastique et visqueux à seuil, est testé sur deux cas tests de modèles homogènes.

## 3.1 Présentation du modèle de transition

### 3.1.1 Principe général du modèle

En tant que géomécaniciens, nous considérons dans nos travaux un état initial solide et stable des géomatériaux. De ce fait, nous nous intéressons tout particulièrement à une détection précise de la première transition solide→fluide.

#### Critère de première transition solide→fluide

D'après notre étude bibliographique sur la stabilité matérielle, la rupture -qu'elle soit atteinte sur le critère de plasticité ou avant- est accompagnée de profondes transformations du matériau : possible liquéfaction, bouffées d'énergie cinétique, passage d'un régime statique à un régime dynamique, etc... Lorsqu'il y a liquéfaction notamment, le comportement apparent du sol est transformé pour devenir similaire à celui d'un fluide. La transition solide→fluide au sein d'un sol est donc liée à un état de rupture du matériau.

Dans l'objectif d'élaborer un modèle de transition entre les 2 phases, nous avons naturellement défini le critère de première transition comme un critère de rupture. Or, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.1.2, le critère du travail du second ordre est -pour les géomatériaux- le critère le plus général statuant sur la stabilité (rappelons qu'il détecte notamment les ruptures diffuses comme la liquéfaction). Il a donc été retenu pour déterminer la première transition solide→fluide dans le modèle global de transition.

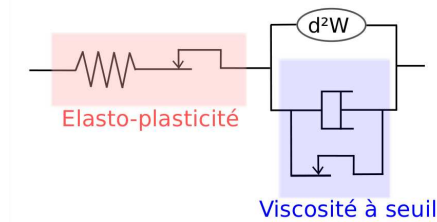
Nous considérons pour l'instant dans nos travaux le critère du travail du second ordre comme un critère de transition qui s'active de manière irréversible. Cependant, il pourrait être imaginé à terme, de le considérer comme seul critère de transition solide↔fluide, utilisé pour décrire également l'arrêt des suspensions granulaires, et réversible.

### Activation des déformations visqueuses à la transition solide→fluide

Nous nous basons sur ce critère de transition pour associer les déformations visqueuses et élasto-plastiques selon le modèle rhéologique présenté à la figure 3.1 (schéma analogue en 1 dimension). Le modèle global de transition est composé :

- d’une relation constitutive élasto-plastique (décrivant le comportement avant la rupture),
- du critère de transition solide→fluide du travail du second ordre,
- d’une relation constitutive visqueuse (décrivant le comportement post-rupture).

FIGURE 3.1: Modèle rhéologique 1D analogue au modèle de transition



Dès que le critère de transition du travail du second ordre est vérifié, les déformations visqueuses, qui jusque là étaient désactivées, sont calculées et prises en compte dans la résolution. Par ailleurs, la profonde transformation du comportement lors de l’écoulement entraîne que l’histoire plastique du matériau n’a plus de sens physique pendant cette phase. Les déformations plastiques ne sont donc pas considérées après la transition solide→fluide.

Ainsi, le comportement post-rupture est visco-élastique, avec un taux de déformation total égal à la somme des taux de déformation élastiques et visqueux. Si le temps de relaxation  $\eta/\mu$  est suffisamment court durant cette phase, le comportement peut cependant être considéré comme purement visqueux.

*Remarque : Dans le cadre de l’étude des coulées boueuses, nous avons vu (voir partie 1.2.2) que la viscosité maximum est de l’ordre du kPa.s. Au contraire, la valeur du module de cisaillement élastique dans un sol est au minimum de l’ordre du MPa. Le temps de relaxation  $\eta/\mu$  atteignant alors au maximum  $10^{-3}$  s, nous pouvons considérer que pour tout pas de temps supérieur à cette valeur, la relaxation est immédiate, et le comportement est quasiment visqueux dès la transition.*

### Transition fluide→solide

Comme nous l’avons vu au paragraphe 1.2.2, la principale caractéristique des écoulements visqueux de suspensions granulaires concentrées est qu’ils peuvent se figer pour des sollicitations faibles en contraintes, du fait de leur contenu en grains. Par conséquent, les lois de comportement qui décrivent ces matériaux considèrent nécessairement un seuil de contrainte, celui-ci pouvant être plus ou moins élaboré (seuil variable selon la pression, selon l’histoire du matériau, etc...).

Dans le modèle global que nous élaborons, la transition fluide→solide est donc décrite par le passage des contraintes en deçà du seuil de la loi visqueuse choisie (ce critère de franchissement du seuil étant défini de manière réversible, contrairement au critère du travail du second ordre).

Le franchissement de ce critère entraîne que le matériau redevient élastique. Le comportement élasto-plastique peut être rétabli à ce stade, mais en considérant que le nouveau solide n’a plus rien à voir avec le solide initial, et en réinitialisant les variables d’histoire plastique à 0.

La prise en compte de ce seuil visqueux entraîne que le déclenchement de la transition solide→fluide par le critère du travail du second ordre ne suffit pas à activer les déformations visqueuses. Celles-ci n'ont lieu, pour un point matériel donné, que si :

- le critère de transition du travail du second ordre est vérifié,
- l'état de contrainte dépasse le critère de Bingham.

### Discussion sur le principe du modèle

Soulignons que le modèle est basé sur une dissociation des déformations plastiques et visqueuses (association en "série" sur le schéma rhéologique 1D), alors que d'autres modèles de transition -comme celui de Perzyna- considèrent des déformations visqueuses et plastiques égales (association en "parallèle" en 1D, voir figure 1.17). En effet, le comportement des sols *in situ* étant reconnu comme étant élasto-plastique, il nous semble important de pouvoir décrire, contrairement aux modèles de type Perzyna, des déformations plastiques instantanées, et un écrouissage indépendant du temps.

Remarquons de plus que, d'un point de vue pratique, cette dissociation des lois constitutives permet d'intégrer de manière indépendante toute loi élasto-plastique géomécanique et toute loi visqueuse, selon le matériau à modéliser et la complexité du modèle souhaité (loi visqueuse de Herschel Bulkley, loi élasto-plastique Cam Clay, etc...).

Enfin, bien que nous ayons souligné que, dans un sens et dans l'autre, la transition s'explique par les mêmes mécanismes physiques de réarrangement granulaire, nous avons vu également que l'histoire du chargement joue un rôle primordial dans le comportement élasto-plastique et la rupture d'un solide, comme dans l'immobilisation d'une suspension concentrée (voir Chapitre 1). Il n'y a donc pas de raison que le solide atteigne la rupture au même seuil de contrainte que celui auquel le fluide s'immobilise, ce qui justifie notre choix d'un critère de première transition solide→fluide (travail du second ordre) différent du critère de transition fluide↔solide (seuil de viscosité), adopté par la suite.

### 3.1.2 Présentation du modèle intégrant les lois Plasol et Bingham

#### Nombre de paramètres

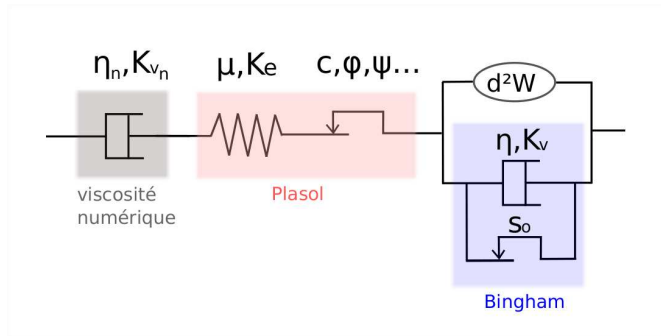
Les premières lois constitutives que nous souhaitons intégrer au modèle global sont la loi Plasol (déjà implantée dans le code et bien adaptée à la modélisation des sols), et la loi de Bingham (loi la plus simple prenant en compte un seuil de viscosité). Cette dernière est notamment bien adaptée à la description du comportement des coulées de boues et suspensions concentrées (voir partie 1.2.2).

Avant la première transition, rappelons qu'une composante numérique de viscosité (très élevée pour ne pas influencer les résultats) est nécessaire à la résolution. Cette viscosité est toujours présente après la transition, mais garde peu d'effet sur la réponse mécanique (voir détail au paragraphe 3.3.2).

Le modèle 1D analogue au modèle de comportement effectivement implanté dans Ellipsis est présenté à la figure 3.2.

En considérant les 13 paramètres de Plasol, et que l'écoulement après la transition solide→fluide est incompressible ( $K_v = \infty$ ), le modèle global comprenant Plasol et Bingham dépend de 15 paramètres physiques. Les paramètres numériques  $K_{vn}$  et  $\eta_n$  sont définis par rapport aux paramètres élastiques pour que la relaxation des contraintes dans l'état solide soit négligeable.

FIGURE 3.2: Modèle de transition (forme 1D) avec les lois de Bingham et Plasol, et la viscosité numérique

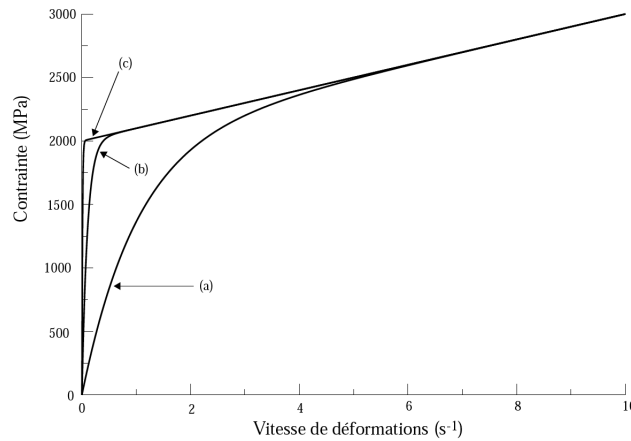


### Seuil de Bingham 3D

Afin de respecter la formulation 2D déformation plane du code et de Plasol, et notamment le calcul des contraintes dans la direction hors plan, il est nécessaire de considérer le seuil de Bingham dans une expression tridimensionnelle (c'est-à-dire sous forme tensorielle comme les contraintes et les déformations).

Notons qu'un modèle de Bingham, a déjà été implanté dans le code par Dufour et Pijaudier-Cabot (2005) pour étudier l'écoulement de géomatériaux sous forme fluide, comme les bétons frais (Roussel *et al.*, 2007; Dufour et Pijaudier-Cabot, 2005). Dans cette implémentation il a simplement été pris en compte une loi visqueuse classique, avec une viscosité  $\eta$  non linéaire, dépendante du taux de cisaillement :  $\tau = \eta(\dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}$  (avec  $\dot{\gamma}$  le gradient de vitesse et  $\tau$  la contrainte de cisaillement). La courbe  $\tau$ - $\dot{\gamma}$  est telle qu'elle présente un changement de pente relativement abrupt à  $\tau = s_o$  ( $s_o$  étant le seuil que l'on cherche à décrire), en évitant cependant tout point singulier (voir figure 3.3).

FIGURE 3.3: Modèle de Bingham modifié pour  $s_o = 2000$  MPa,  $\eta = 100$  MPa.s, et 3 valeurs de  $m$  :  $m=1$  (courbe a),  $m=10$  (b), et  $m=100$  (c)



Dans ce modèle, à l'origine formulé par Papanastasiou (1987), la viscosité s'exprime par :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_p + \frac{s_o}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-m\dot{\gamma})] \quad (3.1)$$

où  $m$  est un paramètre dont la valeur règle la précision de l'approximation (plus  $m$  est grand, plus la courbe exponentielle change brutalement de pente au voisinage de  $\tau = s_o$ ), et  $\eta_p$  la viscosité physique que l'on souhaite décrire. D'après cette équation,  $\tau$  s'écrit alors :

$$\tau = \eta_p \dot{\gamma} + s_o [1 - \exp(-m\dot{\gamma})] \quad (3.2)$$

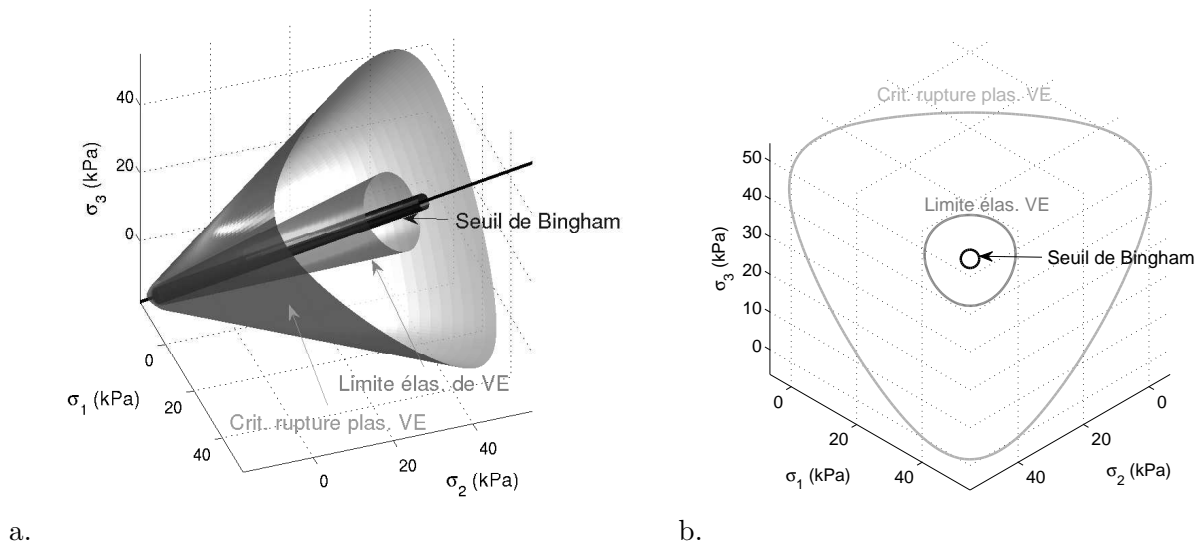
Le modèle de Papanastasiou décrit donc des fluides totalement visqueux, dont la viscosité devient extrêmement élevée sous une certaine valeur de contrainte. Comme nous décrivons avec Ellipsis un vrai comportement élasto-plastique de la phase solide, nous pouvons considérer, au lieu de ce modèle, une vraie condition de déformations visqueuses nulles en deçà du seuil  $s_o$ .

La prise en compte de ce seuil, de manière tridimensionnelle, est présentée au paragraphe 3.3.

Finalement, nous avons représenté à la figure 3.4, les enveloppes caractéristiques du modèle de transition dans l'espace des contraintes principales. Lorsque ce modèle intègre les lois de Bingham et Plasol, ces surfaces sont : le critère de plasticité et la limite élastique de Van Eekelen, le seuil 3D de Bingham.

Des paramètres réalistes ont été choisis ici :  $\varphi_C = \varphi_E = 6-28^\circ$ ,  $C = 1-10$  kPa,  $s_o = 2$  kPa. Nous observons, pour ces paramètres et pour une pression supérieure à quelques kPa, que le critère de Bingham est à l'intérieur du critère limite de plasticité et de la limite élastique. En général, le seuil de viscosité est donc dépassé lorsque le critère du travail du second ordre est vérifié (ce qui a lieu nécessairement dans le domaine plastique), entraînant un écoulement visqueux dès la rupture.

FIGURE 3.4: Représentation des enveloppes caractéristiques du modèle de transition pour des paramètres élastoplastiques et visqueux réalistes (VE : Van Eekelen)



Présentons maintenant l'intégration dans Ellipsis du critère du travail du second ordre qui constitue le critère de première transition de notre modèle.

## 3.2 Intégration dans Ellipsis du critère du travail du second ordre

Dans cette partie, le calcul du travail du second ordre est tout d'abord exposé, puis validé sur 2 cas test.



### 3.2.1 Calcul du travail du second ordre

#### Travail du second ordre local

Comme nous l'avons détaillé dans la partie 1.1.2, une condition suffisante de stabilité au niveau du point matériel porte sur le signe du travail du second ordre normalisé (la normalisation permet de rendre plus lisible la valeur obtenue de  $d^2W$ ) :

$$d^2W_n = \frac{d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\|\|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\|} > 0 \quad \forall \|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\| \neq 0, \quad (3.3)$$

avec  $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}$  les incréments de contrainte et de déformation entre la configuration courante et la configuration au pas précédent.

Autrement dit, pour toute direction de chargement incrémental (en contrainte ou déformation), si tous les couples réponse ( $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ ) vérifient l'équation 3.3, alors le point matériel est stable (et il n'appartient pas au domaine de bifurcation). Or, nous ne nous intéressons pas à toutes les sollicitations possibles, mais à celle que nous appliquons effectivement dans la modélisation d'un problème particulier. De plus, il serait lourd numériquement de faire -à chaque incrément de calcul- une recherche directionnelle pour connaître les faisceaux directionnels (=hypercônes) stables ou non. Finalement nous nous intéressons moins à la condition de stabilité (et à la situation par rapport au domaine de bifurcation) qu'à une condition de rupture pour un chargement particulier.

Nous considérons donc que si sur le trajet de chargement appliqué  $\frac{d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\|\|\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\|} < -10^{-3}$ , alors la rupture est effectivement atteinte et les déformations visqueuses sont activées. Ce seuil de  $-10^{-3}$  est pris en compte afin que la rupture soit atteinte de manière certaine ; il est indépendant des unités choisies pour le modèle puisque le travail du second ordre est normalisé.

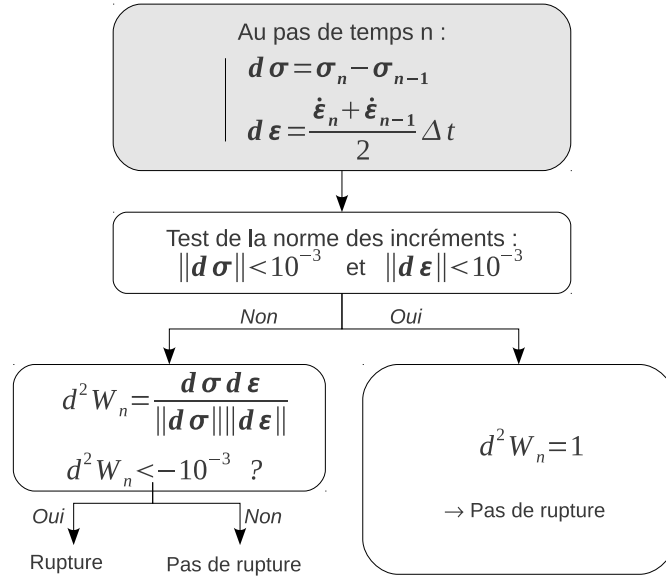
Nous avons intégré ce calcul dans Ellipsis en fin de chaque incrément (plus précisément après le calcul des contraintes) et pour toutes les particules dont le comportement est élasto-plastique. Cette vérification est donc faite *a posteriori* : si  $d^2W_n < -10^{-3}$ , cela signifie que la rupture a été atteinte pendant l'incrément de temps écoulé. Il y a donc un léger retard de détection de la rupture, mais qui reste peu important pour un pas de chargement suffisamment faible. L'algorithme de calcul est très simple, il est présenté à la figure 3.5.

#### Travail du second ordre global

Le critère de stabilité initialement proposé par Hill (1958) (condition exprimée à l'équation 1.23) porte sur l'intégrale du travail du second ordre local sur le volume total de l'échantillon considéré. Il est intéressant de connaître cette quantité à l'échelle d'un modèle entier puisque, d'après Hill, si elle est négative sur ce modèle, alors le solide est potentiellement instable. Cette forme intégrale, appelée communément 'travail du second ordre global', peut se calculer à partir d'une somme sur tous les points d'intégration :

$$D^2W = \int_V d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}dV = \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_p \cdot \omega_p J_p, \quad (3.4)$$

avec  $N_p$  le nombre total de point d'intégration du modèle,  $J_p$  le déterminant de la matrice Jacobienne de la transformation au point d'intégration  $p$ , et  $\omega_p$  le poids numérique du point d'intégration  $p$ .

FIGURE 3.5: Calcul du travail du second ordre local normalisé dans *Ellipsis*

De plus, une expression normalisée de cette quantité a été proposé par Huynh (Huynh, 2005; Prunier *et al.*, 2009) :

$$D^2W_n = \frac{\sum_{p=1}^{N_p} D^2W}{\sum_{p=1}^{N_p} \omega_p J_p \sum_{p=1}^{N_p} ||d\sigma_p|| ||d\varepsilon_p||}, \quad (3.5)$$

Nous avons intégré le calcul de cette expression dans le code, au même niveau que le calcul de  $d^2W_n$ . Notons que les particules dont le poids numérique a été annulé (voir paragraphe 2.2.4 sur le traitement spécifique des éléments hétérogènes), ne sont pas prises en compte dans le calcul de cette quantité.

Appliquons maintenant ces deux calculs dans le cas de deux modèles simples menant à la rupture. Dans ces essais, le comportement décrit est élasto-plastique sans transition visqueuse.

### 3.2.2 Validation du calcul de $d^2W_n$

#### Cas de l'essai triaxial non-drainé

Nous souhaitons tout d'abord vérifier la détection de la rupture avec le travail du second ordre pour l'essai type dans lequel la rupture est atteinte avant le critère limite de plasticité : l'essai triaxial non-drainé sur sol lâche.

Notre modèle est constitué d'un modèle de dimension  $1 \times 1$  (non pesant). Ses paramètres élasto-plastiques sont présentés au tableau 3.1.

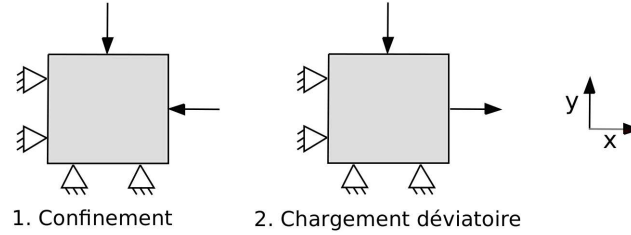
Le chargement se fait par application de vitesses sur les bords du modèle en 2 étapes (voir figure 3.6) :

- Tout d'abord des vitesses horizontale (selon  $x$ ) et verticale (selon  $y$ ) sont appliquée telles que, à chaque incrément de chargement, l'échantillon subisse une même déformation de

TABLE 3.1: Paramètres élasto-plastiques de l'essai triaxial non-drainé

$E$ (MPa)	$\nu$	$\varphi_{e0} = \varphi_{c0}$ (°)	$C_0$ (kPa)	$\varphi_{ef} = \varphi_{cf}$ (°)	$C_f$ (kPa)	$\psi_e = \psi_c$ (°)	$B_p$	$B_c$
15	0,29	3	1	28	10	5	0,01	0,02

FIGURE 3.6: Chargement cinématique en 2 phases



compression  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0,001$ . Cette première étape est menée jusqu'à obtenir une pression de confinement de 3 kPa.

- Dans un deuxième temps, le sens de la vitesse horizontale est inversé, afin d'obtenir une elongation telle que le chargement soit isochore :  $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 0$ . Comme le code ne permet pas la résolution d'un système couplé hydro-mécanique, garder le volume constant lors du calcul est une manière de modéliser la condition de non drainage. En effet, lorsque l'eau est prisonnière du squelette granulaire, c'est son incompressibilité qui dicte la condition cinématique. De cette condition dépend alors la réponse en plasticité : si le matériau est dilatant la pression va avoir tendance à augmenter (puisque la dilatation est impossible), alors que s'il est contractant, elle aura tendance à diminuer (contraction impossible).

Pour cet essai en 2D déformation plane et en conditions isochores, le travail du second ordre s'exprime :  $d^2W_n = d\varepsilon_{yy}(d\sigma_{yy} - d\sigma_{xx}) = d\varepsilon_{yy}dq$ . Comme  $d\varepsilon_{yy}$  n'est jamais nul (cinétique contrôlée ici), l'annulation du travail du second ordre équivaut à une annulation de l'incrément de contrainte déviatoire  $dq$ .

Les résultats sont considérés pour un point d'intégration quelconque dans le modèle. En effet, la réponse élasto-plastique est homogène, et la rupture est *a priori* diffuse pour un tel essai. Les figures 3.7a et 3.7b présentent respectivement l'évolution en fonction de la pression de  $q$  et  $d^2W_n$ .

Nous observons premièrement que la pression diminue dès l'entrée en plasticité, en accord avec la valeur de l'angle de dilatance initial. En effet,  $\psi_o = \psi - (\varphi_f - \varphi_o) = -20^\circ$  (d'après la définition de l'érouissage de  $\psi$  dans Plasol), ce qui indique un caractère fortement contractant du sol.

De plus, le travail du second ordre (proche de 1 dans le domaine élastique) diminue fortement à l'entrée en plasticité et s'annule, de manière concordante avec la théorie, au pic de  $q$ .

A présent que le critère du travail du second ordre est validé sur un essai homogène, étudions son évolution pour le cas d'un échantillon chargé de manière hétérogène jusqu'à la rupture.

### Calcul sur un essai non-homogène : colonne sous poids propre

**Modèle** Reprenons le modèle de colonne pesante du paragraphe 2.2.4. La géométrie de ce modèle est rappelée à la figure 3.8 et ses paramètres physiques au tableau 3.2 (notons qu'une valeur plus réaliste de 0,35 a été considérée pour  $\nu$ ).

FIGURE 3.7: Trajet de contrainte dans le plan  $q/p$  (a), Représentation du travail du second ordre en fonction de  $p$  (b)

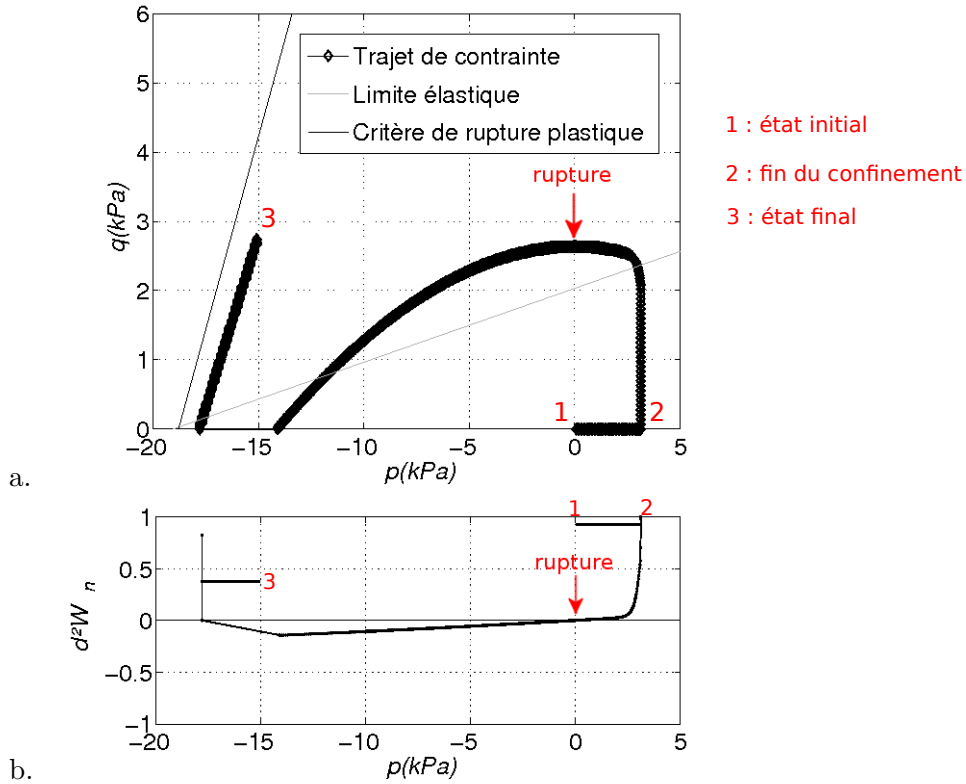


TABLE 3.2: Paramètres physiques du bloc pesant chargé à la rupture

E (MPa)	$\nu$	$\varphi_{e0} = \varphi_{c0}$ (°)	$C_0$ (kPa)	$\varphi_{ef} = \varphi_{cf}$ (°)	$C_f$ (kPa)	$\psi_e = \psi_c$ (°)	$B_p$	$B_c$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
5	0,35	15	1	25	5	15	0,01	0,02	1800

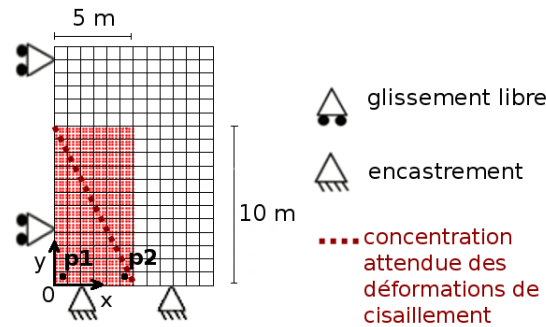
Dans cet essai, nous avons calculé une variation du taux de déformation plastique entre deux incréments qui atteignait, en fin de chargement, environ 10 fois le critère établi en 2.1.4, ce qui signifie que, pour la fin du calcul, la résolution explicite en élasto-plasticité donnait des résultats très peu précis. Par conséquent, nous choisissons ici des incréments de gravité de  $dg=0,013 \text{ m/s}^2$  (au lieu de  $0,13 \text{ m/s}^2$  en 2.2.4). L'augmentation de  $g$  est menée jusqu'à atteindre la rupture dans l'échantillon.

Dans cet essai, il n'y a pas de condition isochore. Les conditions de chargement peuvent ainsi être considérées drainées et il y a de grandes chances que la rupture soit atteinte sur le critère limite de plasticité.

D'après la condition d'ancrage en base, nous nous attendons à une concentration des déformations et de la rupture selon une direction globalement diagonale à l'échantillon (voir figure 3.8).

Les résultats sont extraits sur 2 particules,  $p1$  et  $p2$  (voir figure 3.8).  $p1$  est située au niveau du coin inférieur gauche (initialement  $x=0,9$  et  $y=0,5 \text{ m}$ ) où le confinement est important du fait de l'ancrage et de la condition de vitesse normale nulle sur le bord gauche du modèle. Nous nous attendons donc à peu de déformations plastiques, voire aucune, sur cette particule. La particule  $p2$  est située initialement en  $(4,5;0,5)$ , c'est à dire en pied de talus, zone en général

FIGURE 3.8: Géométrie du modèle et positionnement des 2 particules de suivi des résultats



critique vis-à-vis de la rupture, et où se développent de grandes déformations plastiques.

**Résultats et analyse** Le chargement a été stoppé pour  $g=2,1 \text{ m/s}^2$ , au vu du changement de signe de  $d^2W_n$  pour une grande partie des particules.

Pour les 2 particules choisies les résultats que nous extrayons sont :

- le second invariant des contraintes en fonction de la pression, tracé selon la représentation plane présentée au paragraphe 2.3.2,
- le travail du second ordre local normalisé  $d^2W_n$  en fonction de la gravité appliquée.

Les 2 graphes sont présentés, pour chacune des particules, à la figure 3.9. Sur le deuxième graphe nous avons repéré, en plus du travail du second ordre le chargement au-delà duquel le domaine plastique est atteint (zone matérialisée par le fond coloré jaune).

L'analyse des résultats pour les 2 particules permet de vérifier un certain nombre de points :

- Tout d'abord, les deux particules ont effectivement un comportement différent du fait de leur position dans l'échantillon. La particule p1 ne plastifie que peu au cours du calcul, et son travail du second ordre normalisé, s'il oscille en fin de chargement, ne s'annule pas (pas de rupture). Au contraire, la particule p2 plastifie beaucoup plus, et son état de contrainte avoisine le critère limite de plasticité à l'arrêt du chargement. De plus, son travail du second ordre devient négatif à la fin de l'essai (à  $g=1,85 \text{ m/s}^2$ ).
- Le critère du travail du second ordre local est relativement stable et proche de 1 en élasticité (valeur autour de 0,8 pour p1 et p2), et présente une diminution conséquente à l'entrée en plasticité, en continuant à diminuer régulièrement dans le domaine plastique pour p2.
- Pour p2,  $J_{2\sigma}$  tend vers le critère limite de plasticité, sans l'atteindre précisément (ce qui serait toutefois impossible du fait de la plasticité asymptotique) et l'annulation du travail du second ordre est atteinte pour un état de contrainte très proche de ce critère. Ceci confirme que nous sommes bien dans le cas d'une rupture dite classique (atteinte sur le critère limite de plasticité) en conditions drainées.

Afin de mieux visualiser la rupture au niveau général de l'échantillon nous avons représenté :

- d'une part, les particules -sur la déformée finale- pour lesquelles  $d^2W_n < -10^{-3}$ , c'est-à-dire à la rupture (figure 3.10),
- d'autre part, le suivi du travail du second ordre global, qui est la quantité en général suivie au cours d'un calcul de talus mené à la rupture (figure 3.11a).

Tout d'abord, sur le zonage obtenu du travail du second ordre local, nous observons nettement la bande de concentration de la rupture, comme attendu pour un tel chargement.

De plus, la courbe du travail du second ordre, à la figure 3.11a, montre une annulation de  $D^2W_n$ , à partir  $1,85 \text{ m/s}^2$ , en même temps que l'annulation observée pour la particule p2. Au delà, comme pour  $d^2W_n(p2)$ , le travail du second ordre global présente quelques oscillations.

FIGURE 3.9: Résultats en  $J_{2\sigma}$  et  $d^2W_n$  pour les particule p1 (a,b), p2 (c,d)

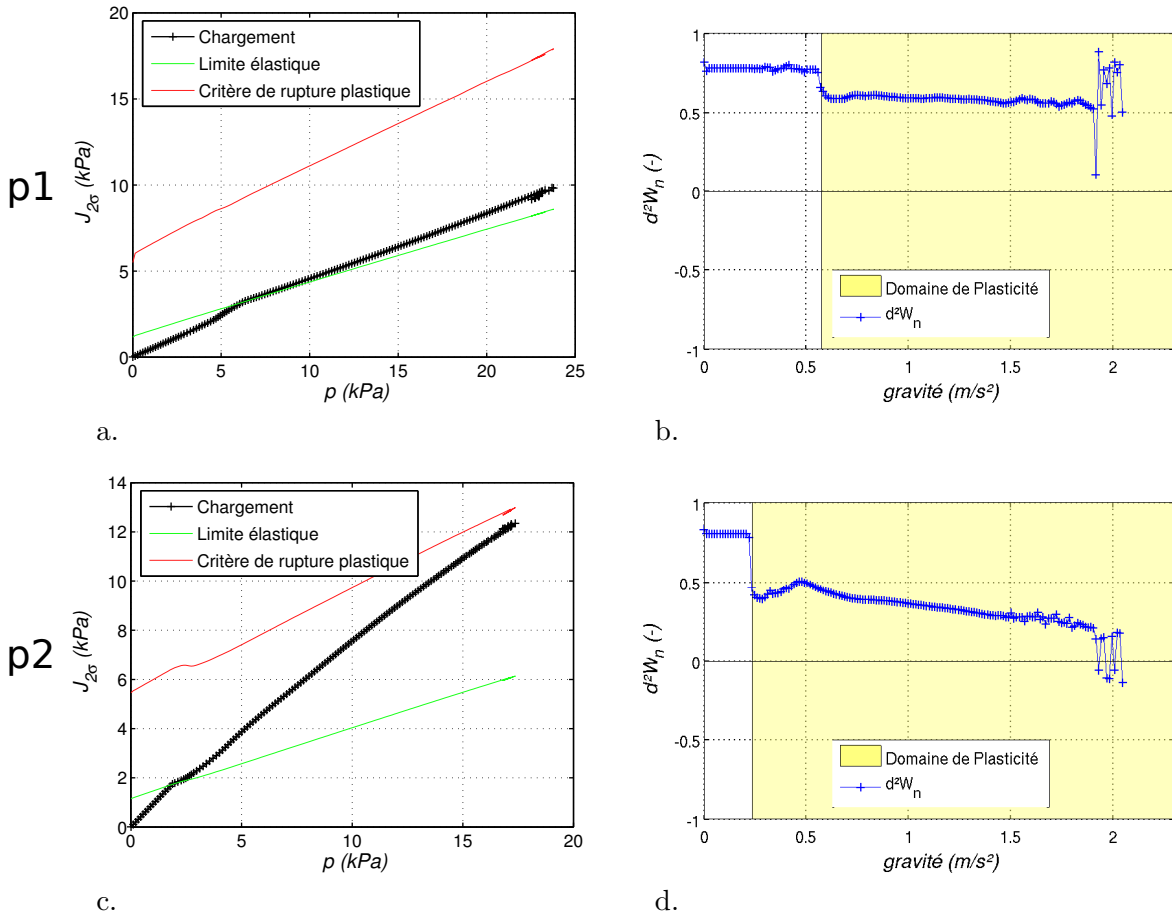
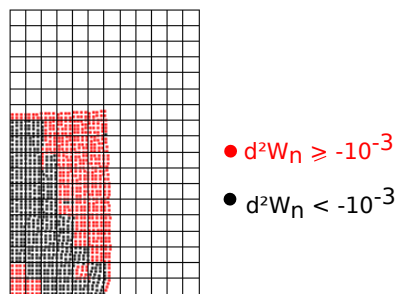
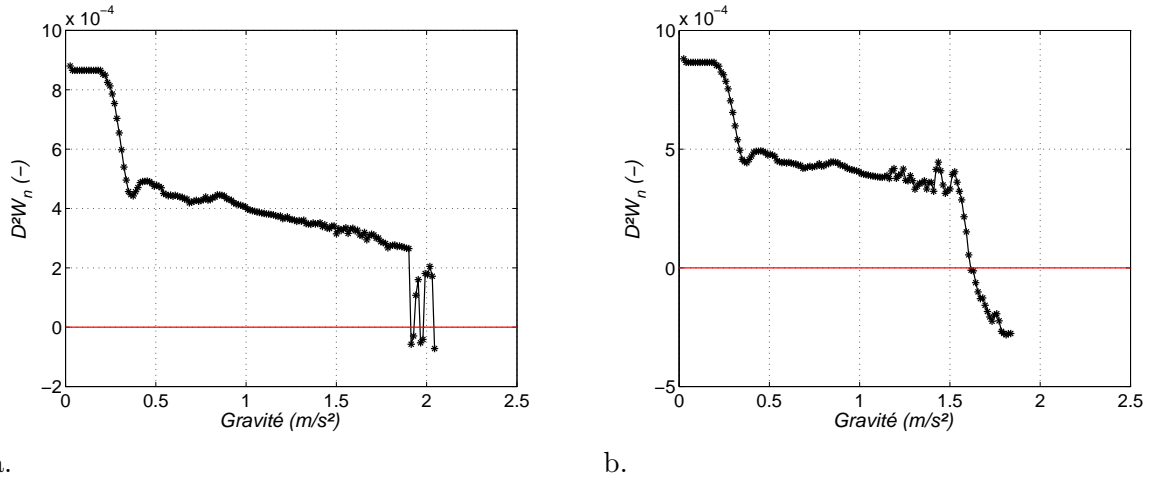


FIGURE 3.10: Zonage du travail du second ordre local sur l'échantillon à  $g=1,85$  m/s<sup>2</sup>



La question se pose de savoir si ces oscillations sont physiques ou numériques. Nous nous interrogeons tout d'abord sur l'effet de l'interpolation constante des dérivées de fonction de forme, qui a pour effet une différence non négligeable des champs de contrainte et de déformation d'un élément à l'autre (interpolation en "marche d'escalier"). Ceci pourrait perturber  $d^2W_n$  pour une particule passant dans un nouvel élément. Cependant, un maillage deux fois plus fin du modèle ne change rien à ces oscillations, alors que ce raffinement réduit les sauts de contraintes et déformations entre éléments. L'interpolation constante par les dérivées des fonctions de forme n'est donc pas en cause dans ces oscillations.

FIGURE 3.11: Suivi de  $D^2W_n$  au cours du calcul avec traitement des éléments hétérogènes (a), et sans ce traitement (b)



Nous nous posons alors la question de l'effet du traitement des éléments hétérogènes sol-air et refaisons le calcul sans ce traitement. Les particules 'sol' et 'air' en minorité dans les éléments hétérogènes sont donc prises en compte dans la résolution et dans le calcul de  $D^2W_n$ . Nous obtenons la courbe présentée à la figure 3.11b, où  $D^2W_n$  évolue de manière beaucoup plus régulière. Même si cette courbe n'est pas une référence, puisque nous avons vu que des points peuvent être sur-plastifiés sans le traitement des éléments hétérogènes, nous constatons que la rupture globale pour les deux calculs (avec et sans traitement des éléments hétérogènes) est atteinte pour un chargement voisin.

En définitive, nous avons mis en évidence que les oscillations de  $D^2W_n$  sont probablement dues à la prise en compte des éléments hétérogènes. Il est effectivement cohérent que l'annulation du poids de certaines particules en périphérie de l'échantillon, et donc la modification des termes de force à ce niveau, aient un effet numériquement visible à la rupture : selon l'équilibre à la frontière de l'échantillon de sol, l'écoulement plastique peut être contenu ou non.

Enfin, devant la convergence du calcul pendant de nombreux incréments après la rupture globale (tous ne sont pas présentés dans les courbes résultats des figures 3.11 et 3.9), nous souhaitons mettre en évidence l'influence de l'air (qui, d'après le paragraphe 2.3.3, est la cause de cette convergence post rupture).

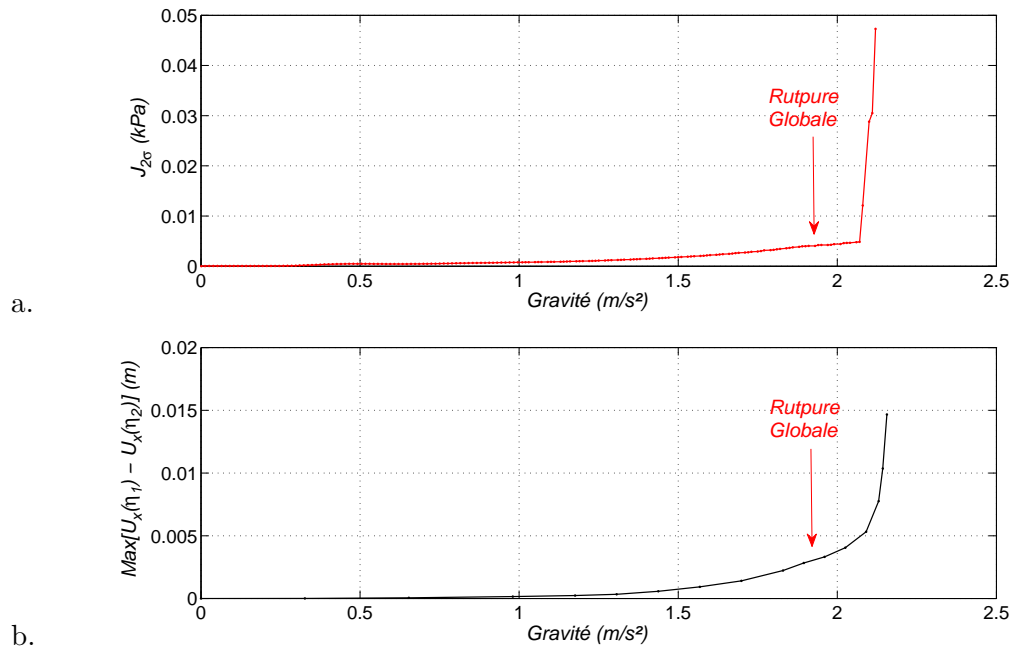
Nous avons tracé à la figure 3.12a, l'évolution, au cours du chargement en gravité, du second invariant de contrainte dans l'air (sur une particule de position  $x=6,2$  m  $y=1$  m, c'est à dire en regard de p2). Nous pouvons observer que peu après la rupture globale,  $J_{2\sigma}$  augmente brutalement dans l'air.

Un deuxième indicateur de l'influence de ce matériau de remplissage, est l'effet sur les résultats d'une faible variation de sa viscosité. Nous avons calculé, sur un profil vertical de l'échantillon (situé en  $x=4,5$  m), la différence des déplacements horizontaux  $U_x$  pour des viscosités de l'air de  $\eta_1=1$  Pa.s (valeur utilisée précédemment) et  $\eta_2=5$  Pa.s (valeur qui reste négligeable devant la viscosité effective du sol). Nous avons représenté, à la figure 3.12c, l'évolution au cours du chargement, du maximum, sur la hauteur du profil, de cette différence.

Nous observons que cette quantité est quasiment nulle au début du chargement, s'accroît légèrement lorsque le chargement augmente (et que les déformations plastiques deviennent plus importantes), et très fortement à partir de  $g=1,85$   $m/s^2$  (rupture).

Les résultats après la rupture sont donc non-objectifs, vis-à-vis de la viscosité de l'air, et les résultats pour un chargement plus élevé ne doivent pas être considérés.

FIGURE 3.12: Évolution du second invariant de contraintes dans l'air (a). Évolution du maximum de différence (pour deux viscosités de l'air, 1 et 5 Pa.s) de déplacement horizontaux (b)



En conclusion, cet essai montre une assez bonne précision de la détection de la rupture lors d'un chargement (en conditions drainées) jusqu'au critère limite de plasticité. Au voisinage de ce critère, un modèle classique en éléments finis aboutirait à une non-convergence, alors que pour un modèle Ellipsis avec remplissage en 'air', le calcul aboutit à une mobilisation de ce matériau environnant et la convergence du système global est alors possible. Dans ce cas, nous pouvons malgré tout mettre en évidence la rupture globale grâce au critère du travail du second ordre, et il apparaît que cette rupture est globalement simultanée avec la mobilisation excessive de l'air.

Au-delà de la rupture globale, les résultats en élasto-plasticité perdent leur objectivité avec Ellipsis : ils deviennent très dépendants de la viscosité de l'air environnant et une étude plus approfondie montre qu'ils deviennent aussi dépendants d'une faible variation des pas de chargement.

Par rapport aux résultats du paragraphe 2.3.3, où l'influence de la viscosité de l'air avait été montrée pour de forts chargements, nous avons pu mettre en évidence ici que la perte d'objectivité apparaît seulement à partir de la rupture globale (les résultats restent fiables avant). Ainsi, nous pouvons confirmer que l'introduction d'une viscosité pour décrire le comportement post-rupture est nécessaire, non seulement pour décrire l'écoulement en cas de liquéfaction, mais aussi pour régulariser les résultats -même sans liquéfaction- après la rupture.

Par ailleurs, cet essai a mis en évidence que le traitement des éléments hétérogènes, sans doute du fait de la modification des forces à la frontière de l'échantillon, mène à des oscillations du travail du second ordre global à partir de la rupture. Cependant, le chargement pour lequel la rupture globale est détectée est proche de celui sans traitement de ces éléments.



*Remarque : Nous pouvons ici répondre à notre interrogation de la fin du paragraphe 2.2.4 concernant la stabilité matérielle du modèle étudié (de paramètres quasi-identiques à ce modèle) : la rupture avait effectivement été rencontrée avant la fin du chargement sans être mise en évidence, ce qui explique très probablement les déplacements non physiques observés à la figure 2.23.*

À présent, détaillons la prise en compte dans Ellipsis du seuil de viscosité tridimensionnel de Bingham, nécessaire à la modélisation du comportement post-rupture.

### 3.3 Implantation dans Ellipsis du seuil de Bingham 3D

Afin de considérer l'effet du seuil 3D  $s_o$  directement au niveau des équations de résolution globale, nous avons besoin tout d'abord d'inverser l'expression tridimensionnelle classique de la loi de Bingham. Puis, nous intégrons dans Ellipsis la condition de seuil de viscosité. Enfin, cette implantation est validée sur un cas simple.

#### 3.3.1 Inversion de la loi classique en 3D

Actuellement, la résolution globale du système est basée sur l'expression de la somme des taux de déformations élastiques, plastiques et visqueux (voir partie 2.1.1 sur l'implantation de la plasticité). Afin de prendre en compte la viscosité de Bingham dans la formulation il est donc nécessaire d'exprimer le taux de déformation visqueux en fonction des contraintes. Or, l'équation classique de la loi de Bingham exprime les contraintes en fonction des taux de déformations (voir équation 1.42). La première étape est donc d'inverser cette relation. D'une part, rappelons que la loi de Bingham s'écrit en 1D :

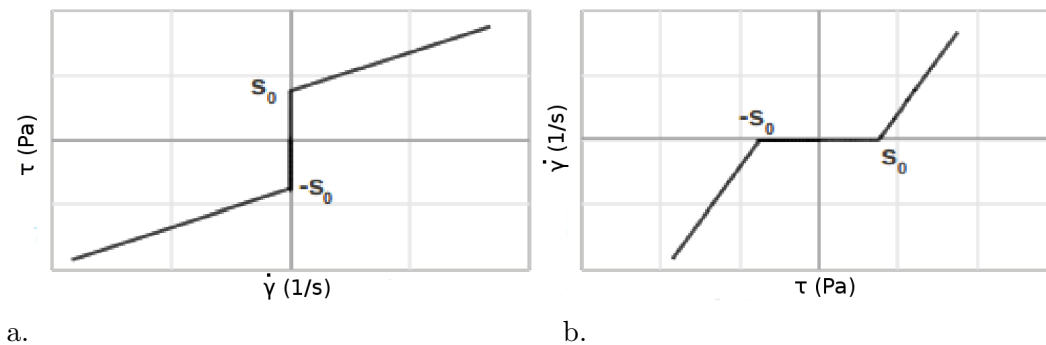
$$\text{si } \dot{\gamma} \neq 0 : \quad \tau = \eta \dot{\gamma} + s_o \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}), \quad \text{sinon : } |\tau| \leq s_o \quad (3.6)$$

avec  $\eta$  la viscosité dynamique,  $\tau$  la contrainte de cisaillement,  $\dot{\gamma}$  le gradient de vitesse, et  $s_o$  la contrainte seuil. La fonction  $x \rightarrow \operatorname{sgn}(x)$  retourne le signe du scalaire  $x$ . Comme cette relation est bijective sur l'intervalle  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ , elle est inversible sur cet intervalle, et son inverse est (voir figure 3.13) :

$$\text{si } |\tau| > s_o : \quad \dot{\gamma} = (\tau - s_o \operatorname{sgn}(\tau))/\eta, \quad \text{sinon : } \dot{\gamma} = 0, \quad (3.7)$$

avec le signe du seuil à présent donné par le signe de la contrainte de cisaillement.

FIGURE 3.13: Inversion de la relation de Bingham en 1D



D'autre part, rappelons l'expression classique de loi de Bingham tridimensionnelle :

$$\text{si } J_{2\dot{\varepsilon}} \neq 0 : \quad s_{ij} = 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij} + s_o \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{J_{2\dot{\varepsilon}}}, \quad \text{sinon : } J_{2\sigma} \leq s_o, \quad (3.8)$$

où  $\dot{\varepsilon}$  et  $\mathbf{s}$  sont les tenseurs déviatoires de taux de déformation et de contrainte,  $J_{2\dot{\varepsilon}}$  et  $J_{2\sigma}$  sont, respectivement, les seconds invariants du taux de déformation et des contraintes (autrement dit les normes de  $\dot{\varepsilon}$  et  $\mathbf{s}$ ). La direction de la contrainte seuil est donc donnée par la direction  $\dot{\varepsilon}_{ij}/J_{2\dot{\varepsilon}}$  du tenseur déviatoire de taux de déformation.

En se basant sur l'inversion de la loi écrite en 1D, nous obtenons :

$$\text{si } J_{2\sigma} > s_o : \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\eta} \left( s_{ij} - s_o \frac{s_{ij}}{J_{2\sigma}} \right) = \frac{J_{2\sigma} - s_o}{2\eta} \cdot \frac{s_{ij}}{J_{2\sigma}}, \quad \text{sinon : } \dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad (3.9)$$

La contrainte seuil est ainsi définie en 3 dimensions (comme représenté à la figure 3.4), par une valeur limite du second invariant égal à un tenseur de norme  $s_o$  et cette fois de direction  $\frac{s_{ij}}{J_{2\sigma}}$ .

*Remarque : Pour un pur matériau de Bingham les directions  $\frac{s_{ij}}{J_{2\sigma}}$  et  $\frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{J_{2\dot{\varepsilon}}}$  sont nécessairement identiques, puisque contraintes et taux de déformation sont proportionnels (liés par la viscosité). Cependant, pour un matériau plus complexe (par exemple un matériau dont le comportement est tout d'abord élasto-plastique comme dans le cas de notre modèle de transition), les deux tenseurs n'ont pas de raison d'être proportionnels.*

L'inversion de la loi de Bingham 3D, qui à notre connaissance n'a jamais été proposée, a donc un fort intérêt pour l'implantation du modèle de Bingham dans Ellipsis.

### 3.3.2 Formulation et prise en compte du seuil 3D

Reprenons la même méthode d'implémentation que pour la plasticité (paragraphe 2.1.1). Les taux de déformation totaux, lorsque  $J_{2\sigma} > s_o$ , s'expriment par (voir modèle rhéologique 1D à la figure 3.2) :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{tot} & = \dot{\varepsilon}_n + \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p + \dot{\varepsilon}_v \\ tr(\dot{\varepsilon}_{tot}) & = tr(\dot{\varepsilon}_n) + tr(\dot{\varepsilon}_e) + tr(\dot{\varepsilon}_p) + tr(\dot{\varepsilon}_v) \end{cases} \quad (3.10)$$

avec  $tot$  l'indice relatif au tenseur total,  $e$  à sa part élastique,  $p$  plastique,  $v$  visqueuse de Bingham, et  $n$  à sa part visqueuse-numérique.  $\dot{\varepsilon}$  est la partie déviatoire du tenseur de taux de déformation et  $tr(\dot{\varepsilon})$  sa trace.

En prenant en compte les relations élasto-plastiques, visqueuses numériques, et visqueuses à seuil, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{s}}{2\eta_n} + \frac{\check{\mathbf{s}}}{2\mu} + \frac{J_{2\sigma} - s_o}{2\eta} \cdot \frac{\mathbf{s}}{J_{2\sigma}} &= \dot{\varepsilon}_{tot} - \dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_n + \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v, \\ \Leftrightarrow \frac{\mathbf{s}}{2\eta_n} + \frac{\check{\mathbf{s}}}{2\mu} + \left( \frac{\mathbf{s}}{2\eta} - \frac{s_o}{2\eta} \cdot \frac{\mathbf{s}}{J_{2\sigma}} \right) &= \dot{\varepsilon}_{tot} - \dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_n + \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v, \end{aligned}$$

avec  $\check{\mathbf{s}}$  étant la dérivée de Jaumann de  $\mathbf{s}$ ,  $\eta_n$  la viscosité numérique et  $\eta$  la viscosité physique. Nous avons fait, dans cette implémentation, l'hypothèse qu'il n'y a pas de déformation isotrope générée par la relation de Bingham. Les équations sur la partie isotrope seront donc identiques aux équations 2.3 et 2.4, présentées pour le cas élasto-plastique.

La différenciation de type Euler-implicite de cette équation, entre le pas de temps  $t$  et  $t + \Delta t_e$ , donne :

$$\frac{\mathbf{s}^{t+\Delta t_e}}{2\eta_n} + \frac{\mathbf{s}^{t+\Delta t_e} - \mathbf{s}^t}{2\mu\Delta t_e} - \frac{\mathbf{W}^t \mathbf{s}^t - \mathbf{s}^t \mathbf{W}^t}{2\mu} + \frac{\mathbf{s}^{t+\Delta t_e}}{2\eta} - \frac{s_o}{2\eta} \cdot \frac{\mathbf{s}^{t+\Delta t_e}}{J_{2\sigma}^{t+\Delta t_e}} = \dot{\mathbf{e}}_{tot}^{t+\Delta t_e} - \dot{\mathbf{e}}_p^{t+\Delta t_e},$$

avec  $\mathbf{W}$  le tenseur de taux de rotation. Si nous considérons que la direction du tenseur de contrainte n'évolue que peu d'un pas de temps à l'autre, alors nous pouvons écrire que la quantité  $\mathbf{s}/J_{2\sigma}$ , qui détermine la direction du seuil, est celle au pas de temps précédent. D'autre part, rappelons que les déformations plastiques sont aussi explicites dans la résolution. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{s}^{t+\Delta t_e}}{2\eta_n} + \frac{\mathbf{s}^{t+\Delta t_e} - \mathbf{s}^t}{2\mu\Delta t_e} - \frac{\mathbf{W}^t \mathbf{s}^t - \mathbf{s}^t \mathbf{W}^t}{2\mu} + \frac{\mathbf{s}^{t+\Delta t_e}}{2\eta} - \frac{s_o}{2\eta} \cdot \frac{\mathbf{s}^t}{J_{2\sigma}^t} = \dot{\mathbf{e}}_{tot}^{t+\Delta t_e} - \dot{\mathbf{e}}_p^t \\ \Leftrightarrow & \mathbf{s}^{t+\Delta t_e} \left( \frac{1}{2\eta_n} + \frac{1}{2\mu\Delta t_e} + \frac{1}{2\eta} \right) - \frac{\mathbf{s}^t}{2\mu\Delta t_e} - \frac{\mathbf{W}^t \mathbf{s}^t - \mathbf{s}^t \mathbf{W}^t}{2\mu} - \frac{s_o}{2\eta} \cdot \frac{\mathbf{s}^t}{J_{2\sigma}^t} = \dot{\mathbf{e}}_{tot}^{t+\Delta t_e} - \dot{\mathbf{e}}_p^t \end{aligned}$$

Dans le cas où  $J_{2\sigma} > s_o$ , la viscosité est modifiée pour prendre en compte non seulement la viscosité numérique  $\eta_n$  et le comportement élastique de module  $\mu$ , mais aussi la viscosité  $\eta$  de la loi de Bingham. Elle s'exprime alors :

$$\eta_{eff} = \frac{1}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\mu\Delta t_e} + \frac{1}{\eta_n}} \quad (3.11)$$

Pour travailler avec une loi de Bingham de viscosité  $\eta$ , il faut donc choisir une viscosité numérique beaucoup plus élevée que  $\eta$ , et un pas de temps tel que  $\mu\Delta t_e$  soit beaucoup plus important que  $\eta$ . Avec cette expression de  $\eta_{eff}$ , les contraintes s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\frac{\mathbf{s}^{t+\Delta t_e}}{2\eta_{eff}} = \frac{\mathbf{s}^t}{2\mu\Delta t_e} + \frac{\mathbf{W}^t \mathbf{s}^t - \mathbf{s}^t \mathbf{W}^t}{2\mu} + \frac{s_o}{2\eta} \cdot \frac{\mathbf{s}^t}{J_{2\sigma}^t} + \dot{\mathbf{e}}_{tot}^{t+\Delta t_e} - \dot{\mathbf{e}}_p^t$$

En réécrivant d'autre part l'équation sur la partie isotrope, qui n'a pas changé, nous obtenons finalement :

$$\begin{cases} \mathbf{s}^{t+\Delta t_e} = 2\eta_{eff}(\dot{\mathbf{e}}_{tot}^{t+\Delta t_e} - \dot{\mathbf{e}}_p^t) + \eta_{eff} \left( \frac{\mathbf{s}^t}{\mu\Delta t_e} + \frac{\mathbf{W}^t \mathbf{s}^t - \mathbf{s}^t \mathbf{W}^t}{\mu} + \frac{s_o}{\eta} \cdot \frac{\mathbf{s}^t}{J_{2\sigma}^t} \right) \\ p^{t+\Delta t_e} = (K_v)_{eff} \left[ tr(\dot{\mathbf{e}}_{tot}^{t+\Delta t_e}) - tr(\dot{\mathbf{e}}_p^{t+\Delta t_e}) + \frac{p^t}{K_e\Delta t_e} \right] \end{cases} \quad (3.12)$$

Enfin, en remplaçant les expressions de 3.12 dans l'équation d'équilibre statique  $\text{div}\boldsymbol{\sigma} = \text{div}(\mathbf{s} + p\mathbf{1}) = \mathbf{f}_{ext}$  (avec  $\mathbf{1}$  le tenseur unité,  $\mathbf{f}_{ext}$  la force volumique externe), nous obtenons :

$$2\eta_{eff} \left[ \text{div} \left( \dot{\mathbf{e}}_{tot}^{t+\Delta t_e} \right) \right] + (K_v)_{eff} \left[ \text{grad} \left( tr \dot{\mathbf{e}}_{tot}^{t+\Delta t_e} \right) \right] = \mathbf{f1} + \mathbf{f2} + \mathbf{f3} + \mathbf{f4} \quad (3.13)$$

$\mathbf{f1}$ ,  $\mathbf{f2}$ ,  $\mathbf{f3}$ , sont les termes de forces qui ont été définis au paragraphe 2.1.1 ( $\mathbf{f2}$  et  $\mathbf{f3}$  dépendant du comportement élastique et plastique).

Le dernier terme de force,  $\mathbf{f4}$ , est directement dépendant de la contrainte seuil de Bingham et s'exprime, après développement des équations, par :

$$\mathbf{f}_4 = -\frac{\eta_{eff}}{\eta} s_o \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{s}}{J_{2\sigma}} \right)^t$$

Le schéma de résolution est donc explicite du point de vue de la prise en compte du seuil de Bingham.

Testons à présent cette implantation pour un essai simple sur un matériau de comportement de type Bingham (toujours sans considérer le modèle de transition).

### 3.3.3 Validation

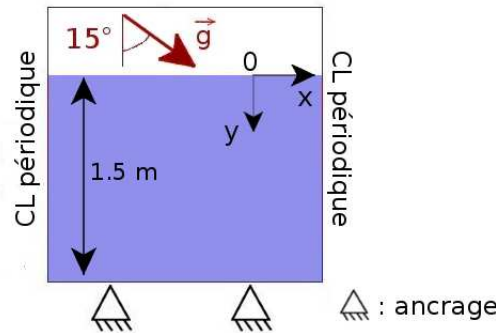
#### Présentation du modèle

Le problème considéré est celui d'une couche infinie à surface libre de 1,5 m d'épaisseur, inclinée de  $\theta=15^\circ$  par rapport à l'horizontale et soumise à la gravité ( $g=9,8 \text{ m.s}^{-2}$ ). Dans Ellipsis, la couche modélisée est en fait horizontale et c'est la gravité qui est inclinée de  $\theta=15^\circ$  par rapport à la verticale (voir figure 3.14). Afin de représenter le plus précisément possible la condition de couche infinie, nous avons utilisé les conditions aux limites de type périodique, présentées à la partie 1.4.4. La condition en base est de type ancrage.

Le comportement que nous souhaitons décrire est élastique sous la contrainte seuil, et visqueux à seuil au-delà.

Le maillage est constitué de  $32 \times 60$  éléments (en  $x$  et  $y$ ). Le modèle n'étant pas plastique, nous appliquons la gravité en une fois.

FIGURE 3.14: Modèle de couche infinie pesante inclinée



Les paramètres physiques du matériau étudié sont présentés au tableau 3.3. Nous avons choisi de nous placer en condition incompressible aussi bien en élasticité qu'en viscosité.

TABLE 3.3: Paramètres physiques de la couche visqueuse à seuil de Bingham

$E$ (MPa)	$\nu$	$\eta$ (Pa)	$K_v$ (Pa)	$s_o$ (Pa)	$\rho$ (kg.m <sup>3</sup> )
5.4	0.49	450	$1,12 \cdot 10^8$	2000	1600

Les paramètres numériques sont présentés au tableau 3.4. Nous les avons choisis tels que :

- les paramètres visqueux de l'air  $\eta$  et  $K_v$  soient très faibles devant les paramètres effectifs du sol  $\eta_{eff}$  et  $(K_v)_{eff}$ , que le seuil  $s_o$  soit dépassé ou non,
- le temps de relaxation du matériau d'étude sous le seuil soit suffisamment élevé par rapport au temps du calcul (quelques incréments avec  $\Delta t \simeq \Delta t_e = 10^{-2} \text{ s}$ ), afin que son comportement soit quasi-élastique,

- le temps de relaxation du matériau au-delà du seuil soit beaucoup plus court que le pas de temps  $\Delta t_e$ , afin que le comportement soit quasiment visqueux.

TABLE 3.4: Paramètres numériques de la couche visqueuse à seuil de Bingham ( $\Delta t_e=10^{-2}$  s)

	Air	Matériau sous le seuil	Matériau au delà du seuil
$\eta_{eff}$ (Pa.s)	2 ( $=\eta$ )	$1,79.10^4$	440
$(K_v)_{eff}$ (Pa.s)	90 ( $=K_v$ )	$8,27.10^5$	$8,27.10^5$
Tps de relaxation (s)	-	2,78	$2,5.10^{-4}$

### Solution analytique

**Contrainte** La couche est chargée en gravité. Calculons le profil des contraintes selon l'axe  $y$  (voir figure 3.14).

La contrainte qui s'exerce sur une facette de la base, est orientée selon  $\vec{g}$  et s'exprime  $\sigma = \gamma y = \rho g y$ .

Cette contrainte peut être décomposée en une contrainte normale à la facette ( $\sigma_{yy}$ ) et une contrainte tangente à la facette ( $\sigma_{xy}$ ) dont les expressions sont :

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = \rho g y \cos\theta \\ \sigma_{xy} = \rho g y \sin\theta, \end{cases} \quad (3.14)$$

avec  $\theta=15^\circ$ .

Compte tenu des conditions de déformation plane d'une part, et de couche infinie d'autre part, il existe un confinement aussi bien dans la direction  $x$  que dans la direction  $z$  (qui est la direction hors plan). Compte tenu de ces deux conditions et de la condition d'incompressibilité (aussi bien élastique que visqueuse), la loi de Hooke et la loi visqueuse mènent à :  $\sigma_{xx} = 0,5(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$  et  $\sigma_{zz} = 0,5(\sigma_{yy} + \sigma_{xx})$ . En définitive ceci nous donne :  $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{yy}$ . Ces trois composantes sont donc égales à la pression, et le seul terme déviatoire de contrainte est la composante de cisaillement  $\sigma_{xy}$  ce qui implique que :  $J_{2\sigma} = \sigma_{xy}$ .

D'après le calcul avec l'expression 3.14,  $J_{2\sigma}$  est donc inférieure à 2 kPa jusqu'à  $y=0,5$  m. Le comportement est donc théoriquement solide-élastique pour  $y$  entre 0 et 0,5 m et fluide-visqueux de 0,5 à 1,5 m.

**Vitesses** Cherchons à déterminer le profil en  $y$  des vitesses selon  $x$  (celles-ci seront notées  $V_x$ ).

A partir du résultat obtenu pour  $J_{2\sigma}$ , nous savons que le matériau s'écoule de manière visqueuse sur une hauteur de  $H=1$  m (entre 0,5 et 1,5 m de profondeur).

Considérons le changement de repère  $y'=1,5 - y$  m. Dans ce nouveau repère, le matériau s'écoule entre  $y'=0$  et  $y' = H$ . Pour cet essai en cisaillement pur, dans le repère  $y$  la loi de comportement s'exprimait par :  $2\eta\dot{\epsilon}_{xy} = \sigma_{xy} - s_o = \sigma_{xy} - \sigma_{xy}(y = 0,5) = \rho g(y - 0,5) \sin\theta$ . Avec  $y'$ , nous obtenons donc :  $2\eta\dot{\epsilon}_{xy'} = \rho g(1 - y') \sin\theta$ .

Le taux de déformation de cisaillement est défini par :

$$\dot{\epsilon}_{xy'} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y'} + \frac{\partial V_{y'}}{\partial x} \right) \quad (3.15)$$

qui est égal à (pas de vitesse selon  $y'$ , d'après la condition d'incompressibilité) :

$$\dot{\epsilon}_{xy'} = \frac{1}{2} \frac{\partial V_x}{\partial y'} \quad (3.16)$$

Cherchons à intégrer la dérivée  $\frac{\partial V_x}{\partial y'}$ . En considérant la relation  $2\eta\dot{\varepsilon}_{xy'} = \rho g(1 - y') \sin \theta$  et la relation 3.16, nous obtenons :

$$V_x(y') = \int_0^{y'} dV_x = \int_0^{y'} \frac{\gamma(1 - Y)\sin\theta}{\eta} dY \quad (3.17)$$

En définitive l'expression du profil de vitesse  $V_x$  au sein de la couche visqueuse est :

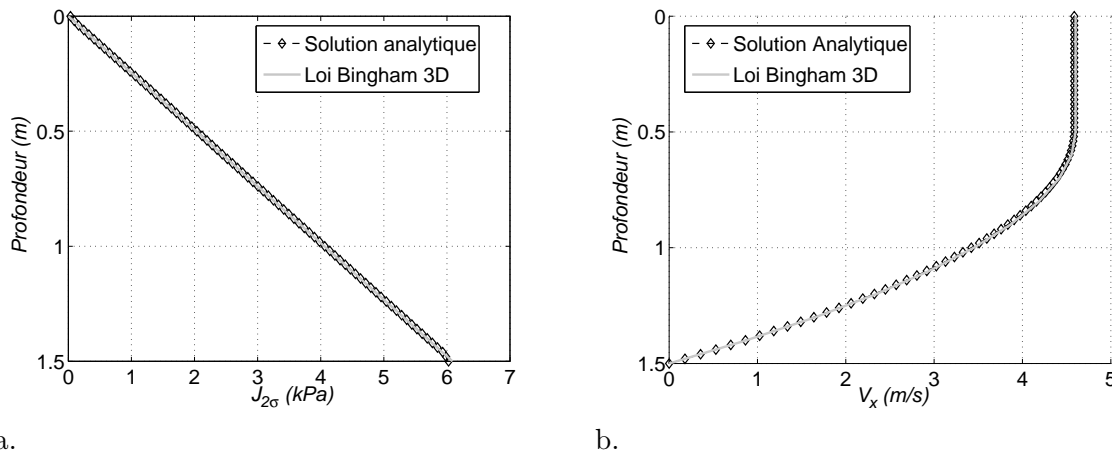
$$V_x(y') = \frac{\gamma\sin\theta}{\eta} \left( y' - \frac{y'^2}{2} \right) \quad (3.18)$$

Au-dessus de cette couche, le comportement est élastique (taux de déformation nul) et la vitesse ne change pas entre  $y=0$  et  $y=0,5$  m.

### Résultats et conclusion

Le second invariant de contrainte  $J_{2\sigma}$  et la vitesse  $V_x$  obtenus avec Ellipsis sont extraits sur un profil vertical de nœuds (les valeurs de  $J_{2\sigma}$  sont interpolées depuis les points d'intégration). Les profils obtenus sont présentés respectivement aux figures 3.15 a. et b. Chacun est comparé avec le profil analytique correspondant.

FIGURE 3.15: Comparaison des résultats analytiques et numériques (Ellipsis) pour un matériau de Bingham élastique sous le seuil



Il résulte que la concordance est excellente, avec moins de 0.5 % de différence relative moyenne pour  $J_{2\sigma}$  et moins de 0.9 % de différence relative moyenne pour  $V_x$ .

Le seuil de Bingham 3D a donc correctement été pris en compte dans cet essai et nous estimons que son implantation est validée.

A présent que les lois tridimensionnelles Plasol et Bingham sont implantées dans Ellipsis, et que le critère du travail du second ordre y est calculé, tous les ingrédients du modèle de transition sont présents dans le code.

Réalisons les premiers tests avec ce modèle de transition.

### 3.4 Premiers calculs réalisés avec le modèle de transition

L'objectif de ces premiers calculs est de tester le modèle de transition d'une part au niveau du point matériel, pour analyser ses caractéristiques, et d'autre part pour un calcul mené avec Ellipsis, pour valider son implantation dans le code.

Tout d'abord, nous avons choisi de tester, avec Ellipsis, le cas d'un essai menant à une rupture avant le critère limite de plasticité : l'essai triaxial non drainé sur un sol lâche. Une étude paramétrique sera réalisée sur cet essai pour tester l'influence des paramètres visqueux.

Dans un deuxième temps, nous avons choisi de modéliser, au niveau du point matériel, un essai typique d'une rupture sur le critère limite de plasticité : l'essai triaxial drainé. Notons que, puisque cet essai est susceptible de présenter des phénomènes de localisation (voir figure 1.5) a., il est préférable de le modéliser à l'échelle du point matériau pour éviter la perte d'homogénéité des déformations (même si la régularisation de Cosserat est implantée dans Ellipsis (Mühlhaus *et al.*, 2002)).

### 3.4.1 Cas de la transition pour une rupture diffuse

#### Modèle

Un carré unitaire de sol, non pesant, est modélisé avec Ellipsis, avec les paramètres mécaniques présentés au tableau 3.5. Dans son comportement élasto-plastique, le sol est représentatif d'une argile limoneuse, avec une faible rigidité élastique et un angle de frottement et une cohésion relativement élevés. Les angles de frottement et de dilatance en compression sont les mêmes que les angles de frottement et de dilatance en extension.

*Remarque 1 : Les paramètres élasto-plastiques ont volontairement été choisis identiques à ceux de l'essai modélisé en 3.2.2, puisqu'ils permettent d'atteindre la rupture dans l'échantillon.*

*Remarque 2 : Afin de considérer des paramètres visqueux réalistes pour un géomatériau, nous nous sommes basés sur la littérature (présentée au paragraphe 1.2.2) sur les coulées boueuses. Comme il apparaît qu'il n'y a pas d'ordre de grandeur précis pour ces paramètres ( $\eta$  comprise entre 30 et 1000 Pa.s, et  $s_o$  entre 100 et 12000 Pa), des paramètres peu élevés ont donc été arbitrairement choisis :  $\eta=50$  Pa.s et  $s_o=100$  Pa.*

TABLE 3.5: Paramètres mécaniques de l'essai triaxial non-drainé mené à la transition

$E$ (MPa)	$\nu$	$\varphi_{e0} = \varphi_{c0}$ (°)	$C_0$ (kPa)	$\varphi_{ef} = \varphi_{cf}$ (°)	$C_f$ (kPa)	$\psi_e = \psi_c$ (°)	$B_p$	$B_c$	$\eta$ Pa.s	$s_o$ Pa
15	0,29	3	1	28	10	5	0,01	0,02	50	100

La sollicitation est également la même que dans l'essai de la partie 3.2.2 : phase de confinement jusqu'à 3 kPa ( $V_x=V_y=0,6$  m/s, avec  $x$  la direction horizontale dans le plan et  $y$  la direction verticale) puis phase de déformation déviatoire isochore ( $V_y=0,6$  m/s et  $V_x$  telle que la déformation soit isochore). La réponse est suivie pour un point d'intégration quelconque (l'échantillon est homogène).

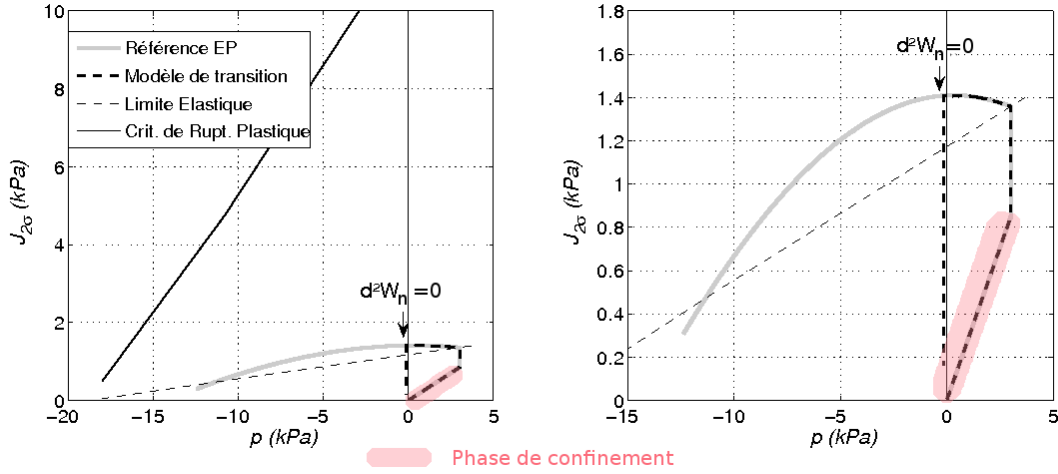
#### Résultats et analyse

Le second invariant de contrainte  $J_{2\sigma}$  est tracé en fonction de la pression d'une part, et du temps d'autre part. Le premier repère est plus adapté à l'analyse des résultats en élasto-plasticité (avant la transition), alors que le deuxième système d'axe est plus adapté dans le cadre d'une réponse visqueuse (après la transition) qui dépend du temps. Ces résultats sont présentés respectivement aux figures 3.16 et 3.17.

Sur le premier graphique, nous pouvons tout d'abord noter que, jusqu'à la rupture, le trajet de contrainte est le même qu'en élasto-plasticité.

Du fait des conditions de déformation plane, il ne peut pas être appliqué de vitesse de confinement dans la direction hors plan. La phase de confinement n'est donc pas tout à fait isotrope,

FIGURE 3.16: Évolution de  $J_{2\sigma}$  en fonction de  $p$  en comparaison avec  $J_{2\sigma}$  pour un comportement élasto-plastique (EP) sans transition (a). Zoom (b)



a.

b.

et  $J_{2\sigma}$  augmente jusqu'à 800 Pa pendant cette phase (ce qui n'était pas visible dans les graphes présentés en partie 3.2.2, car c'était la différence  $q = \sigma_{yy} - \sigma_{xx}$  qui était représentée). Comme la deuxième phase de chargement est entièrement déviatoire,  $J_{2\sigma}$  augmente sans variation de  $p$  dans le domaine élastique. À l'entrée du domaine plastique, la pression décroît de manière cohérente, avec l'angle de dilatance (à l'entrée du domaine plastique le sol est contractant puis que  $\psi_o = -20^\circ$ ).

Concernant le critère du travail du second ordre, nous avons détaillé dans la partie 3.2.2 qu'il s'annulait dans un tel essai au pic de  $q = \sigma_{yy} - \sigma_{xx}$ . Ici cette annulation est aussi atteinte pour le pic de  $J_{2\sigma}$ .

A partir de cet état de rupture,  $J_{2\sigma}$  décroît brusquement et l'état de contrainte regagne le domaine élastique (le calcul indique qu'il n'y a plus de déformations plastiques).

Nous observons que la pression reste constante après la rupture. En effet, le comportement isotrope est supposé incompressible dans le code pour un matériau de Bingham et par ailleurs, le comportement élastique ne peut pas non plus produire de déformation volumique étant donné les conditions de chargement isochores.

L'évolution temporelle de  $J_{2\sigma}$  pour un matériau visco-élastique soumis à un taux de déformation axial  $\dot{\epsilon}_{yy}$  peut être obtenue à partir de la solution de l'équation différentielle en  $s_{yy}$  (contrainte déviatoire verticale) :

$$\frac{\dot{s}_{yy}}{2\mu} + \frac{s_{yy}}{2\eta} = 2\dot{\epsilon}_{yy} + \frac{s_o}{\eta}, \quad (3.19)$$

avec  $\dot{\epsilon}_{yy}$  le taux de déformation appliqué verticalement, constant au cours du calcul :  $\dot{\epsilon}_{yy} = 0,6 \text{ s}^{-1}$ .

La solution de cette équation est classiquement une exponentielle. En considérant que  $J_{2\sigma} = s_{yy}$  dans ce modèle, nous obtenons, pour un temps  $t$  au-delà de l'instant de rupture  $t_r$ , l'expression suivante pour  $J_{2\sigma}$  :

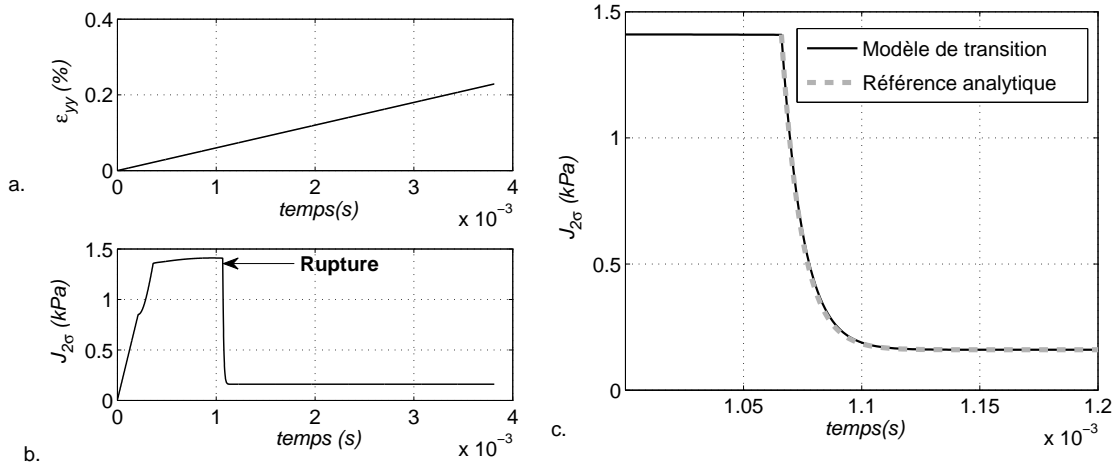
$$J_{2\sigma} = (J_{2\sigma r} - 2\eta\dot{\epsilon}_{yy} - s_o) \exp\left(\frac{-\mu}{\eta}(t - t_r)\right) + 2\eta\dot{\epsilon}_{yy} + s_o \quad (3.20)$$

où  $J_{2\sigma r}$  est la valeur de  $J_{2\sigma}$  à la rupture.



Considérons à présent le deuxième graphe, tracé dans un repère temporel (figure 3.17). Nous avons superposé la solution analytique obtenue pour  $J_{2\sigma}$  à la réponse donnée par le calcul numérique. Nous remarquons que les deux courbes concordent tout à fait. La réponse, lorsque le temps devient infini, correspond à la réponse obtenue d'un pur fluide de Bingham, avec une part de  $J_{2\sigma}$  provenant du chargement à vitesse constante ( $2\eta\dot{\epsilon}_{yy}$ ) et une autre part due au seuil de contrainte  $s_o$ , qui ne peut pas être relaxée.

FIGURE 3.17: Évolution temporelle de  $J_{2\sigma}$  (b) vis-à-vis de l'évolution de la déformation verticale appliquée (a). Comparaison avec la solution analytique après la transition (c)



### 3.4.2 Étude paramétrique sur les paramètres visqueux

Comme nous l'avons vu les paramètres visqueux d'un géomatériau sous forme de suspension granulaire (constituant par exemple une coulée de boue) peuvent énormément varier selon la composition du mélange sol/eau. A ce stade des premiers résultats obtenus avec le modèle de transition, nous avons donc voulu tester l'influence des paramètres visqueux sur la réponse. 2 études paramétriques sont donc réalisées, la première portant sur la viscosité, et la seconde sur le seuil de contrainte  $s_o$ . Pour ces 2 études, les résultats ne vont bien sûr différer que sur la partie post-rupture du comportement.

Tout d'abord, pour un seuil de contrainte fixe  $s_o=100$  Pa, nous avons considéré 4 valeurs de viscosité : 50, 100, 300 et 600 Pa.s. Les différentes évolutions de  $J_{2\sigma}$  dans le repère temporel sont présentées à la figure 3.18. Elles sont comparées à la solution élasto-plastique sans transition à la rupture.

Comme prédit par la solution analytique (équation 3.20), l'augmentation de viscosité mène à un second invariant de contrainte final plus élevé et à une relaxation des contraintes moins rapide.

Dans un second temps, nous considérons le même calcul avec, pour une valeur fixe de viscosité  $\eta=50$  Pa.s, 6 valeurs de  $s_o$  : 50 Pa, 100 Pa, 300 Pa, 700 Pa (c'est-à-dire la moitié du second invariant  $J_{2\sigma r}$  à la rupture), 1 kPa, et 1,4 kPa (c'est-à-dire égal au second invariant  $J_{2\sigma r}$  à la rupture). Les résultats sont également présentés en terme de second invariant de contrainte  $J_{2\sigma}$  en fonction du temps (figure 3.19).

Dans le cas d'un seuil de Bingham égal à la contrainte à la rupture, nous observons que l'échantillon se comporte de manière purement élasto-plastique (courbe superposée avec celle

FIGURE 3.18: Influence de la viscosité sur la réponse post rupture (Référence : le calcul élasto-plastique EP)

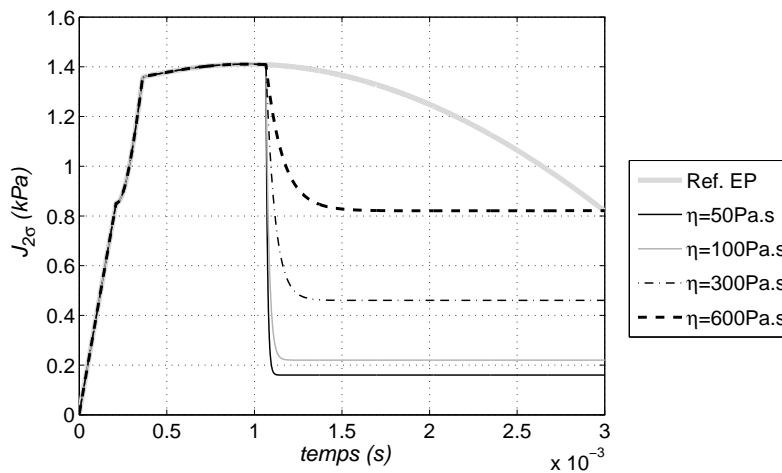
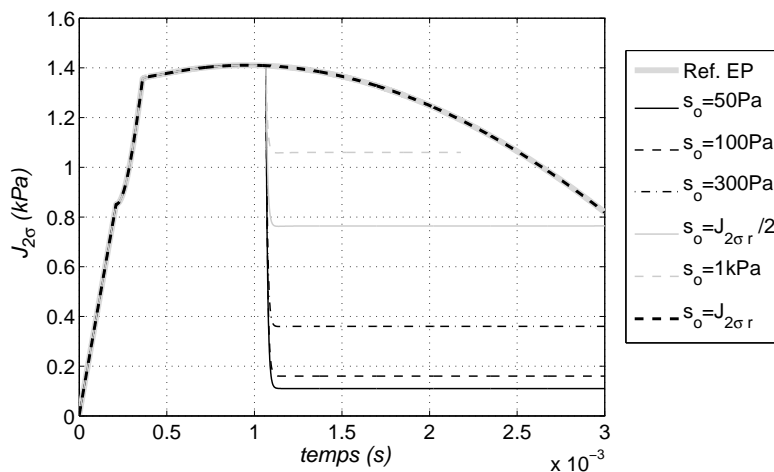


FIGURE 3.19: Influence du seuil de Bingham  $s_o$  sur la réponse post rupture



de référence). En effet, le comportement de Bingham ne peut générer de déformations si  $J_{2\sigma}$  n'est pas strictement supérieur au seuil  $s_o$  (équation 3.9). La réponse serait la même pour tout seuil supérieur à la contrainte de rupture  $J_{2\sigma r}$ .

Concernant les 5 autres cas, les réponses obtenues sont cohérentes avec l'équation analytique (équation 3.20) : plus  $s_o$  est élevé, plus les valeurs finales de  $J_{2\sigma}$  sont élevées. De plus, la décroissance exponentielle n'est pas modifiée.

### 3.4.3 Cas de la transition pour une rupture localisée

#### Modèle

Pour ce cas test, nous avons préféré réaliser le calcul au niveau du point matériel : la loi de transition a donc été écrite dans une routine indépendante du code Ellipsis.

Une valeur limite de  $10^{-6}$  a été arbitrairement choisie pour  $d^2W_n$  afin d'être sûr que la transition puisse être atteinte pour un chargement en contrainte (le critère limite de plasticité est

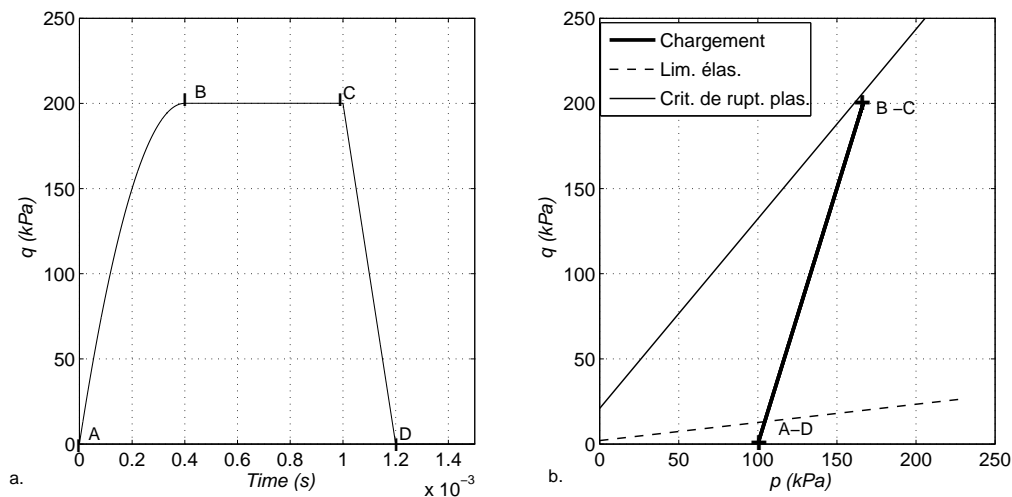
approché asymptotiquement). Le calcul étant indépendant de Ellipsis, les conditions axisymétriques de l'essai triaxial peuvent être cette fois décrites.

Dans ce nouveau modèle, les paramètres mécaniques sont les mêmes que précédemment (voir tableau 3.5). Le chargement est appliqué par des conditions en contraintes, en 4 étapes :

- Confinement initial de  $p_o = 100$  kPa (ce point de départ sera noté avec la lettre 'A' dans tous les graphes suivants),
- Phase A-B : Augmentation de la contrainte axiale  $\sigma_a$ , et ainsi de la contrainte déviatoire axiale  $q = \sigma_a - p$ , jusqu'à atteindre la rupture,
- Phase B-C : Palier de contrainte pour laisser se développer les déformations visqueuses,
- Phase C-D : Diminution de la contrainte axiale  $\sigma_a$ , et ainsi de  $q$ , pour pouvoir observer l'arrêt de l'écoulement.

Le trajet de chargement est présenté à la fois dans un repère temporel et un repère de contrainte (figure 3.20 a. et b.), pour suivre le mieux possible la réponse visco-élasto-plastique.

FIGURE 3.20: Chemin de chargement en contrainte dans le repère temporel (a) et le repère de contrainte  $q$ - $p$  (b).



## Résultats et analyse

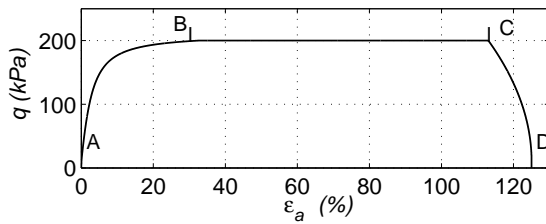
2 courbes sont tout d'abord extraites des résultats :

- l'évolution de  $q$  en fonction de la déformée axiale à la figure 3.21,
- l'évolution temporelle, en parallèle, de  $d\check{W}_n$  et des déformations totales (ainsi que de sa décomposition en part visqueuse, élastique et plastique) à la figure 3.22.

### Phase A-B.

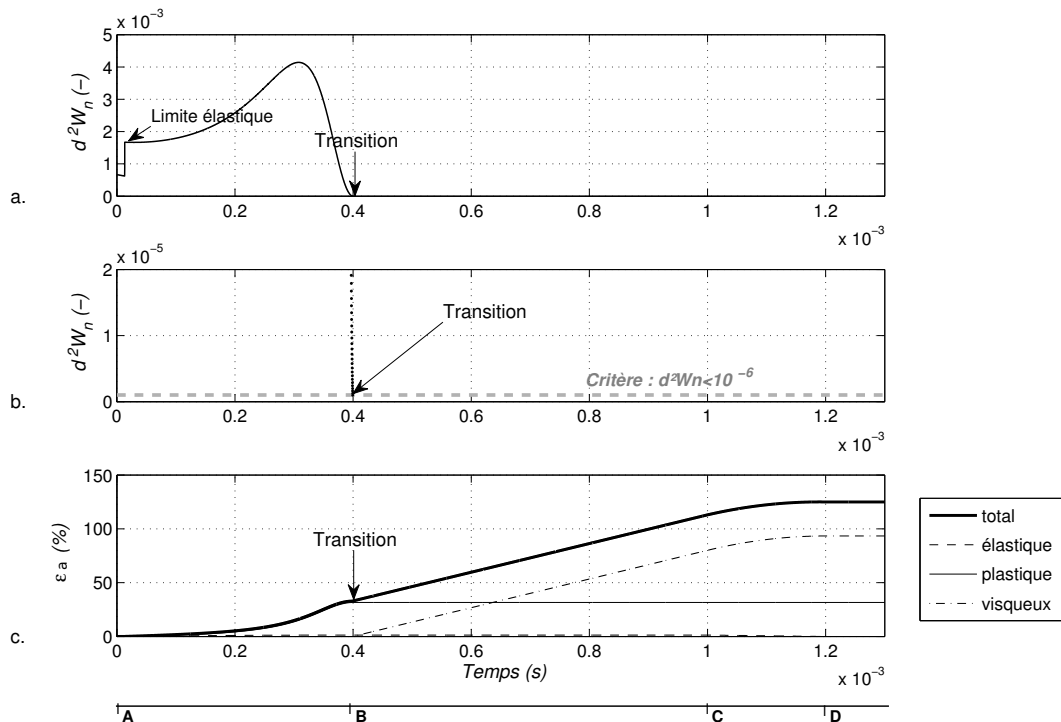
Tout d'abord, la déformation axiale totale suit une augmentation classique en élasto-plasticité (voir figure 3.21), alors que la composante visqueuse de déformation axiale  $\varepsilon_a$  reste nulle (figure 3.22 c.).

Le travail du second ordre présente une légère discontinuité lorsque la limite élastique est franchie. Par la suite, il passe par un maximum avant de diminuer fortement à l'approche du critère limite de plasticité et d'atteindre la valeur limite de  $10^{-6}$  (figure 3.22 a. et b.).

FIGURE 3.21: Contrainte déviatoire  $q$  en fonction de la contrainte axiale  $\varepsilon_a$ 

Cette valeur seuil est obtenue en B pour des contraintes qui ont quasiment atteint le critère limite de plasticité (voir figure 3.20b). Les critères de rupture du travail du second ordre et de plasticité sont donc concordants ici.

Phase B-C.

FIGURE 3.22: Evolution de  $d^2W_n$  au cours du calcul (a), zoom (b). Déclenchement de la transition solide-fluide (c).

A partir de cet état, les déformations axiales visqueuses sont activées conformément au modèle de transition. Comme la contrainte axiale est constante, la déformation axiale visqueuse augmente linéairement (de B à C sur la figure 3.22c).

Il faut noter, à partir de cette courbe, qu'à la transition la déformation totale  $\varepsilon_a$  évolue de manière continue au cours du temps, avec une dérivée continue également (pas de point singulier dans la courbe).

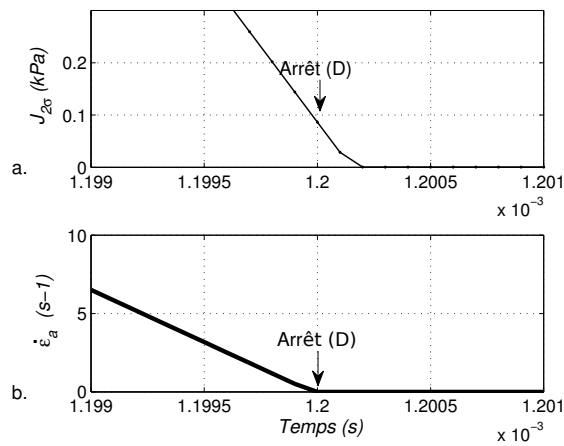
Phase C-D.

Nous avons extrait 2 dernières courbes pour la fin de chargement : l'évolution temporelle de  $J_{2\sigma}$  et  $\dot{\epsilon}_a$  (figure 3.23a et b).

Lors de cette dernière étape, la contrainte  $\sigma_a$  est diminuée jusqu'à la valeur  $p_o$  (autrement dit  $q$  est diminué jusqu'à 0). Cette diminution entraîne une diminution linéaire de  $\dot{\epsilon}_a$ , visible à la figure 3.23b.

L'écoulement s'arrête finalement pour une valeur du second invariant de contrainte qui n'est pas nulle mais égale à  $s_o$  (voir figure 3.23a). Le seuil de contrainte de Bingham a donc bien été pris en compte dans ce calcul.

FIGURE 3.23: Immobilisation du fluide (b) lors du passage de  $J_{2\sigma}$  sous le seuil de Bingham (a).



\*  
\* \*

Dans ce chapitre, nous avons élaboré un modèle continu de transition entre un comportement solide élasto-plastique et un comportement fluide visqueux. Nous avons fait l'hypothèse, à partir des différentes analyses de stabilité présentées au Chapitre 1, que la première transition solide→fluide, est atteinte lorsque la rupture est obtenue. Le critère du travail du second ordre a donc été naturellement utilisé pour décrire cette transition.

Le calcul du travail du second ordre dans Ellipsis a été validé, pour deux cas tests en élasto-plasticité (sans transition visqueuse) : un modèle homogène piloté par la cinématique et un modèle hétérogène piloté en gravité. Pour ce dernier, nous avons mis en évidence que la dépendance des résultats à la viscosité de l'air (déjà observée en 2.3.3), et donc la non-objectivité de la réponse obtenue, se développent à partir de la rupture globale de l'échantillon. L'introduction, grâce au modèle de transition, de la viscosité post-rupture a donc un rôle très important, non seulement pour décrire le comportement physique en cas liquéfaction, mais aussi pour régulariser la solution pour une rupture en conditions drainées sans liquéfaction. Le choix des lois élasto-plastique et visqueuse étant flexible avec ce modèle de transition, nous avons opté pour Plasol et Bingham, dont le seuil tridimensionnel est à présent pris en compte dans le code. Les premières applications du modèle au niveau du point matériel, aussi bien qu'au niveau d'un modèle calculé avec Ellipsis, montrent l'adéquation des résultats avec la théorie de la rupture, les critères de transition solide-fluide et les lois comportementales.

## Chapitre 4

# Application aux coulées de boue de Campanie

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction : présentation des coulées de Sarno et Quindici . . .</b>	<b>134</b>
<b>4.2</b>	<b>Détermination des paramètres physiques . . . . .</b>	<b>137</b>
4.2.1	Paramètres matériaux . . . . .	137
4.2.2	Prise en compte des conditions hydriques au travers du choix des paramètres . . . . .	138
4.2.3	Paramètres élasto-plastiques . . . . .	141
4.2.4	Paramètres visqueux . . . . .	144
<b>4.3</b>	<b>Étude de la transition sur un modèle de longueur réduite . . . . .</b>	<b>146</b>
4.3.1	Description du modèle . . . . .	146
4.3.2	Étude de l'amorçage . . . . .	147
4.3.3	Étude de l'écoulement et de l'arrêt sur un obstacle . . . . .	150
<b>4.4</b>	<b>Étude de la coulée de Palma Campania . . . . .</b>	<b>156</b>
4.4.1	Présentation du modèle étudié . . . . .	156
4.4.2	Étude de l'amorçage . . . . .	159
4.4.3	Étude de la propagation et de l'arrêt de la coulée contre un ouvrage	165

---

Les coulées de boue qui ont eu lieu à Sarno et Quindici en mai 1998 ont été mentionnées dans l'introduction générale. Nous avons choisi de nous intéresser à la modélisation de ces coulées réelles car elles sont tout à fait caractéristiques d'une transition solide-fluide au sein du matériau à la rupture. De plus, étant donné l'ampleur et la fréquence des mouvements de terrain sur cette zone, les paramètres mécaniques ont été relativement bien étudiés. Enfin, le contexte particulier de cette zone en fait un environnement propice aux instabilités sur environ 2000 km<sup>2</sup> (Guadagno *et al.*, 2005). L'enjeu est donc particulièrement important dans cette région, et justifie la nécessité de mieux comprendre et modéliser ces mouvements gravitaires. Ce chapitre s'organise de la manière suivante.

Tout d'abord, une courte introduction permet de situer le contexte géologique et pédologique de ces mouvements de terrain, et de présenter brièvement leur mécanisme. Puis, le choix des différents paramètres mécaniques est exposé, à partir des résultats de la littérature. À partir de ces paramètres, un premier modèle -de géométrie réduite- est alors étudié, sur lequel nous avons appliqué le modèle de transition solide/fluide. Nous avons cherché à déterminer, sur ce modèle, l'influence de plusieurs paramètres sur la rupture, l'écoulement et l'arrêt sur un obstacle. Enfin, nous appliquons le modèle de transition solide-fluide, avec les mêmes paramètres, dans le cadre d'un modèle décrivant une coulée réelle.

## 4.1 Introduction : présentation des coulées de Sarno et Quindici

### Contexte géologique et pédologique de la zone du Pizzo d'Alvano

La région de Campanie, dans laquelle de nombreux mouvements de terrain ont eu lieu, se situe au Sud de l'Italie (voir figure 4.1 a.). Sarno et Quindici sont situées dans cette région, au pied du massif du Pizzo d'Alvano, et à proximité du volcan Vésuve (figure 4.1b).

FIGURE 4.1: La Campanie (a), localisation de la zone du Pizzo d'Alvano (b)



a.

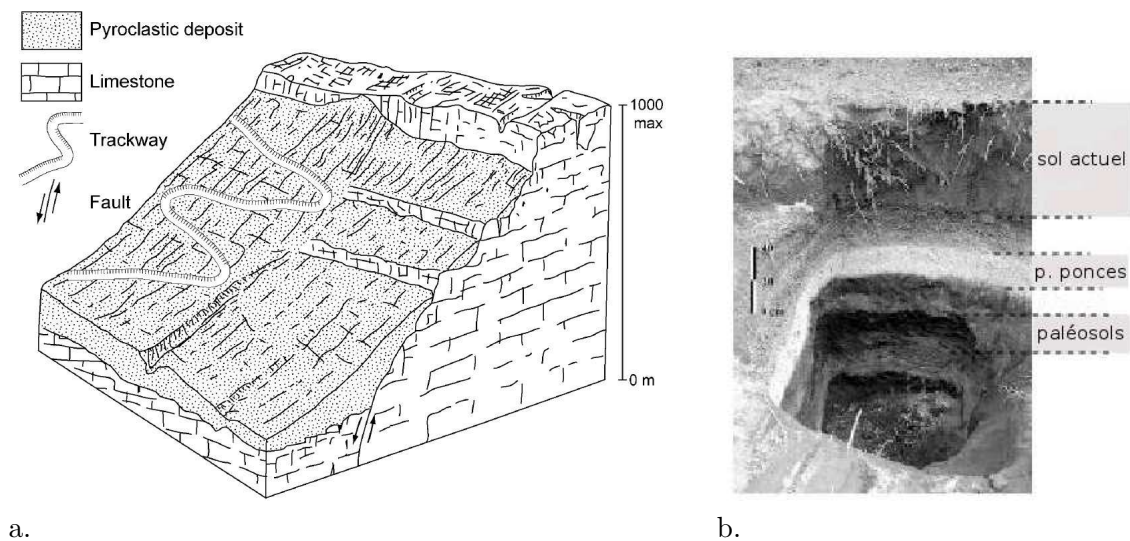
b.

La roche mère sur cette zone est formée de calcaire du Mésozoïque, fracturé et altéré. Il y a 40000 ans, après la fin de la morphogénèse du relief, les pentes ont été couvertes par les dépôts volcaniques aériens (fig 4.2) dus aux épisodes intermittents d'activité du Vésuve (qui est à



20 km). En général, les terrains superficiels sont donc constitués de couches de pyroclastes (formés pendant les périodes d'éruption), alternant avec des horizons de colluvions (sol formé entre les périodes d'éruption) partiellement brûlés par l'activité volcanique (fig 4.2b). Les pyroclastes sont eux-mêmes constitués de deux types de matériaux très différents : les pierres ponce et les cendres. Les couches des différents horizons suivent le relief sous-jacent, avec une épaisseur totale variant en haut des pentes entre 0,5 et 2 m, et jusqu'à plus de 10 m en bas des pentes (fig 4.2a).

FIGURE 4.2: Géomorphologie type de la région du Pizzo d'Alvano (Guadagno et al., 2005) (a) et exemple d'une séquence stratigraphique (Revellino et al., 2004) (b)



### Caractéristiques de l'amorçage des coulées

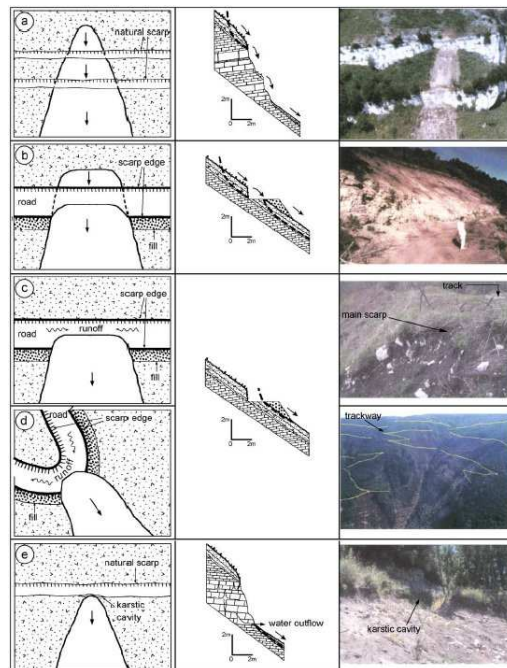
Le déclenchement des mouvements de terrain sur la zone du Pizzo d'Alvano est analysé comme étant dû à un apport d'eau dans la couverture pyroclastique (Guadagno *et al.*, 2005; Olivares et Picarelli, 2001).

Les zones d'amorçage correspondent à des morphologies particulières, c'est-à-dire, de manière générale, les zones de fortes pentes (35 à 50° d'après Guadagno *et al.* (2005)) et, en particulier, les zones où la couverture de pyroclaste est interrompue, par le relief ou par une excavation anthropique (voir figure 4.3). En effet, cette interruption favorise l'entrée d'eau dans le système, dont la perméabilité, très anisotrope du fait de la superposition de différents horizons, est beaucoup plus importante parallèlement à la stratigraphie que perpendiculairement à celle-ci.

Les excavations anthropiques, permettent une entrée privilégiée de l'eau de pluie, alors que les éperons rocheux (de nature calcaire) affleurant à la surface, peuvent présenter des résurgences karstiques. Nous verrons dans le paragraphe suivant l'effet de la saturation au niveau du comportement.

Enfin, pour certains auteurs (comme Revellino *et al.* (2004)), le mécanisme d'amorçage est dû à une rupture selon une surface de glissement au sein des pyroclastes, suivie d'une évolution en coulée des matériaux du fait de la liquéfaction des cendres (matériau très lâche). En effet, cette sensibilité à la liquéfaction est démontrée expérimentalement en conditions non-drainées (Olivares et Picarelli, 2001). Ce mode de rupture rend particulièrement intéressant la modélisation avec un critère de transition basé sur le travail du second ordre.

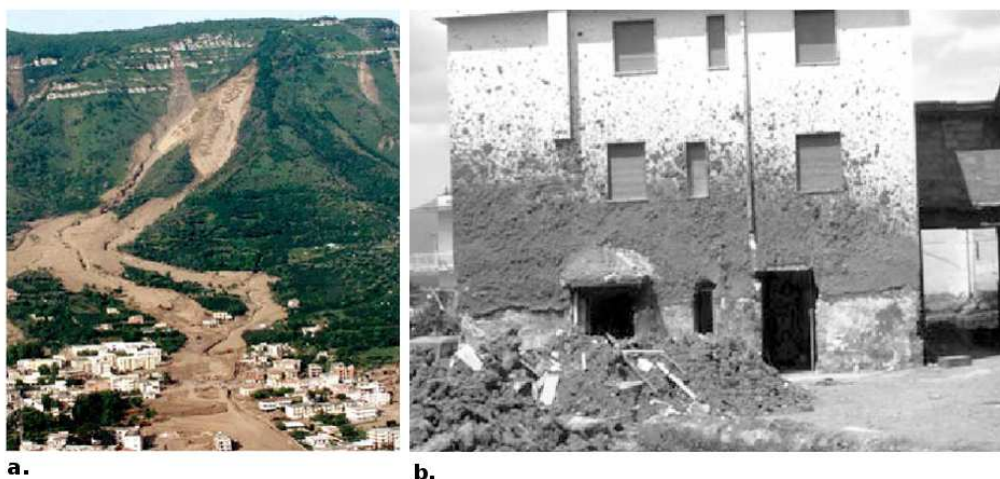
FIGURE 4.3: Différentes configurations menant à l'amorçage d'après Guadagno et al. (2005)



### Caractéristiques de l'écoulement

Les mouvements de terrain observés sur cette zone peuvent être majoritairement identifiés comme des avalanches de débris, coulées de débris (Guadagno *et al.*, 2005), ou coulées boueuses. Les coulées de Sarno et Quindici s'élargissent généralement (fig 4.4a) en impliquant de plus en plus de matériau, jusqu'à 20 000 fois le volume initial souvent de quelques m<sup>3</sup> seulement (Guadagno *et al.*, 2005), puis se canalisent dans les couloirs de ruisseau ou les zones de faille. Les observations de terrain ont permis d'estimer, dans les villages situés en pied de pentes, une vitesse des coulées de l'ordre de quelques m/s à 20 m/s développées sur des pentes d'environ 40° (Revellino *et al.*, 2004). La hauteur des coulées a été estimée de 4 à 5 m dans ces villages (fig 4.4b), et la hauteur de dépôt final de 3 à 4 m.

FIGURE 4.4: Forme de l'écoulement sur la ville de Sarno (a), Marques d'éclaboussure de la boue et hauteur de dépôt à Quindici (b) (Revellino et al., 2004)



## 4.2 Détermination des paramètres physiques

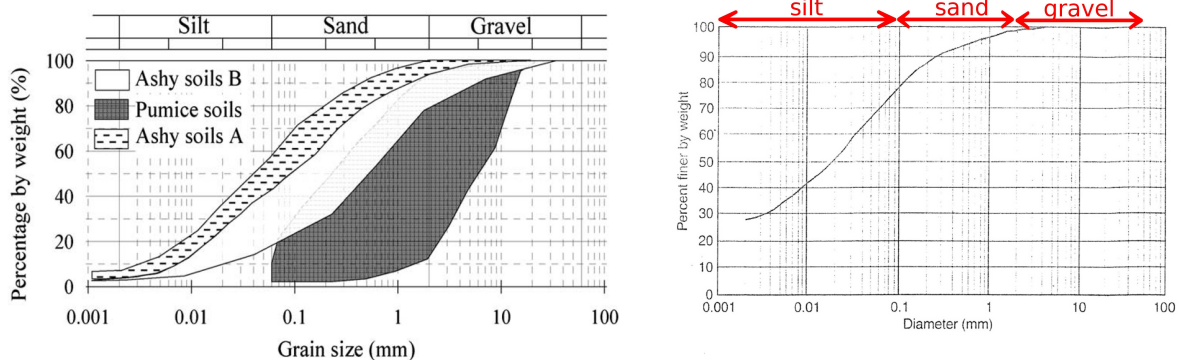
Au total, la loi de transition nécessite de connaître les 13 paramètres de la loi Plagnol, et les 2 paramètres de la loi de Bingham. Le poids volumique naturel est le dernier paramètre nécessaire à la modélisation. Pour minimiser le nombre de paramètres à déterminer, l'égalité  $\varphi_c = \varphi_e$  est ici toujours considérée (pour la limite élastique comme pour le critère limite de plasticité), ainsi que  $\psi_c = \psi_e$ . De plus, dans cette loi, nous considérons que le paramètre de convexité  $n$  est toujours égal à -0.229 (voir paragraphe 1.1.1), et que les paramètres d'érouissage  $B_p$  et  $B_c$  sont égaux respectivement à 0,01 et 0,02 (données utilisées par Prunier (2008) pour modéliser le glissement de terrain de Petacciato - Italie, 1996). Il reste donc, pour chaque matériau, à déterminer 7 paramètres élasto-plastiques, 2 paramètres visqueux et le poids volumique, à partir des données bibliographiques.

Enfin, nous avons vu que, pour les sols de Sarno et Quindici, l'eau était un facteur déterminant pour la stabilité. Même si Ellipsis ne permet pas pour l'instant de prendre en compte de couplage hydro-mécanique, il est particulièrement important de comprendre l'effet de la phase hydrique sur la phase granulaire (et donc sur la stabilité) afin de pouvoir traduire au mieux cette influence, par exemple grâce à un choix judicieux de paramètres plastiques.

### 4.2.1 Paramètres matériaux

Concernant la granulométrie, celle des horizons de cendres est proche de celle d'un sable, alors que les horizons constitués de pierres ponce sont plus graveleux (fig 4.5a). Les sols et paléosols sont de type colluvions, et donc beaucoup plus riches en fines (fig 4.5b). D'autre part, les paramètres matériaux rencontrés dans la littérature (poids volumique sec  $\gamma_d$ , degré de saturation  $S_r$ , porosité  $n$ ) peuvent être synthétisés sous forme d'un tableau (tableau 4.1).

FIGURE 4.5: *Granulométrie des cendres et des pierres ponce (a) (Salciarini et al., 2006), des paléosols (b) (Prete et al., 1998)*



a.

b.

En considérant les valeurs de ce tableau et le poids volumique de l'eau  $\gamma_w$ , il est possible de calculer une fourchette de valeurs pour le poids volumique naturel :  $\gamma_{nat} = \gamma_d + nS_r\gamma_w$ . Pour les cendres, le poids volumique obtenu est compris entre 13,5 et 17,5 kN/m<sup>3</sup> et pour les pierres ponce, entre 6,5 et 8,5 kN/m<sup>3</sup> (pour les paléosols nous manquons de données pour effectuer ce calcul).

TABLE 4.1: Synthèse des principales propriétés matériaux

	$\gamma_d$ (kN/m <sup>3</sup> )	$S_r$ (%)	$n$ (%)
Paléosols	8-11 <sup>a</sup>	-	-
Horizon de cendres	11-13 <sup>b</sup>	35-67 <sup>d</sup>	67-68 <sup>d</sup>
Horizon de pierre ponce	6-7 <sup>c</sup>	10-18 <sup>d</sup>	69-71 <sup>c</sup>

- a. (Revellino *et al.*, 2004)  
b. (Olivares et Picarelli, 2001)  
c. (Esposito et Guadagno, 1998)  
d. (Calcaterra *et al.*, 2003)

#### 4.2.2 Prise en compte des conditions hydriques au travers du choix des paramètres

Tout d'abord, faisons un bref rappel sur la théorie concernant la répartition de l'eau en équilibre statique dans un sol.

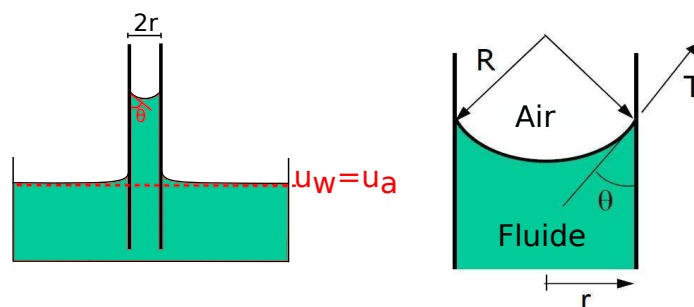
##### Rappel : répartition de l'eau en équilibre statique dans un sol

Un milieu poreux à l'air libre et partiellement imprégné d'eau est constitué de 3 phases : l'eau, le squelette solide et la phase gazeuse constituée par l'air. Si les pores du milieu sont suffisamment fins, l'interface entre la zone complètement saturée et la zone complètement sèche n'est jamais une surface précise mais forme un horizon plus ou moins large dans lequel le degré de saturation  $S_r$  (défini en 4.1) varie entre 1 et 0.

$$S_r = \frac{V_{liquide}}{V_{pore}} \quad (4.1)$$

Le principal phénomène physique expliquant la présence de cette zone intermédiaire non saturée est la capillarité. Celle-ci peut être mise en évidence de manière simple en disposant un tube suffisamment fin dans un récipient rempli d'eau et en observant la montée de l'eau dans le tube (figure 4.6).

FIGURE 4.6: Capillarité de l'eau dans un tube fin, force de tension à l'interface eau/air



À la base du tube fin, l'eau a la même pression hydrostatique  $u_w$  qu'à la surface du récipient, d'où :  $u_w = u_a$  ( $u_a$  : pression atmosphérique). Sur la hauteur du tube, la pression est donc inférieure à la pression de l'air (voire négative puisque la pression atmosphérique est faible). Cette différence de pression entre l'air et l'eau est appelée pression capillaire  $p_c$ . Elle est due à une tension de surface  $T$  entre l'eau et le récipient, inclinée d'un angle  $\theta$  avec la verticale et dirigée vers le haut (figure 4.6). Une autre conséquence de cette tension est la forme en ménisque de la surface de l'eau. La loi reliant  $T$  et  $p_c$  est la loi de Jurin :



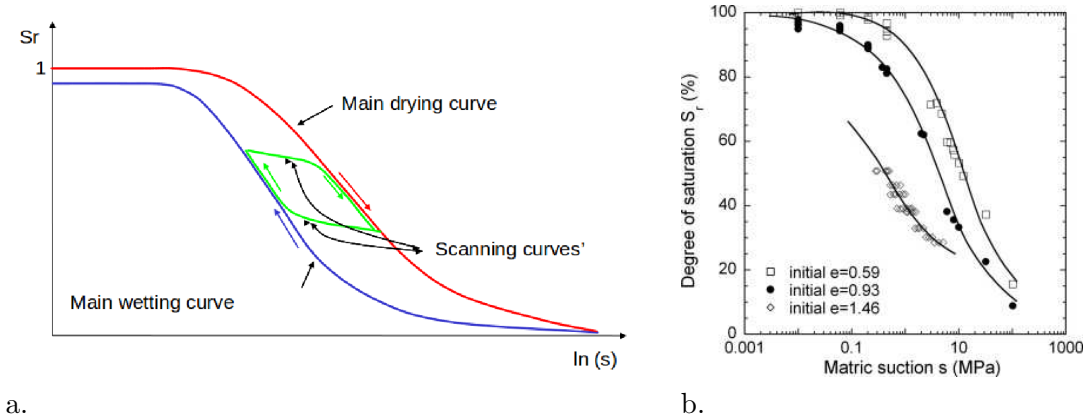
$$p_c = u_a - u_w = \frac{2T \cos \theta}{r} = \frac{2T}{R}, \quad (4.2)$$

où  $r$  est le rayon du tube,  $R$  le rayon capillaire,  $\theta$  l'angle de contact entre la surface du fluide et le tube et  $u_a$  la pression d'air (en contact ou non avec l'atmosphère).

La capillarité, ainsi que les échanges osmotiques (dus à la différence de concentration chimique entre deux phases fluides) et les liaisons électrostatiques, interviennent dans le phénomène de succion matricielle, associée à la grandeur de même nom notée  $s$ . Généralement, lorsque la proportion de sels dissous dans la phase fluide est faible, les termes de succion osmotique et électrostatique sont négligés devant le terme de succion capillaire, et il peut être retenu que :  $s \simeq p_c = u_a - u_w$ .

L'expérience de séchage ou d'imbibition d'un échantillon met en évidence la forme caractéristique de la courbe  $S_r(s)$ , visible à la figure 4.7a. D'après cette figure, la courbe, nommée courbe de rétention, présente une hystérésis selon que des conditions de drainage ou d'imbibition sont considérées. Un exemple réel de courbe de rétention est présenté à la figure 4.7b pour une argile de Boom (Belgique).

FIGURE 4.7: Courbe de rétention d'eau typique (d'après Tarantino (2010)), et mesurée en séchage dans une argile de Boom (d'après Romero (1999))



Si des modèles récents prennent en compte cette hystérésis pour estimer la relation  $S_r(s)$  (Nuth et Laloui, 2008), le modèle le plus courant reste l'expression analytique proposée par Van Genuchten (1980), qui néglige ce phénomène :

$$S_r = S_{rR} + \frac{1 - S_{rR}}{(1 + (\alpha s)^\beta)^m}, \quad (4.3)$$

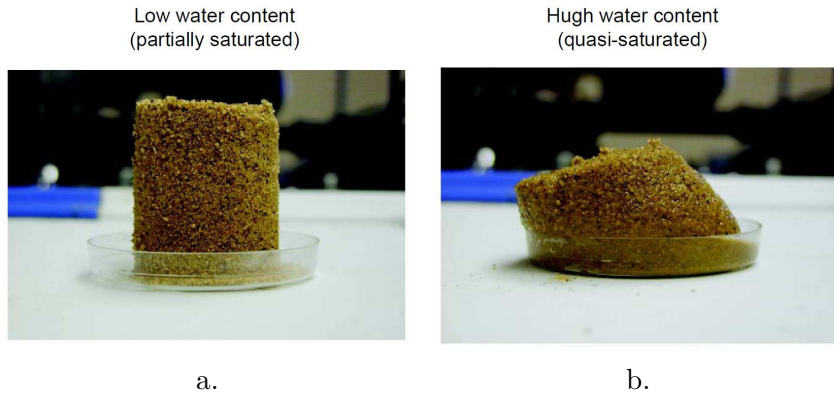
où  $S_{rR}$  est le degré de saturation résiduel, obtenu pour un drainage suffisamment long, et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $m$  sont des paramètres de calibration.

Au-dessus du toit de la nappe, si la pression de l'air est négligeable, la succion entraîne une dépression de l'eau ( $u_w = u_a - s$ ). Cette contrainte, qui tend à attirer les grains les uns contre les autres, confère au squelette granulaire une meilleure cohésion, comme l'illustre l'exemple de la figure 4.8. Voyons à présent comment prendre en compte cet effet dans le calcul, même sans modélisation de la phase hydrique.

### Modification de la cohésion apparente

Pour les sols saturés, il est admis que le comportement du squelette granulaire est déterminé en prenant en compte les contraintes effectives à la place des contraintes totales. Celles-ci ont été définies par Terzaghi (1923) par :

FIGURE 4.8: Stabilité d'un échantillon de sable partiellement saturé (a), perte de stabilité par augmentation du degré de saturation (b) (Tarantino, 2010)



$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - u_w \mathbf{1}, \quad (4.4)$$

avec  $\mathbf{1}$  la matrice unité.

Pour les sols non-saturés, deux approches principales ont été développées pour décrire le comportement. La première est celle de Bishop et Blight (1963) qui, au début des années 60, ont élargi le concept de contrainte effective aux sols non saturés, en proposant l'expression suivante pour  $\boldsymbol{\sigma}'$  :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - u_a \mathbf{1} + \chi(u_a - u_w) \mathbf{1}, \quad (4.5)$$

avec  $\chi$  un coefficient (compris entre 0 et 1) dépendant de la micro-structure du sol et du degré de saturation. Ce point de vue a été largement développé, avec notamment les travaux de Charlier *et al.* (1997), proposant  $\chi = S_r$  si les effets volumiques ne sont pas trop importants, et de Loret et Khalili (2000), donnant 2 définitions de  $\chi$  selon que la pression d'entrée d'air est atteinte ou non dans le système. La deuxième approche, qui a été développée principalement entre les années 60 et les années 90, prend en compte les contraintes totales comme variables pour la modélisation et considère la succion comme une variable indépendante de ces contraintes totales (Alonso *et al.*, 1990; Gens et Alonso, 1992; Cui et Delage, 1996).

Nous considérons ici la première de ces approches puisque, même si elle ne permet pas de modéliser des phénomènes particuliers tels que l'effondrement en conditions d'imbibition, elle est théoriquement plus satisfaisante car elle distingue le comportement de chacune des phases (eau ou squelette granulaire) par des variables associées (pression interstitielle ou contraintes effectives).

Dans le contexte des coulées de boue de Campanie, nous venons de voir que l'horizon de cendres volcaniques est très poreux et constitué de grains relativement fins, ce qui explique la succion élevée qui s'y développe en conditions non-saturées.

Plaçons-nous dans les hypothèses suivantes :

- **H1** la proportion de sels dissous dans la phase aqueuse est faible ( $s=p_c$ ),
- **H2** l'hystérésis de la courbe de rétention est négligeable et l'expression de Van Genuchten peut être appliquée,
- **H3** les pores sont connectés à l'atmosphère ( $u_a \simeq 0$ ).

En considérant que  $\chi = S_r$  (Charlier *et al.*, 1997), l'expression de la contrainte effective de Bishop et Blight (1963) devient (avec **H1** et **H3**) :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + S_r s \mathbf{1}, \quad (4.6)$$

Dans l'espace des contraintes principales, la prise en compte des contraintes effectives du matériau correspond donc à une translation selon la direction de l'axe hydrostatique, vers un confinement plus élevé. En conséquence, il est équivalent de considérer, dans la loi constitutive élasto-plastique, des contraintes inchangées mais une cohésion modifiée  $C'_m$ , plus élevée que la cohésion  $C'$  à l'état sec (c'est-à-dire une cohésion "apparente").

L'équation du critère de Van Eekelen (1.10) permet d'exprimer cette cohésion apparente sous la forme suivante :  $C'_m = C' + S_r s \tan\varphi'$ . (Notons ici que nous considérons les paramètres plastiques drainés).

Considérons à présent l'hypothèse **H2**. Le modèle de Van Genuchten a été utilisé dans les cendres pour décrire la relation  $S_r(s)$  (Damiano *et al.*, 2012). Les paramètres qui ont été déterminés sont les suivants :  $\theta_R=0,3$  (teneur en eau volumique résiduelle),  $\theta_S=0,7$  (teneur en eau volumique à saturation),  $m=0,2$ ,  $\beta=7$ ,  $\alpha=1,7 \cdot 10^{-4}$  Pa. Nous pouvons déduire le degré de saturation résiduel à partir de la porosité (environ égale à 0,7) :  $S_{rR} = \theta_R/n=0,43$ .

La cohésion modifiée s'exprime finalement par :

$$C'_m = C' + S_r s \tan\varphi' = C' + \left( 0,43 + \frac{0,57}{[1 + (1,7 \cdot 10^{-4} s)^7]^{0,2}} \right) s \tan\varphi' \quad (4.7)$$

### 4.2.3 Paramètres élasto-plastiques

#### Paramètres élastiques

Les paramètres élastiques ont été peu étudiés car la plupart des modèles sur la zone de Sarno et Quindici s'intéressent uniquement à la phase d'écoulement (Revellino *et al.*, 2004, 2008; ScottoDiSantolo et Evangelista, 2009).

Nous n'avons trouvé dans la littérature qu'une seule référence portant sur le choix des paramètres élastiques, celle de Cascini *et al.* (2010a). En se basant principalement sur des matériaux analogues à ceux rencontrés en Campanie, un coefficient de Poisson de 0,29 et un module de Young compris entre 3 et 7 MPa ont été supposés pour les cendres dans ces travaux.

Nous retenons par la suite  $E=5$  MPa et  $\nu=0,29$  dans cet horizon.

#### Angle de frottement et cohésion

Ces paramètres sont, eux, beaucoup plus analysés que les paramètres élastiques, et un frottement basal Coulombien est même souvent considéré pour la modélisation de la phase d'écoulement.

Concernant l'angle de frottement et la cohésion à la rupture, Crosta et Negro (2003) ont comparé leurs valeurs obtenues en essais de cisaillement -en conditions drainées- avec d'autres résultats de laboratoire sur ces terrains. La figure 4.9 présente cette comparaison.

A partir de cette synthèse, le tableau 4.2 regroupe les valeurs des paramètres à la rupture qui peuvent raisonnablement être retenues pour les 3 horizons. Des références supplémentaires ont été ajoutées : la cohésion des pierres ponce (non mentionnée dans la synthèse de Crosta et Negro) et l'angle de frottement des cendres (qui est souvent considéré légèrement plus élevé que l'intervalle présenté dans la figure 4.9).

La figure 4.10 illustre ces données avec les résultats, dans le plan (q,p), de 3 essais triaxiaux non drainés avec une pression initiale  $p_o$  de 50, 100 et 150 kPa (résultats extraits de (Olivares et Picarelli, 2001)). Nous y retrouvons l'angle de frottement élevé pour le critère limite de

FIGURE 4.9: Synthèse de Crosta et Negro (2003) pour la cohésion et l'angle de frottement drainés à la rupture. Valeurs pour les paléosols (en ligne continue), les pierres ponce (en pointillé), et les cendres (en trait-pointillé).

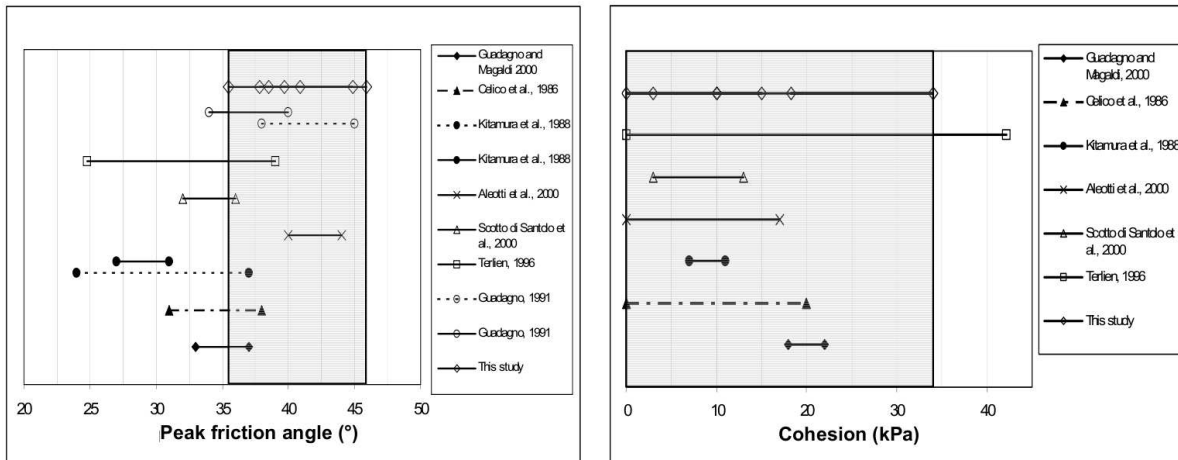


TABLE 4.2: Synthèse de la cohésion et de l'angle de frottement effectifs à la rupture

	$\varphi'$ (°)	$C'$ (kPa)
Paléosols	37	10
Horizon de cendres	38 <sup>a</sup>	10
Horizon de pierre ponce	30	$\approx 0$ <sup>b</sup>

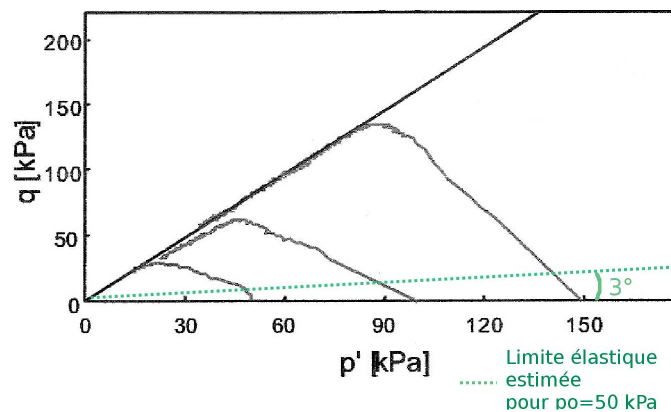
a. (Olivares et Picarelli, 2001)

b. (Cascini *et al.*, 2010b)

plasticité et nous observons que, dans ce cas, la cohésion des cendres est particulièrement faible (nulle).

Concernant la limite élastique, l'angle de frottement qui peut être estimé à partir de ces essais est très faible : proche de 0 pour  $p_o=100$  et 150 kPa, et d'environ 3° pour  $p_o=50$  kPa.

FIGURE 4.10: Essai triaxial non drainé sur des pyroclastes type cendre



Par ailleurs, d'après (Olivares, 2001), un ordre de grandeur de succion de 10 à 80 kPa a été obtenu expérimentalement dans les cendres du Vésuve. D'après l'expression 4.7, une valeur

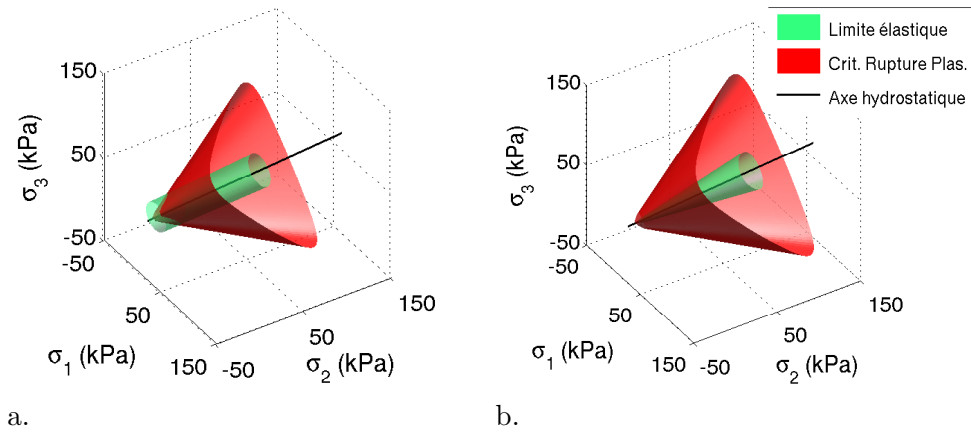


de cohésion modifiée peut donc être estimée dans cet horizon. Avec  $C'=10$  kPa (tableau 4.2) nous obtenons une cohésion drainée modifiée  $C'_m$  égale à 10 kPa pour la limite élastique (quelle que soit la succion car  $\varphi'=0^\circ$ ), et variant entre 15 et 38 kPa selon la succion, pour le critère limite de plasticité ( $\varphi'=38^\circ$ ).

Comme un tel choix de paramètres donnerait -dans l'espace des contraintes principales- des enveloppes limites élastique et plastique sécantes (voir figure 4.11a), nous avons donc légèrement modifié les paramètres de la limite élastique afin :

- de garder les 2 surfaces disjointes,
- de conserver un domaine d'élasticité peu étendu (comme mis en évidence à la figure 4.10),
- de conserver, d'après le tableau 4.2, une certaine cohésion pour la limite élastique.

FIGURE 4.11: Limite élastique et de critère limite de plasticité dans l'espace des contraintes principales pour  $s=10$  kPa. Cas sans correction ( $\varphi'=0 - 38^\circ$  et  $C'_m=10-15$  kPa) (a), et avec correction ( $\varphi'=8 - 38^\circ$  et  $C'_m=3-15$  kPa) (b)



Nous avons finalement choisi un angle de frottement  $\varphi'$  écrouissable entre 8 et  $38^\circ$ . En gardant ce même rapport d'environ 5 entre valeurs initiale et finale pour la cohésion modifiée, la représentation 3D des surfaces met en évidence que les enveloppes de limite élastique et de rupture plastique ne sont pas sécantes (voir figure 4.11b). Pour la fourchette de valeurs de  $s$  nous obtenons alors :  $C'_m=3-15$  kPa ( $s=10$  kPa) jusqu'à  $C'_m=8-38$  kPa ( $s=80$  kPa).

En cas de pluies intenses entraînant l'imbibition des sols, la succion diminue fortement jusqu'à atteindre des valeurs inférieures à 10 kPa, voire négatives si les sols sont saturés. L'amorçage d'une instabilité gravitaire par imbibition peut donc être modélisé par une diminution progressive de la cohésion apparente des terrains.

### Calibration de l'angle de dilatance

D'après la littérature, les dépôts pyroclastiques, qu'ils soient de type cendre ou pierre ponce sont très lâches et donc contractants (soit un  $\psi$  négatif, du moins à la limite élastique).

Sur l'essai triaxial non-drainé présenté à la figure 4.10, cette contractance est visible par la diminution de la pression pendant l'essai. À partir de ce résultat expérimental, nous avons mené plusieurs calculs, en faisant varier le paramètre  $\psi$ , afin de chercher la valeur qui permette d'obtenir les résultats -dans le plan  $q/p$ - les plus proches possible des résultats expérimentaux pour  $p_o=100$  kPa.

Ces calculs ont été réalisés avec un angle de frottement  $\varphi'$  écrouissable entre 8 et  $38^\circ$ , une cohésion nulle (comme mis en évidence dans cet essai), et les paramètres élastiques précédemment

choisis :  $E=5$  MPa et  $\nu=0,29$ . Les résultats sont présentés à la figure 4.12b comparativement à la courbe expérimentale (figure 4.12a).

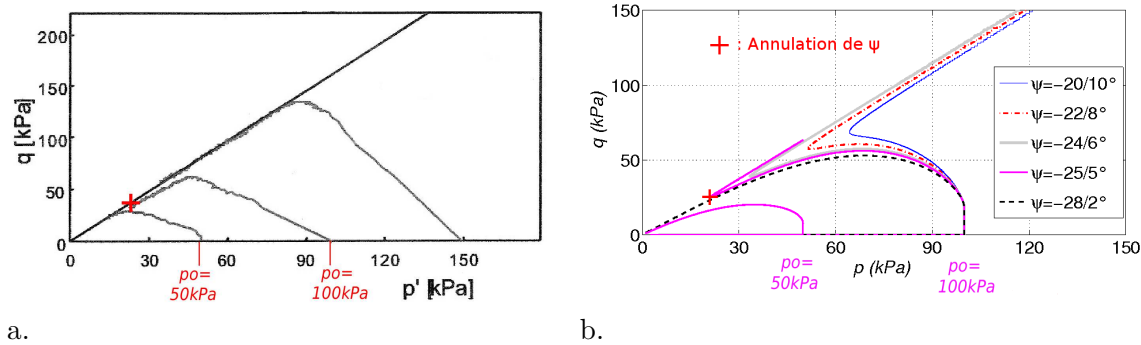


FIGURE 4.12: Calibration de l'angle de dilatance sur un essai triaxial non-drainé : résultats expérimentaux de référence, résultats obtenus avec *Ellipsis*

Les 2 essais diffèrent de par leur domaine élastique, presque inexistant dans l'expérimentation, et défini jusqu'à  $8^\circ$  pour l'essai modélisé (mais le choix de cette valeur est nécessaire comme il a été vu au paragraphe précédent). Nous avons choisi comme point de comparaison le point, au cours du chargement, où  $\psi$  s'annule en changeant de signe. La courbe expérimentale met en évidence une annulation de  $\psi$  (visible par l'arrêt de l'essai sur le critère limite de plasticité) pour  $p=25$  kPa et  $q=35$  kPa. Dans le cas de l'essai numérique, l'annulation de  $\psi$  se traduit par l'inversion de croissance en  $p$  et  $q$ . Une valeur de  $\psi$  écrouissable entre  $-25$  et  $5^\circ$  apparaît donc la plus appropriée pour retrouver les valeurs  $p=25$  kPa et  $q=35$  kPa. Notons que la courbe tracée avec ces valeurs de  $\psi$  pour un confinement  $p_o = 50$  kPa montre aussi une bonne (et même meilleure) corrélation avec les résultats expérimentaux.

#### 4.2.4 Paramètres visqueux

##### Calibration du seuil de Bingham

D'après la littérature, de nombreux travaux ont porté sur la phase d'écoulement des coulées sur le site de Sarno et Quindici. Cependant, un certain nombre de modèles ont été réalisés à partir du formalisme de Saint Venant (Revellino *et al.*, 2004, 2008; ScottoDiSantolo et Evangelista, 2009). Celui-ci suppose, pour un écoulement de faible épaisseur par rapport à son extension latérale, que les variables cinématiques et les équations de conservation sont invariantes sur la hauteur de tranches verticales d'extension latérale très réduite (l'inconnue dans de tels modèles est alors une vitesse moyenne sur la hauteur de la couche).

Ce formalisme permet donc de se passer de la connaissance de loi de comportement, et l'effet de la rhéologie est englobé dans un coefficient de frottement entre le matériau en écoulement et le socle rigide. Par conséquent, les paramètres visqueux ne sont pas utilisés.

À partir de l'ensemble des informations données par la littérature, il est cependant possible de déterminer un ordre de grandeur pour la viscosité  $\eta$  et le seuil de contrainte  $s_o$ .

Les travaux réalisés par Revellino *et al.* (2004) ont montré une assez bonne concordance avec les quelques données de terrain disponibles (en terme de vitesse, de distance parcourue et d'épaisseur de dépôts). Une synthèse tirée de leurs résultats est présentée au tableau 4.3. Cette table rassemble, pour 6 coulées étudiées, les angles de pente d'amorçage, les vitesses calculées sur ces pentes et les angles de pente d'arrêt, en considérant une épaisseur de 1,5 m de matériau et un poids volumique de  $16$  kN/m<sup>3</sup>.

TABLE 4.3: Caractéristiques de 6 coulées de débris (Revellino et al., 2004)

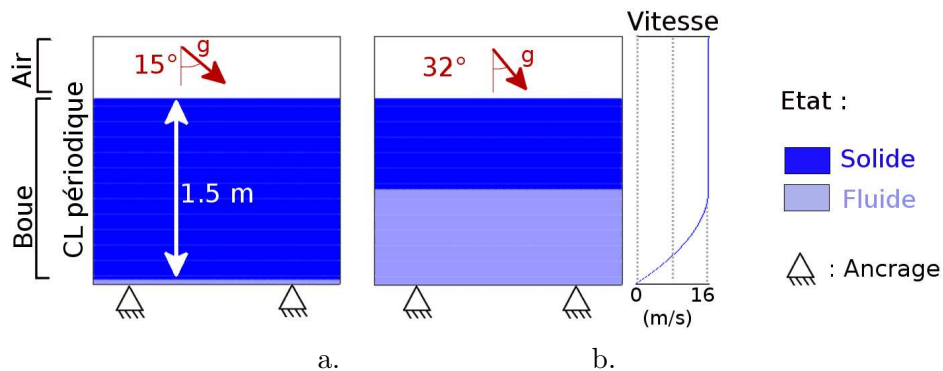
Angle de pente à l'amorçage (°)	32	27	32	29	27	35
Vitesse sur la pente la plus forte (m/s)	18	15	18	15	15	19
Angle de pente à l'arrêt de la coulée (°)	6	6	7	8	8	15

Dans un premier temps, intéressons-nous à la calibration du seuil de Bingham. La condition d'arrêt sur  $J_{2\sigma}$  est indépendante de la viscosité pour un fluide incompressible, puisque dans ce cas  $J_{2\sigma} = \sigma_{xz} = \gamma h \sin \theta$  (voir partie 3.3.3). En reprenant les calculs analytiques menés dans cette même partie, il vient que l'immobilisation d'une couche infinie d'épaisseur 1,5 m et de poids volumique 16 kN/m<sup>3</sup> est obtenue -même sur une pente de 15°- pour un seuil de Bingham supérieur à 6,08 kPa. Le modèle réalisé avec Ellipsis (modèle similaire à celui présenté à la figure 3.14), permet d'illustrer ce résultat : la figure 4.13a montre un écoulement quasiment bloqué pour  $s_o=6$  kPa.

### Calibration de la viscosité

Considérons à présent une pente de 32°, représentative de la zone d'amorçage. Une couche infinie d'épaisseur 1,5 m, et de mêmes paramètres que précédemment ( $s_o=6,08$  kPa), s'écoule sur 0,77 m de hauteur seulement. La solution analytique pour ce problème (voir équation 3.18) donne qu'une viscosité de 150 Pa.s doit être choisie pour obtenir, au sommet de la couche, la vitesse moyenne  $V=16$ m/s des coulées présentées au tableau 4.3.

Le modèle effectué avec Ellipsis illustre ces résultats (voir figure 4.13b).

FIGURE 4.13: Calibration de  $s_o$  dans la zone de dépôt (a), de  $\eta$  dans la pente d'amorçage (b)

Notons que les valeurs  $\eta=150$  Pa.s et  $s_o=6$  kPa appartiennent à l'ordre de grandeur pour les coulées de boue et suspensions granulaires présenté à la partie 1.2.2 ( $\eta$  compris entre 30 et 1000 Pa.s,  $s_o$  entre 0,1 et 12 kPa).

En conclusion, le tableau 4.4 reprend les valeurs déterminées de tous les paramètres nécessaires pour le modèle de transition solide-fluide (au total : 7 paramètres élasto-plastiques, 2 visqueux et le poids volumique).

Intéressons-nous à présent à l'étude de la transition sur un modèle géométrique peu étendu longitudinalement.

TABLE 4.4: Bilan des paramètres physiques pour les géomatériaux de Sarno et Quindici

	$\gamma_{nat}$ (kN/m <sup>3</sup> )	E (MPa)	$\nu$	$C'_m$ (kPa)	$\varphi'$ (°)	$\psi$ (°)	$\eta$ (Pa.s)	$s_o$ (kPa)
Cendres	16	5	0,29	3-15 à 8-38	8/38	-25/5	150	6
Pierre ponce	8	-	-	0	30	-		
Paléosols	-	-	-	10	37	-		

### 4.3 Étude de la transition sur un modèle de longueur réduite

L'objectif de cette partie est de tester le modèle constitutif de transition sur un modèle de géométrie simplifiée, mais proche d'un modèle de pente instable. Nous voulons mettre en évidence dans cette première application les 3 phases distinctes des mouvements gravitaires : l'amorçage par la rupture, l'écoulement et l'immobilisation finale.

Plusieurs conditions sont testées pour l'amorçage, et l'écoulement avec arrêt contre un obstacle est analysé pour différents paramètres.

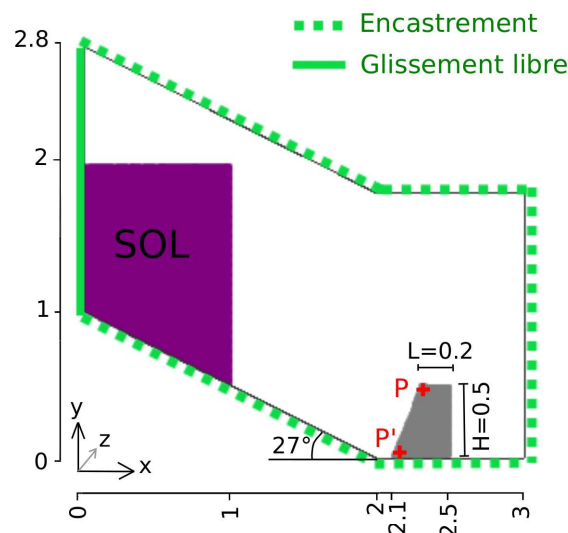
#### 4.3.1 Description du modèle

Nous considérons le modèle présentée à la figure 4.14, dans lequel un obstacle pourra être pris en compte ou non.

Le modèle est discrétisé en 72 éléments selon  $x$  et 48 selon  $y$ . Les éléments sont ici des parallélogrammes, de direction parallèle aux bords du modèle.

Des conditions aux limites de type encastrement sont considérées sur tous les bords, à l'exception du bord  $x = 0$  où une condition de glissement libre, sans décollement, est appliquée.

FIGURE 4.14: Géométrie du modèle de coulée de longueur réduite (dimensions en m)



Nous considérons, tout d'abord, un unique matériau de type cendre dont les paramètres physiques ont été synthétisés précédemment (voir tableau 4.4). Les paramètres numériques du modèle sont présentés au tableau 4.5.

Ces paramètres, indispensables au calcul, ont été choisis afin de ne pas influencer les résultats :

- Dans la phase solide du comportement, le rapport entre le temps de relaxation et le pas de temps d'advection ( $\Delta t \simeq \Delta t_e = 0,01$  s) est de  $5,2 \cdot 10^4$ , ce qui entraîne que la relaxation

TABLE 4.5: Paramètres numériques pour la coulée simplifiée ( $\Delta t_e = 10^{-2}$  s)

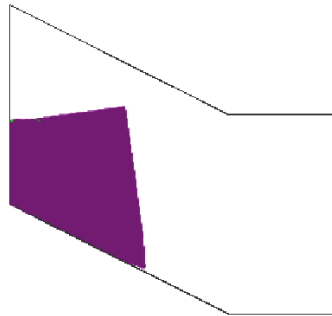
	Air	Sol avant la rupture	Sol en écoulement
$\eta_{eff}$ (Pa.s)	1.95 ( $=\eta$ )	$1,93 \cdot 10^4$	149
$(K_v)_{eff}$ (Pa.s)	10 ( $=K_v$ )	$3,95 \cdot 10^4$	$3,95 \cdot 10^4$
Tps de relaxation (s)	-	520	$7,7 \cdot 10^{-5}$

visqueuse est négligeable pour quelques centaines de pas de calcul. Le comportement peut donc être assimilé à un comportement élasto-plastique.

- En ce qui concerne la phase fluide après transition, le temps de relaxation est au contraire très faible devant le pas de temps, ce qui implique que le comportement du géomatériau est bien quasiment visqueux, même sur un seul pas de temps.
- Enfin, les paramètres visqueux effectifs de l'air restent faibles devant les paramètres effectifs du sol. Pour la phase fluide du géomatériau (où les modules mécaniques sont les moins élevés), le rapport entre  $\eta_{eff}$  (sol) et  $\eta$  (air) n'est que de 80. Cependant, il ne peut être considéré de viscosité plus faible pour l'air car, afin de conserver une matrice de viscosité globale bien conditionnée, un ordre de grandeur de  $10^4$  maximum doit être respecté entre toutes les viscosités effectives (et ici on a déjà  $\eta_{eff}(\text{sol avant transition})/\eta_{eff}(\text{air})=10^4$ ). La sollicitation est une augmentation de la gravité jusqu'à  $9,8 \text{ m/s}^2$  en 50 pas de temps.

### 4.3.2 Étude de l'amorçage

Nous avons tout d'abord mis en évidence que, pour un simple comportement de Bingham (élastique sous le seuil), un seuil  $s_o=6 \text{ kPa}$  ne permet qu'un écoulement de très faible amplitude (voir configuration finale de l'écoulement à la figure 4.15). La taille relativement réduite de notre échantillon entraîne donc des contraintes de cisaillement peu élevées et des valeurs maximum de  $J_{2\sigma}$  qui dépassent à peine  $6 \text{ kPa}$ .

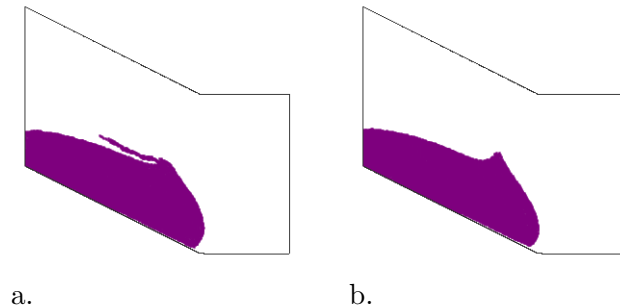
FIGURE 4.15: Configuration finale pour un comportement purement visqueux et  $s_o=6 \text{ kPa}$ 

Nous avons donc choisi un seuil plus faible de  $1,5 \text{ kPa}$  pour atteindre un écoulement d'amplitude conséquente, et distinguer les phases d'amorçage par transition solide-fluide, d'écoulement, et d'arrêt par transition fluide-solide.

Par ailleurs, le calcul en élasto-plasticité avec transition visqueuse mène à un écoulement conséquent du matériau d'étude vers le bas du modèle. Du fait de la condition d'équilibre volumique (voir équation de compressibilité en 1.62), cet écoulement génère un "contre-courant" dans l'air qui se déplace alors vers l'amont de la pente. Il existe donc un fort différentiel de vitesse entre le sol et l'air, qui peut perturber les particules dont le poids numérique a été annulé par le traitement spécifique des éléments hétérogènes (voir procédé présenté au paragraphe

2.2.4).

FIGURE 4.16: Comparaison des configurations, en fin d'application de  $g$ , pour le calcul avec (a) et sans (b) traitement spécifique des éléments hétérogènes



En effet, nous observons à la figure 4.16a, que des particules de sol sont piégées dans l'air lorsque la coulée s'est amorcée. Bien que le traitement spécifique des éléments hétérogènes ait montré son efficacité en élasto-plasticité, nous avons donc décidé de ne pas le prendre en compte pour les modèles à surface libre avec transition. Sans ce traitement particulier, la configuration de l'écoulement visqueux -même si elle est globalement inchangée- ne présente plus ces irrégularités dans la zone limite entre les 2 matériaux (voir figure 4.16b).

### Influence de la cohésion sur l'amorçage

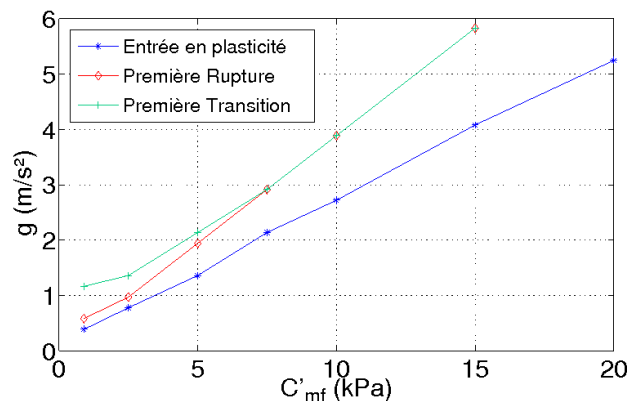
Nous menons l'essai pour des cohésions variables entre  $C'_m=0.18-0.9$  kPa (ces valeurs très faibles correspondent à une succion peu élevée) et  $C'_m=4-20$  kPa (correspondant à une succion plus importante). Pour chaque calcul, nous déterminons les valeurs de gravité auxquelles :

- les premières déformations plastiques sont atteintes,
- la première rupture est atteinte ( $d^2W_n < -10^{-3}$  sur au moins un point matériel),
- la première transition est atteinte ( $J_{2\sigma} > s_o$  sur au moins un point matériel)

En effet, nous avons vu au paragraphe 3.1.2 que, pour activer l'écoulement, il faut non seulement que la rupture soit atteinte, mais aussi que le critère de Bingham soit dépassé, et nous voulons voir la concordance entre ces deux critères.

Le graphe obtenu est présenté à la figure 4.17 (la cohésion  $C'_{mf}$  en abscisse est la cohésion pour le critère limite de plasticité).

FIGURE 4.17: Influence de la cohésion sur l'entrée en plasticité, la première rupture et la première transition solide-fluide



Tout d'abord, le graphe fait apparaître, comme nous nous y attendions, que plus la cohésion est élevée, plus il faut charger l'échantillon pour atteindre les premières déformations plastiques, la première rupture et la première transition. Nous remarquons par ailleurs que pour  $C'_{mf} > 15$  kPa, ni la rupture, ni la transition ne sont atteintes : les courbes de première rupture et de première transition (qui n'ont donc pas été prolongées) perdent donc leur caractère linéaire au-delà de 15 kPa puisque la rupture est atteinte pour une gravité supérieure à  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

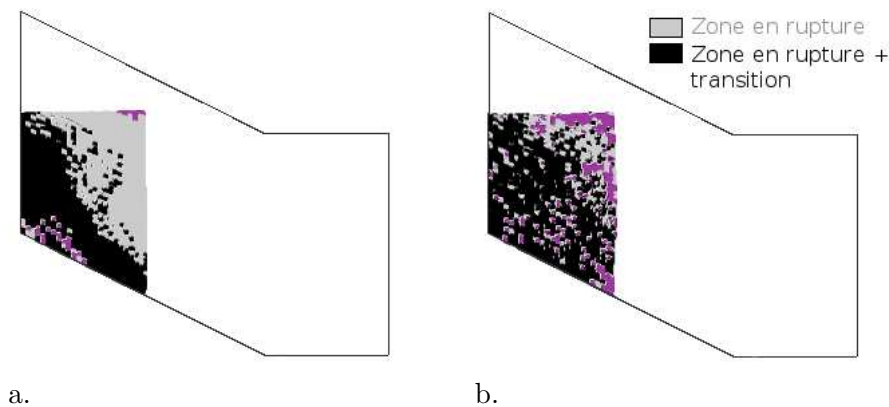
De plus, nous observons que les chargements de première rupture et de première transition coïncident dès que  $C'_{mf} > 7,5$  kPa. En effet, au-delà de cette valeur, la cohésion de limite élastique  $C'_{m0}$  ( $=C'_{mf}/5$ ) est proche du seuil  $s_0 = 2$  kPa ou le dépasse. La rupture, qui a lieu dans le domaine plastique, a ainsi de grandes chances d'induire directement la transition solide-fluide puisqu'alors :  $J_{2\sigma} > C'_{m0} > s_0$  (ou  $J_{2\sigma} > C'_{m0} \simeq s_0$ ). Nous sommes ainsi dans le cas où le critère de Bingham en 3D est, dans l'espace des contraintes principales, situé à l'intérieur de la limite élastique (et donc du critère limite de plasticité) comme pour la représentation faite à la figure 3.4.

Au contraire d'après la courbe, plus  $C'_{mf}$  est faible en deçà de 7,5 kPa (=plus  $C'_{m0}$  est faible par rapport à  $s_0$ ), moins la transition est immédiate après la rupture. Cet effet se traduit, pour un pas de temps donné, par la non-concordance des zones en transition et des zones en rupture dans l'échantillon (bien que les premières soient toujours incluses dans les secondes). La figure 4.18a illustre la différence obtenue entre les 2 zones pour  $C'_m = 0,18-0,9$  kPa ( $g = 4,1$  m/s<sup>2</sup>), alors que celles-ci tendent à être confondues pour une cohésion plus élevée de  $C'_m = 2-10$  kPa (voir figure 4.18b obtenue pour  $g = 7,8$  m/s<sup>2</sup>).

*Remarque : les deux stades de chargement en  $g$  ont été choisis tels que la zone de transition soit largement développée dans l'échantillon.*

Ainsi, il faut être attentif au choix du seuil de viscosité et de la cohésion pour le modèle de transition, afin que la transition visqueuse soit effectivement déclenchée par le critère de rupture (travail du second ordre) et non par le seuil de Bingham.

FIGURE 4.18: Représentation des zones en rupture et en transition au cours du chargement avec  $C'_m = 0,18-0,9$  kPa (a) et  $C'_m = 2-10$  kPa (b)



### Prise en compte de 2 matériaux différents

L'objectif de cette partie est de mettre en évidence, pour la phase d'amorçage et le début de l'écoulement, l'influence de la prise en compte de deux 2 matériaux distincts, tels que leur paramètres plastiques sont différents mais leur paramètres visqueux sont identiques.



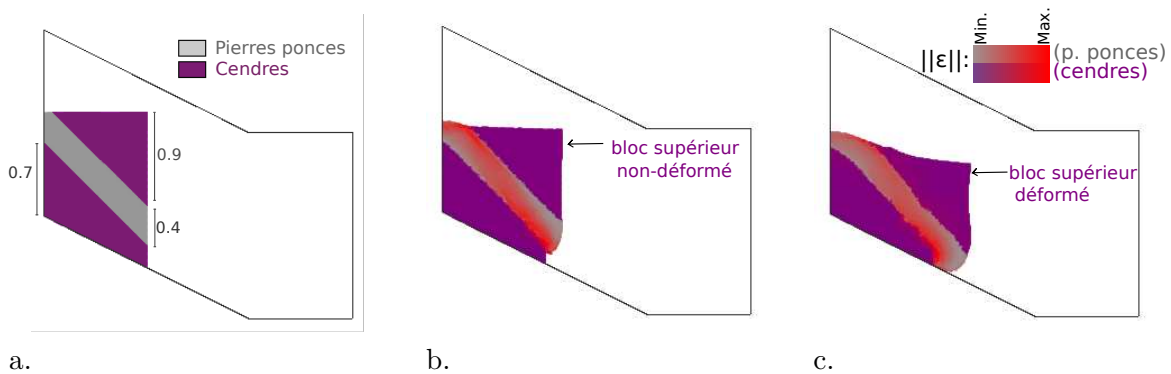
**Modèle** Modélisons la même configuration géométrique, mais avec 2 matériaux distincts. D’une part, nous considérons un matériau principal de type cendre, avec les mêmes propriétés qu’au paragraphe précédent et une cohésion relativement élevée  $C'_m = 6-30$  kPa pour laquelle la transition n’est pas atteinte pendant la phase d’augmentation de  $g$  (voir graphe 4.17).

D’autre part, nous modélisons une couche de 0,4 m intercalée dans les cendres, suffisamment inclinée pour aboutir de part et d’autre à la surface libre de l’échantillon (angle de  $45^\circ$ ), mais suivant globalement la direction de la pente (voir figure 4.19a).

Nous souhaitons décrire un matériau de type pierre ponce pour cette couche et avons donc choisi une cohésion nulle, ce qui est la principale caractéristique de cet horizon. Les autres paramètres sont choisis identiques à ceux des cendres.

Ce modèle est ainsi globalement représentatif de l’organisation des couches de pyroclastes à Sarno et Quindici.

FIGURE 4.19: Géométrie du modèle bi-matériaux (a), configuration aux incréments 53 (b) et 83 (c) (dimensions en m)



**Résultats et analyse** Nous avons représenté aux figures 4.19b et c, les résultats obtenus en terme de configurations déformées, et de champ de la norme  $\|\epsilon\|$  du tenseur des déformations totales (=visco-élasto-plastiques).

L’échelle représentée est normalisée par rapport au maximum et au minimum de  $\|\epsilon\|$  obtenu sur l’échantillon au pas de temps considéré, afin d’identifier, sur chacune de ces configurations, les zones de concentration maximale de  $\|\epsilon\|$  (en rouge sur la figure).

Dans un premier temps, nous avons remarqué que la transition n’a lieu que dans l’horizon de pierres ponce, et il apparaît à la figure 4.19b que les déformations totales se concentrent dans cette couche. Au contraire, le matériau cendre se déplace en bloc sans presque se déformer. Dans la suite du calcul, nous avons pu observer que la transition se propageait aux cendres, et le bloc supérieur de cendre se déforme alors également d’après la figure 4.19c.

Bien que le chargement par augmentation de gravité ne soit pas réaliste, il semble que nous retrouvions ici une certaine cohérence avec le mécanisme d’amorçage que nous avons décrit au paragraphe 4.1 à partir de la bibliographie sur les coulées de Sarno et Quindici : la rupture s’initialise sur une surface de glissement et elle est suivie d’une l’évolution en coulée par liquéfaction des cendres.

### 4.3.3 Étude de l’écoulement et de l’arrêt sur un obstacle

#### Différents stades de la coulée

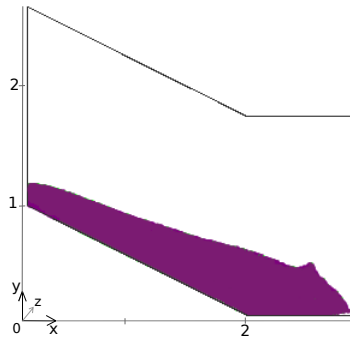
Revenons à présent au cas d’un échantillon homogène, sur lequel nous souhaitons étudier l’écoulement et l’arrêt. Nous choisissons une cohésion  $C'_m$  écrouissable entre 2 et 10 kPa,



assez faible pour que l'échantillon se déstabilise sous l'effet de l'augmentation de la gravité, mais assez élevée pour que la rupture et la transition solide-fluide soient simultanées (voir graphe 4.17). Les autres paramètres sont inchangés.

Tout d'abord, notons que, sans obstacle, la coulée se stabilise finalement pour la configuration présentée à la figure 4.20. Ainsi, concrètement, modéliser un obstacle peut avoir pour objectif de protéger des zones importantes, situées entre  $x=2,5$  m et  $x=3$  m.

FIGURE 4.20: Configuration finale sans obstacle



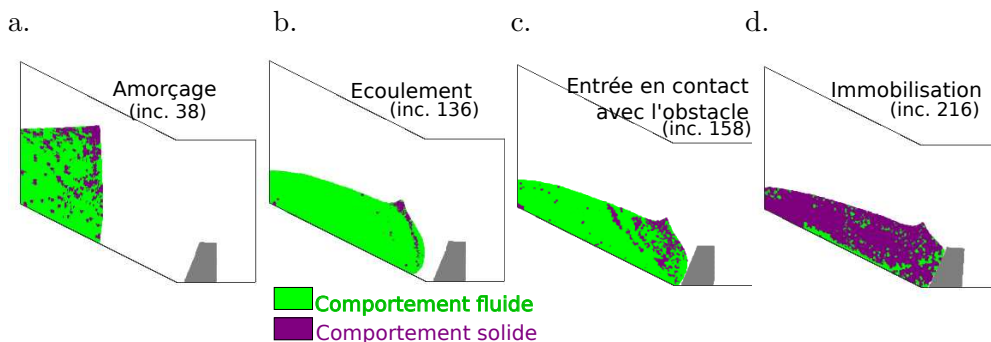
Cet obstacle est considéré élastique, avec  $E=0,5$  MPa et  $\nu=0,29$ , situé à la position présentée à la figure 4.14. Les résultats du calcul permettent de distinguer 4 phases significatives au cours de la coulée, qui sont présentées à la figure 4.21.

La première est la phase d'amorçage, que nous avons déjà étudiée (voir figure 4.21a).

La deuxième est la phase d'écoulement, pendant laquelle nous observons que la transition a été atteinte pour presque tout le matériau (voir figure 4.21b). Durant cette phase, les déplacements sont très rapides : à l'incrément 136, la vitesse du front de la coulée -selon la direction de la pente- atteint 5 m/s. Rappelons cependant que les forces d'inertie ne sont pas prises en compte dans ce modèle.

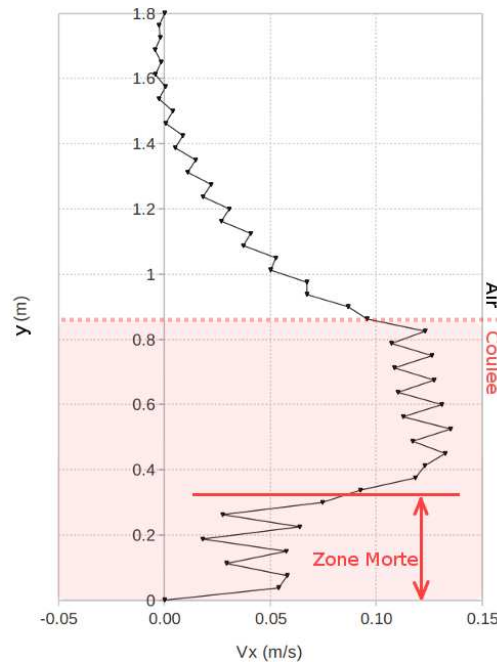
La troisième phase est l'entrée en contact avec l'obstacle qui provoque un début de re-solidification du géomatériau (voir figure 4.21c).

FIGURE 4.21: Différentes phases de l'écoulement



Enfin, le matériau s'immobilise complètement contre l'obstacle, et nous notons que la dernière zone à se solidifier forme une bande oblique rejoignant le sommet de l'obstacle au plan incliné (figure 4.21d). Cette bande encore visqueuse, où se concentrent des déformations de cisaillement élevées, isole donc la partie supérieure de la coulée (de vitesse principalement déterminée par les déformations dans cette bande) et la partie inférieure de la coulée où les vitesses sont faibles. Un profil vertical (en  $x=2$  m) des vitesses nodales horizontales  $V_x$  est présenté à la figure 4.22 pour l'incrément 195.

FIGURE 4.22: Mise en évidence d'une zone morte (incrément 195)



Tout d'abord, notons que la forme en 'dent de scie' de ce profil s'explique par l'interpolation constante des dérivées des fonctions de forme, qui mène à une perte de précision.

Ce profil met en évidence la discontinuité des vitesses au sein de la coulée et permet de distinguer une épaisseur d'environ 0,3 m en base du profil sur laquelle, hormis ces oscillations numériques, le gradient de vitesse est nul sur la hauteur. La vitesse est réduite, mais cependant pas nulle (il semble qu'il y ait encore des déformations de cisaillement entre  $y=0$  et  $y=0,05$  m).

Cette zone quasi-inerte d'un écoulement en amont d'un obstacle est nommée "zone morte" et son volume "volume de contrôle". Déterminer ce volume est particulièrement important car celui-ci détermine en grande partie les forces exercées sur l'obstacle (voir les travaux de Chanut *et al.* (2010); Faug *et al.* (2009)).

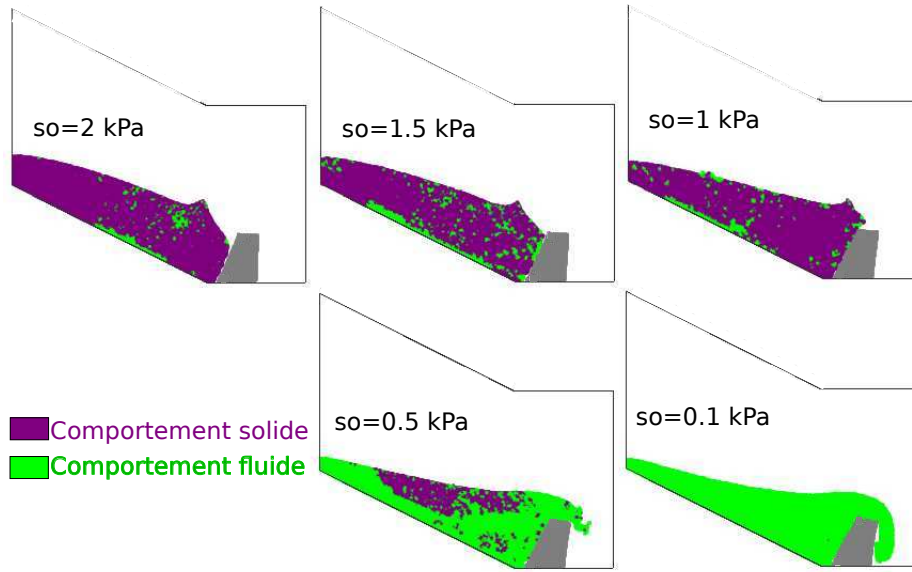
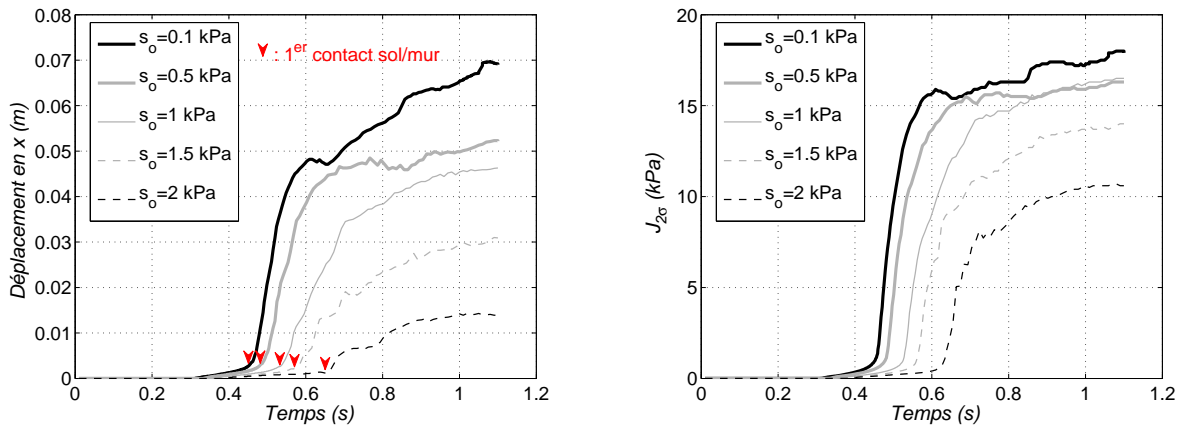
À présent, déterminons de manière quantitative l'influence, sur la réponse de l'obstacle, du seuil de viscosité  $s_o$ , de son module de Young et de sa hauteur.

### Influence du seuil de viscosité sur l'arrêt

Les résultats que nous souhaitons évaluer dans cette comparaison sont le déplacement horizontal  $U_x$  en tête de l'ouvrage (au point de donnée  $P$  visible à la figure 4.14), et le second invariant de contrainte  $J_{2\sigma}$  en pied (point de donnée  $P'$  visible à la figure 4.14). En effet, ces valeurs peuvent être utilisées en ingénierie pour dimensionner les ouvrages de protection -vis-à-vis des coulées gravitaires-, de déviation, etc.

Le calcul est mené pour 5 valeurs de  $s_o$  (0,1 - 0,5 - 1 - 1,5 et 2 kPa) et les configurations obtenues en fin de calcul sont présentées à la figure 4.23. Cette figure fait apparaître que pour les seuils de 1 à 2 kPa, des configurations stables, re-solidifiées en quasiment tous points, sont obtenues. Pour les seuils de 0,1 et 0,5 kPa, le calcul a mené à une instabilité (temps de convergence de plus en plus long pour chaque incrément et aspect des résultats peu réaliste) et l'immobilisation finale du matériau n'a pas pu être obtenue. L'évolution de  $U_x$  et  $J_{2\sigma}$  au cours du temps est présentée à la figure 4.24.

FIGURE 4.23: Configuration en fin de calcul pour les différents seuils de viscosité

FIGURE 4.24: Influence de  $s_o$  sur  $U_x(P)$  (a) et  $J_{2\sigma}(P')$  (b)

a.

b.

Tout d'abord ces courbes montrent la cohérence des résultats obtenus : comme on pouvait s'y attendre, plus le seuil est élevé, plus  $U_x(P)$  et  $J_{2\sigma}(P')$  sont faibles. De plus, l'augmentation du seuil entraîne que la coulée atteint l'obstacle de plus en plus tard (figure 4.24a).

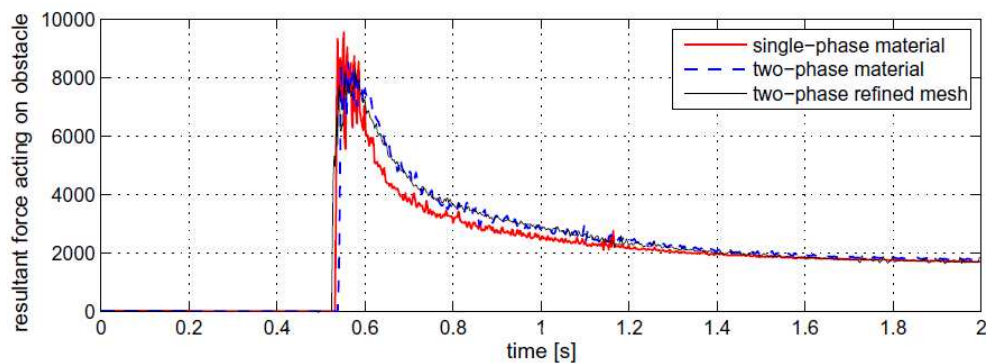
Une lecture plus fine des courbes permet de remarquer que l'augmentation de  $J_{2\sigma}$  avec la diminution de  $s_o$  semble limitée (les valeurs finales pour  $s_o=0,1 - 0,5$  et  $1$  kPa sont assez proches, alors qu'elles varient beaucoup pour  $s_o$  entre  $1$  et  $2$  kPa). En effet, pour un seuil suffisamment faible, la répartition du matériau le long de la pente et à l'arrière de l'obstacle (qui -toutes choses étant égales par ailleurs- détermine la répartition des contraintes dans cet ouvrage) ne dépend plus que des conditions aux limites.

Enfin, pour les faibles seuils de viscosité, il est possible de distinguer les phases de premier contact entre la coulée et l'obstacle (où  $U_x$  et  $J_{2\sigma}$  augmentent très rapidement) et de remplissage de la zone arrière de l'obstacle (où  $U_x$  et  $J_{2\sigma}$  augmentent plus lentement). Cette distinction est de moins en moins visible lorsque le seuil augmente car, alors, le matériau est moins étalé au cours de l'écoulement et atteint l'obstacle avec une grande partie de sa masse

en même temps.

Nous tenons à souligner ici que, si les contraintes sur l'obstacle augmentent continuellement dans nos calculs, en réalité, avec les effets d'inertie de l'écoulement, les contraintes passeraient par un pic correspondant à l'impact dynamique, avant de diminuer vers leur valeur d'équilibre statique. Ce phénomène n'est pas négligeable, même pour cet essai impliquant des volumes (et des masses) limités. En effet, d'après les résultats en dynamique de Preisig et Zimmermann (2010) (sur une géométrie identique et avec un matériau visqueux newtonien de paramètres du même ordre de grandeur que ceux de notre étude :  $\gamma=7,5$  kN/m<sup>3</sup>,  $\eta=50$  Pa.s), la force résultante générée par la coulée sur un obstacle -rigide- est celle présentée à la figure 4.25.

FIGURE 4.25: Force résultante générée sur l'obstacle d'après Preisig et Zimmermann (2010) (les différentes courbes représentent plusieurs manières de prendre en compte les phases 'eau' et 'grains')



Cette évolution de la force, avec passage par un pic, montre bien l'effet de l'inertie au moment de l'impact, et la diminution de cet effet, lorsque le matériau se stabilise.

Par rapport à ces travaux nos calculs ont, par contre, l'avantage de pouvoir prendre en compte un vrai comportement solide, en plus de la description de l'écoulement : nous avons décrit un amorçage par une rupture en élasto-plasticité, et nous pouvons modéliser le comportement solide de l'obstacle, par exemple en élasticité.

### Influence du module de Young de l'obstacle

Étudions l'effet du module de Young du matériau de l'ouvrage sur  $U_x$  et  $J_{2\sigma}$  à partir du calcul pour les valeurs suivantes de  $E$  : 0,5 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 MPa.

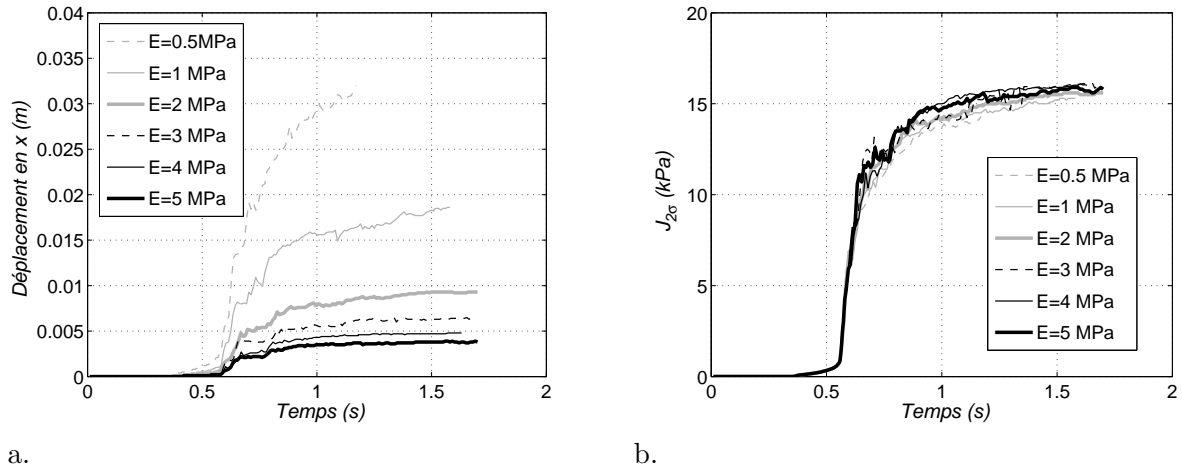
Notons que ces valeurs sont faibles (elles correspondent à l'ordre de grandeur de  $E$  dans une argile). Les résultats sont présentés à la figure 4.26.

Nous observons que  $E$  n'a presque pas d'influence sur le deuxième invariant des contraintes, ce qui semble logique du fait que la même charge est appliquée sur l'obstacle.

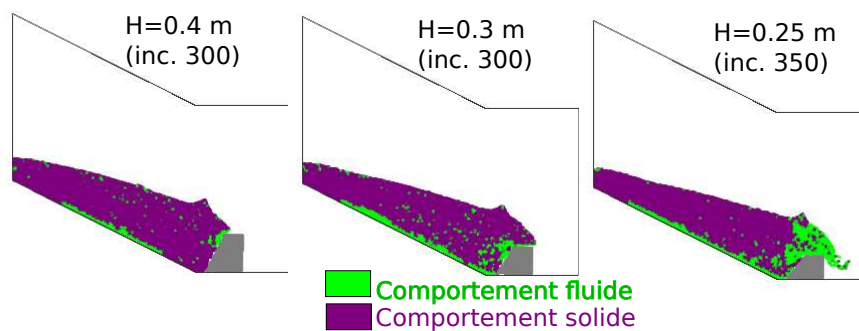
Par ailleurs, le déplacement en tête augmente avec la diminution de  $E$ , ce qui semble également normal au vu de la rigidité de l'obstacle (la rigidité en flexion pour une plaque s'écrit  $D = \frac{EL^3}{12(1-\nu^2)}$ , avec  $L$  l'épaisseur de la plaque) qui diminue en entraînant plus de flexion.

### Influence de la hauteur $H$ de l'obstacle

Notre dernière analyse porte sur la hauteur nécessaire pour contenir la coulée. Les calculs ont été menés avec un module de Young pour l'obstacle de  $E=5$  MPa et un seuil de viscosité de la coulée de  $s_o=1,5$  kPa.

FIGURE 4.26: Influence de  $E$  sur  $U_x(P)$  (a) et  $J_{2\sigma}(P')$  (b)

Nous avons mené le calcul pour  $H=0,4 - 0,3$  et  $0,25$  m (en plus de la hauteur  $0,5$  qui a déjà été testée et qui est suffisante pour retenir l'écoulement). Les configurations au bout de plusieurs centaines d'incrémets sont présentées à la figure 4.27. Nous obtenons que le seuil de viscosité permet de retenir la coulée même pour  $H=0,4$  m et  $H=0,3$  m. Pour  $H=0,25$  m par contre, la coulée se stabilise dans une première phase, puis se re-fluidifie dans une deuxième phase, lorsqu'elle recouvre l'obstacle jusqu'à dépasser son sommet. Il y a donc eu 3 transitions dans ce dernier cas : solide  $\rightarrow$  fluide pour l'amorçage, fluide  $\rightarrow$  solide à l'arrêt contre l'obstacle, solide  $\rightarrow$  fluide pour la remobilisation lorsque la coulée dépasse l'obstacle.

FIGURE 4.27: Influence de  $H$  sur l'efficacité de l'obstacle

Une étude paramétrique similaire sur un cas réel de pente sujette aux coulées, permettrait donc de dimensionner -selon les matériaux des coulées et notamment leur seuil de viscosité- la hauteur nécessaire d'un obstacle de protection et de prévoir les efforts sur cet obstacle.

À présent, étudions le cas d'une coulée réelle sur la zone de Sarno et Quindici.



## 4.4 Étude de la coulée de Palma Campania

### 4.4.1 Présentation du modèle étudié

#### Modèle géométrique

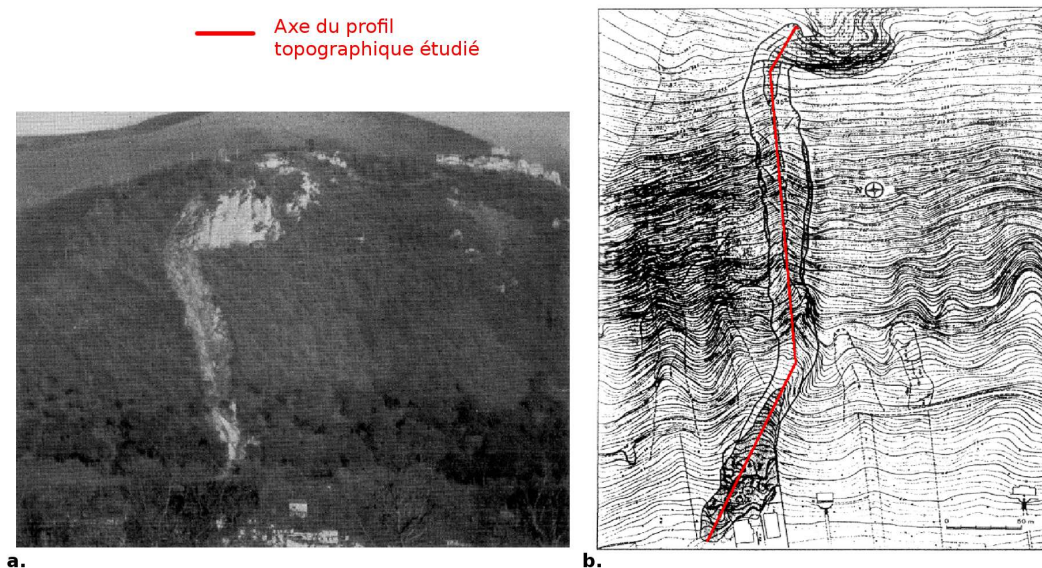
La coulée d'étude a eu lieu dans la commune de Palma Campania en 1986. Elle s'est déclenchée à l'ouest du relief du Pizzo, à environ 20 km de la zone de Sarno et Quindici (voir fig 4.1). La roche mère est donc similaire entre les deux zones. De plus, la distance au Vésuve est la même que pour Sarno et Quindici : les dépôts pyroclastiques issus de l'activité du volcan sont donc vraisemblablement très proches.

Cette coulée a été choisie pour notre étude car elle est relativement rectiligne et confinée latéralement du fait de l'écoulement dans une ravine. De plus, par comparaison aux coulées de boue de 1998, elle est plus simple dans le sens où elle ne présente pas de ramification. Ces 3 particularités nous permettent de modéliser la coulée de manière cohérente avec les hypothèses bidimensionnelles en déformation plane.

Ce mouvement de terrain a été conséquent, puisque la coulée a parcouru environ 600 m (pour environ 250 m de dénivelé) et qu'elle a presque atteint les habitations en contrebas (voir figure 4.28).

D'un point de vue topographique, la pente varie entre  $42^\circ$  à l'amorçage et  $12^\circ$  à l'arrêt de la coulée, ce qui concorde avec les coulées de Sarno et Quindici.

FIGURE 4.28: Aspect du terrain après la coulée et relevé topographique (Guadagno et al., 1988)

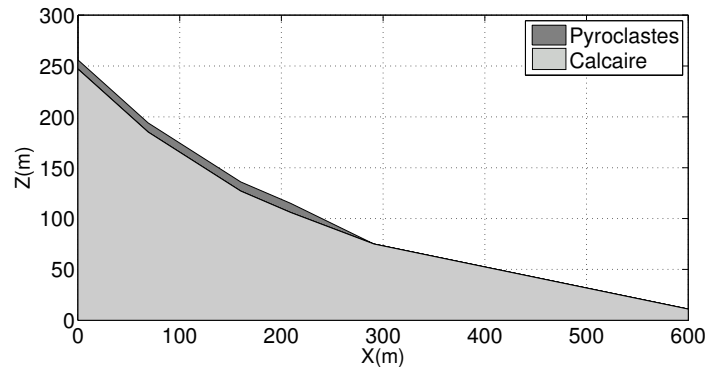


D'après Guadagno *et al.* (1988), l'épaisseur moyenne de pyroclastes sur ce flanc de montagne est de 9 m. Rappelons qu'en général, la hauteur de ces formations est faible sur les pentes raides où se produit l'amorçage (2-3 m) et de l'ordre d'une dizaine de mètres en base des pentes. Il faudrait donc en toute logique tenir compte de ce gradient d'épaisseur. Cependant, vu l'amplitude de cette coulée (environ 600 m), si nous souhaitons prendre en compte un maillage suffisamment fin sur une zone d'amorçage de 2-3 m d'épaisseur, comme les éléments ne peuvent être trop distordus (ni trop allongés), il faudrait un maillage également très raffiné sur la longueur du modèle, ce qui représente un coup numérique très important. Une couche uniforme de 9 m d'épaisseur a donc été considérée, jusqu'à environ la moitié de la longueur

du modèle. Nous restons cependant conscients qu'une telle hauteur de pyroclaste sur toute la pente n'est probablement pas réaliste.

La topographie (tirée du fond topographique présenté en 4.28b) ainsi que la couverture de pyroclastes de 9 m sont finalement synthétisées dans la coupe simplifiée présentée à la figure 4.29.

FIGURE 4.29: Coupe topographique et lithologique simplifiée

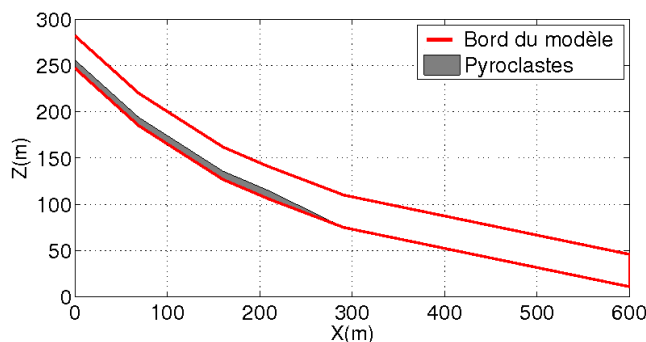


La modélisation d'une telle géométrie serait inutilement coûteuse en temps de calcul : en effet, alors que seule la couche de pyroclaste est impliquée dans la coulée, il faudrait décrire non seulement l'air environnant (et sur une très grande surface), mais en plus tout le soubassement calcaire.

Nous avons donc choisi d'adapter le cadre du maillage de telle façon que celui-ci s'adapte à la morphologie de la pente. Le modèle réalisé pour la coupe de la figure 4.29 est ainsi celui présenté à la figure 4.30. Dans un tel modèle, les éléments Q4 ne sont plus des rectangles, mais des parallélogrammes.

Pour tous les modèles qui suivent, qui constituent des sous-parties de ce modèle global, des conditions d'ancrage sur les 4 bords sont considérées.

FIGURE 4.30: Modèle adapté à la topographie



### Précisions sur les paramètres physiques

Étant donné le peu de paramètres mécaniques connus pour les paléosols et les pierres ponce, la couverture de terrain est considérée, comme pour le modèle de taille réduite, uniquement de

type cendre. Tous les paramètres sont donc supposés être ceux de ces pyroclastes, rassemblés au tableau 4.4, à l'exception du poids volumique naturel pour lequel une moyenne entre les différents horizons est considérée ici ( $11 \text{ kN/m}^3$ ) afin de ne pas se placer dans une configuration artificiellement défavorable (le matériau 'cendre' est le plus pesant d'après le tableau 4.1).

Par ailleurs, la topographie du site a permis de déterminer une pente d'arrêt de  $12^\circ$  de la coulée. Le seuil de viscosité est donc tel que les terrains se sont stabilisés sur cette pente.

La solution analytique, pour ce problème de coulée, à front libre, d'un matériau visqueux à seuil, n'est pas aussi directe que pour une couche infinie.

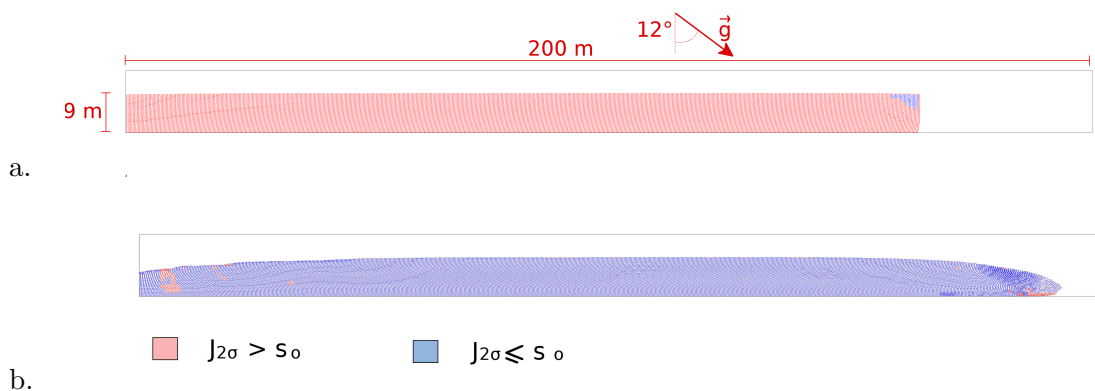
Afin de déterminer le seuil d'arrêt, nous avons donc testé différentes valeurs  $s_o$  sur un modèle de géométrie simple représentant une telle coulée (voir figure 4.31a). Le comportement considéré dans cet essai est visqueux de type Bingham au-delà du seuil et élastique en deçà, avec les paramètres que nous avons précédemment déterminés :  $E=5 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0,29$ ,  $\eta=150 \text{ Pa.s}$  et  $\gamma=11 \text{ kN/m}^3$  (pas de plasticité). Les paramètres numériques sont inchangés par rapport au modèle de coulée de taille réduite car la phase élastique et la phase visqueuse ont les mêmes modules dans les 2 cas (voir tableau 4.5). Après plusieurs calculs, il est apparu que pour un seuil inférieur à  $19 \text{ kPa}$  (qui permet encore une stabilisation de la couche de terrain - voir figure 4.31b), le matériau continue de s'écouler indéfiniment.

Cette valeur semble assez élevée, non seulement par rapport aux fourchettes que nous avons déterminées dans le Chapitre 1 pour  $s_o$  ( $0,1$  à  $12 \text{ kPa}$ ), mais aussi par rapport à l'ordre de grandeur des cohésions sur ce site (variant entre quelques  $\text{kPa}$  et quelques dizaines de  $\text{kPa}$ ). Elle est en fait probablement liée à la forte épaisseur de sol que nous avons dû considérer afin de réaliser un modèle de grande longueur.

Cependant, afin de considérer un ralentissement réaliste de la coulée sur la partie du modèle de faible pente (voir un arrêt sur les pentes les plus faibles), nous avons pris en compte cette valeur  $s_o=19 \text{ kPa}$ .

Il faut donc garder à l'esprit qu'avec un tel seuil, la rupture peut être atteinte pour un second invariant de contrainte  $J_{2\sigma}$  inférieur à  $s_o$ , et que, dans ce cas, la transition vers un écoulement visqueux n'est pas directe.

FIGURE 4.31: Stabilisation d'une couche à front libre pour  $s_o=19 \text{ kPa}$ . Configuration initiale (a), finale (b)



Les paramètres physiques retenus sont finalement regroupés dans le tableau 4.6.



TABLE 4.6: Paramètres retenus pour l'étude de la coulée

E (MPa)	$\nu$	$\varphi'$ (°)	$C'_m$ (kPa)	$\psi_e = \psi_c$ (°)	$B_c$	$B_p$	$\eta$ (Pa.s)	$K_v$ (Pa)	$s_0$ (kPa)	$\gamma_{mat}$ (kN/m <sup>3</sup> )
5	0,29	8-38	<sup>a</sup>	5	0,02	0,01	150	$2,0 \cdot 10^8$	19	11

a. variable selon la succion (de l'ordre de quelques dizaines de kPa)

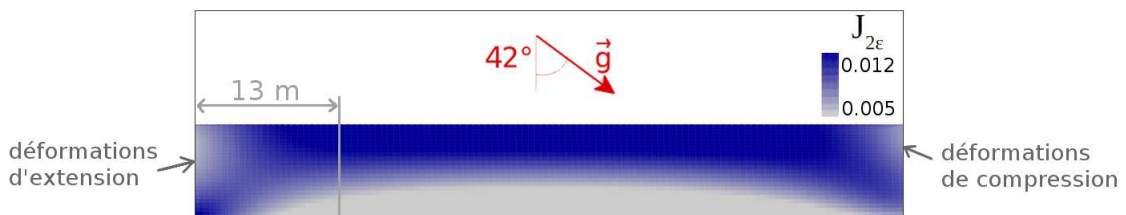
#### 4.4.2 Étude de l'amorçage

Intéressons-nous tout d'abord à l'amorçage de la coulée sur la partie de pente la plus inclinée (42°), et modélisons plus spécifiquement cette zone à partir d'un modèle quadrilatéral, dans lequel une couche de matériau d'épaisseur 9 m est étudiée.

Les conditions aux limites périodiques (voir paragraphe 1.4.4) ne sont pas considérées ici car nous souhaitons modéliser l'initiation de la coulée et non pas une phase d'écoulement établi. Dans ces conditions, il est probable que la rupture et la transition se concentrent sur le bord amont de la couche, où des conditions artificielles de traction vont être générées. De fait, ces effets de bord sont visibles dans la répartition des déformations pour un comportement élastique, et l'étendue de leur influence, de part et d'autre du modèle, peut être estimée à une dizaine de mètres (voir figure 4.32). En conséquence, afin réduire ces effets dans l'amorçage, nous choisissons de ne pas considérer de plasticité sur une zone de 13 m en amont de la pente (le comportement dans cette zone est donc élastique, de mêmes paramètres que les terrains modélisés). En aval, nous ne considérons pas une telle zone tampon car la présence du bord a pour effet d'augmenter cette fois la compression, ce qui est beaucoup moins défavorable vis-à-vis de la rupture.

Ainsi, les premières déformations plastiques vont se développer indépendamment de la position par rapport au bord.

FIGURE 4.32: Effets de bords -pour un comportement élastique- dans la répartition du second invariant de déformation. Extension de la zone sur laquelle nous ne considérons pas la plasticité dans le vrai modèle



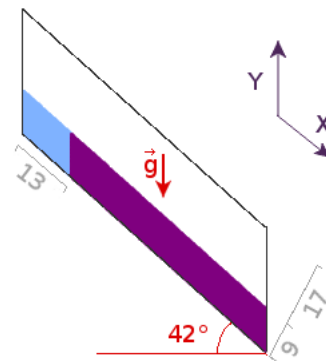
Le modèle finalement réalisé est présenté à la figure 4.33. Il est constitué de 32 éléments dans la direction y (soit environ 11 éléments sur la hauteur de la couche de pyroclastes) et 80 éléments sur la longueur du modèle.

#### Amorçage par augmentation de la gravité

Dans un premier temps, nous avons considéré plusieurs calculs avec une cohésion variant entre 2/10 kPa et 12/60 kPa. Le chargement consiste à augmenter la gravité par incréments de 0,06 m/s<sup>2</sup> jusqu'à obtenir la première transition dans le modèle.

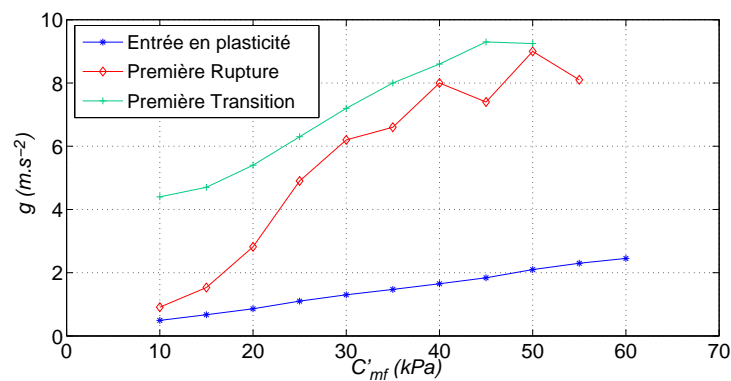
Les résultats sont présentés à la figure 4.34b où, pour les différents calculs, les chargements menant à l'entrée en plasticité, à la première rupture et à la première transition solide-fluide,

FIGURE 4.33: Géométrie du modèle (dimensions données en mètres)



sont tracés selon la cohésion.

FIGURE 4.34: Influence de la cohésion sur l'amorçage



Tout d'abord, nous pouvons remarquer que la cohésion obtenue pour le maximum de succion donné par la bibliographie ( $C'_m=8-38$  kPa) ne permet pas la stabilité des terrains. Ceci peut s'expliquer par notre hypothèse d'une couche épaisse de pyroclastes sur la zone d'amorçage. Cependant, d'après cette courbe, la stabilité est obtenue pour des valeurs qui ne sont pas beaucoup plus élevées :  $C'_m=11-55$  kPa.

De plus, comme nous le supposons pour un seuil de viscosité élevé, les courbes de première rupture et première transition ne coïncident pas (autrement dit, l'écoulement visqueux n'est pas direct après la rupture). Comme nous l'avons vu, au paragraphe 4.3.2, l'augmentation de cohésion tend cependant à faire concorder de mieux en mieux rupture et transition.

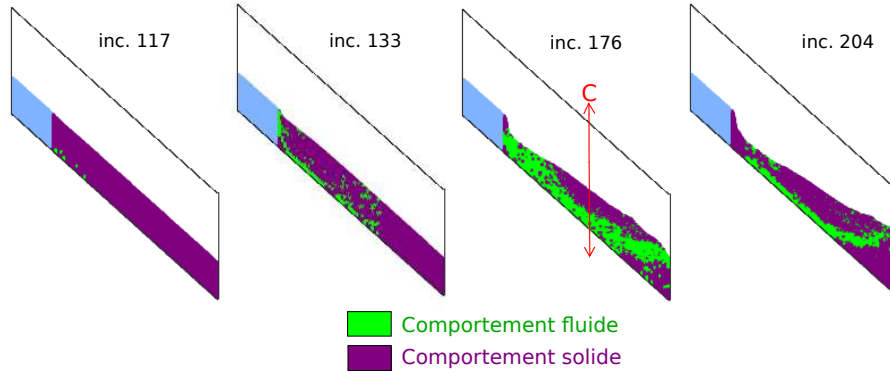
Intéressons-nous à présent aux résultats dans un cas de figure où la transition est certaine pour un chargement jusqu'à  $g=9,8$   $m/s^2$ , mais où la rupture et la transition sont déclenchées de manière relativement simultanée : nous choisissons le cas où  $C'_m=5-25$  kPa (voir figure 4.34).

Afin de laisser se développer les déformations visqueuses, nous continuons le calcul au-delà de la première transition, en stoppant l'augmentation de gravité dès que  $g$  atteint  $7,5$   $m/s^2$ , pour ne pas charger l'écoulement une fois la transition développée dans le modèle.

Les résultats obtenus sont présentés à la figure 4.35 en terme de configuration matérielle et de nature du comportement. Les zones de comportement 'solide' correspondent aux zones où

la première transition solide→fluide n'a pas encore été atteinte, ou aux zones fluidifiées puis re-solidifiées.

FIGURE 4.35: Résultats pour  $C'_m = 5 - 25 \text{ kPa}$  et  $s_o = 19 \text{ kPa}$



Plusieurs points peuvent être observés à partir de ces résultats :

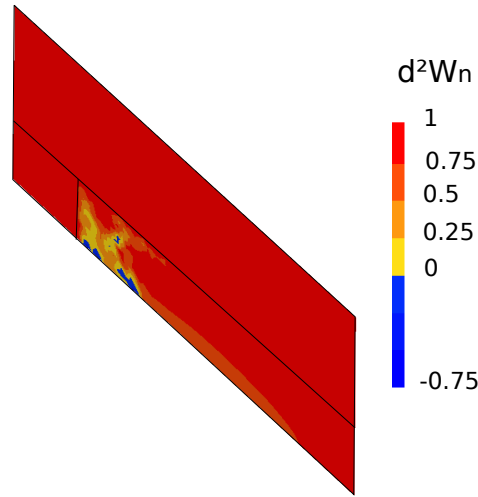
- La transition se déclenche et se développe en base de la couche (incrément 117 et 133), Comme la zone tampon en amont est élastique, ses déformations sont réduites par rapport au reste du modèle, ce qui explique que la transition s'amorce également contre le bord de cette zone (incrément 133). Les effets de bords ont pu être réduits à l'entrée en plasticité, mais pas dans le domaine plastique ni à la rupture.
- Pour l'incrément 117, nous avons extrait la cartographie du travail du second ordre local normalisé. En comparant ce zonage (présenté à la figure 4.36) avec les zones fluidifiées de la figure 4.35, nous pouvons vérifier la bonne concordance entre l'apparition de la rupture et de la transition, ce que nous avons déjà mis en évidence avec une cohésion  $C'_m = 5 - 25 \text{ kPa}$ .
- L'incrément 176 fait apparaître une bande complète de matériau fluidifié visqueux qui a aboutit à la surface, aux deux extrémités de la couche élasto-plastique.
- L'incrément 204 permet de visualiser le basculement de la partie supérieure des terrains qui n'est pas entré en transition. Le début de l'immobilisation finale de la coulée est visible à cet incrément puisque l'extension de la zone "fluide" a réduit par rapport à l'incrément 176.

La figure 4.37 présente, au niveau de la coupe 'C' pour l'incrément 176 (située à la figure 4.35), les profils de second invariant des contraintes  $J_{2\sigma}$  et des vitesses parallèles à la pente  $V_x$ .

Tout d'abord, la hauteur sur laquelle  $J_{2\sigma} > s_o$  (coupe 4.37a) nous permet de déterminer sur la coupe 4.37b la délimitation entre la couche visqueuse et la couche élasto-plastique. Pour la première, le profil de vitesse a une allure concordante avec le profil quadratique déterminé au paragraphe 3.3.3. Dans la seconde, le matériau est sensiblement rigide (vitesse globalement constante sur la hauteur).

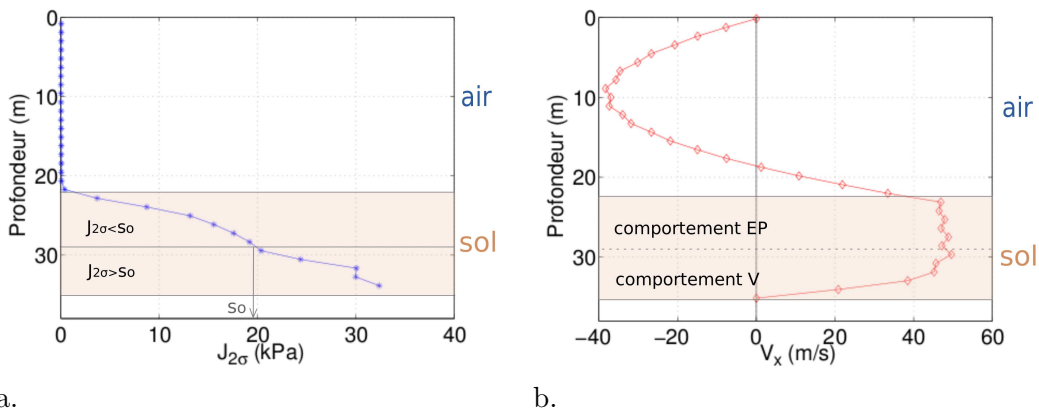
De plus, notons que les vitesses de la surface libre de la coulée, environ 50 m/s, sont 2 à 3 fois plus élevées que les vitesses réelles observées à Sarno et Quindici en base des pentes d'amorçage (vitesses de l'ordre de 10 à 20 m/s). Cependant, d'une part, ces valeurs de vitesses correspondent à des angles de pente différents (les pentes d'amorçage, 42° ici, sont environ 2 à 3 fois plus élevées que les pentes dans les villages où ont été estimées les vitesses, de l'ordre de 15°), d'autre part, la prise en compte de l'inertie (qui n'est pas considérée dans Ellipsis) modifierait sans doute fortement le calcul des vitesses, vers des valeurs plus réalistes. L'inertie a d'ailleurs un effet particulièrement important dans une phase d'amorçage d'écoulement, puisqu'elle ralentit l'établissement du régime stationnaire, et réduit donc les vitesses.

FIGURE 4.36: Zonage du travail du second ordre local normalisé à l'incrément 117 ( $g=6,8 \text{ m/s}^2$ )



Remarque : Le profil de vitesse 4.37b met en évidence le 'contre courant' induit dans l'air par l'écoulement des sols, que nous mentionnions en 4.3.2.

FIGURE 4.37: Coupes verticales de second invariant de contrainte (a) et de vitesse selon  $x$  (b) réalisées à l'incrément 176 (coupe C sur la figure 4.35). EP : élasto-plastique - V : visqueux



### Amorçage par Excavation

Les excavations (notamment anthropiques) pouvant être à la base des instabilités de terrain sur les pentes du Pizzo d'Alvano, envisageons à présent un amorçage par excavation au sein d'une configuration stable.

Afin de considérer cet état initial stable, une cohésion élevée a été choisie :  $C'm=18-90 \text{ kPa}$ . Le modèle a été chargé avec une gravité croissante de faible incrément :  $dg=0,03 \text{ m/s}^2$ .

Lorsque la gravité a atteint  $g=9,8 \text{ m/s}^2$  (incrément 320), une excavation verticale de 5 m de haut est réalisée dans la couche de pyroclastes. La gravité est cependant toujours augmentée (toujours de manière très progressive) après ce stade. En effet, nous avons vu, lors du premier

calcul élasto-plastique sous gravité (voir figure 2.7), que l'arrêt d'augmentation de  $g$  menait, du fait de la résolution explicite en plasticité, à un léger rééquilibrage de la contrainte déviatoire  $q$ . Cette oscillation, même faible, pourrait induire une annulation du travail du second ordre et donc une rupture artificielle.

Les résultats sont présentés à la figure 4.38. Pendant cette phase d'amorçage, la gravité n'a augmenté que de manière négligeable (augmentation d'environ 5 % entre l'incrément 320 et 379 d'après la figure 4.39).

FIGURE 4.38: Résultats obtenus pour un amorçage par excavation

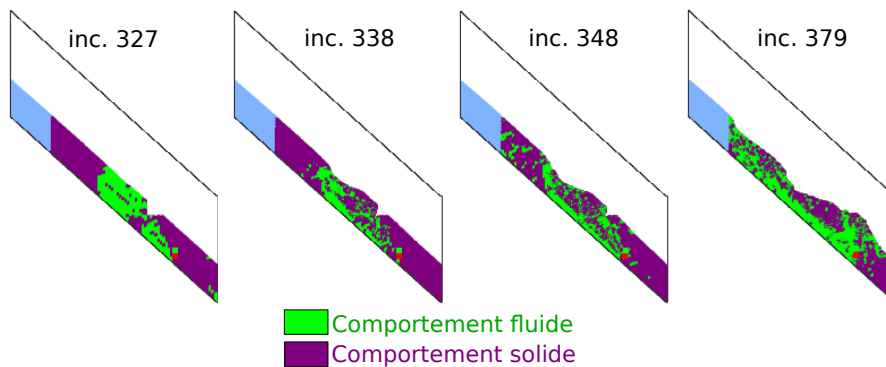
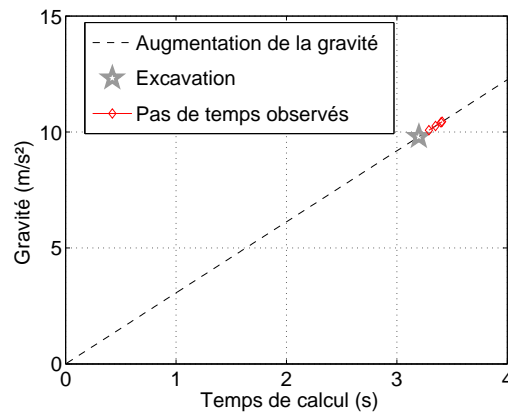


FIGURE 4.39: Chargement appliqué (gravité et excavation), et positionnement des incréments présentés à la figure 4.38



Ces quatre configurations mettent en évidence un développement de la transition beaucoup plus local que dans le cas précédent.

Dès le premier incrément après l'excavation, la partie amont du talus, brusquement déconfinée, entre en rupture et en transition (incrément 327). Par la suite (incrément 338 et 348), la partie supérieure du talus se re-stabilise et la zone fluidifiée se limite alors à une surface circulaire, assez nette, reliant le fond du modèle et l'arrière du talus, et une zone où la transition est plus diffuse, en pied de talus. L'épaisseur de la couche représentée est trop fine par rapport à l'excavation pour percevoir une bande de cisaillement passant par le pied du talus, sans effet du bord du modèle.

À partir de l'incrément 348, la transition solide-fluide s'élargit autour de la zone de talus et l'incrément 379 montre une déstabilisation générale en amont. La transition solide-fluide,

initialement assez locale, s'est donc généralisée.

### Amorçage par diminution de la succion

**Modèle** L'imbibition des sols par l'eau a été reconnue comme étant le facteur principal d'amorçage des mouvements de terrains en Campanie. Même si Ellipsis ne permet pas pour l'instant de résoudre de couplage hydro-mécanique, il semble néanmoins important de se rapprocher au mieux des conditions réelles d'amorçage par diminution de la succion au sein des terrains de couverture.

Rappelons qu'une part de la cohésion est due à la succion développée en condition de non saturation. Nous souhaitons prendre en compte une cohésion apparente initialement très stabilisante ( $C'm=18-90$  kPa par exemple), qui décroît au cours d'une phase d'imbibition, par effet d'une diminution de la succion.

Nous avons vu que la succion maximale dans les terrains de Sarno et Quindici atteint 80 kPa. D'après l'équation 4.7, cette valeur génère une part de cohésion de 5 kPa, pour la cohésion de limite élastique, et de 28 kPa, pour la cohésion au critère limite de plasticité (avec  $\varphi=8-38^\circ$ ). Il est alors équivalent de considérer, au lieu d'une cohésion  $C'm=18-90$  kPa, un modèle dans lequel la cohésion est  $C'=13-52$  kPa et de prendre en compte dans le calcul une pression effective qui s'exprime :

$$p' = p + S_r s \quad (4.8)$$

Un champ de succion a donc été introduit dans Ellipsis comme une variable portée par les points matériels. Dans la routine de calcul Plasol, qui renvoie des déformations plastiques locales, la pression est remplacée par la pression effective de l'équation 4.8, en considérant la relation degré de saturation/succion à l'équation 4.7. Ce calcul est inséré dans l'algorithme entre les étapes 2 et 3 (voir figure 2.2).

Nous avons tout d'abord considéré un modèle (le même que précédemment) avec  $C'=13-52$  kPa et un champ de succion constant et uniforme égal à 0 kPa. En appliquant la gravité (avec des incréments de  $g$  toujours fins :  $dg=0,03$  m/s<sup>2</sup>) le calcul mène alors à une configuration instable et la transition solide-fluide est atteinte.

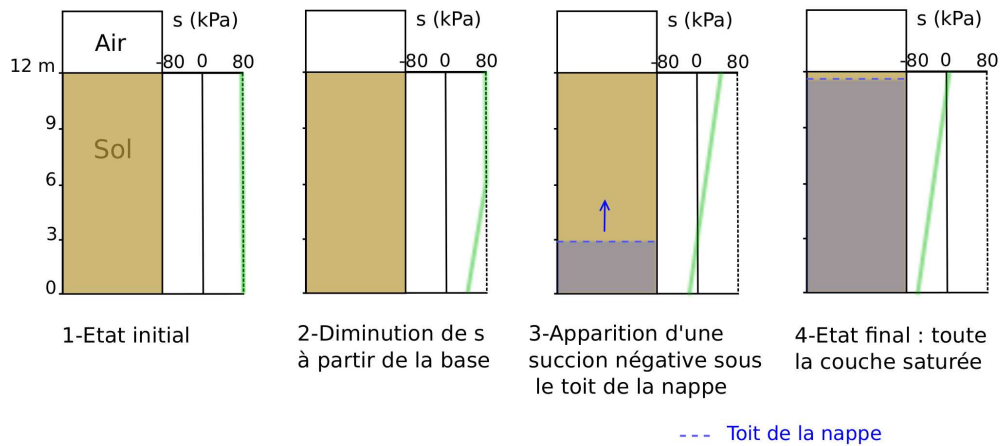
Ce même calcul, réalisé avec un champ constant uniforme de succion égal à 80 kPa, a pour résultat une configuration stable des terrains.

Nous avons donc élaboré le modèle en considérant une configuration initialement stable (succion uniforme de 80 kPa). La gravité est, là encore, augmentée de manière très progressive ( $dg=0,03$  m/s<sup>2</sup>) pendant toute la durée du calcul. Lorsque  $g$  atteint 9,8 m/s<sup>2</sup> (à l'incrément 320), la diminution de  $s$  (correspondant à une saturation progressive) est amorcée, par un gradient artificiellement imposé à partir du bas du modèle, selon un front de propagation de l'imbibition qui se déplace du bas vers le haut. La figure 4.40 illustre ce mécanisme.

Une valeur de 6 kPa/m pour le gradient de  $s$  a été retenue à partir des travaux de Cascini *et al.* (2005) qui présentent des profils de succion dans les couches de pyroclastes, reconstitués à partir de valeurs mesurées *in situ*. La vitesse d'élévation du toit de la nappe est arbitrairement fixée à 50 m/s afin que la diminution de la succion soit suffisamment rapide par rapport à l'augmentation de gravité au-delà de 9,8 m/s<sup>2</sup>.

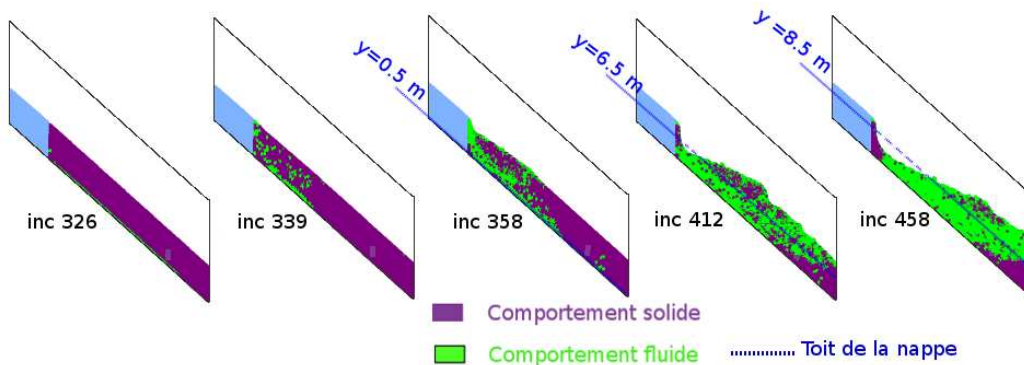
**Résultats et analyse** Les résultats, à différents incréments de calcul, sont présentés à la figure 4.41. Comme le chargement en gravité est très lent, la gravité pendant la phase d'application de l'imbibition n'a que peu augmenté (de 9,8 m/s<sup>2</sup> au début de l'imbibition à 11,3 m/s<sup>2</sup> en fin de calcul).

FIGURE 4.40: Mécanisme de diminution progressive de la succion dans les cendres



Les zones de transition observées ont tout d'abord un aspect localisé (incrément 358). Cependant, elles se développent par la suite en faisant apparaître une répartition plus diffuse (incréments 412, 458) qui n'avait pas été observée dans les 2 cas précédents. Le phénomène de liquéfaction n'a sans doute pas été reproduit (du fait de l'impossibilité de décrire la condition de non-drainage pour ce modèle sans vraie phase hydraulique). Ce développement diffus peut s'expliquer du fait qu'une telle diminution de  $s$  représente un chargement très rapide et très important (pour un toit de la nappe au niveau de la surface du sol, la cohésion modifiée du critère limite de plasticité est proche de 0 en base du modèle) et ce, sur toute la hauteur du modèle.

FIGURE 4.41: Résultats après amorçage par diminution de la succion



#### 4.4.3 Étude de la propagation et de l'arrêt de la coulée contre un ouvrage

Intéressons nous maintenant à la propagation de la coulée le long de la pente et à son arrêt. La coulée de Palma s'étant développée à proximité d'une zone urbanisée (quelques bâtiments sont d'ailleurs visibles en figure 4.28), il semble particulièrement intéressant d'étudier l'arrêt de la coulée contre un ouvrage de protection. En effet, un des enjeux de l'étude des coulées gravitaires est de pouvoir mieux dimensionner les ouvrages de protection ou de déviation pour sécuriser les zones sensibles (zones urbanisées tout particulièrement). Pour un tel dimensionnement il est nécessaire de connaître, d'une part, le volume de matériau écoulé (pour

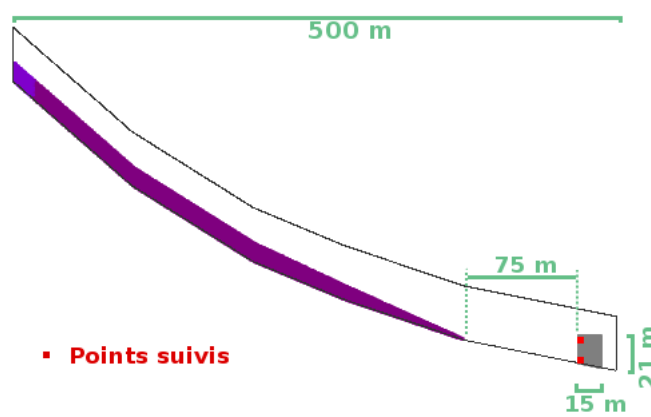
que les ouvrages soient de taille suffisante) et, d'autre part, les forces appliquées sur l'ouvrage (pour que ceux-ci soient suffisamment résistants).

Nous ne considérons dans cette dernière partie que les résultats d'un calcul, mais une analyse plus approfondie du dimensionnement pourrait être menée, comme à la partie 4.3.

### Présentation du modèle

Nous avons choisi de modéliser la géométrie présentée en figure 4.42, avec un ouvrage de 15 m de large pour 21 m de haut (sur la partie aval). Le maillage est constitué de 32 éléments dans la direction verticale (environ 11 éléments discrétisent la hauteur de la couche) et 160 dans la direction horizontale.

FIGURE 4.42: Géométrie du modèle avec ouvrage de protection



Le comportement de l'ouvrage est choisi élastique avec un module de Young de 50 MPa et un coefficient de Poisson, égal à celui des pyroclastes, de 0,29. La raideur de ce nouveau matériau entraîne une viscosité effective qui devient la plus importante de la matrice de viscosité globale : celle-ci vaut  $1,93 \cdot 10^5$  Pa.s. Comme le rapport entre les viscosités effectives maximale et minimale du modèle ne peut excéder  $10^4$ , la viscosité de l'air doit être augmentée par rapport aux modèles d'amorçage. Nous avons dû augmenter cette viscosité jusqu'à 40 Pa.s pour permettre une bonne convergence du modèle. Cette valeur n'est que 4 fois plus faible que la viscosité du sol en écoulement, et a donc probablement un effet non négligeable sur l'écoulement des terrains (nous touchons là aux limites du modèle à surface libre avec Ellipsis). Les autres paramètres sont identiques aux modèles précédents, et une cohésion faible  $C'_m = 2-10$  kPa est choisie afin de prendre en compte une condition de succion peu élevée. Le chargement consiste en une augmentation de la gravité jusqu'à  $9,8$  m/s<sup>2</sup>.

### Résultats

Les résultats, en terme de configuration et de zonage solide/fluide, sont présentés à la figure 4.45. De plus, le suivi du déplacement horizontal  $U$  et du second invariant de contrainte  $J_{2\sigma}$ , respectivement en tête et en pied de l'ouvrage, est présenté dans les graphes a et b de la figure 4.44 (par souci de clarté, les valeurs n'ont pas été présentées pour tous les incréments). Rappelons que ces deux variables ont un fort intérêt pour le dimensionnement des ouvrages.

Amorçage.

Tout d'abord, l'amorçage et le développement de zones fluidifiées sont relativement similaires au cas du modèle d'amorçage en gravité (au paragraphe 4.4.2), avec une première transition



apparaissant en base de la couche de sol (incrément 86) et le développement d'une bande de sols en transition, toujours en fond de couche, pour les pentes les plus raides (incrément 109).

Écoulement.

Les matériaux se déplacent par la suite le long de la pente. Il faut noter que le passage des points matériels d'un tronçon de pente à l'autre semble perturber légèrement le comportement de la coulée (ce qui est visible notamment aux incréments 389, 930 et 999, entre le premier et le second tronçon de pente). En effet, le maillage est tel que les éléments sont orientés selon la pente de la portion de modèle où ils se trouvent (le modèle est linéaire par morceau) et que la limite verticale entre 2 tronçons de pente correspond également à la limite entre deux colonnes d'éléments.

Un point matériel passant d'un tronçon à l'autre peut donc se rapprocher soudainement de la condition d'encastrement (voir schéma de la figure 4.43), ce qui a pour effet de bloquer son déplacement. Si la couche est très fine, elle peut alors être quasiment interrompue comme pour l'incrément 389 (au-delà du premier tronçon de pente). Nous supposons que cet effet explique également les perturbations visibles aux incréments 930 et 999, pour cette même zone.

FIGURE 4.43: Influence du changement d'orientation du maillage sur la cinétique une particule  $P$

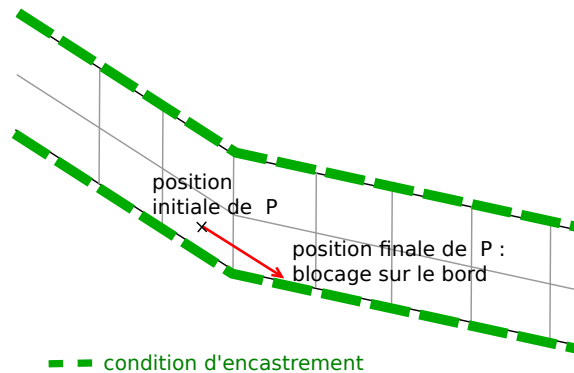
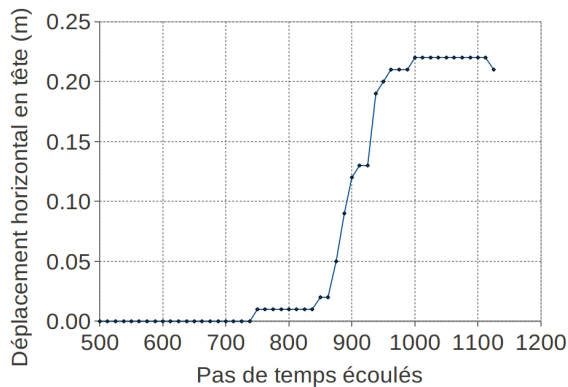
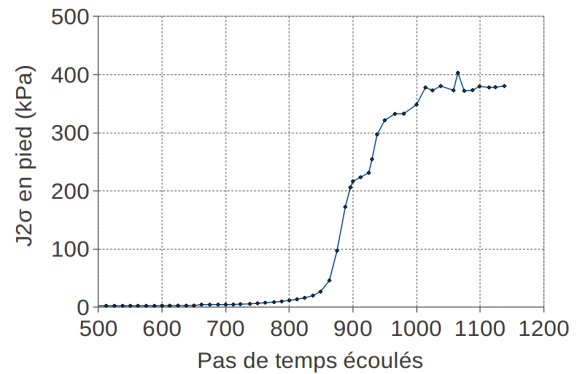


FIGURE 4.44: Suivi des déplacements horizontaux en tête de l'ouvrage (a) et du second invariant de contrainte en pied (b)



a.



b.

Entrée en contact avec l'ouvrage.

Nous remarquons que le contact entre le mur et la coulée a lieu à l'incrément 860, à partir duquel  $J_{2\sigma}$  et  $U$  augmentent fortement. Cependant, il peut être observé, avant ce contact, une légère augmentation de  $J_{2\sigma}$  et  $U$  dès les incréments 700-750 qui s'explique par le fait que les paramètres visqueux de l'air ne sont pas tout à fait négligeables dans ce modèle. D'après cet effet faible, nous pouvons cependant conclure que l'influence de l'air reste très limitée sur la réponse du mur.

Le déplacement en tête de l'ouvrage atteint environ 22 cm et  $J_{2\sigma}$  en pied se stabilise autour de 380 kPa. Les valeurs  $J_{2\sigma}$  sont donc environ 20 à 30 fois supérieures aux valeurs obtenues au paragraphe 4.3.3 pour la coulée de dimension réduite sur l'obstacle, ce qui est justifié au vu des dimensions de la coulée et de l'ouvrage de ce modèle, qui sont entre 20 et 40 fois supérieures à celle du modèle réduit.

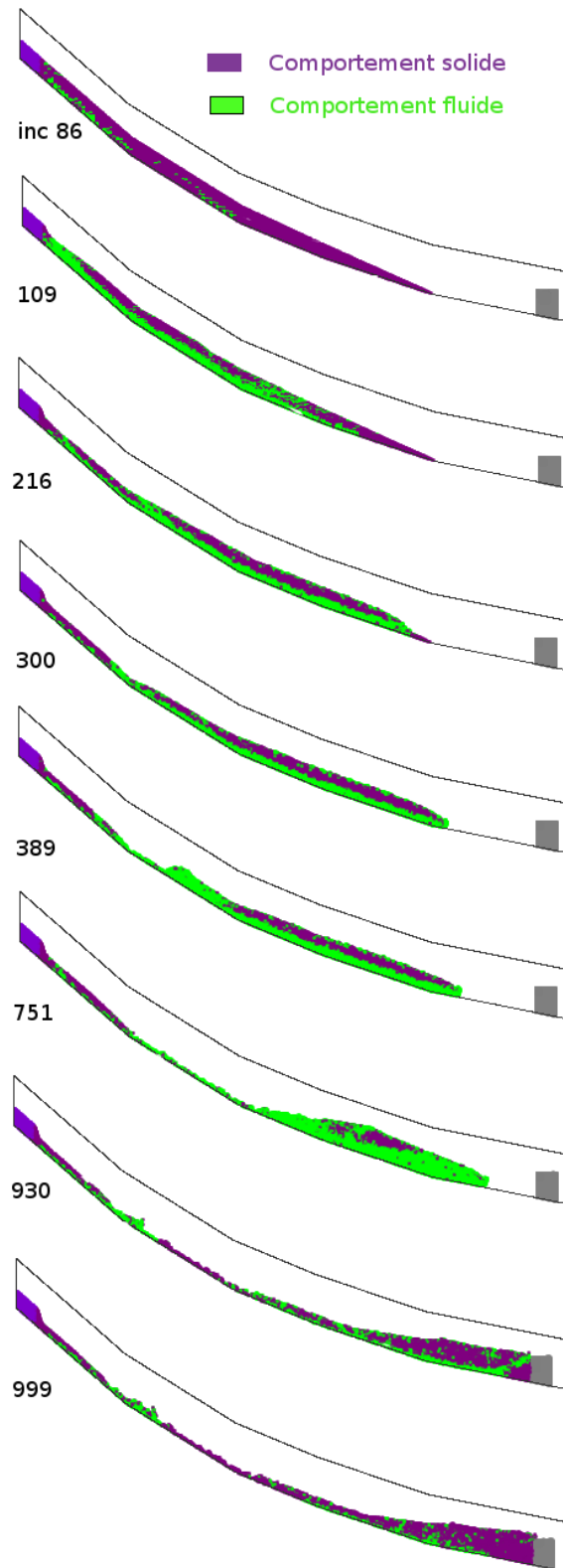
Le déplacement en tête peut, par contre, difficilement être comparé avec les valeurs pour le modèle réduit, du fait -pour ce dernier- de la grande variabilité des réponses selon les paramètres.

Pour les deux valeurs, nous supposons que la prise en compte de l'inertie mènerait à un pic au moment de l'impact et à une valeur résiduelle plus faible après stabilisation, comme pour l'évolution de la force résultante présentée pour le modèle de Preisig et Zimmermann (2010) à la figure 4.25. Cependant, rappelons que, d'après les travaux de Chanut *et al.* (2010), la force résultante finale d'une coulée sur un obstacle ne dépend pas des effets dynamiques.

Immobilisation finale.

Enfin, l'immobilisation des terrains par un retour sous le seuil de Bingham est visible aux incréments 930 et 999. Les dernières zones dont le second invariant de contrainte repasse sous le seuil (visibles à l'incrément 930), forment une bande, reliant le sommet de l'ouvrage et la base du modèle, correspondant très vraisemblablement à une zone de cisaillement important due au contact avec l'ouvrage. Comme nous l'avons vu au paragraphe 4.3.3, cette bande de cisaillement délimite une zone dite "zone morte", dont le volume est déterminant dans la force résultante appliquée sur l'ouvrage.

FIGURE 4.45: Résultats obtenus pour le modèle global



\*  
\* \*

En définitive, le principal point à retenir de ces résultats est que le modèle de transition solide-fluide implanté dans Ellipsis a effectivement permis, même si beaucoup d'ingrédients manquent encore au code (couplage hydro-mécanique, prise en compte des forces d'inertie), de décrire successivement, et dans un même modèle, les phénomènes d'amorçage élasto-plastique et de rupture, de propagation visqueuse et d'arrêt d'une coulée de boue. Notre objectif initial est donc atteint.

Ces 3 trois phases ont été obtenues tout d'abord sur le modèle de dimensions réduites de la partie 4.3. Avec ce modèle nous avons pu mener une première étude paramétrique, sommaire, vis-à-vis des résultats sur l'obstacle, et notamment des contraintes en pied et du déplacement en tête qui sont déterminant pour le dimensionnement des ouvrages de protection. Nous avons aussi mis en évidence la hauteur minimum de l'obstacle pour contenir la coulée (0,3 m).

Puis, dans un cas de figure réel, le calcul avec le modèle de transition a permis d'obtenir des ordres de grandeur concernant la coulée : cohésions limites entraînant la rupture, vitesses de propagation, hauteur de couche en transition. Les différents types d'amorçage ont donné lieu à un développement spécifique des zones de transition solide-fluide dans le modèle. Notons que, si un raffinement suffisamment fin du maillage était possible (en terme de temps de calcul) pour une coulée d'environ 3 m d'épaisseur sur une longueur de 600 m (ce qui -rappelons le- ressemble sans doute plus à la configuration réelle que notre modèle de 9 m en écoulement), nous aurions probablement eu des résultats plus proches de la réalité : vitesse plus réduites, seuil de viscosité plus faible. En effet, le calcul de la pente globale a déjà nécessité 4 jours et un raffinement supplémentaire entraînerait un calcul encore plus lourd, et peu réalisable.

Enfin, nous avons souligné que les différences de vitesses par rapport aux vitesses réelles, pouvaient aussi s'expliquer par la non-prise en compte de l'inertie dans Ellipsis.

# Conclusion et perspectives

Le résultat de cette thèse est avant tout d'avoir réussi, grâce au modèle visco-élasto-plastique à transition que nous avons élaboré et à la méthode numérique innovante MEFPIIL, à décrire des matériaux complexes, de comportement alternativement solide ou fluide.

Avant d'envisager les perspectives, larges, qu'offre ce modèle de transition, revenons sur les résultats principaux de ces travaux.

## Synthèse générale

Dans le premier chapitre, présentant les bases mécaniques et numériques pour la modélisation des géomatériaux, nous avons souligné le fort potentiel du critère du travail du second ordre pour détecter des modes de rupture variés (rupture localisée ou diffuse).

De plus, au vu de la grande diversité du comportement des géomatériaux, nous avons mis en évidence que la méthode numérique MEFPIIL était une très bonne candidate pour modéliser ces comportements de type alternativement solide ou fluide, grâce à son principe de dissociation entre le maillage et la matière. En effet, elle permet tout d'abord de décrire les grandes transformations (indissociables du comportement fluide) et de suivre des variables d'histoire (ce qui est indispensable pour décrire un comportement solide). Par conséquent, avec cette méthode il est possible de modéliser ces deux types de comportement dans un même modèle, et ce dernier point est primordial pour étudier le devenir d'une coulée gravitaire (destruction de bâtiment, arrêt sur un ouvrage,...).

L'objectif du Chapitre 2 était d'introduire dans le code de calcul Ellipsis (basé sur la MEFPIIL), la prise en compte de la plasticité dans le cadre du modèle élasto-plastique Plasol.

Tout d'abord, rappelons qu'une prise en compte explicite des déformations plastiques a été choisie au niveau de la résolution, et que cette implantation a été validée pour deux essais matériau. Il est néanmoins très important de souligner que cette résolution est valable à condition que les vitesses de déformation plastiques évoluent peu entre chaque incrément, et cette hypothèse conditionne donc la vitesse d'application du chargement.

Par ailleurs, nous avons été confrontés -pour certains modèles- aux problèmes numériques dus à l'interdépendance entre la plasticité et la discrétisation élémentaire. Parmi les quelques solutions que nous avons apportées pour améliorer les résultats, la principale consiste à réduire d'un ordre l'expression des dérivées des fonctions de forme, afin qu'elles soient constantes et non plus linéaires par élément. Cette modification permet de pallier le problème de champs de pressions élémentaires inversés dans certains cas de figure, comme pour les modèles élasto-plastiques sous poids propre. Ce choix est fort, puisque les taux de déformation deviennent constants par élément, mais indispensable à la meilleure précision des résultats en élasto-plasticité, ce qui a été montré sur un essai simple (voir partie 2.2.2).

Le Chapitre 3 nous a permis de présenter le modèle global de transition solide-fluide que

nous avons élaboré. Les transitions, dans ce modèle, peuvent être naturellement déterminées par la rupture d'une part (pour un état initial solide du géomatériau), et le rétablissement des contacts granulaires sous faible sollicitation d'autre part (pour un état initial fluide). Les critères de transition ont donc été définis, au niveau du point matériel, comme le changement de signe du travail du second ordre local normalisé ( $d^2W_n < 0$ ), et le seuil de contrainte  $s_o$  de la loi visqueuse (schéma rhéologique 1D présenté à la figure 3.1). La loi a été validée sur des cas homogènes, en considérant la loi élasto-plastique Plasol et la loi visqueuse de Bingham. Un résultat important de ce chapitre est que, pour un modèle élasto-plastique à surface libre chargé extrêmement, la rupture n'est pas décelable par une non-convergence de Ellipsis, du fait de la mobilisation du matériau environnant de remplissage du modèle (de paramètres négligeables), mais que les résultats post-rupture ne sont pas objectifs (ils dépendent de la viscosité de ce matériau). L'introduction du critère de rupture du travail du second ordre et de la viscosité, qui est proposée dans notre modèle de transition, est donc absolument nécessaire pour décrire le comportement post-rupture et régulariser la solution à ce stade.

Le quatrième, et dernier, chapitre de cette thèse a permis de montrer les potentialités du modèle de transition solide-fluide, avec son application à des modèles de coulées de boue.

Notamment, le modèle de transition a permis, sur un unique modèle (de dimensions réduites), de déterminer les paramètres plastiques limites qui entraînent la rupture (et la transition), de décrire l'écoulement généré (en terme de vitesse et de configuration), d'étudier l'influence de plusieurs paramètres sur l'arrêt contre un obstacle, et notamment sur les grandeurs utiles au dimensionnement (déplacement en tête et contraintes en pied).

Enfin, nous avons mis en évidence les fortes perspectives du modèle de transition, pour une configuration réelle comme celle des pentes environnant Sarno et Quindici.

Dans ce modèle, nous avons cependant atteint quelques limites dans notre approche : viscosité de l'air qui n'est plus négligeable, amorçage par une imbibition 'artificielle', non-prise en compte de l'inertie pour des vitesses obtenues élevées... Exposons à présent quelques pistes de développement concernant ces verrous à la modélisation.

## Perspectives

Avant d'aller vers des applications plus complexes avec ce modèle de transition et la MEFPIL, différents points seraient, d'après nous, encore à améliorer dans le code Ellipsis :

### Détermination de la surface libre des matériaux avec la méthode des "level-set"

Tout d'abord, la représentation du matériau 'air' dont les modules mécaniques doivent être à la fois très faibles (pour ne pas influencer les résultats) mais pas trop (pour permettre la convergence) pose clairement problème. De plus, pour les éléments hétérogènes (=constitués de particules de plusieurs natures), nous avons vu que la réponse cinématique pouvait mener à des résultats incohérents : des particules peuvent ainsi être sur-plastifiées et atteindre prématurément la rupture. Il semble par ailleurs que le traitement que nous avons introduit de ces éléments hétérogènes n'apporte pas toujours une amélioration (les particules dont le poids est annulé peuvent être "piégées" dans le matériau voisin en cas de grandes transformations). Nous estimons donc qu'une amélioration radicale devrait plutôt être apportée pour prendre en compte plus rigoureusement les surfaces libres des matériaux.

Dans le contexte de la fissuration de solide, ce problème de prise en compte de la modification de la surface d'un corps a déjà été soulevé. La solution qui a été apportée est la prise en compte d'une fonction level-set dans l'interpolation des variables cinématiques. La méthode

numérique X-FEM repose par exemple sur ce principe (Sukumar *et al.*, 2001; Moës et Belytschko, 2002). La fonction level-set, qui n'est autre qu'une fonction de l'espace qui change de signe au passage d'une surface donnée et s'annule sur cette surface, est utilisée pour définir -de manière évolutive- l'interface d'intérêt (fissure, limite d'une inclusion...). Comme elle sert en même temps à modifier l'interpolation, les résultats cinématiques dépendent donc -de manière précise- de l'interface, même si celle-ci traverse les éléments.

Il pourrait donc être introduit une telle solution dans Ellipsis afin, par exemple de ne pas considérer l'influence de l'air sur les éléments hétérogènes, voire de ne pas considérer du tout cette influence de l'air (au-dessus d'une certaine surface) dans le calcul global.

### Couplage hydro-mécanique

La prise en compte d'un couplage hydromécanique est aussi une perspective primordiale puisqu'elle permettrait de modéliser, de manière plus réaliste, l'amorçage des mouvements de terrain, qui comme on l'a vu -et surtout dans le cas des coulées de boue- s'explique souvent par une condition hydrique.

Dans cet objectif, il serait nécessaire d'introduire dans le code de nouvelles variables nodales de résolution, dont le choix reste à déterminer (plusieurs possibilités sont envisageables). Concernant le comportement matériel, nous avons souligné au paragraphe 4.4.2, qu'il était plus judicieux de considérer les variables de phases pour décrire ce couplage, c'est à dire d'une part les contraintes inter-granulaires (ou contraintes effectives), d'autre part la pression interstitielle de l'eau (qui peut, si l'influence de la phase air est négligée être considérée comme l'opposée de la succion). Pour décrire, dans une résolution de type éléments finis (comme pour la MEFPIIL), un couplage fort au travers d'une matrice de rigidité globale prenant en compte les 2 phases, Sheng *et al.* (2004) justifient le choix de la succion  $s$  et du degré de saturation  $S_r$  comme variables conjuguées, respectivement, aux contraintes  $\sigma'$  et aux déformations  $\varepsilon$  du squelette solide. Ce choix pourrait être fait.

Il pourrait aussi être envisagé, dans un premier temps, de considérer simplement une solution de chaînage dans laquelle les problèmes hydriques et mécaniques seraient résolus indépendamment (avec d'une part la résolution de l'équation d'équilibre statique et d'autre part la résolution de l'équation d'incompressibilité), mais où leur influence mutuelle serait prise en compte explicitement au cours d'itérations successives jusqu'à converger vers une solution globale.

### Introduction de l'inertie

Enfin, nous avons souligné que la prise en compte des effets d'inertie était susceptible de modifier de manière importante les vitesses obtenues, et particulièrement pendant les phases d'amorçage et d'arrêt des coulées. Dans l'optique de mieux décrire ces coulées gravitaires -de vitesses élevées-, il serait donc nécessaire de prendre en compte ces effets d'inertie dans le code. Ceux-ci peuvent être considérés, dans la résolution, comme une force nodale supplémentaire.

Concernant le modèle de transition en lui-même, nous voyons à ce jour deux pistes principales de développement :

### Comparaison avec des essais expérimentaux

Tout d'abord, il serait, à ce stade, nécessaire de comparer nos résultats numériques avec des modèles expérimentaux, par exemple des mouvements de terrain à échelle réduite. Il pourrait être envisagé, par exemple, de reproduire en laboratoire un talus artificiel -de dimensions

réduites- mené à la rupture par imbibition, comme dans le cas des travaux de Orense *et al.* (2006) ou de Uchimura *et al.* (2010). Il pourrait même être considéré un écoulement, déclenché par une pluie artificielle, sur une pente naturelle, comme dans les travaux de Ochiai *et al.* (2004).

D'après les travaux expérimentaux de ce type présentés dans la littérature, il semble que l'amorçage par imbibition soit le plus simple à réaliser concrètement. D'autre part cet amorçage mènerait de manière plus certaine à un écoulement, ce qui serait plus intéressant vis-à-vis de la validation de notre modèle de transition solide-fluide. Cela nécessiterait par contre d'avoir au préalable pris en compte un couplage hydro-mécanique.

### Évolution des paramètres à la transition

Enfin, une piste de réflexion concerne les seuils de transition que nous avons considérés dans le modèle global solide/fluide. Il nous semble important de mettre l'accent sur la dépendance du comportement des géomatériaux à l'histoire matérielle, aussi bien lorsqu'ils sont sous forme solide, avec l'érouissage en élasto-plasticité, que sous forme de suspension concentrée, où le réseau de contacts inter-granulaires se structure ou se déstructure (Coussot *et al.* (2002a) prennent en compte ce dernier phénomène avec une loi de comportement où le seuil de viscosité est une variable d'histoire).

Il semblerait particulièrement intéressant, de concevoir un modèle de comportement à transition solide/fluide qui ne prendrait en compte qu'un unique seuil de transition, évolutif et dépendant de l'histoire du matériau. Celui-ci correspondrait, en élasto-plasticité, à la surface de charge qui s'érouit et, en viscosité, au seuil de contrainte qui évolue. Il s'accroîtrait donc pendant l'érouissage, pourrait être dégradé à la rupture jusqu'à atteindre une valeur permettant l'écoulement, et reconstitué dans la phase fluide, après une période de repos suffisamment longue.

En suivant cette idée, sans doute difficile à mettre en place concrètement (elle nécessiterait de connaître la loi d'évolution du seuil de viscosité), nous proposons tout d'abord de dégrader les paramètres élasto-plastiques à partir de la rupture.

En définitive, le modèle de comportement que nous avons élaboré, allié à une méthode numérique flexible (comme la MEFPIIL), offre de grandes perspectives dans tous les domaines où un comportement solide/fluide à transition est observé : suspensions granulaires (béton, cosmétiques, produits alimentaires,...), émulsions, gels, etc... Tout particulièrement, nous avons mis en évidence le fort potentiel du modèle vis-à-vis de la description de mouvements de terrain dans leur ensemble. Par ailleurs, d'autres mouvements gravitaires pourraient être modélisés avec ce modèle, comme les avalanches.



# Annexe : Conservation de la masse

## Actualisation de la masse volumique

Dans la MEFPIL, comme dans tout code aux éléments finis en formulation Lagrangienne réactualisée, la masse élémentaire est définie par l'intégration -à partir des points matériels- de la masse volumique sur le volume de l'élément.

D'autre part, avec Ellipsis, le volume global occupé par un matériau peut évoluer de deux manières différentes. Tout d'abord, la taille des éléments varie dans le cas particulier d'une condition aux limites en vitesse normale (voir figure 1.27a). De plus, dans le cas général où le maillage est fixe, si plusieurs matériaux sont modélisés dans un même modèle alors leur répartition volumique est susceptible d'évoluer au cours du calcul, en fonction de la sollicitation et de la compressibilité de chaque matériau (voir équation de compressibilité en 1.62). Le nombre d'éléments occupés par un matériau donné peut ainsi changer (la dissociation de la matière et du maillage est, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4.3, la spécificité de la MEFPIL).

Dans ces deux cas, la variation de volume au niveau d'un matériau entraîne une non-conservation de la masse si la masse volumique de ce matériau est constante (et non nulle). Nous proposons, pour corriger cette erreur qui s'accumule avec le niveau de déformation volumique, de définir une actualisation de la masse volumique au niveau des points matériels. Ainsi nous recalculons la masse volumique  $\rho$  au début d'un pas de temps  $t + \Delta t$  de la manière suivante :

$$\rho^{t+\Delta t} = \frac{\rho^t}{1 - \dot{\epsilon}_v^t \Delta t}, \quad (4.9)$$

avec  $\dot{\epsilon}_v$  le taux de déformation volumique calculé à partir du champ de vitesse obtenu au pas de temps  $t$ , et  $\Delta t$  le pas de temps d'advection.  $\dot{\epsilon}_v$  respecte la convention de la mécanique des sols : elle est positive s'il y a compression.

Ce calcul est mené pour toutes les particules pesantes.

## Validation

### Modèle

Nous avons modélisé un échantillon visqueux compressible, confiné latéralement, et soumis à son poids propre. La hauteur du matériau pesant est initialement de 1 m, pour une couche d'1 m d'air sus-jacent (voir figure 4.46).

Les paramètres du modèle (viscosité et module de compressibilité volumique visqueux) sont présentés au tableau 4.7. Les paramètres de l'air étant négligeables devant ceux du matériau pesant, celui-ci peut être considéré à surface libre.

La gravité, appliquée totalement dès le premier incrément, est de  $9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

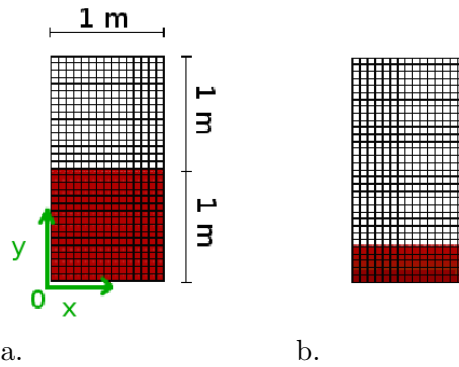
FIGURE 4.46: Modèle de matériau pesant compressible (a) et configuration à  $t=0.29$  s (b)

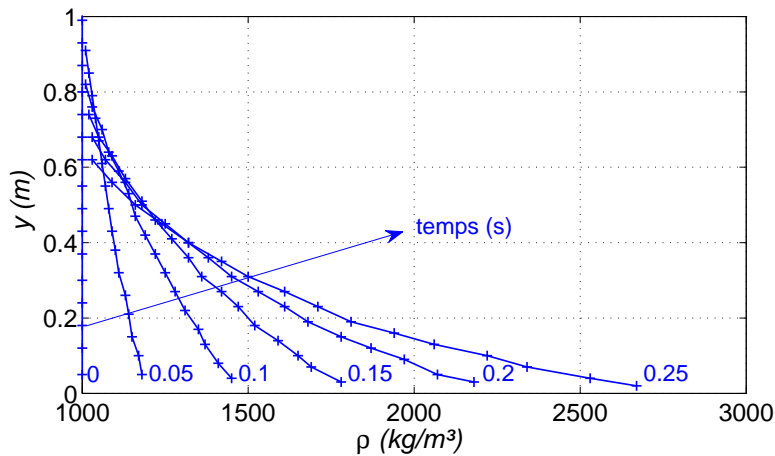
TABLE 4.7: Paramètres de l'échantillon compressible

Air		Matériau d'étude		
$\eta_0$ (Pa.s)	$(K_v)_0$ (Pa.s)	$\eta_1$ (Pa.s)	$(K_v)_1$ (Pa.s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
1	1	1000	1000	1000

## Résultats et analyse

Comme attendu, le matériau se déforme et occupe de moins en moins d'éléments (voir figure 4.46b).

Tout d'abord, nous avons extrait l'évolution, au cours du calcul, du profil vertical de masse volumique. Cette évolution est présentée à la figure 4.47.

FIGURE 4.47: Évolution au cours du calcul du profil vertical de  $\rho$  (valeurs aux points d'intégration)

La masse volumique reste égale à  $1000 \text{ kg/m}^3$  au sommet de l'échantillon, et augmente en profondeur selon un gradient qui s'accroît au cours du temps. Ceci est cohérent d'une part avec la déformation volumique d'un échantillon sous poids propre qui est plus élevée en base qu'au sommet. D'autre part, la compressibilité volumique est visqueuse, ce qui implique que pour une même contrainte, les déformations augmentent de manière linéaire au cours du temps.

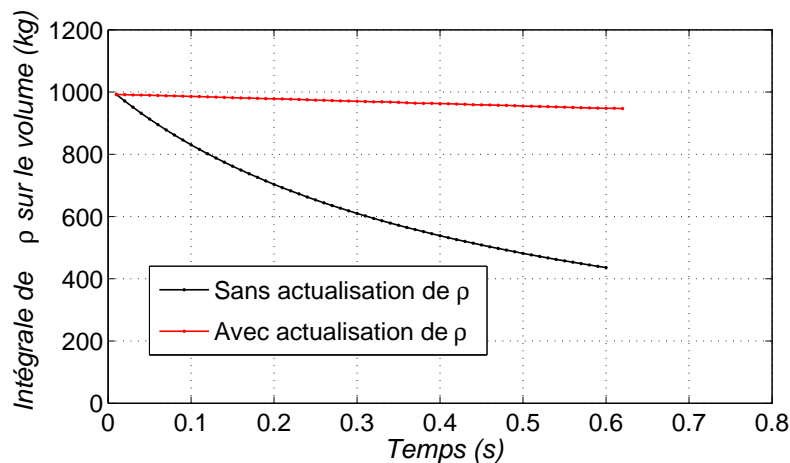
Nous remarquons que l'augmentation de masse volumique en profondeur n'est pas linéaire, ce qui est cohérent la relation de type hyperbolique entre  $\rho$  et  $\dot{\epsilon}_v$  (équation 4.9).

Par exemple au premier pas de temps, où le profil de déformation est linéaire sur la profondeur, le profil de  $\rho$  sera non-linéaire (de type hyperbolique). Sur les pas de temps suivants, l'augmentation de masse volumique en base entraîne une répartition des contraintes non linéaires, qui entraîne à son tour une augmentation des déformations non linéaires, qui accentue la non-linéarité du profil de  $\rho$  par la relation 4.9... Cet effet s'accroît au cours du calcul, car la déformation intervenant dans l'équation 4.9 est l'intégrale des taux de déformations à chaque pas de temps. De ce fait les profils de  $\rho$  sur la verticale sont de moins en moins linéaires, comme observé à la figure 4.47.

Pour vérifier la conservation de la masse, nous avons intégré, à chaque pas de calcul, le profil de masse volumique sur la hauteur (cette intégrale correspond donc à la masse totale du matériau pesant puisque la largeur est de 1 m ici, et qu'un mètre linéaire peut être considéré comme dimension hors-plan).

L'évolution de cette quantité est présentée à la figure 4.48, et comparé avec l'évolution de la même intégrale lorsque la masse volumique n'est pas corrigée.

FIGURE 4.48: Évolution de l'intégrale de  $\rho$  sur la hauteur selon que  $\rho$  est actualisée ou non



Sur la courbe obtenue pour une densité non corrigée, nous observons que l'intégrale de  $\rho$  diminue de moins en moins vite. Or,  $\rho$  étant constant pour ce calcul, cette quantité est liée uniquement à la hauteur de l'échantillon, donc à la déformation globale. Bien que les déformations visqueuses sont, par définition, linéaires au cours du temps pour un même état de contrainte appliqué, ici, avec la perte de masse, la contrainte appliquée diminue au cours du calcul, ce qui justifie la diminution de moins en moins rapide des déformations et donc de l'intégrale de  $\rho$ .

Sur la courbe obtenue avec la correction, nous obtenons que l'intégrale de  $\rho$  est beaucoup mieux conservée, et presque constante au cours du temps. Une légère diminution peut être observée, qui peut s'expliquer par l'accumulation d'une faible imprécision dans l'approximation des déformations par les fonctions de formes des éléments.

La conservation de la masse dans le modèle par l'actualisation de la masse volumique au niveau particulaire est donc validée.



# Bibliographie

- Abaqus (2011). *Theory Manual*. Simulia.
- E. Alonso, A. Gens, et A. Josa (1990). A constitutive model for partially saturated soils. *Géotechnique*, 40 : 405–430.
- C. Ancey et P. Coussot (1999). Transition frictionnelle/visqueuse pour une suspension granulaire. *Solides, fluides : propriétés mécaniques et thermiques*, 327(II,b) : 515–522.
- I. Babuška et M. Suri (1992). On locking and robustness in the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pp. 1261–1293.
- N. Balmforth et R. Craster (1999). A consistent thin layer theory for Bingham plastics. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 841 : 65–81.
- S. Bardenhagen, J. Brackbill, et D. Sulsky (2000). The material-point method for granular materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 187(3) : 529–541.
- J. Barnichon (1998). *Finite Element Modeling in Structural and Petroleum Geology*. Ph.D. thesis, Université de Liège.
- J. Bell (1966). Dimensionless parameters for homogeneous earth. *Journal of Soil Mechanics Foundations*, 92(ASCE Proceeding).
- A. Bishop et G. Blight (1963). Some aspects of the effective stress in saturated and unsaturated soils. *Géotechnique*, 13(3) : 177–197.
- F. D. Blasio, A. Elverhoi, D. Issler, C. Harbitz, P. Bryn, et R. Lien (2004). Flow models of natural debris flows originating from overconsolidated clay materials. *Marine Geology*, 213 : 439–455.
- T. Bois, S. Bouissou, et Y. Guglielmi (2008). Influence of major inherited faults zones on gravitational slope deformation : A two-dimensional physical modelling of the La Clapière area (Southern French Alps). *Earth and Planetary Science Letters*, 272 : 709–719.
- H. Bui, K. Sako, et R. Fukagawa (2007). Numerical simulation of soil–water interaction using smoothed particle hydrodynamics (SPH) method. *Journal of Terramechanics*, 44 : 339–346.
- D. Calcaterra, R. de Riso, A. Evangelista, M. Nicoterra, A. Santo, et A. ScottoDiSantolo (2003). Slope instabilities in the pyroclastic deposits of the Phlegraean district and the carbonate Apennine (Campania, Italy). In *Int Workshop on occurrence and Mechanism of Flows in Natural Slope and Earthfills Iw-Flows2003*.
- L. Cascini, S. Cuomo, M. Pastor, et G. Sorbino (2010a). Modeling of Rainfall-Induced Shallow Landslides of the Flow-Type. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 136 : 85.

- L. Cascini, S. Cuomo, et G. Sorbino (2005). Flow-like mass movements in pyroclastic soils : remarks on the modelling of triggering mechanisms. *Rivista Italiana di Geotecnica*, 4 : 11–31.
- L. Cascini, G. Fornaro, et D. Peduto (2010b). Advanced low-and full-resolution DInSAR map generation for slow-moving landslide analysis at different scales. *Engineering Geology*, 112(1-4) : 29–42.
- G. Chambon, A. Ghemmour, et D. Laigle (2009). Gravity-driven surges of a viscoplastic fluid : An experimental study. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 158 : 54–62.
- B. Chanut, T. Faug, et M. Naaim (2010). Time-varying force from dense granular avalanches on a wall. *Physical Review E*, 82(4) : 041302.
- R. Charlier, J. Radu, et S. Cescotto (1997). The effects of hydro dynamical coupling on the numerical modelling of strain localization. In *COMPLAS 5, Barcelona*.
- P. Cleary et J. Monaghan (1999). Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 148 : 227—264.
- P. Coussot (1993). *Rhéologie des boues et laves torrentielles. Etude de dispersions et suspensions concentrées*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, édité dans la série Montagne des éditions Irstea, N° 5.
- P. Coussot et C. Ancey (1999). *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. L'Editeur : EDP Sciences.
- P. Coussot et M. Meunier (1996). Recognition, classification and mechanical description of debris flows. *Earth Science Reviews*, 40 : 209–227.
- P. Coussot, Q. Nguyen, H. Huynh, et D. Bonn (2002a). Avalanche behavior in yield stress fluids. *Physical Review Letters*, 88 : 175501.1–175501.4.
- P. Coussot et J. Piau (1993). Techniques de rhéométrie en cisaillement simple dans le cas de dispersions et suspensions concentrées. *Les Cahiers de Rhéologie*, 12(1) : 1–13.
- P. Coussot et J. Piau (1994). On the behavior of fine mud suspensions. *Rheological Acta*, 33 : 175–184.
- P. Coussot, S. Proust, et C. Ancey (1996). Rheological interpretation of deposits of yield stress fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 66 : 55–70.
- P. Coussot, J. Raynaud, F. Bertrand, P. Moucheron, J. Guilbaud, H. Huynh, S. Jarny, et D. Lesueur (2002b). Coexistence of Liquid and Solid Phases in Flowing Soft-Glassy Materials. *Physical Review Letters*, 88(21) : 218301.
- P. Coussot, N. Roussel, S. Jarny, et H. Chanson (2005). Continuous or catastrophic solid–liquid transition in jammed systems. *Physics of Fluids*, 17 : 011704.
- G. Crosta, S. Imposimato, D. Roddeman, S. Chiesa, et F. Moiad (2005). Small fast-moving flow-like landslides in volcanic deposits : The 2001 Las Colinas Landslide (El Salvador). *Engineering Geology*, 79 : 185–214.
- G. Crosta et P. D. Negro (2003). Observations and modelling of soil slip-debris flow initiation processes in pyroclastic deposits : the Sarno 1998 event.

- Y. Cui et P. Delage (1996). Yielding and plastic behaviour of an unsaturated compacted silt. *Géotechnique*, 46(2) : 291–311.
- P. Cundall et O. Strack (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1) : 47–65.
- S. Cuomo, N. Prime, A. Iannone, F. Dufour, L. Cascini, et F. Darve (2012). Large deformation FEM-LIP drained analysis of a vertical cut (accepté). *Acta Geotechnica ASCE*, 1 : 1.
- A. Daido (1971). On the occurrence of mud-debris flow. *Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ*, 21 : 109–135.
- E. Damiano, L. Olivares, et L. Picarelli (2012). Steep-slope monitoring in unsaturated pyroclastic soils. *Engineering Geology*.
- F. Darve, P. Habib, J. Lanier, E. Flavigny, M. Dayre, P. Stutz, B. Loret, P. Berest, B. Cambou, J. Desrues, et al. (1987). *Manuel de rhéologie des géomatériaux*.
- F. Darve et F. Laouafa (2000). Instabilities in granular material and application to landslides. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 5 : 627–652.
- F. Darve, G. Servant, F. Laouafa, et H. Khoa (2004). Failure in geomaterials : continuous and discrete analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 27-29,193 : 3057–3085.
- R. De Borst et A. Groen (1995). Some observations on element performance in isochoric and dilatant plastic flow. *International journal for numerical methods in engineering*, 38(17) : 2887–2906.
- J. Dent et T. Lang (1983). A biviscous modified bingham model of snow avalanche motion. *Annals of Glaciology*, 4 : 42–46.
- J. Desrues et R. Chambon (2002). Shear band analysis and shear moduli calibration. *International of Solids and Structures*, 39 : 3757–3776.
- D. Drücker et W. Prager (1952). Soils mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly Applied Mathematics*, 10,2 : 157–165.
- M. Duflo (2004). *Application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture*. Ph.D. thesis, université de Liège.
- F. Dufour (2002). *Développements de la méthode des éléments finis avec des points d'intégration Lagrangiens : applications à la géomécanique*. Ph.D. thesis.
- F. Dufour et G. Pijaudier-Cabot (2005). Numerical modelling of concrete flow : homogeneous approach. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 29(4) : 395–416.
- G. Duvaut et J. Lions (1972). Transfert de Chaleur dans un fluide de Bingham dont la viscosité dépend de la température. *Journal of Functional Analysis*, 11 : 93–110.
- L. Esposito et F. Guadagno (1998). Some special geotechnical properties of pumice deposits. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 57 : 41–50.
- T. Faug, R. Beguin, et B. Chanut (2009). Mean steady granular force on a wall overflowed by free-surface gravity-driven dense flows. *Physical Review E*, 80(2) : 021305.

- X. Fei (1981). Bingham Yield Stress of Sediment-water Mixtrue with Hyperconcentration (en chinois). *Journal of sediment research*, 3 : 19–28.
- A. Gens et E. Alonso (1992). Framework for the behaviour of unsaturated expansive clays. *Canadian Geotechnical Journal CGJOAH*, 29(6).
- M. V. Genuchten (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44(5) : 892–898.
- S. Ghorashi, S. Sabbagh-Yazdi, et S. Mohammadi (2010). Element free Galerkin method for crack analysis of orthotropic plates. *Computational Methods in Civil Engineering*, 1(1) : 1–13.
- R. Gingold et J. Monaghan. (1977). Smoothed particles hydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181 : 375–389.
- F. Guadagno, P. Celico, L. Esposito, S. P. Zampelli, V. Piscopo, et G. S. Mugnozza (1999). The debris flows of 5-6 may 1998 in Campania, southern Italy. *Landslides News*, 12 : 5–7.
- F. Guadagno, R. Forte, P. Revellino, F. Fiorillo, et M. Focareta (2005). Some Aspects of the initiation of debris avalanvhes in the Campania Region : the roe of morphological slope discontinuities and the development of failure. *Geomorphology*, 66 : 237–254.
- F. Guadagno, M. Palmieri, V. Siviero, et A. Vallario (1988). La frana di Palma Campania. *Geologia Tecnica*, 4 : 18–29.
- Y. Guglielmi, C. Bertrand, F. Compagnon, J. Follacci, et J. Mudry (2000). Acquisition of water chemistry in a mobile fissured basement massif : its role in the hydrogeological knowledge of the La Clapère landslide (Mercantour massif, southern Alps, France). *Journal of Hydrology*, 229 : 138–148.
- F. Harlow (1964). *The Particle-In-Cell Computing Method for Fluid Dynamics in Fundamental Methods in Hydrodynamics*. B. Lader and S. Fernbach and M. Rotenberg.
- L. Herrmann (1965). Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. *AIAA J*, 3(10) : 1896–1900.
- R. Hill (1950). *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford.
- R. Hill (1958). A general theory of uniqueness and stability in elasto-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6 : 236–249.
- C. Hu et F. de Larrard (1996). The rheology of fresh high-performance concrete. *Cement and Concrete Research*, 26(2) : 283–294.
- N. Huang (2006). *Rhéologie des pâtes granulaires*. Ph.D. thesis, Université Paris 6.
- J. Hubl et H. Steinwendtner (2000). Estimation of Rheological Properties of Viscous Debris Flow Using a Belt Conveyor. *Physics and Chemistry of he Earth*, 25(9) : 751–755.
- A. Huerta et W. Liu (1988). Viscous flow with large free surface motion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 69 : 277–324.
- O. Hungr, S. Evans, M. Bovis, et J. Hutchinson (2001). A review of the classification of landslides in the flow type. *Environmental and Engineering Geoscience*, 7 : 221–228.



- J. Hutchinson (1988). General Report : Morphological and geotechnical parameters of landslides in relation to geology and hydrogeology. In *Proceedings of 5th International Symposium on Landslides, AA Balkema, Rotterdam, Netherlands*. C Bonnard.
- D. Huynh (2005). *Modélisations des glissements de terrain comme un problème de bifurcation*. Ph.D. thesis.
- R. Iverson (2003). *The debris-flow rheology myth, in Debris-flow Hazards Mitigation : Mechanics, Prediction, and Assessment, v. 1, D. Rickenmann and C.L. Chen, eds., Millpress, Rotterdam, 303-314.*
- N. Janbu (1968). Slope Stability Computations,. Tech. rep., Technical University of Norway, Trondheim, Norway.
- J. Jeyapalan, J. Duncan, et H. Seed (1983). Investigation of flow failures of tailing dams. *Journal of Geotechnical Engineering ASCE*, 109 : 172–189.
- A. Johnson (1970). *Physical processes in geology : a method for interpretation of natural phenomena : a intrusions in igneous rocks, fractures, and folds, flow of debris and ice*. San Francisco, Freeman : Cooper.
- P. Jop, Y. Forterre, et O. Pouliquen (2006). A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 44 : 727–730.
- F. Laouafa et F. Darve (2002). Modelling of slope failure by material instability mechanism. *Computers and Geotechnics*, 29 : 301–325.
- L. Libersky, A. Petschek, T. Carney, J. Hipp, et F. Allahdadi (1993). High strain Lagrangian hydrodynamics : a three-dimensional SPH code for dynamic material response. *Journal of Computational Physics*, 109(1) : 67–75.
- B. Loret et N. Khalili (2000). A three-phase model for unsaturated soils. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 24(11) : 893–927.
- A. Lyapunov (1907). Problème général de la stabilité des mouvements. In *Annales de la faculté des sciences de Toulouse, vol.9*, pp. 203–274.
- J. Malet, O. Maquaire, J. Locat, et A. Remaitre (2004). Assessing debris flow hazards associated with slow moving landslides : methodology and numerical analyses. *Landslides*, 1 : 83–90.
- D. Malkus et T. Hughes (1978). Mixed finite element methods—reduced and selective integration techniques : A unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15(1) : 63–81.
- R. Michalowski (1997). Stability of uniformly reinforced slopes. *Journal of Geotechnical and geoenvironmental Engineering*, 123(6) : 546–556.
- N. Moës et T. Belytschko (2002). X-FEM, de nouvelles frontières pour les éléments finis. *Revue Européenne des Eléments*, 11(2-4) : 305–318.
- J. Monaghan (1994). Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110 : 399–406.
- L. Moresi, F. Dufour, et H. Mühlhaus (2003). A Lagrangian integration point finite element method for large deformation modeling of viscoelastic geomaterials. *Journal of Computational Physics*, 184(2) : 476–497.

- L. Moresi et V. Solomatov (1995). Numerical investigation of 2D convection with extremely large viscosity variations. *Physics of Fluids*, 7 : 2154.
- H. Mühlhaus, F. Dufour, L. Moresi, et B. Hobbs (2002). A director theory for visco-elastic folding instabilities in multilayered rock. *International Journal of Solids and Structures*, 39(13) : 3675–3691.
- J. Nagtegaal, D. Parks, et J. Rice (1974). On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4(2) : 153–177.
- F. Nicot, N. Challamel, J. Lerbet, F. Prunier, et F. Darve (2011a). Bifurcation and generalized mixed loading conditions in geomaterials. *International Journal for Numerical and analytical Methods in Geomechanics*, 35,13 : 1409–1431.
- F. Nicot, A. Daouadji, F. Laouafa, et F. Darve (2011b). Second-order work, kinetic energy and diffuse failure in granular materials. *Granular Matter*, 13,1 : 19–28.
- W. Noll (1958). A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archive for rational Mechanics and Analysis*, 2(1) : 197–226.
- M. Nuth et L. Laloui (2008). Advances in modelling hysteretic water retention curve in deformable soils. *Computers and Geotechnics*, 35(6) : 835–844.
- H. Ochiai, Y. Okada, G. Furuya, Y. Okura, T. Matsui, T. Sammori, T. Terajima, et K. Sassa (2004). A fluidized landslide on a natural slope by artificial rainfall. *Landslides*, 1(3) : 211–219.
- L. Olivares (2001). Static liquefaction : an hypothesis for explaining transition from slide to flow in pyroclastic soils. In *Proceedings of Conference on transition from slide to flow-mechanism and remedial measure, Karadeniz Technical University, Trabzon*.
- L. Olivares et L. Picarelli (2001). Suceptibility of loose pyroclastic soils to static liquefaction : some preliminary datas. In Kühne M, Einstein HH, Krauter E, Klapperich H, Pöttler R (ed.), *Proceedings of International Conference on Landslides – Causes, Impacts and Countermeasures, Davos*, pp. 75–85.
- C. O’Neill, L. Moresi, D. Müller, R. Albert, et F. Dufour (2006). Ellipsis 3D : A particle-in-cell finite-element hybrid code for modelling mantle convection and lithospheric deformation. *Computers and Geosciences*, 32(10) : 1769–1779.
- R. Orense, A. J. Zapanta, A. Hata, et I. Towhata (2006). Geotechnical characteristics of volcanic soils taken from recent eruptions. *Geotechnical and Geological Engineering*, 24 : 129–161.
- G. Ovarlez, S. Rodts, X. Chateau, et P. Coussot (2009). Phenomenology and physical origin of shear localization and shear banding in complex fluids. *Rheological Acta*, 48 : 831–844.
- T. Papanastasiou (1987). Flows of materials with yield. *Journal of rheology*, 31(5) : 385–404.
- M. Pastor, J. F. Merodo, M. Herreros, P. Pira, E. González, B. Haddad, M. Quecedo, L. Tonni, et V. Dremptic (2008). Mathematical, Constitutive and Numerical Modelling of Catastrophic Landslides and Related Phenomena. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 41(1) : 85–132.

- P. Perzyna (1963). The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. *Quarterly of Applied Mathematics*, 20(4) : 321–332.
- D. Petley (2012). Global patterns of loss of life from landslides. *Geology*.
- T. Pierson (1986). *Flow behavior of channellized debris flows, Mount St Helens, Washington. In Abrahams, AD (Editor) , Hillslope processes, Allen and Unwin, Boston, 269-296.*
- L. Prandtl (1924). *In 1st International Congress of Applied Mechanics.*
- M. Preisig et T. Zimmermann (2010). Two-phase free-surface fluid dynamics on moving domains. *Journal of Computational Physics*, 229(7) : 2740–2758.
- M. D. Prete, F. Guadagno, et A. Hawkins (1998). Preliminary report on the landslides of 5 May 1998, Campania, southern Italy. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 57 : 113–129.
- F. Prunier (2008). *Modélisation des instabilités en géomécanique, application aux glissements de terrain.* Ph.D. thesis, Institut Polytechnique de Grenoble.
- F. Prunier, F. Laouafa, S. Lignon, et F. Darve (2009). Bifurcation modeling in geomaterials : From the second-order work criterion to spectral analyses. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 33(9) : 1169–1202.
- P. Revellino, F. Guadagno, et O. Hungr (2008). Morphological methods and dynamic modeling in landslide hazard assessment of the Campania Apennine carbonate slope. *Landslides*, 5(1) : 59–70.
- P. Revellino, O. Hungr, F. Guadagno, et S. Evans (2004). Velocity and Runout simulation of destructive debris flows and debris avalanches in pyroclastic deposits, Campania region, Italy. *Environmental Geology*, 45 : 295–311.
- J. Rice (1971). Inelastic constitutive relations for solids : an internal-variable theory and its application to metal plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 19 : 433–455.
- J. Rice, R. McMeeking, D. Parks, et E. Sorensen (1979). Recent finite element studies in plasticity and fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17 : 411–442.
- A. Rodríguez-Ferran, A. Pérez-Foguet, et A. Huerta (2002). Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) formulation for hyperelastoplasticity. *International journal for numerical methods in engineering*, 53(8) : 1831–1851.
- P. Rognon, I. Einav, C. Gay, *et al.* (2011). Flowing resistance and dilatancy of dense suspensions : lubrication and repulsion. *Journal of Fluid Mechanics*, 689(1) : 75–96.
- E. Romero (1999). *Characterisation and thermo-mechanical behaviour of unsaturated Boom clay : An experimental study.* Ph.D. thesis, UPC Barcelona.
- N. Roussel, M. Geiker, F. Dufour, L. Thrane, et P. Szabo (2007). Computational modeling of concrete flow : General overview. *Cement and Concrete Research*, 37(9) : 1298–1307.
- J. Rudnicki et J. Rice (1975). Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials. *International Journal of Solids and Structures*, 23 : 371–394.

- D. Salciarini, J. Godt, W. Savage, P. Conversini, R. Baum, et J. Michael (2006). Modeling regional initiation of rainfall-induced shallow landslides in the eastern Umbria Region of central Italy. *Landslides*, 3(3) : 181–194.
- P. Saramito (2009). A new elastoviscoplastic model based on the Herschel–Bulkley viscoplastic model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 158(1) : 154–161.
- A. ScottoDiSantolo et A. Evangelista (2009). Some observations on the prediction of the dynamic parameters of debris flows in pyroclastic deposits in the Campania region of Italy. *Natural hazards*, 50(3) : 605–622.
- G. Servant, F. Darve, J. Desrues, et I. Georgopoulos (2005). *Diffuse modes of failure in geomaterials*, pp. 181–200. AA Balkema.
- D. Sheng, S. Sloan, et A. Gens (2004). A constitutive model for unsaturated soils : thermo-mechanical and computational aspects. *Computational Mechanics*, 33(6) : 453–465.
- J. Simo et M. Rifai (1990). A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(8) : 1595–1638.
- K. Soga (2011). *Failure observed in landslides. Presentation in Alert Workshop*.
- N. Sukumar, D. Chopp, N. Moës, et T. Belytschko (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(46) : 6183–6200.
- D. Sulsky et H. Schreyer (1996). Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1) : 409–429.
- D. Sulsky, S. Zhou, et H. Schreyer (1995). Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. *Computer Physics Communications*, 87(1) : 236–252.
- A. Tarantino (2010). *Hydraulic and mechanical behaviour of three-phase media. Presentation in Grenoble*.
- D. Taylor (1937). Stability of earth slopes. *Journal of the Boston Society of Civil Engineers*, 24 : 337–386.
- D. Taylor (1948). *Fundamentals of Soil Mechanics - London Wiley*.
- K. Terzaghi (1923). *Die Berechnung der Durchlaessigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen. Sitzbericht (Abt IIa) Akademie der Wissenschaften, Vienna, p. 132*.
- T. Thomas (1961). *Plastic flow and fracture in solids. New York. Academic Press (New York)*.
- H. Tresca (1864). Memoir on the flow of solid bodies under strong pressure. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences*, 59 : 754.
- E. Tric, T. Lebourg, H. Jomard, et J. L. Cossec (2010). Study of large-scale deformation induced by gravity on the La Clapière landslide (Saint-Etienne de Tinée, France) using numerical and geophysical approaches. *Journal of Applied Geophysics*, 70 : 206–215.

- T. Uchimura, I. Towhata, T. L. Anh, J. Fukuda, C. Bautista, L. Wang, I. Seko, T. Uchida, A. Matsuoka, Y. Ito, *et al.* (2010). Simple monitoring method for precaution of landslides watching tilting and water contents on slopes surface. *Landslides*, 7(3) : 351–357.
- H. VanEekelen (1980). Isotropic yield surface in three dimensions for use in soil mechanics. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 4 : 89–101.
- D. Varnes (1954). *Landslides and Engineering Practice, Special Report 28*, chap. Landslides types and processes, pp. 20–47. Eckel E.B.
- D. Varnes (1978). *Landslides—Analysis and control : National Research Council, Washington, D.C., Transportation Research Board, Special Report*, chap. Slope movement types and processes, pp. 13–33. Schuster, R.L., and Krizek, R.J.
- R. VonMises (1928). *Z. Angew. Math. Mech.* 8 :161-185.
- O. Zienkiewicz, R. Taylor, et J. Zhu (2005). *The finite element method : its basis and fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford.