

Table des matières

1 Introduction	2
<u>Introduction</u>	2
1.1 Note Historique	2
1.2 Trajectoire d'une voiture	3
1.3 Chute libre d'une masse sans frottements	3
2 Généralités	7
2.1 Équations différentielles scalaires du 1 ^{er} ordre	7
2.1.1 Problème de Cauchy - Cas scalaire	9
2.1.1.1 Contre exemple	9
2.1.1.2 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz cas scalaire	11
2.1.2 Sous et sur-solution	12
2.1.3 Lemme de Gronwall	14
2.1.4 Résolution de quelques équations	14
2.1.4.1 Équation différentielle linéaire scalaire	15
2.1.4.2 Équation à variables séparables	16
2.1.4.3 Équation de Riccati à coefficients constants	17
2.1.4.3.a Cas où $\Delta > 0$	17
2.1.4.3.b Cas où $\Delta = 0$	18
2.1.4.3.c Cas où $\Delta < 0$	18
2.1.4.4 Équation de Bernoulli	19

3	Équations différentielles du 1^{er} ordre	21
3.1	Théorème de Cauchy-Lipschitz	22
3.2	Existence locale et unicité	27
3.3	Solution maximale	28
3.4	Dépendance par rapport aux conditions initiales	29
3.5	Dépendance par rapport aux paramètres	31
3.6	Équations différentielles d'ordre supérieur	32
4	Systèmes linéaires	35
4.1	Exponentiel d'une matrice	35
4.2	Systèmes linéaires homogènes à coefficients constants	38
4.3	Systèmes linéaires non-homogènes	41
4.4	Résolution de quelques systèmes	41
4.4.1	Résolution d'un système linéaire homogène à coefficients constants	41
4.4.2	Résolution d'un système linéaire non homogène	44
5	Résolution d'équations linéaires scalaires d'ordre supérieur	46
5.1	Résolution d'équations linéaires scalaires d'ordre deux	46
5.2	Résolution d'équations linéaires scalaires d'ordre supérieur	46
6	Introduction aux notions de stabilité	49
6.1	Flot, champ de vecteurs et espace de phases	49
6.1.1	Flot d'un système dynamique	49
6.1.2	Champ de vecteurs et origine	50
6.1.3	Espace de phases	51
6.2	Stabilité et stabilité exponentielle- Cas générale	52
6.2.1	Étude de stabilité du cas linéaire scalaire	53
6.3	Stabilité des systèmes linéaires	56
6.3.1	Méthode de résolution	57
6.3.2	Exemple d'application	59

6.3.3	Sous-espace stable et instable	60
7	Exercices	62

Chapitre 1

Introduction

1.1 Note Historique

À la fin du XVII^{ème} siècle des scientifiques de l'époque comme Leibniz (1646 - 1716) et Newton (1643 - 1727) se sont intéressés à des problèmes de la physique qui nécessitent le calcul intégral, parmi ces problèmes physiques on cite : le mouvement de pendules, la force gravitationnelle entre deux corps, les cordes vibrantes...etc. Leibniz et Newton inventent le calcul infinitésimal (autrement dit : calcul différentiel et calcul intégral) et répondent partiellement à leurs questions posées en physique. Puis en 1739, Euler (1707 - 1783) résout des équations différentielles linéaires à coefficients constants bien que la fonction exponentielle n'était pas encore familière chez les mathématiciens de l'époque. La difficulté d'intégration des équations différentielles a conduit des mathématiciens comme Poincaré (1854 - 1912) à inventer la théorie qualitative des équations différentielles, cette dernière se base sur l'aspect qualitatif des trajectoires des solutions. Notons, qu'il existe des équations pour lesquelles jusqu'à présent on ne connaît pas la forme explicite de leurs solutions, on cite par exemple l'équation différentielle de Riccati à coefficients non constants : Pour quelques cas particuliers on peut intégrer cette équation mais pour le reste on ne peut trouver la solution explicite que si on connaît une solution particulière. Le développement de l'informatique actuel a pu aider d'une

manière significative la prévision des solutions des équations différentielles et leurs applications touchent actuellement de plusieurs domaines comme la biologie, la chimie, l'économie,.. etc.

1.2 Trajectoire d'une voiture

Lorsqu'on connaît la vitesse d'une voiture sur une route droite on peut connaître sa position à un instant donné une fois que l'on connaît sa position initiale. En effet, si la vitesse est constante et égale à v alors en posant p la position de la voiture et t le temps on obtient la formule suivante

$$\frac{dp}{dt} = v, \quad (1.1)$$

qui est une équation différentielle.

Si à un instant t_0 la voiture est dans la position $p(t_0)$ (*condition initiale*) alors la position $p(T)$ de la voiture à un instant $T > t_0$ est donnée par

$$p(T) = v(T - t_0) + p(t_0).$$

On a donc "intégré" l'équation différentielle (1.1), soit

$$\int_{t_0}^T \frac{dp}{dt} dt = \int_{t_0}^T v dt \iff p(T) - p(t_0) = v(T - t_0),$$

cela vient du fait que la fonction p est la primitive de $\frac{dp}{dt}$ et du fait que v est supposée constante.

1.3 Chute libre d'une masse sans frottements

D'après la loi de Newton : entre deux corps de masses m_1 et m_2 (en kilogramme) il existe deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 centrées au centre des deux corps de m_1 et m_2 respectivement et de direction opposée. Ces deux forces induisent un mouvement suivant une

accélération a_1 de la masse m_1 et une accélération a_2 de la masse m_2 (voir Figure 1.1) données par la formule

$$\vec{F}_1 = a_1 m_1 = G \frac{m_1 m_2}{R^2}, \quad \vec{F}_2 = a_2 m_2 = G \frac{m_1 m_2}{R^2},$$

où

- R est le rayon (la distance) entre les deux corps,
- G est la Constante gravitationnelle. $G = 6.67408 \times 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$.

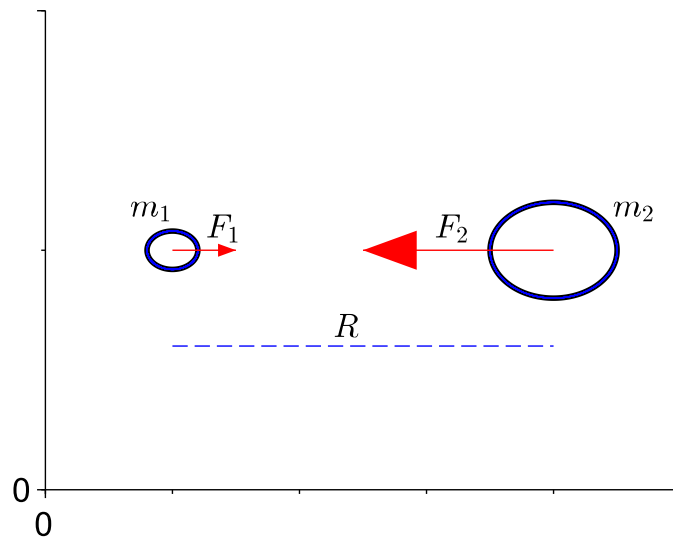


FIGURE 1.1 – Illustration de la force de gravitation entre deux corps isolés.

On considère maintenant la chute libre d'un corps de masse M , d'une hauteur de $R = 35$ mètre du sole de la terre sans vitesse initiale, comme illustré dans la Figure 1.2. On suppose que les frottements de l'aire sont négligeable et que le corps ne reçoivent pas d'autres forces extérieures. Il existe une force de gravitation \vec{F} centrée dans le corps de masse M de direction vers le centre de la terre et est donné par

$$\vec{F} = gM,$$

où g est la force de la pesanteur : $g = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$. D'un autre côté, d'après la loi de Newton, le corps de masse m chute librement vers la terre avec une accélération a

$$\vec{F} = aM,$$

On déduit que $a = g$. La question qu'on peut poser est : Quel est la durée T pour que le corps M atteigne le sol de la terre ?.

Posons v la vitesse du corps M , donc

$$v' = a, \quad \text{où } v' \text{ est la dérivée de } v,$$

D'après l'exemple précédent (vitesse d'une voiture), on se ramène à l'étude de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^2}{dt^2}p = a,$$

où p est la position du corps M . On intègre deux fois, on obtient

$$R = p(T) - p(0) = \int_0^T at \, dt = \left[\frac{1}{2}at^2 \right]_0^T.$$

Par hypothèse $R = 35$ mètre donc

$$T^2 = \frac{2R}{a}, \quad \implies T = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{70}{9,80665}} = 2.67170s. \quad (s := \text{seconde}).$$

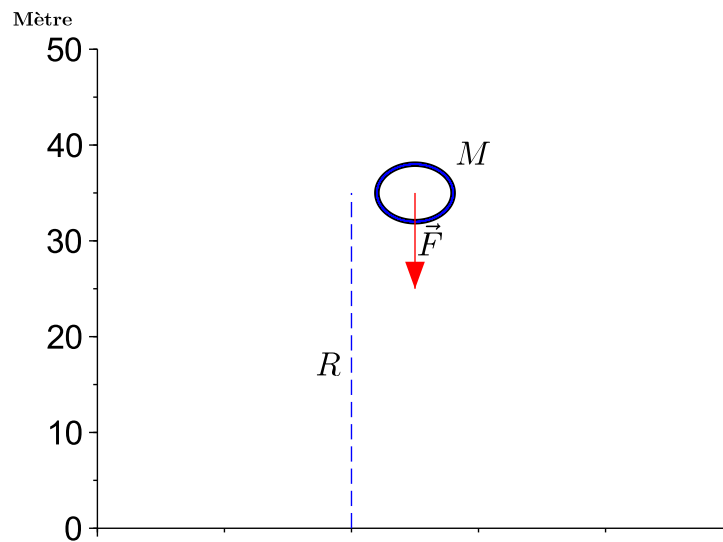


FIGURE 1.2 – Illustration d’une chute libre d’un corps sans vitesse initiale et sans frottements.

Les équations différentielles permettent l’étude des systèmes physiques, biologiques, économiques,...,etc. Dans ce qui suit la notation $\frac{d}{dt}x$ ou \dot{x} désigne la dérivé x' par rapport à la variable t .

Chapitre 2

Généralités

2.1 Équations différentielles scalaires du 1^{er} ordre

On appelle équation différentielle scalaire du 1^{er} ordre toute équation de la forme

$$\frac{d}{dt}x = f(t, x), \quad (2.1)$$

avec $t \in I$ où I est un intervalle de \mathbb{R} . $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction où \mathbb{K} est l'ensemble \mathbb{R} ou l'ensemble \mathbb{C} . La fonction $x(t)$ est la fonction inconnue à déterminer.

Cette dernière équation est dite “scalaire” car l'image de la fonction f est dans \mathbb{K} . Rappelons à ce titre qu'en algèbre l'espace vectoriel défini par le produit cartésien \mathbb{R}^p avec $p \in \mathbb{N}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel ; ses éléments sont appelés “vecteurs” et les éléments de \mathbb{R} sont appelés “scalaires”. On renvoie donc au cours d'algèbre pour la terminologie du mot “scalaire”. On va se réduire dans la suite à l'ensemble des scalaires réels, c'est à dire : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1. On dit que la fonction $x(t)$ définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} est solution de l'équation différentielle (2.1) sur I si elle est dérivable sur I et si elle vérifie

$$\forall t \in I : \frac{d}{dt}x = f(t, x).$$

L'équation différentielle (2.1) est dite du premier ordre car on dérive une fois par rapport à la variable t ; ($\frac{d}{dt}x(t)$).

Exemple 2. L'équation suivante

$$\dot{x} = \sin(t + x)$$

est une équation différentielle scalaire du premier ordre et dans ce cas

$$f(t, x) = \sin(t + x).$$

L'équation différentielle (2.1) est dite **autonome** si lorsque on remplace $x(t)$ par la variable z dans la fonction f alors f ne dépend plus de la variable t .

Exemple 3. L'équation suivante

$$\dot{x} = \sin(t + x),$$

est une équation différentielle scalaire du premier ordre non autonome, par contre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = \sin(x),$$

est une équation différentielle scalaire du premier ordre autonome.

L'équation différentielle (2.1) est dite **linéaire scalaire avec second membre** ou **linéaire scalaire non-homogène** si elle s'écrit sous la forme

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),$$

où $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions. L'équation différentielle (2.1) est donc dite **linéaire scalaire sans second membre** ou **linéaire scalaire homogène** si elle s'écrit sous la forme

$$\dot{x} = a(t)x.$$

Une équation différentielle linéaire scalaire autonome avec ou sans second membre s'appelle en général *équation différentielle linéaire à coefficients constants*.

La résolution des équations différentielles n'est pas toujours triviale. Pour cette raison on s'intéresse à des résultats d'existence et d'unicité.

2.1.1 Problème de Cauchy - Cas scalaire

On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle et d'une *condition initiale*

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ est la condition initiale de la solution $x(t)$ au temps t_0 .

Problème : Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant t_0 . Est ce que le problème de Cauchy (P.C) admet une solution définie sur I .

2.1.1.1 Contre exemple

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(R) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

On cherche à savoir si ce problème admet une solution sur l'intervalle $[0, 1]$. L'équation différentielle qui définit le problème de Cauchy précédent est une équation autonome. La solution constante nulle de l'équation différentielle $\frac{d}{dt}x = x^2$ n'est pas une solution au problème de Cauchy (R) précédent car elle ne vérifie pas l'hypothèse de la condition initiale. Pour résoudre le problème, on intègre comme suit

$$\frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} = 1 \iff \int_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} dt = \int_0^s 1 dt.$$

Sachant que la condition initiale est donnée par $x(0) = 1$ alors

$$\left[-\frac{1}{x(t)}\right]_0^s = s \iff -\frac{1}{x(s)} + 1 = s \iff x(s) = \frac{1}{1-s}.$$

La fonction $X(s)$ est définie pour tout $s \in \mathbb{R}/\{1\}$, elle est continue et dérivable en particulier sur $[0, 1[$. Comme $s \rightarrow_{<} 1$ on a $x(s) \rightarrow +\infty$ cela implique que $x(s)$ n'est pas définie en 1. Donc la fonction x est définie uniquement sur $[0, 1[$ (Voir figure 6.1) et le problème de Cauchy (R) précédent n'admet pas de solution sur $[0, 1]$ tout entier.

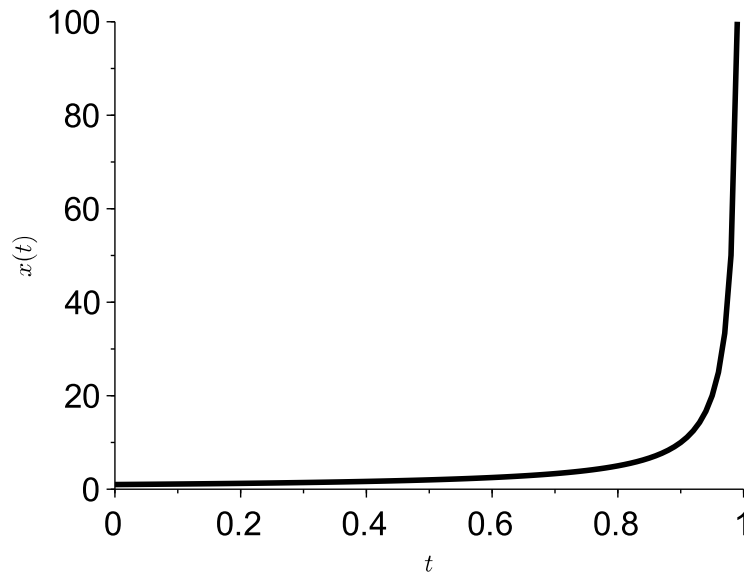


FIGURE 2.1 – On voit dans cette figure le graphe de la solution $x(t)$ du problème de Cauchy (R), la solution est tracée sur $[0, z]$ avec $z \approx 1$.

Dans le contre exemple précédent on a vu un exemple de problème de Cauchy qui n'admet pas de solution. On va voir dans ce qui suit des théorèmes et des propositions qui assurent l'existence de solutions sous certaines conditions. Pour cela on définit dans la définition suivante la notion de fonction lipschitzienne.

Définition 4 (Fonction lipschitzienne- Cas scalaire). Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Une fonction $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I s'il existe une constante $\kappa > 0$ tel que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \kappa|x - y|, \quad \forall t \in I, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Soient I et D deux intervalles de \mathbb{R} , on note dans ce qui suit $C(I \times D, \mathbb{R})$ l'ensemble

des fonctions continues de $I \times D$ dans \mathbb{R} .

2.1.1.2 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz cas scalaire

Le théorème suivant est démontré dans le cas général dans la section 3.1

Théorème 5. [Théorème de Cauchy-Lipschitz cas scalaire] Soit $f \in C(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

avec $t_0 \in I$. Supposons que f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I . Alors pour tout x_0 dans \mathbb{R} et pour tout t_0 dans I le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur I .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz précédent affirme que lorsque la fonction f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I alors le problème de Cauchy admet forcément une solution définie sur I tout entier. Revenant au contre exemple 2.1.1.1, on déduit que la fonction $f(z) = z^2$ n'est pas lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur $[0, 1]$. Car si elle y était alors par le théorème de Cauchy-Lipschitz le problème (R) admettra une solution sur $I = [0, 1]$ tout entier ce qui n'est pas le cas.

Proposition 6 (Régularité). Si f est de classe C^k avec $k \in \mathbb{N}^*$ sur un intervalle I alors la solution $x(t)$ si elle existe est de classe C^{k+1} sur I .

Démonstration. Par l'absurde, supposons que f est de classe C^k sur I et que x n'est pas de classe C^k . Donc il existe $l < k$ tel que x est de classe C^l mais pas de classe C^{l+1} .

La fonction $f(t, x)$ est une composée des deux fonctions f et x et donc est de classe C^l ; en effet $f \in C^l$ car $C^k \subset C^l$. La fonction $\frac{d}{dt}f(t, x)$ est donc continue. Or, $\frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}}x(t) = \frac{d^l}{dt^l}f(t, x)$ car $\dot{x} = f(t, x)$. On déduit que x est de classe C^{l+1} . Contradiction avec l'hypothèse du départ. Donc x est de classe C^{k+1} . \square

Théorème 7. [Théorème de Cauchy-Lipschitz cas linéaire scalaire] Soit l'équation différentielle linéaire scalaire avec second membre

$$\frac{d}{dt}x = a(t)x + b(t).$$

Supposons que $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} alors pour tout x_0 dans \mathbb{R} et pour tout t_0 dans I le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = a(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

admet une solution sur I .

La section 2.1.4.1 donne une preuve du théorème précédent.

2.1.2 Sous et sur-solution

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle scalaire et non-autonome suivante :

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.2}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (5), la différentiabilité de f implique que pour chaque condition initiale $x_a \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $x(t)$ vérifiant $x(a) = x_a$ définie et continue sur $[a, b]$, on définit donc dans la suite la notion de sur et sous-solution :

Définition 8 (Sous et sur-solution). Une fonction ψ de classe C^1 sur $[a, b]$ est dite une **sous-solution** de l'équation (2.2) sur $[a, b]$ si

$$\dot{\psi}(t) < f(t, \psi(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$

elle est dite une **sur-solution** de l'équation (2.2) sur $[a, b]$ si

$$\dot{\psi}(t) > f(t, \psi(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$

Théorème 9 (Sous-solution). *Soit x une solution de l'équation (2.2) sur $[a, b]$ de condition initiale $x(a) = x_a \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une sous-solution ψ de l'équation (2.2) de classe C^1 sur $[a, b]$ vérifiant $\psi(a) < x_a$. Alors :*

$$\psi(t) < x(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Démonstration. Supposons que ψ est une sous-solution de l'équation (2.2) sur $[a, b]$, et que $\psi(a) < x_a$. Par continuité il existe $\epsilon > a$ tel que

$$\psi(t) < x(t), \quad \forall t \in [a, a + \epsilon].$$

Posons

$$T^* = \sup_{t \geq a} \{a \leq s \leq t, \quad \psi(s) < x(s)\}.$$

Pour montrer le théorème on doit montrer que $T^* \geq b$. Par l'absurde supposons que $T^* < b$ alors

$$\dot{\psi}(t) < f(t, \psi(t)), \quad \forall t \in [a, T^*].$$

Par définition T^* vérifie $\psi(T^*) = x(T^*)$. On a

$$\dot{\psi}(T^*) < f(T^*, \psi(T^*)) = f(T^*, x(T^*)) = \dot{x}(T^*).$$

Donc il existe $a < s < T^*$ avec s assez proche de T^* tel que $\psi(s) > x(s)$. Contradiction avec la définition de T^* . Donc $T^* \geq b$. □

De même on a la théorème suivant concernant les sur-solutions

Théorème 10 (Sur-solution). *Soit x une solution de l'équation (2.2) de l'équation (2.2) sur $[a, b]$ de condition initiale $x(a) = x_a \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une sur-solution ψ de*

classe C^1 sur $[a, b]$ vérifiant $\psi(a) > x_a$, Alors :

$$\psi(t) > x(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Démonstration. Même méthode de démonstration utilisée dans la preuve du théorème 9. □

2.1.3 Lemme de Gronwall

Le lemme de Gronwall suivant permet d'avoir une estimation du comportement d'une solution du problème de Cauchy qui satisfait une certaine condition.

Lemme 11. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de \mathbb{R} contenant un point t_0 et $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I . Supposons qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que

$$|f(z, y)| < a|y| + b, \quad \forall (z, y) \in I \times \mathbb{R}.$$

Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ toute solution $x : I \subset \rightarrow \mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

vérifie

$$|x(t)| \leq |x_0| \exp(a|t - t_0|) + \frac{b}{a} (\exp(a|t - t_0|) - 1), \quad \forall t \in I.$$

2.1.4 Résolution de quelques équations

On va voir dans la suite quelques exemples de résolution. Cela rentre dans le cadre de la théorie quantitative qui consiste à trouver la forme explicite des solutions d'une équation différentielle

2.1.4.1 Équation différentielle linéaire scalaire

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(E.L) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = a(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

où $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz 7 pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0$ le problème précédent admet une solution définie sur \mathbb{R} . On va donc résoudre explicitement le problème précédent et déterminer la forme de la solution générale. On considère le changement de variable suivant

$$y(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right)x(t). \quad (2.3)$$

Donc

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)y(t) \text{ et } \frac{d}{dt}x(t) = a(t)\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)y(t) + \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)\frac{d}{dt}y(t)$$

En remplaçant ces valeurs dans le problème (E.L) on obtient le nouveau problème de Cauchy suivant

$$(E.L.N) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = b(t)\exp\left(\int_{t_0}^t -a(s)ds\right), \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Par une simple intégration on obtient

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t b(z)\exp\left(\int_{t_0}^z -a(s)ds\right)dz.$$

D'où

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(z)\exp\left(\int_{t_0}^z -a(s)ds\right)dz.$$

Finalement on déduit de l'équation (2.3) la forme générale de la solution $x(t)$ du problème (E.L) de condition initiale $x(t_0) = x_0$ qui est donnée par

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \left[x_0 + \int_{t_0}^t b(z) \exp\left(\int_{t_0}^z -a(s)ds\right)dz\right].$$

2.1.4.2 Équation à variables séparables

Une équation à variables séparables est une équation de la forme

$$\dot{x} = g(t)f(x). \quad (2.4)$$

avec $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonction continues. Si f s'annule en un point x_* de \mathbb{R} alors la fonction constante $x(t) = x_*$ est une solution de l'équation (2.4) sur \mathbb{R} . En posant F primitive de la fonction $z \rightarrow \frac{1}{f(z)}$ et en posant G primitive de la fonction g alors la solution générale de (2.4) satisfait l'équation

$$F(x(t)) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tout dépend de la forme de F on peut dans quelques cas déduire la forme explicite de la solution $x(t)$.

Exemple 12.

$$\dot{x} = g(t)x,$$

avec $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de primitive G . Cette équation différentielle est une équation différentielle à variables séparables et c'est une équation différentielles linéaire scalaire homogène. Dans ce cas la primitive F de la fonction $z \rightarrow \frac{1}{z}$ est

$$F(z) = \ln(|z|).$$

Donc la solution vérifie

$$\ln(|x(t)|) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

donc

$$x(t) = c' \exp(G(t)), \quad c' \in \mathbb{R}.$$

2.1.4.3 Équation de Riccati à coefficients constants

Une équation de Riccati à coefficients constants est définie par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = a + bx + cx^2,$$

avec a , b et c sont des constantes dans \mathbb{R} avec $c \neq 0$. Soit $\Delta := b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme du deuxième degré en z

$$a + bz + cz^2, \quad z \in \mathbb{R}.$$

2.1.4.3.a Cas où $\Delta > 0$

Pour $\Delta > 0$ il existe deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ constantes définies sur \mathbb{R} par

$$x_1(t) = \lambda_1, \quad \text{et} \quad x_2(t) = \lambda_2, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux racines du polynôme $a + bz + cz^2$. Les autres solutions peuvent être calculées par la décomposition suivante

$$\dot{x} = a + bx + cx^2 = c(x - \lambda_1)(x - \lambda_2),$$

$$\iff \frac{\dot{x}(t)}{(x(t) - \lambda_1)(x(t) - \lambda_2)} = c \iff \frac{\dot{x}(t)}{(x(t) - \lambda_1)} - \frac{\dot{x}(t)}{(x(t) - \lambda_2)} = c(\lambda_1 - \lambda_2).$$

En intégrant on obtient

$$\int \frac{\dot{x}(t)}{(x(t) - \lambda_1)} dt - \int \frac{\dot{x}(t)}{(x(t) - \lambda_2)} dt = \int c(\lambda_1 - \lambda_2) dt,$$

$$\ln |(x(t) - \lambda_1)| - \ln |(x(t) - \lambda_2)| = c(\lambda_1 - \lambda_2)t + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$\iff \frac{x(t) - \lambda_1}{x(t) - \lambda_2} = k' \exp(c(\lambda_1 - \lambda_2)t), \quad k' \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on obtient la forme explicite suivante

$$x(t) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 k' \exp(c(\lambda_1 - \lambda_2)t)}{1 - k' \exp(c(\lambda_1 - \lambda_2)t)}.$$

2.1.4.3.b Cas où $\Delta = 0$

Lorsque $\Delta = 0$ il existe une racine double réelle λ , donc il existe une solution $x_*(t)$ constante définie sur \mathbb{R} par

$$x_*(t) = \lambda, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cela entraîne que

$$a + bx + cx^2 = c(x - x_*)^2, \iff \dot{x}(t) = c(x(t) - x_*)^2.$$

Cette dernière équation est une équation à variables séparables et équivalente à

$$\frac{\dot{x}(t)}{(x(t) - x_*)^2} = c.$$

On utilise donc la méthode de l'équation à variable séparables pour déduire que

$$x(t) = x_* - \frac{1}{ct + k}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.1.4.3.c Cas où $\Delta < 0$

Lorsque $\Delta < 0$ on utilise la forme canonique suivante

$$a + bz + cz^2 = c \left[\left(z + \frac{b}{2c} \right)^2 - \frac{\Delta}{4c^2} \right].$$

On a

$$\dot{x}(t) = c \left[\left(x(t) + \frac{b}{2c} \right)^2 - \frac{\Delta}{4c^2} \right]$$

Donc

$$\frac{\dot{x}(t)}{\left(\frac{2c}{\sqrt{-\Delta}} x(t) + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 + 1} = \frac{-\Delta}{4c}.$$

Par changement de variable, soit

$$y(t) = \frac{2c}{\sqrt{-\Delta}} x(t) + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}.$$

On alors

$$\dot{y}(t) = \frac{2c}{\sqrt{-\Delta}} \dot{x}(t).$$

Cela entraîne que

$$\frac{\dot{y}(t)}{y^2(t) + 1} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Donc

$$\int \frac{\dot{y}(s)}{y^2(s) + 1} ds = \int \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} ds \implies \arctan(y(t)) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(t) = \tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t + k\right).$$

Finalement par le changement de variable choisi, on obtient

$$x(t) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2c} \left[\tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t + k\right) - \frac{b}{\sqrt{-\Delta}} \right], \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.1.4.4 Équation de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est définie par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^n,$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et f, g sont des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour résoudre l'équation de Bernoulli on considère le changement de variable $x(t) = y(t)z(t)$ alors

$$\dot{y}(t) = f(t)y(t) \quad \text{et} \quad \dot{z}(t) = g(t)y^{n-1}(t)z^n(t),$$

car

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t)z(t) + \dot{z}(t)y(t) = f(t)y(t)z(t) + g(t)y^{n-1}(t)z^n(t)y(t) = f(t)x(t) + g(t)x^n(t).$$

Par intégration on trouve

$$y(t) = \exp\left(\int f(t)dt\right), \quad \frac{z^{1-n}(t)}{1-n} = c + \int g(t)y^{n-1}(t)dt, \quad c \in \mathbb{R},$$

donc

$$x(t) = y(t)z(t) = \exp\left(\int f(t)dt\right) \left[(1-n)\left(c + \int g(t)(\exp\left(\int f(t)dt\right))^{n-1} dt\right) \right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

~~~~~*Fin du chapitre*

# Chapitre 3

## Équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre

On a vu dans les sections précédentes la définition d'une équation différentielle scalaire ainsi quelques théorèmes d'existence de solutions concernant ces équations. On va voir maintenant la forme d'une équation différentielle du premier ordre qui n'est pas nécessairement scalaire. On considère dans ce qui suit un espace de Banach  $E$  sur le corps  $\mathbb{R}$  (exemple :  $E = \mathbb{R}^n$ ). On note la norme d'un élément  $X$  de  $E$  par  $\|X\|$ . Rappelons qu'un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance induite par la norme ; c'est-à-dire : toute suite d'éléments de  $E$  qui est de Cauchy converge. On note dans ce qui suit  $C(I \times D, E)$  l'ensemble des fonctions continues de  $I \times D$  dans  $E$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $D \subset E$ .

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $D \subset E$ . On appelle une équation différentielle du premier ordre sur  $I \times D$  toute équation de la forme

$$\frac{d}{dt}X = f(t, X), \tag{3.1}$$

où  $f : I \times D \rightarrow E$  est une fonction définie de  $I \times D$  dans  $E$ . La fonction  $X : I \rightarrow E$  est la fonction inconnue à déterminer de  $I$  dans  $E$ .

On voit que les équations différentielles scalaires du premier ordre est un cas particulier de ces derniers ; en effet il suffit de prendre  $E = \mathbb{R}$  qui est un espace de Banach.

**Définition 13.** On dit que la fonction  $X(t)$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $E$  est solution de l'équation différentielle (3.1) sur  $I$  si elle est dérivable sur  $I$  et si elle vérifie

$$\forall t \in I : \frac{d}{dt}X = f(t, X).$$

Le problème de Cauchy sera donc la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

où  $X_0 \in E$  est la condition initiale de la solution  $X(t)$  au temps  $t_0$ .

### 3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre l'existence d'une unique solution sur  $I$ . Avant d'énoncer le théorème, on définit une fonction lipschitzienne dans un espace de Banach

**Définition 14.** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach. Soit  $D \subset E$ . Une fonction  $f : I \times D \rightarrow E$  est dite localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur  $I \times D$  si pour tout  $(t, X) \in I \times D$  il existe un voisinage  $V \subset I \times D$  de  $(t, X)$  et il existe une constante  $\kappa(t, x) > 0$  tels que

$$\|f(s, Y) - f(s, Z)\| \leq \kappa(t, X)\|Z - Y\|, \quad \forall (s, Y) \in V \quad \text{et} \quad \forall (s, Z) \in V.$$

Elle est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur  $I$  si  $\kappa(t, X)$  ne dépend pas de  $(t, X)$ . La constante  $\kappa(t, x)$  est appelée la constante de Lipschitz.

**Remarque 15.** On utilise le théorème d'accroissement finis pour montrer que :

1) Si  $f : I \times D \rightarrow E$  est de classe  $C^1$  sur  $I \times D$  alors elle est localement lipschitzienne



par rapport à la deuxième variable sur  $I \times D$ .

1) Si  $f : I \times D \rightarrow E$  est de classe  $C^1$  et sa différentielle est bornée sur  $I \times D$  alors elle est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur  $I$  par rapport à la deuxième variable.

Pour montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz dans la suite on a besoin de la proposition suivante

**Proposition 16.** Soient  $I = [a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $t_0 \in [a, b]$ . Soit  $f \in C(I \times E, E)$  lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur  $I$  de constante de Lipschitz  $\kappa$ . Alors pour tout  $X_0 \in E$  la suite de fonctions récurrente  $(X_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\begin{cases} X_1(t) = X_0, & \forall t \in [a, b], \\ X_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X_{n-1}(s)) ds, & \forall t \in [a, b], \end{cases}$$

converge uniformément vers une fonction  $X(t)$  dans l'espace de Banach  $C(I, E)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . De plus  $X(t)$  est l'unique fonction dérivable vérifiant

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

*Démonstration.* Soit la suite de fonctions récurrente  $(X_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$X_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X_{n-1}(s)) ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

avec  $X_1(t) = X_0$  pour tout  $t \in [a, b]$ .

Comme l'espace  $C(I, E)$  des fonctions continues de  $I$  dans  $E$  muni de la norme  $\|X\|_\infty = \sup_{s \in I} \|X(s)\|$  pour tout  $X \in C(I, E)$  est de Banach, alors pour montrer que  $(X_n)_n$  converge il suffit donc de montrer qu'elle est de Cauchy.

On remarque par récurrence que  $X_n(t)$  est dérivable et continue sur  $[a, b]$ . On définit la

quantité suivante

$$\|X_{n+1} - X_n\|_* = \max_{s \in I} [\exp(-\kappa|s - t_0|) \|X_{n+1}(s) - X_n(s)\|],$$

qui est définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'un autre coté posons  $J = [t, t_0]$  si  $t \leq t_0$  et  $J = [t_0, t]$  si  $t_0 \leq t$ , alors on a

$$\begin{aligned} \|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_J \|f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s))\| ds \\ &\leq \int_J \kappa \|X_n(s) - X_{n-1}(s)\| ds \\ &= \int_J \exp(\kappa|s - t_0|) \exp(-\kappa|s - t_0|) \kappa \|X_n(s) - X_{n-1}(s)\| ds \\ &\leq \kappa \|X_n - X_{n-1}\|_* \int_J \exp(\kappa|s - t_0|) ds \\ &= \kappa \|X_n - X_{n-1}\|_* \frac{1}{\kappa} (\exp(\kappa|t - t_0|) - 1). \end{aligned}$$

Ce qui implique donc pour tout  $t \in [a, b]$  :

$$\exp(-\kappa|t - t_0|) \|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leq \|X_n - X_{n-1}\|_* (1 - \exp(-\kappa|t - t_0|)),$$

Par passage au maximum et par définition de la quantité  $\|\cdot\|_*$  on obtient

$$\|X_{n+1} - X_n\|_* \leq \|X_n - X_{n-1}\|_* (1 - \exp(-\kappa(b - a))), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors par récurrence et en posant  $L = 1 - \exp(-\kappa(b - a))$  on déduit que

$$\|X_{n+1} - X_n\|_* \leq L^{n-1} \|X_2 - X_1\|_*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où

$$\begin{aligned} \exp(-\kappa(b-a))\|X_p - X_q\|_\infty &\leq \|X_p - X_q\|_* = \left\| \sum_{k=q}^{p-1} X_{k+1} - X_k \right\|_* \\ &\leq \|X_2 - X_1\|_* \sum_{k=q}^{p-1} L^{k-1} = \|X_2 - X_1\|_* \frac{L^{q-1} - L^{p-1}}{1-L} \xrightarrow{p,q \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Comme

$$\exp(-\kappa(b-a)) \leq \exp(-\kappa|s-t_0|) \leq 1, \quad \forall s \in I,$$

alors

$$\exp(-\kappa(b-a))\|X_p - X_q\|_\infty \leq \|X_p - X_q\|_* \quad \text{et} \quad \|X_2 - X_1\|_* \leq \|X_2 - X_1\|_\infty.$$

Par conséquent la formule (3.2) implique que

$$\implies \|X_p - X_q\|_\infty \leq \exp(\kappa(b-a))\|X_2 - X_1\|_\infty \frac{L^{q-1} - L^{p-1}}{1-L} \xrightarrow{p,q \rightarrow +\infty} 0$$

donc  $(X_n)$  est de Cauchy dans l'espace de Banach des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $E$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  (topologie de la convergence uniforme). Donc  $X_n$  converge uniformément vers une fonction dérivable  $X(t)$  définie sur  $[a, b]$  de plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(t) = X_0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t f(s, X_{n-1}(s)) ds \iff X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds$$

Montrons qu'elle est unique : Supposons qu'il existe deux fonctions  $X(t)$  et  $Y(t)$  telles  $Y \neq X$  et telles que pour tout  $t \in I$  on a

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds \quad \text{et} \quad Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, Y(s)) ds.$$

$X \neq Y$  sur  $[a, b]$  implique que  $\max_{s \in [a, b]} \|X(s) - Y(s)\| \neq 0$ . On a

$$X(t) - Y(t) = \int_{t_0}^t f(s, X(s)) - f(s, Y(s)) ds,$$

$$\implies \|X(t) - Y(t)\| \leq \int_{t_0}^t \kappa \|X(s) - Y(s)\| ds \leq \kappa \max_{s \in [a, b]} \|X(s) - Y(s)\| (b - a),$$

Par passage au maximum dans le membre droit, on obtient

$$\implies \max_{t \in [a, b]} \|X(t) - Y(t)\| \leq \kappa (b - a) \max_{s \in [a, b]} \|X(s) - Y(s)\|.$$

Comme  $\max_{s \in [a, b]} \|X(s) - Y(s)\| \neq 0$  alors

$$1 \leq (b - a)\kappa.$$

Contradiction, car par hypothèse  $(b - a)\kappa < 1$ . □

**Théorème 17.** [Théorème de Cauchy-Lipschitz] Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f \in C(I \times E, E)$ . Soit le problème de Cauchy

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec  $(t_0, X_0) \in I \times E$ . Supposons que  $f$  est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur  $I$ . Alors pour tout  $t_0$  dans  $I$  et pour tout  $X_0$  dans  $E$  le problème de Cauchy (P.C) admet une solution unique définie sur  $I$ .

*Démonstration.* Comme  $f$  est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et d'après la proposition 16 il existe une unique fonction  $X : I \rightarrow E$  dérivable sur  $I$  telle que

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds, \quad \forall t \in I.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}X(t) = f(t, X(t)), \quad \forall t \in I \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0,$$

Par conséquent  $X(t)$  est solution du problème de Cauchy (P.C) sur  $I$ . □

**Définition 18.** On appelle la solution  $X(t)$  définie sur tout  $I$ , du problème de Cauchy (P.C) précédent, une “solution globale”.

## 3.2 Existence locale et unicité

Le théorème de Cauchy-Lipschitz (17) se généralise au cas de fonctions localement lipschitziennes et montre l’existence et unicité de solutions d’une manière locale (dans un voisinage). Avant de voir cette généralisation on définit une fonction localement lipschitzienne comme suit

**Théorème 19.** [Solution locale] Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $D \subset E$  un connexe de  $E$ . Soit  $f \in C(I \times D, E)$ . Soit le problème de Cauchy

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec  $(t_0, X_0) \in I \times D$ . Supposons que  $f$  es localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur  $I \times D$ . Alors pour tout  $(t_0, X_0) \in I \times D$  il existe un intervalle  $J \subset I$  contenant  $t_0$  tel que le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur  $J$ .

*Démonstration.* Exercice. [Indication : Prolonger la fonction  $f$  en une fonction globalement lipschitzienne]. □

Le théorème précédent affirme l’existence d’une solution sur un intervalle  $J$  inclu dans  $I$  mais pas forcément égale à  $I$  c’est-à-dire il affirme l’existence d’une solution d’une manière locale.

**Définition 20.** La solution  $x(t)$  définie sur  $J$  du problème de Cauchy (P.C) du théorème précédent s’appelle “solution locale” et on note  $(x(t), J)$ .

### 3.3 Solution maximale

**Théorème 21.** [Solution maximale] Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $D \subset E$  un connexe de  $E$ . Soit  $f \in C(I \times D, E)$ . Soit le problème de Cauchy

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec  $(t_0, X_0) \in I \times D$ . Supposons que  $f$  es localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur  $I \times D$ . Alors pour tout  $(t_0, X_0) \in I \times D$  le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur un intervalle  $I_0$  incluse dans  $I$  tel que toute solution locale  $(y(t), J)$  du problème (P.C) vérifie  $J \subset I_0$ .

*Démonstration.* Comme  $f$  est localement lipschitzienne, par le théorème (19) soient  $(Y_1(t), J_1)$  et  $(Y_2(t), J_2)$  deux solutions locales. Par unicité  $Y_1(t) = Y_2(t)$  pour tout  $t \in J_1 \cap J_2$ . Soit  $I_0$  la réunion de tous les intervalles des solutions locales. Donc pour tout  $t \in I_0$  il existe une solution locale  $(Y(t), J)$  telle que  $t \in J$ , posons alors  $X(t) = Y(t)$ . Donc  $X(t)$  est définie sur  $I_0$  tout entier de plus par unicité si  $(Y_*(t), J_*)$  est une solution locale alors  $J_* \subset I_0$  et  $Y_*(t) = X(t)$  sur  $J_*$ .  $\square$

Le théorème précédent affirme l'existence d'une solution sur un intervalle ouvert maximal  $I_0$  incluse dans  $I$ . Intuitivement l'intervalle  $I_0$  est le plus grand intervalle dans  $I$  contenant  $t_0$  où la solution du (P.C) est définie.

**Définition 22.** La solution  $X(t)$  définie sur  $I_0$  du problème de Cauchy (P.C) du théorème précédent s'appelle "solution maximale" et  $I_0$  s'appelle "intervalle maximale".

**Remarque 23.** Si  $f : I \times E \rightarrow E$  est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et si l'intervalle maximale  $I_0 \subset I$  d'une solution  $X(t)$  de l'équation (21) est de la forme  $] -\infty, b[$ ,  $]a, +\infty[$  ou  $]a, b[$  et  $a, b \in I$  alors

$$\lim_{t \rightarrow a} \|X(t)\| = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow b} \|X(t)\| = +\infty.$$

### 3.4 Dépendance par rapport aux conditions initiales

On va voir dans cette section le comportement des solution lorsque on perturbe les conditions initiales. On considère le problème de Cauchy suivant

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec  $(t_0, X_0) \in I \times E$ . On a le théorème suivant

**Théorème 24.** Soit  $I = [a, b]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ . Soient  $f \in C(I \times E, E)$  et  $(t_0, Y_0) \in I \times E$ . On considère le problème de Cauchy

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}Y = f(t, Y), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Supposons que  $f$  est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur  $I$ . Soit  $\Phi : I \times E \rightarrow E$  la fonction définie par

$$\Phi(t, X) = X(t), \quad \forall X \in E,$$

où  $X(t)$  est la solution du problème de Cauchy (P.C) de condition initiale  $X \in E$ . Alors la fonction  $\Phi$  est continue par rapport à  $X$  sur  $E$ .

*Démonstration.* Montrons que  $\Phi$  est continue par rapport à la deuxième variable sur  $E$ . Soient  $X \neq Y \in E$ . Soit  $X(t)$  et  $Y(t)$  solutions de (P.C) de condition initiale  $X$  et  $Y$  respectivement. On a

$$X(t) = X + \int_{t_0}^t f(s, X(s))ds, \quad \text{et} \quad Y(t) = Y + \int_{t_0}^t f(s, Y(s))ds, \quad \forall t \in I.$$

Par définition de la fonction  $\Phi$  on a  $\Phi(t, X) = X(t)$  et  $\Phi(t, Y) = Y(t)$ . On remplace on

obtient pour tout  $t$  dans  $I$

$$[\Phi(t, X) - \Phi(t, Y)] - [\Phi(t_0, X) - \Phi(t_0, Y)] = \int_{t_0}^t f(s, \Phi(s, X)) - f(s, \Phi(s, Y)) ds.$$

Posons  $J = [t, t_0]$  si  $t \leq t_0$  et  $J = [t_0, t]$  si  $t_0 \leq t$ . Posons aussi

$$\|\Phi_X - \Phi_Y\|_* = \max_{s \in I} [\exp(-\kappa|s - t_0|) \|\Phi(s, X) - \Phi(s, Y)\|].$$

Comme  $\Phi(t_0, X) = X$  et  $\Phi(t_0, Y) = Y$  on a

$$\begin{aligned} \|[\Phi(t, X) - \Phi(t, Y)] - [X - Y]\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \Phi(s, X)) - f(s, \Phi(s, Y)) ds \right\| \\ &\leq \int_J \|f(s, \Phi(s, X)) - f(s, \Phi(s, Y))\| ds \\ &\leq \int_J \kappa \|\Phi(s, X) - \Phi(s, Y)\| ds \\ &= \kappa \int_J \exp(\kappa|s - t_0|) \exp(-\kappa|s - t_0|) \|\Phi(s, X) - \Phi(s, Y)\| ds \\ &\leq \|\Phi_X - \Phi_Y\|_* \int_J \kappa \exp(\kappa|s - t_0|) ds \\ &= \|\Phi_X - \Phi_Y\|_* (\exp(\kappa|t - t_0|) - 1). \end{aligned}$$

Ce qui implique donc pour tout  $t \in [a, b]$  :

$$\exp(-\kappa|t - t_0|) \|\Phi(t, X) - \Phi(t, Y)\| \leq (1 - \exp(-\kappa|t - t_0|)) \|\Phi_X - \Phi_Y\|_* + \|X - Y\|,$$

Par passage au maximum et par définition de la quantité  $\|\cdot\|_*$  on obtient

$$\|\Phi_X - \Phi_Y\|_* \leq (1 - \exp(-\kappa(b - a))) \|\Phi_X - \Phi_Y\|_* + \|X - Y\|.$$

Donc

$$\exp(-\kappa(b - a)) \|\Phi_X - \Phi_Y\|_* \leq \|X - Y\|.$$



Comme

$$\exp(-\kappa(b-a)) \leq \exp(-\kappa|s-t_0|) \leq 1, \quad \forall s \in I,$$

alors

$$\max_{t \in I} \|\Phi(t, X) - \Phi(t, Y)\| \leq \exp(2\kappa(b-a)) \|X - Y\|.$$

On déduit que  $\Phi$  est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur  $[a, b]$  de constante de Lipschitz  $\exp(2\kappa(b-a))$  ce qui montre que  $\Phi$  est continue par rapport à la deuxième variable sur  $E$ .  $\square$

### 3.5 Dépendance par rapport aux paramètres

Une équation différentielle peut dépendre d'un paramètre. On va voir quelques résultats sur le comportement des solutions en variant un paramètre dans une équation différentielle. Soit

$$\frac{d}{dt}X = f(t, X, \lambda),$$

une équation différentielle qui dépend du paramètre  $\lambda \in [c, d] \subset \mathbb{R}$  et  $f : I \times E \times [c, d] \rightarrow E$  une fonction définie de  $I \times E \times [c, d]$  dans  $E$  où  $I$  est un intervalle borné dans  $\mathbb{R}$ . Pour chaque  $\lambda$  fixé dans  $[c, d]$  supposons que  $f(t, z, \lambda)$  est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur  $I$  (On considère  $\lambda$  comme étant une constante), donc le problème de Cauchy suivant

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X, \lambda), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec  $(t_0, X_0) \in I \times E$  admet une solution  $X_\lambda : I \rightarrow E$  qui dépend de  $\lambda \in [c, d]$ . On note dans la suite  $C(I \times E \times [c, d], E)$  l'ensemble des fonctions continues de  $I \times E \times [c, d]$  dans  $E$ . On a le théorème suivant

**Théorème 25.** Soient  $f \in C(I \times E \times [c, d], E)$  et  $(t_0, X_0) \in I \times E$ . On considère le problème

de Cauchy

$$(P.C, \lambda) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X, \lambda), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec  $\lambda \in [c, d]$ . Supposons que pour tout  $\lambda \in [c, d]$  fixé la fonction  $f$  est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur  $I$ . Soit  $\phi : I \times [c, d] \rightarrow E$  la fonction définie par  $\phi(t, \lambda) = X_\lambda(t)$  où  $X_\lambda : I \rightarrow E$  est solution du problème  $(P, C, \lambda)$ . Alors  $\phi$  est continue sur  $I \times [c, d]$ .

*Démonstration.* On va voir dans cette preuve que l'étude de la dépendance par rapport aux paramètres revient à l'étude de la dépendance aux conditions initiales vue dans la section précédente. Soit la fonction  $G : I \times E^{n+1} \rightarrow E^{n+1}$  définie pour tout

$$G(t, Z) = \begin{pmatrix} f(t, (z_1, \dots, z_n), z_{n+1}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall Z = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in E^{n+1}.$$

Donc le problème  $(P.C)$  est équivalent à

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{X} = G(t, \tilde{X}) \\ \tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0. \end{cases}$$

où  $\tilde{X}(t) = (X(t), x_{n+1}(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t))$  et  $\tilde{X}_0 = (X_0, \lambda)$ . Donc varier le paramètre  $\lambda$  dans le problème  $(P.C, \lambda)$  revient à varier la condition initiale  $\tilde{X}_0$ . On peut donc utiliser le théorème 24 pour conclure la preuve du présent théorème.  $\square$

### 3.6 Équations différentielles d'ordre supérieur

Soient  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . Une équation différentielle d'ordre  $n$  sur  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^m$  est une équation de la forme

$$X^{(n)} = F(t, X, X', \dots, X^{(n-1)}) \quad (3.4)$$

où  $F : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est la fonction inconnue à déterminer. On va voir que cette équation peut se réduire à une équation du premier ordre. On considère le changement de variable  $Y_0(t) = X(t)$  alors l'équation différentielle du première ordre suivante

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} Y_0(t) = Y_1(t), \\ \frac{d}{dt} Y_1(t) = Y_2(t), \\ \frac{d}{dt} Y_2(t) = Y_3(t), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} Y_{n-2}(t) = Y_{n-1}(t), \\ \frac{d}{dt} Y_{n-1}(t) = F(t, Y_0(t), Y_1(t), \dots, Y_{n-1}(t)) \end{cases}$$

est équivalente à l'équation (3.4). Donc toute équation différentielle d'ordre  $n$  est équivalente à une équation d'ordre 1. Par conséquent tous les théorèmes d'existence et d'unicité vus dans les équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre s'appliquent au équations différentielles d'ordre  $n$ .

**Exemple 26.** Soit l'équation différentielle d'ordre 2 dans  $\mathbb{R}$  suivante (ici  $n = 2$  et  $m = 1$ )

$$x'' = x + \sin(t) \quad (3.5)$$

Dans cet exemple  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(t, x) = x + \sin(t)$ . Posons  $y_0(t) = x(t)$  alors l'équation différentielle d'ordre 2 (3.5) est équivalente à l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$(E) \quad \begin{cases} y_0' = y_1, \\ y_1' = y_0 + \sin(t). \end{cases}$$

Cette équation du premier ordre est de la forme  $Y'(t) = G(t, Y(t))$  avec  $Y(t) = (y_0(t), y_1(t))$  et  $G(t, Y(t)) = (y_1(t), y_0(t) + \sin(t))$ . Donc  $G$  est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur  $\mathbb{R}$ ; l'équation (E) admet une solution sur  $\mathbb{R}$  pour toute condition initiale. On intègre (E) : Posons  $u(t) = y_0(t) + y_1(t)$  par addition on a

$$u'(t) = y_0'(t) + y_1'(t) = y_1(t) + y_0(t) + \sin(t) = u(t) + \sin(t),$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire, donc

$$u(t) = \exp(t) \left[ c + \int \sin(s) \exp(-s) ds \right], \quad c \in \mathbb{R}.$$

Posons  $w(t) = y_0(t) - y_1(t)$ , de (E) on a

$$w'(t) = -w(t) - \sin(t),$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire, donc

$$w(t) = \exp(-t) \left[ c' - \int \sin(s) \exp(s) ds \right], \quad c' \in \mathbb{R}.$$

On déduit que

$$x(t) = y_0(t) = \frac{u(t) + w(t)}{2}.$$

~~~~~Fin du chapitre

Chapitre 4

Systemes linéaires

On va étudier dans ce chapitre un cas particulier d'équations différentielles. Plus précisément on va s'intéresser à des équations différentielles sur \mathbb{R} linéaires qui sont de la forme

$$\frac{d}{dt}X = A(t)X + B(t) \quad (4.1)$$

où A est une matrice $n \times n$ et $B(t)$ est un vecteur de taille n qui dépend du temps $t \in \mathbb{R}$. $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ est la fonction inconnue à déterminer. L'équation (4.1) s'appelle aussi "système linéaire".

On appelle "équation homogène associée" à l'équation (4.1) l'équation sans second membre suivante

$$\frac{d}{dt}X = A(t)X.$$

On va s'intéresser dans la suite au cas lorsque la matrice $A(t)$ ne dépend pas de t . Pour résoudre le système (4.1) on doit définir l'exponentiel d'une matrice.

4.1 Exponentiel d'une matrice

La fonction exponentielle scalaire $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ne permet pas de calculer l'exponentiel d'une matrice. Par contre on connaît le développement de cette fonction qui est sous

la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

On donne donc une définition analogue à ce développement pour définir l'exponentiel d'une matrice.

Définition 27 (Exponentiel d'une matrice). Soient $n \in \mathbb{N}$ et M une matrice d'ordre $n \times n$. On appelle "exponentiel de M " et on note $\exp(M)$ la quantité suivante

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k,$$

où M^k est k fois le produit de la matrice M et où M^0 est la matrice identité d'ordre n .

Le calcul de l'exponentiel d'une matrice n'est pas toujours trivial, car on doit calculer à chaque fois le produit matriciel M^k . On va voir quelques exemples où on peut calculer cet exponentiel.

Exemple 28. Si

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Donc pour tout $k \geq 3$

$$M^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On déduit que

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Proposition 29. Soient $n \in \mathbb{N}$ et M une matrice d'ordre $n \times n$, alors la série entière de somme partielle $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} M^k,$$

converge vers une matrice d'ordre $n \times n$ dans l'espace des matrices d'ordre $n \times n$ muni de la norme $\|\cdot\|$ usuelle.

Démonstration. Comme pour toute matrice A et B d'ordre $n \times n$ on a $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ donc $\|M^k\| \leq \|M\|^k$. On a donc

$$\|S_N\| \leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \|M\|^k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \exp(\|M\|).$$

Donc S_N converge absolument d'où S_N converge. □

Il existe des cas particuliers où on peut calculer l'exponentiel d'une matrice. On a donc les propriétés suivantes

Proposition 30. Soient $n \in \mathbb{N}$ et M une matrice d'ordre $n \times n$.

- Si M est une matrice triangulaire avec des 0 dans la diagonale alors

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} M^k.$$

- Si M est une matrice diagonale ($M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$) alors

$$\exp(M) = \text{diag}(\exp(m_1), \dots, \exp(m_n)).$$

- Si A et B sont deux matrices $n \times n$ qui commutent (i.e, $AB = BA$) alors

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

- La matrice $\exp(M)$ est une matrice inversible de plus $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$.

4.2 Systèmes linéaires homogènes à coefficients constants

On considère dans \mathbb{R} le système linéaire à coefficients constants suivant

$$\frac{d}{dt} X = AX \tag{4.2}$$

où A est une matrice à coefficients constants d'ordre $n \times n$ et $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction inconnue à déterminer. Dans la suite on considère un temps initiale $t_0 \in \mathbb{R}$

Proposition 31. On note S l'ensemble de solutions du système (4.2). Alors S est un espace vectoriel de dimension n et est donné par

$$S = \{\exp(tA)Z, \quad Z \in \mathbb{R}^n\},$$

et on appelle la matrice $\exp(tA)$ qui dépend du temps $t \in \mathbb{R}$ la “résolvante” du système

(4.2). Une base de S s'appelle "ensemble fondamental" du système (4.2).

Démonstration. Montrons que les éléments de S sont des solutions. On a

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

D'après la proposition 29 sur tout compact $[a, b]$ de \mathbb{R} la série converge uniformément, donc

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} = A \exp(tA).$$

Donc pour tout vecteur constant $X_0 \in \mathbb{R}^n$ la fonction $X(t) = \exp(tA)X_0$ vérifie

$$\frac{d}{dt} X = AX,$$

qui est une solution de (4.2). On remarque par linéarité du système que S est un espace vectoriel. Montrons qu'il est de dimension n :

Soient $X_1(t), \dots, X_n(t)$ des solutions de conditions initiales vérifiant $X_1(t_0) = e_1, \dots, X_n(t_0) = e_n$ où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n . Montrons qu'elle est génératrice :

On a pour tout $Y(t) \in S$ il existe $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Y(t) = \exp(tA)Y = y_1 \exp(tA)e_1 + \dots + y_n \exp(tA)e_n = y_1 X_1(t) + \dots + y_n X_n(t).$$

donc $X_1(t), \dots, X_n(t)$ est une famille génératrice de S .

Montrons que c'est une famille linéairement indépendante. Par l'absurde, supposons qu'elle n'est pas libre donc il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i(t) = 0.$$

Donc il existe aussi $t_* \in \mathbb{R}$ et tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i X(t_*) = 0.$$

Sans perte de généralité supposons que $\lambda_1 \neq 0$. On a alors

$$X_1(t_*) = - \sum_{i=2}^n \lambda_i X_i(t_*).$$

Mais $-\sum_{i=2}^n \lambda_i X_i(t) \in S$ donc c'est une solution de (4.2). Par unicité de solution

$$X_1(t) = - \sum_{i=2}^n \lambda_i X_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particulier

$$X_1(t_0) = - \sum_{i=2}^n \lambda_i X_i(t_0).$$

Contradiction avec le fait que $X_1(t_0) = e_1 \dots X_n(t_0) = e_0$ ou e_1, \dots, e_n qui est une base (famille libre). □

Remarque 32. Si $X_1(t), \dots, X_n(t)$ est un ensemble fondamental de S . On appelle la matrice

$$\begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) & \dots & X_n(t) \end{pmatrix},$$

matrice fondamentale et on a

$$\begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) & \dots & X_n(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} X_1(t_0) & X_2(t_0) & \dots & X_n(t_0) \end{pmatrix},$$

car $X_i(t) = \exp(tA)X_i(t_0)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

4.3 Systèmes linéaires non-homogènes

On considère dans \mathbb{R} le système linéaire non homogène suivant

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t) \quad (4.3)$$

$$X(t_0) = X_0,$$

où A est une matrice à coefficients constants d'ordre $n \times n$ et $B(t)$ un vecteur de taille n qui dépend du temps.

Proposition 33. *La solution $X(t)$ du système (4.3) de condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^n$ est donnée par*

$$X(t) = \Phi(t - t_0) \left[X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s - t_0)^{-1} B(s) ds \right],$$

où $\Phi(t - t_0)$ est la résolvante du système linéaire homogène associé. (c'est à dire $\Phi(t - t_0) = \exp((t - t_0)A)$, et où $\Phi(t - t_0)^{-1} = \exp(-(t - t_0)A)$ est la matrice inverse de $\Phi(t - t_0)$).

4.4 Résolution de quelques systèmes

4.4.1 Résolution d'un système linéaire homogène à coefficients constants

On suppose dans la suite que A est une matrice diagonalisable. On considère dans \mathbb{R}^n le système linéaire à coefficients constants suivant

$$\frac{d}{dt}X = AX. \quad (4.4)$$

Pour résoudre ce système homogène on doit trouver la matrice résolvante $\exp(tA)$. On considère le changement de variable

$$X(t) = \exp(\lambda t)V, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et } V \in \mathbb{R}^n.$$

Donc de (4.4)

$$\lambda \exp(\lambda t)V = A \exp(\lambda t)V,$$

$$\iff \lambda V = AV.$$

Cela revient à trouver les valeurs propres de A et dans ce cas λ est valeur propre de vecteur propre associé V . Dans le cas où A est diagonalisable alors elle admet n vecteurs propres (V_1, \dots, V_n) linéairement indépendants associés à n valeurs propres réelles $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. L'ensemble de solutions $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ de l'équation (4.4) donnée par

$$\{X_i(t) = \exp(\lambda_i t)V_i / \quad 1 \leq i \leq n\},$$

est donc linéairement indépendant et donc forme un ensemble fondamental. D'après la remarque 32 on a

$$\left(\exp(t\lambda_1)V_1 \dots \exp(t\lambda_n)V_n \right) = \exp(tA) \left(V_1 \dots V_n \right).$$

Comme V_1, \dots, V_n sont linéairement indépendants donc la matrice $(V_1 \dots V_n)$ est inversible on déduit que

$$\exp(tA) = \left(\exp(t\lambda_1)V_1 \dots \exp(t\lambda_n)V_n \right) \left(V_1 \dots V_n \right)^{-1}.$$

Donc les solutions $X(t)$ du système (4.4) s'écrivent sous la forme

$$X(t) = \left(\exp(t\lambda_1)V_1 \dots \exp(t\lambda_n)V_n \right) \left(V_1 \dots V_n \right)^{-1} X(t_0).$$

Exemple 34.

$$\frac{d}{dt}X = AX, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 6$ et $\lambda_2 = -2$. L'un des vecteurs propres de λ_1 est $V_1 = (1, 1)$ et l'un des vecteurs propres de λ_2 est $V_2 = (-1, 1)$. Donc les deux solutions

$$X_1(t) = \exp(6t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X_2(t) = \exp(-2t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

forment une ensemble fondamentale des solutions du système homogène (4.5). La résolvante dans ce cas est donnée par

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(6t) & -\exp(-2t) \\ \exp(6t) & \exp(-2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \exp(6t) & -\exp(-2t) \\ \exp(6t) & \exp(-2t) \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(6t) + \exp(-2t) & \exp(6t) - \exp(-2t) \\ \exp(6t) - \exp(-2t) & \exp(6t) + \exp(-2t) \end{pmatrix} \\ &= \exp(2t) \begin{pmatrix} \cosh(4t) & \sinh(4t) \\ \sinh(4t) & \cosh(4t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où les solutions de $X(t)$ de (4.5) sont donnée par

$$Y(t) = \exp(tA)Y(t_0).$$

4.4.2 Résolution d'un système linéaire non homogène

On considère dans \mathbb{R}^n le système linéaire non homogène suivant

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \text{avec} \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

Avec A matrice constante qu'on suppose diagonalisable et $B(t)$ est une fonction continue de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On utilise la section 4.4.1 précédente pour trouver la résolvante $\exp(tA)$ du système homogène associé au système (4.6)

$$\frac{d}{dt}X = AX.$$

Donc d'après la proposition 33 les solutions du système non homogène (4.6) est donné par

$$X(t) = \left\{ \Phi(t - t_0) \left[X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s - t_0)^{-1} B(s) ds \right] \right\},$$

avec $\Phi(t - t_0) = \exp((t - t_0)A)$.

Exemple 35.

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} \exp(2t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

D'après l'exemple 34 la résolvante du système homogène associé

$$\frac{d}{dt}X = AX,$$

est donnée par

$$\exp(tA) = \exp(2t) \begin{pmatrix} \cosh(4t) & \sinh(4t) \\ \sinh(4t) & \cosh(4t) \end{pmatrix}.$$

Donc les solutions du système (4.7) sont données par

$$\begin{aligned} X(t) &= \exp((t - t_0)A) \left[X(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(-(s - t_0)A) \begin{pmatrix} \exp(2s) \\ 0 \end{pmatrix} ds \right] \\ &= \exp((t - t_0)A) \left[X(t_0) + \exp(2t_0) \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t \cosh(-4(s - t_0)) ds \\ \int_{t_0}^t \sinh(-4(s - t_0)) ds \end{pmatrix} \right] \\ &= \exp((t - t_0)A) \left[X(t_0) - \frac{\exp(2t_0)}{4} \begin{pmatrix} \sinh(-4(t - t_0)) \\ \cosh(-4(t - t_0)) - 1 \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

où

$$\exp((t - t_0)A) = \exp(2(t - t_0)) \begin{pmatrix} \cosh(4(t - t_0)) & \sinh(4(t - t_0)) \\ \sinh(4(t - t_0)) & \cosh(4(t - t_0)) \end{pmatrix}.$$

Chapitre 5

Résolution d'équations linéaires scalaires d'ordre supérieur

5.1 Résolution d'équations linéaires scalaires d'ordre deux

5.2 Résolution d'équations linéaires scalaires d'ordre supérieur

On considère l'équation linéaire scalaire d'ordre n suivante

$$y^{(n)} = a_n y^{(n-1)} + \dots + a_3 y'' + a_2 y' + a_1 y + f(t),$$

avec $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sont des constantes et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. D'après la section 3.6 du chapitre précédent en posant $x_1(t) = y(t)$ cette équation peut se réduire au système linéaire d'ordre 1 suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x_1 = x_2, \\ \frac{d}{dt}x_2 = x_3, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}x_{n-1} = x_n, \\ \frac{d}{dt}x_n = a_n x_n + \dots + a_2 x_2 + a_1 x_1 + f(t), \end{array} \right.$$

qui est sous forme matriciel équivalent à

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots\dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots\dots\dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \dots\dots\dots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où A est diagonalisable on utilise la méthode illustrée dans la section 4.4.1 et la section 4.4.2 pour calculer la solution $X(t)$ on déduit donc la solution $y(t) = x_1(t)$.

Exemple 36.

$$y''' = 3y'' + y' + \sin(t).$$

En posant $x_1(t) = y(t)$ alors le système est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2, \\ \frac{d}{dt}x_2 = x_3, \\ \frac{d}{dt}x_3 = 3x_3 + x_2 + \sin(t), \end{cases}$$

qui est sous forme matricielle équivalent à

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad \text{avec} \quad X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$

$$\text{et où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

On calcul la résolvante du système linéaire homogène

$$\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t).$$

Cela revient donc à chercher les valeurs propres de A .

~~~~~Fin du chapitre

# Chapitre 6

## Introduction aux notions de stabilité

La stabilité est l'étude de la dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales. Physiquement, si on jette deux pierres tout d'un coup on aimerait bien savoir si l'une s'éloigne de l'autre au cours du temps ou non. En terme d'équations différentielles, si on prend deux solutions d'une même équation différentielle est-ce que ces deux solutions restent assez proches lorsque leurs conditions initiales sont suffisamment proches. Pour cela on a la définition suivante

### 6.1 Flot, champ de vecteurs et espace de phases

#### 6.1.1 Flot d'un système dynamique

Une équation différentielle est aussi appelée un "système dynamique" car elle représente une dynamique qui évolue avec le temps. Le "flot" représente cette dynamique.

**Définition 37** (Le flot). Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , une fonction uniformément lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit l'équation différentielle autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.1)$$

On appelle flot de l'équation (6.1) la fonction  $\Phi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie pour chaque  $t \in \mathbb{R}$

par

$$\forall X \in \mathbb{R} : \Phi^t(X) = X(t),$$

où  $X(t)$  est la solution du système (6.1) de condition initiale  $X \in \mathbb{R}^n$ .

**Propriétés 38.** On a les propriétés suivantes

- $\Phi^0 = Id$  où  $Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la fonction identité, d'un autre terme  $\forall X \in \mathbb{R} : \Phi^0(X) = X$ .
- $\Phi^t$  est continue de plus si  $f$  est  $C^1$  alors  $\Phi^t$  est de classe  $C^1$ .
- Pour tout  $t, s \in \mathbb{R}$  et tout  $X \in \mathbb{R}^n$  on a  $\Phi^s(\Phi^t(X)) = \Phi^{s+t}(X)$ .

**Définition 39** (Ensemble invariant). Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , une fonction uniformément lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0. \quad (6.2)$$

Notons  $\Phi^t$  le flot de l'équation (6.2). Soit  $\mathcal{O}$  un ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que l'ensemble  $\mathcal{O}$  est positivement invariant par le flot ou il est positivement  $\Phi^t$ -invariant si

$$\forall X \in \mathcal{O} : \Phi^t(X) \in \mathcal{O}, \quad \forall t \geq 0.$$

### 6.1.2 Champ de vecteurs et origine

Pour pouvoir étudier les équations différentielles d'une manière qualitative on introduit la notion du "champ de vecteurs" et de "l'espace de phases" comme suit

**Définition 40** (Champ de vecteurs). On appelle champ de vecteurs toute fonction  $F$  de classe  $C^1$  d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Un champ de vecteurs représente une transformation des vecteurs de  $\Omega$ .

**Définition 41** (Origine d'un champ de vecteurs). On appelle l'origine d'un champs de vecteurs  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tout point  $X_* \in \Omega$  tel que

$$F(X_*) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

**Définition 42** (Point stationnaire). On appelle point stationnaire d'une équation autonome

$$\dot{X} = F(X), \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

l'origine du champ  $F$ . Un point stationnaire est donc la solution constante, de cet équation, qui passe par l'origine.

Notons que toute équation non autonome peut se réduire à une équation autonome. En effet si on considère l'équation suivante

$$\dot{X} = F(t, X), \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad X(t_0) = X_0, \quad (6.3)$$

avec  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  alors on considère le changement de variable suivant :

$$x_{n+1}(t) = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Et en posant  $\tilde{F}(\tilde{X}) = (F(t, X), 1)$  où  $\tilde{X} = (X, x_{n+1})$  alors on a l'équation autonome suivante et qui est équivalente à (6.3)

$$\frac{d}{dt}\tilde{X} = \tilde{F}(\tilde{X}), \quad \tilde{X}(t_0) = (X_0, 0).$$

### 6.1.3 Espace de phases

Soit  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs. On considère l'équation différentielle

$$\dot{X} = F(X), \quad t \geq t_0, \quad (6.4)$$

avec  $t_0 \in \mathbb{R}$ . L'espace de phases de l'équation (6.4) est la représentation géométrique (qualitative) du comportement des solutions. Cette représentation géométrique peut se faire à l'aide du champ de vecteurs  $F$  qui indique à chaque point  $X \in \mathbb{R}^N$  la tangente  $\vec{Y}$  associée en utilisant la relation  $F(X) = \vec{Y}$ . En effet, le vecteur  $\vec{Y}$  représente la tangente  $\dot{X}$  de la solution ("la phase")  $X(t)$  passe au point  $X$ . Malheureusement, la représentation d'un espace de phases dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 3$  ne peut pas se faire d'une manière simple.

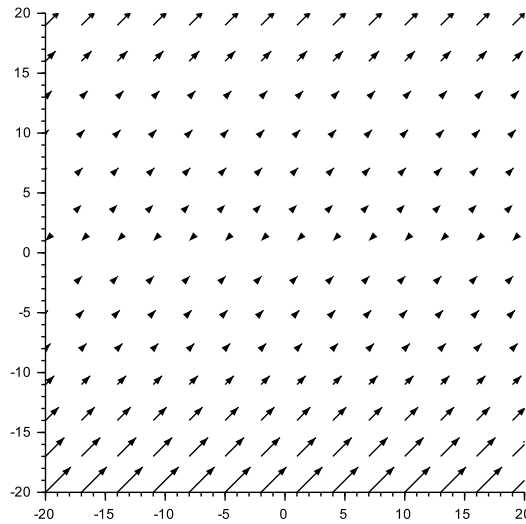


FIGURE 6.1 – La figure montre l'espace de phases de l'équation de Riccati scalaire à coefficients constants suivante  $\dot{x} = 1 - 4x + 1$ .

## 6.2 Stabilité et stabilité exponentielle- Cas générale

**Définition 43** (Stabilité et stabilité exponentielle). Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , une fonction lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Soit l'équation différentielle suivante

$$\dot{X} = f(t, X), \quad t \geq 0. \quad (6.5)$$

Soit  $X(t)$  solution de l'équation (6.5). La solution  $X(t)$  est stable si pour toute solution  $Y(t)$  de (6.5) on a

$$\exists M > 0, \exists \delta > 0 : \|X(0) - Y(0)\| < \delta \implies \|X(t) - Y(t)\| \leq M\|X(0) - Y(0)\|, \forall t \geq 0.$$

Dans le cas contraire la solution  $X(t)$  est dite instable. La solution  $X(t)$  est exponentiellement stable si pour toute solution  $Y(t)$  de (6.5) on a

$$\begin{aligned} \exists M > 0, \exists c > 0, \exists \delta > 0 : \|X(0) - Y(0)\| < \delta \\ \implies \|X(t) - Y(t)\| \leq M \exp(-ct)\|X(0) - Y(0)\|, \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

**Remarque 44.** Une solution exponentiellement stable est stable. La réciproque est en générale fausse ! (Voir l'exemple donné dans la section 6.2.1 ci-dessous).

### 6.2.1 Étude de stabilité du cas linéaire scalaire

Maintenant on va voir ce que signifie la stabilité dans le cas scalaire. Soit l'équation différentielle linéaire scalaire non-homogène suivante

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad t \geq 0, \quad (6.6)$$

avec  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions continues. Soit  $x(t)$  et  $y(t)$  solutions de (6.6) de condition initiale  $(x(0), y(0)) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  respectivement, on a

$$\frac{d}{dt}[x(t) - y(t)] = a(t)[x(t) - y(t)], \quad t \geq 0.$$

Posons  $\theta(t) = x(t) - y(t)$  donc

$$\dot{\theta} = a(t)\theta, \quad t \geq 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire homogène, donc

$$\theta(t) = \theta(0) \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right), \quad t \geq 0.$$

Comme  $\theta(t) = x(t) - y(t)$  alors,

$$x(t) - y(t) = [x - y] \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right).$$

On remarque que si la fonction  $a$  est constante et vérifie  $a(t) = \alpha < 0$  pour tout  $t \geq 0$  alors

$$|x(t) - y(t)| = |x - y| \exp(\alpha t), \quad \forall t \geq 0.$$

Dans ce cas toute solution  $x(t)$  de l'équation (6.6) est donc exponentiellement stable (Voir la Figure (6.2)). On peut vérifier que dans le cas où  $a(t) = \alpha > 0$  pour tout  $t \geq 0$  alors toute solution est instable (Voir la Figure (6.3)). Dans le cas où  $\int_{t_0}^t a(s) ds$  est bornée (Exemple : périodique par rapport à  $t$ ) alors la solution  $x(t)$  est stable mais non exponentiellement stable (Voir la Figure (6.4)).



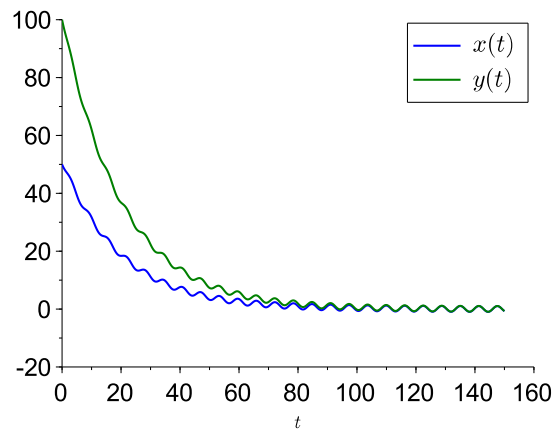


FIGURE 6.2 – On choisit dans l'équation différentielle (6.6)  $a(t) = -0.05$  pour tout  $t \geq t_0 = 0$  et  $b(t) = \sin(t)$ . La figure illustre le graphe en couleur bleu de la solution  $x(t)$  de condition initiale  $x(0) = 50$  et le graphe en couleur verte de la solution  $y(t)$  de condition initiale  $y(0) = 100$  de l'équation différentielle (6.6). Ici  $a(t) = -0.05$  pour tout  $t \geq t_0 = 0$  ce qui correspond à une stabilité exponentielle. La distance entre les deux solutions  $x(t)$  et  $y(t)$  décroît d'une manière exponentielle.

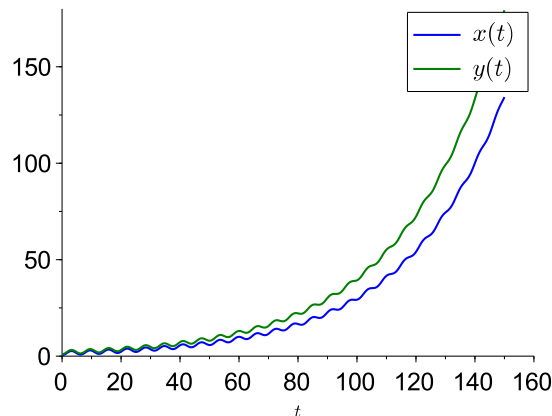


FIGURE 6.3 – On choisit dans l'équation différentielle (6.6)  $a(t) = 0.03$  pour tout  $t \geq t_0 = 0$  et  $b(t) = \sin(t)$ . La figure illustre le graphe en couleur bleu de la solution  $x(t)$  de condition initiale  $x(0) = 0.5$  et le graphe en couleur verte de la solution  $y(t)$  de condition initiale  $y(0) = 1$  de l'équation différentielle (6.6). Ici  $a(t) = 0.03$  pour tout  $t \geq t_0 = 0$  ce qui correspond à une instabilité. La distance entre les deux solutions  $x(t)$  et  $y(t)$  n'est pas bornée dans le temps.

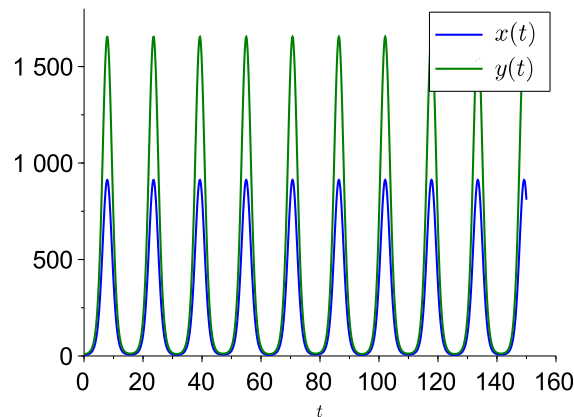


FIGURE 6.4 – On choisit dans l'équation différentielle (6.6)  $a(t) = \sin(0.4t)$  pour tout  $t \geq t_0 = 0$  et  $b(t) = \sin(t)$ . La figure illustre le graphe en couleur bleu de la solution  $x(t)$  de condition initiale  $x(0) = 5$  et le graphe en couleur verte de la solution  $y(t)$  de condition initiale  $y(0) = 10$  de l'équation différentielle (6.6). Ici  $a(t) = \sin(0.4t)$  ce qui implique que  $\int_{t_0}^t a(s)ds$  est périodique par rapport à  $t$  ce qui correspond à une stabilité mais pas à une stabilité exponentielle. La distance entre les deux solutions  $x(t)$  et  $y(t)$  est bornée mais ne décroît pas d'une manière exponentielle.

### 6.3 Stabilité des systèmes linéaires

On va étudier dans cette section la stabilité des systèmes linéaires du type

$$\dot{X} = AX + B(t), \quad (6.7)$$

où  $A$  est une matrice d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  à coefficients constants et  $B(t)$  est un vecteur de taille  $n$  à coefficients dépendant du temps  $t$ . On a la proposition suivante

**Proposition 45.** Soit  $X(t)$  une solution du système (6.7).  $X(t)$  est une solution stable si et seulement si le système linéaire homogène

$$\dot{Y} = AY, \quad (6.8)$$

admet un point stationnaire stable.

*Démonstration.* Soit  $X(t)$  la solution stable du système (6.7) de condition initiale  $X \in \mathbb{R}^n$ . Pour toute solution  $Z(t)$  du système (6.7) de condition initiale  $Z$  on a

$$\exists M > 0, \exists \delta > 0 : \forall Z \in \mathbb{R}^n, \|X - Z\| < \delta \implies \|X(t) - Z(t)\| \leq M\|X - Z\|, \forall t \geq 0,$$

Posons  $R(t, 0)$  la matrice fondamental du système linéaire homogène (6.8). Alors

$$R(t, 0)(X - Z) = X(t) - Z(t), \quad \forall X, Z \in \mathbb{R}^n.$$

Soit  $\tilde{Z}(t)$  la solution stable du système (6.7) de condition initiale  $Z + X \in \mathbb{R}^n$  avec  $Z \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} \forall Z \in \mathbb{R}^n : \|Z\| \leq \delta \implies \|R(t, 0)Z\| &= \|\tilde{Z}(t) - X(t)\| \\ &< M\|Z + X - X\| = M\|Z\|, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Soit  $V(t)$  et  $W(t)$  deux solutions arbitraires du système (6.7) de conditions initiales  $V, W \in \mathbb{R}^n$  respectivement. Alors

$$\|V - W\| < \delta \implies \|V(t) - W(t)\| = \|R(t, 0)(V - W)(t)\| \leq M\|V - W\|, \forall t \geq 0.$$

Ce qui montre que la solution  $V(t)$  est stable. De la même manière on peut vérifier la réciproque de la proposition.  $\square$

### 6.3.1 Méthode de résolution

D'après le chapitre 4 la solution du système linéaire homogène (6.8) de condition initiale  $X \in \mathbb{R}^n$  est donné par

$$X(t) = \exp(tA)X, \quad \forall t \geq 0.$$

Posons  $R(t, 0)$  la matrice fondamentale

$$R(t, 0)X = \exp(tA)X, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0.$$

Lorsque  $A$  est diagonalisable alors comme on a vu dans la section 4.4 du chapitre précédent la matrice fondamentale s'écrit sous la forme

$$\exp(tA) = \left( \exp(t\lambda_1)V_1 \dots \exp(t\lambda_n)V_n \right) \left( V_1 \dots V_n \right)^{-1}$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les  $n$  valeurs propres réels de la matrice  $A$  et  $V_1, \dots, V_n$  sont les vecteurs propres associés dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 46.** *On considère l'équation (6.8). Alors le point stationnaire est stable (respectivement : exponentiellement stable) si et seulement si pour tout  $1 \leq i \leq n$  les valeurs propres de la matrice  $A$  vérifient  $\lambda_i \leq 0$  (respectivement : pour tout  $1 \leq i \leq n$  on a  $\lambda_i < 0$ ).*

*Démonstration.* Cela vient du fait que pour tout  $t \geq 0$  on a

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}^n : \|R(t, 0)X\| &= \|\exp(tA)X\| = \left\| \left( \exp(t\lambda_1)V_1 \dots \exp(t\lambda_n)V_n \right) \left( V_1 \dots V_n \right)^{-1} X \right\| \\ &\leq \max\{\exp(\lambda_i t), 1 \leq i \leq n\} \|(V_1, \dots, V_n)\| \|(V_1, \dots, V_n)^{-1}\| \|X\| \\ &= \exp(\lambda_* t) M \|X\|, \end{aligned}$$

où  $\lambda_* = \max\{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}$  et  $M = \|(V_1, \dots, V_n)\| \|(V_1, \dots, V_n)^{-1}\|$ . Ce qui implique que si  $1 \leq i \leq n$  on a  $\lambda_i \leq 0$  on a

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : \|R(t, 0)X\| \leq M \|X\|, \quad \forall t \geq 0,$$

d'un autre terme le point stationnaire est stable.

Supposons maintenant qu'il existe une valeur propre  $\lambda_{i_0} > 0$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  soit le

vecteur  $W$  défini par

$$W = (y_1, \dots, y_{i_0-1}, 1, y_{i_0+1}, \dots, y_n), \quad y_i = 0, \forall 1 \leq i \neq i_0 \leq n.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  soit  $X = x(V_1, \dots, V_n)W$ . On a pour tout  $t \geq 0$

$$y_X(t) = \left( \exp(t\lambda_1)V_1 \dots \exp(t\lambda_n)V_n \right) (V_1, \dots, V_n)^{-1} x(V_1, \dots, V_n)W = x \exp(t\lambda_{i_0})V_{i_0}.$$

Comme  $V_{i_0} \neq 0_{\mathbb{R}^n}$  et le fait que  $\lambda_{i_0} > 0$  on déduit que le point stationnaire est instable.  $\square$

**Remarque 47.** La proposition précédente se généralise à n'importe quelle matrice constante  $A$ . Pour étudier la stabilité avec de telles matrices, il suffit de calculer les valeurs propres et voir leurs signes.

### 6.3.2 Exemple d'application

D'après ce qui précède la partie non homogène n'influence pas sur la stabilité de l'équation. Pour cela soit  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction continue arbitraire. On va étudier dans cet exemple la stabilité des solutions des équations différentielles linéaires non-homogènes suivantes

$$\frac{d}{dt}X = AX + B(t), \quad (6.9)$$

avec  $A \in \{A_1, A_2, A_3\}$  où

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 45 la stabilité des solutions de (6.9) revient à l'étude de la stabilité de le point stationnaire du système homogène associé qui revient aussi d'après la proposition 46 à l'étude des valeurs propres des matrices  $A$ .

La matrice  $A_1$  admet deux valeurs propres  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -4$ . Donc lorsque  $A = A_1$

on a une stabilité exponentielle .

La matrice  $A_2$  admet deux valeurs propres  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = -5$ . Donc lorsque  $A = A_2$  on a stabilité mais non stabilité exponentielle.

La matrice  $A_3$  admet deux valeurs propres  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 3$ . Lorsque  $A = A_3$  on a instabilité.

### 6.3.3 Sous-espace stable et instable

On considère l'équation linéaire

$$\dot{X} = AX, \quad t \geq 0, \quad (6.10)$$

où  $A$  est une matrice d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  à coefficients constants. Supposons que la matrice  $A$  admet des valeurs propres de différents signes. Dans ce cas le point stationnaire n'est pas une solution stable. Par contre on peut décomposer l'espace  $\mathbb{R}^N$  en somme directe de sous-espaces vectoriels stable, instable. Plus précisément on a le théorème suivant.

**Théorème 48.** *On considère l'équation linéaire (6.10). Supposons que la matrice  $A$  admet des valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  réelles de vecteurs propres  $V_1, \dots, V_n$  respectivement. Soit*

$$\Omega_1 = \{1 \leq i \leq n : \lambda_i < 0\}$$

$$\Omega_2 = \{1 \leq i \leq n : \lambda_i = 0\}$$

$$\Omega_3 = \{1 \leq i \leq n : \lambda_i > 0\}$$

Pour  $m \in \{1, 2, 3\}$ , soit  $E_m$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par les vecteurs propres

$\{V_i\}_{i \in \Omega_m}$ . Alors

$$\forall X \in E_1, \exists \alpha, \beta > 0 : \quad \|\exp(tA)X\| \leq \beta \exp(-\alpha t)\|X\|, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\forall X \in E_2, \exists M > 0 : \quad \|\exp(tA)X\| \leq M\|X\|, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\forall X \in E_3, X \neq 0_{\mathbb{R}^n} : \quad \|\exp(tA)X\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Les sous-espaces  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  du théorème précédent vérifient  $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = \mathbb{R}^n$  de plus  $E_i$  est invariant par la matrice fondamentale pour tout  $1 \leq i \leq 3$ . On appelle  $E_1$  le sous-espace exponentiellement stable,  $E_2$  le sous-espace stable et  $E_3$  le sous-espace instable.

~~~~~ Fin du chapitre

Chapitre 7

Exercices

Exercice 1:

Intégrer les équations suivantes

- $\dot{x} = 1,$

- $\dot{x} = x,$

- $\dot{x} = t,$

- $\dot{x} = x^2.$

Déterminer le domaine de définition de $x(t)$ lorsque $x(0) = 0$ et $x(0) = 1$.

Exercice 2:

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *uniformément (ou globalement) lipschitzienne* s'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq \kappa|x - y|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Est-ce que les fonctions suivantes sont lipschitziennes par rapport à la deuxième variable uniformément sur \mathbb{R} ?

- $f(x) = 2x,$

- $f(x) = \sin(x),$

- $f(x) = x^2,$

- $f(x) = \exp(x).$

Donner une condition suffisante pour qu'une fonction soit lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exercice 3:

- Énoncer la définition d'une équation différentielle autonome scalaire du premier ordre.
- Énoncer la définition d'une équation différentielle non-autonome scalaire du premier ordre.
- Énoncer le Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz pour l'existence et l'unicité de solution sur la droite réelle.

Exercice 4:

- Énoncer la définition d'une équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants avec et sans second membre.
- Est-ce que ces deux derniers admettent une solution définie sur \mathbb{R} ?
- Donner la forme de la solution générale de ces deux derniers.

Exercice 5:

Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $\dot{x} = 2x,$

3) $\dot{x} = ax + 3, \quad a \in \mathbb{R},$

2) $\dot{x} = 2x + 1,$

4) $\dot{x} = ax + b, \quad (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$

Exercice 6:

Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $\dot{x} = tx,$

3) $\dot{x} = tx + 1,$

2) $\dot{x} = 2x + t,$

4) $\dot{x} = tx + t.$

Exercice 7:

Est-ce-que les fonctions $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1) $f(t, x) = t + x,$ | $I = \mathbb{R}$ et $D = \mathbb{R},$ |
| 2) $f(t, x) = t^2 + x^2,$ | $I = \mathbb{R}$ et $D = \mathbb{R},$ |
| 3) $f(t, x) = tx^2,$ | $I = \mathbb{R}$ et $D = \mathbb{R},$ |
| 4) $f(t, x) = \ln(t + x),$ | $I = \mathbb{R}_+^*$ et $D = \mathbb{R}_+^*,$ |
| 5) $f(t, x) = \frac{x}{1-t},$ | $I = [0, 1[$ et $D = \mathbb{R},$ |
| 6) $f(t, x) = \sin(t) \cos(x),$ | $I = \mathbb{R}$ et $D = \mathbb{R},$ |

sont localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$?

Donner une condition suffisante pour qu'une fonction $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ soit localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$ où I et D sont deux intervalles de \mathbb{R} .

Exercice 8:

On considère sur \mathbb{R} le problème de Cauchy suivant

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = x^2, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$ le problème de Cauchy (E) admet une solution locale sur \mathbb{R} .
- 2) Trouver la solution maximale sur \mathbb{R} lorsque $(t_0, x_0) = (1, 1)$, lorsque $(t_0, x_0) = (1, -5)$ et lorsque $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

Exercice 9:

Montrer que les équations différentielles suivantes n'admettent pas de solutions sur \mathbb{R}

- $\frac{d}{dt}x = \exp(1 + x^2).$
- $\frac{d}{dt}x = \frac{1+x^2}{2+\sin(x)}.$
- $\frac{d}{dt}x = \ln\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) - x^2.$

Exercice 10:

Résoudre les équations différentielles suivantes

- $\frac{d}{dt}x = \cos(t) \sin(x)$.
- $\frac{d}{dt}x = \exp(t) \exp(x)$.
- $\frac{d}{dt}x = x + x^2$.
- $\frac{d}{dt}x = 1 + 5x + x^2$.

Exercice 11:

Intégrer les équations différentielles suivantes

- $\frac{d}{dt}x = 1 - 4 \sin(x)$,
- $\frac{d}{dt}x = 1 - 4 \sin(x) + \cos(x)$.

Exercice 12:

Est-ce-que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ le problème de Cauchy suivant admet une solution globale sur \mathbb{R}

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = \sin(x + y), \\ \frac{d}{dt}y = \cos(y - x), \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

Si oui, pourquoi?

Exercice 13:

Intégrer l'équation différentielle suivante

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = \cos(t)y + \sin(t), \\ \frac{d}{dt}y = \cos(t)x - \sin(t), \\ (x(0), y(0)) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 14:

Soit $\lambda \in [0, 1]$. Est-ce-que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant admet une

solution $Z_\lambda(t) = (x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ sur $[0, 1]$?

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = \sin(\lambda(x + y)), \\ \frac{d}{dt}y = \sin(\lambda(x - y)), \\ (x(0), y(0)) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \lambda_\epsilon \in [0, 1] : \max_{t \in [0, 1]} \|Z_\lambda(t)\| < \epsilon, \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_\epsilon].$$

Exercice 15: [Solution locale]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $D \subset E = \mathbb{R}^n$ un connexe de E . Soit $f : I \times D \rightarrow E$ une fonction continue. Soit le problème de Cauchy

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

avec $(t_0, X_0) \in I \times D$. Supposons que f es localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$. Montrer que pour tout $(t_0, X_0) \in I \times D$ il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel que le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur J .

Exercice 16:

Intégrer, avec deux méthodes différentes, les équations différentielles suivantes

$$(E1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = y + a, \\ \frac{d}{dt}y = x + b, \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0), \\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}, \quad (E2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = x + 2y + \sin(t), \\ \frac{d}{dt}y = y + 2x + \cos(t), \\ (x(0), y(0)) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 17:

Soit $N \in \mathbb{N}$.

(1) Soit le problème de Cauchy sur \mathbb{R} dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(P.C, \lambda) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} X_\lambda = F(t, X_\lambda, \lambda), \\ X_\lambda(0) = 0_{\mathbb{R}^N}, \end{cases}$$

où $0_{\mathbb{R}^N} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^1 de différentielle bornée et telle que $F(t, 0_{\mathbb{R}^N}, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^N}$ pour tout t et λ dans \mathbb{R} . Posons $g_n(t) = X_{\frac{1}{n}}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la limite de la suite de fonctions $(g_n)_n$?

(2) Énoncer le théorème d'existence locale d'une solution du problème de Cauchy

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

où $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ et $f : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ avec I un intervalle de \mathbb{R} .

Exercice 18:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère sur $]0, +\infty[$ le problème de Cauchy suivant

$$(E1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x = \frac{x^2}{t}, \\ x(1) = \alpha. \end{cases}$$

1) Calculer $x(t)$ en fonction de α et calculer son intervalle maximal.

2) Posons I_α l'intervalle maximal de la solution $x(t)$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\pi \in I_\alpha$?

Exercice 19:

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On considère sur \mathbb{R} le problème de Cauchy suivant

$$(E2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = 1 + \beta x - x^2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

- 1) Est ce que le problème de Cauchy (E2) admet une solution locale dans \mathbb{R} ? Si oui, pourquoi?
- 2) Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ le problème (E2) admet une solution sur $] - \infty, 1[$.
- 3) Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ le problème (E2) admet une solution sur \mathbb{R} .

Exercice 20:

Soient t_0 et x_0 dans \mathbb{R} . On considère sur \mathbb{R} le problème de Cauchy suivant

$$(E3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = (1 + x^2)^2, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

- 1) Est ce que le problème de Cauchy (E3) admet une solution locale dans \mathbb{R} ? Si oui, pourquoi?
- 2) Montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ le problème précédent n'admet pas de solution sur \mathbb{R} .

Exercice 21:

Résoudre les équations suivantes

- $y'' = y + 1$.
- $y'' = y' + 2y + 1$.
- $y''' = y'' + y' + y + 1$.
- $y''' = 2y' + y + 1$.
- $y''' = 2y'' + y' + 3$.

Exercice 22:

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction lipschitzienne par rapport à la deuxième

variable uniformément sur \mathbb{R} . Soit l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0. \quad (7.1)$$

Notons Φ^t le flot de l'équation (7.1). Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a les propriétés suivantes

- $\Phi^0 = Id$ où $Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction identité, d'un autre terme $\forall X \in \mathbb{R}^n : \Phi^{t_0}(X) = X$.
- Φ^t est continue.
- Pour tout $t, s > t_0$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\Phi^s(\Phi^t(X)) = \Phi^{s+t}(X)$.
- Si le système (7.1) est linéaire alors Φ^t est linéaire.

Exercice 23:

Soit le système linéaire suivant

$$\dot{X} = AX + B(t), \quad (7.2)$$

où A est une matrice d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants et $B(t)$ est un vecteur de taille n à coefficients dépendant du temps t . Montrer que le système (7.2) admet une solution stable si et seulement si le point stationnaire du système linéaire homogène

$$\dot{X} = AX,$$

est stable.

Exercice 24:

Soit le système linéaire suivant

$$\dot{X} = AX, \quad (7.3)$$

où A est une matrice d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants. Montrer que le point stationnaire est stable si et seulement si le système (7.2) admet une solution bornée.

Exercice 25:

Soit A est une matrice d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants Supposons que la solution nulle du système

$$\dot{X} = AX, \quad t \geq 0 \in \mathbb{R}$$

est exponentiellement stable. Notons par Φ^t le flot. Montrer qu'il existe $t_* \geq t_0$ tel que toute boule fermée de centre $0_{\mathbb{R}^n}$ est positivement invariante par la translation du flot Φ^{t+t_*} .

Questions et exercices d'examen

Exercice 26 (Questions du Cours : 4 points):

Soit $N \in \mathbb{N}$.

(1) Donner la définition d'une fonction $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^N$ localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$ où $I \subset \mathbb{R}$ et $D \subset \mathbb{R}^N$.

(2) Soit le problème de Cauchy sur \mathbb{R} dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(P.C, \lambda) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} X_\lambda(t) = F(t, X_\lambda(t), \lambda), \\ X_\lambda(0) = 0_{\mathbb{R}^N}, \end{cases}$$

où $0_{\mathbb{R}^N} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^1 de différentielle bornée et telle que $F(t, 0_{\mathbb{R}^N}, \lambda) = 0_{\mathbb{R}^N}$ pour tout t et λ dans \mathbb{R} . Posons $g_n(t) = X_{\frac{1}{n}}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la limite de la suite de fonctions $(g_n)_n$?

(3) Énoncer le théorème d'existence locale d'une solution du problème de Cauchy

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

où $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ et $f : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ avec I un intervalle de \mathbb{R} .

Exercice 27 (5 points):

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère sur $]0, +\infty[$ le problème de Cauchy suivant

$$(E1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = \frac{x^2(t)}{t}, \\ x(1) = \alpha. \end{cases}$$

1) Calculer $x(t)$ en fonction de α et calculer son intervalle maximal.

2) Posons I_α l'intervalle maximal de la solution $x(t)$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\pi \in I_\alpha$?

Exercice 28: [5 points]

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On considère sur \mathbb{R} le problème de Cauchy suivant

$$(E2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 1 + \beta x(t) - x^2(t), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

- 1) Est ce que le problème de Cauchy (E2) admet une solution locale dans \mathbb{R} ? Si oui, pourquoi?
- 2) Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ le problème (E2) admet une solution sur $] - \infty, 1[$.
- 3) Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ le problème (E2) admet une solution sur \mathbb{R} .

Exercice 29: [6 points]

Soient t_0 et x_0 dans \mathbb{R} . On considère sur \mathbb{R} le problème de Cauchy suivant

$$(E3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = (1 + x^2(t))^2, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

- 1) Est ce que le problème de Cauchy (E3) admet une solution locale dans \mathbb{R} ? Si oui, pourquoi?
- 2) Montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ le problème précédent n'admet pas de solution sur \mathbb{R} .

Exercice 30 (Questions du Cours : 3 points):

- (1) Énoncer le lemme de Gronwall.

(2) Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit le problème de Cauchy sur \mathbb{R} suivant

$$(P.C) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} X_\lambda(t) = F(G(t, X(t))), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

où $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Les deux fonctions $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ sont de classe C^1 de différentielles bornées. Pourquoi le problème précédent (P.C) admet une solution sur \mathbb{R} ?

Exercice 31 (6 points):

Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$. On considère sur $]0, +\infty[$ le problème de Cauchy suivant

$$(E1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = \frac{x^\alpha(t)}{t}, \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

1) Calculer $x(t)$ en fonction de α et calculer son intervalle maximal.

2) Posons I_α l'intervalle maximal de la solution $x(t)$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $I_\alpha =]0, +\infty[$?

Exercice 32: [6 points]

Intégrer les équations différentielles suivantes

- $\frac{d}{dt} x(t) = 1 - 4 \sin(x(t)),$
- $\frac{d}{dt} x(t) = 1 - 4 \sin(x(t)) + \cos(x(t)).$

Exercice 33: [5 points]

Soient $\beta \in \mathbb{N}$ et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On considère sur \mathbb{R} le problème de Cauchy suivant

$$(E3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = (1 + x^2(t))^\beta, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de β le problème précédent admet une solution sur \mathbb{R} ?