

Table des matières

1	Rappels, notations, prérequis	5
1.1	Rappels d'analyse	5
1.1.1	Notations	5
1.1.2	Espaces fonctionnels	5
1.1.3	Applications linéaires	6
1.1.4	Suites régularisantes	7
1.1.5	Localisation, partition de l'unité	8
1.2	Principaux opérateurs différentiels	8
1.3	Notions de géométrie différentielle	9
1.3.1	Régularité des ouverts de \mathbb{R}^N	9
1.3.2	Mesure surfacique	11
1.4	Formule de Green	12
1.5	Rappels de théorie de la mesure	13
1.5.1	Espaces L^p	13
1.5.2	Quelques résultats essentiels	14
1.5.3	Intégration en coordonnées polaires sur \mathbb{R}^N	17
1.6	Rappels sur la transformée de Fourier	17
1.7	Exercices sur le chapitre 1	19
2	Les espaces de Sobolev	25
2.1	Définitions et premières propriétés	25
2.2	Résultats de densité, les espaces $H_0^m(\Omega)$	31
2.2.1	Inégalité de Poincaré	34
2.3	Injections continues, compactes	35
2.4	Trace d'une fonction	39
2.4.1	Cas du demi-espace	39
2.4.2	Cas d'un ouvert régulier quelconque	42
2.4.3	Retour sur la formule de Green	42
2.5	Exercices sur le chapitre 2	43
3	Formulation variationnelle de problèmes elliptiques	51
3.1	Nomenclature des edp linéaires	51
3.2	Le problème de Dirichlet	53
3.3	Un peu d'algèbre linéaire	55
3.4	Existence d'une solution au problème de Dirichlet	57
3.5	Régularité des solutions	58
3.5.1	Un problème de Dirichlet sur tout l'espace	58
3.5.2	Un problème de Dirichlet sur le demi-espace	59
3.5.3	Cas d'un ouvert Ω quelconque	59
3.6	Conditions aux limites non homogènes	62

3.7	Le problème de Neumann	64
3.8	Méthode générale d'étude d'un problème elliptique	67
3.9	Exercices sur le chapitre 3	67
A	Quelques méthodes élémentaires de résolution des edp	75
A.1	L'équation de la chaleur par séparation des variables	75
A.2	L'équation des ondes par la méthode des caractéristiques	76
A.3	Une équation de transport	77
A.4	L'équation de Laplace par séparation des variables	77
A.5	L'équation de Laplace par la formule de Poisson	78
B	TP Matlab	81
B.0.1	Mise en place du système linéaire	82
C	Démonstrations des résultats techniques	85
C.1	Démonstrations des résultats du chapitre 2	85
C.2	Démonstrations des résultats du chapitre 3	90

Chapitre 1

Rappels, notations, prérequis

Ce premier chapitre a pour but de présenter (ou de rappeler) un certain nombre d'outils d'analyse, de théorie de la mesure et de géométrie différentielle qui seront utilisés dans la suite du cours. Nous en profiterons également pour introduire les principales notations.

1.1 Rappels d'analyse

1.1.1 Notations

On notera $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ les éléments de \mathbb{R}^N ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$), $|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ est la norme euclidienne de \mathbf{x} et $B(\mathbf{x}, R)$ est la boule ouverte de centre \mathbf{x} et de rayon R . Nous désignerons par \mathbb{R}_+^N le demi-espace de \mathbb{R}^N . Plus précisément notant $\mathbf{x}' := (x_1, \dots, x_{N-1})^T$ les éléments de \mathbb{R}^{N-1} et $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_N)^T$ ceux de \mathbb{R}^N , on pose :

$$\mathbb{R}_+^N := \{(\mathbf{x}', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : x_N > 0\}.$$

Un vecteur $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ est appelé un multi-indice et $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ est la longueur du multi-indice. Pour toute fonction $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, on note :

$$D^\alpha F(\mathbf{x}) := \frac{\partial^{|\alpha|} F(\mathbf{x})}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_N} x_N}.$$

Si $\alpha = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{N}^N$, on adopte la convention $D^\alpha F(\mathbf{x}) := F(\mathbf{x})$. De même, on notera pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$:

$$\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}.$$

1.1.2 Espaces fonctionnels

L'espace des fonctions C^∞ à support compact inclus dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^N est noté $\mathcal{D}(\Omega)$ (espace des fonctions test). On dira qu'une suite de fonctions $(u_n)_n$ converge vers u dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

1. Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^N$ contenant les supports de toutes les fonctions u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{x} \in K} |D^\alpha u_n(\mathbf{x}) - D^\alpha u(\mathbf{x})| = 0$, pour tout α multi-indice.

L'espace des distributions à support dans Ω est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, on le note $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide (espace de Schwartz¹) c'est-à-dire des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ (multi-indices),

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}^\alpha D^\beta \varphi(\mathbf{x})| = 0,$$

1. Laurent Schwartz (5 mars 1915, Paris - 4 juillet 2002, Paris) est un des mathématiciens français les plus connus. Il obtint la Médaille Fields en 1950 pour ses travaux sur la théorie des distributions. Son frère, Bertrand Schwartz, a dirigé l'école des Mines de Nancy.

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$. On dira qu'une suite de fonctions $(u_n)_n$ converge vers u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} |\mathbf{x}^\alpha (D^\beta u_n(\mathbf{x}) - D^\beta u(\mathbf{x}))| = 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^N, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

Le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, l'espace des distributions tempérées.

Pour tout Ω ouvert de \mathbb{R}^N , on dira qu'une suite de fonctions $(u_n)_n$ de $C^k(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$) converge lorsqu'elle converge uniformément sur tout compact de Ω ainsi que les suites $(D^\alpha u_n)_n$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leq k$.

On note $C^k(\bar{\Omega})$ l'ensemble des restrictions des fonctions u de $C^k(\mathbb{R}^N)$ à $\bar{\Omega}$ qui vérifient en outre

$$\lim_{\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in \Omega}} |D^\alpha u(\mathbf{x})| = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \quad |\alpha| \leq k,$$

lorsque Ω n'est pas borné. La topologie de $C^k(\bar{\Omega})$ est celle de la convergence uniforme pour la fonction et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k sur $\bar{\Omega}$. Comme $\bar{\mathbb{R}}^N = \mathbb{R}^N$, on adopte la notation $\mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N)$ pour désigner l'ensemble des fonctions de \mathbb{R}^N , k fois continûment différentiables et qui tendent vers 0 ainsi que toutes leurs dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k lorsque $|\mathbf{x}|$ tend vers $+\infty$.

★ Il convient de bien faire la différence entre les topologies de $C^k(\Omega)$ et $C^k(\bar{\Omega})$.

1.1.3 Applications linéaires

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach² tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans F . Cette application permet de considérer E comme un sous-ev de F . On notera $E \hookrightarrow F$. On dira que cette injection est :

- Continue, et on notera $E \xrightarrow[\text{continue}]{} F$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_F \leq C\|u\|_E$ pour tout $u \in E$.
- Compacte, notée $E \xrightarrow[\text{compacte}]{} F$, si de toute suite bornée dans E (**pour la norme de E**), il est possible d'extraire une sous-suite qui converge dans F (**pour la norme de F**).
- Dense, notée $E \xrightarrow[\text{dense}]{} F$, si pour tout $u \in F$ il existe une suite $(u_n)_n \subset E$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ (la convergence étant **pour la norme de F**).

Exercice 1.1. Sachant que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \xrightarrow[\text{continue}]{} \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \xrightarrow[\text{dense}]{} \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \xrightarrow[\text{continue}]{} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \xrightarrow[\text{dense}]{} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 1.2. Montrer que si une injection est compacte alors elle est aussi continue.

Solution. La solution repose sur un raisonnement de type *compacité-unicité* qui est très classique et que nous retrouverons souvent dans d'autres exercices.

Supposons que pour toute constante $C > 0$, il existe un élément $u \in E$ tel que $C\|u\|_E < \|u\|_F$. En particulier, pour $C = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) il existe $u_n \in E$ tel que

$$\frac{1}{n} \|u_n\|_F > \|u_n\|_E. \tag{1.1}$$

Cette inégalité entraîne que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. Quitte à remplacer u_n par $u_n/\|u_n\|_F$, on peut supposer que $\|u_n\|_F = 1$ pour tout $n > 0$. De l'inégalité (1.1), on déduit que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans E est donc qu'elle admet une sous-suite convergente dans F . Pour simplifier les notations, on note encore $(u_n)_n$ cette sous-suite convergente vers un élément $u^* \in F$. Comme $\|u_n\|_F = 1$ pour tout $n > 0$, on a encore $\|u^*\|_F = 1$. Mais l'inégalité (1.1) entraîne encore que u_n tend vers 0 dans E , d'où la contradiction.

Rappelons le théorème de prolongement des applications linéaires continues :

2. Stefan Banach (1892 - 1945) était un mathématicien polonais.

Théorème 1.1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et \tilde{E} un sous-espace de E dense dans E . Soit $T : \tilde{E} \rightarrow F$ une application linéaire continue de norme

$$\|T\| := \sup_{\substack{u \in \tilde{E} \\ u \neq 0}} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E}.$$

Alors, T se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de E dans F . De plus l'application ainsi prolongée a la même norme que T .

1.1.4 Suites régularisantes

On définit la fonction $\tilde{\rho} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|\mathbf{x}|^2}\right) & \text{si } |\mathbf{x}| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |\mathbf{x}| > 1. \end{cases}$$

Cette fonction est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et vérifie $\text{supp } \tilde{\rho} = \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$. On pose alors $\rho := \tilde{\rho} / \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ qui est également dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. La suite $(\rho_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ définie par $\rho_n(\mathbf{x}) = n^N \rho(n\mathbf{x})$ est appelée suite régularisante et vérifie :

1. $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $\text{supp } \rho_n = \overline{B(\mathbf{0}, 1/n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

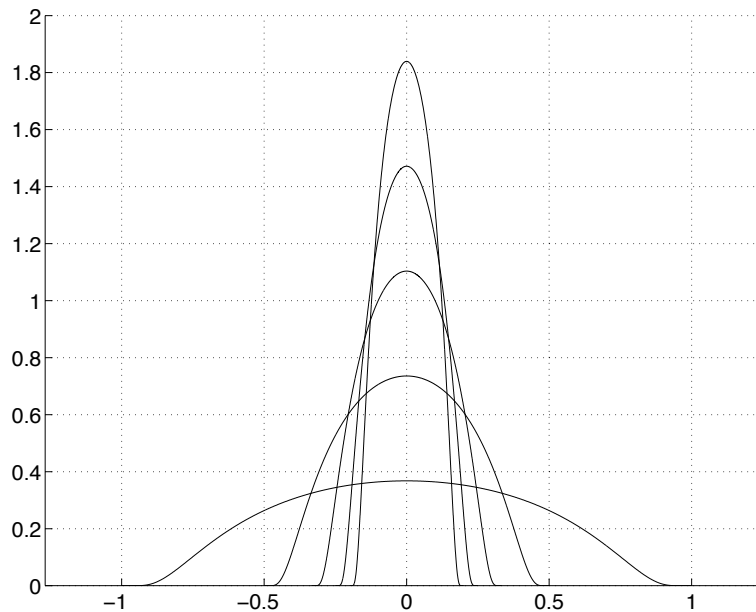


FIGURE 1.1 – Graphes des fonctions ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 et ρ_4 .

Exercice 1.3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $u \in C^0(\Omega)$ et $K \subset \Omega$. On définit, pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ et n tel que $B(\mathbf{x}, 1/n) \subset \Omega$:

$$u_n(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} \rho_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

1. Montrer que pour n suffisamment grand, u_n est bien défini et est C^∞ sur tout ouvert Ω' tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

2. Montrer que si $\bar{\Omega}'$ est compact, alors $u_n \rightarrow u$ dans $C^0(\bar{\Omega}')$ quand $n \rightarrow +\infty$.
3. On suppose maintenant que Ω est borné et que $u \in C^0(\bar{\Omega})$. Alors, par définition, u est la restriction à Ω d'une fonction $\tilde{u} \in C^0(\mathbb{R}^N)$. On définit alors :

$$\tilde{u}_n(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} \rho_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tilde{u}(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

pour tout $n \geq 1$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Montrer que $\tilde{u}_n|_{\Omega} \rightarrow u$ dans $C^0(\bar{\Omega})$ (i.e. uniformément sur Ω) quand $n \rightarrow +\infty$.

1.1.5 Localisation, partition de l'unité

Les résultats suivants ont (normalement) été démontrés dans le cours d'analyse du premier semestre :

Lemme 1.2 (Partition de l'unité). *Soit K un compact de \mathbb{R}^N et U_1, U_2, \dots, U_m des ouverts tels que $K \subset \cup_{i=1}^m U_i$. Alors il existe $\alpha_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et m fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telles que*

1. $0 \leq \alpha_i \leq 1, \forall i = 0, 1, \dots, m$ et $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ sur \mathbb{R}^N .
2. $\text{supp} \alpha_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus K$ et $\text{supp} \alpha_i \subset U_i, i = 1, \dots, m$.

Dans le cas particulier où $m = 1$ nous obtenons :

Lemme 1.3 (Localisation). *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et K un compact inclus dans Ω . Alors il existe une fonction $\zeta_K \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que*

1. $0 \leq \zeta_K(\mathbf{x}) \leq 1$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$,
2. $\zeta_K(\mathbf{x}) = 1$ pour tout $\mathbf{x} \in K$.

1.2 Principaux opérateurs différentiels

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Pour toute fonction $\mathbf{F} := (F_1, F_2, \dots, F_p)^T : \mathbf{x} \in \Omega \mapsto (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_p(\mathbf{x}))^T \in \mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) de classe C^1 , on note :

$$\mathbb{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

la matrice Jacobienne de \mathbf{F} au point \mathbf{x} . Si $p = N$, on dit que \mathbf{F} est un champ de vecteurs et sa matrice Jacobienne est alors une matrice carrée. On définit la divergence de \mathbf{F} par :

$$\text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) := \text{tr} \mathbb{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Soit $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On note alors :

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \right)^T,$$

le gradient de φ . Si φ est de classe C^2 , on définit le laplacien de φ par :

$$\Delta \varphi(\mathbf{x}) := \text{div}(\nabla \varphi(\mathbf{x})) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_N^2}(\mathbf{x}).$$

Exercice 1.4. Soit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^1 .

1. Montrer que la divergence de \mathbf{F} est invariante par changement de bases.
2. En déduire que le laplacien d'une fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 est invariant par changement de bases orthonormées.

Solution. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de l'espace \mathbb{R}^N . On note \mathbf{x} les coordonnées des vecteurs dans la base \mathcal{B} , \mathbf{y} dans la base \mathcal{B}' avec $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ où P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . De même, on note $\mathbf{G}(\mathbf{y}) := P^{-1}\mathbf{F}(P\mathbf{y})$. La formule de dérivation d'une fonction composée nous donne

$$\mathbb{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{G}(\mathbf{y}) = P^{-1}\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(P\mathbf{y})P,$$

puis, en invoquant l'invariance de la trace par changement de bases, $\operatorname{div}_{\mathbf{y}}(\mathbf{G})(\mathbf{y}) = \operatorname{tr}(\mathbb{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{G}(\mathbf{y})) = \operatorname{tr}(P^{-1}\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(P\mathbf{y})P) = \operatorname{tr}(\mathbb{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(P\mathbf{y})) = \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{F})(\mathbf{x})$.

Lorsque les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont orthogonales, alors $P^{-1} = P^T$. On note $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})^T$, $\phi(\mathbf{y}) := \varphi(P\mathbf{x})$ et $\mathbf{G}(\mathbf{y}) := \nabla_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y})^T$. On a alors (formule de dérivation d'une composée) $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = P^T\mathbf{F}(P\mathbf{y}) = P^{-1}\mathbf{F}(P\mathbf{y})$ et l'on peut appliquer le résultat précédent.

1.3 Notions de géométrie différentielle

Les équations aux dérivées partielles (edp) sont généralement posées sur des ouverts de \mathbb{R}^N . La géométrie de ces ouverts (il ne faut pas qu'ils soient trop *irréguliers*) sera un élément important qui devra être pris en compte lors de la résolution.

1.3.1 Régularité des ouverts de \mathbb{R}^N

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $\Gamma := \partial\Omega$. On dira que Ω (où de façon équivalente que Γ) est de classe C^k ($k \geq 1$) si Γ est une sous-variété orientée de \mathbb{R}^N de dim $N - 1$ et de classe C^k et si Ω est localement toujours du même côté de Γ (cf. figure 1.2). Pour la suite du cours, il n'est pas absolument nécessaire d'en savoir

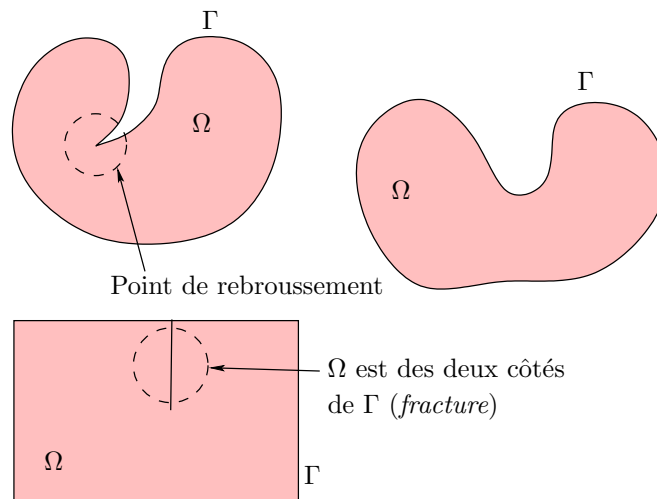


FIGURE 1.2 – Deux *mauvais* ouverts à gauche et un *bon* ouvert à droite.

beaucoup plus. Néanmoins, nous allons quand même préciser un peu ces notions. La régularité de Γ peut se traduire de deux façons différentes :

A. Rectification par cartes locales

Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, on note $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_N)^T$ où $\mathbf{x}' := (x_1, \dots, x_{N-1})^T \in \mathbb{R}^{N-1}$. Nous désignerons par Q le cylindre ouvert de \mathbb{R}^N :

$$Q := \{(\mathbf{x}', x_N)^T \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |\mathbf{x}'| < 1, |x_N| < 1\}.$$

Définissons également :

$$Q_+ := \{(\mathbf{x}', x_N)^T \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |\mathbf{x}'| < 1, 0 < x_N < 1\},$$

$$Q_- := \{(\mathbf{x}', x_N)^T \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |\mathbf{x}'| < 1, -1 < x_N < 0\},$$

ainsi que :

$$Q_0 := \{(\mathbf{x}', 0)^T \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |\mathbf{x}'| < 1\}.$$

Définition 1.1. On dit que Ω est de classe C^k si pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$, il existe un couple (U, ϕ) (une carte locale) où U est un ouvert de \mathbb{R}^N contenant \mathbf{x} et $\phi \in C^k(\bar{U})$ un difféomorphisme de U dans Q tel que :

1. $\phi^{-1} \in C^k(\bar{Q})$,
2. $\phi(\Gamma \cap U) = Q_0$,
3. $\phi(\Omega \cap U) = Q_+$.

On notera $\psi := \phi^{-1}$.

Définition 1.2. Dans toute la suite du cours, on notera $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ le vecteur unitaire normal sortant (c'est à dire dirigé vers l'extérieur de Ω) au point $\mathbf{x} \in \Gamma$. Si u est une fonction assez régulière définie sur $\bar{\Omega}$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) := \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

la dérivée normale de u sur Γ .

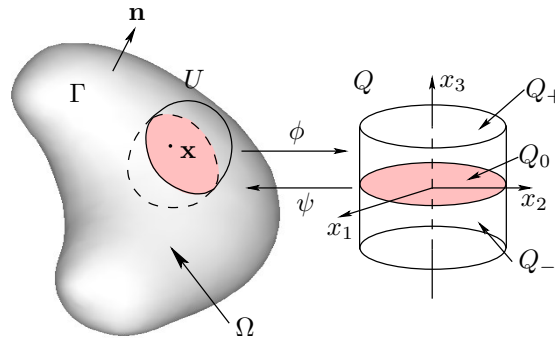


FIGURE 1.3 – L'ouvert $U \cap \Omega$ est difféomorphe à Q_+ . Ici $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{x}' = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$.

B. Paramétrisation

Une autre façon de traduire le fait que Ω soit de classe C^k consiste à dire : pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$, il existe un repère orthonormé \mathcal{R} de \mathbb{R}^N centré en \mathbf{x} (on note alors $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ les coordonnées d'un point \mathbf{y} dans \mathcal{R}) et il existe un cylindre ouvert :

$$Q(\delta, \delta') := \{(\mathbf{y}', y_N) \in \mathbb{R}^N : |\mathbf{y}'| < \delta', |y_N| < \delta\},$$

et une fonction de classe C^k , $\varphi : B(\mathbf{0}, \delta') \subset \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

1. $Q(\delta, \delta') \cap \Omega = \{(\mathbf{y}', y_N) \in Q(\delta, \delta') : y_N > \varphi(\mathbf{y}')\}$,
2. $Q(\delta, \delta') \cap \Gamma = \{(\mathbf{y}', y_N) \in Q(\delta, \delta') : y_N = \varphi(\mathbf{y}')\}$.

Cela signifie que Ω est localement l'épigraphe d'une fonction de classe C^k (cf. figure 1.4). Avec cette approche, le vecteur unitaire normal sortant $\mathbf{n}(\mathbf{y}', \varphi(\mathbf{y}'))$ est donné dans le repère local \mathcal{R} par la formule :

$$\mathbf{n}(\mathbf{y}', \varphi(\mathbf{y}')) = \frac{(\nabla \varphi(\mathbf{y}'), -1)^T}{\sqrt{|\nabla \varphi(\mathbf{y}')|^2 + 1}}. \quad (1.2)$$

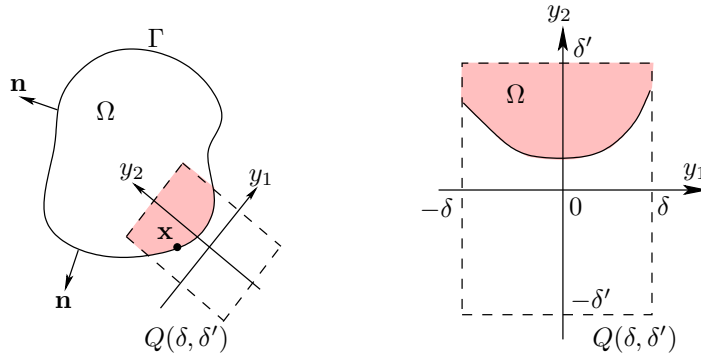


FIGURE 1.4 – le bord Γ de Ω est localement le graphe d'une fonction de classe C^k .

1.3.2 Mesure surfacique

Plus loin dans la cours, nous aurons besoin d'intégrer des fonctions sur le bord d'un ouvert *régulier*. Pour ce faire, nous devons définir ce qu'est la mesure sur une hyper-surface de \mathbb{R}^N . Comme précédemment, on note Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , ici de classe C^1 et $\Gamma := \partial\Omega$. On peut toujours décomposer la frontière Γ en une union disjointe de Γ_i (union finie si Γ est compacte et éventuellement infinie dénombrable si Γ n'est pas compacte) telle que chaque Γ_i soit le graphe d'une fonction φ_i dans un repère approprié (cf. le paragraphe précédent). On pose ensuite, pour toute fonction f définie sur Γ :

$$\int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) \, d\Gamma := \sum_i \int_{\Gamma_i} f(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}')) \sqrt{|\nabla \varphi_i(\mathbf{y}')|^2 + 1} \, d\mathbf{y}'. \quad (1.3)$$

On admet que cette définition ne dépend pas du choix de la décomposition de Γ en $\cup_i \Gamma_i$ ni du choix des fonctions φ_i .

Exercice 1.5. Déterminer la mesure surfacique sur le bord Γ_R de la boule de centre $\mathbf{0}$ et de rayon $R > 0$ dans \mathbb{R}^3 .

Solution. La sphère Γ_R est localement le graphe d'une fonction $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ où $U := B(\mathbf{0}, R) \subset \mathbb{R}^2$ et $\varphi(x_1, x_2) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$. On calcule alors que

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \left(\frac{-x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{-x_2}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} \right),$$

puis que

$$\sqrt{|\nabla \varphi(\mathbf{x})|^2 + 1} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}.$$

On a donc, pour toute fonction f intégrable sur la sphère :

$$\int_{\Gamma_R} f(\mathbf{x}) \, d\Gamma = \int_{B(\mathbf{0}, R)} f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) \frac{R \, d\mathbf{x}}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}.$$

Nous n'aurons pas besoin dans la suite du cours de calculer *explicitement* la mesure surfacique des ouverts considérés. Cependant la formule (1.3) nous servira à démontrer les formules d'intégrations du paragraphe suivant.

1.4 Formule de Green

La formule de Green³ est un outil fondamental pour la résolution des edp. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Théorème 1.4. (Formule d'Ostrogradsky⁴) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et Γ son bord. Soit \mathbf{F} une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ à valeurs dans \mathbb{R}^N (un champ de vecteurs). Alors :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(x) \, d\Gamma.$$

Remarque 1.1. Dans cette formule, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est le vecteur unitaire normal à Γ au point \mathbf{x} , dirigé vers l'extérieur de Ω (cf. définition 1.2).

Démonstration. Pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$, il existe un ouvert $Q(\delta, \delta')$, un repère \mathcal{R} et une fonction φ comme décrit dans le paragraphe (1.3.1). D'autre part, il est toujours possible de définir des ouverts U de \mathbb{R}^N et \mathcal{O} de \mathbb{R}^{N-1} tels que dans le repère \mathcal{R} , $U := \{(\mathbf{y}', \varphi(\mathbf{y}') + t) : \mathbf{y}' \in \mathcal{O}, |t| < \delta/2\} \subset Q(\delta, \delta')$ et on peut recouvrir le compact Γ avec un nombre fini U_i $i = 1, \dots, m$ de tels ouverts. On introduit alors une partition de l'unité $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ comme dans le lemme 1.2) assujettie à ce recouvrement et on note $\mathbf{F}_i := \alpha_i|_{\Omega} \mathbf{F}$. On obtient la décomposition $\mathbf{F} = \sum_{i=0}^m \mathbf{F}_i$ vérifiant $\operatorname{supp} \mathbf{F}_0 \cap \Gamma = \emptyset$ et où chaque $\operatorname{supp} \mathbf{F}_i$ pour $i = 1, \dots, m$ est inclus dans U_i . On vérifie facilement que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}_0(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Dans le repère local \mathcal{R} on note

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{y}', y_N) &= (F_{i,1}(\mathbf{y}', y_N), \dots, F_{i,N-1}(\mathbf{y}', y_N), F_{i,N}(\mathbf{y}', y_N))^T \\ &= (\mathbf{F}'_i(\mathbf{y}', y_N), F_{i,N}(\mathbf{y}, y_N))^T, \end{aligned}$$

et la relation

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}_i(\mathbf{y})) \, d\mathbf{y} = \int_{\Gamma} \mathbf{F}_i(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \, d\Gamma,$$

se traduit par :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \int_0^{\delta/2} \operatorname{div}_{\mathbf{y}'}(\mathbf{F}'_i)(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}') + t) + \frac{\partial F_{i,N}}{\partial y_N}(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}') + t) \, dt \, d\mathbf{y}' \\ = \int_{\mathcal{O}} F_{i,N}(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}')) - \mathbf{F}'_i(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}')) \cdot \nabla \varphi_i(\mathbf{y}') \, d\mathbf{y}', \quad (1.4) \end{aligned}$$

en tenant compte de l'expression (1.2) du vecteur normal $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. On pose alors $\tilde{\mathbf{F}}'_i(\mathbf{y}', t) = \mathbf{F}'_i(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}') + t)$ et la formule de dérivation d'une composée nous donne :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{y}'}(\mathbf{F}'_i)(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}') + t) = \operatorname{div}_{\mathbf{y}'} \tilde{\mathbf{F}}'_i(\mathbf{y}', t) - \frac{\partial \mathbf{F}'_i}{\partial y_N}(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}') + t) \cdot \nabla \varphi_i(\mathbf{y}').$$

3. George Green (juillet 1793-31 mai 1841), physicien britannique.

4. Mikhail Vasilievich Ostrogradsky (1801, Pachenna, Ukraine - 1861, Poltava, Ukraine), né Michel Vassilievitch est un physicien et mathématicien russe.

Or, à t fixé, $\text{supp } \tilde{F}'_i(\cdot, t) \subset \mathcal{O}$ et comme

$$\int_{\mathcal{O}} \text{div}_{\mathbf{y}'} \tilde{\mathbf{F}}'_i(\mathbf{y}', t) \, d\mathbf{y}' = 0, \quad \forall t \in]0, \delta/2[,$$

on en déduit la formule du théorème. \square

On déduit de ce théorème le

Corollaire 1.5 (Formule de Green). *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 . Alors pour toutes fonctions $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et $v \in C^1(\bar{\Omega})$ on a :*

$$\int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

où $\partial u / \partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) := \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ (dérivée normale de u , cf. définition 1.2).

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule d'Ostrogradsky avec $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := v(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})$ et de remarquer que

$$\text{div}(v(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = v(\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{x}) + \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}).$$

\square

Dans la démonstration de la formule d'Ostrogradsky (et donc aussi de Green) il est possible de considérer plus généralement des ouverts C^1 par morceaux (c'est à dire dont la frontière est localement le graphe d'une fonction C^1 par morceaux, comme par exemple un rectangle de \mathbb{R}^2). Dans ce cas, le vecteur normal n'est défini que presque partout sur Γ . Plus loin dans ce cours, nous montrerons que ces formules (Ostrogradsky et Green) ont encore un sens pour des fonctions beaucoup moins régulières que ce qui est donné dans ce chapitre.

1.5 Rappels de théorie de la mesure

1.5.1 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . L'espace $L^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables (pour la tribu de Borel) intégrables (pour la mesure de Lebesgue ⁵ $d\mathbf{x}$) sur Ω . On note :

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} := \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

On définit ensuite pour tout $1 \leq p < \infty$ l'espace :

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

que l'on munit de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Lorsque $p = \infty$, on a la définition suivante :

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \exists C \in \mathbb{R}_+ \text{ telle que } |f| \leq C \text{ p.p.}^6\},$$

dont la norme est :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{C, |f(\mathbf{x})| \leq C \text{ p.p.}\}.$$

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note p' le conjugué de p , c'est à dire le réel tel que $1/p + 1/p' = 1$.

5. Henri Léon Lebesgue (28 juin 1875 à Beauvais - 26 juillet 1941 à Paris) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée originalement dans sa dissertation *Intégrale, longueur, aire* à l'**Université de Nancy** en 1902.

6. presque partout, c'est à dire partout sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle.

1.5.2 Quelques résultats essentiels

Proposition 1.6. (Inégalité de Hölder ⁷) Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, $|fg| \in L^1(\Omega)$ et on a l'inégalité :

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy⁸-Schwarz⁹.

Exercice 1.6. Montrer que si Ω est de mesure finie alors $L^p(\Omega) \xrightarrow{\text{continue}} L^q(\Omega)$ si $p \geq q$. Donner un contre exemple de cette inclusion lorsque Ω n'est pas de mesure finie.

Exercice 1.7. Montrer que si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$ alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et que l'on a l'inégalité d'interpolation :

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Donnons une autre inégalité également très utile :

Théorème 1.7. (Inégalité de Jensen ¹⁰) Soit $\rho \in L^1(\Omega)$ une fonction positive telle $\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 1$. Alors, pour toute fonction f mesurable telle que $f\rho \in L^1(\Omega)$ et pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable convexe, on a :

$$\varphi \left(\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \leq \int_{\Omega} \varphi(f(\mathbf{x}))\rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

En particulier pour $\varphi(x) = x^2$ on obtient que :

$$\left(\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right)^2 \leq \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}))^2 \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Enfin, rappelons les incontournables théorèmes de convergence dominée de Lebesgue et d'intégration sur un espace produit de Fubini¹¹ :

Théorème 1.8 (de convergence dominée de Lebesgue). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que $f_n(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$ p.p. sur Ω et qu'il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que $|f_n(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ p.p. sur Ω . Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Exercice 1.8. Soit Ω et ω deux ouverts de \mathbb{R}^N tels que $\bar{\omega} \subset \Omega$. On note

$$\delta = \text{dist}(\bar{\omega}, \Omega^c) := \inf_{\substack{\mathbf{x} \in \bar{\omega} \\ \mathbf{y} \in \Omega^c}} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

et on suppose que $\delta > 0$. Soit $u \in L^p(\Omega)$ pour un certain $1 \leq p \leq \infty$. Pour tout $\mathbf{x} \in \omega$, on définit :

$$v(\mathbf{x}) := \int_{B(\mathbf{x}, \delta)} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

où $B(\mathbf{x}, \delta)$ est la boule de centre \mathbf{x} et de rayon δ . Montrer que la fonction v est bien définie et est continue sur ω .

7. Otto Ludwig Hölder (22 décembre 1859 - 29 août 1937) est un mathématicien allemand né à Stuttgart.

8. Augustin Louis, baron Cauchy (21 août 1789 à Paris - 23 mai 1857 à Sceaux (Hauts-de-Seine)) est un mathématicien français. Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques, derrière Euler, avec près de 800 parutions.

9. Hermann Amandus Schwarz est né le 25 janvier 1843 en Pologne et est mort le 30 novembre 1921 à Berlin. C'est un mathématicien célèbre dont les travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie.

10. Johan Jensen est un mathématicien danois (8 mai 1859 (Naksov) - 5 mars 1925 (Copenhague)).

11. Guido Fubini (19 janvier 1879 - 6 juin 1943) est un mathématicien italien célèbre notamment pour ses travaux sur les intégrales.

Solution. L'inégalité de Hölder nous permet de montrer que la fonction v est bien définie pour tout $\mathbf{x} \in \omega$. D'autre part, on peut réécrire v sous la forme :

$$v(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{B_{\delta}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

où $B_{\delta} = B(\mathbf{0}, \delta)$. En fixant $\mathbf{x} \in \omega$ et pour tout \mathbf{h} tel $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in \omega$ on a :

$$|v(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - v(\mathbf{x})| \leq \int_{\Omega} |\mathbf{1}_{B_{\delta}}(\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{y}) - \mathbf{1}_{B_{\delta}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| |u(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y}.$$

Soit ω' un ouvert borné inclus dans Ω et contenant les boules $B(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \delta)$ pour tout $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$, $|\mathbf{h}|$ assez *petit*. Appliquant l'inégalité de Hölder, il vient :

$$|v(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - v(\mathbf{x})| \leq \left(\int_{\omega'} |\mathbf{1}_{B_{\delta}}(\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{y}) - \mathbf{1}_{B_{\delta}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{p'} \, d\mathbf{y} \right)^{1/p'} \left(\int_{\omega'} |u(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y} \right)^{1/p}.$$

On conclut ensuite avec le théorème de convergence dominée.

Par une application directe du Théorème de convergence dominée, on montre le résultat suivant :

Théorème 1.9. Soient \mathcal{U} et Ω des ouverts de \mathbb{R}^N et

$$f : \mathcal{U} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

une fonction telle que :

1. Pour tout $t \in \mathcal{U}$, $f(t, \cdot) \in L^1(\Omega)$.
2. Pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$, $f(\cdot, \mathbf{x}) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur \mathcal{U} .
3. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que $|f(t, \cdot)| \leq g$ pour tout $t \in \mathcal{U}$.

Alors, la fonction F définie sur \mathcal{U} par :

$$F(t) := \int_{\Omega} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

est continue sur \mathcal{U} . Si de plus :

4. Pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$, $f(\cdot, \mathbf{x}) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur \mathcal{U} .
5. Il existe une fonction $h \in L^1(\Omega)$ telle que $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \cdot) \right| \leq h$ pour tout $t \in \mathcal{U}$ et tout $i = 1, \dots, N$.

Alors F est différentiable sur \mathcal{U} et :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Théorème 1.10 (De Fubini-Lebesgue). On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega_1$, $F(\mathbf{x}, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$ et pour presque tout $\mathbf{y} \in \Omega_2$, $F(\cdot, \mathbf{y}) \in L^1(\Omega_1)$. De plus on a, en notant $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := d\mathbf{x} \otimes d\mathbf{y}$:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}.$$

Pour appliquer ce théorème, il faut vérifier que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Pour ce faire, on pourra utiliser le résultat suivant à $|F|$:

Théorème 1.11 (De Fubini-Tonelli¹²). Soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors :

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y},$$

toutes les quantités étant éventuellement égales à $+\infty$.

12. Leonida Tonelli (19 avril 1885 - 12 mars 1946) était un mathématicien italien.

Exercice 1.9. Soit f une fonction mesurable sur un ensemble mesurable Ω de \mathbb{R}^N . La fonction de répartition f , notée μ_f est définie sur \mathbb{R} par :

$$\mu_f(t) = \text{mes}\{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) > t\}.$$

1. Montrer que si f et g sont des fonctions mesurables sur Ω et si $h = f + g$ alors :

$$\mu_h(t) \leq \mu_f(t/2) + \mu_g(t/2),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ ($p > 0$), montrer les propositions suivantes :

(a) Pour tout $t > 0$, $\mu_f(t) \leq t^{-p} \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}$.

(b) $\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu_f(t) dt$.

On admet les résultats de la proposition suivante :

Proposition 1.12. Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N :

1. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.
2. Pour tout $1 \leq p < \infty$, le dual de $L^p(\Omega)$ s'identifie à $L^{p'}(\Omega)$ de la façon suivante : à toute forme linéaire continue T sur $L^p(\Omega)$ on peut associer de façon unique une fonction $f \in L^{p'}(\Omega)$ telle que :

$$\langle T, u \rangle_{(L^p)' \times L^p} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

3. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

A propos du dernier point de cette proposition, on pourra chercher l'exercice suivant :

Exercice 1.10. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $u \in L^p(\Omega)$ (pour un certain $1 \leq p < +\infty$). On note $(\rho_n)_n$ une suite de fonctions régularisantes comme indiqué dans le paragraphe 1.1.4 ainsi que

$$u_n(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} \rho_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ et tout $n \geq 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et même $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ si l'on suppose Ω borné.
2. Montrer que $u_n|_{\Omega} \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \rightarrow +\infty$. La suite $(u_n)_n$ est donc une approximation C^∞ de u .
3. Soit α un multi-indice dans \mathbb{N}^N tel que $w := D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ (la dérivée est au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$). Montrer qu'alors, pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ et n tels que $B(\mathbf{x}, 1/n) \subset \Omega$

$$D^\alpha u_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})w(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

(i.e. la régularisée de la dérivée est la dérivée de la régularisée).

La fonction de répartition introduite dans l'exercice 1.9, permet de démontrer le résultat d'interpolation suivant, dû à Marcinkiewicz¹³ :

13. Józef Marcinkiewicz (né le 30 mars 1910 à Cimoszka, près de Białystok, Empire russe (aujourd'hui Pologne) - décédé en 1940 à Kharkiv, Ukraine) est un mathématicien polonais. Il a été étudiant d'Antoni Zygmund et plus tard a travaillé avec Juliusz Schauder et Stefan Kaczmarz. Il était professeur à l'université de Vilnius.

Théorème 1.13 (d'interpolation de Marcinkiewicz). *Soit Ω une ensemble mesurable de \mathbb{R}^N et T une application linéaire de $L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ dans lui même ($1 \leq q < r < +\infty$). On suppose l'existence de deux constantes C_1 et C_2 telles que :*

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{C_1 \|f\|_q}{t} \right)^q, \quad \mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{C_2 \|f\|_r}{t} \right)^r,$$

pour toute fonction $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ et tout $t > 0$. Alors, pour tout $q < p < r$, T se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $L^p(\Omega)$ dans lui même.

La démonstration de ce théorème est l'objet de l'exercice 1.25.

1.5.3 Intégration en coordonnées polaires sur \mathbb{R}^N

On note \mathbb{S}^{N-1} la sphère unité de \mathbb{R}^N i.e $\mathbb{S}^{N-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : |\mathbf{x}| = 1\}$. Pour toute partie mesurable A de \mathbb{S}^{N-1} , $C(A)$ est le cône de \mathbb{R}^N défini par :

$$C(A) := \{t\mathbf{x} : 0 < t < 1, \mathbf{x} \in A\}.$$

Notant λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N , on a :

Proposition 1.14. *Il existe une unique mesure borélienne (à une constante multiplicative près) notée Γ sur \mathbb{S}^{N-1} invariante par rotation. Elle est définie pour toute partie borélienne $A \subset \mathbb{S}^{N-1}$ par $\Gamma(A) := \lambda(C(A))$. On l'appelle mesure surfacique de la sphère.*

On définit alors la fonction surjective (mais non injective) $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ par $\phi(r, \sigma) := r\sigma$. Les variables $(\sigma, r) \in \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$ sont appelées les coordonnées polaires. On passe donc des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires grâce aux relations : $\sigma = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, $r = |\mathbf{x}|$ et $\mathbf{x} = r\sigma$. Pour tout Ω ouvert de \mathbb{R}^N , on pose $\tilde{\Omega} = \phi^{-1}(\Omega)$ (l'image réciproque de Ω par ϕ). L'ensemble $\tilde{\Omega}$ n'est pas forcément ouvert : considérer par exemple $\Omega := B(\mathbf{0}, 1)$ pour lequel $\tilde{\Omega} = [0, 1[\times \mathbb{S}^{N-1}$.

Proposition 1.15. *Pour tout $1 \leq p < +\infty$, l'application $f \mapsto \tilde{f} = f \circ \phi$ est une isométrie de $L^p(\Omega, d\mathbf{x})$ sur $L^p(\tilde{\Omega}, r^{N-1} dr \otimes d\Gamma)$. On a donc :*

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = \int_{\tilde{\Omega}} |f(r\sigma)|^p r^{N-1} dr d\Gamma.$$

Lorsque $N = 2$, on peut paramétrer la sphère \mathbb{S}^1 par $\theta \in]-\pi, \pi[\mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta))^T \in \mathbb{S}^1$. Dans ce cas, on identifie $\tilde{\Omega}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi[$ et la formule de la proposition devient :

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = \int_{\tilde{\Omega}} |f(r \sin(\theta), r \cos(\theta))|^p r dr d\theta.$$

1.6 Rappels sur la transformée de Fourier

La définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a été donnée au début de ce chapitre.

Définition 1.3. Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on définit sa transformée de Fourier¹⁴ par :

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}(f)(\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N. \quad (\text{TF})$$

La transformée de Fourier vérifie les propriétés suivantes :

14. Joseph Fourier (21 mars 1768 à Auxerre - 16 mai 1830 à Paris) est un mathématicien et physicien français connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier.

1. Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ on a $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
2. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est un homéomorphisme. Son inverse, noté $\bar{\mathcal{F}}$, est défini par

$$\bar{\mathcal{F}}(f)(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(\boldsymbol{\xi}) e^{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N. \quad (\text{TFI})$$

3. Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on a les formules suivantes :

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\boldsymbol{\xi}) = i^{|\alpha|} \boldsymbol{\xi}^\alpha \mathcal{F}(f)(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{R}_1)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}^\alpha f)(\boldsymbol{\xi}) = i^{|\alpha|} D^\alpha \hat{f}(\boldsymbol{\xi}). \quad (\text{R}_2)$$

Définition 1.4. On définit la transformée de Fourier de toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ par la formule :

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

De même pour la transformée de Fourier inverse :

$$\langle \bar{\mathcal{F}}(T), \varphi \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} = \langle T, \bar{\mathcal{F}}(\varphi) \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

et l'on a encore $\mathcal{F}(\bar{\mathcal{F}}(T)) = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(T)) = T$ pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ jouit des propriétés suivantes :

1. $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est un homéomorphisme.
2. Les relations (R₁) et (R₂) sont vérifiées au sens des distributions pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
3. Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ alors les expressions de $\mathcal{F}(f)$ et $\bar{\mathcal{F}}(f)$ sont données explicitement par les formules (TF) et (TFI).

Exercice 1.11. Montrer que si $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors \hat{u} est une fonction continue bornée sur \mathbb{R}^N .

Théorème 1.16. (De Plancherel¹⁵) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ alors $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. De plus l'application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ est une isométrie. L'identité

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

s'appelle l'identité de Parseval¹⁶.

Le diagramme suivant résume une partie des résultats énoncés ci-dessus :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \\ \cap & & \cap \\ L^2(\mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{R}^N) \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \end{array}$$

où $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ désigne un homéomorphisme et où les inclusions sont toutes continues et denses.

15. Michel Plancherel (1885-1967) était un mathématicien suisse. Il est né à Bussy (Fribourg, Suisse).

16. Marc-Antoine Parseval des Chênes (27 avril 1755 - 16 août 1836) est un mathématicien français.

1.7 Exercices sur le chapitre 1

Exercice 1.12. Lorsque les assertions suivantes sont vraies, les démontrer, sinon donner un contre exemple :

1. Toute fonction de $L^2(]-1, 1[)$ est bornée.
2. Il existe $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.
3. Toute fonction u de $L^2(\mathbb{R}_+)$ vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$.
4. Soit $B(\mathbf{0}, 1)$ la boule de centre $\mathbf{0}$ est de rayon 1 dans \mathbb{R}^N . La fonction $u : \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, 1) \mapsto |\mathbf{x}|^\alpha$ est dans $L^p(B(\mathbf{0}, 1))$ si et seulement si $\alpha > -N/p$.
5. La fonction $u : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mapsto |\mathbf{x}|^\alpha$ est dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $2/p - N/p > \alpha > -N/p$.
6. Soit u_n la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur $]0, +\infty[$ par

$$u_n(x) := \begin{cases} (x - n) & \text{si } n \leq x < n + 1, \\ (n + 2 - x) & \text{si } n + 1 \leq x < n + 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite $(u_n)_n$ converge vers 0 dans $C(]0, +\infty[)$? Dans $C([0, +\infty[)$? Dans $L^p(]0, +\infty[)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$?

7. Soit u_n la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur $] -1, 1[$ par $u_n(x) = x^n$. La suite $(u_n)_n$ converge vers 0 dans $C(]-1, 1[)$? Dans $C([-1, 1])$? Dans $L^p(]-1, 1[)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$?
8. Soit $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ deux suites réelles telles que $0 < \alpha_n < 1$ et $\beta_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_n est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$u_n(x) := \begin{cases} \frac{\beta_n}{\alpha_n} (x - n + \alpha_n) & \text{si } n - \alpha_n \leq x < n, \\ \frac{\beta_n}{\alpha_n} (\alpha_n + n - x) & \text{si } n \leq x < n + \alpha_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour que la suite $(u_n)_n$ tende vers 0 dans $L^p(]0, +\infty[)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) il faut que $\beta_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

9. Dans la question précédente, on choisit $\alpha_n = 1/n^3$ et $\beta_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $f \in L^p(]0, +\infty[)$ avec $p > 3/2$, $\int_{\mathbb{R}_+} f u_n dx \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 1.13. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Que vaut la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x) dx ?$$

Exercice 1.14. Montrer que

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^m dx = m!$ (pour tout $m \in \mathbb{N}$).
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1$.

Exercice 1.15. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx.$$

Montrer que

1. \hat{f} est continue,

2. \hat{f} est bornée et $\sup |\hat{f}| \leq \|f\|_{L^1} \quad (= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx)$,
3. Si $x \rightarrow xf(x)$ est intégrable, alors \hat{f} est dérivable et on a

$$\frac{d}{dy} \hat{f} = -\widehat{ixf(x)}.$$

Exercice 1.16. Soit $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Montrer que

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy \neq \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

Y a-t-il contradiction avec le théorème de Fubini ? (on pourra calculer l'intégrale de $|f|$ sur l'anneau $S_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.)

Exercice 1.17. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, où \mathbb{R}^n est muni de la mesure de Lebesgue. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n et que le *produit de convolution* de f et g défini par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy$$

vérifie $f * g(x) = g * f(x)$ et

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Exercice 1.18. Pour tout $t > 0$, on pose :

$$f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

1. Montrer que, pour tout $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x) dx = 1$.
2. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\{|x| > \delta\}} f_t(x) dx = 0$.

(On dit que f_t est une *approximation de la distribution de Dirac*.)

Soit g une fonction continue bornée. Montrer que $f_t * g$ est bien définie et que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t * g(x) = g(x).$$

Exercice 1.19. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note \hat{f} la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(y, x)} dx,$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire de \mathbb{R}^n . Montrer que

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x) dx$.
2. $\widehat{\hat{f} * g} = \hat{f}\hat{g}$.

Exercice 1.20. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0 \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. — Pour quelle valeur de α la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$?
— Pour quelle valeur de β la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$?
— Soit $1 \leq q < p \leq +\infty$. En utilisant (a) et (b), trouver une fonction f qui appartienne à $L^q(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^p(\mathbb{R}^n)$ et une fonction g qui appartienne à $L^p(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^q(\mathbb{R}^n)$.

2. — Soit $1 \leq q < p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$.
 — Soit r tel que $q < r < p$. Montrer que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0, 1]$. On pourra écrire $r = r\alpha + r(1-\alpha)$ et utiliser l'inégalité de Hölder pour un couple de réels conjugués bien choisis.

- En déduire que si f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ alors f_n converge vers f dans $L^r(\mathbb{R}^n)$, i.e. $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.
3. Soit $f \in L^p([0, +\infty[) \cap L^q([0, +\infty[)$ avec $1 \leq q < 2 < p$. Montrer que la fonction h définie par $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r)$ appartient à $L^1([0, +\infty[)$ et trouver des constantes $C_{p,q}$ et γ telles que $\|h\|_1 \leq C_{p,q} \|f\|_q^\gamma \|f\|_p^{(1-\gamma)}$.

Exercice 1.21. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Plancherel.

Définition. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note \hat{f} la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(y,x)} dx,$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire de \mathbb{R}^n .

Théorème de Plancherel. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
2. Montrer que la fonction $g_\varepsilon(k) = |\hat{f}(k)|^2 e^{-\varepsilon\pi|k|^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$.
3. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k) dk = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \bar{f}(x) f(y) e^{2\pi i(k,x-y)} e^{-\varepsilon\pi|k|^2} dx dy dk.$$

4. Sachant que la transformée de Fourier de la gaussienne $h_\varepsilon(x) = e^{-\pi\varepsilon|x|^2}$ ($\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$) est donnée par $\hat{h}_\varepsilon(k) = \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|k|^2}{\varepsilon}}$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k) dk = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}} \bar{f}(x) f(y) dx dy.$$

5. Soit $\{s_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la famille de fonctions définies par :

$$s_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}} \bar{f}(x) dx.$$

Quelle est la limite dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de s_ε lorsque ε tend vers 0 ?

6. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k) dk = \int_{\mathbb{R}^n} (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_\varepsilon) f(y) dy.$$

7. Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k) dk = \|\hat{f}\|_2^2$.
8. En déduire que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Exercice 1.22. On pose

$$l^2 := \{u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |u(n)|^2 < \infty\}, \quad \|u\|_{l^2} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |u(k)|^2 \right)^{1/2},$$

ainsi que

$$l_t^2 := \{u \in l^2 : u(n) = 0 \text{ pour tout } n \text{ à partir d'un certain rang}\}.$$

Montrer que l^2 est un espace de Banach. Montrer que l_t^2 est un sous ensemble dense dans l^2 . Est-il fermé? ouvert? relativement compact?

Exercice 1.23. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces de Banach. Les implications suivantes sont-elles justes? Si oui les démontrer, sinon donner un contre-exemple.

1. $E \xrightarrow[\text{continue}]{\text{continue}} F \xrightarrow[\text{continue}]{\text{continue}} G$ entraîne $E \xrightarrow[\text{continue}]{\text{continue}} G$.
2. $E \xrightarrow[\text{compacte}]{\text{continue}} F$ entraîne $E \xrightarrow[\text{continue}]{\text{continue}} F$.
3. $E \xrightarrow[\text{compacte}]{\text{continue}} F \xrightarrow[\text{continue}]{\text{continue}} G$ entraîne $E \xrightarrow[\text{compacte}]{\text{continue}} G$.
4. $E \xrightarrow[\text{continue}]{\text{continue}} F \xrightarrow[\text{compacte}]{\text{continue}} G$ entraîne $E \xrightarrow[\text{compacte}]{\text{continue}} G$.
5. $E \xrightarrow[\text{dense}]{\text{dense}} F \xrightarrow[\text{dense}]{\text{dense}} G$ entraîne $E \xrightarrow[\text{dense}]{\text{dense}} G$.
6. $E \xrightarrow[\text{dense}]{\text{dense}} G$ et $E \xrightarrow[\text{continue}]{\text{continue}} F \xrightarrow[\text{continue}]{\text{continue}} G$ entraîne $E \xrightarrow[\text{dense}]{\text{dense}} F$.
7. $E \xrightarrow[\text{dense}]{\text{dense}} G$ et $E \subset F \subset G$ entraîne $F \xrightarrow[\text{dense}]{\text{dense}} G$.

Exercice 1.24. On définit pour tout $\alpha > 0$:

$$h^\alpha = \{u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + n^2)^\alpha |u(n)|^2 < \infty\},$$

que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{h^\alpha} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} (1 + k^2)^\alpha |u(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

En procédant comme pour l^2 , on montre que $(h^\alpha, \|\cdot\|_{h^\alpha})$ est un espace de Banach pour tout $\alpha > 0$. Montrer que :

1. L'injection $h^\alpha \hookrightarrow l^2$ est continue, dense et compacte pour tout $\alpha > 0$.
2. L'injection $h^{\alpha_1} \hookrightarrow h^{\alpha_2}$ est continue, dense et compacte pour tout $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$.

Exercice 1.25. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème 1.13 (d'interpolation de Marcinkiewicz). On se place donc sous les hypothèses du théorème et on considère une fonction $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$.

1. En utilisant les résultats de l'exercice 1.9, montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $s > 0$:

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{2C_1}{t} \right)^q \int_{\{|f|>s\}} |f(\mathbf{x})|^q \, d\mathbf{x} + \left(\frac{2C_2}{t} \right)^r \int_{\{|f|\leq s\}} |f(\mathbf{x})|^r \, d\mathbf{x}.$$

2. En déduire, en utilisant encore l'exercice 1.9, que pour tout $q < p < r$ on a l'inégalité :

$$\int_{\Omega} |Tf(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq p(2C_1)^q \int_0^{+\infty} t^{p-1-q} \left(\int_{\{|f|>s\}} |f(\mathbf{x})|^q \, d\mathbf{x} \right) dt + p(2C_2)^r \int_0^{+\infty} t^{p-1-r} \left(\int_{\{|f|\leq s\}} |f(\mathbf{x})|^r \, d\mathbf{x} \right) dt.$$

3. On choisit maintenant $s = t$. Montrer, en appliquant le théorème de Fubini, que :

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1-q} \left(\int_{\{|f|>t\}} |f(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right) dt = \frac{1}{p-q} \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}.$$

4. Dédurre des questions précédentes, l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$:

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

et conclure.

Exercice 1.26. Dans cet exercice, nous allons généraliser l'inégalité de Hölder. Soit $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et trois fonctions $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ et $h \in L^r(\Omega)$. Montrer que le produit fgh est une fonction de $L^1(\Omega)$ et que

$$\|fgh\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \|h\|_{L^r(\Omega)}.$$

Exercice 1.27 (Autour de la corde vibrante). On considère une corde élastique de longueur $L = \pi$, de densité linéique μ et de tension T , fixée à ses extrémités et on note $u(x, t)$ le déplacement vertical du point d'abscisse x à l'instant t . On peut montrer que pour de petits déplacements, u est solution de l'équation des ondes linéaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad \forall x \in [0, \pi], \forall t > 0, \quad (1.5a)$$

où $\nu = \sqrt{T/\mu}$ est homogène à une vitesse. Les conditions aux limites pour u se traduisent par :

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.5b)$$

Pour que le problème soit bien posé, il faut ajouter des conditions initiales (position et vitesse initiale de la corde) :

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x) \quad \forall x \in [0, \pi]. \quad (1.6)$$

Modus operandi. On va traiter différemment les variables x et t . On note $A = -\nu^2 \partial^2 / \partial x^2$ que l'on considère comme un opérateur linéaire (éventuellement non borné) sur un certain espace de Hilbert noté \mathcal{H} (que nous déterminerons plus tard). Les éléments de \mathcal{H} sont donc des fonctions définies sur $[0, \pi]$. On note $D(A)$ le sous ensemble de \mathcal{H} composé des fonctions u pour lesquelles Au est bien défini et vérifiant $u(0) = u(\pi) = 0$. Ainsi, résoudre (1.5) revient à déterminer les fonctions $u : t \in [0, \infty) \mapsto u(t) \in D(A)$ de classe C^2 telles que

$$u''(t) + Au(t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (1.7)$$

L'EDP a maintenant la forme d'une EDO ! Précisons une fois encore que pour tout t , $u(t)$ est un élément de \mathcal{H} et donc une fonction définie sur $[0, \pi]$. On ne fait cependant plus apparaître la dépendance en x dans la notation.

En dimension finie. Supposons que $D(A) = \mathcal{H}$ soit un espace vectoriel de dimension finie N et que A soit un endomorphisme de \mathcal{H} .

1. Que peut on dire quand à l'existence et l'unicité de solutions pour (1.7) ?
2. On suppose en outre que A est symétrique, défini positif. Que peut on dire du spectre de A ? On note $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_N^2$ les valeurs propres de A .
3. Décomposer u dans une base appropriée de \mathcal{H} et résoudre "explicitement" l'edo (1.7).

Cette méthode de résolution par décomposition sur une base de fonctions s'appelle méthode de Fourier.

En dimension infinie. Il faut choisir l'espace \mathcal{H} . On prolonge les fonctions u par imparité sur $[-\pi, \pi]$ et on propose de les exprimer sous la forme de série de Fourier :

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \hat{u}(n) \sin(nx).$$

Ainsi, à tout fonction u correspond une suite $(\hat{u}(n))_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On note

$$l^2 = \{ \hat{u} = (\hat{u}(n))_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} : \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |\hat{u}(n)|^2 < \infty \},$$

dont le produit scalaire et la norme sont

$$(\hat{u}, \hat{v})_{l^2} = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \hat{u}(k) \hat{v}(k) \quad \text{et} \quad \|\hat{u}\|_{l^2} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |\hat{u}(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

On pose également pour tout $\alpha > 0$:

$$h^\alpha = \{ \hat{u} = (\hat{u}(n))_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} : \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (1+n^2)^\alpha |\hat{u}(n)|^2 < \infty \},$$

dont le produit scalaire et la norme sont :

$$(\hat{u}, \hat{v})_{h^\alpha} = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (1+k^2)^\alpha \hat{u}(k) \hat{v}(k), \quad \|\hat{u}\|_{h^\alpha} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} (1+k^2)^\alpha |\hat{u}(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

1. A quel espace de fonctions appartient u si ses coefficients de Fourier sont dans l^2 ?
2. On note H^α l'espace des fonctions dont les coefficients de Fourier sont dans h^α . Montrer que pour $\alpha > 1/2$, les fonctions de H^α sont continues. Pour quelles valeurs de α les fonctions de H^α sont-elles de classe C^1 , C^k , $k \geq 2$?
3. Montrer que pour tout $\alpha > 1/2$, A peut être considéré comme un opérateur non borné sur H^α avec $D(A) = H^{\alpha+2} \subset H^\alpha$. Il lui correspond un opérateur \hat{A} non borné sur h^α avec $D(\hat{A}) = h^{\alpha+2}$ défini par $\hat{A}(\hat{u}) = \widehat{A(u)}$. Remarquer que \hat{A} est également bien défini comme opérateur non borné sur l^2 de domaine $D(\hat{A}) = h^2$.
4. On définit pour tout $k \geq 1$, \hat{e}_k par

$$\hat{e}_k = (\hat{e}_k(n))_{n \in \mathbb{N}^*} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

On a alors $e_k(x) = \sin(kx)$. Vérifier que \hat{e}_k est un vecteur propre de l'opérateur \hat{A} . Quelle est la valeur propre associée ?

5. Pour tout $k \geq 1$, chercher une solution de (1.7) sous la forme $u(t, x) = \lambda_k(t) e_k(x)$ où $\lambda_k : t \in [0, \infty[\mapsto \lambda_k(t) \in \mathbb{R}$ est une fonction à déterminer.
6. Résoudre (1.7) par une méthode de Fourier. Discuter de la régularité de la solution obtenue en fonction de la régularité des données initiales u_0 et v_0 .

Chapitre 2

Les espaces de Sobolev

Pour bien comprendre ce que sont les espaces de Sobolev¹, il est important d'être familié avec la théorie des distributions, étudiée au premier semestre dans le cours d'analyse.

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On pose

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \partial u / \partial x_i \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N\}.$$

Bien entendu, la dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$ s'il existe des fonctions v_1, \dots, v_N dans $L^2(\Omega)$ telles que :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} v_i \varphi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

On sait, d'après le cours sur les distributions, que les fonctions v_i sont alors notées $\partial u / \partial x_i$.

Exemple 2.1. On peut illustrer la définition ci-dessus par les exemples élémentaires suivants :

- Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Toute fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ est dans $H^1(\Omega)$.
- Soit u définie sur $] - 1, 1[$ par

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Alors $u \notin H^1(] - 1, 1[)$. En effet $u \in L^2(] - 1, 1[)$ mais $u' = \delta_0$ (la mesure de Dirac en 0) qui ne peut pas être identifiée avec une fonction de $L^2(] - 1, 1[)$ (le démontrer en faisant un raisonnement par l'absurde).

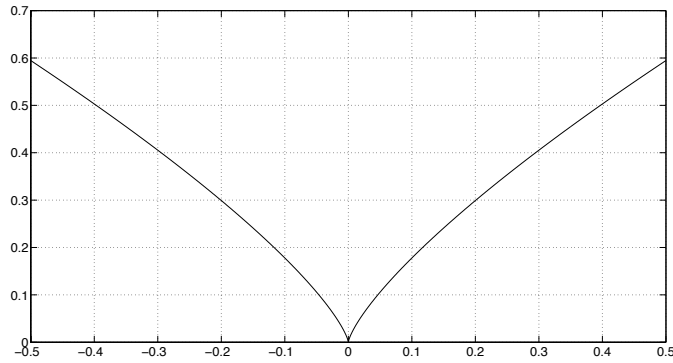
- La fonction

$$u(x) := \begin{cases} x^{3/4} & \text{si } 0 < x < 1, \\ (-x)^{3/4} & \text{si } -1 < x \leq 0. \end{cases}$$

est dans $H^1(] - 1, 1[)$ (mais elle n'est bien entendu pas dérivable au sens classique en $x = 0$).

Exercice 2.1. Soit u_α la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $u_\alpha(x) := x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Pour quelles valeurs de α , u_α est-elle une fonction de $H^1(]1, +\infty[)$? Même question mais en considérant cette fois u_α définie sur $]0, 1[$.

1. Spécialiste en équations différentielles appliquées aux sciences physiques, Sobolev introduit, dès 1934, la notion de fonction et de dérivée *généralisées* afin de mieux appréhender les phénomènes physiques où le concept de fonction s'avérait insuffisant dans la recherche des solutions d'équations aux dérivées partielles. Il est ainsi à l'origine de la théorie des distributions développée par son compatriote Israël Guelfand et le français Laurent Schwartz.

FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction u .

Nous donnerons d'autres exemples en dimension 1 et en dimension 2 un peu plus loin.

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1} &:= \left(\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour la topologie induite par cette norme, une suite $(u_n)_n$ de $H^1(\Omega)$ converge vers $u \in H^1(\Omega)$ si $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial u_n / \partial x_i \rightarrow \partial u / \partial x_i$ dans $L^2(\Omega)$ pour tout $i = 1, \dots, N$. La norme de $H^1(\Omega)$ est issue d'un produit scalaire noté $(u, v)_{H^1}$ et défini par :

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1} &:= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1. *L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert².*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'espace $H^1(\Omega)$ est complet. Considérons donc une suite $(u_n)_n$ qui soit de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Par définition de la norme dans $H^1(\Omega)$, cela signifie que les suites $(u_n)_n$ et $(\partial u_n / \partial x_i)_n$ pour $i = 1, \dots, N$ sont toutes de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui est complet ce qui implique que toutes ces suites sont convergentes dans $L^2(\Omega)$. On note $u \in L^2(\Omega)$ la limite de la suite $(u_n)_n$ et $v_i \in L^2(\Omega)$ la limite de $(\partial u_n / \partial x_i)_n$ pour tout $i = 1, \dots, N$. La continuité de l'injection $L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ nous assure que si une suite converge dans $L^2(\Omega)$, elle converge aussi au sens des distributions. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on peut donc passer à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans les égalités :

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial u_n}{\partial x_i} d\mathbf{x}, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

pour obtenir que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varphi v_i d\mathbf{x}, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

et donc que $v_i = \partial u / \partial x_i$ pour tout $i = 1, \dots, N$. □

2. David Hilbert est un mathématicien allemand né le 23 janvier 1862 à Königsberg en Prusse orientale et mort le 14 février 1943 à Göttingen en Allemagne. Il est souvent considéré comme un des plus grands mathématiciens du XXe siècle, au même titre que Henri Poincaré. Il a créé ou développé un large éventail d'idées fondamentales, que ce soit la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie ou les fondements de l'analyse fonctionnelle (avec les espaces de Hilbert).

Lorsque Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 , on peut définir $H^1(\Omega)$ en utilisant les coordonnées polaires introduites dans le paragraphe 1.5.3. En reprenant les mêmes notations :

Définition 2.2. L'espace $\tilde{H}^1(\tilde{\Omega})$ est défini par :

$$\tilde{H}^1(\tilde{\Omega}) := \left\{ \tilde{u} \in L^2(\tilde{\Omega}, r \, dr \otimes d\theta) : \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \in L^2(\tilde{\Omega}, r \, dr \otimes d\theta), \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \in L^2(\tilde{\Omega}, r \, dr \otimes d\theta) \right\},$$

et sa norme par :

$$\|\tilde{u}\|_{\tilde{H}^1(\tilde{\Omega})} := \left(\int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{u}(r, \theta)|^2 r \, dr \, d\theta + \int_{\tilde{\Omega}} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r, \theta) \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta) \right|^2 r \, dr \, d\theta \right)^{1/2}.$$

Toujours avec les mêmes notations que dans le paragraphe 1.5.3, nous montrerons un peu plus loin (exercice 2.22) que :

Proposition 2.2. Pour tout Ω ouvert de \mathbb{R}^2 , l'application $f \mapsto \tilde{f} := f \circ \phi$ est une isométrie de $H^1(\Omega)$ sur $\tilde{H}^1(\tilde{\Omega})$.

Cette proposition permet de résoudre l'exercice suivant :

Exercice 2.2. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la fonction $u_\alpha(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}|^\alpha$ est dans $H^1(B(\mathbf{0}, 1))$ (dans cet exercice $N = 2$). Même question en considérant cette fois u_α définie sur $H^1(B(\mathbf{0}, 1)^c)$.

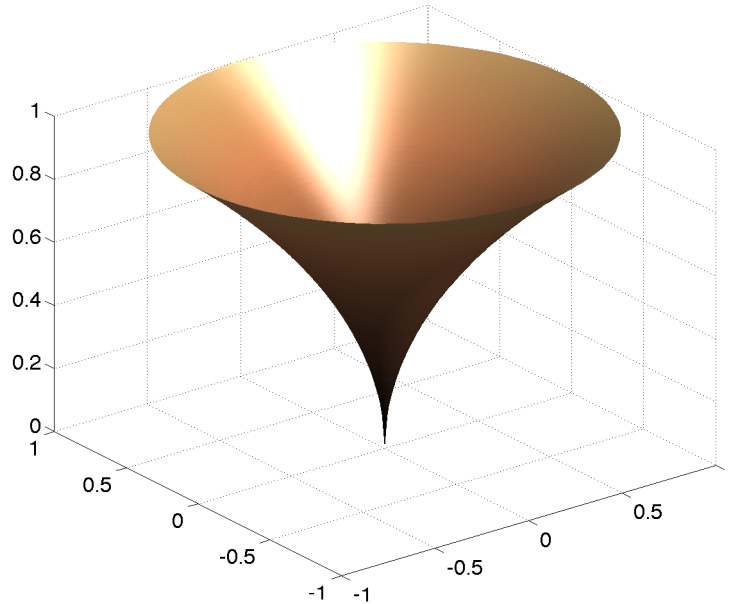


FIGURE 2.2 – La fonction u_α avec $\alpha = 1/2$ est dans $H^1(B(\mathbf{0}, 1))$.

De la même façon que dans la définition 2.1, on définit les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ où m est un entier positif par :

$$H^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m\}. \quad (\text{D1})$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{H^m} := \left(\sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u| \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \quad (\text{N1})$$

Lorsque $m = 0$, on a simplement $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$. On démontre comme dans le cas $m = 1$ que :

Proposition 2.3. *L'espace $H^m(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}$) muni de la norme $\|\cdot\|_{H^m}$ est un espace de Hilbert.*

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, il est possible de définir les espaces de Sobolev en utilisant la transformée de Fourier. Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on note \widehat{u} sa transformée de Fourier et on a la :

Proposition 2.4. *L'espace $H^m(\mathbb{R}^N)$ ($m \in \mathbb{N}^*$) peut être défini par :*

$$H^m(\mathbb{R}^N) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}, \quad (\text{D2})$$

et la norme définie par (N1) est équivalente à (on garde la même notation) :

$$\|u\|_{H^m} := \left(\int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (\text{N2})$$

Cette proposition permet de définir l'espace $H^m(\mathbb{R}^N)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$ (et plus seulement $m \in \mathbb{N}^*$). Si m n'est pas entier, on le note alors plutôt $H^s(\mathbb{R}^N)$, $s \in \mathbb{R}$. Le théorème de Plancherel nous assure alors que si $s \geq 0$, $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ce qui n'est plus le cas si $s < 0$. La démonstration s'appuie sur le lemme technique suivant dont la démonstration est donnée dans l'annexe C, paragraphe C.1.

Lemme 2.5. *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ il existe deux constantes $C_1(m, N) > 0$ et $C_2(m, N) > 0$ telles que :*

$$C_1(m, N)(1 + |\xi|^2)^m \leq \sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \left(\prod_{i=1}^N |\xi_i|^{2\alpha_i} \right) \leq C_2(m, N)(1 + |\xi|^2)^m, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner la

Démonstration de la proposition 2.4. Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pour tout $|\alpha| \leq m$. Le théorème de Plancherel nous assure alors que $\mathcal{F}(D^\alpha u) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. D'autre part, considérant $D^\alpha u$ comme un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on a la formule $\mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u}$. On en déduit que $i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Utilisant à nouveau le théorème de Plancherel puis le lemme on obtient que :

$$\sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^N |\xi_i|^{2\alpha_i} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \geq C_1(m, N) \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Considérons maintenant $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ telle que $(1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors, d'après le lemme, $\prod_{i=1}^N |\xi_i|^{\alpha_i} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pour tout α multi-indice tel que $|\alpha| \leq m$. Utilisant une nouvelle fois la formule $\mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u}$, le théorème de Plancherel et le lemme, on en déduit que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et que :

$$C_2(m, N) \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \geq \sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^N |\xi_i|^{2\alpha_i} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x},$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Si l'on a en général une bonne intuition de ce qu'est la régularité d'une fonction u de classe C^k , il est moins aisé de bien comprendre ce que signifie $u \in H^1(\mathbb{R})$ et encore moins $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ ou bien $u \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$. Afin d'illustrer ce nouveau concept de régularité, donnons une nouvelle série d'exemples :

Exemple 2.2. On considère, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction impaire :

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ -(-x)^\alpha e^x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Les graphes de ces fonctions sont donnés ci-dessous pour certaines valeurs de α . Remarquer que la fonction u_α est d'autant plus régulière en $x = 0$ que α est grand. Par exemple, la fonction u_α est continue en 0 si et seulement si $\alpha > 0$.

Par un calcul assez simple et en utilisant la définition (D1) des espaces de Sobolev, on établit que

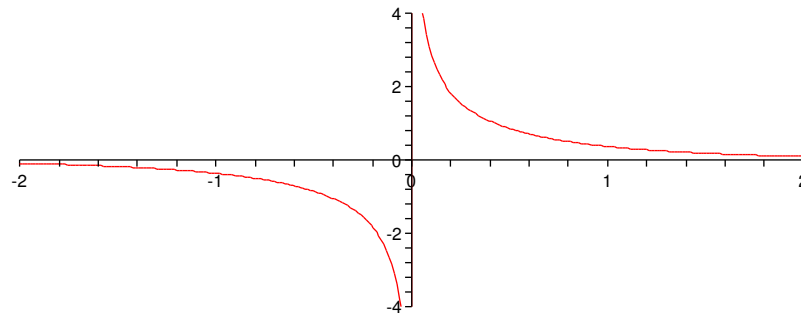


FIGURE 2.3 – Graphe de la fonction u_α avec $\alpha = -1/2$. La fonction présente une asymptote verticale en $x = 0$.

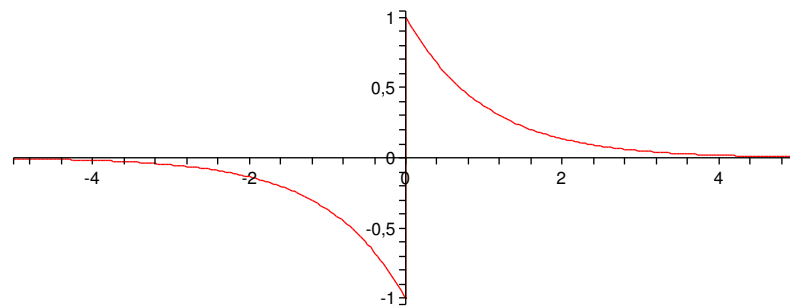


FIGURE 2.4 – Graphe de la fonction u_α avec $\alpha = 0$. La fonction est discontinue en 0 mais sans asymptote.

- Si $\alpha > m$ ($m \in \mathbb{N}$) alors $u_\alpha \in C^m(\mathbb{R})$.
- Si $\alpha > m - 1/2$ ($m \in \mathbb{N}$) alors $u_\alpha \in H^m(\mathbb{R})$. En particulier si $1/2 < \alpha < 1$, $u_\alpha \in H^1(\mathbb{R})$ et $u_\alpha \in C(\mathbb{R})$ mais $u_\alpha \notin C^1(\mathbb{R})$. En utilisant maintenant la définition (D2) des espaces de Sobolev on peut donner un résultat plus précis faisant intervenir la transformée de Fourier de u_α . On montre dans l'annexe C, paragraphe C.1 que, pour tout $\alpha > -1$:

$$\widehat{u}_\alpha(\xi) = -i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(1 + \xi^2)^{(\alpha+1)/2}} \sin((\alpha + 1) \arctan \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler. On en déduit l'équivalence suivante, pour tout $\alpha > -1$ et $s \in \mathbb{R}$:

$$u_\alpha \in H^s(\mathbb{R}) \Leftrightarrow s < \alpha + \frac{1}{2}.$$

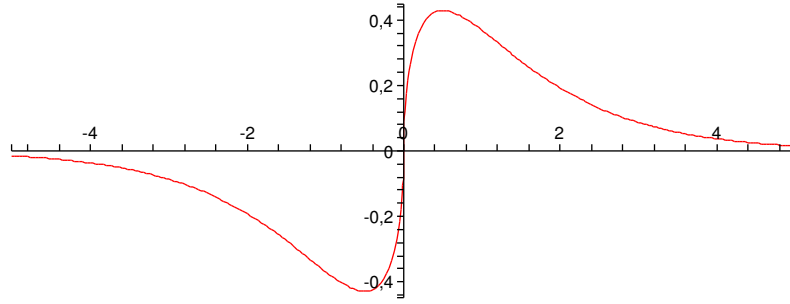
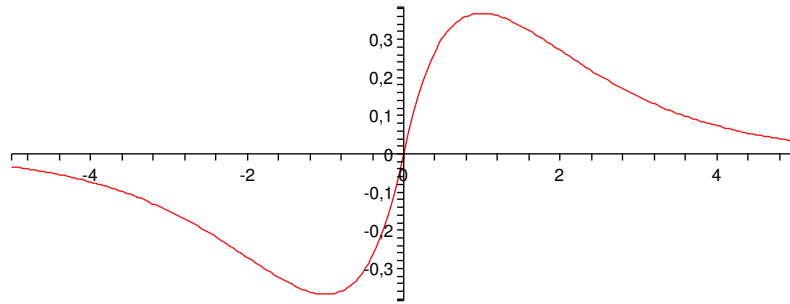
La définition des espaces de Sobolev avec la transformée de Fourier nous permet également dès à présent de résoudre certaines edp dans les espaces H^s . Considérons l'exercice suivant :

Exercice 2.3. En utilisant la transformée de Fourier, montrer que pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, l'edp suivante :

$$-\Delta u + u = T \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),$$

admet une unique solution u dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. On note $F : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ l'application linéaire qui à toute distribution tempérée T associe la solution de l'edp ci-dessus, dont T est le second membre.

1. Montrer que F est un homéomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ sur lui même.


 FIGURE 2.5 – Graphe de la fonction u_α avec $\alpha = 1/2$. La fonction est continue en $x = 0$ mais non dérivable.

 FIGURE 2.6 – Graphe de la fonction u_α avec $\alpha = 1$. La fonction est dérivable en $x = 0$.

2. Montrer que si $T \in H^s(\mathbb{R}^N)$ alors $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$ et que F est une isométrie de $H^s(\mathbb{R}^N)$ sur $H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$.

On peut généraliser la définition (D2) à d'autres domaines que \mathbb{R}^N . Lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est de la forme $\Omega = \mathbb{R}^{N_1} \times \omega$ avec $N_1 \in \mathbb{N}^*$, ω ouvert dans \mathbb{R}^{N_2} ($N_2 \in \mathbb{N}^*$) et $N_1 + N_2 = N$, on peut définir la norme de $H^m(\Omega)$ en utilisant la transformée de Fourier partielle. En notant $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} = \mathbb{R}^N$, on définit :

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}_1}(u)(\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^{N_1/2}} \int_{\mathbb{R}^{N_1}} u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) e^{-i\mathbf{x}_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_1} d\mathbf{x}_1,$$

qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier usuelle appliquée à la fonction $\mathbf{x}_1 \mapsto u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, la variable \mathbf{x}_2 étant fixée.

Proposition 2.6. Sur $H^m(\mathbb{R}^{N_1} \times \omega) \subset \mathbb{R}^N$, la norme usuelle est équivalente à

$$\|u\|_{H^m} := \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{N_1} \\ |\alpha| \leq m}} \int_{\omega} \int_{\mathbb{R}^{N_1}} (1 + |\boldsymbol{\xi}_1|^2)^{m-|\alpha|} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{F}_{\mathbf{x}_1}(u)}{\partial \mathbf{x}_2^\alpha}(\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{x}_2) \right|^2 d\boldsymbol{\xi}_1 d\mathbf{x}_2 \right)^{1/2}.$$

Démonstration. La démonstration repose sur l'identité de Parseval, les propriétés de la transformée de Fourier et le fait que

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{F}_{\mathbf{x}_1}(u)}{\partial \mathbf{x}_2^\alpha} = \mathcal{F}_{\mathbf{x}_1} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial \mathbf{x}_2^\alpha} \right), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{N_1}.$$

On procède comme dans la démonstration du théorème précédent. \square

Remarque 2.1. De façon plus générale, pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, on peut définir les espaces de Sobolev :

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m\},$$

que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

On montre que ces espaces sont des espaces de Banach.

Comme nous venons de le voir à plusieurs reprises, la transformée de Fourier est un outil très puissant permettant d'obtenir des résultats précis. Cependant son usage est restreint aux fonctions qui sont définies sur tout l'espace. C'est pourquoi il est intéressant de pouvoir prolonger les fonctions de $H^1(\Omega)$ sur \mathbb{R}^N tout entier. Cela n'est possible que si l'ouvert Ω est suffisamment régulier.

Proposition 2.7. *On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1 avec Γ borné ou bien que Ω est le demi-espace \mathbb{R}_+^N . Alors il existe un opérateur de prolongement $P : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ linéaire, tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)$:*

1. $Pu|_{\Omega} = u$,
2. $\|Pu\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$,
3. $\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$,

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de Ω .

La démonstration est donnée dans l'annexe C, paragraphe C.1 ainsi qu'une autre proposition sur le prolongement des fonctions $H^m(\Omega)$, généralisant celle-ci. On peut montrer que cette proposition est encore vraie si l'on suppose seulement que Γ est C^1 par morceaux. Cependant, le contre exemple suivant prouve que pour certains ouverts Ω , il est impossible de prolonger *de façon régulière* des fonctions qui sont pourtant très régulières sur Ω .

Exemple 2.3. Soit Ω le rectangle $] -1, 2[\times] -1, 1[$ privé du segment $]0, 2[\times \{0\}$. Sur Ω on définit la fonction u par

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-1/x_1^2} & \text{si } x_1 > 0, x_2 > 0, \\ -e^{-1/x_1^2} & \text{si } x_1 > 0, x_2 < 0, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On vérifie que $u \in C^\infty(\Omega)$ et que $D^\alpha u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$. Ceci entraîne en particulier que $u \in H^m(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cependant il est impossible de prolonger u en une fonction régulière sur \mathbb{R}^2 tout entier.

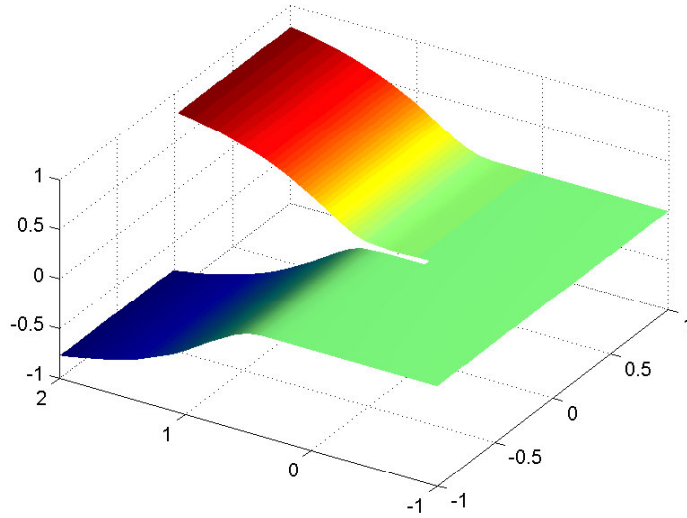
2.2 Résultats de densité, les espaces $H_0^m(\Omega)$

Une méthode classique pour démontrer des résultats dans les espaces de Sobolev consiste à considérer d'abord des fonctions *régulières*, puis en faisant un raisonnement par densité, à étendre les résultats obtenus à l'espace tout entier. Dans cette partie, nous allons étudier comment les fonctions des espaces de Sobolev peuvent être approchées par des fonctions régulières. Commençons par considérer le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}^N$:

Proposition 2.8. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout N entier positif et pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. On rappelle les injections suivantes :

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \xhookrightarrow{\text{continue}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \xhookrightarrow{\text{continue}} H^s(\mathbb{R}^N),$$


 FIGURE 2.7 – Graphe de la fonction u sur Ω .

l'injection $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ étant de plus dense. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. On utilise la transformée de Fourier. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, alors $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ étant dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite de fonctions $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi_n \rightarrow (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}$ quand $n \rightarrow \infty$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Par définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\psi_n := (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \varphi_n$ est encore dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. La transformée de Fourier étant une bijection bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même, on peut considérer la suite $(u_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\hat{u}_n := \psi_n$. On a alors :

$$\|u_n - u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq C \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} (\hat{u}_n - \hat{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi_n - (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. \square

En utilisant l'opérateur de prolongement de la proposition 2.7, on déduit de la proposition ci-dessus :

Corollaire 2.9. *Si Ω est de classe C^1 avec Γ borné ou si $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ alors pour tout $u \in H^1(\Omega)$ il existe une suite de fonctions $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|u_n|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.*

Ce résultat est faux en général pour un ouvert Ω quelconque. Considérer par exemple l'exemple 2.3 pour s'en convaincre. On peut néanmoins énoncer le

Théorème 2.10. (De Meyer³-Serrin⁴) *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Alors l'espace $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ ⁵ est dense dans $H^m(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.*

La démonstration de ce théorème est difficile et nous l'admettons. On peut la trouver dans le livre de R. A. Adams, *Sobolev Spaces*.

★ Il faut bien comprendre que dans le corollaire 2.9, ce sont les **restrictions des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$** qui sont denses dans $H^1(\Omega)$ et pas les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ elles-mêmes. En effet, en général, $\mathcal{D}(\Omega)$ **n'est pas**

3. Paul-André Meyer (21 août 1934 - 30 janvier 2003) Mathématicien français, il a mené une brillante carrière de chercheur à l'université Louis Pasteur de Strasbourg.

4. James Serrin : Mathématicien américain né en 1927, actuellement professeur émérite à l'université du Minnesota, Indianapolis.

5. Bien faire la différence entre $C^\infty(\Omega)$ et $C^\infty(\bar{\Omega})$, c'est à dire entre le corollaire 2.9 et le théorème de Meyer-Serrin !

dense dans $H^1(\Omega)$ comme le prouve le contre exemple suivant : Considérons la fonction $f(x) = \exp(x)$ et calculons pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 1[)$:

$$\begin{aligned} (f, \varphi)_{H^1(]0,1[)} &= \int_{]0,1[} f' \varphi' dx + \int_{]0,1[} f \varphi dx \\ &= \langle f', \varphi' \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} + \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = -\langle f'', \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} + \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = 0, \end{aligned}$$

car $\exp''(x) = \exp(x)$. Il en résulte donc que f est orthogonale dans $H^1(]0, 1[)$ à tout le sous espace $\mathcal{D}(]0, 1[)$ qui ne peut donc pas être dense dans $H^1(]0, 1[)$. Ceci justifie la définition suivante :

Définition 2.3. On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence (pour la norme $\|\cdot\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}$) du sous-espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

On a montré un peu plus haut que $H_0^m(\mathbb{R}^N) = H^m(\mathbb{R}^N)$. Lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, les fonctions de $H_0^m(\Omega)$ sont, dans un certain sens, les fonctions qui s'annulent sur le bord de Ω . Cette idée sera précisée plus loin lorsque nous aborderons la notion de trace.

Exercice 2.4. Soit $u \in H_0^1(]0, 1[) \cap C([0, 1])$ (nous verrons un peu plus loin qu'en fait $H_0^1(]0, 1[) \subset C([0, 1])$). Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |u(x)| dx \leq \int_0^\varepsilon |u'(x)| dx.$$

En déduire que $u(0) = 0$. En procédant de la même façon, montrer que l'on a aussi $u(1) = 0$.

Exercice 2.5. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $u \in H^1(\Omega)$.

1. Pour toute boule ouvert B de \mathbb{R}^N vérifiant $\bar{B} \subset \Omega$ on note $\delta = \text{dist}(\bar{B}, \Omega^c)$. Montrer que pour tout $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ tel que $|\mathbf{h}| < \delta$ on a :

$$\|\tau_{\mathbf{h}} u|_B - u|_B\|_{L^2(B)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} |\mathbf{h}|,$$

où $\tau_{\mathbf{h}} u : \mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x} + \mathbf{h})$.

2. En déduire que si u vérifie $\nabla u = 0$ alors u est constante sur chaque composante connexe de Ω .

Solution. Soit B une boule comme dans l'énoncé. Supposons pour commencer que $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

1. Posons, pour \mathbf{x} fixé dans B , $v(t) := u(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$, $t \in \mathbb{R}$. Alors $v'(t) = \mathbf{h} \cdot \nabla u(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$ et donc :

$$u(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - u(\mathbf{x}) = v(1) - v(0) = \int_0^1 \mathbf{h} \cdot \nabla u(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) dt.$$

Appliquant l'inégalité de Jensen, il vient :

$$|\tau_{\mathbf{h}} u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})|^2 \leq |\mathbf{h}|^2 \int_0^1 |\nabla u(\mathbf{x} + t\mathbf{h})|^2 dt,$$

puis intégrant sur B :

$$\int_B |\tau_{\mathbf{h}} u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})|^2 dx \leq |\mathbf{h}|^2 \int_B \int_0^1 |\nabla u(\mathbf{x} + t\mathbf{h})|^2 dt dx = |\mathbf{h}|^2 \int_0^1 \int_{B+t\mathbf{h}} |\nabla u(\mathbf{y})|^2 dy dt.$$

Fixons $|\mathbf{h}| < \delta$ et notons $B' := \{\mathbf{x} + t\mathbf{h} : \mathbf{x} \in B, t \in [0, 1]\} \subset \Omega$. On obtient alors :

$$\|\tau_{\mathbf{h}} u|_B - u|_B\|_{L^2(B)}^2 \leq |\mathbf{h}|^2 \int_{B'} |\nabla u(\mathbf{y})|^2 dy.$$

Maintenant, pour $u \in H^1(\Omega)$, on a $u|_{B'} \in H^1(B')$ et on sait qu'il existe une suite $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_n|_{B'} \rightarrow u|_{B'}$ dans $H^1(B')$. On applique l'inégalité ci-dessus avec les fonctions u_n puis on passe à la limite pour obtenir l'estimation souhaitée.

2. Soit $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ et $\varepsilon = \text{dist}(\mathbf{x}_0, \Omega^c)$. Alors $\bar{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon/2) \subset \Omega$. Si $\nabla u = 0$ alors l'inégalité précédente nous assure que $u(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = u(\mathbf{x})$ pour presque tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon/2)$ et pour tout $\mathbf{h} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon/2)$. On intègre suivant \mathbf{h} cette égalité sur $B(\mathbf{0}, \varepsilon/2)$ pour obtenir que

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{|B(\mathbf{0}, \varepsilon/2)|} \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon/2)} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad \text{pour presque tout } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon/2).$$

L'exercice 1.8 nous assure alors que u admet un représentant continu sur $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon/2)$. Comme cela est vrai pour toute boule incluse dans Ω , on déduit que u admet un représentant continu sur Ω tout entier et que, de plus, u est localement constante. Or toute fonction continue localement constante sur Ω est constante sur chaque composante connexe de Ω .

Exercice 2.6. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $u \in H_0^1(\Omega)$. On définit la fonction \bar{u} sur \mathbb{R}^N par :

$$\bar{u} := \begin{cases} u & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Montrer que $\bar{u} \in H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$ et que

$$\nabla \bar{u} = \begin{cases} \nabla u & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Solution. Par définition de $H_0^1(\mathbb{R}^N)$, u est la limite (dans $H^1(\Omega)$) d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$. Notons $(u_n)_n$ une telle suite. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $i = 1, \dots, N$, on a d'une part :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une intégration par parties conduit à :

$$\int_{\Omega} u_n(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

ce qui conclut la démonstration.

2.2.1 Inégalité de Poincaré

L'inégalité de Poincaré⁶ est un outil fondamental que nous utiliserons dans la résolution de certaines edp. Mais auparavant, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 2.4. Nous dirons qu'un ouvert Ω est borné dans une direction s'il existe un vecteur unitaire $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^N$ et une constant $A > 0$ tels que $\Omega \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : -A \leq \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} \leq A\}$.

Proposition 2.11 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

6. Henri Poincaré (29 avril 1854 à Nancy - 17 juillet 1912 à Paris) est un mathématicien, un physicien et un philosophe français. Théoricien de génie, ses apports à maints domaines des mathématiques et de la physique ont radicalement modifié ces deux sciences.

Démonstration. On peut supposer, quitte à changer de repère, que Ω est borné dans la direction x_N . On a alors $\Omega \subset \Omega' \times [-A, A]$ (Ω' est un ouvert de \mathbb{R}^{N-1}) et on note, comme nous l'avons déjà fait, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$. Supposons dans un premier temps que $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. On peut alors écrire que :

$$|u(\mathbf{x}', x_N)|^2 = 2 \int_{-A}^{x_N} u(x_N, t) \frac{\partial u}{\partial x_N}(\mathbf{x}', t) dt,$$

puis

$$|u(\mathbf{x}', x_N)|^2 \leq 2 \int_{-A}^A |u(\mathbf{x}', t)| \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(\mathbf{x}', t) \right| dt.$$

On intègre sur $\Omega' \times [-A, A]$ pour obtenir :

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x}', x_N)|^2 d(\mathbf{x}', x_N) \leq 4A \int_{\Omega} |u(\mathbf{x}', t)| \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(\mathbf{x}', t) \right| d(\mathbf{x}', t).$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient finalement :

$$\left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x}', x_N)|^2 d(\mathbf{x}', x_N) \right)^{1/2} \leq 4A \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(\mathbf{x}', t) \right|^2 d(\mathbf{x}', t) \right)^{1/2}.$$

L'inégalité de Poincaré étant vérifiée pour toute fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ et toute fonction de $H_0^1(\Omega)$ étant la limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, on en déduit le résultat de la proposition. \square

L'inégalité de Poincaré affirme que dans H_0^1 (et sous certaines conditions sur Ω) la norme L^2 du gradient contrôle la norme L^2 de la fonction. Cela nous permet de définir une nouvelle norme sur $H_0^1(\Omega)$:

Corollaire 2.12. *Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N borné dans une direction alors $\|u\|_{H_0^1} := \|\nabla u\|_{L^2}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$.*

★ Sur $H^1(\Omega)$ ou bien sur $H_0^1(\Omega)$ lorsque Ω n'est pas borné, l'inégalité de Poincaré est fautive.

Exercice 2.7. Donner des contre-exemples à l'inégalité de Poincaré dans $H_0^1(\mathbb{R})$ et $H^1([-1, 1])$.

Nous verrons d'autres types d'inégalités de Poincaré un peu plus loin dans les exercices (cf. exercice 2.9 et exercice 3.6)

2.3 Injections continues, compactes

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que lorsque l'exposant m est suffisamment grand, les fonctions de $H^m(\Omega)$ ont des propriétés de continuité et de différentiabilité au sens classique. On commence par le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$. Rappelons que pour k entier :

$$\mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N) := \{u \in C^k(\mathbb{R}^N) : \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |D^\alpha u(\mathbf{x})| = 0 \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq k\}.$$

Cet espace est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{B}^k} := \sum_{\alpha : |\alpha| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} |D^\alpha u(\mathbf{x})|.$$

Nous pouvons énoncer un premier résultat :

Théorème 2.13. (de Morrey⁷). *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $s > N/2 + k$. Alors :*

$$H^s(\mathbb{R}^N) \xrightarrow[\text{continue}]{} \mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N).$$

7. Charles Bradford Morrey Jr, (23 juillet 1907 - 29 avril 1984) Mathématicien américain, professeur à Berkeley (Californie) jusqu'en 1977.

Démonstration. Montrons d'abord le résultat pour $k = 0$, c'est à dire que si $s > N/2$ alors $H^s(\mathbb{R}^N) \xrightarrow[\text{continue}]{\hookrightarrow} \mathcal{B}^0(\mathbb{R}^N)$. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}| \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-s/2} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})| \, d\boldsymbol{\xi} \leq \|u\|_{H^s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s} \right)^{1/2}.$$

En utilisant les coordonnées polaires $(r, \sigma) \in [0, \infty[\times \mathbb{S}^{N-1}$ définies dans la premier chapitre, on obtient que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_0^\infty \frac{r^{N-1} \, dr \, d\Gamma}{(1 + r^2)^s} < \infty,$$

car $s > N/2$ donc $2s - (N - 1) > 1$. Finalement, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\widehat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

La transformée de Fourier, considérée comme une application de $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^N)})$ dans $(L^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^N)})$ est donc une application linéaire continue. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que la transformée de Fourier se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. Or on sait que si $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, l'expression de u est donnée par la transformée de Fourier inverse :

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \, d\boldsymbol{\xi}.$$

Ceci entraîne dans un premier temps que toute fonction $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ est continue :

$$|u(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})| |e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{h})} - e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}| \, d\boldsymbol{\xi},$$

et le théorème de convergence dominée nous assure que le terme de droite tend vers 0 lorsque $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$. D'autre part on a, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$:

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})| \, d\boldsymbol{\xi} \leq \left(\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s} \right) \|u\|_{H^s},$$

ce qui prouve que

$$\|u\|_{\mathcal{B}^0} \leq C \|u\|_{H^s}.$$

Enfin, on a vu précédemment que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ était dense dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc une fonction $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\|u - u_\varepsilon\|_{\mathcal{B}^0} \leq C \|u - u_\varepsilon\|_{H^s} < \varepsilon.$$

Pour $\mathbf{x} \notin \text{supp } u_\varepsilon$, on a en particulier $|u(\mathbf{x})| < \varepsilon$. On en déduit que $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |u(\mathbf{x})| = 0$. Le cas général ($k \geq 1$) s'obtient en remarquant que

$$u \in H^s(\mathbb{R}^N) \Rightarrow D^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^N),$$

et $s - |\alpha| > N/2$ pour tout $|\alpha| \leq k$. □

On déduit de cette proposition :

Corollaire 2.14. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > N/2 + k$, $H^m(\Omega) \xrightarrow[\text{continue}]{\hookrightarrow} C^k(\Omega)$.

Démonstration. Soit $K \subset \Omega$ et ζ_K une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ comme dans le lemme 1.3. Pour toute fonction u de $H^m(\Omega)$, on peut construire la fonction \bar{u} de $H^m(\mathbb{R}^N)$ en posant $\bar{u}(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \in \Omega^c$ et $\bar{u}(\mathbf{x}) = \zeta_K(\mathbf{x})u(\mathbf{x})$ si $\mathbf{x} \in \Omega$. La proposition affirme que $\bar{u} \in \mathcal{B}^k(\mathbb{R}^N)$ et donc que $u|_K \in C^k(K)$. Ceci étant vrai pour tout compact inclus dans Ω , on en déduit que $u \in C^k(\Omega)$. □

★ Il faut bien faire la différence entre le résultat donné dans ce corollaire et l'injection $H^m(\Omega) \xrightarrow[\text{continue}]{} C^k(\bar{\Omega})$ qui est fautive en général sans hypothèse supplémentaire. Considérer une fois de plus l'exemple 2.3. Lorsque Ω est régulier, cf. le corollaire 2.16.

Exercice 2.8. Soit $(u_n)_n \subset H^m(\mathbb{R}^N)$ avec $m > N/2$ une suite bornée. Montrer qu'il existe une fonction $u \in C(\mathbb{R}^N)$ et une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telles que $u_{n_k} \rightarrow u$ dans $C(\mathbb{R}^N)$ quand $k \rightarrow \infty$ (la topologie de $C(\mathbb{R}^N)$ est celle de la convergence uniforme sur tout compact, à ne pas confondre avec celle de $\mathcal{B}^0(\mathbb{R}^N)$ qui coïncide avec celle de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$).

Solution : Reprenant les calculs déjà effectués dans la démonstration de la proposition 2.13, on a, pour tout $v \in H^m(\mathbb{R}^N)$ (en fait pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ puis par densité pour tout $v \in H^m(\mathbb{R}^N)$) :

$$\begin{aligned} |v(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - v(\mathbf{x})| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{v}(\boldsymbol{\xi})| |e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{h})} - e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}| d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \frac{2}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{v}(\boldsymbol{\xi})| |\sin(\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\xi}/2)| d\boldsymbol{\xi} \leq \frac{2}{(2\pi)^{N/2}} \|v\|_{H^s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\sin(\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\xi}/2)|^2}{(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s} d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Comme $s > N/2$, le théorème de convergence dominée nous assure que le dernier terme tend vers 0 quand $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$. De cette inégalité, on peut déduire que $(u_n)_n$ est une famille équicontinue dans $C(\mathbb{R}^N)$. D'après le théorème d'Ascoli, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, il existe une sous-suite qui converge uniformément sur K . En prenant une suite croissante de compacts K (par exemple des boules fermées de rayon n) et par un procédé d'extraction diagonale, on définit une fonction $u \in C(\mathbb{R}^N)$ et une sous-suite $(u_{n_k})_k$ qui converge uniformément vers u sur tout compact de \mathbb{R}^N .

Quand $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ avec $s \leq N/2$ alors u n'a plus de représentant continu. En revanche, u est dans un certain espace $L^q(\mathbb{R}^N)$. La valeur de l'exposant q est précisée dans le théorème suivant :

Théorème 2.15 (Injections de Sobolev). Soit $0 \leq s \leq N/2$:

1. Si $s = N/2$ alors $H^s(\mathbb{R}^N) \xrightarrow[\text{continue}]{} L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in [2, \infty[$.
2. Si $0 \leq s < N/2$ alors $H^s(\mathbb{R}^N) \xrightarrow[\text{continue}]{} L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in \left[2, \frac{2N}{N - 2s}\right]$.

Démonstration. Nous allons seulement démontrer que si $0 \leq s < N/2$ alors $H^s(\mathbb{R}^N) \xrightarrow[\text{continue}]{} L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in [2, 2N/(N - 2s)[$ et nous admettrons les autres cas. La démonstration repose sur le théorème d'Hausdorff⁸-Young⁹ qui affirme que

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^{p'}} \leq (2\pi)^{N(1/2 - 1/p)} \|u\|_{L^p} \quad \forall 1 \leq p \leq 2.$$

Le théorème d'Hausdorff-Young est donc une généralisation du théorème de Plancherel. Évidemment, on peut aussi remplacer \mathcal{F} par $\bar{\mathcal{F}}$ dans l'inégalité ci-dessus. On procède comme dans la démonstration du théorème de Morrey. Soit $1 \leq p \leq 2$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})|^p d\boldsymbol{\xi} &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{sp/2} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-sp/2} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi})|^p d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{sp}{2-p}}} \right)^{1-p/2}, \end{aligned}$$

8. Felix Hausdorff (8 novembre 1868 - 26 janvier 1942) était un mathématicien allemand, considéré comme l'un des fondateurs de la topologie moderne.

9. William Henry Young (Londres, 20 octobre 1863 - Lausanne, 7 juillet 1942) est un mathématicien anglais issu de l'université de Cambridge et ayant travaillé à l'université de Liverpool et à celle de Lausanne.

où l'inégalité s'obtient en appliquant l'inégalité de Hölder. Utilisant les coordonnées polaires (r, σ) , il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{sp}{2-p}}} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{r^{N-1} dr d\Gamma}{(1 + r^2)^{\frac{sp}{2-p}}},$$

et la dernière intégrale est finie dès que $2sp/(2-p) - N + 1 > 1$ c'est à dire $p > 2N/(2s + N)$. Appliquant maintenant le théorème de Hausdorff-Young avec \mathcal{F} à la fonction \hat{u} , on obtient que :

$$\|u\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \leq (2\pi)^{N(1/2-1/p)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{sp}{2-p}}} \right)^{1/p-1/2} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)},$$

pour tout $2 \leq p' \leq 2N/(N - 2s)$. □

On peut étendre les résultats du théorème au cas où Ω est un ouvert assez régulier.

Corollaire 2.16. *Lorsque Ω est un ouvert de classe C^1 avec Γ borné ou lorsque $\Omega = \mathbb{R}_+^N$:*

1. Si $m > N/2 + k$, $k \in \mathbb{N}$ alors $H^m(\Omega) \xrightarrow[\text{continue}]{} C^k(\bar{\Omega})$.
2. Si $m = N/2$ alors $H^m(\Omega) \xrightarrow[\text{continue}]{} L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [2, \infty[$.
3. Si $0 \leq m < N/2$ alors $H^m(\Omega) \xrightarrow[\text{continue}]{} L^q(\Omega)$ pour tout $q \in \left[2, \frac{2N}{N - 2m}\right]$.

On démontre ce corollaire dans le cas $m = 1$ en utilisant l'opérateur de prolongement de la proposition 2.7. Nous n'avons pas les outils nécessaires pour le démontrer lorsque $m \geq 2$ et nous admettons le résultat. Enfin, dans le cas où Ω est de plus borné, on admet également le théorème suivant :

Théorème 2.17. (Rellich¹⁰-Kondrachov¹¹) *On suppose que Ω est **borné** et de classe C^1 . On a :*

1. Si $N = 1$ alors $H^1(\Omega) \xrightarrow[\text{compacte}]{} C(\bar{\Omega})$.
2. Si $N = 2$ alors $H^1(\Omega) \xrightarrow[\text{compacte}]{} L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.
3. Si $N > 2$ alors $H^1(\Omega) \xrightarrow[\text{compacte}]{} L^q(\Omega)$, $\forall q \in \left[1, \frac{2N}{N - 2}\right]$.

En particulier, on a toujours :

$$H^1(\Omega) \xrightarrow[\text{compacte}]{} L^2(\Omega).$$

Remarquer que le cas $N = 1$ est démontré dans l'exercice 2.11. Le théorème suivant est dû également à F. Rellich et ne nécessite aucune hypothèse de régularité sur Ω :

Théorème 2.18. *Soit Ω un ouvert **borné** dans \mathbb{R}^N . Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$:*

$$H_0^{m+1}(\Omega) \xrightarrow[\text{compacte}]{} H_0^m(\Omega).$$

En particulier, on a :

$$H_0^1(\Omega) \xrightarrow[\text{compacte}]{} L^2(\Omega).$$

On utilisera le théorème 2.17 ci-dessus pour résoudre l'exercice suivant :

10. Franz Rellich (14 septembre 1906 - 25 septembre 1955) était un mathématicien allemand. Il contribua aux fondements de la mécanique quantique et au développement de la théorie des edp.

11. Vladimir Iosifovich Kondrashov était un mathématicien soviétique. Il est mort le 26 février 1971.

Exercice 2.9. Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger¹² : si Ω est un ouvert connexe borné de classe C^1 alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω telle que :

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{où } \bar{u} := u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$|\Omega|$ désignant la mesure de Ω . On fait une démonstration par l'absurde.

1. Montrer que si la constante C n'existe pas, il est possible de construire une suite $(u_n)_n \subset H^1(\Omega)$ vérifiant $\int_{\Omega} u_n \, d\mathbf{x} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\|\bar{u}_n\|_{L^2} \geq n \|\nabla u_n\|_{L^2}.$$

2. En déduire qu'il est possible d'extraire une sous-suite (notée encore $(u_n)_n$) qui converge dans $L^2(\Omega)$. Montrer que cette suite converge aussi dans $H^1(\Omega)$. On note u^* la limite.
3. Calculer $\|u^*\|_{L^2}$, $\|\nabla u^*\|_{L^2}$ et $\int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$. Montrer que l'on arrive à une contradiction.

★ Comparer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger avec l'inégalité de Poincaré donnée plus tôt dans le cours.

2.4 Trace d'une fonction

Lorsque u est une fonction de $L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , on ne peut pas considérer la restriction de la fonction à un ensemble de mesure nulle car les fonctions de $L^2(\Omega)$ sont justement définies à un ensemble de mesure nulle près. En revanche, comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les fonctions des espaces de Sobolev sont plus régulières que les fonctions de L^2 . On a par exemple montré que lorsque $m > N/2$, les fonctions de $H^m(\Omega)$ admettent un représentant continu. Nous allons montrer dans cette partie qu'il n'est pas nécessaire que la fonction ait un représentant continu pour que l'on puisse considérer sa restriction à $\Gamma := \partial\Omega$. C'est ce que nous appellerons la *trace* de la fonction sur le bord du domaine.

2.4.1 Cas du demi-espace

Commençons par traiter le cas du demi-espace, c'est à dire

$$\Omega = \mathbb{R}_+^N := \{(\mathbf{x}', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : x_N > 0\}.$$

On a alors

$$\Gamma := \partial\Omega = \{(\mathbf{x}', 0) : \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{N-1}\},$$

que nous identifierons à \mathbb{R}^{N-1} .

Théorème 2.19 (De trace). *Il existe une application linéaire continue, appelée trace et notée :*

$$\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}_+^N) \rightarrow H^{1/2}(\mathbb{R}^{N-1}),$$

qui prolonge l'application restriction usuelle pour les fonctions continues. Cette application est surjective et son noyau est $\ker(\gamma_0) = H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$.

Les fonctions de $H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ sont donc les fonctions dont la trace est nulle sur le bord du domaine. Cette notion donne un sens précis à l'idée que nous en avons, à savoir celle de fonctions qui *s'annulent* sur le bord du domaine.

Dans la démonstration de ce théorème nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.20. *Pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a :*

$$|v(0)|^2 \leq 2 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

12. Wilhelm Wirtinger (1865-1945) était un mathématicien écossais.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$|v(0)|^2 = -2 \int_0^{+\infty} v'(s)v(s) ds,$$

et d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. \square

Démonstration du théorème. Comme nous l'avons déjà fait, on commence par considérer des fonctions régulières et qui forment un sous-espace dense dans $H^1(\mathbb{R}_+^N)$. Nous prendrons ici la restriction à \mathbb{R}_+^N des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Soit u une telle fonction. Nous noterons \widehat{u} la transformée de Fourier partielle en \mathbf{x}' définie par :

$$\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N) := \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(\mathbf{x}', x_N) e^{-i\mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\xi}'} d\mathbf{x}',$$

et qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier usuelle de la fonction $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{N-1} \mapsto u(\mathbf{x}', x_N)$ où x_N est fixé. La fonction u étant très régulière et à support compact, on montre sans difficulté que

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_N}(\boldsymbol{\xi}', x_N) = \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_N}}(\boldsymbol{\xi}', x_N), \quad \forall (\boldsymbol{\xi}', x_N) \in \mathbb{R}_+^N.$$

D'après l'égalité de Parseval et les propriétés de la transformée de Fourier, on a :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}^2 &= \int_{\mathbb{R}_+^N} u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^N} u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla_{\mathbf{x}'} u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}_+^N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2) |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 d\boldsymbol{\xi}' dx_N + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_N}(\boldsymbol{\xi}', x_N) \right|^2 d\boldsymbol{\xi}' dx_N \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2) |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 d\boldsymbol{\xi}' dx_N + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_N}(\boldsymbol{\xi}', x_N) \right|^2 d\boldsymbol{\xi}' dx_N. \end{aligned}$$

A $\boldsymbol{\xi}'$ fixé, la fonction $x_N \mapsto \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On applique le lemme pour obtenir :

$$|\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', 0)|^2 \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 dx_N \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_N}(\boldsymbol{\xi}', x_N) \right|^2 dx_N \right)^{1/2},$$

puis

$$(1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{1/2} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', 0)|^2 \leq 2 \left((1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2) \int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 dx_N \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_N}(\boldsymbol{\xi}', x_N) \right|^2 dx_N \right)^{1/2},$$

et en utilisant l'inégalité $ab \leq 1/2(a^2 + b^2)$:

$$(1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{1/2} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', 0)|^2 \leq (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2) \int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 dx_N + \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_N}(\boldsymbol{\xi}', x_N) \right|^2 dx_N.$$

En intégrant cette inégalité sur \mathbb{R}^{N-1} et en utilisant une égalité obtenue plus haut, il vient :

$$\|\gamma_0(u)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Cette estimation étant valable pour toute fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, l'application linéaire continue

$$u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \mapsto \gamma_0(u) \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{N-1}),$$

se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ dans $H^{1/2}(\mathbb{R}^{N-1})$.

Montrons maintenant que γ_0 est une fonction surjective. Pour cela, considérons $a \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{N-1})$ et construisons $u \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$ telle que $\gamma_0(u) = a$. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la fonction définie par $\rho := e\tilde{\rho}$ où $\tilde{\rho}$ est donnée dans le premier chapitre, paragraphe 1.1.4. On a alors $\rho(0) = 1$ et $0 \leq \rho(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Définissons u par sa transformée de Fourier partielle :

$$\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N) := \widehat{a}(\boldsymbol{\xi}') \rho((1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{1/2} x_N).$$

De l'égalité $\widehat{\gamma_0(u)}(\boldsymbol{\xi}') = \widehat{a}(\boldsymbol{\xi}')$, on déduit (suivant le théorème de Plancherel), que $\gamma_0(u) = a$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2) |\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 + \left| \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_N}(\boldsymbol{\xi}', x_N) \right|^2 &= (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2) \left(|\widehat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 + |\widehat{a}(\boldsymbol{\xi}') \rho'((1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{1/2} x_N)|^2 \right) \\ &\leq (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2) |\widehat{a}(\boldsymbol{\xi}')|^2 (|\rho((1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{1/2} x_N)|^2 + |\rho'((1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{1/2} x_N)|^2). \end{aligned}$$

Or, en effectuant un changement de variables, $\boldsymbol{\xi}'$ étant fixé, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\rho((1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{1/2} x_N)|^2 dx_N &= (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{-1/2} \int_0^\infty |\rho(x_N)|^2 dx_N = C_1 (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{-1/2}, \\ \int_0^\infty |\rho'((1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{1/2} x_N)|^2 dx_N &= (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{-1/2} \int_0^\infty |\rho'(x_N)|^2 dx_N = C_2 (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

On intègre alors l'inégalité plus haut d'abord suivant x_N entre 0 et $+\infty$ puis suivant $\boldsymbol{\xi}'$ sur \mathbb{R}^{N-1} pour obtenir l'estimation :

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)} \leq C \|a\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{N-1})},$$

où $C := \sqrt{C_1 + C_2}$ ce qui prouve que $u \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$.

Nous admettons le dernier point du théorème, la démonstration étant longue et technique. On pourra la trouver dans R. Dautray, J.-L. Lions, *Analyse mathématiques et calcul numérique*, volume 3, Transformations, Sobolev, opérateurs, pages 901-903. \square

En utilisant la transformée de Fourier partielle plus générale introduite dans la proposition 2.6, on montre que :

Théorème 2.21. *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'application trace vérifie*

$$\gamma_0(H^m(\mathbb{R}_+^N)) = H^{m-1/2}(\mathbb{R}^{N-1}).$$

De plus l'application (avec les normes associées !) :

$$\gamma_0 : H^m(\mathbb{R}_+^N) \rightarrow H^{m-1/2}(\mathbb{R}^{N-1}),$$

est continue. Son noyau est $\text{Ker } \gamma_0 = H_0^1(\mathbb{R}_+^N) \cap H^m(\mathbb{R}_+^N)$.

★ Ne pas confondre $H_0^1(\mathbb{R}_+^N) \cap H^m(\mathbb{R}_+^N)$ avec $H_0^m(\mathbb{R}_+^N)$. On a seulement une inclusion : $H_0^m(\mathbb{R}_+^N) \subset H_0^1(\mathbb{R}_+^N) \cap H^m(\mathbb{R}_+^N)$. Trouver des contre-exemples à l'inclusion réciproque.

Exercice 2.10. Soit $g \in H^{m-1/2}(\mathbb{R}^{N-1})$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$, on note $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$. Montrer que le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u(\mathbf{x}', 0) = g(\mathbf{x}') & \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases}$$

admet au moins une solution (au sens des distributions sur Ω et au sens des traces sur $\partial\Omega$) dans $H^m(\Omega)$ (Indication : utiliser la transformée de Fourier partielle).

2.4.2 Cas d'un ouvert régulier quelconque

Pour définir la trace d'une fonction sur le bord Γ d'un ouvert Ω de classe C^1 , on introduit une partition de l'unité et un système de cartes locales pour se ramener au cas du demi-espace que nous venons de traiter. Nous n'écrivons pas en détails cette démarche et ne donnons que le résultat :

Théorème 2.22. *Soit Ω un ouvert de classe C^1 , alors il existe un opérateur linéaire continu, appelé opérateur trace et noté γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ qui coïncide avec l'opérateur de restriction usuel pour les fonctions continues. Son noyau est $\ker \gamma_0 = H_0^1(\Omega)$.*

A la suite de ce théorème, on pose :

Définition 2.5. Soit Ω un ouvert de classe C^m avec $m \in \mathbb{N}^*$ et γ_0 l'opérateur décrit dans le théorème précédent. On définit alors, par analogie avec le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^N$:

$$H^{m-1/2}(\Gamma) := \gamma_0(H^m(\Omega)),$$

que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{H^{m-1/2}(\Gamma)} := \inf_{v \in \gamma_0^{-1}(\{u\})} \|v\|_{H^m(\Omega)}.$$

★ L'opérateur $\gamma_0 : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1/2}(\Gamma)$ est alors linéaire continu (le vérifier) et **surjectif** (par construction).

Remarque 2.2. Par définition de la norme de $H^{m-1/2}(\Gamma)$, pour tout $g \in H^{m-1/2}(\Gamma)$ il est possible de trouver un fonction $G \in H^m(\Omega)$ telle que $\gamma_0(G) = g$ et

$$\|G\|_{H^m(\Omega)} \leq 2\|g\|_{H^{m-1/2}(\Gamma)}.$$

La fonction G est appelée un relèvement de g

Précisons enfin qu'il est possible de donner une définition intrinsèque de l'espace $H^{m-1/2}(\Gamma)$ sans utiliser l'opérateur trace.

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on notera simplement u au lieu de $\gamma_0(u)$ par exemple dans les formules d'intégration : $\int_{\Gamma} u^2 d\Gamma$ au lieu de $\int_{\Gamma} (\gamma_0(u))^2 d\Gamma$.

Si $u \in H^2(\Omega)$ alors bien entendu $u \in H^1(\Omega)$ mais aussi $\partial u / \partial x_i \in H^1(\Omega)$ pour tout $i = 1, \dots, N$. On peut donc nous seulement considérer $\gamma_0(u)$ mais aussi $\gamma_0(\partial u / \partial x_i)$ qui sont alors des fonctions de $H^{1/2}(\Gamma)$. En particulier, lorsque Γ est de classe C^1 , $\nabla u \cdot \mathbf{n}$ est un élément de $L^2(\Gamma)$.

Enfin, donnons sans démonstration un résultat de densité :

Proposition 2.23. *Soit Ω un ouvert de classe C^m , $m \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$H^{m-1/2}(\Gamma) \underset{\text{dense}}{\hookrightarrow} L^2(\Gamma).$$

2.4.3 Retour sur la formule de Green

Maintenant que nous sommes en mesure de donner un sens à la restriction d'une fonction d'un espace de Sobolev sur le bord d'un ouvert, nous allons montrer que la formule de Green est encore valable pour de telles fonctions.

Proposition 2.24. *Soit Ω un ouvert de classe C^1 dans \mathbb{R}^N tel que Γ soit borné où bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, alors, pour toutes fonctions $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$:*

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}.$$

Précisons une fois encore que dans l'intégrale de bord, il faut comprendre $\gamma_0(u)$ pour u (la trace de u) sur Γ et

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \sum_{i=1}^N \gamma_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) n_i,$$

où $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)^T$.

Démonstration. Soient u et v deux fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Appliquons la formule d'Ostrogradsky avec $\mathbf{F} := (0, \dots, 0, uv, 0, \dots, 0)$, où le terme uv est en i -ème position. On obtient que :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \frac{\partial v}{\partial x_i} u \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} u v n_i \, d\Gamma. \quad (\text{FO})$$

Les propriétés de régularité de Ω nous assurent, d'après le corollaire 2.9, que pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|u_n|_{\Omega} - u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. La continuité de l'application trace nous permet de conclure que l'on a aussi $\|u_n|_{\Gamma} - u|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \rightarrow 0$. Or, pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v + \frac{\partial v}{\partial x_i} u_n \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} u_n v n_i \, d\Gamma.$$

On passe alors à la limite dans cette égalité, prouvant ainsi que (FO) est encore vérifiée pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$. On procède de la même façon avec une suite $(v_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ qui converge dans $H^1(\Omega)$ vers une fonction v arbitrairement choisie pour obtenir que (FO) reste vraie si $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. Choisissons maintenant $u \in H^2(\Omega)$. Alors $\partial u / \partial x_i \in H^1(\Omega)$ et l'on peut appliquer la formule avec cette fonction. On obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v + \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} v n_i \, d\Gamma.$$

En sommant sur tous les $i = 1, \dots, N$ on obtient la formule de Green. □

2.5 Exercices sur le chapitre 2

Exercice 2.11. soit $]a, b[$ un intervalle de \mathbb{R} avec $-\infty < a < b < +\infty$ et φ une fonction de classe C^1 sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de a et b telle que :

$$\forall t \in]a, b[, \quad |\varphi(t)| \leq C(\|\varphi\|_{L^2} + \|\varphi'\|_{L^2}).$$

En déduire que $H^1(]a, b[) \xrightarrow[\text{continue}]{\hookrightarrow} L^\infty(]a, b[)$ (on pourra admettre la densité de $C^1(]a, b[)$ dans $H^1(]a, b[)$).

2. Choisir un exemple de fonction du type $u(r, \theta) = (-\log(r))^\alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer) pour prouver que l'injection de $H^1(B)$ dans $L^\infty(B)$ (où B est la boule de centre 0 et de rayon 1/2) est fautive en dimension deux (on rappelle ce résultat concernant les intégrales de Bertrand : $\int_0^{1/2} 1/(r|\log(r)|^\beta) dr < \infty$ si et seulement si $\beta > 1$).
3. Soit \mathcal{B} une partie bornée de $H^1(]a, b[)$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de \mathcal{B} , telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{B}, \forall t, t' \in]a, b[, \quad |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq C|t - t'|^{1/2}.$$

En déduire que l'injection de $H^1(]a, b[)$ dans $L^\infty(]a, b[)$ est compacte (on utilisera la théorème d'Ascoli¹³ : de toute suite bornée et équicontinue dans $C(]a, b[)$, on peut extraire une sous-suite convergente).

13. Giulio Ascoli (1843-1896) Mathématicien italien, ses travaux portent, entre autres, sur la théorie des fonctions.

Exercice 2.12. Montrer que pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^N (sans condition de régularité), pour toutes fonctions $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$, on a la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}.$$

Exercice 2.13. Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$. On note $\tau_h u$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\tau_h u(x) := u(x+h)$. On désigne par \mathcal{F} la transformée de Fourier de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F} \left(\frac{\tau_h u - u}{h} \right) = \left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h} \right) \mathcal{F}(u).$$

2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $h \neq 0$ et $\xi \neq 0$:

$$\left| \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} - i\xi \right| = |\xi| \left| \frac{\sin(h\xi/2)}{h\xi/2} - e^{-ih\xi/2} \right| \leq C|\xi|.$$

3. Dédire des questions précédentes que si $u \in H^1(\mathbb{R})$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(\tau_h u - u)/h - u'\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Exercice 2.14. Soit $I :=]a, b[$ un intervalle de \mathbb{R} avec $-\infty < a < b < +\infty$. Pour tout $0 < \alpha < (b-a)/2$, on note $I_\alpha :=]a + \alpha, b - \alpha[$.

1. Montrer que si $u \in C^1([a, b])$ alors pour tout α comme ci-dessus :

$$|u(x+h) - u(x)|^2 \leq h^2 \int_0^1 |u'(x+sh)|^2 ds \quad \forall x \in I_\alpha, \forall h \in \mathbb{R}, |h| < \alpha.$$

En déduire que pour toute fonction $u \in H^1(I)$, pour tout intervalle I_α et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \alpha$:

$$\|(\tau_h u - u)/h\|_{L^2(I_\alpha)} \leq \|u'\|_{L^2(I)},$$

où la fonction $\tau_h u$ est définie comme dans l'exercice 2.13.

2. Réciproquement, on suppose maintenant que pour une certaine fonction $u \in L^2(I)$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout intervalle I_α et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \alpha$:

$$\|(\tau_h u - u)/h\|_{L^2(I_\alpha)} \leq C.$$

Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ on note $\bar{\varphi}$ la fonction φ prolongée par 0 sur \mathbb{R} tout entier. Vérifier que pour un certain α (à préciser) et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \alpha$:

$$\int_I u(x) \frac{\bar{\varphi}(x+h) - \bar{\varphi}(x)}{h} dx = \int_{I_\alpha} \frac{u(x-h) - u(x)}{h} \varphi(x) dx.$$

3. Dédire de la question précédente que, toujours pour la même fonction $u \in L^2(I)$ fixée, la fonction :

$$\begin{aligned} T_u : \mathcal{D}(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto T_u(\varphi) = \int_I u(x) \frac{\bar{\varphi}(x+h) - \bar{\varphi}(x)}{h} dx, \end{aligned}$$

est linéaire continue pour la norme de $L^2(I)$.

4. En utilisant un résultat de densité, montrer que T_u se prolonge de façon unique en une application linéaire continue sur $L^2(I)$ tout entier.

5. Montrer qu'il existe $v \in L^2(I)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$:

$$\int_I u(x)\varphi'(x) dx = \int_I v(x)\varphi(x) dx.$$

Indication : utiliser le théorème de représentation de Riesz.

6. Conclure que $u \in H^1(I)$.

Exercice 2.15. Montrer que

$$u \in H^2(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow u \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ et } \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

et que l'application $u \mapsto -\Delta u + \alpha u$ (où α est un réel positif) est un isomorphisme continu de $H^2(\mathbb{R}^N)$ sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ (utiliser la transformée de Fourier).

Exercice 2.16. Dans cet exercice nous allons montrer que $H^1(\mathbb{R})$ est une algèbre i.e. que si u et v sont deux fonctions de $H^1(\mathbb{R})$ alors $uv \in H^1(\mathbb{R})$ (ce résultat n'est vrai qu'en dimension 1).

1. Expliquer pourquoi $uv \in L^2(\mathbb{R})$ si u et v sont dans $H^1(\mathbb{R})$.
2. On suppose maintenant que $u \in H^1(\mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} (uv)\varphi' dx = - \int_{\mathbb{R}} u'v\varphi dx - \int_{\mathbb{R}} uv'\varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (\text{R})$$

c'est à dire que :

$$(uv)' = u'v + uv',$$

au sens des distributions.

3. Montrer que la relation (R) est encore vraie pour tout $v \in H^1(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $(uv)' \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2.17. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ avec $s > N/2$. Montrer que $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0$.

Exercice 2.18. Soit Ω le carré $]0, 1[\times]0, 1[$ de \mathbb{R}^2 et soit $u \in H^1(\Omega)$. Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $v(x) := \int_{]0, 1[} u(x, s) ds$.

1. Pourquoi cette fonction est-elle bien définie ?
2. Montrer que $v \in H^1(]0, 1[)$ et donner l'expression de v' . En déduire que v est continue sur $[0, 1]$. La fonction u était-elle continue sur Ω ?

Exercice 2.19. Soit $u \in L^2(]0, 1[)$. On pose, pour tout $x \in]0, 1[$, $v(x) := \int_{]0, x[} u(s) ds$. Montrer que $v \in H^1(]0, 1[)$ et déterminer v' .

Exercice 2.20. Soit Ω , un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^N . On pose :

$$\lambda = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}.$$

1. Expliquer pourquoi $\lambda > 0$.
2. On introduit maintenant la fonction :

$$\begin{aligned} J : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Montrer que si J admet un minimum $u^* \neq 0$ alors :

$$\int_{\Omega} \nabla u^* \cdot \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} u^* v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

3. En déduire que $u^* \in H_0^1(\Omega)$ vérifie au sens des distributions :

$$-\Delta u^* = \lambda u^*.$$

On dit que u^* est une fonction propre de l'opérateur $-\Delta$ associée à la valeur propre λ .

4. Réciproquement, soit μ le plus petit réel pour lequel il existe une fonction $w^* \in H_0^1$, $w^* \neq 0$ telle que $-\Delta w^* = \mu w^*$ au sens des distributions. Montrer qu'alors :

$$\mu = \frac{\int_{\Omega} |\nabla w^*|^2 dx}{\int_{\Omega} |w^*|^2 dx}.$$

5. En déduire que $\mu = \lambda$.

6. Lorsque $N = 1$ et Ω est un intervalle, montrer que les fonctions propres sont C^∞ .

7. Calculer explicitement λ lorsque $N = 1$ et Ω est l'intervalle $]0, \pi[$.

Exercice 2.21. Dans les espaces L^p , deux fonctions qui diffèrent seulement sur un ensemble de mesure nulle sont égales. Ce n'est plus le cas dans les espaces de Sobolev. Dans les espaces H^1 , la bonne notion est celle de *capacité*. Par exemple, l'ensemble $\{0\}$ n'est pas de capacité nulle dans \mathbb{R} mais le point $\{(0, 0)\}$ est de capacité nulle dans \mathbb{R}^2 . Ceci entraîne que $H^1(]-1, 1[\setminus \{0\}) \neq H^1(]-1, 1[)$ mais que $H^1(\Omega) = H^1(\Omega \setminus \{(0, 0)\})$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant $(0, 0)$. Montrons ce résultat :

1. Montrer que $H^1(]-1, 1[\setminus \{0\}) \neq H^1(]-1, 1[)$.

2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant $\mathbf{0} := (0, 0)^T$ et $\Omega' = \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}$. Montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ alors $u|_{\Omega'} \in H^1(\Omega')$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $r \in \mathbb{R}_+$:

$$\tilde{\chi}_n(r) := \int_0^r \rho_n(s - 2/n) ds,$$

où ρ_n est la fonction définie dans le paragraphe 1.1.4 (cf. graphe ci-dessous). On pose ensuite, pour



FIGURE 2.8 – Graphes des fonctions ρ_1 (en vert) et $\tilde{\chi}_1$ (en rouge).

tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\chi_n(\mathbf{x}) := \tilde{\chi}_n(|\mathbf{x}|)$.

(a) Vérifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\tilde{\chi}'_n(r)| < Cn$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \mathbb{R}_+$.

(b) Soit $u \in H^1(\Omega')$. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \chi_n$ est dans $\mathcal{D}(\Omega')$ et donc que :

$$\int_{\Omega'} u \frac{\partial(\varphi \chi_n)}{\partial x_i} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega'} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \chi_n d\mathbf{x} \quad i = 1, 2.$$

(c) En passant à la limite dans l'identité ci-dessus, montrer que

$$\int_{\Omega'} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega'} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx \quad i = 1, 2.$$

En déduire que $u \in H^1(\Omega)$ puis que $H^1(\Omega) = H^1(\Omega')$.

Exercice 2.22. (Démonstration de la Proposition 2.5) On reprend les notations du paragraphe 1.5.3 et de la proposition 2.5. Soit $u \in C^\infty(\Omega)$.

1. Montrer que, pour tout $(r, \theta) \in \tilde{\Omega}$, $r \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r, \theta) &= \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial x_1}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial x_2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta) &= -\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial x_1}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial x_2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \end{aligned}$$

puis que

$$|\nabla u(r \cos(\theta), r \sin(\theta))|^2 = \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r, \theta) \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta) \right|^2,$$

et enfin que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{\tilde{H}^1(\tilde{\Omega})}.$$

2. En déduire que l'application $u \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega) \mapsto \tilde{u} := u \circ \phi \in \tilde{H}^1(\tilde{\Omega})$ se prolonge de façon unique par continuité en une application de $H^1(\Omega)$ sur $\tilde{H}^1(\tilde{\Omega})$. Vérifier que l'application est injective.
3. L'application ϕ étant un difféomorphisme de $\tilde{\Omega} \setminus (\{0\} \times]-\pi, \pi])$ sur $\Omega \setminus \{0\}$, on peut poser, pour tout $v \in \tilde{\Omega}$ et pour tout $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{0\}$, $u(\mathbf{x}) := v \circ \phi^{-1}(\mathbf{x})$. Montrer que $u \in H^1(\Omega \setminus \{0\})$.
4. Utiliser le résultat de l'exercice 2.21 pour en déduire que l'application $u \in H^1(\Omega) \mapsto \tilde{u} \in \tilde{H}^1(\tilde{\Omega})$ est une bijection.

Exercice 2.23. On note B_R la boule de centre $\mathbf{0}$ et de rayon R dans \mathbb{R}^N et on note $r = |\mathbf{x}|$ la distance du point \mathbf{x} à l'origine.

1. On suppose que $2 < N$ et $q > 2N/(N-2)$ et on considère la fonction $u(\mathbf{x}) = r^\lambda$. Choisir λ pour que u soit dans $H^1(B_R)$ mais pas dans $L^q(B_R)$.
2. On se place maintenant dans le cas limite $N = 2$ et on considère la fonction $u(\mathbf{x}) = \log(\log 4R/r)$. Vérifier que $u \in H^1(B_R)$ alors que, évidemment $u \notin L^\infty(B_R)$.

Exercice 2.24. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on considère l'opérateur de prolongement canonique $P : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^N)$ défini pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ par :

$$Pu(\mathbf{x}) := \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega. \end{cases}$$

1. Montrer que P se prolonge de façon unique en une isométrie de $H_0^m(\Omega)$ dans $H^m(\mathbb{R}^N)$.
2. En notant toujours P l'application prolongée, montrer que $P(u)|_\Omega = u$ pour tout $u \in H_0^m(\Omega)$.

★ Remarquer que dans cet exercice, aucune hypothèse concernant la régularité de Ω n'est nécessaire. Comparer avec les résultats de prolongement donnés dans le cours.

Exercice 2.25. Le but de cet exercice est de construire l'application trace sur le bord d'un rectangle. On considère le rectangle $\Omega := [-L, L] \times [0, l]$ dans \mathbb{R}^2 et on note Γ le côté $[-L, L] \times \{0\}$. On considère l'application linéaire

$$\gamma : u \in C^1(\bar{\Omega}) \mapsto u|_\Gamma \in L^2(\Gamma),$$

et on souhaite montrer que cette application se prolonge en une application $\tilde{\gamma}$ linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ (appelée application *trace*).

1. Soit $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Montrer que pour tout $y \in [0, l]$,

$$\int_{-L}^L u^2(x, 0) \, dx \leq \int_{-L}^L u^2(x, y) \, dx + 2 \int_{-L}^L \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) u(x, t) \right| \, dt \, dx.$$

2. Montrer que si φ est une fonction continue sur un intervalle fermé borné I de longueur $|I|$, alors

$$\exists y \in I \text{ tel que } |\varphi(y)| \leq \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi(t)| \, dt.$$

3. Appliquer l'inégalité de la question précédente à la fonction $y \mapsto \int_{-L}^L u^2(x, y) \, dx$ et en déduire que

$$\int_{\Gamma} u^2(x, 0) \, dx \leq \frac{1}{l} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

4. En remarquant que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a $2|ab| \leq a^2 + b^2$, en déduire qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de u telle que

$$\left(\int_{\Gamma} u^2(x, 0) \, dx \right)^{1/2} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}).$$

5. Conclure en admettant la densité de $C^1(\bar{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$.

Exercice 2.26. (Une edp sur un domaine non borné). On note $\Omega =]0, +\infty[$ et ρ la fonction C^∞ définie sur \mathbb{R} par $\rho(x) = (1+x)^{-1}$. On définit l'espace de Sobolev avec poids ρ

$$H^1(\Omega, \rho) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), u' \in L^2(\Omega), u\rho \in L^2(\Omega)\},$$

que l'on munit du produit scalaire :

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} u'(x)v'(x) \, dx + \int_{\Omega} u(x)v(x)\rho^2(x) \, dx,$$

et de la norme associée, notée $\|\cdot\|_1$.

- Vérifier que $H^1(\Omega, \rho)$ est un espace de Hilbert.
- Vérifier que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dans $H^1(\Omega, \rho)$. En déduire que l'on a une inclusion stricte $H^1(\Omega) \subset H^1(\Omega, \rho)$.
- Montrer que pour tout $a > 0$ et toute fonction $u \in H^1(\Omega, \rho)$, la fonction $u|_{]0, a[}$ (la restriction de u à l'intervalle $]0, a[$) est dans $H^1(]0, a[)$. En déduire, grâce à un résultat du cours, que les fonctions de $H^1(\Omega, \rho)$ sont dans $C^0([0, +\infty[)$.
- Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ soit dans $H^1(\Omega, \rho)$ et vérifie $(u_\alpha, \varphi)_1 = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Que peut en déduire ?
- On note $H_0^1(\Omega, \rho)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega, \rho)$.
 - En écrivant que, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $s \in \Omega$ on a

$$u^2(s) = 2 \int_0^s u'(t)u(t) \, dt$$

montrer que

$$\int_{\Omega} u^2(s)\rho^2(s) \, ds = 2 \int_{\Omega} u'(s)u(s) \left(\int_s^{+\infty} \rho^2(t) \, dt \right) \, ds.$$

(b) En déduire l'inégalité suivante, de type Poincaré, valable pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega, \rho)$:

$$\left(\int_{\Omega} u^2(s) \rho^2(s) ds \right)^{1/2} \leq 2 \left(\int_{\Omega} |u'(s)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

(c) Montrer que sur $H_0^1(\Omega, \rho)$, on peut choisir

$$(u, v)_0 = \int_{\Omega} u'(s)v'(s) ds,$$

comme produit scalaire équivalent au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_1$. On note $\|\cdot\|_0$ le produit scalaire associé.

6. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On cherche une solution (au sens des distributions) à l'edp $-u'' = f$ dans $H_0^1(\Omega)$ (attention, ici $H_0^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev classique, sans poids). Montrer que le problème est équivalent à chercher une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant :

$$\int_{\Omega} u'(s)\varphi'(s) ds = \int_{\Omega} f(s)\varphi(s) ds, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

7. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de représentation de Riesz pour conclure ?
8. On suppose maintenant que $f/\rho \in L^2(\Omega)$ (pourquoi est-ce une hypothèse plus restrictive que $f \in L^2(\Omega)$?). Résoudre maintenant le problème en cherchant une solution dans $H_0^1(\Omega, \rho)$.
9. Expliquer pourquoi la solution trouvée est en fait dans $C^1([0, +\infty[)$.

Chapitre 3

Formulation variationnelle de problèmes elliptiques

Dans ce cours, nous nous restreindrons à un seul type d'edp : les edp elliptiques. Précisons ce que nous entendons par-là :

3.1 Nomenclature des edp linéaires

Trois grandes catégories

Les edp linéaires sont regroupées suivant trois grandes catégories : les edp **paraboliques**, **hyperboliques** et **elliptiques**. La nomenclature est inspirée de celle des cônes bien que n'ayant aucun rapport avec elle.

Un exemple d'edp parabolique est l'équation de la chaleur. Si $u(t, \mathbf{x})$ désigne la température au temps t et au point \mathbf{x} d'une pièce de métal Ω n'étant soumise à aucune source de chaleur, alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \frac{\kappa}{c\rho} \Delta u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t > 0,$$

où κ est la conductivité thermique, ρ la densité et c la chaleur spécifique, toutes trois étant des constantes positives. La dénomination (équation parabolique) s'explique de la façon suivante : si l'on remplace les opérateurs différentiels $\partial/\partial t$ par T et $\partial/\partial x_i$ par X_i , on obtient l'équation $T - \kappa/(c\rho)(X_1^2 + \dots + X_N^2) = 0$, ce qui est l'équation d'une paraboloïde. Un exemple d'équation de la chaleur est traité dans l'exercice A.1.

Un exemple d'équation hyperbolique est l'équation des ondes. Considérons une membrane plane élastique Ω fixée à un cerceau Γ (par exemple la membrane d'un tambour) et notons $u(t, \mathbf{x})$ le petit déplacement au temps $t > 0$ du point qui se trouvait en \mathbf{x} à l'instant initial. Alors, si la membrane n'est soumise à aucune force extérieure :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) - T_0 \Delta u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t > 0,$$

où $T_0 > 0$ est la tension de la membrane, une constante positive. On obtient cette fois que $T^2 - T_0(X_1^2 + \dots + X_N^2) = 0$ est l'équation d'une hyperboloïde. On trouvera un exemple d'étude de l'équation des ondes en dimension 1 dans l'exercice A.2.

Supposons maintenant que la membrane soit soumise à une force f indépendante du temps (par exemple la gravité) et que son mouvement se soit stabilisé. Alors u ne dépend plus du temps et vérifie :

$$-T_0 \Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

La petite manipulation déjà effectuée conduit à $-T_0(X_1^2 + \dots + X_N^2) = 0$ (on ne fait pas intervenir le

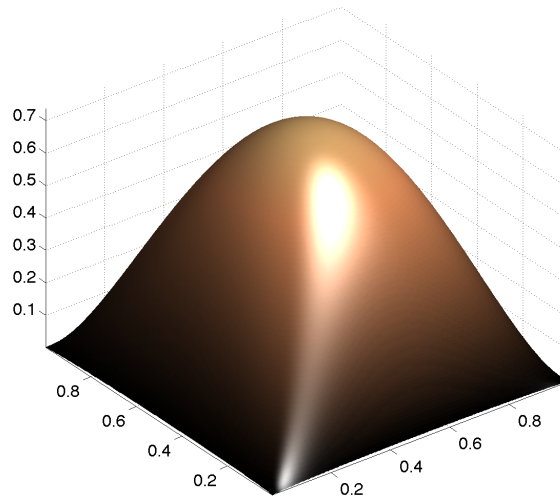


FIGURE 3.1 – Membrane élastique soumise à une force dirigée vers le haut, ou bien, d’un point de vu plus mathématique, graphe de la solution u d’une edp de Laplace. Le graphe a été réalisé dans le cadre du TP proposé dans l’annexe B.

second membre f) ce qui est l’équation d’une ellipsoïde. Cette dernière équation s’appelle aussi équation de Laplace¹. On trouvera des exemples d’équations de Laplace dans les exercices A.4 et A.5.

Les conditions aux limites, les conditions initiales

Comme pour les équations différentielles ordinaires, lorsque l’edp dépend du temps, il faut spécifier les conditions au temps $t = 0$. Reprenons les exemples du paragraphe précédent : pour l’équation de la chaleur qui fait intervenir un opérateur du premier ordre en t , il faut donner la valeur de $u(\mathbf{x}, 0)$ (c’est à dire la température en chaque point de la pièce au temps $t = 0$). Pour l’équation des ondes, qui fait quant à elle intervenir un opérateur du second ordre en t , il faut spécifier la position initiale de la membrane $u(\mathbf{x}, 0)$ mais aussi sa vitesse initiale $\partial u / \partial t(\mathbf{x}, 0)$.

La notion de *conditions aux limites* est spécifique aux edp. Elle consiste à donner des conditions au bord du domaine sur lequel est posé l’edp. Pour l’équation de la chaleur, ce peut être une condition du type $u(t, \mathbf{x}) = 0$ sur $\partial\Omega$ ce qui signifie que la pièce est plongée dans la glace et donc que son bord est maintenu pour tout temps à une température de 0 degré. Ce type de condition est appelé **condition de Dirichlet**². Un autre type de condition est $\partial u / \partial \mathbf{n} = 0$ (le flux de chaleur est nul sur $\partial\Omega$) ce qui traduirait le fait que la pièce est complètement isolée. On appelle **condition de Neumann**³ une telle condition. Enfin de flux de chaleur peut être proportionnel à la température de la pièce sur sa surface ce qui se traduit par : $\partial u / \partial \mathbf{n} + \alpha u = 0$ sur $\partial\Omega$ (α est une constante). Ce dernier type de condition s’appelle **condition de Fourier ou de Robin**⁴. La résolution d’une edp sur un ouvert Ω nécessite que soient spécifiées des conditions aux limites sur $\partial\Omega$.

1. Pierre-Simon Laplace, né le 23 mars 1749 à Beaumont-en-Auge (Calvados), mort le 5 mars 1827 à Paris, était un mathématicien, astronome et physicien français particulièrement célèbre par son ouvrage en cinq volumes *Mécanique Céleste*.

2. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 février 1805, Düren - 5 mai 1859, Göttingen) était un mathématicien allemand.

3. Carl Gottfried Neumann (7 mai 1832 à Königsberg - 27 mars 1925 à Leipzig) était un mathématicien allemand.

4. James Wilson Robin (né en décembre 1943) est un mathématicien anglais, il est professeur à l’université d’Oxford.

3.2 Le problème de Dirichlet

On appelle *problème de Dirichlet* une équation de Laplace avec conditions aux limites de type Dirichlet. Pour tout Ω ouvert de \mathbb{R}^N et $\Gamma := \partial\Omega$, le problème de Dirichlet s'énonce de la façon suivante : Déterminer une fonction u dans un certain espace fonctionnel V telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (\text{D})$$

où f est une fonction donnée dans un certain espace fonctionnel H . Un cadre *classique* pour résoudre cette edp serait de considérer $f \in C(\bar{\Omega})$ et consisterait à chercher une solution dans $C^2(\bar{\Omega})$. Historiquement, ce fut également la première approche proposée pour ce type de problème. Nous allons plutôt utiliser les espaces de Sobolev, comprendre les dérivées au sens des distributions et la condition aux limites au sens de la théorie des traces.

Le mathématicien J. Hadamard⁵ a introduit la notion de problème *bien posé* :

Définition 3.1. Le problème (D) est dit *bien posé* au sens d'Hadamard dans les espaces fonctionnels V et H si pour tout $f \in H$ il existe une unique solution $u \in V$ et si de plus

$$\|u\|_V \leq C \|f\|_H \quad \forall f \in H,$$

ou la constante $C > 0$ est indépendante de u et f (la solution dépend donc continuellement du second membre f).

Un travail préliminaire à la résolution du problème (D) consiste à en chercher des formulations équivalentes.

Proposition 3.1. Soit $f \in L^2(\Omega)$, alors les problèmes suivants sont équivalents :

1. Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
2. Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (\text{FV})$$

3. Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise dans $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(x) \, d\mathbf{x}.$$

Cette dernière formulation s'appelle le principe de Dirichlet.

La formulation 2. correspond en physiques au principe des travaux virtuels. En mathématiques nous l'appelons plutôt *formulation variationnelle*. La troisième formulation correspond à une approche énergétique du problème et affirme que la solution est la fonction qui minimise une certaine énergie.

Dire que les trois formulations sont équivalentes signifie que si u est solution de l'un des problème elle est aussi solution des deux autres.

Définition 3.2. Une solution à l'un quelconque des problèmes tous équivalents formulés dans la proposition ci-dessus est appelée une solution *faible* ou solution *variationnelle* du problème de Dirichlet (D).

Démonstration de la proposition. On procède en plusieurs étapes :

5. Jacques Salomon Hadamard (né le 8 décembre 1865 à Versailles, mort le 17 octobre 1963 à Paris) était un mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie.

2 \Rightarrow 1 Si u est solution de (FV) alors, puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Cette égalité se lit encore :

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}},$$

et par définition de la dérivation au sens des distributions, il vient :

$$-\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}},$$

c'est à dire

$$-\Delta u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

1 \Rightarrow 2 En remontant les calculs précédents, on obtient que

$$\int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Or par définition $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Par un raisonnement que nous déjà fait plusieurs fois, on obtient que l'égalité est aussi vérifiée pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

3 \Rightarrow 2 Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle J et soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $J(u) \leq J(u + tv)$. Or

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + tv)|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f(u + tv) \, d\mathbf{x} \\ &= J(u) + t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} - t \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (\text{E})$$

On a donc en particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$t \left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \right) + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} \geq 0.$$

En divisant cette inégalité par $t > 0$ et en faisant tendre t vers 0 on obtient que :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \geq 0.$$

En divisant ensuite la même inégalité mais cette fois par $t < 0$ et en faisant tendre t vers 0, il vient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \leq 0,$$

ce qui prouve que u vérifie la formulation (FV).

2 \Rightarrow 3 Si u est solution de (FV) alors avec (E) on obtient que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$J(u + v) = J(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

ce qui prouve que u réalise le minimum de J sur $H_0^1(\Omega)$.

□

De cette proposition, on déduit que :

Corollaire 3.2. *Si l'un quelconque des problèmes tous équivalents de la proposition précédente admet une solution, alors cette solution est unique.*

Démonstration. D'après la relation (3.1), si u_1 et u_2 sont deux solutions alors $J(u_1) = J(u_2) = J(u_1) + \int_{\Omega} |\nabla(u_2 - u_1)|^2 dx$ et donc $\nabla(u_2 - u_1) = 0$. Comme nous l'avons prouvé dans l'exercice 2.5, ceci entraîne que $u_2 - u_1$ est constante sur chaque composante connexe de Ω . Or la seule fonction constante par morceaux dans $H_0^1(\Omega)$ est la fonction identiquement nulle. \square

3.3 Un peu d'algèbre linéaire

C'est sous la forme (FV) de la proposition 3.1 que nous allons prouver l'existence d'une solution au problème de Dirichlet. Pour cela nous allons utiliser un résultat abstrait s'appuyant sur la structure d'espace de Hilbert des espaces de Sobolev. Introduisons quelques notations : Dans ce paragraphe, V désigne un espace de Hilbert de produit scalaire $(u, v)_V$ et de norme associée $\|u\|_V$. On note V' le dual de V et $a(u, v)$ est une forme bilinéaire sur $V \times V$, c'est à dire que $a(u, v)$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables et est à valeurs dans \mathbb{R} .

— La forme bilinéaire est continue s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall (u, v) \in V \times V.$$

La plus petite constante qui convient est alors par définition la norme de l'application bilinéaire.

— La forme bilinéaire est elliptique (ou coercive) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le

Théorème 3.3. (De Lax⁶-Milgram⁷). *Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et elliptique sur un espace de Hilbert V et soit F une forme linéaire continue sur V (c'est à dire un élément de V'). Alors il existe un unique élément u_F dans V solution de*

$$a(u_F, v) = \langle F, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V. \quad (\text{P})$$

Si de plus a est symétrique, la solution u du problème ci-dessus est l'unique solution du problème de minimisation⁸ :

$$\min_{u \in V} \left\{ \frac{1}{2} a(u, u) - \langle F, u \rangle_{V' \times V} \right\}.$$

Remarque 3.1. La coercivité et la continuité de a nous assure de l'existence de deux constantes $M > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) \leq M \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$$

Lorsque la forme bilinéaire a est symétrique, elle définit un nouveau produit scalaire sur V dont la norme associée est équivalente à $\|\cdot\|_V$. Le théorème de Lax-Milgram n'est alors rien d'autre que le théorème de représentation de Riesz.

Démonstration. Pour u fixée dans V , l'application

$$\begin{aligned} Au : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto a(u, v), \end{aligned}$$

6. Peter Lax est un mathématicien hongrois né en 1926 à Budapest. Le prix Abel 2005 lui a été décerné.

7. R. James Milgram est un mathématicien américain né en 1939. Il est actuellement professeur à Stanford University

8. Remarquer que le minimum est toujours strictement négatif.

est linéaire continue. En effet

$$|\langle Au, v \rangle_{V' \times V}| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \leq M_u \|v\|_V,$$

où l'on a posé $M_u := M \|u\|_V$. Pour tout $u \in V$, on a donc $Au \in V'$ et on peut donc considérer l'application

$$\begin{aligned} A : V &\rightarrow V' \\ u &\mapsto Au. \end{aligned}$$

Le problème (P) s'écrit $Au = F$ dans V' . Nous allons montrer que A est un isomorphisme, ce qui est une autre façon d'exprimer le résultat que nous voulons montrer. L'opérateur A est **continu**. En effet, par définition de la norme de V' :

$$\|Au\|_{V'} =: \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|\langle Au, v \rangle_{V' \times V}|}{\|v\|_V} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_V} \leq M \|u\|_V.$$

Mais on a aussi, par ellipticité

$$\|Au\|_{V'} := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|\langle Au, v \rangle_{V' \times V}|}{\|v\|_V} \geq \frac{|\langle Au, u \rangle_{V' \times V}|}{\|u\|_V} = \frac{|a(u, u)|}{\|u\|_V} \geq \alpha \|u\|_V.$$

On en déduit que si u_1 et u_2 sont deux éléments de V tels que $Au_1 = Au_2$ alors $\alpha \|u_1 - u_2\|_V \leq \|A(u_1 - u_2)\|_{V'} = 0$, c'est à dire que A est **injective**. On en déduit également que l'image de A est fermée. En effet, considérons $(F_n)_n$ une suite de $\text{Im}(A) \subset V'$ qui converge vers F^* et montrons que F^* est encore dans $\text{Im}(A)$. Par définition de l'image, il existe une suite $(u_n)_n \subset V$ telle que $F_n = Au_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(F_n)_n$ étant convergente, elle est de Cauchy et comme

$$\alpha \|u_m - u_n\|_V \leq \|Au_m - Au_n\|_{V'} = \|F_m - F_n\|_{V'} \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

la suite $(u_n)_n$ est aussi de Cauchy dans V qui est une espace de Hilbert (donc complet). Ceci entraîne que $(u_n)_n$ converge vers un élément u^* de V et la continuité de A nous donne $Au^* = F^*$, c'est à dire $F^* \in \text{Im}(A)$. Montrons enfin que l'image de A est dense dans V' , ce qui, avec le fait qu'elle est fermée, prouvera que A est **surjective**. Rappelons le

Lemme 3.4. Soit H un espace de Hilbert, H' son dual et H'_0 un sous-ev de H' . On a l'équivalence :

$$H'_0 \text{ est dense dans } H' \Leftrightarrow \{u \in H : \langle f, u \rangle_{V' \times V} = 0 \forall f \in H'_0\} = \{0\}.$$

Ce lemme se traduit par : H'_0 est dense dans V' si et seulement si l'orthogonal de H'_0 (au sens des formes linéaires) est réduit à $\{0\}$. Montrons que l'orthogonal de $\text{Im}(A)$ est réduit à $\{0\}$. Soit donc $u_0 \in V$ tel que $\langle Au, u_0 \rangle_{V' \times V} = 0$ pour tout $u \in V$. Alors en particulier pour $u = u_0$ on a

$$\alpha \|u_0\|_V^2 \leq a(u_0, u_0) = \langle Au_0, u_0 \rangle_{V' \times V} = 0,$$

et donc $u_0 = 0$, ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème. □

Exercice 3.1. Démontrer la deuxième partie du théorème en vous inspirant de la démonstration de la proposition 3.1.

De la démonstration du théorème, on déduit le

Corollaire 3.5. Avec les mêmes notations que dans le théorème, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de $F \in V'$ telle que

$$\|u_F\|_V \leq C \|F\|_{V'} \quad \forall F \in V'.$$

Il est équivalent de dire que l'opérateur $A^{-1} : V' \rightarrow V$ est continue, où A est défini dans la démonstration du Théorème de Lax-Milgram.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'on a :

$$\alpha \|u_F\|_V^2 \leq |a(u_F, u_F)| = |\langle F, u_F \rangle_{V' \times V}| \leq \|F\|_{V'} \|u_F\|_V,$$

d'où

$$\|u_F\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}.$$

□

Revenons maintenant au problème de Dirichlet.

3.4 Existence d'une solution au problème de Dirichlet

Nous avons montré dans la proposition 3.1 que la problème de Dirichlet (D) était équivalent à la formulation (FV). En utilisant le théorème de Lax-Milgram, nous allons montrer :

Proposition 3.6 (Existence d'une solution au problème de Dirichlet). *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N que l'on suppose borné dans une direction et soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une solution unique au problème :*

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. On applique le théorème de Lax-Milgram avec

- $V := H_0^1(\Omega)$,
- $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$,
- $\langle F, v \rangle_{V' \times V} := \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$.

Il est clair que la forme bilinéaire $a(u, v)$ est continue (et symétrique) ainsi que la forme linéaire F . Vérifions que $a(u, v)$ est elliptique. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Poincaré puisque l'inégalité :

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x},$$

entraîne bien que :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \geq \frac{1}{C+1} \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right) = \frac{1}{C+1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

□

Lorsque l'ouvert Ω n'est pas borné, nous ne sommes plus assuré de l'existence d'une solution au problème de Dirichlet comme le prouve l'exemple suivant :

Exemple 3.1. Considérons le problème : soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, trouver $u \in H_0^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$ telle que

$$-u'' = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Si une telle fonction u existe, on a alors nécessairement $u \in H^2(\mathbb{R})$ et donc $u \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R})$ d'après le théorème sur les injections de Sobolev. Rappelons que cela signifie que $u \in C^1(\mathbb{R})$ et que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \text{ et } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u'(x) = 0.$$

On sait alors que dans ce cas, l'égalité (3.2) à lieu dans $L^2(\mathbb{R})$ (au sens des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ c'est à dire presque partout). Pour tout couple de réels a, b tels que $-\infty < a < b < +\infty$, $L^2(]a, b[) \subset L^1(]a, b[)$ et donc on peut écrire que :

$$-\int_a^b u''(x) dx = u'(a) - u'(b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Si l'on fait ensuite tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$, on obtient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(x) dx = 0.$$

Une condition **nécessaire** pour que (3.2) admette une solution est donc que

$$\lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(x) dx = 0.$$

★ Cela ne signifie pas que $f \in L^1(\mathbb{R})$. En utilisant la transformée de Fourier, on montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour résoudre le problème (3.2) est $\widehat{f}/\xi^2 \in L^2(\mathbb{R})$.

3.5 Régularité des solutions

Le paragraphe précédent nous permet de montrer qu'il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ au problème de Dirichlet (D). Cependant nous avons seulement montré que l'égalité $-\Delta u = f$ avait lieu dans un sens *faible*, à savoir au sens des distributions, d'où le nom de solution *faible*. Si l'on regarde ce même problème en dimension 1, il s'écrit $-u'' = f$ et si $f \in L^2(\Omega)$ cela entraîne immédiatement que $u \in H^2(\Omega)$ (le théorème des injections de Sobolev nous assure même que $u \in C^1(\bar{\Omega})$). L'edp est alors vérifiée au sens des fonctions de $L^2(\Omega)$ c'est à dire presque partout.

Définition 3.3. Si la solution du problème de Dirichlet (D) est dans $H^2(\Omega)$, on parle alors de solution *forte*. Si la solution est dans $C^2(\bar{\Omega})$ on parle de solution *classique*.

Nous allons généraliser le résultat observé en dimension 1 à la dimension N ($N \in \mathbb{N}^*$ quelconque). Cela est loin d'être évident dès que $N \geq 2$. En effet, d'après l'edp vérifiée par u et toujours pour $f \in L^2(\Omega)$, on obtient seulement que $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Or nous devons montrer que $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j \in L^2(\Omega)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$. Commençons par traiter deux problèmes modèles en utilisant la transformée de Fourier.

3.5.1 Un problème de Dirichlet sur tout l'espace

Le résultat principal de ce paragraphe est le

Théorème 3.7. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ l'unique solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \mathbb{R}^N \\ u \in H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (\text{D1})$$

est dans $H^2(\mathbb{R}^N)$ et vérifie $\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, où C est une constante indépendante de u et f . Si $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ ($s > 0$) alors $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$ avec une estimation :

$$\|u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Démonstration. L'unicité de la solution dans $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ résulte de l'application du théorème de Lax-Milgram. Prenant la transformée de Fourier (de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$) de l'edp, il vient :

$$(|\xi|^2 + 1)\widehat{u} = \widehat{f} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Le théorème de Plancherel nous assure que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et donc l'égalité ci-dessus à lieu dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. La fonction $\widehat{f}/(|\xi|^2 + 1)$ est encore dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ donc

$$u = \bar{\mathcal{F}} \left(\frac{\widehat{f}}{|\xi|^2 + 1} \right) \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Enfin, prenant la norme dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ de l'égalité $(|\xi|^2 + 1)\widehat{u} = \widehat{f}$ et utilisant l'identité de Parseval, on déduit que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ avec $\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. On procède de la même manière lorsque $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. \square

★ L'edp est ici $-\Delta u + u = f$ et non $-\Delta u = f$. Que se passe-t-il dans ce dernier cas ?

3.5.2 Un problème de Dirichlet sur le demi-espace

Rappelons des notations déjà utilisées :

$$\mathbb{R}_+^N := \{(\mathbf{x}', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : x_N > 0\},$$

est le demi-espace dans \mathbb{R}^N . Son bord est Γ que l'on identifie avec \mathbb{R}^{N-1} . On peut énoncer un théorème équivalent à celui du paragraphe précédent :

Théorème 3.8. *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$ l'unique solution du problème de Dirichlet :*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \mathbb{R}_+^N \\ u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^N), \end{cases} \quad (\text{D2})$$

est dans $H^2(\mathbb{R}_+^N)$ et vérifie $\|u\|_{H^2(\mathbb{R}_+^N)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}$. Si $f \in H^s(\mathbb{R}_+^N)$ ($s > 0$) alors $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}_+^N)$ et on a une estimation :

$$\|u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}_+^N)} \leq C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}_+^N)},$$

les constantes C étant comme toujours indépendantes de u et f .

La démonstration est donnée dans l'annexe C, paragraphe C.2.

3.5.3 Cas d'un ouvert Ω quelconque

Comme on pouvait s'y attendre, la régularité de l'ouvert va être un facteur éventuellement limitant pour la régularité de la solution. Nous distinguerons la régularité *intérieure* de la solution (indépendante de la régularité du bord de l'ouvert) de la régularité *globale*. Introduisons la

Définition 3.4. Pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^N et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$H_{\text{loc}}^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \varphi u \in H^m(\mathbb{R}^N), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

Théorème 3.9 (Régularité intérieure). *Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N tel que le problème de Dirichlet (D) soit bien posé. On note $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution faible. Si $f \in H_{\text{loc}}^m(\Omega)$ pour un certain $m \geq 0$ alors $u \in H_{\text{loc}}^{m+2}(\Omega)$.*

Ce théorème affirme en particulier que si $f \in L^2(\Omega)$, la solution faible u vérifie $u|_\omega \in H^2(\omega)$ pour tout ouvert ω tel que $\bar{\omega}$ soit compact et $\bar{\omega} \subset \Omega$. Cependant la norme de la solution dans $H^2(\omega)$ dépend de la norme de la solution dans $L^2(\Omega)$ et pas seulement dans $L^2(\omega)$. Pour s'en convaincre, considérons l'exemple suivant.

Exemple 3.2. Soit $N = 1$ et $\Omega =]-1, 1[$. Choisissons $f = 1$ sur $]0, 1[$ et $f = 0$ sur $] -1, 0[$. La solution du problème de Dirichlet est ici

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in]0, 1[, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in]-1, 0[. \end{cases}$$

Pour n'importe quel intervalle $I \subset]-1, 0[$, il n'existe aucune constante vérifiant $\|u\|_{H^2(I)} \leq C\|f\|_{L^2(I)} = 0$

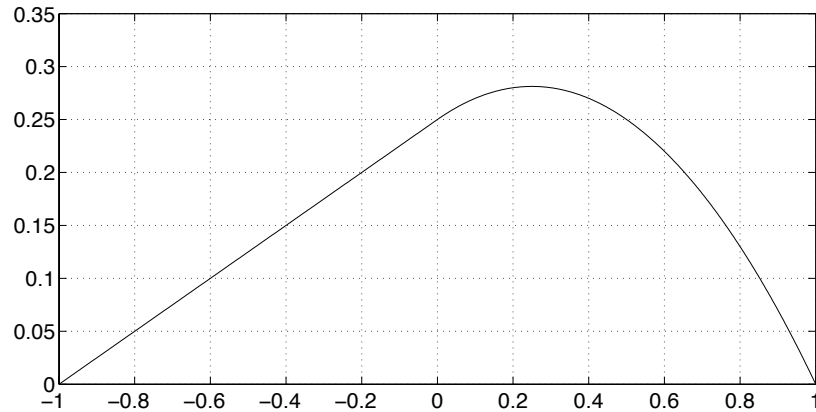


FIGURE 3.2 – Graphe de la fonction u de l'exemple 3.2

(en effet, ce n'est pas parce que f est nulle sur $] -1, 0[$ que la solution est elle aussi nulle sur $] -1, 0[$!).

On déduit immédiatement du théorème ci-dessus :

Corollaire 3.10. *Sous les hypothèses du théorème 3.9, si $f \in C^\infty(\Omega)$ alors la solution u de (D) vérifie $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration du théorème 3.9. Soit u la solution faible de (D) et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On prolonge la fonction φu par 0 sur \mathbb{R}^N tout entier (on garde la même notation). La fonction obtenue est alors dans $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ et vérifie au sens des distributions :

$$-\Delta(\varphi u) + \varphi u = (-\Delta\varphi + \varphi)u - 2\nabla\varphi \cdot \nabla u - \varphi f.$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, le terme de droite dans cette égalité est dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et le théorème 3.7 nous assure que $\varphi u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Si $f \in H_{loc}^m(\Omega)$, on réitère cet argument pour obtenir que $\varphi u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$. \square

Les résultats de régularité globale s'obtiennent à partir du théorème 3.8, en introduisant comme toujours un système de cartes locales et une partition de l'unité. La solution étant *transportée* sur le bord du demi-espace, sa régularité est limitée par celles des difféomorphismes du système de cartes. Nous omettons la démonstration, encore une fois trop technique, du théorème suivant :

Théorème 3.11 (Régularité globale des solutions). *Soit u la solution faible du problème de Dirichlet (D). Si Γ est borné et de classe C^{m+2} ou bien si $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ et si $f \in H^m(\Omega)$ ($m \geq 0$) alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$. De plus, il existe une constante $C_m > 0$ indépendante de u et de f telle que :*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C_m \|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Grâce au théorème sur les injections de Sobolev, on déduit que

- Si $m > N/2$, alors $u \in C^2(\Omega)$ (u est une solution classique),
- Si $f \in C^\infty(\Omega)$ et si Ω est de classe C^∞ alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

Exemple 3.3. Soit Ω la boule de centre $\mathbf{0} := (0, 0)^T$ et de rayon 1 dans \mathbb{R}^2 et f_α la fonction définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par $f_\alpha(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}|^\alpha$. On peut alors calculer explicitement la solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = f_\alpha \text{ sur } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Tout d'abord, on sait que $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > -1$. Dans ce cas on est assuré de l'existence et unicité d'une solution au problème ci-dessus. L'expression du Laplacien en coordonnées polaires (r, θ) est

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Cherchant la solution de l'edp $-\Delta u = f_\alpha$ sous la forme d'une fonction radiale, on trouve que

$$u(r) = -\frac{r^{2+\alpha}}{\alpha^2 + 4\alpha + 4} + C_1 + C_2 \ln(r),$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes à déterminer. Il faut que $u \in H^1(\Omega)$ ce qui entraîne que $C_2 = 0$ et la condition aux limites $u(1) = 0$ nous donne $C_1 = 1/(\alpha^2 + \alpha + 4)$.

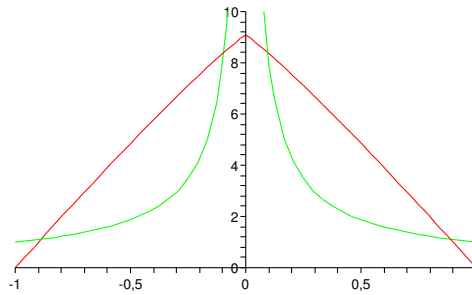


FIGURE 3.3 – Graphes de la solution u (en rouge) et de f_α (en vert) lorsque $\alpha = -0,9$. Dans ce cas $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ et $f_\alpha \notin H^1(\Omega)$. Le théorème 3.11 nous assure que $u \in H^2(\Omega)$.

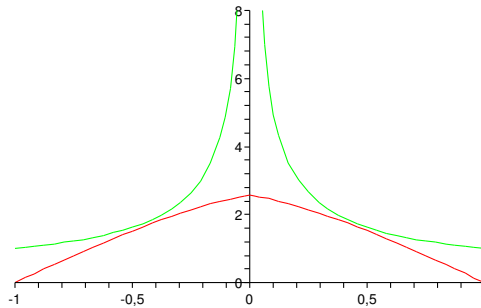


FIGURE 3.4 – Graphes de u et f_α avec cette fois $\alpha = -0,7$. La solution u est plus régulière en 0 que dans la figure précédente.

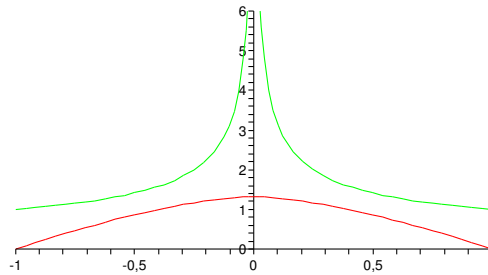


FIGURE 3.5 – Graphes de u et f_α avec $\alpha = -0.5$. La solution u est encore plus régulière en 0.

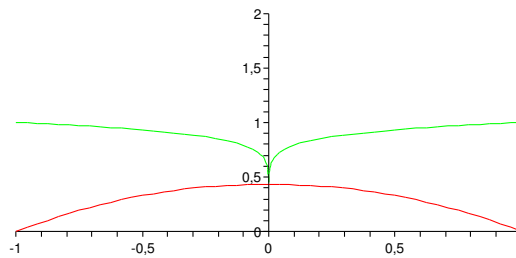


FIGURE 3.6 – Graphes de u et f_α avec $\alpha = 0.2$. La solution u est maintenant dans $H^3(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$ car $f_\alpha \in H^1(\Omega)$.

3.6 Conditions aux limites non homogènes

Nous avons étudié le problème (D) qui est appelé problème de Dirichlet avec conditions aux limites homogènes (c'est à dire que $u = 0$ sur Γ). Etudions à présent un problème non homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (\text{D2})$$

où f et g sont deux fonctions données. Le bon cadre fonctionnel pour étudier cette edp est bien évidemment celui des espaces de Sobolev.

Théorème 3.12. *Si Ω est de classe C^1 et est borné dans une direction, le problème de Dirichlet non homogène (D2) admet*

1. Une unique solution faible $u \in H^1(\Omega)$ si $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. La solution vérifie

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}),$$

où la constante C est indépendante de u , f et g .

2. **Régularité intérieure :** Si $f \in H_{\text{loc}}^m(\Omega)$ alors $u \in H_{\text{loc}}^{m+2}(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. **Régularité globale :** Si Γ est borné et de classe C^{m+2} ou bien si $\Gamma = \mathbb{R}_+^N$, $f \in H^m(\Omega)$ et $g \in H^{m+3/2}(\Gamma)$ ($m \in \mathbb{N}$) alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$. On a de plus l'estimation :

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|g\|_{H^{m+3/2}(\Gamma)}),$$

la constante C étant indépendante des fonctions u , f et g .

Démonstration. La théorie des traces nous assure que si Γ est de classe C^1 et si $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ alors il existe une fonction $G \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma_0(G) = g$ (la trace de G sur Γ est précisément la fonction g). La remarque 2.2

nous dit que l'on peut même toujours choisir la fonction G de telle sorte que $\|G\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$. En posant $v = u - G$, on peut reformuler le problème (D2) comme suit :

$$\begin{cases} -\Delta v = f + \Delta G & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{D3})$$

Remarquons alors que si $G \in H^1(\Omega)$, bien entendu $\Delta G \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mais $\Delta G \notin L^2(\Omega)$ et nous ne pouvons appliquer directement les résultats du paragraphe précédent. Essayons tout de même d'établir la formulation variationnelle du problème (D3). Regardons l'edp comme une identité dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Nous avons alors :

$$\langle -\Delta v, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} + \langle \Delta G, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par définition de la dérivation au sens des distributions, cela signifie que

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} - \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial G}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mais tous les termes dans les crochets de dualité sont maintenant des fonctions de $L^2(\Omega)$ ce qui nous permet de réécrire cette égalité :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La formulation variationnelle du problème (D3) est alors : trouver $v \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f w \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Montrons que ce problème admet une unique solution dès que Ω est borné dans une direction. Pour cela posons, afin d'utiliser le théorème de Lax-Milgram :

- $a(v, w) := \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, d\mathbf{x}$,
- $\langle F, w \rangle_{H^1 \times (H^1)'} := \int_{\Omega} f w \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla w \, d\mathbf{x}$.

La seule différence avec le problème de Dirichlet homogène du paragraphe précédent est la forme linéaire F . Elle est clairement linéaire et la continuité résulte de l'estimation :

$$|\langle F, w \rangle_{H^1 \times (H^1)'}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla G\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}.$$

Posant $C = \max\{\|f\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla G\|_{L^2(\Omega)}\}$, on obtient bien que :

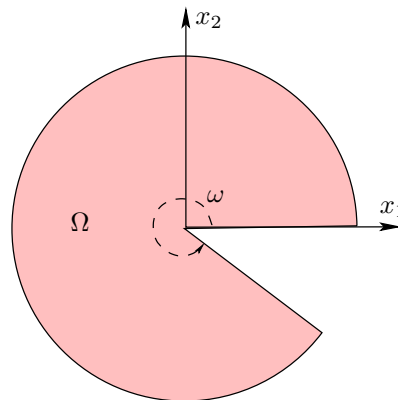
$$|\langle F, w \rangle_{H^1 \times (H^1)'}| \leq C \|w\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Le théorème de Lax-Milgram nous assure aussi de l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla G\|_{L^2(\Omega)}) \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|G\|_{H^1(\Omega)}) \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Omega)}).$$

Comme par définition $u := v + G$, on obtient le même type d'estimation pour la fonction $u \in H^1(\Omega)$. Le théorème 3.9 nous donne le point 2 du théorème. Pour obtenir le point 3, il suffit de remarquer que si Ω est de classe C^{m+2} et si $g \in H^{m+3/2}(\Gamma)$, on peut choisir $G \in H^{m+2}(\Omega)$ telle que $\|G\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq 2\|g\|_{H^{m+3/2}(\Omega)}$. On a alors $\Delta G \in L^2(\Omega)$ et l'on peut appliquer le théorème 3.11 au problème (D3). \square

Exemple 3.4. L'exemple suivant illustre le fait que la régularité de la solution d'un problème de Dirichlet peut être limitée par la régularité de l'ouvert Ω sur lequel est posée l'edp. Considérons l'ouvert Ω représenté dans la figure ci-dessous. Sur le bord Γ de Ω on se donne la fonction g définie en coordonnées polaires (r, θ) par $g(\theta) = \sin(\pi\theta/\omega)$. Cette fonction étant la trace de la fonction très régulière $G(r, \theta) = r^n \sin(\pi\theta/\omega)$ (où

FIGURE 3.7 – Ω est une portion de disque d'angle $\omega \in]0, 2\pi[$.

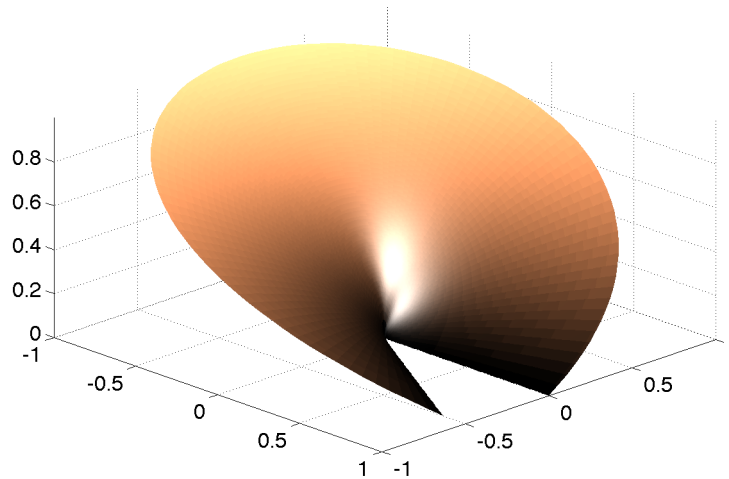
$n > 0$ peut être choisi aussi grand qu'on le souhaite) est elle-même très régulière, suivant notre définition des espaces de traces. Cependant, calculant explicitement la solution du problème de Dirichlet non homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{sur } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

on obtient l'expression :

$$u(r, \theta) = r^{\pi/\omega} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\omega}\right), \quad \forall r \in [0, 1[, \theta \in]0, \omega[.$$

On montre alors que si $\omega > \pi$ on a toujours $u \in H^1(\Omega)$ mais $u \notin H^2(\Omega)$. Il suffit pour cela de vérifier que $\partial^2 u / \partial^2 r \notin L^2(\Omega)$. La solution présente une singularité *trop grande* en $\mathbf{0} := (0, 0)^T$.

FIGURE 3.8 – Graphe de la fonction u lorsque $\omega = 11\pi/6$.

3.7 Le problème de Neumann

Dans ce paragraphe nous allons refaire le même genre d'étude que pour le problème de Dirichlet. Nous choisissons cette fois des conditions aux limites de type Neumann. Le problème s'énonce de la façon suivante.

Les fonctions f et g étant données, trouver une solution au problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{N})$$

Nous traitons ici directement le problème non homogène car dans le cas de conditions de type Neumann il n'est pas plus compliqué que le cas homogène. Remarquons tout d'abord que toute solution n'est définie qu'à une constante près. Le problème est donc a priori *mal posé* (au sens d'Hadamard). Pour assurer l'unicité de la solution, nous supposons dans la suite que Ω est **borné et connexe** et nous ajoutons une contrainte supplémentaire pour assurer l'unicité de la solution :

$$\int_{\Omega} u \, d\mathbf{x} = 0. \quad (\text{C})$$

Ce choix n'est pas unique et nous en verrons d'autres possibles dans les exercices.

Nous allons maintenant chercher à établir la formulation variationnelle associée au problème (N). Pour ce faire on suppose que l'on dispose d'une solution forte $u \in H^2(\Omega)$. On multiplie l'edp par une fonction $v \in H^1(\Omega)$ et on applique la formule de Green (il faut alors supposer que Ω est de classe C^1) pour obtenir que :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\Gamma,$$

et, prenant en compte la condition sur Γ (au sens des traces) pour u il vient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma.$$

Cette formulation variationnelle ne tient cependant pas compte de la condition (C). Introduisons alors :

$$\tilde{L}^2(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} u \, d\mathbf{x} = 0\}.$$

En tant que sous espace fermé (le démontrer à tire d'exercice) d'un espace de Hilbert, cet espace fonctionnel est encore un espace de Hilbert. De même, définissons pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\tilde{H}^m(\Omega) := H^m(\Omega) \cap \tilde{L}^2(\Omega),$$

la norme de $\tilde{H}^m(\Omega)$ étant celle de $H^m(\Omega)$. Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 3.13. *Soit Ω un ouvert borné, connexe de classe C^1 .*

1. *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma)$, le problème : trouver $u \in \tilde{H}^1(\Omega)$ vérifiant*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad (\text{FVN})$$

admet une unique solution. Cette solution vérifie de plus :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}),$$

où la constante $C > 0$ ne dépend que de Ω . En outre, toute solution forte $u \in H^2(\Omega)$ de (N) vérifie (FVN).

2. *Réciproquement, si f et g vérifient la condition dite de compatibilité*

$$\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g \, d\Gamma = 0, \quad (\text{CC})$$

alors toute solution faible vérifie, au sens des distributions :

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega.$$

Nous considérerons que cette condition est toujours satisfaite à partir de maintenant.

3. **Régularité intérieure :** Si $f \in H_{\text{loc}}^m(\Omega)$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$ alors $u \in H_{\text{loc}}^{m+2}(\Omega)$.
4. **Régularité globale :** Si Γ est borné et de classe C^{m+2} ou bien si $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, $f \in H^m(\Omega)$ et $g \in H^{m+1/2}(\Gamma)$ ($m \in \mathbb{N}$) alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$ et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|g\|_{H^{m+1/2}(\Gamma)}).$$

5. En particulier, dès que $m \geq 0$, $u \in H^2(\Omega)$ et $\partial u / \partial \mathbf{n}$ est dans $H^{1/2}(\Gamma)$. On a de plus $\partial u / \partial \mathbf{n} = g$ sur Γ (au sens des traces).

Remarquer que la condition de compatibilité (CC) peut s'obtenir *formellement* à partir du système (N). Il suffit d'intégrer l'edp sur Ω et d'appliquer la formule de Green. Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, on peut montrer que toute solution faible vérifie :

$$-\Delta u = f - \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g \, d\Gamma \right) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration. Pour montrer le point 1, introduisons $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$ et $\langle F, v \rangle_{H^1 \times (H^1)'} := \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma$. La forme bilinéaire a est trivialement continue sur $\tilde{H}^1(\Omega)$. La coercivité est une conséquence de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger démontrée dans l'exercice 2.9. La forme F est linéaire et vérifie :

$$|\langle F, v \rangle_{H^1 \times (H^1)'}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)},$$

et comme l'application trace $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est continue, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Finalement, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\langle F, v \rangle_{H^1 \times (H^1)'}| \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega).$$

Le théorème de Lax-Milgram nous assure alors de l'existence et de l'unicité d'une solution faible (ainsi que de l'estimation donnée dans le point 1 du théorème). La réciproque (toute solution forte est aussi une solution variationnelle) résulte des calculs réalisés avant l'énoncé du théorème. Pour vérifier que toute solution faible est une solution de l'edp au sens des distributions, on remarque que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi := \varphi - (1/|\Omega|) \int_{\Omega} \varphi \, d\mathbf{x}$ est dans $\tilde{H}^1(\Omega)$. On peut donc choisir $v = \psi$ dans (FVN) et en tenant compte de (CC), on obtient que :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On conclut ensuite comme pour le problème de Dirichlet. Remarquer qu'ici on ne retrouve pas la condition aux limites car on ne sait pas donner un sens à $\partial u / \partial \mathbf{n}$ sur Γ lorsqu'on a seulement $u \in H^1(\Omega)$ (on pourrait en fait montrer que $\partial u / \partial \mathbf{n}$ s'identifie à un élément du dual de $H^{1/2}(\Gamma)$, noté $H^{-1/2}(\Gamma)$).

Les résultats de régularité des points 3 et 4 s'obtiennent comme pour le problème de Dirichlet. Montrons que lorsque $m \geq 2$, la formulation variationnelle (FVN) nous permet de retrouver la condition aux limites : comme précédemment, on remarque que pour toute fonction $w \in H^1(\Omega)$, la fonction $w - (1/|\Omega|) \int_{\Omega} w \, d\mathbf{x}$ est dans $\tilde{H}^1(\Omega)$. Utilisant cette fonction comme fonction test dans (FVN), on obtient que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f w \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g w \, d\Gamma \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Toutes les fonctions (ainsi que l'ouvert Ω) sont suffisamment régulières pour appliquer la formule de Green. Il vient

$$-\int_{\Omega} \Delta u w \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w \, d\Gamma = \int_{\Omega} f w \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g w \, d\Gamma \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Or on sait que $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et comme $u \in H^2(\Omega)$, cette égalité a en fait lieu dans $L^2(\Omega)$ c'est à dire presque partout. On obtient alors que

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - g \right) w \, d\Gamma = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

On sait que l'opérateur trace est surjectif de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ et que $H^{1/2}(\Gamma)$ est dense dans $L^2(\Gamma)$. Nous en déduisons que l'on a encore :

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - g \right) w \, d\Gamma = 0 \quad \forall w \in L^2(\Gamma),$$

ce qui prouve que $\partial u / \partial \mathbf{n} = g$ dans $L^2(\Gamma)$ c'est à dire presque partout sur Γ . \square

3.8 Méthode générale d'étude d'un problème elliptique

En nous inspirant des deux exemples que nous venons de traiter en détails (le problème de Dirichlet et le problème de Neumann) nous pouvons dégager une méthodologie assez générale qui nous permettra de résoudre une grande variété d'edp elliptiques. Les grandes lignes en sont les suivantes :

1. On suppose que l'on dispose d'une solution forte (en général dans $H^2(\Omega)$) au problème. En utilisant la formule de Green, on établit la formulation variationnelle.
2. On applique le théorème de Lax-Milgram à la formulation variationnelle pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution faible. Le point délicat sera le plus souvent de montrer la coercivité de la forme bilinéaire (penser aux inégalités de type Poincaré).
3. On montre que toute solution variationnelle vérifie l'edp au sens des distributions. Certaines conditions aux limites (cf. problème de Neumann) ne peuvent pas être retrouvées à ce stade.
4. On montre un résultat de régularité intérieure pour la solution faible.
5. On montre (ou l'on admet car c'est en général un résultat difficile à établir) un résultat de régularité globale.
6. Avec la formule de Green et le point 3 on retrouve les conditions aux limites.

3.9 Exercices sur le chapitre 3

Exercice 3.2. Soit Ω la boule de centre 0 et de rayon 1 dans \mathbb{R}^2 . On définit sur Ω les fonctions $f_{\alpha}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et $p(\mathbf{x}) = 1 + |\mathbf{x}|^2$.

1. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f_{\alpha} \in L^2(\Omega)$? A partir de maintenant, on choisit toujours α ayant cette propriété.
2. On considère le problème de Dirichlet suivant : Trouver u dans un espace fonctionnel V telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u + p u = f_{\alpha} & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{D})$$

- (a) On suppose qu'il existe une solution $u \in H^2(\Omega)$ à ce problème. Donner la formulation variationnelle, notée (FV), du problème (D) vérifiée par u et préciser l'espace V .
- (b) Montrer que (FV) admet une unique solution dans V .
- (c) Montrer que la solution faible vérifie l'edp au sens des distributions.
- (d) Utiliser astucieusement un résultat du cours sur la régularité de la solution d'un problème de Dirichlet pour montrer que la solution faible u est en fait dans $H^2(\Omega)$.
- (e) Pour quelles valeurs de α a-t-on $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$?

Exercice 3.3. Soit Ω la couronne dans \mathbb{R}^2 comprise entre Γ_1 , le cercle de centre 0 et de rayon 2 et Γ_2 , le cercle de centre 0 et de rayon 1. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma_2)$. Le but de l'exercice est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution u au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (\text{P})$$

On admet que $C^1(\bar{\Omega})$ est un sous-espace dense dans $H^1(\Omega)$. On note (r, θ) les coordonnées polaires classiques. Pour toute fonction u de $C^1(\bar{\Omega})$, on note $\tilde{u}(r, \theta) = u(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ ($1 \leq r \leq 2$, $-\pi < \theta \leq \pi$).

1. Montrer que pour toute fonction $u \in C^1(\bar{\Omega})$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r, \theta) &= \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial x_1}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial x_2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta) &= -\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial x_1}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial x_2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \end{aligned}$$

puis que

$$|\nabla u(r \cos(\theta), r \sin(\theta))|^2 = \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r, \theta) \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta) \right|^2.$$

2. Soit $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Le but de cette question est de définir l'opérateur de trace sur Γ_1 .

- (a) Montrer que pour tout $r \in [1, 2[$ on a :

$$|\tilde{u}(2, \theta)|^2 = |\tilde{u}(r, \theta)|^2 + 2 \int_r^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(s, \theta) \tilde{u}(s, \theta) ds \quad \forall \theta \in]-\pi, \pi],$$

puis que

$$|\tilde{u}(2, \theta)|^2 r \leq |\tilde{u}(r, \theta)|^2 r + 2r \int_1^2 \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(s, \theta) \tilde{u}(s, \theta) \right| s ds \quad \forall \theta \in]-\pi, \pi].$$

- (b) Dédurre de la question précédente que :

$$\frac{3}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}(2, \theta)|^2 d\theta \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3 \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

- (c) Vérifier que $2|ab| \leq a^2 + b^2 \forall a, b \in \mathbb{R}$, puis montrer que pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$:

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

où l'on peut choisir $C = \sqrt{10/3}$.

- (d) Expliquer pourquoi l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : C^1(\bar{\Omega}) &\rightarrow L^2(\Gamma_1) \\ u &\mapsto u|_{\Gamma_1}, \end{aligned}$$

se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_1)$ (encore notée γ_1). On note alors $V = \ker(\gamma_1)$ ($V \subset H^1(\Omega)$). Pourquoi V est-il encore un espace de Hilbert ? On définirait de la même façon l'opérateur de trace sur Γ_2 , noté γ_2 .

3. On souhaite maintenant montrer une inégalité de type Poincaré sur l'espace V . Plus précisément, on souhaite montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} \geq \alpha \int_{\Omega} |u|^2 d\mathbf{x} \quad \forall u \in V. \quad (\text{P})$$

On fait une démonstration par l'absurde.

- (a) Montrer que si l'inégalité (P) était fautive, alors il existerait une suite $(u_n)_n \subset V$ telle que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 d\mathbf{x} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- (b) En déduire qu'il est possible d'extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite, encore notée $(u_n)_n$ qui converge dans $L^2(\Omega)$.
- (c) Montrer que la suite de la question précédente converge en fait dans V vers une constante.
- (d) Montrer que l'on arrive à une contradiction et conclure.
4. On va maintenant étudier l'existence et l'unicité d'une solution au problème (P).
- (a) On suppose qu'il existe une solution $u \in H^2(\Omega) \cap V$ au problème (P). Montrer qu'alors u vérifie :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} g v \, d\Gamma \quad \forall v \in V. \quad (\text{FV})$$

- (b) Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in V$ vérifiant (FV).
- (c) Montrer que toute solution dans V de (FV) vérifie :

$$-\Delta u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Que peut-on dire quant aux conditions aux limites de (P) pour u ?

- (d) On admet que si $g \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, la solution faible trouvée dans la question précédente est dans $H^2(\Omega)$. Montrer qu'alors u est solution du problème (P) dans un sens à préciser.

Exercice 3.4. Soit Ω un ouvert C^1 de \mathbb{R}^N avec $\partial\Omega$ borné et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème de Neumann suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

1. Montrer que la formulation variationnelle de ce problème est :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

et que sous cette forme il admet une unique solution dans $H^1(\Omega)$.

2. Montrer que la solution u du problème variationnelle vérifie $-\Delta u + u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
3. Montrer que si Ω est de classe C^2 alors u est en fait dans $H^2(\Omega)$. Préciser dans quel sens u est solution du problème initial.

Exercice 3.5. Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . On pose $V := H^1(\Omega)$ et pour tout u et v dans V :

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \left(\int_{\Omega} u \, d\mathbf{x} \right) \left(\int_{\Omega} v \, d\mathbf{x} \right).$$

1. Montrer que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur V (on pourra s'inspirer d'une démonstration similaire donnée en cours).
2. En déduire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une et une seule solution du problème : trouver $u \in V$ tel que, pour tout $v \in V$, $a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx$.
3. On suppose que $\int_{\Omega} f \, dx = 0$. Montrer que $\int_{\Omega} u \, dx = 0$ et retrouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par u .

Exercice 3.6. Soit Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^N . On souhaite résoudre le problème elliptique suivant, avec conditions aux limites de type Robin (ou Fourier) :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u &= g \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

où $\alpha > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ sont donnés.

1. On suppose qu'il existe une solution $u \in H^2(\Omega)$ à ce problème. Montrer qu'alors :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\partial\Omega} uv \, d\Gamma = \int_{\Omega} fv \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} gv \, d\Gamma, \quad \forall v \in V, \quad (3.3)$$

où V est un ensemble à préciser.

2. Expliciter la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire F qui interviennent dans le théorème de Lax-Milgram. Montrer la continuité de ces deux applications.
3. Pour montrer la coercivité de a , nous allons d'abord montrer l'inégalité de Poincaré-Friedrichs.

Inégalité de Poincaré-Friedrichs⁹ : Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 . Alors pour tout $\alpha > 0$ il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\partial\Omega} u^2 \, d\Gamma \geq \beta \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (3.4)$$

On souhaite faire une démonstration par l'absurde de ce résultat :

- (a) Ecrire la négation de l'affirmation (3.4). Choisir $\beta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et considérer la suite $(u_n)_n \subset V$ correspondante. Pourquoi peut-on imposer la condition $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?
- (b) Montrer que $(u_n)_n$ est bornée dans V . Utiliser ensuite la compacité de l'injection $V \subset L^2(\Omega)$ pour en déduire, quitte à extraire une sous-suite, que $(u_n)_n$ converge dans $L^2(\Omega)$.
- (c) Montrer que $(\nabla u_n)_n$ converge dans $[L^2(\Omega)]^N$. Quelle est sa limite ? Montrer que cela entraîne la convergence de $(u_n)_n$ dans V .
- (d) Conclure en utilisant la continuité de l'application trace.
4. Montrer qu'il existe une unique solution $u \in V$ au problème (3.3).
5. En utilisant astucieusement un résultat de régularité du cours pour le problème de Neumann, montrer que si Ω est de classe C^2 et si $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ alors la solution u trouvée est en fait dans $H^2(\Omega)$. Dans quel sens u vérifie-t-elle le problème initial ?

Exercice 3.7. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \in \mathbb{N}^*$). On cherche la meilleure (i.e. la plus petite) constante $C_{\Omega} > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{\Omega} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (3.5)$$

1. Expliquer pourquoi une telle constante existe.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $u_n \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et :

$$\left(C_{\Omega} - \frac{1}{n}\right) \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{\Omega} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On note $\lambda_n = 1/(C_{\Omega} - 1/n)$.

3. Montrer qu'il existe une suite extraite (encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour simplifier) qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers une limite notée u^* .
4. On définit la fonctionnelle $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$J(u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{C_{\Omega}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Montrer, en calculant $J(u+v)$ pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$, que J est continue et différentiable en tout point de $H_0^1(\Omega)$ et que :

$$DJ_u(v) = 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \frac{2}{C_{\Omega}} \int_{\Omega} uv \, d\mathbf{x}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

où DJ_u désigne la différentielle de J en u .

9. Kurt Otto Friedrichs (28 septembre 1901 à Kiel - 31 décembre 1982 à New Rochelle (New York)) était un mathématicien américain né en Allemagne.

5. Montrer que $DJ_{u_n}(v) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. On pourra commencer par vérifier que pour tout $t > 0$ et tout $v \in H_0^1(\Omega)$, l'inégalité $J(u_n + tv) \geq 0$ conduit à :

$$-\frac{J(u_n)}{t} - tJ(v) \leq DJ_{u_n}(v) \leq \frac{J(u_n)}{t} + tJ(v).$$

Si $J(v) \neq 0$, prendre ensuite, pour tout $\varepsilon > 0$, $t = \varepsilon/2J(v)$ et n tel que $J(u_n) \leq \varepsilon^2/4J(v)$.

6. Montrer que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$:

$$\|\nabla u_m - \nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \lambda_m + \lambda_n - \frac{2}{C_\Omega} \int_{\Omega} u_m u_n dx - DJ_{u_m}(u_n),$$

et en déduire que $u_n \rightarrow u^*$ dans $H_0^1(\Omega)$.

7. Que vaut DJ_{u^*} ? En déduire que u^* est solution, au sens des distributions, du problème aux limites :

$$\begin{aligned} -\Delta u^* &= \frac{1}{C_\Omega} u^* \text{ dans } \Omega, \\ u^* &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

8. On suppose que Ω est une boule de \mathbb{R}^N . Montrer que u^* est dans $C^\infty(\overline{\Omega})$.

9. Calculer explicitement C_Ω lorsque $N = 1$ et $\Omega =]0, \pi[\subset \mathbb{R}$.

Exercice 3.8. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N de classe C^2 (on note $\text{mes}(\Omega)$ sa mesure de Lebesgue), $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée, lipschitzienne de constante $k \geq 0$ et soit $f \in L^2(\Omega)$. On souhaite résoudre le problème aux limites non linéaire, noté (P) suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta u + g(u) &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

- Vérifier que pour toute fonction v mesurable sur Ω , $g(v)$ est une fonction de $L^2(\Omega)$.
- Montrer que si $(v_n)_n$ est une suite convergente dans $L^2(\Omega)$ de limite v^* alors $(g(v_n))_n$ est une suite également convergente dans $L^2(\Omega)$ de limite $g(v^*)$.
- Soit u_0 une fonction mesurable définie sur Ω . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit u_{n+1} à partir de u_n comme solution faible du problème aux limites :

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} &= f - g(u_n) \text{ dans } \Omega, \\ u_{n+1} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Justifier la cohérence de cette construction et montrer que l'on obtient ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

4. Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\nabla u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \text{mes}(\Omega)^{1/2} \|g\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

5. En utilisant la constante C_Ω défini par la relation (3.5) dans l'exercice 3.9, en déduire que :

$$\|u_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \text{mes}(\Omega)^{1/2} \|g\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

- En déduire qu'il existe une sous-suite extraite (encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$) qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers une limite notée u^* .
- Montrer la relation, valable pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u_n|^2 dx = - \int_{\Omega} (g(u_{m-1}) - g(u_{n-1}))(u_m - u_n) dx.$$

En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en fait vers u^* dans $H_0^1(\Omega)$.

8. Montrer que

$$\int_{\Omega} \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} g(u^*)v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

puis que u^* est solution faible du problème (P).

9. Montrer que u^* est solution forte (dans $H^2(\Omega)$) du problème (P).

10. Montrer que si $k < \frac{1}{C_{\Omega}}$, u^* est l'unique solution du problème (P).

Exercice 3.9. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \in \mathbb{N}^*$) de classe C^1 . On note $\Gamma = \partial\Omega$ et \mathbf{n} désigne le vecteur unitaire normal à Γ dirigé vers l'extérieur de Ω . On se donne une fonction $f \in L^2(\Omega)$.

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la formulation variationnelle du problème aux limites suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta u + \frac{1}{n}u &= f \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } \Gamma, \end{aligned}$$

et montrer, toujours pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il existe une unique solution faible, notée u_n , dans un espace fonctionnel V que vous préciserez.

2. On suppose que $\int_{\Omega} f dx = 0$. Vérifier alors que $\int_{\Omega} u_n dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis utiliser ce résultat pour montrer que la suite des solutions faibles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans V (indication : montrer que :

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{n}\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_n\|_{L^2(\Omega)},$$

puis utiliser, sans la redémontrer, une inégalité montrée en TD). En déduire qu'il est possible d'extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ vers u^* . On notera encore $(u_n)_n$ cette sous-suite.

3. Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\|\nabla u_m - \nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{n}u_n - \frac{1}{m}u_m \right) (u_m - u_n) dx.$$

En déduire que $u_n \rightarrow u^*$ dans V , quand $n \rightarrow +\infty$.

4. Justifier le passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans la formulation variationnelle établie dans la question 1 puis expliciter le problème aux limites vérifié par u^* (on justifiera avec soin le résultat).

Exercice 3.10. On note $I =]a, b[$ un intervalle borné de \mathbb{R} et $x \mapsto a(x)$, $x \mapsto b(x)$ et $x \mapsto c(x)$ sont trois fonctions C^∞ sur \mathbb{R} . On se donne $f \in L^2(I)$ et on considère le problème aux limites :

$$\begin{aligned} -au'' + bu' + cu &= f \quad \text{sur } I, \\ u(a) = u(b) &= 0. \end{aligned}$$

1. Établir la formulation variationnelle de ce problème et préciser l'espace fonctionnel V dans lequel chercher la solution.

2. On suppose que :

$$\sup_{x \in \bar{I}} \left(a(x) - \frac{1}{2}|a'(x) + b(x)| \right) > 0, \quad \sup_{x \in \bar{I}} \left(c(x) - \frac{1}{2}|a'(x) + b(x)| \right) \geq 0.$$

Montrer que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées (indication : démontrer puis utiliser l'inégalité $|u'u| \leq (u^2 + (u')^2)/2$).

3. Montrer qu'il existe une unique solution forte au problème.

Exercice 3.11. Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 dans \mathbb{R}^N et $f \in L^2(\Omega)$. On définit la suite de fonctions $(u_n)_n$ en posant $u_0 \in L^1(\Omega)$ et pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} + \alpha_n^2 u_{n+1} &= f \text{ dans } \Omega, \\ u_{n+1} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

où $\alpha_n = \int_{\Omega} u_n \, dx$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la solution faible du problème ci-dessus existe et est unique dans un espace fonctionnel V que vous préciserez.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant que de Ω) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$. En déduire que l'on peut extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite, toujours notée $(u_n)_n$ qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers u^* .
3. Montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ on a l'estimation :

$$\|\nabla(u_m - u_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (\alpha_{m-1}^2 u_m - \alpha_{n-1}^2 u_n)(u_m - u_n) \, dx = 0,$$

et en déduire que $u_n \rightarrow u^*$ dans V .

4. Justifier avec soin le passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans la formulation variationnelle établie dans la question 1 et expliciter le problème aux limites vérifié par u^* . Montrer que $u \in H^2(\Omega)$.

Exercice 3.12. Dans cet exercice, Ω est un carré de \mathbb{R}^2 . On désigne par Γ son côté droit et par Γ_0 la réunion de ses trois autres côtés et on se donne deux fonctions $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma)$

$$\begin{array}{c} u = 0 \\ \Gamma_0 \left[\begin{array}{c} -\Delta u = f \\ \Omega \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n} = g \\ \Gamma \end{array} \end{array}$$

1. On note $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_0)$ l'opérateur *trace* sur Γ_0 et on admet qu'il est continu. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma_0(u) = 0$.

2. Montrer que le problème aux limites :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \Gamma, \end{aligned}$$

admet une unique solution faible dans un espace fonctionnel que vous préciserez.

Exercice 3.13. On souhaite résoudre un problème de *transmission*. On note Ω l'intervalle $]0, 1[$ de \mathbb{R} et Ω_1 et Ω_2 désignent respectivement $]0, 1/2[$ et $]1/2, 1[$. On se donne $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer l'existence d'un unique couple de fonctions (u_1, u_2) telles que :

$$\begin{aligned} -u_i'' &= f_i \text{ dans } \Omega_i, \quad (i = 1, 2), \\ u_1(0) &= u_2(1) = 0, \\ u_1(1/2) &= u_2(1/2), \\ u_1'(1/2) - u_2'(1/2) &= \alpha. \end{aligned}$$

1. Soient $v_1 \in H^1(\Omega_1)$ et $v_2 \in H^1(\Omega_2)$. On définit v sur Ω en posant $v = v_i$ sur Ω_i . Montrer qu'en général $v \notin H^1(\Omega)$ (donner un contre exemple). Montrer qu'en revanche, si l'on suppose que $u_1(1/2) = u_2(1/2)$ alors $v \in H^1(\Omega)$.
2. On définit la fonction f sur Ω en posant $f = f_i$ sur Ω_i . Montrer que la formulation variationnelle suivante : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\Omega} u'v' dx = \int_{\Omega} f v dx + \alpha v(1/2), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (\text{FV})$$

admet une unique solution. Montrer que si l'on pose $u_i = \mathbf{1}_{\Omega_i} u$ alors $u_i \in H^2(\Omega_i)$ et le couple (u_1, u_2) est solution du problème de transmission.

3. Montrer que réciproquement si $(u_1, u_2) \in H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$ est solution forte du problème de transmission alors la fonction u définie sur Ω en posant $u = u_i$ sur Ω_i est dans $H_0^1(\Omega)$ et vérifie (FV).

Annexe A

Quelques méthodes élémentaires de résolution des edp

Dans ce chapitre, indépendant du reste du polycopié, nous proposons quelques méthodes de résolution pour des edp linéaires des trois types : paraboliques, elliptiques et hyperboliques. Ces méthodes ne sont pas basées sur les espaces de Sobolev et ne s'appuient que sur des résultats élémentaires de l'analyse. Nous essaierons en particulier d'illustrer certaines propriétés des solutions en traitant des cas simples (souvent en dimension 1).

A.1 L'équation de la chaleur par séparation des variables

L'évolution de la température $u(x, t)$ le long d'une barre homogène de longueur π est régie par une équation aux dérivées partielles appelée *équation de la chaleur* :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad \forall x \in [0, \pi], \forall t \geq 0, \quad (\text{EC})$$

où x désigne l'abscisse d'un point de la barre et t le temps. On suppose que les extrémités de la barre sont maintenues à une température nulle :

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(\pi, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{CL})$$

On ajoute qu'à l'instant $t = 0$, le point d'abscisse x de la barre était à la température $f(x)$ où $f : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction donnée. On cherche une solution formelle par la méthode de séparation des variables, en posant $u(x, t) = X(x)T(t)$.

1. Donner les équations différentielles que doivent vérifier X et T . Qu'entraînent pour X et T les conditions (CL) ?
2. Montrer que les seules solutions non identiquement nulles pour X sont de la forme, à une constante multiplicative près : $X(x) = \sin(kx)$, pour tout $x \in [0, \pi]$ où l'on précisera les valeurs possibles pour k .
3. Résoudre, pour chaque valeur de k , l'équation différentielle pour T .
4. Dédire des questions précédentes que l'équation de la chaleur avec conditions aux limites (CL) admet comme solution formelle :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin(nx). \quad (\text{SF})$$

5. Déterminer les constantes B_n en fonction des conditions initiales.

6. On suppose que la fonction f est C^1 par morceaux. Montrer que u est une solution C^2 de l'équation de la chaleur avec conditions aux limites (CL).
7. Que vaut $u(x, 0)$?
8. On suppose maintenant que f est la restriction d'une fonction F continue sur \mathbb{R} , impaire et 2π périodique. Montrer qu'alors, $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x), \forall x \in [0, \pi]$.

Remarque : Lorsque f n'a pas ces propriétés, la conclusion de la question 8 n'est pas assurée et la température change brusquement dès que $t > 0$.

A.2 L'équation des ondes par la méthode des caractéristiques

On considère une corde élastique, de longueur L fixée à ses extrémités. On note $u(x, t)$ le déplacement vertical du point d'abscisse x à l'instant t . Alors u est solution de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad \forall x \in [-L/2, L/2], \forall t \geq 0, \quad (\text{EO})$$

où c est une constante strictement positive. Les conditions aux limites sont ici :

$$u(-L/2, t) = u(L/2, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{CL})$$

L'équation étant de degré 2 en t , il faut donner deux conditions initiales : la position initiale de la corde, $f(x)$, et la vitesse initiale de la corde $g(x)$, i.e.

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad \forall x \in [-L/2, L/2]. \quad (\text{CI})$$

Bien entendu, $f(-L/2) = f(L/2) = g(L/2) = g(-L/2) = 0$.

1. On commence par résoudre (EO) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, i.e on suppose que $L = \infty$. On fait alors le changement de variables $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ et on introduit la nouvelle fonction $v(\xi, \eta) = u(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c})$. Montrer qu'alors la fonction v vérifie l'edp :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = 0, \quad \forall (\xi, \eta) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (\Omega \text{ à préciser}).$$

Déduire qu'il existe deux fonctions ϕ et ψ de classe C^2 telles que $v(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta)$.

2. En utilisant (CI), montrer que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\xi) \, d\xi + K, \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\xi) \, d\xi - K, \end{aligned}$$

x_0 étant un réel quelconque et K une constante. En déduire l'expression de u .

3. Représenter succinctement la solution lorsque les conditions initiales sont

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

et $g(x) = 0$.

4. On revient au cas $L < \infty$. On suppose que $f''(-L/2) = f''(L/2) = 0$ et on prolonge f sur \mathbb{R} de la façon suivante : on fait une symétrie par rapport au point $(L/2, 0)$ pour obtenir une fonction définie sur $[-L/2, 3L/2]$ puis on prolonge sur \mathbb{R} par $2L$ -périodicité. On note F la fonction ainsi prolongée. De même, on note G le prolongement de g . Montrer qu'une solution de (EO), (CL) et (CI) est donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [F(x - ct) + F(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(\xi) d\xi.$$

Expliquer pourquoi la constante c est homogène à une vitesse. Enfin, remarquer que, contrairement à ce qui se passe pour l'équation de la chaleur, il n'y a pas d'effet régularisant. La solution conserve pour tout temps la même régularité que les conditions initiales.

A.3 Une équation de transport

Une équation de transport est une équation du premier ordre. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $V : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur Ω . On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $u : \Omega \times]0, \infty[\mapsto \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot V(x) = 0, \quad (\text{ET})$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in \Omega$. (Remarquez qu'on ne donne pour l'instant ni de conditions aux limites ni de condition initiale).

- Montrons que l'on peut résoudre localement (en x et t) l'équation. Soit donc $(x_0, t_0) \in \Omega \times]0, \infty[$. Considérons Σ une courbe de classe C^1 qui passe par x_0 et telle que $V(x_0)$ ne soit pas tangent à Σ . On note $\gamma : s \in I \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de Σ telle que $\gamma(0) = x_0$ (I est un voisinage de 0 dans \mathbb{R}). En tout point $\gamma(s)$ de Σ , on impose la condition $v(\gamma(s)) = v_0(\gamma(s))$, où v_0 est une fonction donnée sur Σ .

(a) Montrer que le système suivant admet localement une unique solution de classe C^1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t) = V(\phi(s, t)), \\ \phi(s, t_0) = \gamma(s). \end{cases}$$

et que ϕ est un C^1 difféomorphisme d'un voisinage de $(0, t_0)$ sur un voisinage de (x_0, t_0) .

- Déterminer les solutions de (ET) qui prennent la valeur v_0 sur Σ au temps $t = t_0$.
 - Discuter la régularité de v . Pourquoi cette équation porte-t-elle le nom d'équation de transport ?
- Application :** Sur $\Omega =]0, \infty[\times]0, \infty[$ résoudre l'équation (ET) lorsque $V(x_1, x_2) = (x_1 \ln(x_1)/x_2, 1)$ et $v(x_1, 1) = v_0(x_1)$ donnée pour tout $x_1 > 0$.

A.4 L'équation de Laplace par séparation des variables

Considérons le rectangle $R = [0, L] \times [0, l]$ et donnons nous une fonction f continue sur ∂R . On veut résoudre l'équation de Laplace (ou de Poisson) sur R :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } R, \\ u = f & \text{sur } \partial R. \end{cases} \quad (\text{EL})$$

On utilise la méthode de séparation des variables :

- Donner toutes les fonctions harmoniques sur R qui peuvent se mettre sous la forme : $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$.

2. On note $\Gamma_i = \partial R_i$ le i ème côté de R , $f_i = f|_{\Gamma_i}$ et u_i une solution de l'edp :

$$\begin{cases} \Delta u_i = 0 & \text{dans } R, \\ u_i = f_i & \text{sur } \Gamma_i, \\ u_i = 0 & \text{sur les autres côtés.} \end{cases} \quad (\text{EL}_i)$$

Vérifier qu'une solution de (EL) s'obtient par $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ (ce que les physiciens appellent le principe de superposition).

3. En utilisant les fonctions trouvées dans la question 1, montrer qu'une solution u_1 de (EL_i) s'écrit formellement (sous réserve de convergence) :

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[a_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right], \quad (\text{A.1})$$

où a_n et b_n sont des constantes.

4. Développer f_1 en série de Fourier sur $[0, L]$ (en prolongeant f_1 par imparité sur $[-L, 0]$). En déduire les valeurs de a_n et b_n en utilisant les conditions aux limites :

$$u_1(x, 0) = f_1(x) \quad \text{et} \quad u_1(x, l) = 0, \quad \forall x \in [0, L]. \quad (\text{CL}_1)$$

5. Donner des conditions sur f pour que u_1 soit une solution rigoureuse de (EL_i) .

A.5 L'équation de Laplace par la formule de Poisson

On considère de nouveau l'edp (EL) du paragraphe précédent mais cette fois sur le disque D de rayon 1 et de centre 0.

1. Montrer que l'expression du Laplacien en coordonnées polaires (r, θ) est :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (\text{LP})$$

2. On cherche des solutions de l'edp par la méthode de séparation des variables en posant : $u(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta)$. Montrer que les fonctions harmoniques sur D qui se mettent sous cette forme s'écrivent :

$$u(r, \theta) = r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)), \quad (\text{FH})$$

a_n et b_n étant des constantes.

3. En développant f en série de Fourier

$$f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta),$$

déduire que u peut se mettre formellement sous la forme :

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)). \quad (\text{SF})$$

4. Montrer que la série (SF) est uniformément convergente sur tout disque $D(0, r)$ lorsque $r < 1$.
5. Montrer la relation :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{r \cos(\theta) - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}.$$

6. Dédurre des questions précédentes la formule de Poisson¹ qui donne u en fonction de la donnée f sur le bord du disque :

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} dt.$$

1. Siméon Denis Poisson (21 juin 1781 à Pithiviers - 25 avril 1842 à Sceaux) était un mathématicien, géomètre et physicien français.

Annexe B

TP Matlab

On cherche à approcher la solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \Omega :=]0, 1[\times]0, 1[\\ u(x, y) = g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

où les fonctions f et g sont assez régulières par une méthode de différences finies. La méthode est basée sur le développement suivant des dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)}{h^2} + O(h^2)$$

où h est un pas destiné à tendre vers 0 (en pratique suffisamment petit). On a ainsi :

$$-\Delta u(x, y) = \frac{-u(x-h, y) - u(x, y-h) + 4u(x, y) - u(x+h, y) - u(x, y+h)}{h^2} + O(h^2)$$

On se donne un paramètre de discrétisation n , $h = 1/n$ et une grille de points $(x_i, y_j) = (ih, jh)$, $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$. On note $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ et de même $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ alors pour chaque point interne de la grille, c'est à dire en (x_i, y_j) avec $(i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \times \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ l'équation de Poisson s'écrit :

$$-\Delta u(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \iff \frac{-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}}{h^2} + O(h^2) = f_{i,j}$$

La méthode consiste à "enlever" le reste $O(h^2)$ ce qui nous donne les $(n-1)^2$ équations :

$$\frac{-U_{i-1,j} - U_{i,j-1} + 4U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j} \quad \forall i, j = 1, \dots, n-1, \quad (\text{B.1})$$

où on espère que les quantités $U_{i,j}$ vont approcher les $u_{i,j}$ correctement. Est-ce calculable? Déjà on peut remarquer que certaines des équations font appel à des points du bord (quand l'un des indices est 0 ou n), on utilise alors les conditions aux limites :

$$U_{i,j} = g(x_i, y_j), \quad \text{quand } i \in \{0, n\} \text{ ou } j \in \{0, n\}$$

qui apparaissent alors au second membre en plus de $f_{i,j}$ pour certaines équations, par exemple l'équation correspondant à $(i, j) = (1, 1)$ s'écrit :

$$\frac{4U_{1,1} - U_{2,1} - U_{1,2}}{h^2} = f_{1,1} + (g(h, 0) + g(0, h))/h^2$$

On a donc bien $(n-1)^2$ inconnues et $(n-1)^2$ équations linéaires, soit un système matriciel à résoudre $AU = F$. Dans la suite vous allez montrer que la matrice A est symétrique et définie positive, il existe donc une et une seule solution au problème de Poisson discrétisé. D'autre part sous les bonnes conditions de régularité pour f et g on montre que cette méthode est d'ordre 2 ($\max_{i,j} |U_{i,j} - u_{i,j}| = O(h^2)$) et donc converge raisonnablement rapidement vers la solution exacte.

Enfin, la matrice A contient essentiellement des 0, elle est dite *creuse*. Dans la programmation il faudra effectivement la stocker en tant que matrice creuse ce qui permettra d'optimiser les produits matrices vecteurs (sans avoir rien d'autre à faire car matlab détectera qu'il s'agit de produits "matrice creuse" \times "vecteur plein").

B.0.1 Mise en place du système linéaire

Pour simplifier votre travail on va considérer que g est identiquement nulle. Si on utilise la "numérotation" suivante à un seul indice pour les points internes :

$$k = i + (n-1)(j-1), \forall (i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \times \llbracket 1, n-1 \rrbracket$$

ils seront numérotés de 1 à $(n-1)^2$ ce qui permet d'écrire la matrice du système (on utilise cette même numérotation pour ordonner aussi les $(n-1)^2$ équations). En travaillant un peu on peut remarquer qu'elle a la structure tridiagonale par blocs suivante :

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} B & C & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C & B & C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & B & C & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C & B & C \\ 0 & \dots & \dots & 0 & C & B \end{bmatrix}$$

avec $(n-1) \times (n-1)$ blocs et où B est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ tridiagonale suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

et C une matrice diagonale $(n-1) \times (n-1)$ ne comprenant que des -1 ($C = -I_{n-1}$).

1. Montrer que $\tilde{A} := h^2 A$ est bien définie positive. Aide : en décomposant $X \in \mathcal{R}^{(n-1)^2}$ par blocs de sous vecteurs X_i ayant chacun $n-1$ composantes :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix}$$

On peut d'abord montrer que :

$$X^\top \tilde{A} X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i^\top B X_i - 2 \sum_{i=1}^{n-2} X_i^\top X_{i+1}$$

Puis pour $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ montrer que :

$$x^\top Bx = \sum_{i=1}^{n-1} 2x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i+1})^2$$

Et il ne reste qu'à utiliser les termes en $2x_i^2$ pour former avec les termes croisés en $X_i^\top X_{i+1}$ des sommes de carrés.

2. Écrire une fonction `matlab` qui prend n en paramètre et construit la matrice \tilde{A} sous forme creuse. Il y a plusieurs possibilités pour construire une telle matrice avec `matlab`. Vous pouvez par exemple utiliser la fonction `spdiags` (voir l'aide).
3. En utilisant la commande `meshgrid`, construire un maillage cartésien du carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Écrire une fonction `matlab` qui prend en paramètre le maillage ainsi qu'une fonction de 2 variables jouant le rôle de f et forme le second membre $h^2 F$ du système linéaire à résoudre.
4. Résoudre le système linéaire $AU = F$ et tracer la solution (utiliser la commande `surf`).
5. Résoudre maintenant le système :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + \lambda u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

pour différentes valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$. Essayer $\lambda = -2\pi^2$ et utiliser la commande `rcond`. Que constatez-vous? Expliquer.

6. Résoudre maintenant le système :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) + k(x, y)u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

où $k(x, y)$ est une fonction sur $]0, 1[\times]0, 1[$.

7. Réfléchir à une méthode permettant de résoudre l'équation de Dirichlet non homogène (c'est à dire avec $g \neq 0$).

Annexe C

Démonstrations des résultats techniques

Cette annexe est dédiée à la démonstration de résultats qui ont été énoncés dans le cours.

C.1 Démonstrations des résultats du chapitre 2

Démonstration du lemme 2.5. On rappelle l'inégalité de convexité utilisée notamment pour montrer l'équivalence de toutes les normes en dimension finie et valable pour tout $1 \leq p, q \leq \infty$ et tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$:

$$(|x_1|^p + \dots + |x_N|^p)^{1/p} \leq N^{1/p-1/q} (|x_1|^q + \dots + |x_N|^q)^{1/q}.$$

On utilise une première fois cette inégalité avec $\mathbf{x} = (1, \xi_1^2, \dots, \xi_N^2)$, $p = 1$ et $q = m$ pour obtenir :

$$(N + 1)^{1-m} (1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_N^2)^m \leq 1 + \xi_1^{2m} + \dots + \xi_N^{2m},$$

et donc $C_1(m, N) := (N + 1)^{1-m}$ convient. L'autre inégalité est plus délicate. On introduit $|\boldsymbol{\xi}| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_N^2)^{1/2}$ ainsi que $\tilde{\xi}_k = \xi_k / |\boldsymbol{\xi}|$. Il faut montrer que le quotient :

$$\frac{\sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} |\boldsymbol{\xi}|^{2(|\alpha|-m)} \left(\prod_{i=1}^N |\tilde{\xi}_i|^{2\alpha_i} \right)}{|\boldsymbol{\xi}|^{-2m} + (|\tilde{\xi}_1|^{2m} + \dots + |\tilde{\xi}_N|^{2m})},$$

est borné pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$. C'est évident pour $|\boldsymbol{\xi}| \leq 1$. Lorsque $|\boldsymbol{\xi}| > 1$, on remarque que $|\tilde{\xi}_1|^{2m} + \dots + |\tilde{\xi}_N|^{2m} \geq N^{1-m} (|\tilde{\xi}_1|^2 + \dots + |\tilde{\xi}_N|^2)^m = N^{1-m}$ et donc que le quotient ci-dessus est majoré par la constante $N^{m-1} (\sum_{\alpha : |\alpha| \leq m})$. \square

Démonstration de l'égalité (2.1) de l'exemple 2.2. On souhaite calculer la transformée de Fourier \hat{u}_α de la fonction u_α définie par :

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ -(-x)^\alpha e^x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Lorsque $\alpha > -1$, $u_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ et on a donc :

$$\hat{u}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u_\alpha(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Invoquant des arguments de parité, on établit que

$$\begin{aligned}\widehat{u}_\alpha(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} x^\alpha e^{-x} (e^{-ix\xi} - e^{ix\xi}) dx \\ &= i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}_+} x^\alpha e^{-x} e^{-ix\xi} dx \right).\end{aligned}$$

On effectue le changement de variables complexe $u = x(1 + i\xi)$ ce qui nous permet de transformer l'intégrale en une intégrale curviligne dans le plan complexe :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} x^\alpha e^{-x} e^{-ix\xi} dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R x^\alpha e^{-x} e^{-ix\xi} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1 + i\xi)^{-\alpha-1} \int_0^{R(1+i\xi)} u^\alpha e^{-u} du.\end{aligned}$$

On applique le théorème de Cauchy en faisant intervenir le contour de la figure C.1. Il vient, pour tout

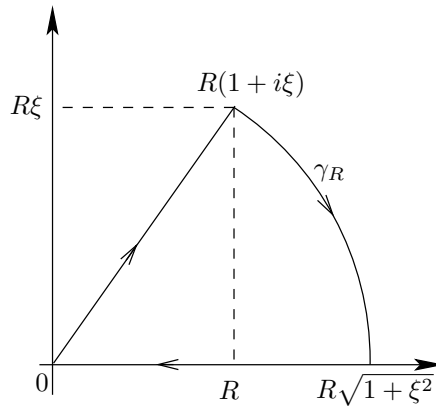


FIGURE C.1 – Le chemin d'intégration dans le plan complexe.

$R > 0$:

$$\int_0^{R(1+i\xi)} u^\alpha e^{-u} du + \int_{\gamma_R} z^\alpha e^{-z} dz - \int_0^{R\sqrt{1+\xi^2}} x^\alpha e^{-x} dx = 0.$$

Or, pour tout $z \in \gamma_R$:

$$|z^\alpha e^{-z}| = |z|^\alpha e^{-\operatorname{Re} z} \leq e^{-R} R^\alpha,$$

ce qui prouve que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} z^\alpha e^{-z} dz = 0,$$

et comme, par définition de la fonction Gamma d'Euler :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{R\sqrt{1+\xi^2}} x^\alpha e^{-x} dx = \Gamma(\alpha + 1),$$

on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^\alpha e^{-x} e^{-ix\xi} dx = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(1 + i\xi)^{\alpha+1}}.$$

Il suffit ensuite de remarquer que

$$(1 + i\xi)^{\alpha+1} = \left(\sqrt{1 + \xi^2} e^{i \arctan \xi} \right)^{\alpha+1} = (1 + \xi^2)^{(\alpha+1)/2} e^{i(\alpha+1) \arctan \xi},$$

pour obtenir que :

$$\widehat{u}_\alpha(\xi) = -i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1 + \xi^2)^{(\alpha+1)/2}} \sin((\alpha+1) \arctan \xi).$$

□

Démonstration de la proposition 2.7. Supposons dans un premier temps que $\Omega = Q_+$ (ou $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, le raisonnement étant exactement le même). On prolonge alors u par réflexion sur Q tout entier, c'est à dire que l'on pose :

$$u^*(\mathbf{x}', x_N) := \begin{cases} u(\mathbf{x}', x_N) & \text{si } x_N > 0, \\ u(\mathbf{x}', -x_N) & \text{si } x_N < 0, \end{cases}$$

où $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$. Remarquer que u^* étant une fonction de $L^2(Q)$, il suffit de la définir presque partout sur Q (en particulier, on n'a pas besoin de connaître u^* sur Q_0 qui est de mesure nulle). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$. On a, pour tout $i = 1, \dots, N-1$ et en posant $d(\mathbf{x}', x_N) := d\mathbf{x} = d\mathbf{x}' \otimes dx_N$:

$$\begin{aligned} \int_Q u^*(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \\ &= \int_{Q_+} u(\mathbf{x}', x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}', x_N) d(\mathbf{x}', x_N) + \int_{Q_-} u(\mathbf{x}', -x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}', x_N) d(\mathbf{x}', x_N) = \\ &= \int_{Q_+} u(\mathbf{x}', x_N) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}', x_N) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}', -x_N) \right) d(\mathbf{x}', x_N). \end{aligned}$$

Posant $\psi(\mathbf{x}', x_N) := \varphi(\mathbf{x}', x_N) + \varphi(\mathbf{x}', -x_N)$, on obtient que :

$$\int_Q u^*(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{Q_+} u(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall i = 1, \dots, N-1.$$

Remarquer que ψ , bien que C^∞ , n'est pas à support compact dans Q_+ et ne peut donc pas être utilisée comme fonction test. Soit η et η_k les fonctions de $C^\infty(\mathbb{R})$ définies pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\eta(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1/2, \\ 1 & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

et $\eta_k(t) := \eta(kt)$.

On a alors cette fois $\eta_k(x_N)\psi(\mathbf{x}', x_N) \in \mathcal{D}(Q_+)$ et donc, par définition de la dérivation au sens des distributions :

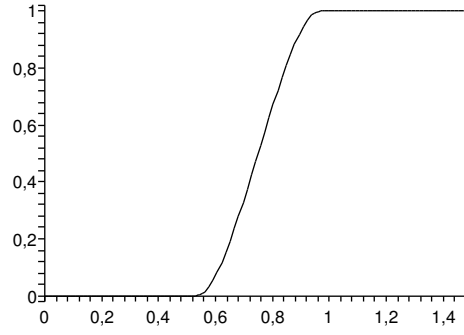
$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k \psi) d\mathbf{x} = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \psi d\mathbf{x}.$$

Comme on a aussi $\partial(\eta_k \psi)/\partial x_i = \eta_k(\partial \psi/\partial x_i)$ car η_k ne dépend pas de x_N , il vient :

$$\int_{Q_+} u \eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\mathbf{x} = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \psi d\mathbf{x}.$$

On passe ensuite à la limite $k \rightarrow +\infty$ en utilisant le théorème de convergence dominée pour obtenir :

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\mathbf{x} = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi d\mathbf{x}.$$

FIGURE C.2 – Graphe de la fonction η .

Finalement, il vient :

$$\begin{aligned} \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\mathbf{x} &= - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}', x_N) (\varphi(\mathbf{x}', x_N) + \varphi(\mathbf{x}', -x_N)) d(\mathbf{x}', x_N) \\ &= - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}', x_N) \varphi(\mathbf{x}', x_N) d(\mathbf{x}', x_N) - \int_{Q_-} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}', -x_N) \varphi(\mathbf{x}', x_N) d(\mathbf{x}', x_N). \end{aligned}$$

Ceci entraîne que pour tout $i = 1, \dots, N-1$:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i}(\mathbf{x}', x_N) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}', x_N) & \text{si } x_N > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}', -x_N) & \text{si } x_N < 0. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

En procédant de la même façon, on établit que :

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} d\mathbf{x} = \int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_N} d\mathbf{x},$$

où $\chi(\mathbf{x}', x_N) := \varphi(\mathbf{x}', x_N) - \varphi(\mathbf{x}', -x_N)$. Comme $\chi(\mathbf{x}', 0) = 0$, on a la relation :

$$\chi(\mathbf{x}', x_N) = \int_0^1 \frac{\partial \chi}{\partial x_N}(\mathbf{x}', tx_N) x_N dt = x_N \int_0^1 \frac{\partial \chi}{\partial x_N}(\mathbf{x}', tx_N) dt,$$

d'où l'on en déduit qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $(\mathbf{x}', x_N) \in Q$:

$$\left| \frac{\chi(\mathbf{x}', x_N)}{x_N} \right| \leq M.$$

Cette fois encore, $\eta_k(x_N) \chi(\mathbf{x}', x_N) \in \mathcal{D}(Q_+)$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_N} \eta_k(x_N) \chi(\mathbf{x}', x_N) = k \eta'(k x_N) \chi(\mathbf{x}', x_N) + \eta_k(x_N) \frac{\partial}{\partial x_N} \chi(\mathbf{x}', x_N).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \eta_k \chi d\mathbf{x} &= - \int_{Q_+} u(\mathbf{x}', x_N) k \eta'(k x_N) \chi(\mathbf{x}', x_N) d(\mathbf{x}', x_N) \\ &\quad - \int_{Q_+} u(\mathbf{x}', x_N) \eta_k(x_N) \frac{\partial \chi}{\partial x_N}(\mathbf{x}', x_N) d(\mathbf{x}', x_N). \end{aligned}$$

Le premier membre de droite dans l'inégalité tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$. En effet, notant $C = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\eta'(t)|$, on a la majoration :

$$\left| \int_{Q_+} u(\mathbf{x}', x_N) k \eta'(x_N) \chi(\mathbf{x}', x_N) d(\mathbf{x}', x_N) \right| \leq kMC \int_{\{1/2k < x_N < 1/k\}} |u(\mathbf{x})| x_N d\mathbf{x} \leq MC \int_{\{1/2k < x_N < 1/k\}} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x},$$

le dernier terme tendant vers 0 d'après le théorème de Beppo-Levi. Finalement :

$$\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \chi d\mathbf{x} = - \int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_N} d\mathbf{x},$$

puis

$$\begin{aligned} \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} d\mathbf{x} &= - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \chi d\mathbf{x} \\ &= - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}(\mathbf{x}', x_N) (\varphi(\mathbf{x}', x_N) - \varphi(\mathbf{x}', -x_N)) d(\mathbf{x}', x_N) \\ &= - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}(\mathbf{x}', x_N) \varphi(\mathbf{x}', x_N) d(\mathbf{x}', x_N) + \int_{Q_-} \frac{\partial u}{\partial x_N}(\mathbf{x}', -x_N) \varphi(\mathbf{x}', x_N) d(\mathbf{x}', x_N). \end{aligned}$$

On obtient alors l'expression :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_N}(\mathbf{x}', x_N) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_N}(\mathbf{x}', x_N) & \text{si } x_N > 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_N}(\mathbf{x}', -x_N) & \text{si } x_N < 0. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

La définition de u^* entraîne que

$$\|u^*\|_{L^2(Q)} = \sqrt{2} \|u\|_{L^2(Q_+)},$$

et des relations (C.1) et (C.2) on déduit que :

$$\|\nabla u^*\|_{L^2(Q)} = \sqrt{2} \|\nabla u\|_{L^2(Q_+)}.$$

La fonction $P(u) := u^*$ répond donc aux exigences de l'énoncé.

Pour le cas général (Ω ouvert C^1 avec Γ borné) nous ne donnerons que les grandes lignes de la démonstration. On admet les résultats techniques suivants :

1. Si $u \in H^1(\Omega)$ et $\zeta \in C^\infty(\Omega)$ telle que $\text{supp} \zeta \cap \Gamma = \emptyset$. Alors la fonction \bar{u} définie par $\bar{u} = \zeta u$ sur Ω et $\bar{u} = 0$ sur Ω^c est dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.
2. Soient ω et ω' deux ouverts de \mathbb{R}^N et $\phi : \bar{\omega} \rightarrow \bar{\omega}'$ de classe C^1 bijective telle que ϕ^{-1} soit aussi de classe C^1 et telle que les fonctions $\det \mathbb{D}\phi$ et $\det \mathbb{D}\phi^{-1}$ soient bornées sur respectivement $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$, alors pour tout $u \in H^1(\omega)$, $\tilde{u} = u \circ \phi^{-1} \in H^1(\omega')$ et il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ (ne dépendant pas de u) telles que

$$C_1 \|\tilde{u}\|_{H^1(\omega')} \leq \|u\|_{H^1(\omega)} \leq C_2 \|\tilde{u}\|_{H^1(\omega')}.$$

On commence par introduire un système de cartes locales (U_i, ϕ_i) tel que $\Gamma \subset \cup_i U_i$, $\phi_i(U_i \cap \Omega) = Q_+$, $\phi_i(U_i) = Q$ et $\phi_i \in C^1(\bar{U}_i)$, $\phi_i^{-1} \in C^1(\bar{Q})$. On considère une partition de l'unité (U_i, α_i) assujettie au recouvrement du compact Γ par $\cup_i U_i$ et on décompose u en $u = u_0 + \sum_{i=1}^m u_i$ avec $u_i = \alpha_i|_\Omega u$. On a $\text{supp}(\alpha_0) \cap \Gamma = \emptyset$ et d'après la résultat 1 admis plus haut on peut prolonger u_0 par 0 sur \mathbb{R}^N tout entier. On note u_0^* la fonction ainsi prolongée. On a bien entendu, $u|_{U_i} \in H^1(U_i \cap \Omega)$ et d'après le résultat 2, $u|_{U_i} \circ \phi_i^{-1} \in H^1(Q_+)$. On prolonge cette fonction par réflexion sur Q et toujours d'après 2, $\tilde{u}_i := (u|_{U_i} \circ \phi_i^{-1})^* \circ \phi_i \in H^1(U_i)$. On pose enfin $u_i^* := \alpha_i \tilde{u}_i$. La fonction $P(u) := u^* = u_0^* + \sum_{i=1}^m u_i^*$ vérifie les exigences de la proposition. \square

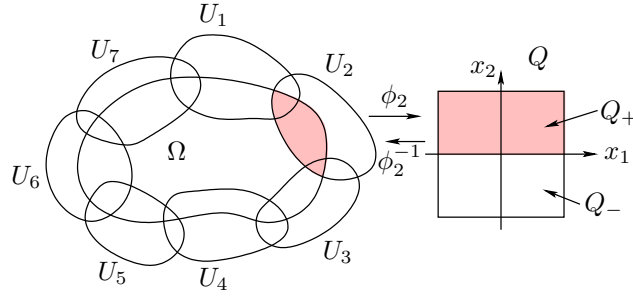


FIGURE C.3 – Le système de cartes locales.

On peut donner un résultat plus général que celui de la proposition 2.7

Proposition C.1. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que Ω est un ouvert de classe C^m avec Γ borné ou bien que Ω est le demi-espace \mathbb{R}_+^N . Alors il existe un opérateur de prolongement $P_m : H^m(\Omega) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^N)$ linéaire, tel que pour tout $u \in H^m(\Omega)$:*

1. $P_m u|_{\Omega} = u$,
2. $\|Pu\|_{H^k(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{H^k(\Omega)}$, pour tout $k = 0, 1, \dots, m$,

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de Ω .

C.2 Démonstrations des résultats du chapitre 3

Démonstration du théorème 3.8. Le théorème de Lax-Milgram nous assure de l'existence et unicité d'une solution faible (dans $H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$) de l'edp pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$.

On commence par supposer que f est la restriction à \mathbb{R}_+^N d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et on prend la transformée de Fourier partielle par rapport à \mathbf{x}' de l'edp (on garde la même notation que pour la transformée de Fourier usuelle). On obtient :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_N^2} + (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)\hat{u} = \hat{f} \\ \hat{u}(\boldsymbol{\xi}', 0) = 0. \end{cases}$$

On pose $\rho(\boldsymbol{\xi}') = \sqrt{1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2}$, on fixe $\boldsymbol{\xi}' \in \mathbb{R}^{N-1}$ et on regarde l'équation ci-dessus comme une équation différentielle ordinaire (edo) en x_N dont l'inconnue est la fonction $x_N \in \mathbb{R}_+ \mapsto \hat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N)$. Les solutions sont alors :

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N) = -\frac{1}{\rho(\boldsymbol{\xi}')} \int_0^{x_N} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}', s) \text{Sh}(\rho(\boldsymbol{\xi}')(x_N - s)) ds + C_1 \text{Sh}(\rho(\boldsymbol{\xi}')x_N) + C_2 \text{Ch}(\rho(\boldsymbol{\xi}')x_N),$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes. La condition $\hat{u}(\boldsymbol{\xi}', 0) = 0$ entraîne $C_2 = 0$ et comme l'on cherche une solution u qui soit dans $H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ c'est à dire en particulier telle que $\rho(\boldsymbol{\xi}')\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$, la seule solution qui convienne est celle qui reste bornée lorsque $x_N \rightarrow +\infty$, c'est à dire :

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N) = -\frac{1}{\rho(\boldsymbol{\xi}')} \int_0^{x_N} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}', s) \text{Sh}(\rho(\boldsymbol{\xi}')(x_N - s)) ds + \left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{\xi}')} \int_{\mathbb{R}_+} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}', s) e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')s} ds \right) \text{Sh}(\rho(\boldsymbol{\xi}')x_N),$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}', x_N) = \frac{e^{\rho(\boldsymbol{\xi}')x_N}}{2\rho(\boldsymbol{\xi}')} \int_{x_N}^{+\infty} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}', s) e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')s} ds + \frac{1}{2\rho(\boldsymbol{\xi}')} \int_0^{x_N} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}', s) e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')(x_N-s)} ds - \frac{1}{2\rho(\boldsymbol{\xi}')} \int_{\mathbb{R}_+} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}', s) e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')(x_N+s)} ds. \quad (\text{E})$$

Notons respectivement $\widehat{u}_1(\boldsymbol{\xi}', x_N)$, $\widehat{u}_2(\boldsymbol{\xi}', x_N)$ et $\widehat{u}_3(\boldsymbol{\xi}', x_N)$ les trois termes de gauche apparaissant dans l'expression ci-dessus et montrons que les fonctions correspondantes u_1 , u_2 et u_3 sont dans $H^2(\mathbb{R}_+^N)$. On remarque tout d'abord que

$$\int_{x_N}^{\infty} e^{\rho(\boldsymbol{\xi}')(x_N-s)} \rho(\boldsymbol{\xi}') ds = 1 \quad \forall x_N \in \mathbb{R}_+.$$

Appliquant l'inégalité de Jensen, il vient :

$$|\widehat{u}_1(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 \leq \frac{1}{4\rho(\boldsymbol{\xi}')^3} \int_{x_N}^{+\infty} |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 e^{\rho(\boldsymbol{\xi}')(x_N-s)} ds,$$

puis, avec le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\widehat{u}_1(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 dx_N &= \frac{1}{4\rho(\boldsymbol{\xi}')^3} \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')s} \left(\int_0^s e^{\rho(\boldsymbol{\xi}')x_N} dx_N \right) ds \\ &= \frac{1}{4\rho(\boldsymbol{\xi}')^4} \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 (1 - e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')s}) ds. \end{aligned}$$

Finalement, en multipliant par $\rho(\boldsymbol{\xi}')^4$ et en intégrant suivant $\boldsymbol{\xi}'$, on obtient que :

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \rho(\boldsymbol{\xi}')^4 |\widehat{u}_1(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 dx_N d\xi' \leq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 ds d\xi'. \quad (I_1)$$

On procède de la même façon pour majorer le second terme dans (E). Dans un premier temps, on établit que :

$$\int_0^{x_N} e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')(x_N-s)} \frac{\rho(\boldsymbol{\xi}')}{1 - e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')x_N}} ds = 1 \quad \forall x_N \in \mathbb{R}_+.$$

Appliquant l'inégalité de Jensen, on en déduit que :

$$|\widehat{u}_2(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 \leq \frac{1 - e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')x_N}}{4\rho(\boldsymbol{\xi}')^3} \int_0^{x_N} |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')(x_N-s)} ds.$$

On intègre ensuite suivant x_N entre 0 et $+\infty$ et on utilise le théorème de Fubini pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\widehat{u}_2(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 dx_N &\leq \frac{1}{4\rho(\boldsymbol{\xi}')^3} \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 e^{\rho(\boldsymbol{\xi}')s} \left(\int_s^{+\infty} (1 - e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')x_N}) e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')x_N} dx_N \right) ds \\ &\leq \frac{1}{4\rho(\boldsymbol{\xi}')^4} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{e^{-\rho(\boldsymbol{\xi}')s}}{2} \right) |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 ds \leq \frac{1}{4\rho(\boldsymbol{\xi}')^4} \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 ds. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \rho(\boldsymbol{\xi}')^4 |\widehat{u}_2(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 dx_N d\xi' \leq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 ds d\xi'. \quad (I_2)$$

La majoration du dernier terme de (E) s'obtient plus simplement en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\widehat{u}_3(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 &\leq \frac{1}{4\rho(\boldsymbol{\xi}')^2} \left(\int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 ds \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\rho(\boldsymbol{\xi}')s} ds \right) e^{-2\rho(\boldsymbol{\xi}')x_N} \\ &\leq \frac{1}{8\rho(\boldsymbol{\xi}')^3} \left(\int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 ds \right) e^{-2\rho(\boldsymbol{\xi}')x_N}, \end{aligned}$$

puis, en intégrant suivant x_N de 0 à $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} |\widehat{u}_3(\boldsymbol{\xi}', x_N)|^2 dx_N \leq \frac{1}{16\rho(\boldsymbol{\xi}')^4} \left(\int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}', s)|^2 ds \right),$$

et enfin :

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \rho(\xi')^4 |\widehat{u}_3(\xi', x_N)|^2 dx_N d\xi' \leq \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\xi', s)|^2 ds d\xi'. \quad (I_3)$$

Invoquant l'inégalité de convexité $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, on déduit de (I_1) , (I_2) et (I_3) qu'il existe une constante $C := 27/16$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}_+} (1 + |\xi'|^2)^2 |\widehat{u}(\xi', x_N)|^2 dx_N d\xi' \leq C \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{f}(\xi', x_N)|^2 dx_N d\xi'. \quad (R_1)$$

On établit d'autre part sans difficulté que :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_N}(\xi', x_N) = - \int_0^{x_N} \widehat{f}(\xi', s) \text{Ch}(\rho(\xi')(x_N - s)) ds + \left(\int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}(\xi', s) e^{-\rho(\xi')s} ds \right) \text{Ch}(\rho(\xi')x_N),$$

et, en procédant exactement comme précédemment que :

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}_+} (1 + |\xi'|^2) \left| \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_N}(\xi', x_N) \right|^2 dx_N d\xi' \leq C \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{f}(\xi', x_N)|^2 dx_N d\xi'. \quad (R_2)$$

L'edo vérifiée par $x_N \in \mathbb{R}_+ \mapsto \widehat{u}(\xi', x_N)$ nous dit que :

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x_N^2}(\xi', x_N) = \rho(\xi')^2 \widehat{u}(\xi', x_N) - \widehat{f}(\xi', x_N),$$

et donc, suivant l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$:

$$\left| \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x_N^2}(\xi', x_N) \right|^2 \leq 2\rho(\xi')^4 |\widehat{u}(\xi', x_N)|^2 + 2|\widehat{f}(\xi', x_N)|^2.$$

D'après les estimations déjà établies, nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x_N^2}(\xi', x_N) \right|^2 dx_N d\xi' \leq C \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{f}(\xi', x_N)|^2 dx_N d\xi'. \quad (R_3)$$

A ce point rappelons la définition de la norme de $H^2(\mathbb{R}_+^N)$ avec la transformée de Fourier partielle :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\mathbb{R}_+^N)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}_+} (1 + |\xi'|^2)^2 |\widehat{u}(\xi', x_N)|^2 dx_N d\xi' \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}_+} (1 + |\xi'|^2) \left| \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_N}(\xi', x_N) \right|^2 dx_N d\xi' + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x_N^2}(\xi', x_N) \right|^2 dx_N d\xi', \end{aligned}$$

ce qui nous donne, avec les relations (R_1) , (R_2) et (R_3) :

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}_+^N)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}^2.$$

L'application qui au second membre de l'edp $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^N)$ associe la solution u est une application linéaire continue pour les normes de $L^2(\mathbb{R}_+^N)$ au départ et $H^2(\mathbb{R}_+^N)$ à l'arrivée. Comme les restrictions des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ forment un sous-espace dense dans $L^2(\mathbb{R}_+^N)$, l'application se prolonge de façon unique en une application linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}_+^N)$ tout entier. \square

Index

- équation
 - de la chaleur, 51
 - de Laplace, 52
 - des ondes, 51
 - elliptique, 51
 - hyperbolique, 51
 - parabolique, 51
- capacité d'un ouvert, 46
- carte locale, 10
- champ de vecteurs, 8
- condition
 - aux limites homogène, 62
 - aux limites non homogène, 62
 - de compatibilité, 65
- conditions
 - aux limites, 52
 - de Dirichlet, 52
 - de Fourier, 52
 - de Neumann, 52
 - de Robin, 52
 - initiales, 52
- coordonnées polaires, 17
- dérivée normale, 10
- demi-espace, 5
- divergence, 8
- espace
 - de Lebesgue L^p , 13
 - de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, 5
 - de Sobolev $H^1(\Omega)$, 25
 - de Sobolev $H^m(\Omega)$, 27
 - de Sobolev $H_0^m(\omega)$, 32
 - de Sobolev $H_{loc}^m(\Omega)$, 59
 - de Sobolev $H^s(\Omega)$, 28
 - de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, 31, 75
 - des distributions
 - $\mathcal{D}'(\Omega)$, 5
 - tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, 6
- exposant conjugué, 13
- fonction
 - de répartition, 16
 - test, 5
- formulation variationnelle, 53
- formule de Green, 12, 43
- gradient, 8
- identité de Parseval, 18
- inégalité
 - d'interpolation, 14
 - de Hölder, 14
 - de Jensen, 14
 - de Poincaré, 35
 - de Poincaré-Friedrichs, 70
 - de Poincaré-Wirtinger, 39
- injection
 - compacte, 6
 - continue, 6
 - de Sobolev, 37
 - dense, 6
- laplacien, 8
- matrice Jacobienne, 8
- mesure surfacique, 11
- mesure surfacique de la sphère, 17
- multi-indice, 5
- opérateur de prolongement, 31
- ouvert
 - borné dans une direction, 35
 - régulier, 9
- partition de l'unité, 8
- principe de Dirichlet, 53
- problème
 - bien posé, 53
 - de Dirichlet, 53
 - de Neumann, 64
- régularité
 - globale, 59
 - intérieure, 59
- solution
 - classique, 58

- faible, 53
- forte, 58
- variationnelle, 53
- suite régularisante, 7

- théorème
 - d'Hausdorff-Young, 38
 - de convergence dominée, 14
 - de Fubini-Lebesgue, 15, 16
 - de Marcinkiewicz, 17
 - de Meyer-Serrin, 33
 - de Morrey, 36
 - de Plancherel, 18
 - de Rellich-Kondrachov, 38
- trace d'une fonction, 39
- transformée de Fourier, 17
- transformée de Fourier partielle, 30

- vecteur unitaire normal sortant, 10