

Table des matières

I	Systèmes dynamiques	7
I.1	Définition	7
I.2	Exemples	7
I.2.1	Mécanique	7
I.2.2	Cinétique chimique	8
I.2.3	Dynamique des populations	9
I.3	Théorème d'existence et d'unicité	9
I.4	Espace de phase	9
I.4.1	Définition	9
I.4.2	Description d'un système dynamique	10
I.5	Points fixes. Étude de la stabilité d'un point fixe.	10
I.5.1	Exemple 1 : L'oscillateur harmonique	10
I.5.2	Exemple 2 : Le pendule pesant	11
I.5.3	Exemple 3 : Oscillateur de van der Pol	14
I.5.4	Complément : Rappels d'algèbre linéaire	15
II	Bifurcations	19
II.1	Portraits de phase de l'oscillateur de van der Pol	19
II.2	Stabilité structurelle	20
II.3	Bifurcations de codimension 1 des points fixes	21
II.3.1	Valeur propre réelle non dégénérée.	22
Cas générique	22	
Persistance d'un équilibre	23	
Symétrie de parité $x \longleftrightarrow -x$	23	
II.3.2	Paire de valeurs propres complexes conjuguées.	26
III	Au delà des oscillations périodiques...	35
III.1	Section de Poincaré.	35
III.1.1	Application de premier retour	35
III.1.2	Forme normale de la bifurcation	36
III.2	Bifurcations des cycles limites	38
III.2.1	Bifurcation de Hopf secondaire	38
III.2.2	Résonance forte. Valeur propre $\lambda = 1$	39
III.2.3	Bifurcation de doublement de période. $\lambda = -1$	40
III.2.4	Un premier bilan...	41
III.3	Scénarios de transition vers le chaos	42
III.3.1	Chaos déterministe	42
Notion d'attracteur étrange.	42	

Sensibilité aux conditions initiales.	43
III.3.2 Un système expérimental : la convection en "petite boîte"	45
III.3.3 Le scénario de Ruelle, Takens et Newhouse	47
Le scénario de Landau de transition vers la turbulence	47
La découverte de Ruelle et Takens	47
III.3.4 La cascade sous-harmonique	48
Exemple 1 : Dynamique de population	48
Exemple 2 : Un système dynamique continu	49
Illustration expérimentale	50
III.4 Quelques références...	52
Variété centrale	52
Convection	52
Réduction dimensionnelle	52
Formes normales	52
Attracteurs étranges.	53
Scénario de Ruelle, Takens et Newhouse	53
Cascade sous harmonique	53
IV Méthodes perturbatives	57
IV.1 Oscillations faiblement non linéaires	57
IV.1.1 Oscillations d'amplitude finie d'un pendule pesant	57
IV.1.2 Développement en puissance de l'amplitude.	57
IV.2 Méthodes de double développement.	58
IV.2.1 Méthode de Poincaré-Lindstedt	59
IV.2.2 Méthode des échelles multiples	60
Application 1 : oscillateur de van der Pol.	61
Application 2 : forme normale de la bifurcation de Hopf.	62
IV.2.3 Pour aller plus loin...	63
V Ondes dispersives nonlinéaires.	67
V.1 Ondes de gravité à la surface de l'eau.	67
V.1.1 Hypothèses et mise en équations.	67
V.1.2 Ondes linéaires.	68
V.2 L'équation de Korteweg-de Vries	69
V.2.1 KdV : approche simple.	69
Ondes linéaires faiblement dispersives.	69
Ondes non dispersives faiblement non linéaires.	70
Ondes dispersives et non linéaires.	70
V.2.2 KdV : approche rigoureuse.	70
V.2.3 Notion d'onde solitaire.	72
Effets dispersifs : Propagation d'un paquet d'ondes	72
Effets non linéaires	74
L'onde solitaire de KdV	74
V.2.4 Intéraction d'ondes solitaires : Solitons.	76
V.2.5 Intégrabilité de l'équation de Korteweg-de Vries.	78
V.3 Supplément : L'équation de sine-Gordon	78
V.3.1 Un modèle mécanique	78
V.3.2 L'onde solitaire solution de sine-Gordon	79
V.4 Solitons de sine-Gordon	81

V.4.1	Energie d'une excitation localisée	81
V.4.2	Recherche de solutions plus générales	82
V.4.3	Comportement physique de quelques solutions	83
	Où on retrouve l'onde solitaire...	83
	Intéraction élastique d'ondes solitaires (1) : collision kink-kink	83
	Intéraction élastique d'ondes solitaires (2) : collision kink-antikink	84
	Etats liés : breathers	84
V.5	Indications bibliographiques	86

Chapitre I

Systèmes dynamiques

I.1 Définition

Un *système dynamique continu*, ou *système d'équations différentielles*, s'écrit

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (\text{I.1})$$

où $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est une fonction de la variable réelle t (en principe le temps) et $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction régulière définie sur un sous-ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Comme nous allons le voir, de très nombreux problèmes se ramènent à l'étude d'un système dynamique. Cela ne veut pas dire que *tous* les problèmes soient justifiables d'un tel traitement ! En particulier, le minimum (strict !) qu'on est en droit d'attendre, avant l'application à une situation donnée des résultats de la théorie des systèmes dynamiques est l'écriture explicite d'un système (I.1) ! Une utilisation débridée (et d'autant plus péremptoire) de la "théorie du chaos" dans des contextes économiques, ou plus généralement en sciences sociales relève en général de l'escroquerie pure. On lira avec profit, à ce sujet, l'introduction de l'excellent livre de V. Arnold [Arn98]. On trouvera de nombreuses références introductions dans l'appendice I.5.4.

I.2 Exemples

I.2.1 Mécanique

Une source intarissable de systèmes dynamiques provient des équations de la Mécanique. S'il existe un Hamiltonien $H(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$, les équations de Hamilton ont la structure de (I.1), avec $n = 2N$:

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Plus généralement, les équations du mouvement nous donneront des équations différentielles du second degré, qui peuvent être néanmoins écrites sous la forme (I.1) :

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2x = 0 \iff \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\alpha y - \omega^2x \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Dans cet exemple $n = 2$. Dans les systèmes (I.1), la fonction \mathbf{f} ne dépend pas explicitement du temps. On parle d'un système *autonome*. Cela ne constitue pas vraiment une perte de généralité, puisque dans le cas d'un forçage dépendant du temps on se ramène formellement à la même structure :

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2x = \beta \cos \omega_0 t \iff \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{\theta} = \omega_0 \\ \dot{y} = -\alpha y - \omega^2x + \beta \cos \theta \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

I.2.2 Cinétique chimique

Un autre domaine où apparaissent des systèmes dynamiques est la Chimie. Une réaction chimique notée



signifie que les espèces chimiques A et B réagissent ensemble pour donner les espèces C et D . Il est raisonnable de supposer que le taux de réaction est proportionnel à la probabilité d'un choc entre molécules des espèces A et B , donc au produit de leurs concentrations volumiques $[A]$ et $[B]$. La *cinétique chimique* donne alors les équations d'évolutions des concentrations des diverses espèces. On aura donc

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A][B], \quad (\text{I.6})$$

où $k > 0$ est la constante de réaction. Le signe "–" signifie que l'espèce A disparaît lors de la réaction (I.5).

Un exemple simple (mais peu réaliste) présentant une dynamique intéressante est celui du *brusselator*¹ Les réactions chimiques sont



ce qui suppose qu'elles aient lieu dans un réacteur où les produits A et B sont en permanence renouvelés, les produits C et D éliminés. Les équations sont alors

$$\begin{cases} \frac{d[X]}{dt} = k_1[A] - k_2[B][X] - k_4[X] + k_3[X]^2[Y] \\ \frac{d[Y]}{dt} = k_2[B][X] - k_3[X]^2[Y] \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = a - (b+1)x + x^2y \\ \dot{y} = bx - x^2y \end{cases}, \quad (\text{I.8})$$

la dernière expression étant valable pour les variables adimensionnées $\tau = k_4 t$ et $x = \sqrt{k_3/k_4}[X]$, avec $a = k_1 k_3^{1/2}[A]/k_4^{3/2}$ et $b = k_2[B]/k_4$.

Nous étudierons d'un peu plus près la dynamique du brusselator. Des oscillations ont été observées dans des réactions chimiques, pour la première fois dans l'équation de Belousov-Zhabotinsky. Vous pouvez consulter les références [Bel, Zha].

1. Jeu de mot fondé sur son comportement oscillant, et sa création par des chercheurs d'un laboratoire Bruxellois

I.2.3 Dynamique des populations

Les biologistes, après les travaux pionniers de Volterra, ont décrit l'évolution de populations d'animaux par des systèmes dynamiques (nombreux exemples dans [GMM71]). Les modèles typiques sont les systèmes prédateur-proie, dont un exemple simple est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{N}_1 &= \alpha N_1 - \beta N_1 N_2 \\ \dot{N}_2 &= -\gamma N_2 + \delta N_1 N_2 \end{cases} , \quad (\text{I.9})$$

où tous les coefficients sont supposés positifs. Ici N_1 représente la population de proies, qui sans prédateur (population N_2) croît avec le coefficient α (taux de natalité diminué du taux de mortalité; on suppose que les proies ont à disposition une nourriture abondante), et décroît lorsqu'elle est en contact avec ses prédateurs, proportionnellement à leur nombre (terme en β). Inversement, la rencontre de proies augmente la population de prédateurs (terme en δ) qui diminuerait sinon (terme en γ). La motivation de Volterra était de rendre compte des oscillations, en opposition de phase, observées au Canada dans les populations de lynx et de lapins. Le système (I.9), pour certaines valeurs de ses paramètres, donne lieu à de telles oscillations.

I.3 Théorème d'existence et d'unicité

Le théorème suivant, dont nous ne donnerons pas la démonstration (on peut la trouver dans [Arn88]), établit l'existence et l'unicité des solutions de (I.1), sous des hypothèses assez peu restrictives :

Théorème (existence, unicité et dépendance continue des conditions initiales) :

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert de l'espace Euclidien \mathbb{R}^n , soit $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continuellement différentiable (C_1), et soit $\mathbf{x}_0 \in U$. Alors il existe une constante $c > 0$ et une unique solution $\phi(\mathbf{x}_0, \cdot) : [-c, c] \rightarrow U$ satisfaisant le système différentiel $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ avec comme condition initiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ (c'est-à-dire $\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{x}_0, t)$). De plus, cette solution dépend continuellement du point initial \mathbf{x}_0 .

Ce théorème est donc valable *localement* (dans l'ouvert U , et pour l'intervalle de temps $[-c, c]$). Son grand intérêt pratique est qu'il permet, par exemple, d'assurer que le problème aux conditions initiales (résolution de (I.1) connaissant la condition initiale \mathbf{x}_0) possède une solution unique, ce qui est d'une grande aide pour la recherche d'une solution numérique. On notera que le *problème aux limites*, tel que résoudre $\ddot{x} = g(x)$ avec $x(t_a) = a$ et $x(t_b) = b$, n'est pas assuré d'avoir une solution.

I.4 Espace de phase

I.4.1 Définition

L'*espace de phase* est l'ensemble contenant les variables \mathbf{x} de (I.1). Pour un système dynamique, la dimension de l'espace de phase donne le nombre de *degrés de liberté* du système. Cette dénomination n'est pas celle usuellement utilisée en Mécanique. En effet, N particules dans l'espace à 3 dimensions correspondent à $3N$ degrés de liberté pour la mécanique (3 coordonnées pour chacune des N particules), mais il y a $6N$ équations de Hamilton (I.2) (3 coordonnées et les 3 composantes de l'impulsion généralisée par particule) donc $6N$ degrés de liberté au sens des systèmes dynamiques.

Ainsi (I.9) et (I.8) sont des systèmes dynamiques à 2 degrés de liberté, un système autonome décrit par une équation différentielle de degré n possède n degrés de liberté. Le système (I.4), qui n'est pas autonome, a 3 degrés de liberté même si l'équation qui en décrit la dynamique est du second ordre.

I.4.2 Description d'un système dynamique

En général, un système dynamique (I.1) ne possède pas de solution analytique. Le problème que l'on se pose est alors de décrire le comportement de ses solutions en étudiant la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ce qui est un problème infiniment plus simple! Une représentation des solutions dans l'espace de phase est un *portrait de phase* du système dynamique.

Les portraits de phase ressemblent beaucoup à la représentation des lignes de champs de vitesse d'un fluide en écoulement. L'ensemble des trajectoires du système dynamique dans l'espace de phase est appelé *flot*, et on indiquera parfois par des flèches le sens de parcours de ces trajectoires lorsque le temps t augmente.

I.5 Points fixes. Étude de la stabilité d'un point fixe.

En règle générale, il n'existe pas de solution analytique de (I.1). Le problème que se pose la théorie des systèmes dynamiques est de décrire le comportement du système par la seule étude de la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, qui est évidemment un problème beaucoup plus simple. Dans l'idéal, il s'agit d'obtenir le portrait de phase du système dynamique.

Un *point fixe*, ou *point d'équilibre*, est un point \mathbf{x}^* tel que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$. De ce fait, il s'agit d'une solution de (I.1) puisque $d\mathbf{x}^*/dt = 0$, qui donne donc une première trajectoire (réduite au seul point \mathbf{x}^*) dans l'espace de phase. On peut ensuite se poser le problème de la *stabilité* de ce point fixe, qui permettra de tracer le comportement du système dynamique dans tout un voisinage du point fixe.

La méthode la plus générale consiste à poser ²

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}^* + \epsilon(t) \text{ avec } \|\epsilon(t)\| \ll 1 \quad (\text{notation vectorielle}) \\ x_i(t) &= x_i^* + \epsilon_i(t), \text{ avec } |\epsilon_i(t)| \ll 1, \forall i \in [1, n], \quad (\text{composantes}) \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Comme ϵ est une petite perturbation, l'équation qui donne sa dynamique est tirée de (I.1) en développant $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ au voisinage de \mathbf{x}^* ,

$$\dot{\epsilon}_i = f_i(x_1^* + \epsilon_1, \dots, x_n^* + \epsilon_n) = \underbrace{f_i(\mathbf{x}^*)}_{=0} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) \epsilon_j + O(\|\epsilon\|^2) \quad \text{soit} \quad \dot{\epsilon} = [J] \cdot \epsilon, \quad (\text{I.11})$$

en introduisant la matrice Jacobienne $[J] \equiv [\partial f_i / \partial x_j]$. Plutôt que d'utiliser directement ce formalisme général, nous allons voir quelques exemples. Une étude plus complète est esquissée au § I.5.4.

I.5.1 Exemple 1 : L'oscillateur harmonique

L'exemple le plus simple est l'oscillateur harmonique à une dimension,

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \quad \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

2. On suppose les composantes du vecteur \mathbf{x} sans dimensions.

Il existe un unique point fixe, $(x = 0, y = 0)$. Le problème est linéaire, et l'étude de stabilité se ramène à celle de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont $\pm i\omega_0$. Leur partie réelle est nulle, le point fixe est donc stable. Ici les trajectoires ne s'éloignent pas du point fixe (voir Fig. II.2) qui est appelé un *centre*.

Dans ce problème très simple, la quantité E_m est conservée³,

$$E_m \equiv \frac{\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2, \quad (\text{I.13})$$

ce qui donne directement l'équation des trajectoires dans l'espace de phase, ici des ellipses. En comptant le temps $\tau = \omega_0 t$ en périodes propres de l'oscillateur, le portrait de phase consiste en des cercles centrés sur l'origine.

Si nous introduisons de l'amortissement,

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2\alpha y \end{cases} \quad (\alpha > 0), \quad (\text{I.14})$$

l'équation (I.13) est remplacée par

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right) = -2\alpha y^2 \leq 0, \quad (\text{I.15})$$

ce qui implique que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Les trajectoires convergent donc vers le point fixe, qui est dit *asymptotiquement stable* et est appelé un *puits*. On montre facilement que les valeurs propres sont $-\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ (lorsque $\alpha < \omega_0$) ou sinon $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$. Dans tous les cas leurs parties réelles sont négatives, et le point fixe est stable.

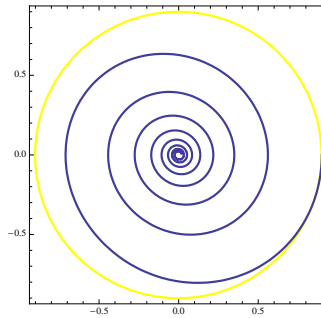


FIGURE I.1 – En bleu, une trajectoire de (I.14) pour $\alpha = 0.1$, $\omega_0 = 1$ et les conditions initiales $x(0) = 0.9$ et $\dot{x}(0) = 0$. En jaune, une trajectoire de (I.12) pour les mêmes conditions initiales.

I.5.2 Exemple 2 : Le pendule pesant

Les deux premiers exemples sont des systèmes linéaires. Les portraits de phase sont donc très simples, puisque toutes les trajectoires ont la même forme. Le pendule pesant (masse ponctuelle à l'extrémité d'une tige sans masse de longueur l tournant sans frottement autour de son autre extrémité) est un exemple très classique, mais déjà assez riche, de système non linéaire. Les équations sont

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \sin x, \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 \sin x \end{cases}, \quad (\text{I.16})$$

3. Il s'agit bien sûr de l'énergie mécanique divisée par la masse, si x est une longueur.

où x représente l'angle du pendule avec la verticale descendante, g l'accélération de la pesanteur, et $\omega_0^2 = g/l$. Les points fixes sont $(x = 0 \ (2\pi), y = 0)$ et $(x = \pi \ (2\pi), y = 0)$. L'étude de stabilité de $(0, 0)$ se ramène au cas précédent. Pour l'autre point fixe, posons $x = \pi + \xi, y = \eta$ avec $|\xi| \ll 1$ et $|\eta| \ll 1$. Le système linéarisé est

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (\text{I.17})$$

Les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres correspondants sont

$$+\omega_0 \text{ associée à } \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_0 \end{pmatrix}, \quad -\omega_0 \text{ associée à } \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.18})$$

L'une d'entre elle étant de partie réelle positive, le point fixe $(\pi, 0)$ est instable. Un point fixe avec une valeur propre positive et une négative est appelé un *point col*⁴.

On peut tracer un portrait de phase *local* au voisinage de la position d'équilibre que nous venons d'étudier, comme sur la Fig. I.2.

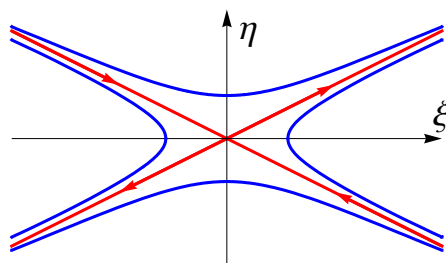


FIGURE I.2 – Portrait de phase du pendule pesant (I.16) au voisinage de la position d'équilibre instable $(\pi, 0)$. En rouge, les directions propres, stables et instables selon que le sens des flèches indique que le flot converge vers, ou diverge du point fixe. En bleu des portions de trajectoires passant au voisinage du point fixe.

Cette figure est l'occasion d'introduire un point de vocabulaire. Un point fixe tel que le Jacobien n'ait que des valeurs propres de parties réelles *non nulle*, comme c'est le cas ici (une valeur propre strictement positive, l'autre strictement négative) est appelé *hyperbolique*. La figure I.2 explique cette dénomination.

Le système (I.16) est conservatif et dérive d'un potentiel $E_p(x)$ tel que

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \underbrace{\omega_0^2(1 - \cos x)}_{\equiv E_p(x)} = Cste \equiv E_m. \quad (\text{I.19})$$

La représentation graphique du potentiel permet d'identifier les mouvements possibles (voir Fig. I.3).

- Pour $0 \leq E_m < 2\omega_0^2$, le pendule effectue des oscillations d'amplitude $\arccos(1 - E_m/\omega_0^2)$
- Pour $2\omega_0^2 < E_m$, le pendule effectue un mouvement de révolution, sans changement de sens.
- Pour $2\omega_0^2 = E_m$, deux trajectoires relient les points fixes $(-\pi, 0)$ et $(\pi, 0)$; physiquement, le pendule part de la position d'équilibre "tête en haut" $x = \pm\pi$ dans un des deux sens possibles. Ces trajectoires, qui séparent dans l'espace de phase les solutions oscillantes des solutions de révolution, constituent la *séparatrice*.

4. Les Anglais étant davantage marqué par la culture équestre que montagnarde parlent de point "selle", *saddle point*.

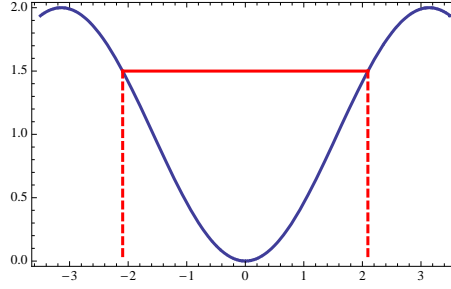


FIGURE I.3 – Tracé de $E_p(x)$ dans (I.19). Pour une énergie $E < 2\omega_0^2$ (ligne rouge), l'amplitude des oscillations est donnée graphiquement (lignes pointillées).

Notons $x_m \leq \pi$ l'amplitude maximale des oscillations. En utilisant (I.19), et les symétries évidentes du problème, on déduit une expression de la période des oscillations⁵,

$$T = 4 \int_0^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{2E_m - 2\omega_0^2(1 - \cos x)}}, \quad (\text{I.20})$$

où $x_m = \arccos(1 - E_m/\omega_0^2)$. Intéressons nous au cas $x_m = \pi$, soit $E_m = 2\omega_0^2$. On voit que l'intégrande diverge au voisinage de la borne supérieure de l'intégrale. Regardons plus précisément le comportement de l'intégrale. Il est donné par

$$\int_{\pi-\epsilon}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{2\omega_0}\sqrt{1 + \cos x}} = \int_0^{\epsilon} \frac{du}{\sqrt{2\omega_0}\sqrt{1 + \cos(\pi - u)}} \sim \int_0^{\epsilon} \frac{du}{\omega_0 u},$$

en développant $\cos(\pi - u)$ au deuxième ordre en u , ce qui est légitime si $\epsilon \ll 1$. La période diverge donc logarithmiquement lorsque l'on s'approche du maximum. La séparatrice est donc constituée de deux trajectoires reliant π à $-\pi$ (respectivement $-\pi$ à π , si le pendule tourne dans l'autre sens) et parcourues en un temps infini. Il n'y a donc pas de croisement en $\pm\pi$, conformément au théorème d'existence et d'unicité des solutions (voir § I.1).

Remarque (importante!) :

Il s'agit d'un résultat valable pour tout mouvement 1D d'un point matériel dans un potentiel. Plaçons nous dans le cas général où existe une énergie potentielle $E_p(x)$. Le maximum x^* , tel que $E^* \equiv E_p(x^*)$, est défini par $(dE_p/dx)(x^*) = E'_p(x^*) = 0$ (puisque x^* est un point fixe) et $E''_p(x^*) > 0$ (puisque c'est un maximum). Si $0 < \epsilon \ll 1$, la période au voisinage de x^* est

$$T(x^*) \sim \int_{x^*-\epsilon}^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{E^* - E_p(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2E''_p(x^*)}} \int_0^{\epsilon} \frac{du}{u},$$

en développant $E^* - E_p(x^* - u)$ à l'ordre le plus bas, soit u^2 . La divergence logarithmique du temps de parcours d'une trajectoire passant par un maximum instable est générale.

L'existence d'une énergie potentielle (I.19) permet de tracer un portrait de phase global pour (I.16). Au voisinage de $\pm\pi$, il est bien entendu en accord avec le portrait local Fig. I.2.

5. On notera, et nous y reviendrons, que contrairement au cas de l'oscillateur harmonique la période dépend *a priori* de l'amplitude des oscillations. La propriété d'*isochronisme* ne concerne que les petites oscillations (infinitésimales).

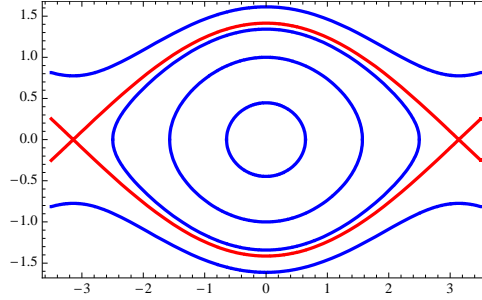


FIGURE I.4 – Portrait de phase global pour le pendule pesant (I.16). La séparatrice est tracée en rouge. Le temps est en unité $\omega_0 = 1$, donc à faible amplitude les orbites fermées sont des cercles. Leur déformation avec l'amplitude vient du terme non linéaire (et ces orbites ne sont pas des ellipses).

I.5.3 Exemple 3 : Oscillateur de van der Pol

51

Nous allons étudier un oscillateur non linéaire et non conservatif, décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{x} - (\epsilon - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (\text{Oscillateur de van der Pol}) \quad (\text{I.21})$$

Cet oscillateur a un point fixe évident $x = 0, \dot{x} = 0$. Lorsque $\epsilon < 0$, le terme correspondant est dissipatif, et ce point fixe est asymptotiquement stable⁶. Lorsque $\epsilon > 0$, le terme correspondant représente une amplification. On construit facilement des circuits électroniques qui modélisent un oscillateur de van der Pol, avec un élément actif (Ampli OP, par exemple) qui réalise $\epsilon > 0$. L'amplitude x croît, jusqu'à ce que le terme en $+x^2\dot{x}$, qui représente une dissipation non linéaire, devienne prépondérant sur le terme d'amplification $-\epsilon\dot{x}$. On peut imaginer que les trajectoires ne pourront s'éloigner du point fixe, et parcourront une orbite fermée appelé *cycle limite*. L'intégration numérique de (I.21) justifie cette approche.

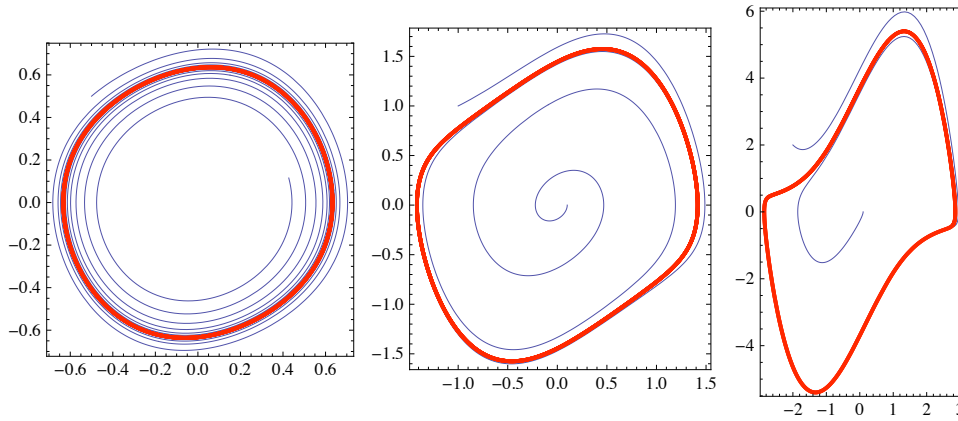


FIGURE I.5 – Cycles limites de l'oscillateur de van der Pol (en rouge; en bleu sont représentées des trajectoires convergeant vers le cycle limite). De gauche à droite, $\epsilon = 0.1$, $\epsilon = 0.5$ et $\epsilon = 2$.

Lorsque $0 < \epsilon \ll 1$, il est possible d'estimer quantitativement la taille du cercle limite. L'énergie de l'oscillateur $E = \dot{x}^2/2 + x^2/2$ vérifie

$$\frac{dE}{dt} = (\epsilon - x^2)\dot{x}^2.$$

6. On utilise ici un résultat intuitif : la stabilité linéaire implique la stabilité non linéaire. En effet, une perturbation d'un point fixe linéairement stable ne s'en éloigne pas, et les termes non linéaires restent négligeables.

Si l'oscillateur atteint un régime stable d'oscillations d'amplitude finie, on peut estimer qu'en moyenne sur une période la variation d'énergie est nulle,

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \epsilon \langle \dot{x}^2 \rangle = \langle x^2 \dot{x}^2 \rangle.$$

Si les oscillations sont quasi-sinusoidales,

$$x(t) \approx a \cos t, \quad \langle \dot{x}^2 \rangle \approx \frac{a^2}{2}, \quad \langle x^2 \dot{x}^2 \rangle = \frac{a^2}{4} \langle \sin^2(2t) \rangle = \frac{a^2}{8},$$

soit enfin $a = 2\sqrt{\epsilon}$.

I.5.4 Complément : Rappels d'algèbre linéaire

Dans cette section, nous revenons un peu plus en détail sur la résolution du problème général (I.11). Nous nous limitons à de brefs rappels, pour un exposé complet et très clair voir [Arn88].

Cherchons des solutions de la forme $\epsilon_i(t) = \epsilon_i^0 \exp(\sigma t)$. Le problème se ramène alors à un problème d'algèbre linéaire, puisque après simplification par $\exp(\sigma t)$, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} (J_{11} - \sigma)\epsilon_1^0 + J_{12}\epsilon_2^0 + \dots + J_{1n}\epsilon_n^0 & = 0 \\ \vdots & \\ J_{i1}\epsilon_1^0 + \dots + (J_{ij} - \sigma)\epsilon_i^0 + \dots + J_{in}\epsilon_n^0 & = 0 \\ \vdots & \\ J_{n1}\epsilon_1^0 + \dots + (J_{nn} - \sigma)\epsilon_n^0 & = 0 \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

Le problème admet donc une solution non triviale (avec les $\epsilon_i^0 \neq 0$) que lorsque σ est une *valeur propre* de la matrice Jacobienne $[J]$. Cette matrice est réelle, ce qui donne lieu aux cas suivants :

1. Les valeurs propres σ_i , $i \in [1, n]$, sont réelles et distinctes. Les vecteurs propres ξ_i forment alors une base, et si la condition initiale s'exprime dans cette base comme

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^n C_i \xi_i,$$

alors la solution de (I.11) est

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \exp(\sigma_i t) \xi_i.$$

Le point fixe est alors *instable* si une au moins des valeurs propres est strictement positive, stable sinon.

2. Les valeurs propres sont toutes distinctes, mais il apparaît des couples de valeurs propres complexes conjuguées (puisque la matrice Jacobienne est réelle). Notons \bar{z} le conjugué complexe de z . Si $\sigma_j \in \mathbb{R}$ pour $j \leq p$, et $\sigma_j = \lambda_j \pm i\omega_j$ ($i^2 = -1$) pour $p+1 \leq j \leq m$ avec $p+2m = n$, la solution de (I.11) est

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^p A_j \exp(\sigma_j t) \xi_j + \sum_{j=p+1}^m \exp(\lambda_j t) \left(C_j \xi_j \exp(i\omega_j t) + \bar{C}_j \bar{\xi}_j \exp(-i\omega_j t) \right).$$

Là encore, le point fixe est instable si au moins une des valeurs propres a une partie réelle strictement positive.

3. Les deux cas précédents s'appliquent lorsque la matrice Jacobienne est diagonalisable (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Lorsqu'elle ne l'est pas, supposons que les valeurs propres réelles soient σ_l ($1 \leq l \leq k$) de multiplicités respectives ν_l , et les valeurs propres complexes $\lambda_l \pm i\omega_l$ ($1 \leq l \leq m$) de multiplicités respectives μ_l . Alors la solution de (I.11) s'écrit

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{l=1}^k p_l(t) \exp(\sigma_l t) + \sum_{l=1}^m \exp(\lambda_l t) [q_l(t) \cos \omega_l t + r_l(t) \sin \omega_l t],$$

où $p_l(t)$, $q_l(t)$ et $r_l(t)$ sont des polynômes de degré respectivement strictement inférieurs à ν_l , μ_l et μ_l . Lorsque $t \rightarrow \pm\infty$, le comportement asymptotique de cette solution est dominé par les fonctions exponentielles réelles. Donc le point fixe est instable, là encore, si au moins une des valeurs propres est de partie réelle strictement positive, stable sinon.

À titre d'exemple, étudier l'équation différentielle

$$\frac{d^4 x}{dt^4} - 2 \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0, \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, \ddot{x}(0) = 0, (d^3 x/dt^3)(0) = 0.$$

- Mettre cette équation sous la forme (I.1)
- Calculer les valeurs propres de la matrice
- Chercher les solutions sous la forme $(a + br)e^{\pm t}$, et en déduire la solution.

On a facilement

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont ± 1 , avec chacune une multiplicité de 2. La solution de l'équation différentielle est

$$x(t) = \frac{e^{-t}t}{4} - \frac{e^t t}{4} + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^t}{2}.$$

A—Quelques références complémentaires.

Finissons par quelques livres introductifs, peu chers en grande majorité, très lisibles et constituant d'excellentes introductions.

Pour une approche nettement orientée vers la Physique, on pourra consulter les ouvrages d'Abarbanel, Rabonovitch et Sushchik [ARS93] (nombreux chapitres sur les ondes nonlinéaires), d'Arnold [Arn04] (très intéressant par son approche historique), Bergé, Pomeau et Vidal [BPV84] (nombreuses illustrations expérimentales) et Pippard [Pip88] (approche originale et aussi peu formelle que possible).

Les systèmes dynamiques sont aussi un des grands domaines des Mathématiques. On trouvera une introduction actuelle et claire dans le livre de Buzzi [Buz05], et l'excellent livre de Ruelle est particulièrement rafraichissant [Rue10]!

Bibliographie

- [Arn88] V. Arnold. *Equations différentielles ordinaires*. Mir, 1988.
- [Arn98] V. Arnold. *Catastrophe Theory*. Springer-Verlag, 1998.
- [Arn04] V. Arnold. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke : Pioneers in Mathematical Analysis and Catastrophe Theory*. Birkhauser, 2004.
- [ARS93] H.D.I. Abarbanel, M.I. Rabonovich, and M.M. Sushchik. *Introduction to nonlinear dynamics for physicists*. World Scientific, 1993.
- [Bel] http://en.wikipedia.org/wiki/belousov-zhabotinsky_reaction.
- [BPV84] P. Bergé, Y. Pomeau, and Ch. Vidal. *L'ordre dans le chaos*. Hermann, 1984.
- [Buz05] Jérôme Buzzi. *Chaos et stabilité*. Le Pommier, 2005.
- [GMM71] N.S. Goel, S.C. Maitra, and E.W. Montroll. On the volterra and other nonlinear models of interacting populations. *Rev. Mod. Phys.*, 43 :231–276, 1971.
- [Pip88] A.B. Pippard. *Response and stability*. Cambridge University Press, 1988.
- [Rue10] David Ruelle. *Hasard et chaos*. Odile Jacob, 2010.
- [Zha] A.M. Zhabotinsky. http://www.scholarpedia.org/article/belousov-zhabotinsky_reaction.

Chapitre II

Bifurcations

II.1 Portraits de phase de l'oscillateur de van der Pol

Revenons sur l'exemple de l'oscillateur de van der Pol,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + (\epsilon - x^2)y. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Il s'agit d'un système dynamique qui dépend du paramètre réel ϵ . Lorsque $\epsilon < 0$, le point $(x = 0, y = 0)$ de l'espace de phase est un point fixe stable, attractif, avec comme bassin d'attraction l'espace entier (quelle que soit la condition initiale, toute trajectoire converge vers ce point). Lorsque $\epsilon > 0$, le point fixe se déstabilise, et il apparaît une trajectoire fermée de l'espace de phase, le cycle limite, dont il est facile de se convaincre qu'elle a aussi comme bassin d'attraction l'espace de phase tout entier. Si l'on se place au voisinage de $\epsilon = 0$, le cycle limite est presque circulaire, et les portraits de phase se présentent donc ainsi :

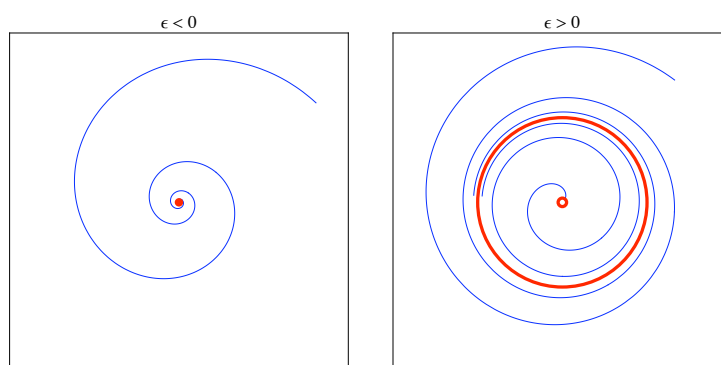


FIGURE II.1 – Portraits de phase schématisés de l'oscillateur de van der Pol. En rouge est représenté le point fixe (plein lorsqu'il est stable, vide sinon) et le cycle limite s'il existe. En bleu une trajectoire convergeant vers le point fixe ($\epsilon < 0$) et deux trajectoires convergeant vers le cycle limite ($\epsilon > 0$).

Il y a donc *changement qualitatif* dans le portrait de phase de l'oscillateur de van der Pol lorsque le paramètre ϵ varie, puisque pour $\epsilon < 0$ le seul attracteur est un point, alors que pour $\epsilon > 0$ l'attracteur est une courbe fermée. Un tel changement s'appelle une *bifurcation*. Nous allons commencer par formaliser un peu ce que nous entendons par "changement" et par "qualitatif".

II.2 Stabilité structurelle

Définition 1 : Équivalence topologique

Cette notion formalise la ressemblance qualitative entre deux systèmes dynamiques. Un système dynamique sur $U \subset \mathbb{R}^n$ est *topologiquement équivalent* à un système dynamique sur $V \subset \mathbb{R}^n$ s'il existe une *bijection bicontinue* (c'est-à-dire un *homéomorphisme*) $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $h(U) = V$, qui envoie les orbites d'un système dans l'autre, en conservant le sens du temps.

Définition 2 : Stabilité structurelle.

Un système dynamique est *structurellement stable* dans un fermé U s'il reste topologiquement équivalent à lui-même par une petite variation du champ de vecteur associée. En gros, si il existe une région fermée (au sens de la topologie) $U \subset \mathbb{R}^n$, telle que pour toute fonction \mathbf{g} régulière et bornée sur U , il existe $\epsilon \ll 1$ de sorte que les systèmes dynamiques $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{x})$ soient topologiquement équivalents, alors le système non perturbé est structurellement stable.

On se contentera de cette idée intuitive. Regardons un exemple très simple de système structurellement instable, l'oscillateur harmonique :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\equiv \mathbf{f}(\mathbf{x})} + \epsilon \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \end{pmatrix}}_{\equiv \mathbf{g}(\mathbf{x})}, \quad (\text{II.2})$$

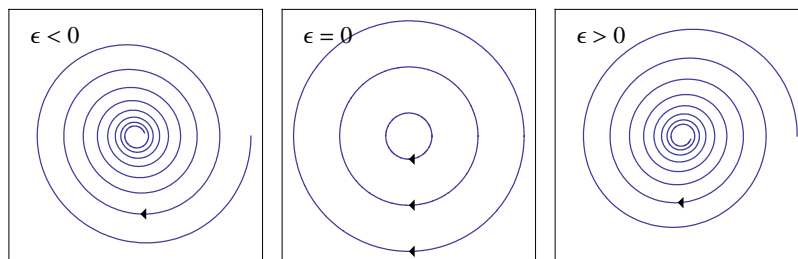


FIGURE II.2 – Portraits de phase de l'oscillateur (II.2), avec pour unité de temps $2\pi/\omega_0$. La flèche indique le sens de parcours d'une trajectoire lorsque le temps t croît.

Très clairement, il est impossible qu'il existe une bijection entre les orbites fermées pour $\epsilon = 0$ et celles pour $\epsilon \neq 0$, quelle que soit la valeur de ϵ . Aussi petite soit elle, la perturbation modifie qualitativement le portrait de phase du système dynamique, qui est donc structurellement instable, et ce quel que soit le fermé U que l'on considère autour du point fixe.

Définition 3 : Point fixe hyperbolique

Un point fixe \mathbf{x}^* est *hyperbolique* si sa Jacobienne n'a aucune valeur propre de partie réelle nulle.

Cette dénomination vient de l'image donnée par la Fig. I.2. On démontre alors les deux théorèmes suivants :

Théorème 1 (Hartman-Grobman) :

Au voisinage d'un point fixe hyperbolique, un système dynamique $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ est localement topologiquement équivalent à sa linéarisation $\dot{\xi} = (\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x})|_{\mathbf{x}^*} \xi$

Théorème 2 :

Les portraits de phase au voisinage de deux points fixes hyperboliques sont localement topologiquement équivalents si les matrices Jacobiennes admettent les mêmes nombres n_+ et n_- de valeurs propres de parties réelles respectivement strictement positives et strictement négatives (les points étant hyperboliques, aucune valeur propre n'est de partie réelle nulle).

Ces résultats sont raisonnablement intuitifs. Par exemple, une conséquence du théorème de Hartman-Grobman est que la stabilité linéaire d'un système implique sa stabilité non linéaire ; intuitivement, les termes non linéaires constituent une petite correction et ne modifient donc pas le résultat de l'étude linéaire, tout au moins dans un voisinage du point fixe.

Une autre est que le portrait de phase au voisinage d'un point fixe hyperbolique est structurellement stable. En effet les valeurs propres dépendent continuellement de ϵ , et s'il est assez petit elles ne changent pas de signe. Aucune contradiction avec l'exemple précédent de système structurellement instable, puisque justement le point d'équilibre n'est pas hyperbolique ! (un couple $\pm i\omega_0$ de valeurs propres conjuguées de partie réelle nulle).

On pourra trouver plus de détails dans [Kus95] et [GH83]. La démonstration du théorème 2 est fournie par [Arn88], celle du théorème de Hartman-Grobman dans [Arn80]. Dans [Kus95], on trouve une démonstration explicite, avec la construction de l'homéomorphisme, de l'équivalence topologique entre un puit (point fixe stable avec deux valeurs propres réelles négatives) et un foyer attractif (point fixe stable avec une paire de valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle négative).

II.3 Bifurcations de codimension 1 des points fixes

Nous nous intéressons désormais à des systèmes dynamiques dépendant d'un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mu) \quad (\text{II.3})$$

où \mathbf{f} est une fonction régulière de \mathbf{x} et μ .

On suppose que pour certaines valeurs de μ le système possède un point fixe \mathbf{x}^* . Lorsque l'on fait varier le paramètre, on dit qu'il se produit une *bifurcation* quand il apparaît, dans le voisinage du point fixe, un portrait de phase non topologiquement équivalent. Cela ne peut se produire que si les nombres n_+ et n_- changent : par continuité la partie réelle d'une valeur propre du Jacobien doit donc s'annuler lorsque μ varie. Une bifurcation ne peut donc se produire que s'il y a perte d'hyperbolicité du point fixe.

Nous nous intéresserons uniquement aux situations où un seul paramètre réel varie. On appelle *codimension* la dimension de l'espace de paramètres. Nous étudions donc les bifurcations de codimension 1 des points d'équilibre. Il n'y a alors que deux cas à envisager : soit une valeur propre réelle s'annule, soit la partie réelle d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées s'annule.

Reprenons rapidement le cas de l'oscillateur de van der Pol (II.1). Les deux portraits de phases de la figure II.1 sont clairement non-équivalents au sens topologique, puisqu'il n'existe pas de bijection entre un point (le point fixe attractif) et une courbe (le cycle limite). Il se produit donc une bifurcation de codimension 1 lorsque le paramètre réel ϵ s'annule. Nous la caractériserons en fin de chapitre.

II.3.1 Valeur propre réelle non dégénérée.

Dans ce cas, le système (II.3) se réduit à

$$\dot{x} = V(x; \mu) \quad \text{où } x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \quad V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ régulière.} \quad (\text{II.4})$$

Il est toujours possible de choisir l'origine des x de telle sorte que 0 soit le point d'équilibre, et l'origine des paramètres de telle sorte que la bifurcation intervienne pour $\mu = 0$. Sans perte de généralité, on a donc les deux conditions supplémentaires

$$\begin{aligned} V(0; 0) &= 0 \quad (\text{existence du point d'équilibre}) \\ \frac{\partial V}{\partial x}(0, 0) &= 0 \quad (\text{annulation de la valeur propre du Jacobien pour } \mu = 0) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Dans ce cas, près du point d'équilibre *et* près¹ du point de bifurcation $\mu = 0$, on peut écrire

$$\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial \mu} \Big|_{eq} \mu + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{eq} \frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \mu} \Big|_{eq} x\mu + \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} \Big|_{eq} \frac{\mu^2}{2} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \Big|_{eq} \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{II.6})$$

Cas générique

Génériquement, c'est-à-dire sans hypothèse supplémentaire, les dérivées $\partial V / \partial \mu|_{eq}$ et $\partial^2 V / \partial x^2|_{eq}$ sont non nulles. Comme il est possible de choisir² l'échelle de temps et l'échelle des x , les termes dominants du développement (II.6) se ramènent à l'équation suivante,

$$\dot{x} = \pm \mu \pm x^2. \quad (\text{II.7})$$

Cette équation est une *forme normale*, nous y revenons section II.3.2 et dans l'appendice B.

Nous allons traiter le cas $(+, +)$, qui ne présente aucune différence de principe avec les trois autres (voir Fig. II.3) : $\dot{x} = \mu + x^2$. Les points fixes sont $x^* = \pm \sqrt{-\mu}$, qui existe pour $\mu < 0$. Pour regarder leur stabilité, on pose

$$x = x^* + \epsilon(t), \quad (|\epsilon(t)| \ll 1) \implies \dot{\epsilon} = \pm(2\sqrt{-\mu})\epsilon.$$

Le point fixe $+\sqrt{-\mu}$ est donc instable, tandis que $-\sqrt{-\mu}$ est stable.

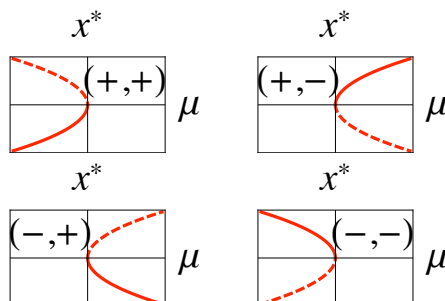


FIGURE II.3 – **Bifurcation noeud-col.** Les quatre cas de la forme normale (II.7).

1. Il s'agit donc ici d'une étude *locale* des bifurcations.
 2. Explicitement, on pose $\tilde{t} = t\sqrt{|\partial^2 V / \partial x^2| / (2|\partial V / \partial \mu|)}$ et $\tilde{x} = x\sqrt{|\partial^2 V / \partial x^2| |\partial V / \partial \mu| / 2}$. En toute rigueur, x et t doivent être affectés d'un tilde $\tilde{\cdot}$ dans (II.6).

Ces informations sont regroupées dans un *diagramme de bifurcation* dans le plan (μ, x^*) , qui ne doit pas être confondu avec l'espace de phase. Par convention, une solution stable (resp. instable) est tracée en traits pleins (resp. pointillés). La Fig. II.3 regroupe les quatre cas possibles de (II.7). Cette bifurcation est appelée *bifurcation noeud-col* (en Anglais "*saddle-node bifurcation*")

Cette dénomination n'est pas très claire, si on ne pense qu'à un système unidimensionnel. Il faut imaginer un système au moins bidimensionnel, avec une valeur propre restant négative lorsque μ varie. La dynamique est alors complètement dépendante de la valeur propre qui s'annule. La branche stable correspond à un noeud (deux directions stables) et la branche instable à un col - ou une selle, "saddle"- avec une direction stable et une instable.

Cette bifurcation est la seule qui soit générique. Néanmoins, dans les applications, et surtout dans les systèmes expérimentaux il est très fréquent d'avoir des conditions supplémentaires qui conduisent à des diagrammes différents. Nous allons donc regarder ce qui se passe lorsqu'un point fixe persiste sur tout un domaine de variation du paramètre, puis lorsqu'il existe une symétrie de parité $x \longleftrightarrow -x$.

Persistance d'un équilibre

Très souvent, un équilibre persiste sur toute une plage de valeurs du paramètre. Il existe donc une fonction $X(\mu)$ telle que $X(0) = 0$, et $V(X(\mu), \mu) = 0$ sur tout un intervalle $I_\mu \equiv [\mu_{inf}, \mu_{sup}]$. On peut alors poser $x(t) = X(\mu) + \tilde{x}(t)$. Dans la nouvelle variable $\tilde{x}(t)$, on a $(\forall \mu \in I_\mu) V(0, \mu) = 0$, ce qui permet de déduire $(\partial^n V / \partial \mu^n)_{eq} = 0$. En reportant ce résultat dans (II.6), et au prix d'un changement d'échelle sur \tilde{x} et t , on obtient

$$\dot{x} = x(\pm\mu \pm x), \quad (II.8)$$

où les tildes ont été enlevés pour alléger les notations.

Ici aussi les quatre cas sont équivalents, et nous ne traiterons que le cas $(+, +)$. Les points d'équilibre sont $x^* = 0$, stable si $\mu \leq 0$, qui persiste pour tout μ conformément à nos hypothèses de départ, et $x^* = -\mu$, stable si $\mu \geq 0$. L'étude de stabilité ne présente aucune difficulté, et nous obtenons le diagramme correspondant à la *bifurcation transcritique*, aussi appelée *bifurcation avec échange de stabilité*.

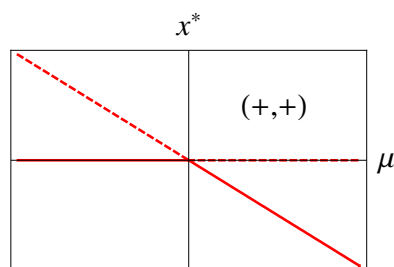


FIGURE II.4 – **Bifurcation transcritique.** Cas $(+, +)$ de la forme normale (II.8).

Symétrie de parité $x \longleftrightarrow -x$.

Nous considérons maintenant un équilibre persistant, dans un système avec une symétrie de parité : $V(-x, \mu) = -V(x, \mu)$. Les dérivées paires $\partial^{2p} V / \partial x^{2p}$ sont alors toutes nulles. Les termes dominants de (II.6), après changements d'échelles, sont

$$\dot{x} = x(\pm\mu \pm x^2). \quad (II.9)$$

Les quatre possibilités de signes ne sont pas équivalentes. Nous allons commencer par les signes $(+, -)$, $\dot{x} = x(\mu - x^2)$. Les points fixes sont $x^* = 0$, stable lorsque $\mu < 0$, et $x^* = \pm\sqrt{\mu}$. En posant $x = \pm\sqrt{\mu} + \epsilon(t)$, on trouve $\dot{\epsilon} = -2\mu\epsilon$. Les deux points fixes sont donc stables lorsqu'ils existent, c'est-à-dire pour $\mu > 0$. Le diagramme de bifurcation est alors Fig. II.5.

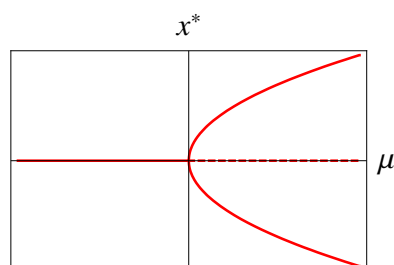


FIGURE II.5 – **Bifurcation fourche surcritique.** Cas $(+, -)$ de la forme normale (II.9).

Le diagramme lui-même présente la symétrie de parité $x \leftrightarrow -x$. Le nom de *bifurcation fourche* (en Anglais, "pitchfork") est évident graphiquement. Elle est ici *surcritique* (en Anglais, *supercritical*) car la solution bifurquée $\pm\sqrt{\mu}$ est stable lorsqu'elle apparaît pour $\mu \geq 0$, donc après le point de bifurcation. Par analogie avec les transitions de phases, un point de bifurcation est appelé *point critique*. Cette analogie est bien plus profonde et bien plus riche que cette seule terminologie, et on pourra consulter l'appendice A.

Un exemple sera vu en TD, celui d'un point matériel mobile sur un cerceau circulaire tournant à vitesse angulaire constante autour de son diamètre vertical. Vous mettrez en évidence une bifurcation fourche surcritique. Vous montrerez aussi que si l'on prend un axe écarté d'une petite distance h du diamètre vertical, le diagramme de bifurcation est modifié et devient celui présenté Fig. II.6. Que s'est-il passé ? La forme normale (II.9) n'est pas structurellement stable, et une petite modification du système dynamique nous fait retrouver le cas générique, celui de la bifurcation noeud-col ! (plus un équilibre persistant qui ne bifurque pas car il reste hyperbolique)

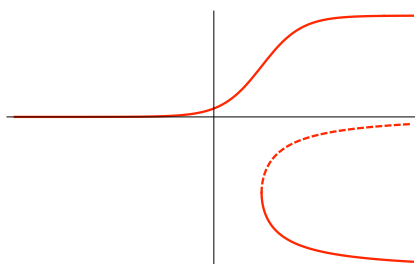


FIGURE II.6 – **Bifurcation fourche imparfaite.**

Passons au cas $(+, +)$, $\dot{x} = x(\mu + x^2)$. Rien ne change pour $x^* = 0$, mais les autres points fixes sont $x^* = \pm\sqrt{-\mu}$, dont on montre facilement qu'ils sont instables lorsqu'ils existent, pour $\mu < 0$. Le point fixe $x^* = 0$ semble se déstabiliser pour $\mu > 0$ sans qu'un autre point d'équilibre apparaisse. La situation physique n'est correctement décrite que si l'on prend le terme suivant dans le développement (II.6). Nous nous plaçons dans le cas où celui-ci donne lieu à une solution stable : on dit que la non linéarité *sature* l'instabilité. Si ce n'était pas le cas [le coefficient g n'est pas à notre discrétion, il est fixé par l'équation de départ (II.4)] il faudrait considérer le terme suivant du développement. Supposons donc que la bifurcation est décrite par

$$\dot{x} = x(\mu + x^2 - gx^4), \quad g > 0. \quad (\text{II.10})$$

Les points fixes non nuls sont

$$x^* = \pm \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\mu g}}{2g} \right)^{1/2}. \quad (\text{II.11})$$

Pour étudier leur stabilité, on pose $x = x^* + \epsilon(t)$, et on trouve

$$\dot{\epsilon} = 2x^{*2} (1 - 2gx^{*2}) \epsilon = (\mp 2x^{*2} \sqrt{1 + 4\mu g}) \epsilon.$$

Les points fixes x_{++}^* et x_{-+}^* sont stables, x_{+-}^* et x_{--}^* sont instables. Le diagramme est représenté Fig. II.7, avec une tangente verticale en $\mu = -1/(4g)$. Cette bifurcation fourche est appelée *souscritique*, car la solution bifurquée stable existe sous le point de bifurcation $\mu = 0$.

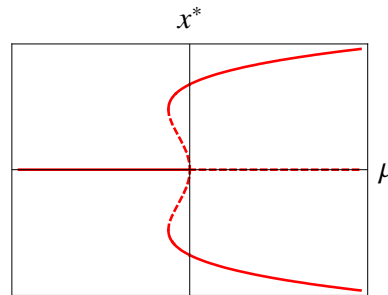


FIGURE II.7 – **Bifurcation fourche souscritique.** Cas (+, +) de la forme normale (II.10).

La nature souscritique ou surcritique d'une bifurcation a une signature expérimentale claire. Imaginons que, dans un certain dispositif, on fasse varier lentement³ le paramètre μ . On mesure la position d'équilibre x^* ; la bifurcation a lieu pour une valeur μ_c du paramètre. Il est inutile sauf exception de tester explicitement sa stabilité, les inévitables imperfections expérimentales apportant en permanence de petites perturbations $\epsilon(t)$, qui s'atténuent ou s'amplifient selon que le point fixe est stable ou pas.

Si la bifurcation est surcritique, la position d'équilibre $x^* = 0$ se déstabilise lorsque $\mu \geq \mu_c$ au profit d'une des deux solutions proportionnelles à $\pm\sqrt{\mu - \mu_c}$ (avec une probabilité 1/2 si le dispositif est parfaitement réglé) de façon *continue*, puisque la solution bifurquée varie comme la racine de l'écart au seuil. En outre, cette évolution est *réversible* : chacune des deux branches stables du diagramme de la figure II.5 peut être parcourue dans les deux sens, selon que l'on travaille à μ croissant ou décroissant.

Si la bifurcation est souscritique, lorsqu'on atteint $\mu = \mu_c$, en faisant croître μ , le point $x^* = 0$ se déstabilise au profit d'une des deux branches stables qui a une amplitude finie $\pm 1/\sqrt{g}$. La transition est donc *discontinue*. Imaginons maintenant que l'on fasse décroître μ alors qu'on est sur une des deux branches bifurquées (donc pour $\mu > \mu_c$). Lorsque $\mu \leq \mu_c$, il faudrait une perturbation d'amplitude finie (et non infinitésimale) pour faire "sauter" le système sur l'autre équilibre stable $x^* = 0$. On reste donc sur la branche bifurquée tant qu'elle existe, c'est-à-dire jusqu'à $\mu - \mu_c = -1/(4g)$, point à partir duquel on fait un deuxième saut discontinu d'amplitude $\pm 1/\sqrt{2g}$. On décrit ainsi un cycle d'hystérésis (voir Fig. II.8) qui montre que l'évolution du système est *irréversible*.

3. *Lentement* se comprend par rapport à une échelle de temps caractéristique. Ici, c'est le temps de relaxation d'une perturbation, dont les analyses de stabilité montrent qu'il est en $1/(\mu - \mu_c)$. Il est donc difficile en pratique de varier lentement μ au voisinage du point de bifurcation $\mu = \mu_c$.

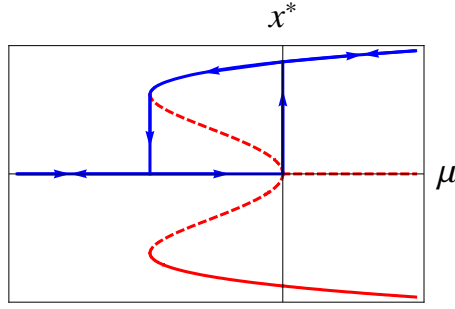


FIGURE II.8 – Cycle d’hystérésis (en bleu) décrit lorsqu’on fait croître puis décroître (voir le sens des flèches) lentement le paramètre μ , pour une bifurcation fourche sous-critique. Si le dispositif expérimental est parfaitement réglé, la probabilité de bifurquer sur la branche du bas est la même.

II.3.2 Paire de valeurs propres complexes conjuguées.

Il nous reste à voir le cas où une paire de valeurs propres complexes conjuguées voit sa partie réelle s’annuler au point de bifurcation. Le système est nécessairement bidimensionnel,

$$\begin{cases} \dot{x} = f_x(x, y; \mu) \\ \dot{y} = f_y(x, y; \mu) \end{cases} \quad \text{où } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\text{II.12})$$

avec $f_x(0, 0; 0) = 0$ et $f_y(0, 0; 0) = 0$, et comme valeurs propres $\pm i\omega$ pour $\mu = 0$. Il est possible de passer de deux variables réelles à une seule variable complexe z , puis de développer au voisinage du point de bifurcation en puissances de z et son complexe conjugué \bar{z} . Il est moins trivial de montrer qu’à l’ordre le plus bas seul un terme d’ordre 3 doit être gardé, pour obtenir la *forme normale de la bifurcation d’Andronov-Hopf*,

$$\dot{z} = (\sigma + i\omega)z - (g_r + ig_i)z^2\bar{z}. \quad (\text{II.13})$$

On trouvera des indications dans l’appendice B, et un calcul explicite au Chapitre IV. Ici le paramètre de bifurcation est σ , et l’analyse est *locale*, valable pour $|\sigma| \ll 1$.

Pour étudier (II.13), il est pratique d’écrire $z(t) \equiv \rho(t) \exp[i\theta(t)]$, où le module ρ et la phase θ du nombre complexe z sont des fonctions réelles du temps. Séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = (\sigma - g_r\rho^2)\rho \\ \dot{\theta} = \omega - g_i\rho^2 \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

La phase θ n’a pas de dynamique indépendante de celle de ρ .

Regardons pour commencer le cas $g_r > 0$. Les points fixes sont $\rho^* = 0$ et $\rho^* = \sqrt{\sigma/g_r}$ (ρ est un module, seule la solution positive est à prendre en compte). La solution $\rho^* = 0$ est instable si $\sigma > 0$. Si on pose $\rho = \sqrt{\sigma/g_r} + \epsilon(t)$, on trouve $\dot{\epsilon} = -2\sigma\epsilon$, ce qui montre que la solution $\sqrt{\sigma/g_r}$ est stable lorsqu’elle existe, c’est-à-dire lorsque $\sigma > 0$. La solution complète est

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\sigma/g_r} \\ \theta = \left(\omega - \frac{g_i\sigma}{g_r}\right)t \end{cases} \implies z(t) \sim \sqrt{\frac{\sigma}{g_r}} \exp\left[i\left(\omega - \frac{g_i\sigma}{g_r}\right)t\right] \quad \text{pour } \sigma > 0. \quad (\text{II.15})$$

Cette fonction périodique est représentée dans l’espace de phase par un cycle limite. La *bifurcation de Andronov-Hopf* correspond à la déstabilisation d’un point fixe $z^* = 0$ au profit d’un cycle limite stable. Lorsque $g_r > 0$, il s’agit d’une bifurcation de Hopf *surcritique*. Expérimentalement, lorsque le point fixe se déstabilise des oscillations spontanées apparaissent, dont l’amplitude croît continûment en fonction de σ . Le module des oscillations est représenté en Fig. II.9, et le diagramme de bifurcation dans l’espace (σ, x, y) est représenté en Fig. II.10.

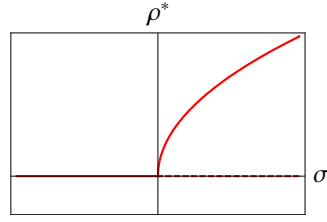


FIGURE II.9 – **Bifurcation de Andronov-Hopf surcritique.** Module de l'amplitude des oscillations, solution de (II.14).

Cette bifurcation est observée pour l'oscillateur de van der Pol. Nous calculerons explicitement la forme normale [c'est-à-dire les coefficients g_r et g_i de (II.13)] au Chapitre IV.

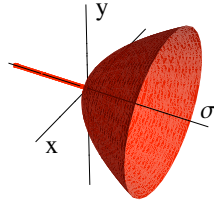


FIGURE II.10 – **Bifurcation de Andronov-Hopf surcritique.** Diagramme de la bifurcation décrite par la forme normale (II.13).

Lorsque $g_r < 0$, la solution $\rho^* = \sqrt{-\sigma/g_r}$ est instable lorsqu'elle existe, soit pour $\sigma < 0$. Il est donc nécessaire, comme dans le cas de la bifurcation fourche souscritique, de retenir les termes suivants du développement. L'équation (II.13) est donc remplacée par

$$\dot{z} = (\sigma + i\omega)z + (|g_r| - ig_i)z^2\bar{z} - (h_r + ih_i)z^3\bar{z}^2, \quad (\text{II.16})$$

où on suppose $h_r > 0$. L'équation pour le module $\rho(t)$ est alors

$$\dot{\rho} = (\sigma + |g_r|\rho^2 - h_r\rho^4)\rho, \quad (\text{II.17})$$

dont les points fixes sont

$$\rho^* = 0, \quad \rho^* = + \left(\frac{|g_r| \pm \sqrt{g_r^2 + 4\sigma h_r}}{2h_r} \right)^{1/2},$$

ce qui donne le diagramme suivant, identique à celui de la Fig. II.7 sauf que dans le cas présent seule la solution $\rho \geq 0$ a un sens.

Décrivons le comportement observé lors d'une expérience où un système présente une bifurcation de Hopf lorsqu'un paramètre expérimental σ varie, pour $\sigma = \sigma_c$. Imaginons que l'on augmente σ à partir d'une valeur inférieure à σ_c . Si la bifurcation est surcritique, à partir de σ_c il apparaît des oscillations spontanées d'amplitude proportionnelles à $\sqrt{\sigma - \sigma_c}$, et cette évolution est réversible : si on diminue σ l'amplitude des oscillations décroît pour disparaître à σ_c .

Si la bifurcation est souscritique, il apparaît à σ_c des oscillations d'amplitude finie $\sqrt{|g_r|/h_r}$. Si on fait décroître σ , il y a toujours des oscillations à $\sigma = \sigma_c$, qui ne disparaissent que pour $\sigma - \sigma_c \leq -g_r^2/(4h_r)$. Leur amplitude décroît brusquement de la valeur $\sqrt{|g_r|/(2h_r)}$ jusqu'à 0, le système convergeant vers le point fixe $\rho^* = 0$.

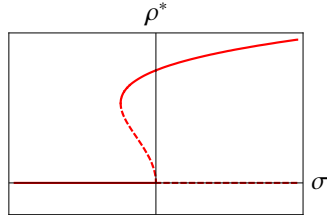


FIGURE II.11 – **Bifurcation de Andronov-Hopf souscritique.** Module de l'amplitude des oscillations, solution de (II.17).

Il est instructif de tracer dans les différents cas l'évolution du portrait de phase avec σ . Posant $z = x + iy$, on convertit le système (II.17) en

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma x - \omega y - (x^2 + y^2)(g_r x - g_i y) - (x^2 + y^2)^2(h_r x - h_i y) \\ \dot{y} = \omega x + \sigma y - (x^2 + y^2)(g_i x + g_r y) - (x^2 + y^2)^2(h_i x + h_r y) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

On garde les termes d'ordre 5 même dans le cas surcritique où ils ne modifient pas qualitativement la dynamique. On choisit (arbitrairement) $\omega = 1$, $g_i = 0$, $h_r = 1$ et $h_i = 0$. Les résultats pour le cas surcritique sont donnés Fig. II.12, et dans le cas souscritique Fig. II.13.

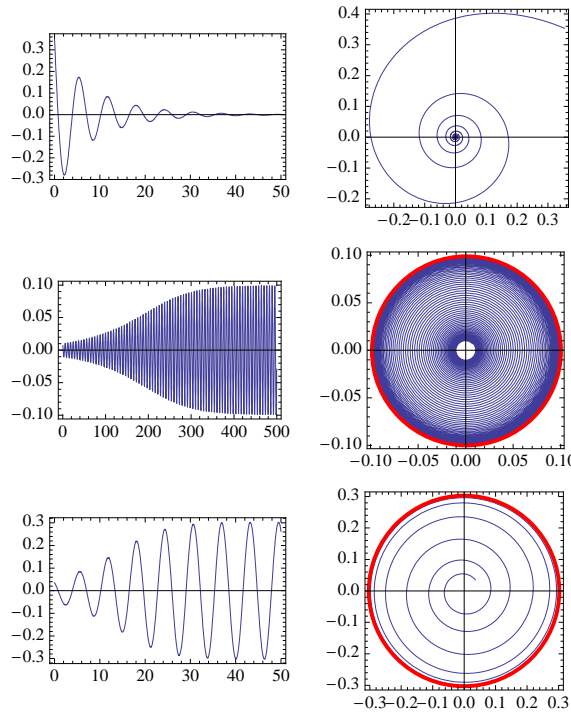


FIGURE II.12 – **Bifurcation de Andronov-Hopf surcritique.** Le paramètre $g_r = +1$, σ croît de haut en bas. On représente à gauche $x(t)$ et à droite le portrait de phase après intégration numérique de (II.18). En haut $\sigma = -0.1$, le point fixe $x^* = 0$ est stable. Dessous $\sigma = +0.01$. En rouge on trace le cycle limite de rayon $\left(\frac{-|g_r| \pm \sqrt{g_r^2 + 4\sigma h_r}}{2h_r}\right)^{1/2} \approx 0.1$ avec nos paramètres. La dynamique est très lente (par rapport à la période propre d'oscillations, peu différente de 2π). En bas $\sigma = +0.1$. Le rayon du cycle limite vaut à peu près 0.3, la dynamique est bien plus rapide. L'amplitude des oscillations est continue en $\sigma = 0$, et croît comme $\sqrt{\sigma}$.

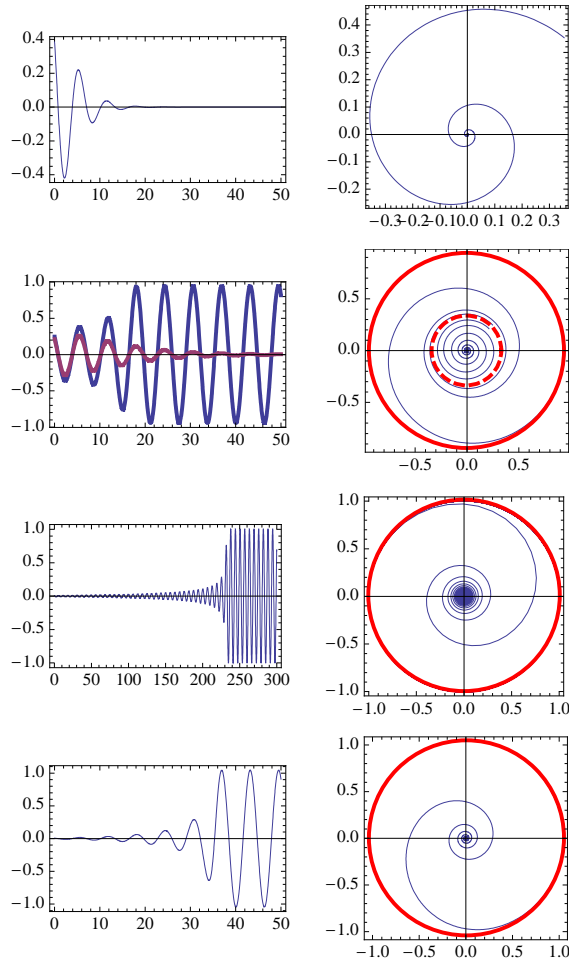


FIGURE II.13 – **Bifurcation de Andronov-Hopf souscritique.** Le paramètre $g_r = -1$, σ croît de haut en bas de la figure. On représente à gauche $x(t)$ et à droite le portrait de phase après intégration numérique de (II.18). En haut $\sigma = -0.3 < -g_r^2/(4h_r)$, le point fixe $x^* = 0$ est stable. Dessous $-g_r^2/(4h_r) < \sigma = -0.1$. Il y a deux cycles limites, l'un instable de rayon ρ_- qui vaut 0.34 avec nos paramètres, l'autre stable ρ_+ de rayon 0.99. Une condition initiale $(0.3, 0.3)/\sqrt{2}$ est à l'intérieur du cycle instable et converge vers le point fixe stable $x^* = 0$ (à gauche, courbe rose). Une condition initiale $(0.35, 0.35)/\sqrt{2}$ est à l'extérieur du cycle instable et converge vers le cycle limite stable ρ_+ (à gauche, oscillations en bleu). Ensuite $\sigma = +0.01$, avec comme condition initiale $(0.01, 0.01)/\sqrt{2}$. Le point fixe est instable, et les oscillations acquièrent l'amplitude finie $\rho_+ \approx 1$ avec notre choix de paramètre. Notez bien le temps très long (par rapport à la période propre) d'établissement des oscillations. En bas $\sigma = +0.1$, avec comme condition initiale $(0.01, 0.01)/\sqrt{2}$. Les oscillations acquièrent une amplitude finie peu différente de la précédente, mais bien plus rapidement.

A—Analogies avec les transitions de phase.

Il existe une analogie très forte entre la théorie des bifurcations et la théorie de Landau des transitions de phase du second ordre, dont un exemple classique est la transition para-ferromagnétique. À basse température le matériau présente une aimantation moyenne spontanée $M \neq 0$. Au dessus de la température critique T_C , l'aimantation s'annule en l'absence de champ magnétique extérieur.

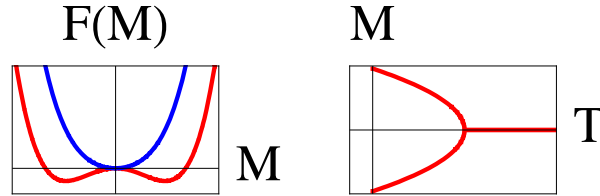


FIGURE II.14 – (gauche) En bleu (resp. en rouge), énergie libre de Landau au dessus (resp. au dessous) de la température critique T_C , en fonction de l'aimantation M . (droite) Solution stable au sens thermodynamique pour l'aimantation en fonction de la température, dans la théorie de Landau. À comparer à la figure II.5.

Dans le modèle de Landau, l'énergie libre du milieu magnétique est écrite (dans les "bonnes" unités !)

$$F = \frac{1}{2} \frac{T - T_C}{T_C} M^2 + \frac{1}{4} M^4.$$

L'aimantation M minimise cette énergie libre, ce qui conduit aux solutions

$$\frac{\partial F}{\partial M} = 0, \quad M = 0, M = \pm \sqrt{\frac{T_C - T}{T_C}}$$

Si on représente $F(M)$, on voit que $M = 0$ est le minimum (resp. le maximum) en dessus (resp. en dessous) de T_C . La valeur de l'aimantation en fonction de la température est alors tout à fait similaire à celle d'une position d'équilibre en fonction de l'écart au seuil de bifurcation (voir Fig. II.14). Ainsi le paramètre μ est analogue à la température réduite $(T - T_C)/T_C$, la position d'équilibre x^* est analogue au paramètre d'ordre de la transition qui est ici l'aimantation.

B—Forme normale de la bifurcation de Hopf.

Considérons un système dynamique réel à deux dimensions,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

où les valeurs propres de la matrice A sont complexes conjuguées $\lambda, \bar{\lambda}$, et de partie réelle nulle au point de bifurcation. Soit $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^2$ le vecteur propre complexe associé à λ , et $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^2$ le vecteur propre de la transposée A^T associé à $\bar{\lambda}$. Tout vecteur $\mathbf{V} = (x, y)$ peut être représenté selon des variables complexes z, \bar{z} selon la formule

$$\mathbf{V} = z\mathbf{q} + \bar{z}\bar{\mathbf{q}},$$

pour

$$z = \langle \mathbf{p}, \mathbf{V} \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire sur \mathbb{C}^2 . Ceci vient de la théorie de la diagonalisation.

Si l'on développe les termes non linéaires $f(x, y)$ et $g(x, y)$ jusqu'à l'ordre 3, et qu'on exprime x et y en fonction de z et \bar{z} , on arrive donc à une équation du type

$$\dot{z} = i\Omega z + a_1 z^2 + a_2 z \bar{z} + a_3 \bar{z}^2 + b_1 z^3 + b_2 z^2 \bar{z} + b_3 z \bar{z}^2 + b_4 \bar{z}^3 + \dots$$

Le résultat remarquable est qu'il est possible, par des changements de variable proches de l'identité, d'éliminer tous les termes non linéaires à l'exception du terme en $z^2 \bar{z}$. Plus précisément on pose

$$\begin{aligned} z &= w + \alpha_1 w^2 + \alpha_2 w \bar{w} + \alpha_3 \bar{w}^2 \\ w &= z - \alpha_1 z^2 - \alpha_2 z \bar{z} - \alpha_3 \bar{z}^2 + O(|z|^3) \end{aligned}$$

Vous pouvez calculer les α_i permettant d'éliminer les termes quadratiques du développement. Attention : ce premier changement de variable modifie les b_i !

Ensuite, on fait un nouveau changement de variable,

$$\begin{aligned} w &= Z + \beta_1 Z^3 + \beta_2 Z^2 \bar{Z} + \beta_3 Z \bar{Z}^2 + \beta_4 \bar{Z}^3 \\ Z &= w - \beta_1 w^3 - \beta_2 w^2 \bar{w} - \beta_3 w \bar{w}^2 - \beta_4 \bar{w}^3 + O(|z|^4) \end{aligned}$$

On simplifie alors le développement en

$$\dot{Z} = i\Omega Z + \tilde{b}_2 Z^2 \bar{Z}, \quad \tilde{b}_2 = b_2 + \frac{2|a_3|^2}{3i\Omega} - \frac{a_2 a_1}{i\Omega} + \frac{|a_2|^2}{i\Omega}.$$

Vous trouverez les détails de ce calcul dans [Kus95], et une expression de la forme normale dans les variables (x, y) dans [GH83].

Bibliographie

- [Arn80] V. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Mir, 1980.
- [Arn88] V. Arnold. *Equations différentielles ordinaires*. Mir, 1988.
- [GH83] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, 1983.
- [Kus95] Y.A. Kusnetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer-Verlag, 1995.

Chapitre III

Au delà des oscillations périodiques...

III.1 Section de Poincaré.

III.1.1 Application de premier retour

Nous avons vu au chapitre précédent comment une position d'équilibre pouvait se déstabiliser au profit d'un régime d'oscillations, par une bifurcation de Hopf. Les trajectoires convergent alors dans l'espace de phase vers un cycle limite. La question qui surgit naturellement est celle de l'évolution de ce cycle limite quand on continue à faire varier les paramètres. C'est un problème bien plus difficile a priori que celui de l'évolution d'un point fixe, car un cycle limite occupe toute une région de l'espace de phase et semble requérir une approche globale. Une méthode due à Poincaré permet de ramener ce problème à une analyse bien plus simple. Elle consiste à définir un plan¹, appelé *section de Poincaré*, dont on requiert qu'il intersecte le cycle limite *transversalement* (qu'il ne soit pas tangent), comme sur la Fig. III.1.

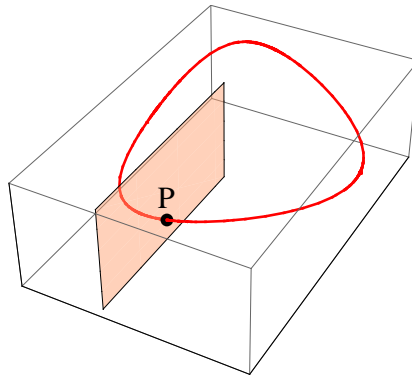


FIGURE III.1 – Intersection transversale entre un cycle limite (en rouge) et un plan de Poincaré dans un espace de phase tridimensionnel.

Le plan (II) coupe le cycle limite en un point P . Si T est la période d'oscillation du système, une trajectoire dont la condition initiale est sur le cycle limite passe en P à des instants $t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, \text{etc.}$ Prenons comme condition initiale un point M_1 voisin de P . Comme les solutions d'un système dynamique dépendent de façon continue des conditions initiales, après

1. Pour avoir une évolution intéressante d'un cycle limite, il faut que l'espace de phase soit au moins de dimension 3. Le cycle limite est alors contenu dans une surface (pas nécessairement plane) et la section de Poincaré est un plan. Dans le cas général l'espace de phase est \mathbb{R}^n , le cycle limite une courbe de dimension 1, et la section de Poincaré un hyperplan de dimension $n - 1$.

un temps proche de T la trajectoire coupe le plan (Π) (grâce à la condition de transversalité) en un point M_2 voisin de P (par continuité). On construit ainsi l'application de premier retour $\Phi(\cdot)$ telle que :

$$\Phi : \begin{cases} (\Pi) & \longrightarrow & (\Pi) \\ M_1 & \longrightarrow & M_2 = \Phi(M_1) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Pendant un temps fini (et d'autant plus long que le point M_1 aura été choisi plus proche de P), il existera dans le plan (Π) une suite de points $M_{n+1} = \Phi(M_n)$. Le point P lui-même est par construction un point fixe de $\Phi : P = \Phi(P)$. Si la suite M_n converge vers (resp. diverge de) P le point est stable (resp. instable). Discuter la stabilité de l'application de premier retour en son point fixe P revient à discuter celle du cycle limite lui-même. Une étude portant a priori sur l'évolution *globale* d'une courbe fermée est ainsi réduite à l'étude *locale* des points fixes des applications du plan dans lui-même.

Notons $P(x_1^0, x_2^0)$ les coordonnées de P dans (Π) , et prenons un point $M(x_1^0 + \epsilon_1, x_2^0 + \epsilon_2)$ avec $|\epsilon_i| \ll 1$, dans le plan (Π) et très proche de P . Alors

$$M_2 \equiv \Phi(M_1) = \Phi(P) + \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \Big|_P & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \Big|_P \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \Big|_P & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \Big|_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} \equiv P + [J_P(\Phi)]\epsilon \quad (\text{III.2})$$

où $[J_P(\Phi)]$ est la matrice Jacobienne de Φ calculée au point P . On trouve alors facilement

$$M_n = P + [J_P(\Phi)]^n \epsilon. \quad (\text{III.3})$$

Si toutes les valeurs propres de $[J_P(\Phi)]$ sont de module inférieur à 1, le point P est un point fixe stable de Φ et le cycle limite est stable. Si une des valeurs propres a un module strictement supérieur à 1, P est un point fixe instable et le cycle limite est instable. Une *bifurcation* est donc possible lorsqu'une des valeurs propres traverse le cercle unité². Nous allons étudier trois cas, le cas générique et les deux *résonances fortes* $\lambda = \pm 1$ (voir Fig. III.2).

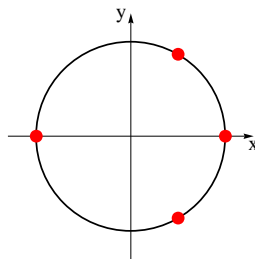


FIGURE III.2 – Valeur propre traversant le cercle unité : Résonances fortes $\lambda = \pm 1$, cas générique $\lambda = e^{\pm i\theta}$ pour $\theta \neq p\pi$, $\theta \neq p\pi/3$ et $\theta \neq p\pi/4$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

III.1.2 Forme normale de la bifurcation

Prenons l'origine de (Π) en P , et passons en coordonnées complexes dans le plan. La régularité du système dynamique sous-jacent implique celle de l'application Φ , que l'on peut

2. Dans les systèmes dynamiques continus, l'équivalent était la perte d'hyperbolicité d'un point fixe, soit l'annulation de la partie réelle d'une valeur propre.

développer au voisinage de P , c'est-à-dire au voisinage de l'origine ($|Z| \ll 1$) :

$$Z_{n+1} = \lambda Z_n + \sum_{m \geq 2} \left(\sum_{0 \leq j \leq m} a_{mj} Z_n^{m-j} \bar{Z}_n^j \right) \quad (\text{III.4})$$

avec par hypothèse $|\lambda| = 1$.

La recherche de la forme normale associée à une valeur propre λ consiste à voir quels termes de ce développement peuvent être éliminés par un changement de variable *proche de l'identité*. Le principe du calcul est de procéder ordre par ordre, en commençant donc par les termes quadratiques. Exprimons les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles :

$$Z = z + \sum_{0 \leq j \leq 2} c_{2j} z^{2-j} \bar{z}^j. \quad (\text{III.5})$$

En injectant cette expression dans (III.4) (limité aux termes du deuxième ordre), et en négligeant systématiquement tous les termes d'ordre supérieur à 2, on trouve

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= z_{n+1} + \sum_{0 \leq j \leq 2} c_{2j} z_{n+1}^{2-j} \bar{z}_{n+1}^j \\ &= z_{n+1} + \sum_{0 \leq j \leq 2} c_{2j} \lambda^{2-j} z_n^{2-j} \bar{\lambda}^j \bar{z}_n^j + O(|z_n|^3) \\ &= \lambda \left(z_n + \sum_{0 \leq j \leq 2} c_{2j} z_n^{2-j} \bar{z}_n^j \right) + \sum_{0 \leq j \leq 2} a_{2j} z_n^{m-j} \bar{z}_n^j + O(|z_n|^3), \end{aligned}$$

où dans la dernière ligne on a utilisé (III.4) exprimée dans la variable z_n . On en déduit

$$z_{n+1} = \lambda z_n + \sum_{0 \leq j \leq 2} \left[(\lambda - \lambda^{2-j} \bar{\lambda}^j) c_{2j} + a_{2j} \right] z_n^{2-j} \bar{z}_n^j + O(|z_n|^3). \quad (\text{III.6})$$

Si et seulement si le coefficient devant les c_{2j} est non nul, il est possible d'éliminer le terme quadratique par le choix

$$c_{2j} = - \frac{a_{2j}}{\lambda - \lambda^{2-j} \bar{\lambda}^j}.$$

Les cas problématiques apparaissent pour les termes $j = 0$ et $j = 1$, qui ne peuvent être éliminés si $\lambda = 1$. Ce *cas de résonance forte* sera traité à part (voir section III.2.2). Pour $j = 2$, il peut y avoir un problème si $\lambda = \bar{\lambda}^2$ soit $\lambda^3 = 1$. Le cas où λ est une racine cubique de l'unité est un autre cas de résonance forte qui ne sera pas discuté.

Une fois les termes quadratiques éliminés, on réitère le procédé à l'ordre suivant. On fait un nouveau changement de variables

$$z = w + \sum_{0 \leq j \leq 3} c_{3j} w^{3-j} \bar{w}^j. \quad (\text{III.7})$$

L'équation (III.6) se trouve remplacée par

$$w_{n+1} = \lambda w_n + \sum_{0 \leq j \leq 3} \left[(\lambda - \lambda^{3-j} \bar{\lambda}^j) c_{3j} + a'_{3j} \right] w_n^{3-j} \bar{w}_n^j + O(|w_n|^4). \quad (\text{III.8})$$

Remarque importante !

Le coefficient a'_{3j} n'est pas identique à a_{3j} du développement initial (III.4). Le calcul que nous venons de faire ne donne pas la valeur du coefficient a dans la forme normale (III.9), mais juste

la nature du terme qui reste. Si on veut faire complètement le calcul, il faut lorsqu'on fait le changement de variable à l'ordre 2 calculer les termes d'ordre 3 consécutifs à ce changement de variable. Les coefficients initiaux a_{3j} sont changés en des coefficients a'_{3j} qui dépendent de λ et des coefficients a_{2j} . Nous ne donnerons pas leur expression dont nous n'aurons pas besoin. Le calcul complet est donné dans [1].

Pour $j = 0$, on peut avoir un problème si $\lambda^2 = 1$ soit $\lambda = -1$ (outre $\lambda = 1$), nouveau cas de résonance forte qui sera traité ultérieurement (voir section III.2.3). La même résonance apparaît pour $j = 2$, et pour $j = 3$ on peut avoir un problème si λ est une racine quatrième de l'unité, cas que nous n'étudierons pas. Le cas nouveau est pour $j = 1$. En effet le coefficient de c_{31} est $\lambda - \lambda^2\bar{\lambda} = 0$ car par hypothèse $|\lambda| = 1$! Il n'est donc pas possible d'éliminer le terme correspondant, et en ne gardant que le terme nonlinéaire dominant on aboutit à la forme normale

$$w_{n+1} = \lambda w_n + a w_n^2 \bar{w}_n, \quad (\text{III.9})$$

qui constitue le cas générique de la bifurcation des cycles limites.

III.2 Bifurcations des cycles limites

III.2.1 Bifurcation de Hopf secondaire

Nous allons commencer par le cas général $\lambda \neq \pm 1$, $\lambda^3 \neq 1$ et $\lambda^4 \neq 1$. Nous nous plaçons au voisinage du point fixe, et au voisinage du point de bifurcation, $\lambda = (1 + \alpha)e^{i\theta}$ avec α réel tel que $|\alpha| \ll 1$. Le paramètre de la bifurcation est donc α . Il est commode de poser $a = d e^{i\theta}$ avec $d = d_r + i d_i$. L'équation (III.9) s'écrit donc (en reprenant la variable z)

$$z_{n+1} = e^{i\theta} z_n (1 + \alpha + d|z_n|^2) \quad (\text{III.10})$$

En posant $z = \rho e^{i\phi}$, on trouve pour le module l'équation

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &= \rho_n \left| 1 + \alpha + d \rho_n^2 \right| = \rho_n (1 + \alpha) \left(1 + \frac{2d_r}{1 + \alpha} \rho_n^2 + \frac{|d|^2}{(1 + \alpha)^2} \rho_n^4 \right)^{1/2} \\ \rho_{n+1} &= \rho_n (1 + \alpha + d_r \rho_n^2) + O(\rho_n^4) \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Par ailleurs, la seule correction possible provenant du terme en $d_i |z_n|^2$, la phase vérifie

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \theta + O(\rho_n^2) \quad (\text{III.12})$$

Pour le module, les points fixes sont $\rho^* = 0$, stable si $\alpha \leq 0$, et $\rho^* = \sqrt{-\alpha/d_r}$. Supposons $d_r < 0$; la solution existe pour $\alpha \geq 0$. L'évolution d'une petite perturbation $\rho_n = \rho^* + \epsilon_n$ avec $|\epsilon_n| \ll 1$ est donnée par (III.11),

$$\begin{aligned} \rho^* + \epsilon_{n+1} &= (\rho^* + \epsilon_n) (1 + \alpha + d_r \rho^{*2} + 2d_r \rho^* \epsilon_n) \\ &= \rho^* (1 + \alpha + d_r \rho^{*2}) + \epsilon_n (1 + \alpha + 3d_r \rho^{*2}) \\ \epsilon_{n+1} &= (1 - 2\alpha) \epsilon_n \end{aligned}$$

qui montre que la solution bifurquée est stable lorsque $\alpha > 0$. Le cas $d_r < 0$ correspond à la bifurcation surcritique; nous ne referons pas les calculs dans le cas souscritique.

Le point fixe de (II) bifurque vers un cycle limite de rayon ρ^* dans (II), il s'agit donc d'une *bifurcation de Hopf secondaire*, aussi appelée *bifurcation de Neimark-Sacker*. Dans le plan (II), la représentation graphique des z_n est illustrée par la Fig. III.3.

Le cercle dans le plan (II) est l'intersection de ce plan avec l'attracteur du système dynamique. Les trajectoires sont donc sur un *tore* \mathbb{T}^2 . Lorsque $\theta/(2\pi)$ est irrationnel, elles sont denses sur le tore, et les points d'intersection avec (II) denses dans le cercle de rayon $\sqrt{\alpha/|d_r|}$. Lorsque $\theta/(2\pi) = p/q$ où p et q sont entiers, l'attracteur est une trajectoire fermée sur le tore, avec p tours le long du cercle limite initial et q tours effectués dans la direction transverse. Expérimentalement, un cycle limite correspond à un mouvement oscillant à une fréquence f_1 , et la rotation autour du tore à l'apparition d'une autre fréquence f_2 . Un spectre en fréquence peut donc contenir des pics à ces fréquences, et toutes leurs combinaisons linéaires. Nous verrons une illustration expérimentale au § III.3.3.

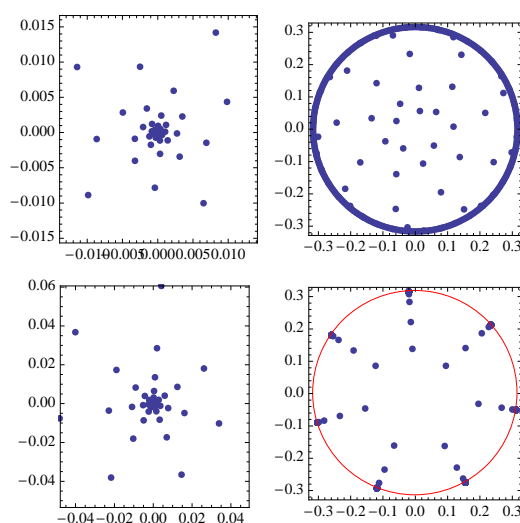


FIGURE III.3 – **Bifurcation d'un cycle limite vers un tore.** Représentation des itérés successifs de la fonction (III.10), pour $d = -1$. Le point initial est aléatoire, la calcul utilise la fonction *Mathematica Nest[f,x,n]*. De gauche à droite et de haut en bas : $\alpha = -0.1$, le point fixe est stable ; $\alpha = +0.1$, $\theta = \sqrt{2}$ est incommensurable avec 2π , le point fixe est instable et les points M_n se répartissent de façon dense sur le cercle limite de (II) ; $\alpha = -0.1$ et $\theta = 2\pi/7$, le point fixe est stable et la périodicité bien visible ; $\alpha = +0.1$ et $\theta = 2\pi/7$, le point fixe est instable et les points se répartissent sur le cycle limite avec la périodicité 7, qui ne correspond pas à une résonance forte.

III.2.2 Résonance forte. Valeur propre $\lambda = 1$

Dans cette section et la suivante, la valeur propre est réelle et il est très maladroit de calculer les formes normales en variables complexes. Je ne refais pas les calculs, ils sont parfaitement clairs et explicites (et sans grande difficulté) dans [1].

Lorsque $\lambda = 1$, la forme normale fait intervenir une seule variable réelle et s'écrit ([1] § 4.3)

$$X_{n+1} = \beta + X_n \pm X_n^2. \quad (\text{III.13})$$

Les calculs sont les mêmes que pour la bifurcation noeud-col des systèmes continus. Avec le signe "+", les points fixes sont $X^* = \pm\sqrt{-\beta}$. En posant $X_n = X^* + \epsilon_n$, on trouve

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n \left(1 \pm 2\sqrt{-\beta} \right),$$

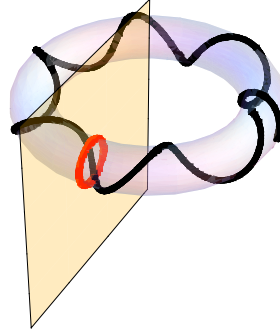


FIGURE III.4 – Trajectoire dans l’espace de phase sur un tore \mathbb{T}^2 . Les deux fréquences de rotation sont dans un rapport irrationnel, donc la section de Poincaré (en rouge) est une courbe fermée.

montrant que $+\sqrt{-\beta}$ est instable et $-\sqrt{-\beta}$ est stable. Pour $\beta \leq 0$ il existe dans l’espace de phase deux cycles limites, dont l’un est instable, qui se confondent lorsque $\beta = 0$.

III.2.3 Bifurcation de doublement de période. $\lambda = -1$

Pour $\lambda = -1$, la forme normale est ([1] § 4.5)

$$X_{n+1} = f(X_n) \equiv -(1 + \beta)X_n \pm X_n^3. \quad (\text{III.14})$$

Cette bifurcation correspond à un scénario de transition vers le chaos (voir § III.3.4), et sera vue en détail en TP³.

Supposons que le signe soit ”+” dans (III.14). Il y a un point fixe évident $x^* = 0$, stable si $\beta \leq 0$ et instable sinon. Par contre, il n’y a aucun autre point fixe au voisinage de l’origine. Lorsque $\beta > 0$, les itérés alternent entre les deux cotés de l’origine. Pour savoir si on s’en approche ou si l’on s’en éloigne, il faut étudier le second itéré d’un point, $X_{n+2} = f(f(X_n)) \equiv f \circ f(X_n)$.

$$\begin{aligned} f \circ f(X) &= -(1 + \beta)[-(1 + \beta)X + X^3] + [-(1 + \beta)X + X^3]^3 \\ &= (1 + \beta)^2 X - (1 + \beta)(2 + 2\beta + \beta^2)X^3 + O(X^5) \end{aligned}$$

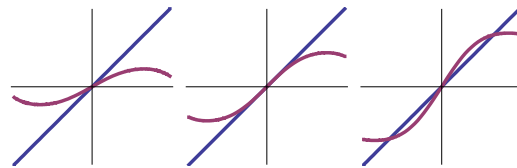


FIGURE III.5 – Tracé de $f \circ f$ avec la première bissectrice. Leurs intersections définissent les points fixes. De gauche à droite $\beta = -0.25$, 0 et $+0.25$.

La fonction $f \circ f$ admet alors deux points fixes, $X^* = 0$ qui est instable pour $\beta > 0$, et $X^* = \pm\sqrt{\beta} + O(\beta)$. Une perturbation ϵ_n évolue selon

$$\begin{aligned} \pm X^* + \epsilon_{n+1} &= (1 + \beta)^2(\pm X^* + \epsilon_n) - (1 + \beta)(2 + 2\beta + \beta^2)(\pm X^{*3} + X^{*2}\epsilon_n) \\ \epsilon_{n+1} &= (1 - 3\beta^2)\epsilon_n, \end{aligned}$$

qui montre que l’on a un point fixe stable de $f \circ f$ dont le tracé Fig. III.5 illustre graphiquement ce résultat. Il est facile de tracer les itérés successifs par la fonction f , en utilisant les deux bissectrices (Fig. III.6). Il apparaît un cycle de période 2.

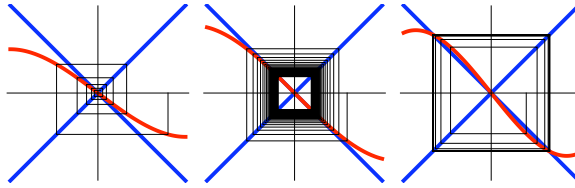


FIGURE III.6 – Itérés successifs de $f(x)$ pour, de gauche à droite, $\beta = -0.25$, 0 et $+0.25$. La convergence est très lente (algébrique et non exponentielle) pour $\beta = 0$; un cycle de période 2 apparaît après la bifurcation.

Dans la section de Poincaré (II), les abscisses des points d'intersection entre la section et la trajectoire dans l'espace de phase sont de signe alternativement positif et négatif. Comme deux trajectoires ne peuvent pas se croiser dans l'espace de phase, du fait du théorème d'unicité, il est impossible que le cycle limite appartienne à une surface orientable. Il doit nécessairement s'inscrire dans une surface présentant une torsion, c'est-à-dire une *bande de Moebius*⁴, Fig. III.7. Elle ne peut exister qu'en dimension 3, qui est donc la dimension minimale de l'espace de phase nécessaire à l'apparition du chaos (voir § III.3.4). La trajectoire s'enroule autour au cycle limite (avant bifurcation) d'un tour dans le temps mis pour parcourir deux fois le cycle : il s'agit d'une résonance à fréquence moitié.

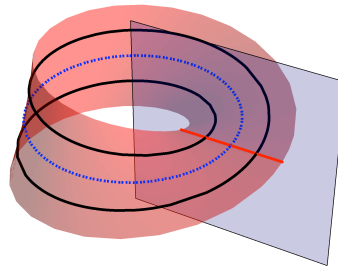


FIGURE III.7 – Bifurcation sous-harmonique d'un cycle limite. Après bifurcation, le cycle limite de période double est contenu dans une surface avec torsion, telle qu'une bande de Moebius.

III.2.4 Un premier bilan...

Si l'on connaît *a priori* l'expression du système dynamique, il est très peu probable qu'il existe une expression analytique de l'application de premier retour (le problème est, en gros, aussi difficile que l'intégration du système dynamique lui-même). Cependant, nous avons pu donner la liste complète des évolutions possibles d'un cycle limite, simplement en introduisant cette notion d'application de premier retour :

- Bifurcation de Neimark-Sacker, oscillations pseudo-périodique.
- Résonance forte $\lambda = 1$, collapse de deux cycles limites (un stable, un instable).

3. En TP, vous étudierez l'application logistique $X_{n+1} = 4rX_n(1 - X_n)$. Un calcul simple permet d'éliminer le terme quadratique, et d'aboutir à la forme normale (III.14).

4. Pour construire cette surface, prenez une longue bande de papier et collez les deux extrémités. Si vous ne tordez pas la bande, vous obtenez un cylindre, surface orientable avec un intérieur et un extérieur. Avec une torsion d'un demi-tour autour de l'axe de la bande, vous obtenez une bande de Moebius qui n'a pas d'intérieur.

- Résonance forte $\lambda = -1$, doublement de période.
- Résonances fortes $\lambda^3 = 1$ et $\lambda^4 = 1$ (voir [2])

et c'est tout !

III.3 Scénarios de transition vers le chaos

III.3.1 Chaos déterministe

Notion d'attracteur étrange.

Cette notion concerne les *systèmes dynamiques dissipatifs*. Ces systèmes vérifient

$$(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\mathbf{x}) < 0. \quad (\text{III.15})$$

Comme exemples on peut citer les systèmes dynamiques tirés de problèmes hydrodynamiques, de problèmes de circuits électriques, décrivant la cinétique de réactions chimiques, ou la dynamique de populations en Biologie. Les problèmes Hamiltoniens sont, par contre, exclus de ce cadre puisque ils conservent les volumes dans l'espace des phases.

Au système dynamique on associe un *flot* dans l'espace de phase, soit l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}_0, t) & \longrightarrow \phi(\mathbf{x}_0, t) \end{cases} \quad \text{solution de (III.15) avec } \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0. \quad (\text{III.16})$$

Supposons qu'il existe un volume $V \subset \mathbb{R}^n$ de l'espace de phase tel que, si $\mathbf{x}_0 \in V$ alors $\phi(\mathbf{x}_0, t) \in V$ pour tout temps $t > 0$. Du fait de la dissipation, l'application ϕ réduit les volumes, et pour $t \rightarrow \infty$ l'ensemble V est réduit à un ensemble $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(V, t) = W$ qui est donc de volume nul. Toute condition initiale dans V approche donc W lorsque $t \rightarrow \infty$. L'ensemble W est appelé un *attracteur pour le flot* ϕ . Il est aussi invariant pour le flot, $\phi(W, t) = W$. On définit son *bassin d'attraction* comme l'ensemble des points \mathbf{x}_0 tels que $\phi(\mathbf{x}_0, t)$ approche W lorsque $t \rightarrow \infty$ (un flot pouvant avoir plusieurs attracteurs, chacun d'entre eux avec son bassin d'attraction).

Nous avons déjà vu deux exemples simples d'attracteurs : les points fixes asymptotiquement stables (de dimension 0 dans un espace de phase au moins de dimension 1), et les cycles limites (de dimension 1 dans un espace de phase au moins de dimension 2), auxquels nous pouvons ajouter le tore \mathbb{T}^2 (de dimension 2 dans un espace de phase au moins de dimension 3) vu au § III.2.1. Tous ces attracteurs sont bien de volume nul respectivement à l'espace de phase dans lequel ils sont plongés.

Qu'un attracteur ait un volume nul ne signifie nullement qu'il a une longueur nulle ! Par conséquent, bien que tous les points de V convergent dans le même attracteur W , il peut se trouver que des points arbitrairement proches dans V se trouvent macroscopiquement distants dans W au bout d'un temps suffisamment long. Cette propriété est appelée *sensibilité aux conditions initiales*. Un attracteur possédant cette propriété (ce qui n'est de façon évidente⁵ pas le cas d'un point ou d'un cycle) est appelé un *attracteur étrange*.

Il n'est pas question, dans ce cours d'introduction, d'entreprendre une étude complète de ces objets. Nous allons voir l'exemple de l'attracteur de Hénon. Il correspond à l'application du plan

$$\begin{cases} X_{n+1} & = Y_n + 1 - \alpha X_n^2, \\ Y_{n+1} & = \beta X_n. \end{cases} \quad \text{de Jacobien} \quad \begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = -\beta \quad (\text{III.17})$$

5. C'est nettement moins évident pour le tore \mathbb{T}^2 . Néanmoins on peut montrer que les systèmes quasi-périodiques ne possèdent pas la propriété de sensibilité aux conditions initiales[3].

La transformation est "dissipative" (elle réduit les aires) si $|\beta| < 1$. Les figures III.8 et III.9 sont réalisées avec les valeurs $\alpha = 1.4$ et $\beta = 0.3$.

Sensibilité aux conditions initiales.

Cette propriété peut être illustrée en prenant deux conditions initiales très proches, et en regardant comment les trajectoires correspondantes s'éloignent l'une de l'autre dans l'espace de phase. L'attracteur de Hénon est tracé dans la Fig. III.8. On montre aussi la position sur l'attracteur, après 40 itérations de l'application (III.17), de deux points initialement proches à 10^{-7} près. Ces points se retrouvent largement séparés sur l'attracteur.

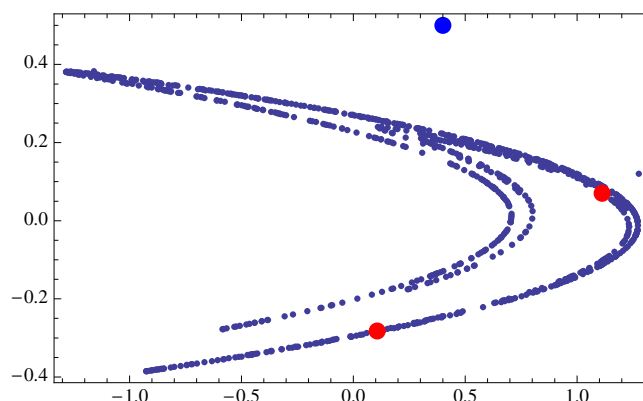


FIGURE III.8 – Attracteur de Hénon. L'attracteur est tracé pour 1000 itérations. Les points rouges représentent l'itéré 40 de deux conditions initiales séparées de 10^{-7} (les points bleus, bien entendu confondus à cette échelle). On constate que ces itérés sont séparés macroscopiquement.

La propriété de sensibilité aux conditions initiales est celle qui, intuitivement, traduit le mieux le caractère *chaotique* de la dynamique. La signature expérimentale la plus claire d'une dynamique chaotique est *l'imprédictibilité* de l'évolution d'un système par ailleurs *déterministe*, c'est-à-dire dont la loi d'évolution est connue explicitement sous forme d'un système dynamique continu ou d'une application (s'il s'agit d'une évolution en temps discret). En gros, si un système est chaotique, deux conditions initiales proches s'éloignent l'une de l'autre de façon exponentielle ; si l'on veut augmenter d'une durée Δt un temps de prédiction fiable, il faut en gros augmenter exponentiellement la précision sur la condition initiale. Comme les limites sont assez vite atteintes, on ne peut prédire l'évolution du système sur un temps très grand. Pensez à la limite de 5 jours que les prévisions météorologiques peinent à dépasser.

La Fig. III.9 illustre le fait que l'attracteur de Hénon n'est pas une courbe continue, mais a une structure discrète sous jacente. Un tel objet, de dimension intermédiaire entre celle d'un point (soit 0) et celle d'une courbe (soit 1) est appelé *fractal*. Sa dimension peut être définie de la manière suivante. On recouvre l'objet avec des boules (ici, des disques) de rayon ϵ , au nombre de $\mathcal{N}(\epsilon)$. La *dimension fractale* d_f de l'objet est alors

$$d_f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\log \mathcal{N}(\epsilon)}{\log(\epsilon^{-1})} \right]. \quad (\text{III.18})$$

Il est facile de voir qu'on trouve bien 0 pour un point isolé et 1 pour une courbe continue.

Un exemple classique de fractal est l'ensemble triadique de Cantor : on divise l'intervalle $[0, 1]$ en trois tiers, et on supprime celui du milieu, et ainsi de suite à l'infini sur chaque segment

restant. On prend à la n -ième étape $\epsilon = 1/3^n$, et il faut $\mathcal{N}(\epsilon) = 2^n$ intervalles de ce type pour recouvrir l'ensemble de Cantor. On a donc

$$d_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63,$$

effectivement intermédiaire entre la dimension du point (0) et celle de la ligne (1).

Numériquement, on peut montrer que la dimension fractale de l'attracteur de Hénon est 1.26 (intermédiaire entre la ligne et la surface). Si nous repensons à nos systèmes dynamiques continus, une application du plan peut être considérée comme une section de Poincaré de l'attracteur. Un attracteur étrange peut être vu comme ayant une section de Poincaré fractale. Rien de ce qui précède ne le démontre, bien sûr ! Je vous renvoie à la bibliographie en fin de chapitre pour plus d'informations.

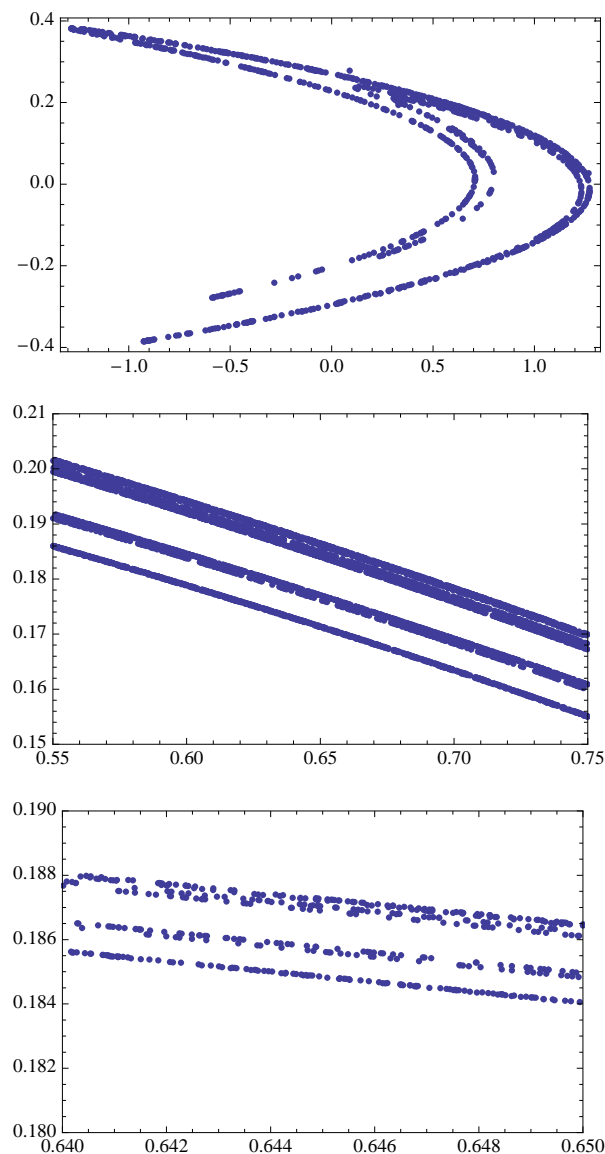


FIGURE III.9 – Attracteur de Hénon. La condition initiale est aléatoire, on propose deux zooms successifs (bien prendre garde aux coordonnées). La difficulté est que la visualisation de zones de plus en plus réduites de l'espace de phase (X, Y) nécessite d'augmenter considérablement le nombre d'itérations de l'application. De haut en bas 10^3 puis 10^5 et enfin $4 \cdot 10^5$.

III.3.2 Un système expérimental : la convection en "petite boîte"

Plutôt que de discuter abstraitement du chaos, nous allons étudier une expérience de convection. Un fluide simple (Newtonien) soumis à la gravité est chauffé par le bas. La densité d'un fluide diminuant avec la température, cette situation est instable car le fluide chaud a tendance à monter (c'est le principe de la montgolfière !). La Fig. III.10 précise la géométrie de l'expérience.

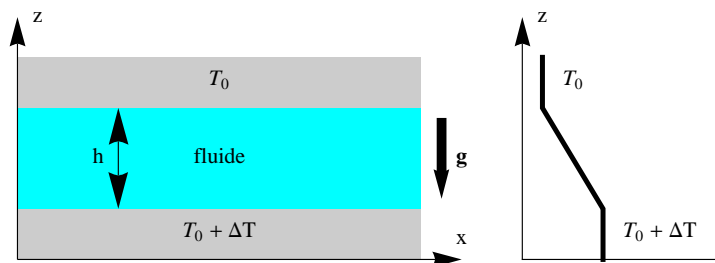


FIGURE III.10 – À droite, couche de fluide d'épaisseur h contenue entre deux plaques conductrices de la chaleur aux températures respectives $T_0 + \Delta T$ avec $\Delta T > 0$ (en bas) et T_0 en haut. À gauche, profil de température en l'absence de convection.

Lorsque ΔT est faible, il existe au sein du fluide un profil linéaire de température dû à la conduction thermique. Pour comprendre le mécanisme de l'instabilité, imaginons qu'une particule sphérique de rayon R soit déplacée vers le haut par une perturbation de vitesse δv . Sa température a tendance à s'égaliser avec celle du milieu environnant par diffusion thermique, sur un temps caractéristique $\tau_D \sim R^2/\kappa$ où κ est la diffusivité thermique du fluide. Pendant ce temps, elle s'est déplacée de $\delta z = \delta v \tau_D$, et acquiert une différence de température δT par rapport au fluide environnant,

$$\delta T \sim \delta z \frac{\partial T}{\partial z} \sim \delta v \frac{R^2}{\kappa} \frac{\Delta T}{h}.$$

Si α représente la dilatation thermique du fluide, la variation de densité $\delta \rho$ de la goutte par rapport au fluide environnant est

$$\delta \rho \sim -\rho_0 \alpha \delta T \sim -\rho_0 \alpha \delta v \frac{R^2}{\kappa} \frac{\Delta T}{h},$$

où ρ_0 est la densité du fluide à T_0 . Étant moins dense que le fluide environnant, la goutte a tendance à monter sous l'action de la force d'Archimède δF_A , qui vaut ici

$$\delta F_A = -\frac{4}{3}\pi R^3 g \delta \rho \sim \frac{4}{3}\pi \rho_0 \alpha g \delta v \frac{R^5}{\kappa} \frac{\Delta T}{h}.$$

La force antagoniste est la force de frottement visqueux $F_{visc} = -6\pi\eta R\delta v$, où η est la viscosité du fluide. L'instabilité se produit donc lorsque

$$F_A > F_{visc} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{3}\pi \rho_0 \alpha g \delta v \frac{R^5}{\kappa} \frac{\Delta T}{h} > 6\pi\eta R\delta v.$$

Bien sûr, ce calcul ne va pas nous donner de valeur numérique correcte. Il montre cependant que les grands rayons sont plus facilement déstabilisés. Si l'on prend pour R la taille maximale accessible, soit $h/2$, on trouve un critère faisant intervenir le *nombre de Rayleigh*,

$$R_a \equiv \frac{\alpha \Delta T \rho_0 g h^3}{\eta \kappa} > 72.$$

Au dessus d'une valeur critique du nombre de Rayleigh (expérimentalement, 1708 ; notre approche hyper simplifiée est numériquement peu satisfaisante ; pour une théorie complète voir [4]), la solution de fluide immobile conduisant la chaleur se déstabilise au profit d'un système de rouleaux contrarotatifs, qui transportent la chaleur par *convection* et non plus par conduction. Cette instabilité porte le nom d'*instabilité de Rayleigh-Bénard*.

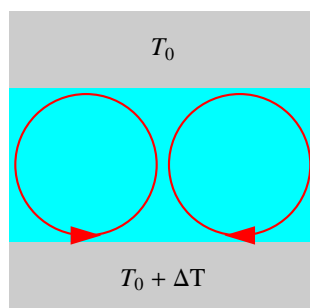


FIGURE III.11 – **Instabilité de Rayleigh-Bénard.** Au dessus du nombre de Rayleigh critique, le fluide cesse d'être au repos et se structure en rouleaux de convection contrarotatifs. Deux rouleaux constituent une configuration en "petite boîte".

En quoi cette situation peut-elle être décrite par la théorie des systèmes dynamiques ? A priori, elle relève des équations de l'hydrodynamique qui conduit à des équations aux dérivées partielles pour les variables de temps et d'espace. Mais nous avons vu que les perturbation de grande taille (de grande longueur d'onde, plus exactement) sont favorisées. Il est donc possible de se placer dans un système confiné de taille latérale du même ordre que la hauteur de la cellule, ce qu'on appelle une "petite boîte". Dans ce cas, il y a très peu de rouleaux et ceux-ci subsistent en subissant des bifurcations successives dans une large gamme de nombre de Rayleigh. Pour une boîte de longueur $2h$, profondeur h , on a juste deux rouleaux et on peut prendre comme variable dynamique l'amplitude de la vitesse de rotation d'un rouleau. On obtient un système à petit nombre de degrés de liberté qui peut être décrit par un système dynamique⁶. Le paramètre de contrôle est l'écart de température ΔT . La première instabilité, conduisant à l'apparition des rouleaux, est une bifurcation fourche car les deux sens de rotation sont équiprobables.

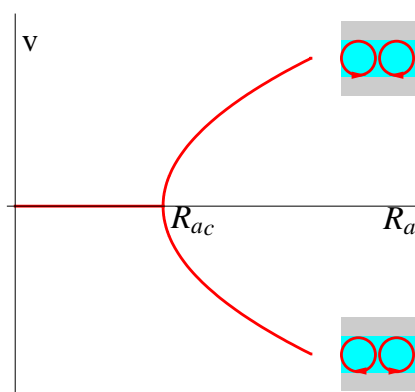


FIGURE III.12 – **Instabilité de Rayleigh-Bénard.** En petite boîte, l'apparition des rouleaux est décrite par une bifurcation fourche.

6. Le passage de l'hydrodynamique (fonctions de \mathbf{r} et t) vers un système dynamique (fonctions de t seulement) n'a cependant rien de trivial. Plus précisément, on prend des modes de Fourier du champ de vitesse. En particulier, *deux* rouleaux ne signifie nullement *deux* degrés de liberté !

III.3.3 Le scénario de Ruelle, Takens et Newhouse

Le scénario de Landau de transition vers la turbulence

L'apparition d'un comportement chaotique dans un système dynamique se traduit expérimentalement par le fait que le spectre de Fourier temporel de la grandeur que l'on mesure devient continu, sans présenter de pics séparés. Lorsque l'écoulement d'un fluide est turbulent (pensez aux volutes d'une fumée, ou à l'écoulement d'un torrent) c'est ce que l'on observe en mesurant, par exemple, la vitesse du fluide. Historiquement, l'étude des systèmes dynamiques chaotiques avait pour but de comprendre la turbulence. Ce but n'a pas été rempli, car la turbulence est un phénomène spatio-temporel qui ne se réduit pas à un système dynamique à un nombre fini de degrés de liberté. Parler de turbulence dans le cadre de ce cours n'a donc qu'une justification historique!

L'idée de Landau (voir [5], §30), pour rendre compte de l'apparition d'un spectre temporel continu, était d'imaginer une suite de bifurcations de Hopf. Pensons à la convection, système expérimental dans lequel le forçage est indépendant du temps (c'est l'écart de température ΔT). Dans une expérience typique, on augmente très lentement ΔT et on mesure la vitesse du fluide.

Partant du fluide au repos, avec un transport de la chaleur par conduction, une première bifurcation fourche conduit à des rouleaux contrarotatifs, de vitesse de rotation constante. Ensuite, après une bifurcation de Hopf, leur vitesse de rotation oscille à une certaine fréquence f_1 . Le système est nonlinéaire, donc les harmoniques de f_1 interviennent aussi. Supposons qu'une deuxième bifurcation de Hopf ait lieu, avec une fréquence f_2 . Le spectre comprend alors toutes les combinaisons $nf_1 + mf_2$ avec $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Si on imagine une suite infinie de telles bifurcations, le spectre en fréquence s'enrichit progressivement jusqu'à devenir continu.

La découverte de Ruelle et Takens

Dans deux articles désormais historiques [6, 7], D. Ruelle et F. Takens, puis S. Newhouse, ont invalidé l'idée de Landau. Si une première bifurcation de Hopf conduit à un cycle limite, la seconde conduit à un attracteur qui est un tore \mathbb{T}^2 . Une nouvelle bifurcation conduit à un tore \mathbb{T}^3 (difficile à visualiser, puisqu'il s'agit d'un tore à trois dimensions plongé dans un espace de dimension 4). Physiquement, trois fréquences non commensurables f_1 , f_2 et f_3 apparaissent dans le spectre du signal. Ce qu'ont montré ces auteurs, c'est que ce tore \mathbb{T}^3 est *structurellement instable* au profit d'un attracteur étrange. En pratique, la probabilité d'observer un tore \mathbb{T}^3 dans une expérience est nulle, et la troisième bifurcation de Hopf conduit à un comportement chaotique. Une illustration expérimentale est fournie par la Fig. III.13, tirée de [8].

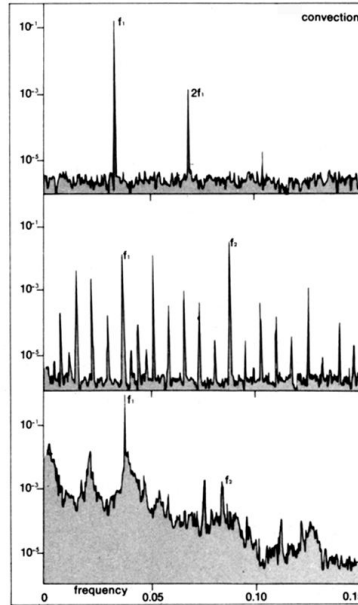


FIGURE III.13 – Spectre de fréquence pour le transport de la chaleur dans une expérience de convection. Le nombre de Rayleigh croît de haut en bas. La courbe du haut montre f_1 et deux harmoniques ($2f_1$ et $3f_1$). S’ensuit une bifurcation de Hopf secondaire, le spectre s’enrichissant des nombreux harmoniques $nf_1 + mf_2$ avec $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Enfin, le spectre devient continu.

III.3.4 La cascade sous-harmonique

Un deuxième scénario, découvert par Feigenbaum (1978), est celui de la *cascade de doublement de période*, ou *cascade sous-harmonique*. Une fois qu’un cycle limite a subi une bifurcation de doublement, ce processus se répète en présentant d’étonnantes propriétés d’échelle.

Exemple 1 : Dynamique de population

Vous verrez d’autres exemples en TP. Intéressons nous au système discret de Ricker⁷

$$X_{n+1} = \beta X_n e^{-X_n} \equiv f_R(X_n, \beta). \quad (\text{III.19})$$

Graphiquement, le point fixe de (III.19) est déterminé par l’intersection x^* du graphe de $f_R(x, \beta)$ avec la première bissectrice. Le point fixe $x^* = 0$ cesse d’être stable pour $\beta > 1$. La première bifurcation de doublement de période a lieu quand la pente $f'_R(x^*, \beta)$ vaut -1 , soit $\beta = e^2$. On étudie alors $f_R \circ f_R$, et comme le montre le graphe en bas droite de la Fig. III.14, le point fixe se déstabilise par une nouvelle bifurcation de doublement de période lorsque $(f_R \circ f_R)'(x^*) = -1$. On étudie alors le second itéré de $f_R \circ f_R$, c’est à dire le quatrième de f_R . Il se produit ainsi une « cascade » de bifurcations successives. Ce phénomène est illustré par la Fig. III.15 qui montre les cycles 1/2/4/8 du modèle de Ricker.

7. Cette idée vient de [1]. Une rapide recherche sur Internet vous montrera que ce modèle, qui décrit l’évolution d’une population de poissons, est tout sauf théorique : bien que datant de 1954, on n’a toujours pas mieux pour estimer l’évolution d’une population de poissons que de regarder où elle se situe sur la courbe de Ricker Fig. III.14!

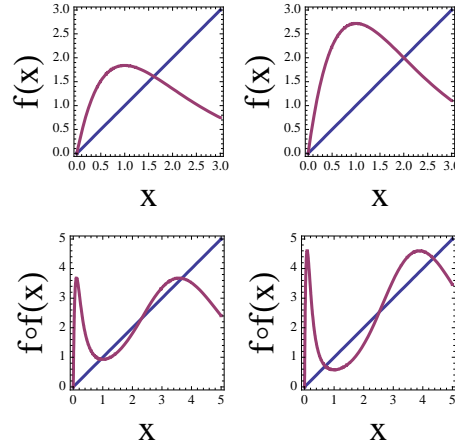


FIGURE III.14 – Tracés de la courbe de Ricker $f_R(x, \beta)$ (en haut) et de son second itéré, pour $\beta = 5$, $\beta = e^2$ (première bifurcation de doublement), $\beta = 10$ et enfin $\beta = 12.5092$ (deuxième bifurcation de doublement).

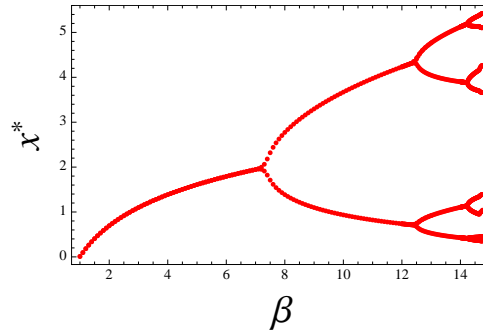


FIGURE III.15 – Les trois premières bifurcations de doublement de période dans le modèle de Ricker.

Notons $\beta_{(n)}$ la valeur du paramètre de bifurcation lors de la n -ième bifurcation, quand on passe d'une période $2^{n-1}T_0$ à la période $2^n T_0$. La suite des $\beta_{(n)}$ présente une convergence géométrique vers une valeur β_c dans le sens suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_{(n)} - \beta_{(n-1)}}{\beta_{(n+1)} - \beta_{(n)}} \equiv \delta = 4.6692 \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta^n (\beta_c - \beta_{(n)}) = A \neq 0. \quad (\text{III.20})$$

Feigenbaum a montré que la constante δ est *universelle*, c'est-à-dire indépendante du système dynamique (la constante A , par contre, ainsi bien entendu que β_c , dépend du système considéré).

Exemple 2 : Un système dynamique continu

À titre d'illustration, voici les résultats de l'intégration numérique de l'oscillateur de Duffing forcé,

$$\ddot{x} - x + x^3 + \gamma \dot{x} = d \cos(\omega t), \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{\Omega} = \omega \\ \dot{y} = x - x^3 - \gamma y + d \cos(\Omega) \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

La Fig. III.16 montre l'apparition d'un cycle limite, puis les deux régimes sous harmoniques à fréquence $f_0/2$ et $f_0/4$, et un régime chaotique au delà de la valeur d_c du paramètre de la bifurcation (qui est ici l'amplitude du forçage).

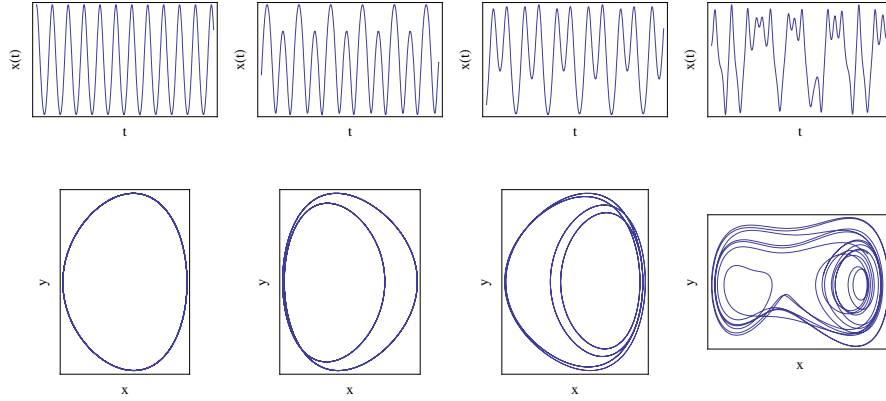


FIGURE III.16 – Simulations de (III.21), pour $\gamma = 0.1$ et $\omega = 1.4$. Le paramètre d croît de gauche à droite ($d = 0.1, 0.32, 0.338$ et 0.35). En haut on représente $x(t)$, qui montre une période T_0 , puis les sous harmoniques $2T_0$ et $4T_0$ et un signal chaotique. En bas cette situation est illustrée dans le plan (x, y) .

Illustration expérimentale

La cascade de doublement de période est désormais bien documentée expérimentalement. Une des premières observations fut l'expérience de convection de Libchaber et Maurer [9, 10]. Le paramètre de bifurcation est le nombre de Rayleigh Ra qui vaut R_c au démarrage de la convection. Ils ont estimé numériquement la constante de Feigenbaum,

$$\frac{Ra_8 - Ra_4}{Ra_{16} - Ra_8} \approx 4.4 \pm 0.1$$

en accord raisonnable avec la valeur théorique. Le signal temporel est donné dans la Fig. III.17, et l'analyse de Fourier est faite dans la Fig. III.18.

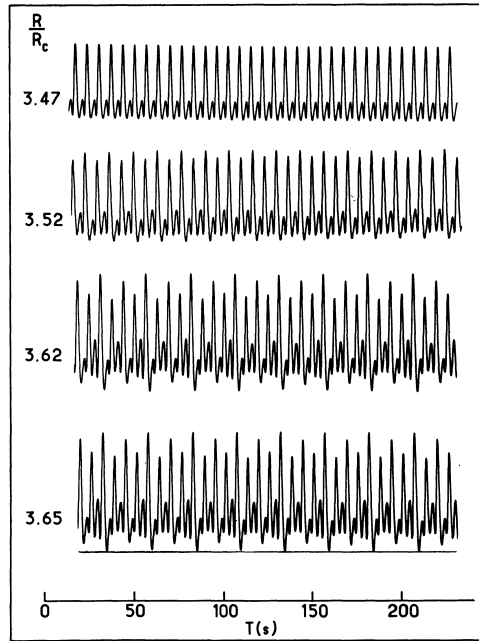


Fig. 2. — Direct time recordings of temperature for various stages of the period doubling cascade showing the onset of $f/4$ ($R/R_c = 3.52$), $f/8$ ($R/R_c = 3.62$), $f/16$ ($R/R_c = 3.65$).

FIGURE III.17 — Signal temporel. Tiré de [10].

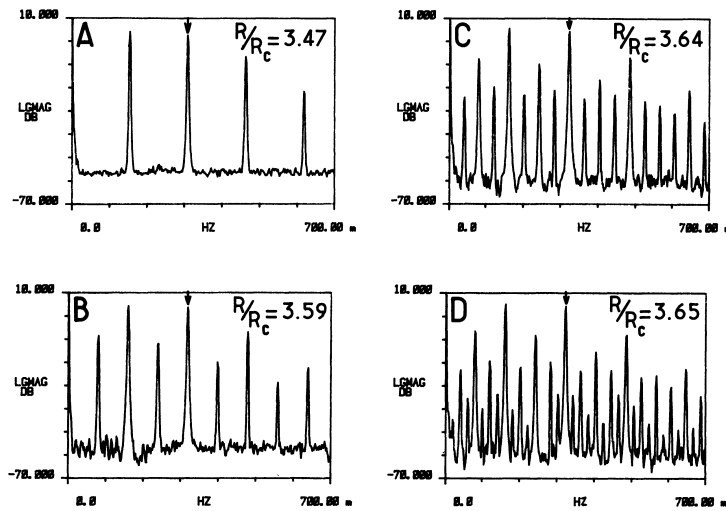


Fig. 3. — The Fourier spectrum. Arrows indicate the peak at the frequency f_1 .

FIGURE III.18 — Spectre de Fourier. Tiré de [10].

III.4 Quelques références...

Plus que les autres, ce chapitre nécessite une bibliographie commentée. Les ouvrages les plus avancés sont donnés à titre indicatif, pour une étude ultérieure. Des indications sont données sur des sujets qui n'ont pas été abordés.

Variété centrale

La notion de *variété centrale* permet de mieux comprendre les calculs de forme normale. L'idée de base est qu'en un point de bifurcation, la dynamique du système est entièrement déterminée par les valeurs propres dont la partie réelle s'annule (pour un système dynamique continu ; pour une application, il s'agit des valeurs propres de module 1). La linéarisation du système, et la diagonalisation de la matrice ainsi obtenue, conduit à distinguer un *espace vectoriel stable* (de base les vecteurs propres associés à $Re(\lambda) < 0$ ou $|\lambda| < 1$), un *espace vectoriel instable* (de base les vecteurs propres associés à $Re(\lambda) > 0$ ou $|\lambda| > 1$) et un *espace vectoriel central* (de base les vecteurs propres associés à $Re(\lambda) = 0$ ou $|\lambda| = 1$). Seuls les vecteurs propres appartenant à l'espace central ont un effet sur la dynamique.

Une *variété* est la généralisation dans le cas non linéaire de la notion d'espace vectoriel (pensez à une surface contenue dans \mathbb{R}^3 , suffisamment régulière, par rapport à un plan). La transformation proche de l'identité qui conduit à la forme normale d'une bifurcation consiste à écrire l'équation de la variété centrale à proximité de la bifurcation et au voisinage du point d'équilibre. Le sujet est bien traité par Manneville [4], ainsi que dans le très bon papier de revue de Crawford [11]. On pourra aussi consulter [1, 12], plus difficiles.

Convection

On pourra consulter un livre d'hydrodynamique, par exemple [13]. On trouvera beaucoup d'illustrations expérimentales, ainsi qu'un traitement très rigoureux du critère d'instabilité dans [4]. Beaucoup de données dans [14] aussi.

Réduction dimensionnelle

La *réduction dimensionnelle* consiste, formellement, à réduire la dynamique à la seule variété centrale. En ce sens, le sujet est abordé par [11, 1, 12]. Manneville [4] présente une approche beaucoup plus physique, avec de nombreux exemples de systèmes dynamiques de dimensionnalité réduite. Il montre aussi comment passer, par le biais d'un développement en série de Fourier, d'un problème d'hydrodynamique formellement de dimension infinie à un système dynamique à un (petit) nombre de degrés de libertés, qui sont les modes de Fourier les plus instables.

Formes normales

On trouvera des calculs de formes normales explicites dans [4, 12, 1, 11]. Par explicite, je veux dire que les coefficients de la forme normale sont exprimés en fonction des termes du développement de Taylor initial. Les calculs de [1] sont particulièrement clairs et bien détaillés. La seule référence que je connaisse qui traite des cas de résonance forte $\lambda^3 = 1$ et $\lambda^4 = 1$ est [2]... Bonne chance !

Attracteurs étranges.

Le sujet est présenté bien plus en détails dans la bibliographie, par ordre de difficulté croissante [14, 4, 12, 15]. Le très bon petit livre de mathématique de J. Buzzi [3] est une lecture conseillée. On y trouve en particulier la démonstration, assez facile à suivre, qu'un mouvement quasi-périodique est prédictible.

Scénario de Ruelle, Takens et Newhouse

Les articles originaux [6, 7] sont disponibles gratuitement, en recherchant sur les noms des auteurs, à l'URL <http://projecteuclid.org/DPubS/Repository> . Ils sont lisibles car précédés d'une introduction non technique destinée aux non-mathématiciens ! Sinon on pourra consulter, par ordre de difficulté croissant, [14, 4, 8, 1, 12]

Cascade sous harmonique

Les livres précédents abordent tous le scénario de Feigenbaum, bien plus en détail que je ne l'ai fait. Comme complément (pas particulièrement facile) on pourra consulter [16].

Bibliographie

- [1] Y.A. Kusnetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer-Verlag, 1995.
- [2] V. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Mir, 1980.
- [3] J. Buzzi. *Chaos et stabilité*. Le Pommier, 2005.
- [4] P. Manneville. *Dissipatives structures and weak turbulence*. Academic Press, 1990.
- [5] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987.
- [6] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.*, 20 :167–191, 1971.
- [7] S. Newhouse, D. Ruelle, and F. Takens. Occurrence of strange axiom a attractors near quasi periodic flows on t^m , $m \geq 3$. *Commun. Math. Phys.*, 64 :35, 1978.
- [8] J.-P. Eckmann. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Rev. Mod. Phys.*, 53 :643–654, 1981.
- [9] A. Libchaber and J. Maurer. Une expérience de Rayleigh-Bénard de géométrie réduite : multiplication, accrochage et démultiplication de fréquences. *J. de Physique (France)*, 41 :C3–51, 1980.
- [10] A. Libchaber, C. Laroche, and S. Fauve. Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement. *J. de Physique Lettres*, 43 :L–211, 1982.
- [11] J.D. Crawford. Introduction to bifurcation theory. *Rev. Mod. Phys.*, 63(4) :991, 1991.
- [12] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, 1983.
- [13] E. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. InterEditions, 1991.
- [14] P. Bergé, Y. Pomeau, and Ch. Vidal. *L'ordre dans le chaos*. Hermann, 1984.
- [15] J.-P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, 57 :617–656, 1985.
- [16] Annick Lesne. *Méthodes de renormalisation*. Eyrolles sciences, 1996.

Chapitre IV

Méthodes perturbatives

IV.1 Oscillations faiblement non linéaires

IV.1.1 Oscillations d'amplitude finie d'un pendule pesant

Revenons à un système très classique, le pendule pesant vu au § I.5.2. Nous avons calculé sa période (I.20) pour des oscillations d'amplitudes quelconques θ_m , que l'on peut mettre sous la forme

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_m)}} = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_m}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad (\text{IV.1})$$

où dans la dernière expression on a posé $k \equiv \sin \frac{\theta_m}{2}$ et fait le changement de variable $\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \phi$.

Cette dernière expression permet de calculer la période d'oscillation pour des oscillations de petite amplitude, soit $k \ll 1$. On trouve sans difficulté

$$T \approx \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \phi \right) d\phi = T_0 \left(1 + \frac{k^2}{4} \right) \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_m^2}{16} \right), \quad (\text{IV.2})$$

où on a introduit la période des petites oscillations $T_0 \equiv 2\pi/\omega_0$. Ce résultat indique qu'en dehors du régime linéaire la période des oscillations dépend de l'amplitude. Cette dépendance est quadratique, donc très faible à petite - mais non infinitésimale - amplitude, ce qui prouve *l'isochronisme des petites oscillations*.

IV.1.2 Développement en puissance de l'amplitude.

Nous avons la période, mais pas la forme des oscillations. Une idée possible, puisque nous venons de voir qu'une amplitude finie¹ amène une petite correction à la période, est de traiter perturbativement la résolution de l'équation différentielle (I.16), qui s'écrit jusqu'à l'ordre 3 en amplitude,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta + \frac{\theta^3}{6}, \quad (\text{IV.3})$$

en prenant T_0 comme unité de temps. Prenons comme conditions initiales $\theta(t=0) = \epsilon$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$, avec $|\epsilon| \ll 1$.

1. Ici *finie* signifie non infinitésimale.

On peut chercher une solution de cette équation en puissances de ϵ , sous forme du développement

$$\theta = \epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + \epsilon^3\theta_3 + \dots \quad (\text{IV.4})$$

où les θ_i sont des fonctions inconnues, vérifiant les conditions initiales

$$\theta_1(t=0) = 1, \quad \theta_i(t=0) = 0 \text{ si } i \geq 2, \quad \dot{\theta}_i(t=0) = 0 \ (\forall i). \quad (\text{IV.5})$$

Il serait sans doute trop ambitieux de demander au développement (IV.4) d'être convergent. Nous allons juste vérifier que les termes successifs sont décroissants, $|\theta_{i+1}|/|\theta_i| < 1$. Ainsi, on peut raisonnablement espérer obtenir une approximation de la solution de (IV.3), d'autant plus précise qu'on calculera plus de termes du développement.

Le principe du calcul est d'injecter le développement (IV.4) dans l'équation (IV.3), puis d'en déduire ordre par ordre en puissance de ϵ des équations pour les θ_i qu'on résout en tenant compte des conditions initiales (IV.5).

Ordre ϵ : On trouve simplement

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\theta_1 \quad \implies \quad \theta_1(t) = \cos t, \quad (\text{IV.6})$$

compte tenu de la condition initiale.

Ordre ϵ^2 : Le terme cubique ne contribue pas, et on a simplement

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\theta_2 \quad \implies \quad \theta_2(t) = 0,$$

compte tenu de la condition initiale. On aurait pu s'épargner cette étape en notant que les puissances paires de ϵ ne doivent pas intervenir dans le développement.

Ordre ϵ^3 : Le terme cubique doit alors être pris en compte, et l'équation pour ce terme s'écrit

$$\frac{d^2\theta_3}{dt^2} + \theta_3 = \frac{\theta_1^3}{6} = \frac{1}{24} \cos(3t) + \frac{1}{8} \cos(t). \quad (\text{IV.7})$$

C'est une équation qui présente deux aspects sympathiques :

- La fonction inconnue (θ_3) est donnée par une équation différentielle où la solution connue $\theta_1(t)$ intervient au second membre, comme un terme de forçage.
- L'équation différentielle pour θ_3 est linéaire (c'est l'équation de l'oscillateur harmonique)

Elle a hélas un défaut rédhibitoire ! En effet, sa résolution se ramène à trouver le comportement d'un oscillateur harmonique forcé. Le terme en $\cos(3t)$ conduit à une réponse à la même fréquence $(-1/192) \cos(3t)$. Par contre, le terme en $\cos(t)$ est un terme de forçage *résonant*, puisqu'à la fréquence propre (1, dans nos unités) de l'oscillateur. Mathématiquement, ce terme conduit à une composante en $t \sin(t)$ dans $\theta_3(t)$. Physiquement, on force un oscillateur à sa fréquence de résonance, et la réponse diverge. Cette solution est inacceptable puisqu'elle n'est plus bornée pour tout temps ! Notre tentative est donc un échec...

IV.2 Méthodes de double développement.

Si l'on considère d'un peu plus près le calcul précédent, on remarque un autre défaut : il ne peut engendrer que des harmoniques de la fréquence de base, et ne peut conduire à une période dépendant de l'amplitude. Elle sera toujours de 2π , le calcul ne rend compte que de l'aspect non sinusoïdal des oscillations.

Cette considération conduit à une approche nouvelle. On peut imaginer inclure dès le départ du calcul le fait que la fréquence dépend de l'amplitude, et espérer trouver ainsi une solution qui soit bornée à tout temps.

IV.2.1 Méthode de Poincaré-Lindstedt

Ce programme est exactement celui de la *méthode de Poincaré-Lindstedt*. Elle consiste à remplacer (IV.4) par un *double développement*, de la forme

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \epsilon\theta_1(\tau) + \epsilon^2\theta_2(\tau) + \epsilon^3\theta_3(\tau) + \dots \\ \tau &= \omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots\end{aligned}\tag{IV.8}$$

Les coefficients ω_i sont a priori inconnus et seront déterminés ordre par ordre de sorte à éliminer les termes résonants du développement. Ils interviennent dans les dérivées temporelles, car

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega \frac{d\theta}{d\tau},$$

et donc

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2\theta}{d\tau^2} = (\omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} (\epsilon\theta_1(\tau) + \epsilon^2\theta_2(\tau) + \epsilon^3\theta_3(\tau) + \dots)\tag{IV.9}$$

Pour le problème (IV.3), on a $\omega_0 = 1$, et il est raisonnable de prendre $\theta_2 = 0$ et $\omega_1 = 0$. (C'est un gain de temps, je vous laisse vérifier que si on les inclus au départ on montre qu'ils sont nuls). Nous allons nous limiter à la première correction non triviale, donc à l'ordre ϵ^3 . En injectant (IV.9) et (IV.8) dans (IV.3), et en éliminant tous les termes qui ne peuvent donner que des contributions d'ordre supérieur, on trouve

$$(1 + \epsilon^2\omega_2)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} (\epsilon\theta_1 + \epsilon^3\theta_3) = -(\epsilon\theta_1 + \epsilon^3\theta_3) + \frac{1}{6}\epsilon^3\theta_1^3.$$

avec les mêmes conditions aux limites que précédemment.

Ordre ϵ : Aucun changement,

$$\frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} = -\theta_1 \quad \implies \quad \theta_1(\tau) = \cos \tau.\tag{IV.10}$$

Ordre ϵ^2 : Automatiquement vérifié avec les choix $\theta_2 = 0$ et $\omega_1 = 0$.

Ordre ϵ^3 : Le terme en ω_2 introduit un terme supplémentaire par rapport à (IV.7). On obtient en effet

$$\frac{d^2\theta_3}{d\tau^2} + \theta_3 = -2\omega_2 \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \frac{\theta_1^3}{6} = \frac{1}{24} \cos(3\tau) + \left(\frac{1}{8} + 2\omega_2\right) \cos(\tau).\tag{IV.11}$$

Cette équation présente les mêmes deux bonnes propriétés que la précédente :

- La solution connue $\theta_1(\tau)$ intervient comme un terme de forçage dans l'équation donnant la fonction inconnue $\theta_3(\tau)$,
- L'équation différentielle pour θ_3 est encore l'équation de l'oscillateur harmonique.

Mais cette fois le paramètre supplémentaire ω_2 nous permet d'éliminer le terme résonant. L'équation correspondante s'appelle une *condition de solvabilité* (sous entendu, pour l'équation différentielle (IV.11); voir [1], Appendice A2 § 2.1 pour plus de détails).

Elle s'écrit dans notre cas

$$\omega_2 = -\frac{1}{16}\tag{IV.12}$$

La solution complète de (IV.3), valable à l'ordre ϵ^3 inclus, est alors

$$\begin{aligned}\theta(\tau) &= \epsilon \cos(\tau) + \frac{\epsilon^3}{192} [\cos(\tau) - \cos(3\tau)] \\ \theta(t) &= \epsilon \cos \left[\left(1 - \frac{\epsilon^2}{16}\right) t \right] + \frac{\epsilon^3}{192} [\cos(t) - \cos(3t)]\end{aligned}\tag{IV.13}$$

Cette solution est bien, comme il se doit, bornée à tout temps, et le terme d'ordre 3 conduit à une petite correction. La période dépend de l'amplitude, et vaut

$$T = \frac{2\pi}{1 - \frac{\epsilon^2}{16}} = T_0 \left(1 + \frac{\epsilon^2}{16} \right),$$

qui est bien le résultat précédent (IV.2). Tenir compte de l'effet physique qui conduit à une variation de la période avec l'amplitude permet donc d'obtenir un développement satisfaisant. Cette méthode présente l'avantage d'être assez facilement automatisable pour calculer des développements d'ordre élevé avec *Mathematica* ou *Maple*.

Remarque : Si on cherche à résoudre avec plus de précision (IV.3), il est parfaitement légitime de calculer des ordres suivants du développement. Mais on ne peut espérer résoudre ainsi l'équation différentielle pour le pendule pesant, car on s'est limité aux termes cubiques du développement de $\sin \theta$. Il faut pousser le développement du sinus jusqu'à θ^n si on veut une solution précise à l'ordre ϵ^n .

IV.2.2 Méthode des échelles multiples

La méthode de Poincaré-Lindstedt est un énorme progrès, mais elle est limitée aux problèmes d'oscillateurs non linéaires. La *méthode des échelles multiples* est beaucoup plus polyvalente. Il s'agit d'un double développement, nécessaire pour pouvoir éliminer les termes résonants, qui tient compte du fait que la solution va dépendre d'échelles de temps de plus en plus lentes, $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$, $T_2 = \epsilon^2 t$, et ainsi de suite...

En pratique, on remplace le développement (IV.8) par

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \epsilon \theta_1 + \epsilon^2 \theta_2 + \epsilon^3 \theta_3 + \dots \\ \theta_i(t) &= \theta_i(T_0 = t, T_1 = \epsilon t, T_2 = \epsilon^2 t, \dots) \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

et les échelles de temps sont considérées comme des *variables formellement indépendantes*. Les dérivées temporelles se calculent alors par

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial \theta}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial T_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \dots \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial T_2} + \dots \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \right)^2 \theta \\ &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 \theta}{\partial T_1 \partial T_0} + \epsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial T_2 \partial T_0} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial T_1^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Reprenons la résolution de (IV.3). Les calculs précédents nous permettent de nous convaincre sans difficultés qu'il est inutile de prendre en compte θ_2 ainsi que la dépendance selon l'échelle T_1 (ce qui ne vous empêche pas de le vérifier à titre d'exercice!). Nous simplifierons donc les calculs en conséquence.

Ordre ϵ : L'équation qui remplace (IV.6) et (IV.10) est désormais une *équation aux dérivées partielles*,

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0^2} + \theta_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta_1(T_0, T_2, \dots) = A(T_2, \dots)e^{iT_0} + CC, \quad (\text{IV.16})$$

où CC signifie qu'il faut prendre le complexe conjugué de l'expression écrite précédemment afin d'avoir une solution réelle.

Deux points sont à noter. En premier lieu, une "constante" d'intégration dans (IV.16) est a priori une fonction de *toutes* les autres échelles temporelles que T_0 . Une autre particularité de la méthode est que les conditions initiales doivent y être introduites à la fin du calcul, ce pour quoi nous avons pris la solution la plus générale de (IV.16) (A est bien sûr une fonction complexe).

Le choix $\theta_2 = 0$ et θ indépendant de T_1 vérifie automatiquement l'ordre ϵ^2 .

Ordre ϵ^3 : On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial T_0^2} + \theta_3 &= -2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_2 \partial T_0} + \frac{1}{6} \theta_1^3 \\ &= -2i \frac{\partial A}{\partial T_2} e^{iT_0} + \frac{A^3}{6} e^{3iT_0} + \frac{A^2 \bar{A}}{2} e^{iT_0} + CC \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

Commençons par noter qu'on obtient la même structure de calcul qu'avec la méthode de Poincaré-Lindstedt : la fonction inconnue (ici θ_3) est obtenue comme solution d'une équation linéaire avec un terme de forçage fonction uniquement des solutions précédemment calculées (ici θ_1).

La dépendance de l'amplitude A en fonction de l'échelle de temps lente T_2 va nous permettre d'éliminer des termes résonants qui conduiraient à une solution physiquement inacceptable. Les termes résonants du second membre sont ceux en e^{iT_0} , qui conduiraient à une solution en $T_0 e^{iT_0}$ divergente à grand temps. La *condition de solvabilité* s'écrit ici, en posant $A = R \exp(i\phi)$ et en séparant partie réelle et partie imaginaire,

$$2i \frac{\partial A}{\partial T_2} = \frac{A^2 \bar{A}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial T_2} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial T_2} = -\frac{R^2}{4} \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

Ces deux équations s'intègrent trivialement en $R = R_0(T_2, \dots)$ et $\phi = -R_0^2/4 + \phi_0(T_2, \dots)$. Si l'on veut respecter les conditions initiales (IV.5), il faut $R_0 = 1/2$, et en exprimant les échelles de temps en fonction de t on obtient à partir de (IV.16)

$$\theta_1(T_0, T_2, \dots) = 2R_0 \cos \left(T_0 - \frac{R_0^2}{4} T_2 \right), \quad \theta_1(t) = \cos \left[\left(1 - \frac{\epsilon^2}{16} \right) t \right],$$

qui est bien identique à la solution de Poincaré-Lindstedt (IV.13) (nous n'écrivons pas le troisième harmonique).

Application 1 : oscillateur de van der Pol.

L'équation de cet oscillateur a déjà été vue, il s'agit de

$$\ddot{x} - (\mu - x^2) \dot{x} + x = 0, \quad 0 < \mu \ll 1. \quad (\text{IV.19})$$

Clairement, le comportement de l'oscillateur va changer lorsque x sera de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, car la dissipation nonlinéaire prendra alors le pas sur l'amplification μ . On pose donc

$$x(t) = \mu^{1/2}x_1(T_0 = t, T_1 = \mu t, \dots) + \mu^{3/2}x_3(T_0 = t, T_1 = \mu t, \dots) + \dots \quad (\text{IV.20})$$

La nonlinéarité étant cubique, inutile d'introduire un terme x_2 d'ordre ϵ qui sera identiquement nul. Vous pouvez le vérifier !

Ordre ϵ : Comme précédemment,

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1(T_0, T_1, \dots) = A(T_1, \dots)e^{iT_0} + CC, \quad (\text{IV.21})$$

Ordre ϵ^3 : On obtient

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial T_0^2} + x_3 = \frac{\partial x_1}{\partial T_0} - x_1^2 \frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1}, \quad (\text{IV.22})$$

dont la condition de solvabilité est

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}|A|^2 A, \quad (\text{IV.23})$$

qui est bien comme annoncé au Chapitre II la forme normale de la bifurcation de Andronov-Hopf.

Pour résoudre (IV.23), on pose $A(T_1) = R(T_1)e^{i\phi(T_1)}$. En séparant partie réelle et partie imaginaire, on trouve

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial R}{\partial T_1} = R - R^3 \\ R \frac{\partial \phi}{\partial T_1} = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad R = \left(\frac{C e^{T_1}}{1 + C e^{T_1}} \right)^{1/2}, \quad (\text{IV.24})$$

où C est une constante. La phase ne dépend pas de T_1 . À cet ordre, on a donc $\lim_{t \rightarrow \infty} R = 1$, donc $x_1(t) = 2 \cos t$ et $x(t) = 2\sqrt{\mu} \cos t$ qui est exactement la forme des oscillations que nous avons trouvé pour l'oscillateur de van der Pol à la section I.5.3. La solution (IV.24) donne bien plus que ça, puisqu'on a l'évolution temporelle vers les oscillations stationnaires, dont le temps caractéristique est $2/\mu$ avec une croissance exponentielle.

Application 2 : forme normale de la bifurcation de Hopf.

A titre d'exercice, nous allons voir comment *calculer* la forme normale de la bifurcation de Hopf, c'est à dire exprimer le coefficient \tilde{b}_2 de l'appendice **B** du Chapitre II, dans le cas général. Ce calcul est fait complètement dans [2] et [3], mais l'approche par les échelles multiples est de loin la plus rapide.

Lorsqu'une valeur propre d'un système dynamique traverse l'axe imaginaire, l'équation se met au voisinage de la bifurcation sous la forme (parfaitement générale; les g_{ij} sont des constantes a priori complexes).

$$\dot{z} = i\Omega z + g_{20}z^2 + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\bar{z}^2 + g_{30}z^3 + g_{21}z^2\bar{z} + g_{12}z\bar{z}^2 + g_{03}\bar{z}^3 \quad (\text{IV.25})$$

On propose de montrer que la forme normale de la bifurcation de Hopf s'obtient comme la première condition de solvabilité non triviale du développement en échelles multiples de $z(t)$. On pose donc

$$\begin{aligned} z &= \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \epsilon^3 z_3 + \dots \\ z_i(t) &= z_i(T_0 = t, T_1 = \epsilon t, T_2 = \epsilon^2 t, \dots), \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

et on tire $\dot{z} \equiv dz/dt$ de (IV.15).

Ordre ϵ : On a simplement

$$\frac{\partial z_1}{\partial T_0} = i\omega z_1 \implies z_1 = Ae^{i\omega T_0}. \quad (\text{IV.27})$$

On note qu'ici z est une fonction complexe, il n'est pas nécessaire d'ajouter le complexe conjugué.

Ordre ϵ^2 : Les termes quadratiques du développement vont contribuer, on trouve en remplaçant z_1 par la solution trouvée à l'ordre ϵ

$$\frac{\partial z_2}{\partial T_0} - i\omega z_2 = -\frac{\partial A}{\partial T_1} e^{i\omega T_0} + g_{20} A^2 e^{2i\omega T_0} + g_{11} |A|^2 + g_{02} \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}. \quad (\text{IV.28})$$

Garder le terme en $e^{i\omega T_0}$ conduirait à un terme non physique en $T_0 e^{i\omega T_0}$, la condition de solvabilité est donc

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0, \quad (\text{IV.29})$$

et on trouve la solution à l'ordre ϵ^2 ,

$$z_2 = Be^{i\omega T_0} + \frac{g_{20} A^2}{i\omega} e^{2i\omega T_0} - \frac{g_{11} |A|^2}{i\omega} - \frac{g_{02} \bar{A}^2}{3i\omega} e^{-2i\omega T_0}. \quad (\text{IV.30})$$

Ordre ϵ^3 : Le calcul est un peu plus lourd. L'équation pour z_3 est

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_3}{\partial T_0} - i\omega z_3 = & -\frac{\partial z_2}{\partial T_1} - \frac{\partial z_1}{\partial T_2} + 2g_{20} z_1 z_2 + g_{11} (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) + 2g_{02} \bar{z}_1 \bar{z}_2 + \\ & + g_{30} z_1^3 + g_{21} z_1^2 \bar{z}_1 + g_{12} z_1 \bar{z}_1^2 + g_{03} \bar{z}_1^3 \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

Il n'est pas nécessaire de calculer tous les termes, seuls importent les termes résonants, c'est-à-dire ceux en $e^{i\omega T_0}$. Une première condition de solvabilité est trivialement $\partial B / \partial T_1 = 0$. En cherchant les termes résonants dépendant de A , on trouve

$$\frac{\partial A}{\partial T_2} = \left[g_{21} - i\omega \left(\frac{2}{3} |g_{02}|^2 + |g_{11}|^2 - g_{20} g_{11} \right) \right] |A|^2 A \quad (\text{IV.32})$$

IV.2.3 Pour aller plus loin...

Nous avons présenté dans ce chapitre le strict minimum. On trouvera de nombreux compléments, d'autres méthodes, et des comparaisons détaillées entre les diverses méthodes de développement asymptotiques dans [4] (particulièrement pédagogique, et néanmoins à peu près encyclopédique), [5] (un peu moins agréable à lire, mais complète le précédent par des considérations sur les approximations des intégrales), [1] (insistant comme toujours sur les motivations physiques de ces méthodes ; un complément excellent sur les conditions de solvabilité) et enfin [6] (nettement plus difficile, mais très complémentaire de [4]). Les mathématiciens ([2, 3, 7] préfèrent utiliser les méthodes de moyennisation qu'ils exposent en général en détail.

Bibliographie

- [1] P. Manneville. *Dissipatives structures and weak turbulence*. Academic Press, 1990.
- [2] Y.A. Kusnetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer-Verlag, 1995.
- [3] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, 1983.
- [4] A. Nayfeh. *Perturbation methods*. Wiley-interscience, 1973.
- [5] A. Nayfeh. *Introduction to perturbation techniques*. Wiley-interscience, 1993.
- [6] C.M. Bender and S.A. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. Springer-Verlag, 1999.
- [7] V. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Mir, 1980.

Chapitre V

Ondes dispersives nonlinéaires.

V.1 Ondes de gravité à la surface de l'eau.

V.1.1 Hypothèses et mise en équations.

Considérons un fluide pesant présentant une interface avec l'air. Soit x une coordonnée selon un des axes horizontaux, z orienté selon la verticale ascendante. Le liquide repose sur un fond plan horizontal que nous prendrons comme origine des ordonnées. Lorsque le fluide est au repos, sa surface libre est définie par son altitude $z = h$.

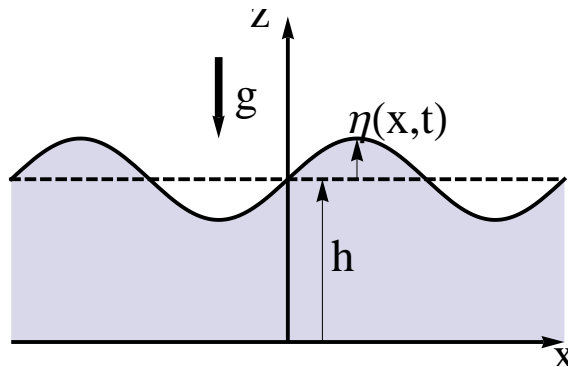


FIGURE V.1 – Ondes à une interface eau-air

Imaginons une perturbation de la hauteur de la surface libre, qui devient $h + \eta$. La gravité tend à faire s'écouler du fluide des bosses vers les creux, et l'inertie du fluide s'oppose à cette variation de vitesse. Des ondes vont donc se propager à la surface du fluide, telle que celles créées par la chute d'une pierre dans une eau calme. Nous allons étudier des problèmes unidimensionnels, pour lesquels $\eta(x, t)$ dépend de la seule variable d'espace x et du temps t .

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(H1) Fluide non visqueux (hypothèse essentielle. Rien de ce qui suit n'est vrai avec de la dissipation.)

(H2) Fluide incompressible (essentielle, mais excellente approximation).

(H3) Tension de surface σ négligeable. Cette hypothèse suppose la longueur capillaire $\sqrt{\sigma/(\rho g)}$ négligeable devant la longueur d'onde. (purement technique ; prendre en compte la tension de surface change seulement la valeur numérique de certains coefficients)

Puisqu'on néglige la viscosité, le champ de vitesse du fluide est le gradient d'un potentiel scalaire,

$$(\exists \phi) \quad \mathbf{v} = \nabla \phi.$$

La condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ fournit alors l'équation dynamique du problème,

$$\Delta\phi = 0. \quad (\text{V.1})$$

Au fond de la couche fluide, puisque le fluide est parfait, la seule condition est l'annulation de la vitesse verticale (condition d'imperméabilité)

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (\text{V.2})$$

La difficulté du problème vient des conditions à la surface libre, car sa position $\eta(x, t)$ est elle-même une inconnue ! Le terme d'advection de l'équation d'Euler se met sous la forme

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}).$$

On montre que, pour un fluide parfait, un écoulement initialement irrotationnel le reste. Dans ce cas $\nabla \wedge \mathbf{v} = 0$ et en introduisant le potentiel des vitesses, on peut écrire l'équation d'Euler sous la forme

$$\nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0$$

Le terme entre parenthèse est donc égal à une fonction ne dépendant que du temps. Comme le potentiel n'a pas de signification physique, mais seulement son gradient, il peut être redéfini de sorte que cette fonction soit nulle. À la surface libre, en négligeant la tension de surface, la pression est constante, égale à la pression atmosphérique P_{atm} . On en déduit donc

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + g(z - h) \right|_{z=h+\eta} = 0 \quad (\text{V.3})$$

La dernière équation exprime la définition même de l'interface. La vitesse verticale du fluide doit être égale, à la surface libre, à la vitesse de l'interface (tenant compte du terme d'advection),

$$\left. \frac{D\eta}{Dt} \right|_{z=h+\eta} = \left(\frac{\partial\eta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \eta \right) \Big|_{z=h+\eta} = v_z(h + \eta, t),$$

soit

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=h+\eta} = 0 \quad (\text{V.4})$$

Les deux équations (V.3) et (V.4) contiennent toutes les nonlinéarités du problème, d'une façon compliquée car l'inconnue η est un argument du potentiel des vitesses ϕ .

V.1.2 Ondes linéaires.

Lorsque le déplacement de la surface et la vitesse du fluide sont très faibles, ces équations se linéarisent pour donner

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_{z=h} + g\eta &= 0, \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} - \left. \frac{\partial\phi}{\partial z} \right|_{z=h} &= 0. \end{aligned}$$

Cherchons comme solution une onde plane monochromatique de pulsation ω et de nombre d'onde k ,

$$\eta(x, t) = \eta_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad \phi(x, z, t) = f(z) e^{i(kx - \omega t)},$$

où η_0 est une amplitude inconnue et $f(z)$ une fonction à déterminer. L'équation (V.1) donne

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(z) = A e^{kz} + B e^{-kz},$$

où A et B sont deux constantes arbitraires. La condition au fond (V.2) impose $A = B$, donc

$$\phi(x, z, t) = \phi_0 \operatorname{ch} k z e^{i(kx - \omega t)},$$

où ϕ_0 est une constante arbitraire.

Si l'on injecte la forme de $\eta(x, t)$ et celle que nous venons de trouver pour $\phi(x, z, t)$ dans les équations (V.3) et (V.4) linéarisées, on trouve

$$\begin{cases} -i\omega \operatorname{ch} k h \phi_0 + g \eta_0 = 0, \\ -i\omega \eta_0 - k \operatorname{sh} k h \phi_0 = 0. \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

Il s'agit d'un système de deux équations algébriques linéaires, homogène, d'inconnues η_0 et ϕ_0 . Il possède une solution nontriviale, avec des amplitudes non indistinctement nulles, si et seulement si son déterminant est nul, ce qui donne la relation de dispersion pour les ondes de gravité,

$$\begin{vmatrix} -i\omega \operatorname{ch} k h & g \\ -k \operatorname{sh} k h & -i\omega \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = gk \operatorname{th} k h. \quad (\text{V.6})$$

V.2 L'équation de Korteweg-de Vries

L'équation de Korteweg-de Vries (KdV) prend en compte à la fois les non linéarités et la dispersion, dans la limite des grandes longueurs d'ondes pour laquelle cette dernière est faible. On peut la dériver rigoureusement à partir des équations (V.1)–(V.4), comme nous le verrons en section V.2.2. Nous allons commencer par une approche plus simple, en gardant la première correction dispersive et la première correction non linéaire.

V.2.1 KdV : approche simple.

Ondes linéaires faiblement dispersives.

Plaçons nous dans la limite des grandes longueurs d'onde, $kh \ll 1$, pour des ondes linéaires donc d'amplitude négligeable devant h . Alors

$$\operatorname{th} k h \approx kh - \frac{(kh)^3}{3} \quad \Longrightarrow \quad \omega \approx \sqrt{gh} k \left(1 - \frac{(kh)^2}{6} \right), \quad (\text{V.7})$$

où apparaît la vitesse $c_0 \equiv \sqrt{gh}$ des ondes nondispersives. Cette relation de dispersion approchée peut être considérée comme correspondant à l'équation d'onde linéaire

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} c_0 h^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (\text{V.8})$$

comme on le voit en injectant dans cette équation $\eta(x, t) = \eta_0 e^{i(kx - \omega t)}$. On notera que KdV décrit la propagation d'ondes dans une seule direction, celle des x positifs.

Ondes non dispersives faiblement non linéaires.

Regardons maintenant la première correction non linéaire aux ondes non dispersives. Celles-ci sont décrites par l'équation

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$

avec $c_0 = \sqrt{gh}$. Si l'élévation η de l'onde n'est pas infinitésimale, on peut considérer que localement, en un point où l'élévation de la surface libre est $h + \eta$, la vitesse de l'onde est

$$c \approx \sqrt{g(h + \eta)} \approx c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\eta}{h}\right).$$

En outre, l'équation (V.5) nous indique que la vitesse du fluide dans la direction x est

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \sim \frac{g\eta_0 k \operatorname{ch}k(h + \eta)}{\omega \operatorname{ch}kh} e^{i(kx - \omega t)} \sim gh \frac{\eta k}{h \omega} \sim c_0 \frac{\eta}{h}.$$

Pour un observateur au repos, lorsque l'élévation de la surface est $h + \eta$, la vitesse de l'onde est donnée par la composition des vitesses de Galilée et vaut

$$c \approx c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h}\right).$$

Ondes dispersives et non linéaires.

Le calcul précédent est peu rigoureux, puisqu'il utilise les résultats établis en régime linéaire en dehors de ce régime. Si l'on tient compte à la fois des termes dispersifs et non linéaires, en supposant les corrections du même ordre de grandeur (ce qui n'a *rien* d'évident!), on trouve l'équation de Korteweg-de Vries,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} c_0 \frac{\eta}{h} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} c_0 h^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (\text{V.9})$$

V.2.2 KdV : approche rigoureuse.

Le calcul peut être fait proprement. Commençons par nous placer en variables adimensionnées, en prenant comme échelle de longueur h , échelle de vitesse \sqrt{gh} , échelle de temps $\sqrt{h/g}$. Les équations (V.1) et (V.2) sont inchangées. On cherche la solution de (V.1) sous la forme $\phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_{(n)}(x, t)$.

Il vient alors

$$\Delta \phi = 0 \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n-1) z^{n-2} f_{(n)} + z^n \frac{\partial^2 f_{(n)}}{\partial x^2} \right] = 0$$

Les fonctions z^n sont linéairement indépendantes, cette équation doit donc être vérifiée pour chaque puissance de z . La condition au fond (V.2) impose $f_{(1)} = 0$, et donc tous les indices impairs $f_{(2p+1)} = 0$. La forme générale du potentiel est alors

$$\phi(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}}, \quad (\text{V.10})$$

où f est une fonction inconnue de x et de t .

Les équations (V.3) et (V.4) deviennent respectivement

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right]_{z=1+\eta} + \eta = 0 \quad (\text{V.11})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=1+\eta} = 0 \quad (\text{V.12})$$

Une fois en variables adimensionnées, il est possible de définir un petit paramètre $\epsilon \ll 1$. On étudie des ondes de faible amplitude et de grande longueur d'onde, en choisissant les échelles suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \text{longueur d'onde} & / & \text{profondeur} & / & \text{amplitude} \\ 1/\sqrt{\epsilon} & / & 1 & / & \epsilon \end{array}$$

On cherche des ondes se propageant vers les x positifs ; le choix d'échelle de longueur d'onde impose celui d'une variable

$$\xi = \sqrt{\epsilon}(x - t).$$

On aura noté que dans nos unités, par définition, la vitesse de l'onde est 1. La première correction dispersive à la pulsation est en k^3 , ce qui conduit à définir une échelle de temps lente $\tau = \epsilon^{3/2}t$. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial x} = \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

On notera que ce choix d'échelle assure que la première correction non linéaire sera du même ordre de grandeur que la première correction dispersive. On fait donc « proprement » ce qu'on a fait « avec les mains » dans le paragraphe V.2.1

La solution est cherchée sous forme d'un développement

$$\begin{aligned} \eta &= \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \dots \\ \phi &= \epsilon^{1/2} \phi_1 + \epsilon^{3/2} \phi_2 + \dots \end{aligned}$$

Le choix d'échelle pour ϕ assure qu'à l'ordre le plus bas $\eta \sim \partial \phi / \partial t$.

Ce développement de ϕ correspond à un développement équivalent pour la fonction f dans (V.10),

$$f = \epsilon^{1/2} f_1 + \epsilon^{3/2} f_2 + \epsilon^{5/2} f_3 + \dots$$

Nous allons voir que nous aurons besoin de ϕ jusqu'à des termes d'ordre $\epsilon^{5/2}$, soit

$$\phi(x, z, t) = \epsilon^{1/2} f_1 + \epsilon^{3/2} \left(f_2 - \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} \right) + \epsilon^{5/2} \left(f_3 - \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi^2} + \frac{z^4}{4!} \frac{\partial^4 f_1}{\partial \xi^4} \right) + O(\epsilon^{7/2})$$

L'équation (V.3) conduit alors aux deux équations

$$\text{Ordre } \epsilon : \quad \eta_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \xi}, \quad (\text{V.13})$$

$$\text{Ordre } \epsilon^2 : \quad \frac{\partial f_1}{\partial \tau} - \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_1}{\partial \xi^3} + \eta_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi} \right)^2 = 0, \quad (\text{V.14})$$

L'équation (V.4) conduit aux deux équations

$$\text{Ordre } \epsilon^{3/2} : \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2}, \quad (\text{V.15})$$

$$\text{Ordre } \epsilon^{5/2} : \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} - \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \eta_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{6} \frac{\partial^4 f_1}{\partial \xi^4} = 0, \quad (\text{V.16})$$

Lorsqu'on fait $\partial(\text{V.14})/\partial \xi + (\text{V.16})$, on trouve

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{3} \frac{\partial^4 f_1}{\partial \xi^4} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \eta_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} = 0,$$

Il suffit alors d'utiliser la relation $\eta_1 = \partial f_1 / \partial \xi$ pour retrouver KdV

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta_1}{\partial \xi^3} + \frac{3}{2} \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{V.17})$$

qu'il est facile de déduire directement de (V.9) en adimensionnant les variables et en introduisant les échelles appropriées en ϵ .

V.2.3 Notion d'onde solitaire.

Effets dispersifs : Propagation d'un paquet d'ondes

Lorsqu'une équation d'ondes est *linéaire*, on peut construire une solution générale comme une *superposition d'ondes planes monochromatiques*. On parle alors d'un *paquet d'ondes*, que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk,$$

où $A(k)$ est l'amplitude¹ du mode de nombre d'onde k . La propagation du paquet d'onde peut être précisée si :

(H1) La distribution spectrale $A(k)$ est très piquée autour d'une valeur k_0 , avec une largeur spectrale Δk en dehors de laquelle l'amplitude est à peu près nulle.

(H2) La relation de dispersion admet un développement en série de Taylor au voisinage de k_0 ,

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{\omega''(k_0)}{2}(k - k_0)^2 + \dots$$

Du fait de l'hypothèse (H1), $A(k)$ est négligeable en dehors de $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$. Lorsqu'on limite le développement de $\omega(k)$ au premier ordre, on peut écrire

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i[k_0\omega'(k_0) - \omega(k_0)]t} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik[x - \omega'(k_0)t]} dk \\ &\approx \underbrace{e^{i[k_0\omega'(k_0) - \omega(k_0)]t}}_{\text{terme de phase}} \eta[x - \omega'(k_0)t, 0]. \end{aligned}$$

En prenant en compte la dispersion à l'ordre le plus bas, on montre que le signal se propage sans déformation à la *vitesse de groupe* $\omega'(k_0) = v_g(k_0)$.

En tenant compte de l'ordre suivant dans le développement de la relation de dispersion, on peut calculer l'étalement du paquet d'onde. Prenons un signal initialement de forme gaussienne,

$$\eta(x, 0) = \eta_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2L^2}\right) e^{ik_0x}. \quad (\text{V.18})$$

Le spectre correspondant est aussi gaussien, de largeur $\Delta k = 1/L$, on retrouve le résultat classique $\Delta x \Delta k \sim 1$:

$$\hat{\eta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0 \exp\left[-\frac{x^2}{L^2} - i(k - k_0)x\right] dx = \eta_0 L \exp\left(-\frac{(k - k_0)^2 L^2}{2}\right)$$

1. La distribution d'amplitude $A(k)$ est la transformée de Fourier du signal initial $\eta(x, 0)$,

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, 0) e^{-ikx} dx$$

Pour KdV, qui est d'ordre un en dérivée temporelle, cela suffit. Pour l'équation des ondes, ou toute EDP dérivée deux fois en temps, il faut aussi utiliser $(\partial\eta/\partial t)(x, 0)$. Voir Jackson [1].

À un instant ultérieur $t > 0$, le signal s'écrit en posant $K \equiv k - k_0$,

$$\eta(x, t) = \eta_0 \frac{L e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{K^2 L^2}{2} + iKx - ic_g Kt - i\frac{\omega''(k_0)}{2} K^2 t\right) dK.$$

Ce n'est pas tout-à-fait une intégrale gaussienne (un des termes en K^2 est complexe), mais le calcul se fait formellement de la même façon. Il faut réorganiser l'argument de l'exponentielle pour faire apparaître un terme carré dépendant de la variable d'intégration K , sous la forme

$$\frac{K^2 \tilde{L}(t)^2}{2} - iK(x + ic_g t) = \left[K \sqrt{\frac{\tilde{L}(t)^2}{2}} - i \frac{x - c_g t}{\sqrt{2\tilde{L}(t)^2}} \right]^2 + \frac{(x - c_g t)^2}{2\tilde{L}(t)^2}$$

où on a posé $\tilde{L}(t)^2 \equiv L^2 + i\omega''(k_0)t$. Lorsque $a > 0$, ce qui est le cas pour notre problème, et $\forall(b, c) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(x\sqrt{a+ib}+ic\right)^2\right] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a+ib}},$$

d'où l'on déduit le paquet d'onde et son module

$$\eta(x, t) = \frac{\eta_0 L}{\sqrt{L^2 + i\omega''(k_0)t}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \exp\left[-\frac{(x - c_g t)^2}{2(L^2 + i\omega''(k_0)t)}\right], \quad (\text{V.19})$$

$$|\eta(x, t)| = \frac{|\eta_0| L}{(L^4 + \omega''(k_0)^2 t^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{(x - c_g t)^2}{2\left(L^2 + \frac{\omega''(k_0)^2 t^2}{L^2}\right)}\right] \quad (\text{V.20})$$

La largeur du signal est donc

$$L(t) = L \sqrt{1 + \frac{\omega''(k_0)^2 t^2}{L^4}}. \quad (\text{V.21})$$

La prise en compte du terme $\omega''(k_0)$ conduit à un élargissement² progressif du signal, linéaire en temps. Par ailleurs l'amplitude décroît comme \sqrt{t} . L'énergie du signal est donc conservée puisque amplitude² \times largeur $\approx Cste$. (ce n'est *pas* un effet dissipatif!)

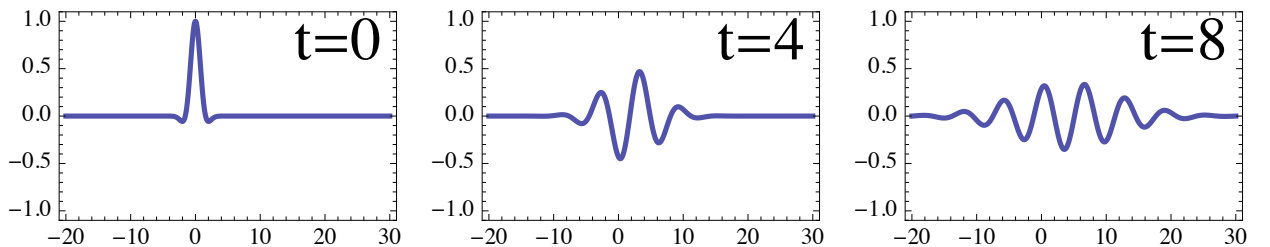


FIGURE V.2 – Propagation d'un signal à divers instants, pour $L = 1$ et $k_0 = 1$, et la relation de dispersion (V.6). On constate la diminution de l'amplitude du signal et son élargissement.

2. On notera que le terme d'élargissement est en $\omega''(k_0)^2$, donc indépendant du signe de la courbure de la relation de dispersion. Dès qu'il y a dispersion, il y a élargissement du signal, indépendamment des détails de la relation de dispersion!

On aura noté que ces calculs ne sont en rien limités à l'équation (V.8), nous n'avons d'ailleurs même pas utilisé explicitement la relation de dispersion (V.6), sauf pour la figure V.2. Nous retiendrons que lorsqu'une équation d'onde *linéaire* est *dispersive* un signal dont le spectre en nombre d'onde est de largeur *finie* (non nulle) s'élargit inévitablement dans l'espace. À la seule exception des ondes planes monochromatiques, tout signal se déforme en se propageant.

Effets non linéaires

Si l'on ne tient pas compte du terme dispersif de KdV, l'équation d'onde devient

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + c(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0 \quad \text{avec} \quad c(\eta) = \eta.$$

Cette notation veut insister sur le fait que, si l'on avait $c(\eta) = \text{cste}$, alors la solution serait une onde propagative à la vitesse c , $\eta(\xi - c\tau)$. Donc l'interprétation de cette équation est que la vitesse de l'onde est une fonction croissante de son amplitude. Un profil initialement symétrique se raidit donc par l'avant, jusqu'à finalement déferler comme une vague arrivant sur une plage. Cette situation est schématisée en Fig. V.3.

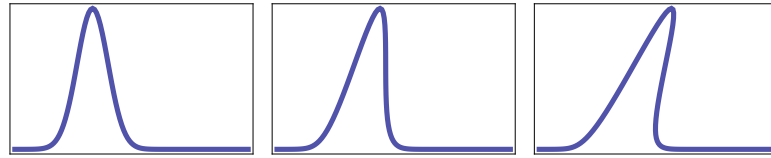


FIGURE V.3 – Illustration de la propagation d'une onde dont la vitesse de propagation croît avec l'amplitude. Le profil avant de l'onde se raidit jusqu'à présenter une tangente verticale (milieu). Au delà, la description de la propagation n'est plus acceptable, puisque la forme de l'onde n'est plus décrite par une fonction (à droite).

Les effets non linéaires sont donc antagonistes des effets dispersifs. Si A est l'amplitude de l'onde, la variation de vitesse induite par les non linéarités est $\Delta c|_{NL} \sim A$. Par ailleurs, la variation de vitesse due à la dispersion est $\Delta c|_{disp} \sim k^2$ d'après (V.7). Si la largeur du profil est L , k varie entre 0 et $1/L$. On peut imaginer que les deux effets se compensent exactement si

$$\Delta c|_{NL} \sim \Delta c|_{disp} \quad \implies \quad A \sim 1/L^2. \quad (\text{V.22})$$

L'onde solitaire de KdV

Il existe bien une solution de KdV qui réalise cette compensation. Cherchons la sous la forme d'une excitation localisée se propageant à une vitesse V constante, s'écrivant $\eta(\chi = \xi - V\tau)$ avec $\lim_{\chi \rightarrow \pm\infty} \eta(\chi) = 0$.

Si nous injectons cette expression dans (V.17), nous trouvons l'équation différentielle

$$-V\eta' + \frac{1}{6}\eta''' + \frac{3}{2}\eta\eta' = 0, \quad \text{où} \quad \frac{d\eta}{d\chi} \equiv \eta',$$

qui s'intègre facilement avec d'après les conditions aux limites une constante d'intégration nulle, donnant

$$\eta'' = 6V\eta - \frac{9}{2}\eta^2 = -\frac{d}{d\eta} \left(\frac{3}{2}\eta^3 - 3V\eta^2 \right). \quad (\text{V.23})$$

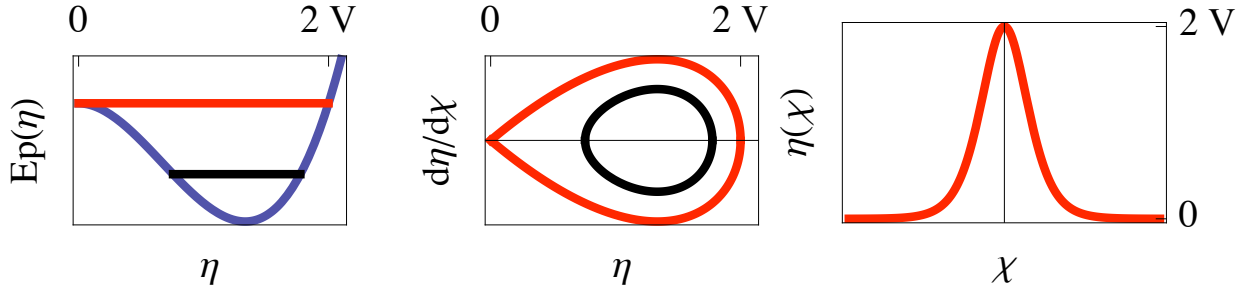


FIGURE V.4 – À gauche, tracé du potentiel, avec en rouge l'énergie de la séparatrice, en noir une énergie pour des oscillations non linéaires. Au centre, portrait de phase avec les trajectoires correspondantes. À droite, forme de l'onde solitaire.

Cette équation se présente comme un problème de mécanique du point : Une particule de masse unité, à la « position » η , se déplace en fonction du « temps » χ dans le « potentiel » $E_p(\eta) = 3\eta^3/2 - 3V\eta^2$. Le potentiel et le portrait de phase correspondant sont tracés Fig. V.4.

Ce potentiel admet un maximum local en $\eta = 0$, valant 0, et un minimum pour $\eta = 4V/3$, valant $-16V^3/9$. Lorsque « l'énergie » initiale de la particule est négative, son mouvement est oscillant dans le puit de potentiel, avec une période de durée finie. Dans le contexte des ondes, cette solution représente une onde périodique non linéaire, qui n'est pas la solution que nous cherchons (et qui ne vérifie pas, par ailleurs, les conditions aux limites pour une excitation localisée).

La séparatrice est la trajectoire, d'énergie nulle, partant du point d'équilibre instable $\eta = 0$: elle met un « temps » infini à partir de ce point, atteint une valeur maximale $\eta = 2V$ puis revient en un « temps » infini à $\eta = 0$. Dans le contexte des ondes, il s'agit de l'excitation que nous cherchons : $\eta \rightarrow 0$ lorsque $\chi \rightarrow \pm\infty$, et η a une amplitude maximale de $2V$. L'onde solitaire est donc donnée par

$$\sqrt{3}d\chi = \frac{d\eta}{\eta\sqrt{2V-\eta}} = -\sqrt{\frac{2}{V}} d\left(\operatorname{argth}\frac{\sqrt{2V-\eta}}{\sqrt{2V}}\right),$$

soit (en posant $A \equiv 2\epsilon V$ pour exprimer la solution en unités MKSA),

$$\eta_1(\xi, \tau) = \frac{2V}{\operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{3V}{2}}(\xi - V\tau)}, \quad \frac{\eta(x, t)}{h} = \frac{A}{\operatorname{ch}^2\left[\sqrt{\frac{3A}{4}}\frac{x - \sqrt{gh(1+A/2)t}}{h}\right]} \quad (\text{V.24})$$

Ce profil est donc une solution exacte se propageant sans déformation vers les x positifs. Il réalise une balance parfaite entre les effets dispersifs, tendant à l'élargir, et les effets non linéaires tendant à le raidir. Nous avons trouvé, en fait, toute une famille d'ondes dépendant du seul paramètre V (ou A). La vitesse de propagation de ces ondes varie comme leur amplitude. La relation (V.22) entre amplitude et largeur de l'onde, que nous avons trouvée par un raisonnement intuitif, est ici explicitée.. L'existence de telles solutions, appelées *ondes solitaires*, est un effet strictement non linéaire. Une équation d'onde linéaire dispersive ne peut conduire qu'à un élargissement des formes d'ondes.

V.2.4 Interaction d'ondes solitaires : Solitons.

Les propriétés remarquables de KdV ne s'arrêtent pas là ! Les ondes solitaires peuvent interagir à la manière de particules, et sont de ce fait appelées *solitons*. Nous procédons ci-dessous au calcul de la solution à deux solitons par la *méthode de Hirota*. C'est la plus simple à introduire, son seul défaut est que plusieurs intermédiaires de calculs semblent un peu "parachutés" !

Nous partons de la forme suivante de KdV, qui se déduit de la précédente en posant $x = \sqrt[3]{6}\xi$ et $\eta = (2\sqrt[3]{6}/3)\tilde{\eta}$ (en supprimant les tildes \sim et en renommant $\tau = t$)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (\text{V.25})$$

On pose alors $\eta = \partial p / \partial x$ et on intègre, avec $p(x \rightarrow \pm\infty) = 0$,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = 0.$$

Puis on effectue le changement de variable $p(x, t) = 12 \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x}$ (dit transformation de Cole-Hopf) qui conduit à

$$F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right) + 3 \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right] = 0. \quad (\text{V.26})$$

Cette équation présente des propriétés de symétrie intéressantes, et met clairement en évidence l'opérateur différentiel linéaire $D_{lin} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}$.

Par ailleurs, l'onde solitaire (V.24) s'exprime très simplement en terme de la fonction F , selon

$$F(x, t) = 1 + \exp \theta(x, t), \quad \theta(x, t) = -\alpha(x - a) + \alpha^3 t,$$

où α et a sont des constantes réelles quelconques. Il est très facile de vérifier que cette expression est solution de (V.26), un peu plus long de retrouver la forme en $1/\text{ch}^2$. S'il n'y avait que l'opérateur linéaire D_{lin} , on construirait d'autres solutions par superposition, mais le dernier terme de (V.26) exclut cette possibilité. Le changement de variable $p \longleftrightarrow F$ n'a donc pas linéarisé KdV.

Lorsqu'on n'a même pas de petit paramètre à sa disposition, on peut toujours essayer de résoudre un problème par un développement formel, qui s'écrirait ici

$$F = 1 + \epsilon F_1 + \epsilon^2 F_2 + \dots$$

L'idée est de prendre à la fin du calcul $\epsilon = 1$. La structure générale du problème devient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_n}{\partial t} + \frac{\partial^3 F_n}{\partial x^3} \right) = SM(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}),$$

pour l'équation à l'ordre ϵ^n . On ne gagne rien, puisqu'on remplace une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire, qu'on ne sait pas résoudre, par une hiérarchie d'EDP linéaires avec second membre qu'on ne pourra pas résoudre non plus car elle est infinie... Le seul espoir est que $|F_n| \ll |F_{n-1}|$, ce qui permet de tronquer le développement pour obtenir une solution approchée. Mais dans le cas de KdV, un miracle se produit et on trouve une solution exacte !

Au premier ordre en ϵ , l'équation vérifiée par F_1 est

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} \right) = 0,$$

qui est linéaire. On peut donc prendre comme solution

$$F_1(x, t) = \exp \theta_1(x, t) + \exp \theta_2(x, t), \quad \theta_i(x, t) = -\alpha_i(x - a_i) + \alpha_i^3 t,$$

L'équation pour F_2 s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3} \right) = -3 \left[\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} \right] = 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 e^{\theta_1} e^{\theta_2},$$

et la recherche de la solution sous la forme $\gamma e^{\theta_1} e^{\theta_2}$ conduit à un simple problème d'algèbre, et à

$$F_2(x, t) = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} \exp(\theta_1 + \theta_2).$$

La poursuite du calcul donne $F_i = 0$ pour $i \geq 3$. Le développement formel est donc limité à deux ordres, et permet de construire une solution exacte! Cette solution décrit la propagation de deux solitons, et s'écrit

$$F = 1 + \exp \theta_1(x, t) + \exp \theta_2(x, t) + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} \exp \theta_1(x, t) \exp \theta_2(x, t).$$

Cette méthode, due à Hirota, s'étend à un nombre quelconque de solitons. La solution à N solitons s'écrit comme un déterminant,

$$F = \det \left(\left[\delta_{mn} + \frac{2\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_n} e^{\theta_m} \right] \right), \quad \theta_m = \alpha_m^3 t - \alpha_m(x - a_m), \quad m \in [1, N].$$

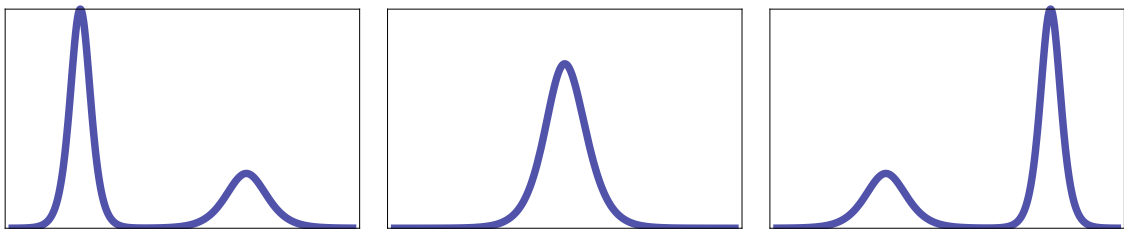


FIGURE V.5 – Représentation de la solution à deux solitons à différents instants (le temps croît du dessin de gauche vers celui de droite ; les solitons se déplacent de gauche à droite de chaque dessin).

La solution à deux solitons est tracée en Fig. V.5. Le soliton de plus grande amplitude se déplace plus vite, il rattrape donc puis dépasse le petit. Lorsqu'ils sont asymptotiquement loin l'un de l'autre, ils ont la forme d'une onde solitaire, mais la figure centrale montre que la solution décrit l'interaction entre les deux solitons. Ces excitations gardent leur identité, et interagissent élastiquement. La seule trace de l'interaction est un déphasage par rapport à la position qu'aurait chaque soliton s'il se propageait seul.

V.2.5 Intégrabilité de l'équation de Korteweg-de Vries.

La notion d'intégrabilité se définit de manière intuitive de la façon suivante : connaissant $\eta(x, t = 0)$ (ainsi qu'éventuellement ses dérivées temporelles), peut-on calculer $\eta(x, t)$ à tout instant ultérieur ? Pour une équation d'onde linéaire, la transformée de Fourier permet de construire la solution, dont le calcul se réduit à un calcul d'intégrale. Pour une équation non linéaire, le principe de superposition disparaît et la transformation de Fourier n'est d'aucune utilité.

Une équation telle que KdV (ou sine-Gordon qui est l'objet de la section suivante) est *intégrable*. Les solitons se comportent comme des *modes propres non linéaires*. Une condition initiale donnée va donner lieu à la propagation d'un certain nombre de solitons, que des méthodes *linéaires* permettent de calculer. Une trace de l'intégrabilité de ces équations est l'existence d'un nombre infini de constantes du mouvement. Pour ces divers sujets, je vous renvoie à la bibliographie commentée en fin de chapitre.

V.3 Supplément : L'équation de sine-Gordon

V.3.1 Un modèle mécanique

L'équation de sine-Gordon décrit la dynamique, dans la limite continue, d'une chaîne de pendules pesants identiques tournant sans frottement autour d'une de leurs extrémité. Nous considérons une chaîne de masses ponctuelles identiques m , attachées à l'extrémité d'une tige sans masse de longueur l , couplées par des ressorts de torsion identiques exerçant un couple de rappel $-\beta\Delta\theta$ où β est une constante et $\Delta\theta$ l'écart angulaire entre deux pendules adjacents. La position du n -ième pendule est repérée par l'angle θ_n qu'il fait avec la verticale descendante, selon l'accélération de la pesanteur \mathbf{g} .

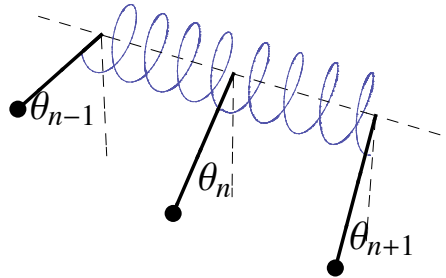


FIGURE V.6 – Chaîne de pendules pesants

Le théorème du moment cinétique donne l'équation de mouvement du n -ième pendule,

$$\begin{aligned} ml^2 \frac{d^2\theta_n}{dt^2} &= -mgl \sin \theta_n - \beta(\theta_n - \theta_{n+1}) - \beta(\theta_n - \theta_{n-1}) \\ &= -mgl \sin \theta_n + \beta(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n). \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

Cette équation n'a pas de solutions exactes, mais se résout dans la limite continue, pour laquelle les longueurs caractéristiques des déformations de la chaîne sont grandes devant la distance a entre deux pendules voisins. On pose $\theta_n(t) = \theta(x = na, t)$ où x est la coordonnée le long de la chaîne. La limite continue permet d'écrire

$$\theta_{n\pm 1}(t) = \theta(x \pm a, t) = \theta(x, t) \pm a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \dots,$$

ce qui une fois injecté dans (V.27) donne

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad \text{avec} \quad c^2 \equiv \frac{\beta a^2}{ml^2} \quad \text{et} \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (\text{V.28})$$

Comme la dimension physique de β est $[\beta] = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}$, la constante c est homogène à une vitesse. Il est commode d'adimensionner l'équation en posant $T = \omega_0 t$ et $X = (\omega_0/c)x$ pour aboutir à l'équation de sine-Gordon (SG),

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \sin \theta = 0. \quad (\text{V.29})$$

L'approximation continue suppose que l'angle varie peu entre deux pendules voisins, ce qui impose $\beta \gg mgl$. Elle est donc légitime si l'échelle de longueur vérifie

$$\frac{c}{\omega_0} = a \sqrt{\frac{\beta}{mgl}} \gg a.$$

V.3.2 L'onde solitaire solution de sine-Gordon

Nous allons maintenant chercher des solutions exactes de (V.29), sous forme d'ondes solitaires. On pose donc, en notant $\theta' \equiv d\theta/d\xi$,

$$\theta(x, t) = \theta(\xi \equiv x - Vt), \quad \text{avec} \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \theta'(\xi) = 0, \quad (\text{V.30})$$

où V est une vitesse constante a priori indéterminée. La condition aux limites revient à exiger que les pendules fassent un angle constant avec la verticale pour $\xi \rightarrow \pm\infty$. De façon évidente, les positions d'équilibres stables sont $\theta = 2p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$; ce seront donc elles que nous chercherons à obtenir.

Lorsqu'on injecte (V.30) dans (V.29), on obtient une équation différentielle du second ordre,

$$\theta'' = \sin \theta = -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos \theta}{1 - V^2} \right) \equiv -\frac{dU(\theta)}{d\theta} \quad (\text{V.31})$$

Cette équation présente, comme pour KdV, une analogie mécanique évidente. Elle décrit le « mouvement » d'une particule ponctuelle de masse unité, à la « position » θ et au « temps » ξ , dans le « potentiel » $\cos \theta / (1 - V^2)$, sans « dissipation ». Il suffit de multiplier chaque membre de l'équation par θ' et d'intégrer pour obtenir

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 = \frac{\mathcal{C} - \cos \theta}{1 - V^2}, \quad (\text{V.32})$$

où \mathcal{C} est une constante d'intégration. Si l'on veut respecter la condition aux limites (V.30) pour une position d'équilibre stable³ des pendules, soit $\theta = 2p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$, il faut choisir $\mathcal{C} = 1$. Dans l'analogie mécanique, le « potentiel » possède une « position d'équilibre instable » en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ lorsque $V^2 < 1$ (voir Fig. V.7). Comme pour KdV, l'onde solitaire correspond à la séparatrice.

On déduit de (V.32)

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} = d \left[\sqrt{2} \log \left(\tan \left(\frac{\theta}{4} \right) \right) \right] = \pm \sqrt{\frac{2}{1 - V^2}} d\xi,$$

ce qui donne l'onde solitaire sous la forme

$$\tan \frac{\theta(x, t)}{4} = \exp \pm \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}. \quad (\text{V.33})$$

Cette solution ainsi que sa dérivée sont illustrées en Fig. V.8.

3. Attention! nous parlons là du *vrai* problème mécanique (une chaîne de pendules pesant dans le champ de pesanteur), pas de l'analogie formelle exhibée par (V.31).

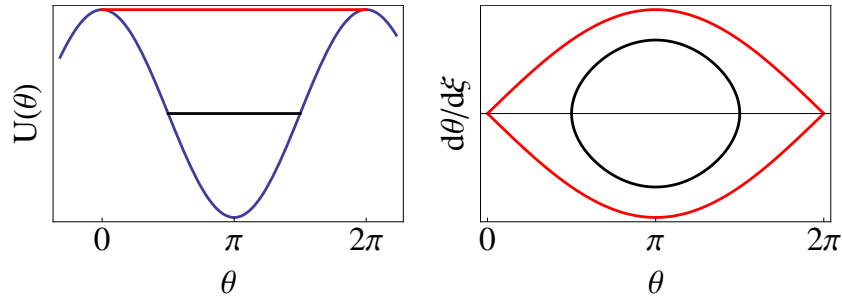


FIGURE V.7 – À gauche, tracé du « potentiel » (V.31) lorsque $V^2 < 1$. L'énergie de la séparatrice est en rouge. À droite, portrait de phase.

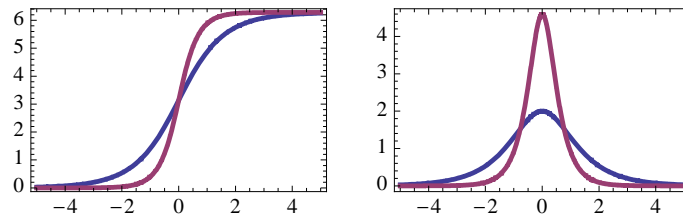


FIGURE V.8 – Représentation de la solution (V.33) (à gauche) et de sa dérivée (à droite). Courbe bleue : $V = 0$. Courbe rouge : $V = 0.9$.

Lorsqu'on fait le choix du signe + dans (V.33), à t fixé, $\theta \rightarrow 0$ (resp. $\theta \rightarrow 2\pi$) lorsque $x \rightarrow -\infty$ (resp. $x \rightarrow +\infty$). Il s'agit d'un profil, solution exacte de l'équation nonlinéaire (V.29), qui se déplace sans déformation vers les x croissant. Les termes nonlinéaires compensent donc les termes dispersifs. Ce profil s'appelle un "kink", le choix du signe - conduit à un anti-kink correspondant à une rotation des pendules dans l'autre sens : L'angle passe de 0 pour $x \rightarrow -\infty$ à -2π pour $x \rightarrow +\infty$. On aurait obtenu les mêmes solutions en posant au départ $\theta(x, t) = \theta(x + Vt)$, ces excitations peuvent donc se déplacer dans les deux sens.

L'onde solitaire relie une zone de la chaîne où $\theta = 0$ à une zone où les pendules ont tournés de 2π et se déplace à la vitesse V , qui peut être nulle. Une telle excitation est appelée un *défaut topologique*, elle est énergétiquement très stable puisqu'il faut une énergie infinie pour la supprimer. C'est une différence importante avec les ondes solitaires de l'équation de Korteweg-de Vries qui n'existent pas à vitesse nulle. L'équation (V.29) est relativiste (avec une vitesse de la lumière $c = 1$), et les solutions présentent la contraction des longueurs en $(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ pour l'extension spatiale des ondes solitaires.

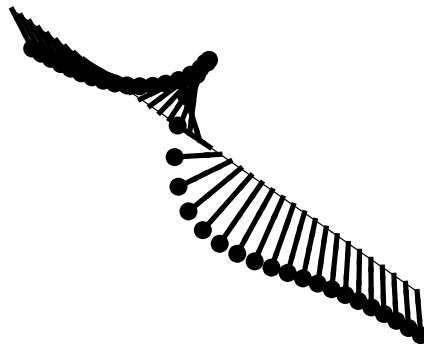


FIGURE V.9 – Représentation de la solution (V.33) pour la chaîne de pendules pesants.

V.4 Solitons de sine-Gordon

V.4.1 Energie d'une excitation localisée

Revenons au problème initial d'une chaîne de pendules pesants couplés. L'énergie de la chaîne peut s'écrire en additionnant pour chaque pendule l'énergie cinétique de rotation, l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie potentielle due aux ressorts de torsion,

$$\begin{aligned} E &= \sum_n \left[\frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta_n}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta_n) + \frac{\beta}{2} (\theta_n - \theta_{n-1})^2 \right] \\ &= ml^2 \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \omega_0^2 (1 - \cos \theta) + \frac{\beta a^2}{2ml^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{dx}{a} \\ &= ml^2 \omega_0^2 \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial T} \right)^2 + 1 - \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 \right] \frac{c}{\omega_0 a} dX \end{aligned}$$

L'unité d'énergie est donc $ml^2 \omega_0 c/a = \sqrt{m l g \beta}$, et en variables adimensionnées l'énergie s'écrit

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial T} \right)^2 + 1 - \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 \right] dX \quad (\text{V.34})$$

Cette expression permet de calculer l'énergie d'une onde solitaire (V.33) par substitution directe de la solution (V.33). On peut faire un calcul plus simple en partant de (V.32), puisque pour une onde solitaire θ n'est fonction que de $X - VT$. Pour l'onde solitaire $C = 1$, donc

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(1 - \cos \theta)}{1 - V^2} dX = \int_0^{2\pi} \frac{2(1 - \cos \theta)}{1 - V^2} \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial X}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2(1 - \cos \theta)}{1 - V^2}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{\sqrt{1 - V^2}} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{8}{\sqrt{1 - V^2}} \end{aligned} \quad (\text{V.35})$$

Cette énergie dépend de la vitesse de l'onde comme l'énergie d'une particule relativiste de masse $m = 8$.

Il est possible de développer cette analogie⁴. L'équation de sine-Gordon (V.29) peut être obtenue à partir du Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} \left(\frac{\partial \theta}{\partial T}, \frac{\partial \theta}{\partial X}, \theta \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial T} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 - (1 - \cos \theta),$$

en écrivant les équations de Lagrange pour le champ $\theta(X, T)$,

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \theta / \partial T)} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \theta / \partial X)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0.$$

À partir du Lagrangien, on construit le *tenseur énergie-impulsion*, en prenant des 4-vecteurs x_μ avec $x_0 = T$ (en pratique dans notre cas, il n'y a que deux coordonnées, avec $x_1 = X$). Ses composantes sont

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \theta / \partial x_\nu)} \frac{\partial \theta}{\partial x_\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}.$$

La densité d'énergie est T_{00} , dont on peut vérifier qu'elle redonne bien (V.34). Le courant d'énergie est T_{01} ,

$$T_{01} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \theta / \partial X)} \frac{\partial \theta}{\partial T} = - \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial T}.$$

4. Ce qui suit suppose une certaine familiarité avec la théorie Lagrangienne des champs, telle qu'exposée par exemple dans le livre de Goldstein [2], dont je reprends les notations.

La conservation de l'énergie est bien vérifiée,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{00}}{\partial T} + \frac{\partial T_{01}}{\partial X} &= \frac{\partial \theta}{\partial T} \frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} + \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial^2 \theta}{\partial T \partial X} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial T} - \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial^2 \theta}{\partial T \partial X} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \frac{\partial \theta}{\partial T} \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial T} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \sin \theta \right) = 0,\end{aligned}$$

là dernière égalité étant acquise par le fait que $\theta(X, T)$ est solution de sine-Gordon.

La densité de quantité de mouvement est

$$-T_{10} = -\frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial T},$$

qui permet de calculer la quantité de mouvement p d'une onde solitaire, à partir de (V.32),

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial T} \right) dX = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial T} d\theta = V \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{d\xi} d\theta = V \int_0^{2\pi} \frac{2}{\sqrt{1-V^2}} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{8V}{\sqrt{1-V^2}}$$

qui est bien la quantité de mouvement d'une particule relativiste de masse $m = 8$, animée d'une vitesse V (dans des unités où la vitesse de la lumière $c = 1$). Ce résultat peut être retrouvé directement à partir de la solution (V.33). Les "kinks" de SG se comportent bien comme des particules.

V.4.2 Recherche de solutions plus générales

Les considérations précédentes montrent que les kinks et anti-kinks se comportent d'une certaine façon comme des particules. Nous allons voir que l'on peut même calculer des solutions décrivant l'interaction élastique de deux de ces particules. Il existe des méthodes plus générales, nous allons nous en tenir au calcul le plus simple.

La première étape consiste à poser

$$\theta(x, t) = 4 \arctan \alpha(x, t).$$

On trouve alors

$$\sin \theta = \frac{4\alpha(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \alpha / \partial x^2}{1+\alpha^2} - \frac{2\alpha(\partial \alpha / \partial x)^2}{(1+\alpha^2)^2},$$

qui permet de réécrire (V.29) sous la forme

$$(1+\alpha^2) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - 2\alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 - (1+\alpha^2) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + 2\alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 = -\alpha(1-\alpha^2). \quad (\text{V.36})$$

On pose ensuite $\alpha(x, t) = f(x)/g(t)$. Les dérivées sont notées en mettant la variable correspondante en indice : $f_x \equiv df/dx$. Après quelques calculs, l'équation précédente se met sous la forme suivante :

$$f^2 \frac{g_{tt}}{g} + g^2 \frac{f_{xx}}{f} = \underbrace{-gg_{tt} + 2g_t^2 + g^2}_{\text{fonction de } t} \underbrace{-f f_{xx} + 2f_x^2 - f^2}_{\text{fonction de } x}. \quad (\text{V.37})$$

On élimine le second membre de cette équation en dérivant par x puis par t . On peut ainsi séparer les variables,

$$\frac{(f_{xx}/f)_x}{f f_x} = -\frac{(g_{tt}/g)_x}{g g_t} = -4q, \quad (\text{V.38})$$

où q est une constante réelle. Il est facile d'intégrer une première fois l'équation pour f , ce qui donne

$$f_{xx} = -2qf^3 + mf, \quad (\text{V.39})$$

où m est une nouvelle constante d'intégration. On multiplie les deux membres de cette équation par f_x et on intègre, pour obtenir

$$f_x^2 = -qf^4 + mf^2 + n. \quad (\text{V.40})$$

où n est une troisième constante. Le même travail peut être fait sur g . Les constantes m' et n' qui apparaissent alors ne sont pas indépendantes de m et n . En effet, il y a une relation d'implication simple de (V.37) vers (V.38), et la compatibilité des expressions pour f_{xx} , f_x , g_{tt} et g_t avec (V.37) impose

$$\begin{aligned} g_{tt} &= 2qg^3 + (m-1)g, \\ g_t^2 &= qg^4 + (m-1)g^2 - n. \end{aligned} \quad (\text{V.41})$$

V.4.3 Comportement physique de quelques solutions

Les équations (V.40) et (V.41) s'intègrent en terme de fonctions elliptiques pour toutes les valeurs des constantes. Dans certains cas, les solutions s'expriment simplement.

Où on retrouve l'onde solitaire...

Pour retrouver l'onde solitaire, nous allons chercher des solutions qui tendent vers $\theta = 0$, soit $\alpha = 0$ pour t fixé et $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow +\infty$. Il faut alors $n = 0$. Le cas le plus simple est alors $q = 0$. On trouve sans difficulté

$$\alpha(x, t) = \exp\left(\pm\sqrt{m}x \pm \sqrt{m-1}t\right),$$

valable lorsque $m > 1$, qui se ramène à la solution (V.33) avec $V = \sqrt{1-1/m} < 1$, soit aussi $m = 1/(1-V^2)$.

Intéraction élastique d'ondes solitaires (1) : collision kink-kink

Prenons maintenant $n \neq 0$, $q = 0$ et $m > 1$. Posons $f(x) = \sqrt{n/m}F(x)$ et $g(t) = \sqrt{n/(m-1)}G(t)$. Les équations (V.40) et (V.41) s'écrivent alors

$$\pm\sqrt{m}dx = \frac{dF}{\sqrt{1+F^2}} = d \operatorname{argsh}F, \quad \pm\sqrt{m-1}dt = \frac{dG}{\sqrt{G^2-1}} = d \operatorname{argch}G,$$

soit

$$\theta(x, t) = \pm 4 \arctan \frac{\sqrt{m-1} \operatorname{sh}\sqrt{m}x}{\sqrt{m} \operatorname{ch}(\sqrt{m-1}t)} \quad (\text{V.42})$$

Pour comprendre la signification de cette solution, regardons le comportement asymptotique correspondant au signe "+" aux grands $|t|$ et grands $|x|$. Il s'agit dans tous les cas de kinks, les excitations allant, depuis les x négatifs vers les x positifs, de $2p\pi$ à $2(p+1)\pi$. Les différentes limites sont les suivantes :

- Lorsque $t \rightarrow -\infty$ on a $\operatorname{ch}(\sqrt{m-1}t) \sim e^{-\sqrt{m-1}t}$ et donc (aux constantes multiplicatives près)

$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty : & \operatorname{sh}\sqrt{m}x \sim -e^{-\sqrt{m}x}, \quad \tan \frac{\theta}{4} \sim -e^{-\sqrt{m}x + \sqrt{m-1}t}, \quad (\text{kink } -2\pi \rightarrow 0, V > 0) \\ x \rightarrow +\infty : & \operatorname{sh}\sqrt{m}x \sim e^{+\sqrt{m}x}, \quad \tan \frac{\theta}{4} \sim +e^{\sqrt{m}x + \sqrt{m-1}t}, \quad (\text{kink } 0 \rightarrow 2\pi, V < 0) \end{cases}$$

- Lorsque $t \rightarrow +\infty$ on a $\operatorname{ch}(\sqrt{m-1}t) \sim e^{\sqrt{m-1}t}$ et donc

$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty : & \operatorname{sh}\sqrt{m}x \sim e^{-\sqrt{m}x}, \quad \tan \frac{\theta}{4} \sim -e^{-\sqrt{m}x - \sqrt{m-1}t}, \quad (\text{kink } -2\pi \rightarrow 0, V < 0) \\ x \rightarrow +\infty : & \operatorname{sh}\sqrt{m}x \sim e^{+\sqrt{m}x}, \quad \tan \frac{\theta}{4} \sim e^{\sqrt{m}x - \sqrt{m-1}t}, \quad (\text{kink } 0 \rightarrow 2\pi, V > 0) \end{cases}$$

La solution décrit la collision élastique à la position $x = 0$, à l'instant $t = 0$, de deux kinks contrapropagatifs de même vitesse $|V| = \sqrt{1-1/m}$ qui rebondissent l'un sur l'autre. Ces excitations semblent donc avoir une vraie individualité, et donc une analogie profonde avec une particule, et sont

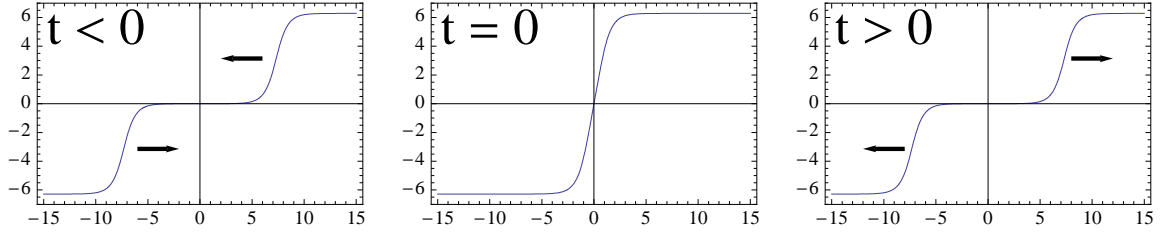


FIGURE V.10 – Collision élastique de deux kinks (V.42).

appelées *solitons*. Des méthodes plus avancées permettent de construire des solutions comportant un nombre quelconque de kinks.

Calculons l'énergie associée à cette solution. Comme elle est conservée, on le fait pour $t = 0$. On trouve alors en reportant (V.42) dans (V.34),

$$\begin{aligned}
 E &= 16m(m-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m-1 + (m+1) \operatorname{ch}(2\sqrt{m}x)}{[m+1 + (m-1) \operatorname{ch}(2\sqrt{m}x)]^2} dx \\
 &= 8a\sqrt{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a + \operatorname{ch}u}{[1 + a \operatorname{ch}u]^2} du, \quad \text{où } u \equiv 2\sqrt{m}x \text{ et } a \equiv \frac{m-1}{m+1} \\
 &= 16\sqrt{m} = \frac{16}{\sqrt{1-V^2}},
 \end{aligned}$$

soit effectivement l'énergie de deux kinks. Ce résultat était attendu, puisque l'énergie est conservée et que lorsque les deux kinks sont très éloignés l'un de l'autre leur énergie d'interaction doit être nulle.

Intéraction élastique d'ondes solitaires (2) : collision kink-antikink

Lorsque $n = 0$, $m > 1$ et $q \neq 0$, posons $f(x) = \sqrt{m/q}F(x)$ et $g(t) = \sqrt{(m-1)/q}G(t)$. Les équations (V.40) et (V.41) deviennent

$$\begin{aligned}
 \pm\sqrt{m}dx &= \frac{dF}{F\sqrt{1-F^2}} = d \log \frac{F}{1 + \sqrt{1-F^2}}, \\
 \pm\sqrt{m-1}dt &= \frac{dG}{G\sqrt{G^2+1}} = d \log \frac{G}{1 + \sqrt{1+G^2}},
 \end{aligned}$$

soit après un peu d'algèbre

$$\theta(x, t) = \pm 4 \arctan \frac{\sqrt{m} \operatorname{sh}\sqrt{m-1}t}{\sqrt{m-1} \operatorname{ch}(\sqrt{m}x)} \quad (\text{V.43})$$

Regardons la solution correspondant au signe "-". Pour $t \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow -\infty$, on a $\tan \frac{\theta}{4} \sim e^{\sqrt{m}x - \sqrt{m-1}t}$, soit un kink $0 \rightarrow 2\pi$ se propageant vers la droite, tandis que pour $x \rightarrow \infty$ on a $\tan \frac{\theta}{4} \sim e^{-\sqrt{m}x - \sqrt{m-1}t}$, soit un antikink $2\pi \rightarrow 0$ se propageant vers la gauche. Quand $t \rightarrow +\infty$ un antikink $0 \rightarrow -2\pi$ repart vers la gauche et un kink $-2\pi \rightarrow 0$ vers la droite.

Le calcul de l'énergie donne $E = 8m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{m}x)} dx = 16\sqrt{m}$, comme il se doit.

Etats liés : breathers

La dernière solution s'obtient comme la précédente, mais en choisissant $m < 1$. La solution pour $f(x)$ est donc la même, et on pose $g(t) = \sqrt{(1-m)/q}G(t)$. On a alors

$$\pm\sqrt{1-m}dt = \frac{dG}{G\sqrt{G^2-1}} = -d \left(\operatorname{arccot} \sqrt{G^2-1} \right),$$

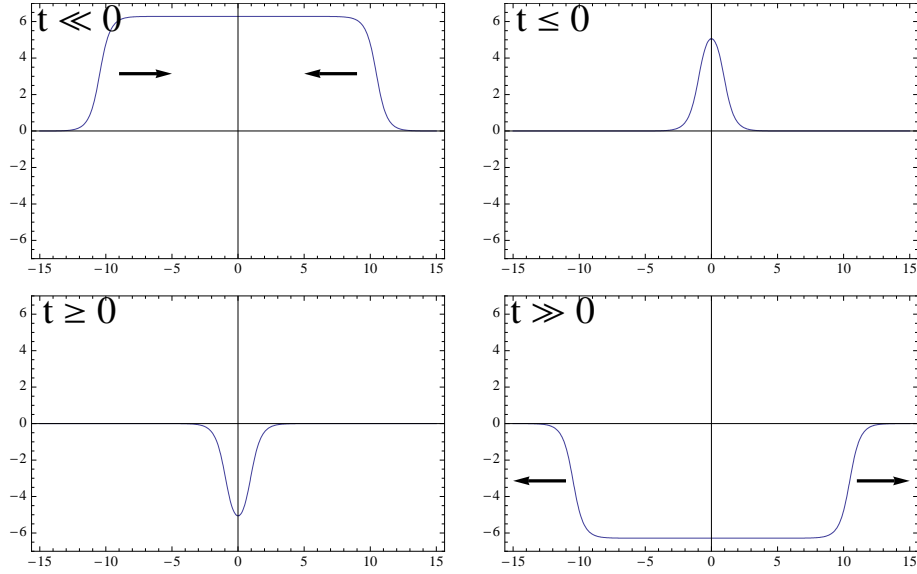


FIGURE V.11 – Collision élastique kink-antikink (V.43).

soit enfin

$$\theta(x, t) = \pm 4 \arctan \frac{\sqrt{m} \sin \sqrt{1-m} t}{\sqrt{1-m} \operatorname{ch}(\sqrt{m} x)} \quad (\text{V.44})$$

Cette solution n'est pas propagative⁵, il s'agit d'une oscillation périodique non linéaire appelée en Anglais *breather* (soit "respirateur"). C'est l'équivalent, pour un système non linéaire, d'une onde stationnaire. Avec un peu d'algèbre, on calcule l'énergie correspondante et on trouve comme pour la solution kink-antikink $16\sqrt{m}$, mais contrairement au cas précédent $m < 1$ pour un breather. L'équation de sine-Gordon ne contient pas de terme dissipatif (sans quoi aucune solution de type onde solitaire n'est envisageable), mais toute réalisation effective en comporte. Comme l'énergie d'un breather est inférieure à celle d'une paire kink-antikink, expérimentalement la collision d'un kink avec un antikink donne un breather, et une autre interprétation des breather est un état lié (puisque d'énergie inférieure) entre un kink et un antikink.

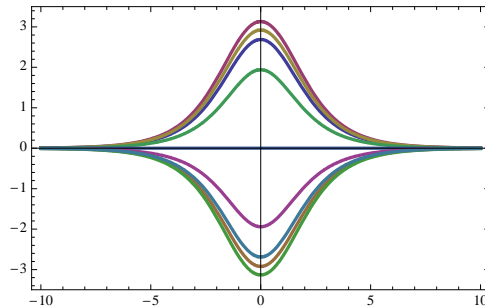


FIGURE V.12 – Breather, ou état lié kink-antikink (V.44). Les diverses courbes représentent la forme de l'excitation à divers instants.

5. On construit trivialement un breather propagatif en appliquant une transformation de Lorentz à la solution trouvée, puisque cette transformation laisse invariante sine-Gordon.

V.5 Indications bibliographiques

La propagation d'ondes dans un milieu dispersif est traitée de manière particulièrement profonde et claire dans le livre de Jackson [1]. La dispersion pour des ondes non linéaires (pas nécessairement solitoniques) est traitée dans le livre de Whitham [3].

On trouvera une exposition complète et claire de la méthode Lagrangienne pour les champs dans le livre de Goldstein [2].

Comme livre introductif, on pourra consulter [4], qui a l'avantage de présenter des illustrations expérimentales. Des films sont disponibles sur ce site [5], proposé par T. Dauxois qui est co-auteur de [6] avec M. Peyrard.

Passons aux ouvrages plus spécialisés sur les ondes non linéaires et les solitons. Je tâche de les classer par ordre de difficulté croissante !

- Pour avoir une vision globale, l'article de Fordy [7] est remarquable par sa concision et sa clarté. Il est disponible gratuitement sur <http://www.amsta.leeds.ac.uk/Pure/staff/wood/FordyWood/fordy.ps>
On y trouvera de nombreuses références.
- Le livre de Whitham [3] ne se limite pas aux solitons, mais constitue une bonne première approche. D'un niveau équivalent, citons le livre de Infeld et Rowland [8] qui a le mérite de ne pas se contenter de systèmes 1D (spatialement). Ces notes doivent beaucoup à ces ouvrages.
- Une des méthodes d'intégration de KdV et SG est la méthode de *diffusion inverse* (en anglais *inverse scattering*). Elle est particulièrement bien exposée, de façon à la fois claire et accessible, pour plusieurs équations non linéaires intégrables, dans le très bon livre de Drazin et Johnson [9].
- Le livre, très nettement plus difficile, de Newell [10] met en perspective les diverses propriétés des équations intégrables. Cette profondeur de vue et cet effort de synthèse doivent se mériter !

Bibliographie

- [1] J. D. Jackson. *Electrodynamique classique*. Dunod, 2001.
- [2] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 1980.
- [3] G.B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Wiley-interscience, 1974.
- [4] M. Remoissenet. *Waves called solitons*. Springer-Verlag, 1994.
- [5] T. Dauxois. http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/par_theme/.
- [6] M. Peyrard and T. Dauxois. *Physique des solitons*. EDP Sciences, 2004.
- [7] A.P. Fordy. A historical introduction to solitons and bäcklund transformations.
- [8] Eryk Infeld and George Rowlands. *Nonlinear waves, solitons and chaos*. Cambridge University Press, 1990.
- [9] P.G. Drazin and R.S. Johnson. *Solitons : an introduction*. Cambridge University Press, 1996.
- [10] A.C. Newell. *Solitons in mathematics and physics*. SIAM, 1985.