RESUME

Les mathématiques à vingt ans c'est la promesse de lier les notions scientifiques abstraites à une axiomatique crédible et simple, or dès qu'on met le nez dans l'axiome de l'ordinal infini et l'axiome de substitution on déchante. Il s'agit donc de développer une axiomatique où ces axiomes sont absents. Je montre qu'on peut remplacer ces axiomes par un seul axiome qui s'énonce : il existe un ensemble non fini. Plus précisément, on montre que c'est un modèle tronqué mais efficace de l'axiomatique naïve de Kuratowski et Halmos (sans l'axiome de l'ordinal infini et sans l'axiome de substitution) qui permet de fonder les mathématiques élémentaires sur 8 axiomes, 6 axiomes fixant l'alphabet et la grammaire d'une logique mathématique acceptable et deux axiomes permettant de donner des fondations solides aux bavardages mathématiques. Un outil mis au jour par cette axiomatique est l'axiome du choix qui affirme que dans une famille non vide d'ensembles non vides il existe une procédure logique permettant de choisir un élément et un seul dans chacun de ces ensembles, cet axiome est généralement utilisé sous sa forme ≪ lemme de Zorn ≫, lemme qui entraîne aussi l'existence d'un bon ordre sur chaque ensemble et permet ainsi de mettre en évidence une procédure logique de choix. Je rappelle que si on travaille avec l'axiome du choix, sans ordinal infini, et avec l'axiome de substitution tout ensemble de notre univers est fini puisque l'axiome de substitution entraîne que tout ensemble bien ordonné est en bijection avec un ordinal. Ainsi l'axiome du choix et la négation de l'axiome de l'ordinal infini nécessitent aussi la négation de l'axiome de substitution si on veut invoquer l'existence d'un ensemble non fini, cela montre qu'il faut faire un petit effort pour définir les ensembles d'entiers naturels. Après avoir défini les ensembles d'entiers naturels et montré que l'existence d'un tel ensemble est équivalente à l'existence d'un ensemble bien ordonné sans élément maximal, je montre que l'axiome du choix et l'existence d'un ensemble ≪ non fini ≫ entraînent l'existence d'un ensemble d'entiers naturels. L'existence des ensembles d'entiers naturels et leurs propriétés sont à la base de toutes les mathématiques puisque c'est à partir des entiers naturels qu'on peut construire tous les espaces numériques. Enfin mon axiomatique est plus faible que ZFC au sens ou toute conséquence de mon axiomatique sera aussi une conséquence de ZFC. A part quelques généralités qui servent de base commune à l'analyse et à l'algèbre, il y a peu de résultats d'algèbre, mais qu'il s"agisse de résultats d'analyse ou d'algèbre le jeu consiste à mettre en évidence leurs relations avec les axiomes de bases.

Table des matières

Première partie

Axiomatique naïve

Chapitre 1

Axiomatique naïve tronquée de Kuratowski et Halmos

1.1 *Axiomatique naïve*

Que demande t'on pour utiliser le langage ensembliste ? Il faut d'abord savoir manier les éléments d'une logique simple tel la négation et leurs rapports avec

1. les quantificateurs (*il existe, pour tout*) notés respectivement $(\exists, \forall)$
2. les connecteurs (*et, ou, implique*) auxquels on peut même rajouter *logiquement équivalent* qui sont notés respectivement $(\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$ ou plus simplement (et, ou, $\Rightarrow, \Leftrightarrow$)

Il faut aussi maîtriser le signe « appartient à » (noté $\in$) qu'on ne peut définir comme relation binaire entre ensembles sans avoir défini les relations binaires. Ainsi ce signe est un signe spécifique de la théorie des ensembles, et on doit préciser son utilisation dans les enoncés formels du langage logique associé, l'assertion

$$x \in A$$

n'est grammaticalement exacte que si A est un ensemble, elle se lit x est un élément de A ou x appartient à A. Ainsi une assertion du type : si $x \in A$ n'est qu'un raccourci commode de la phrase « si l'élément x appartient à l'ensemble A ».
De même une assertion du type : $\forall x \in A$ n'est qu'un raccourci commode de l'assertion « pour tout élément x appartenant à l'ensemble A » .
Enfin une assertion du type : $\exists x \in A$ n'est qu'un raccourci commode de l'assertion « il existe un élément x appartenant à l'ensemble A » .
Les premières règles de maniement et de formation des ensembles sont alors données par les 6 axiomes suivants

Axiome 1.1 ***<u>Axiome d' égalité</u>*** *Les ensembles A et B sont égaux si les assertions suivantes sont vérifiés :*

$$x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{et} \quad x \in B \Rightarrow x \in A$$

Le deuxième axiome permet de définir des ensembles à partir d'un énoncé logique.

Axiome 1.2 ***<u>spécification</u>*** *supposons que l'on dispose des données suivantes*

1. *un ensemble X*
2. *un énoncé logique $p(x)$ (auquel on peut attribuer une valeur « vrai » ou « faux ») dans lequel intervient un symbole x qui n'est pas immédiatement précédé d'un quantificateur.*

L'axiome de spécification affirme que l'objet constitué des éléments $x \in X$ tel que p(x) est vrai est un ensemble. Cet ensemble est unique et est noté

$$\{x \in X/p(x)\}.$$

Par exemple, si $p(x) : x \in Y$, alors l'objet $X \cap Y = \{x \in X/x \in Y\}$ est un ensemble. Cet axiome permet de définir une multitude d'ensembles mais il ne faut pas oublier deux choses, la première est que l'on doit partir d'un ensemble, et la deuxième est que la phrase ≪ l'ensemble des x appartenant à X tel que $p(x)$ est vrai ≫ doit avoir une signification (autrement dit $p(x)$ est de la forme indiqué en *2*).
A partir des symboles mathématiques x et y on peut créer un autre symbole (x, y) qui ne représente ni x ni y. Un tel symbole est appelé un couple.Les couples (x, y) et (x', y') sont égaux si et seulement si

$$x = x' \quad \text{et} \quad y = y'.$$

Si X et Y sont des ensembles, l'objet constitué de tout les symboles (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$ est appelé produit cartésien des ensembles X et Y. L'axiome qui suit affirme que le produit cartésien de deux ensembles est un ensemble. Il permet d'envisager des relations entre ensembles.

Axiome 1.3 ***Produit cartésien*** *Le produit cartésien $X \times Y$ des ensembles X et Y est un* **ensemble** *dont les éléments sont les couples (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$.*

Avant d'énoncer l'axiome suivant introduisons une définition

Définition 1.1 ***Sous-ensemble*** *Soit Xun ensemble ; la notation $A \subset X$ indique que l'énoncé*

$$x \in A \Rightarrow x \in X$$

est vrai, On dit alors que A est un sous-ensemble de X ou une partie de X.

L'axiome suivant affirme que, pour tout ensemble X, l'objet constitué par les sous-ensembles de X est un ensemble.

Axiome 1.4 *Soit X un ensemble ; il existe un ensemble noté $\mathcal{P}(X)$ dont les éléments sont les sous-ensembles de X.Cet ensemble est appelé l'ensemble des parties de X*

Le cinquième axiome affirme qu'on peut appeler ensemble un objet qui ne contient pas d'élément.

Axiome 1.5 ***Ensemble vide*** *Il existe un ensemble, appelé ensemble vide et noté $\varnothing$ qui ne contient aucun élément, autrement dit l'assertion $x \in \varnothing$ est toujours fausse. En particulier, pour tout ensemble A, $\varnothing \subset A$ (puisque $faux \Rightarrow vrai$).*

Le sixième axiome, dit axiome de l'union, affirme que si A et B sont des ensembles il existe un ensemble X tel que $A \subset X$ et $B \subset X$.

Axiome 1.6 ***(Union)*** *Si A et B sont des ensembles, il existe un ensemble X qui contient tous les éléments de A et de B, ainsi X vérifie*

$$A \subset X \quad \text{et} \quad B \subset X$$

L'axiome de l'union permet de montrer qu'il existe un plus petit ensemble qui contient des ensembles A et B.

Lemme 1.1 *Soit A et B des ensembles, il existe un unique ensemble $U_{A,B}$ qui vérifie les propriétés suivantes*

1. $A \subset U_{A,B}$ *et* $B \subset U_{A,B}$
2. *si X est un ensemble vérifiant $A \subset X$ et $B \subset X$ alors*

$$U_{A,B} \subset X.$$

Preuve

1. existence Considérons un ensemble X vérifiant $A \subset X$ et $B \subset X$, si $p(x)$ est l'assertion logique

$$p(x) : (x \in A) \quad \text{ou} \quad (x \in B)$$

l'axiome de spécification (1.2) permet d'affirmer que l'objet

$$U_{A,B} = \{x \in X / p(x)\}$$

est un ensemble. Or, si $x \in A$, $p(x)$ est vrai et $x \in U_{A,B}$, par suite $A \subset U_{A,B}$, de même $B \subset U_{A,B}$ ce qui montre que $U_{A,B}$ vérifie *1*. Enfin il faut montrer que si X est un ensemble tel que $A \subset X$ et $B \subset X$ alors

$$U_{A,B} \subset X.$$

Or l'assertion $x \in U_{A,B}$ signifie que au moins l'une des assertions $(x \in A)$,$(x \in B)$ est vérifiée
— si l'assertion $x \in A$ est vérifiée alors $x \in X$ puisque $A \subset X$
— si l'assertion $x \in B$ est vérifiée alors $x \in X$ puisque $B \subset X$

2. unicité si U' est un autre ensemble vérifiant *1* et *2* alors $U_{A,B} \subset U'$ puisque U' vérifie *1* et $U' \subset U_{A,B}$ puisque U' vérifie *2*.

■

Le lemme [1.1] permet d'introduire une définition

Définition 1.2 *Soit A et B des ensembles, on appelle* ***réunion*** *de A et B l'unique ensemble vérifiant les conditions 1 et 2 du lemme* [1.1]. *Cet ensemble est noté $A \cup B$, ainsi*

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \quad \text{ou} \quad (x \in B).$$

1.2 *Opérations sur les ensembles*

On vient de voir que pour définir la réunion des ensembles A et B à partir des premiers axiomes, il suffit de supposer qu'il existe un ensemble X tel que $A \subset X$ et $B \subset X$, ceci est le point de départ de la définition d'une famille d'ensembles.

Définition 1.3 *Un objet $\mathcal{F}$ constitué d'ensembles est appelé une famille d'ensembles si $\mathcal{F}$ est un ensemble et s'il existe un ensemble X tel que tout élément de $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de X.En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ pour un certain ensemble X.*

L'axiome [1.6] page 9 affirme que l'objet constitué des ensembles A et B est une famille.Pour définir la réunion d'une famille d'ensembles il suffit de recopier le lemme [1.1].

Lemme 1.2 *Soit $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles ; il existe un unique ensemble $U_{\mathcal{F}}$ qui vérifie les propriétés suivantes*

1. $\forall F \in \mathcal{F} \ F \subset U_{\mathcal{F}}$
2. *si X est un ensemble vèrifiant $\forall F \in \mathcal{F} \ F \subset X$ alors*

$$U_{\mathcal{F}} \subset X.$$

Preuve

1. Existence. Considérons un ensemble Y vérifiant $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(Y)$, si $p(x)$ est l'assertion logique

$$p(x) : [\ \exists\ F \in \mathcal{F} : (x \in F)]$$

l'axiome de spécification (1.2) permet d'affirmer que l'objet

$$U_{\mathcal{F}} = \{x \in Y/p(x)\} = \{x \in Y/\exists F \in \mathcal{F} : x \in F\}$$

est un ensemble. D'abord on montre que pour tout $F \in \mathcal{F}$,on a $F \subset U_{\mathcal{F}}$ Or, si $x \in F$ pour un $F \in \mathcal{F}$, $p(x)$ est vrai et $x \in U_{\mathcal{F}}$, par suite $F \subset U_{\mathcal{F}}$, ce qui montre que $U_{\mathcal{F}}$ vérifie *1.* Ensuite il faut montrer que si X est un ensemble tel que pour tout $F \in \mathcal{F}$ $F \subset X$ alors

$$U_F \subset X.$$

Or l'assertion $x \in U_{\mathcal{F}}$ signifie qu'il existe au moins un ensemble $F \in \mathcal{F}$ tel que $x \in F$, or par hypothèse $F \subset X$, ainsi $x \in U_{\mathcal{F}} \Rightarrow x \in X$ et

$$U_{\mathcal{F}} \subset X.$$

2. Unicité. si U' est un autre ensemble vérifiant *1* et *2* alors $U_{\mathcal{F}} \subset U'$ puisque U' vérifie *1* et $U' \subset U_{\mathcal{F}}$ puisque U' vérifie *2.*

■

Définition 1.4 *Soit $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles, on appelle* ***réunion*** *de la famille $\mathcal{F}$ l'unique ensemble vérifiant les conditions 1 et 2 du lemme* [1.2]*. Cet ensemble est noté $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$, ainsi*

$$x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \Leftrightarrow \exists F \in \mathcal{F} : x \in F$$

En gros la rèunion d'une famille est le plus petit ensemble contenant tout élément appartenant à au moins un ensemble de cette famille. Outre la réunion d'une famille d'ensembles on peut définir l'intersection d'ensembles

Lemme 1.3 *Soit $\mathcal{G}$ une famille non vide d'ensembles ; il existe un unique ensemble $I_{\mathcal{G}}$ vérifiant les propriétés suivante*

1. *pour tout $G \in \mathcal{G}$*

$$I_{\mathcal{G}} \subset G$$

2. *si X est un ensemble possédant la propriété que pour tout $G \in \mathcal{G}$ $X \subset G$ alors*

$$X \subset I_{\mathcal{G}}$$

Preuve

1. Existence. Soit $G_0 \in \mathcal{G}$, l'axiome [1.2] page 8 permet de définir l'ensemble

$$I_{\mathcal{G}} = \{x \in G_0/\forall G \in \mathcal{G} : x \in G\}$$

On montre que $I_{\mathcal{G}}$ vérifie *1.* et *2.*.

(a) par construction, tout élément de $I_{\mathcal{G}}$ appartient à chaque ensemble de $\mathcal{G}$, ainsi :

$$\forall G \in \mathcal{G}, I_{\mathcal{G}} \subset G$$

(b) si pour tout $G \in \mathcal{G}$, $X \subset G$ alors l'assertion $x \in X$ entraîne que pour tout $G \in \mathcal{G}$, $x \in G$, c'est à dire $x \in I_{\mathcal{G}}$, ainsi

$$X \subset I_{\mathcal{G}}.$$

2. Unicité. Si I' est un ensemble vérifiant *1* et *2* alors $I' \subset I_{\mathcal{G}}$ puisque I' vérifie *1* et $I_{\mathcal{G}} \subset I'$ puisque I' vérifie *2.*

$\blacksquare$

Le lemme [1.3] permet d'introduire une définition :

Définition 1.5 *Soit $\mathcal{G}$ une famille d'ensembles on appelle* ***intersection*** *de la famille $\mathcal{G}$ l'unique ensemble vérifiant les conditions 1 et 2 du lemme* [1.3]. *Cet ensemble est noté $\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G$, ainsi*

$$x \in \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G \Leftrightarrow \forall G \in \mathcal{G} : x \in G$$

En gros l'intersection d'une famille est le plus grand ensemble inclus dans tout élément de cette famille. Lorsque $\mathcal{G}$ ne contient que les ensembles A et B on note $A \cap B$ l'intersection de cette famille.Enfin on défini le complémentaire d' un ensemble.

Définition 1.6 *Soit X et A des ensembles, on appelle* ***complémentaire*** *de A dans X l'ensemble*

$$A^c \cap X = \{x \in X/x \notin A\}.$$

Le lemme suivant est d'usage courant.

Lemme 1.4 *Soit X un ensemble ;*
(i) Si A et B sont des sous-ensembles de X vérifiant $A \subset B$ alors

$$B^c \cap X \subset A^c \cap X$$

(ii) Si A, B, C et D sont des sous-ensembles de X tels que

$$A \subset B \text{ et } C \subset D$$

alors

$$A \cap C \subset B \cap D \text{ et } A \cup C \subset B \cup D$$

(iii) Si $\mathcal{G}$ est une famille de sous-ensembles de X, pour tout sous-ensemble A de X,

$$A \cap \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} A \cap G.$$

en particulier, si $\mathcal{G}$ est composée des ensembles B et C,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(iv) Si $\mathcal{G}$ est une famille de sous-ensembles de X, pour tout sous-ensemble A de X,

$$A \cup \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G = \bigcap_{G\in\mathcal{G}} A \cup G.$$

en particulier, si $\mathcal{G}$ est composée des ensembles B et C,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(v) Si $\mathcal{G}$ est une famille de sous-ensembles de X, pour tout sous-ensemble A de X,

$$A \cap \left(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c = \bigcap_{G\in\mathcal{G}} A \cap G^c.$$

(vi) Si $\mathcal{G}$ est une famille de sous-ensembles de X, pour tout sous-ensemble A de X,

$$A \cap \left(\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} A \cap G^c.$$

Preuve

$$(i)$$

C'est la négation logique de l'assertion
$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$
$$(ii)$$

D'abord on montre
$$A \cap C \subset B \cap D.$$
En effet, l'assertion $x \in A \cap C$ est l'assertion
$$x \in A \quad \text{et} \quad x \in C$$
l'hypothèse $A \subset B$ et $C \subset D$ entraîne alors
$$x \in B \quad \text{et} \quad x \in D$$
c'est à dire $x \in B \cap D$.
Ensuite on montre
$$A \cup C \subset B \cup D.$$
En effet, l'assertion $x \in A \cup C$ est l'assertion
$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in C$$
l'hypothèse $A \subset B$ et $C \subset D$ entraîne alors
$$x \in B \quad \text{ou} \quad x \in D$$
c'est à dire $x \in B \cup D$

$$(iii)$$

1. D'abord on montre
$$\bigcup_{G \in \mathcal{G}} A \cap G \subset A \cap \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G.$$
Par définition de la réunion (définition 1.4 page 11), pour tout $G \in \mathcal{G}$ on a $G \subset \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$,par suite, d'après (ii), pour tout $G \in \mathcal{G}$
$$A \cap G \subset A \cap \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$$
et la définition de la réunion entraîne
$$\bigcup_{G \in \mathcal{G}} A \cap G \subset A \cap \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$$

2. Ensuite on montre que
$$A \cap \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \subset \bigcup_{G \in \mathcal{G}} A \cap G.$$
Or si $x \in A \cap \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$ alors
$$(x \in A) \quad \text{et} \quad (\exists G \in \mathcal{G} : x \in G)$$
ainsi il existe $G \in \mathcal{G}$ tel que $x \in A \cap G$, c'est à dire
$$x \in \bigcup_{G \in \mathcal{G}} A \cap G.$$

(iv)

1. D'abord on montre
$$A \cup \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G \subset \bigcap_{G\in\mathcal{G}} A \cup G.$$
En effet, par définition de l'intersection (voir définition (1.5) page 12) on a , pour tout $G \in \mathcal{G}$, $\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G \subset G$, ainsi (ii) permet d'affirmer que pour tout $G \in \mathcal{G}$
$$A \cup \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G \subset A \cup G$$
la définition de l'intersection permet alors d'affirmer que
$$A \cup \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G \subset \bigcap_{G\in\mathcal{G}} A \cup G$$
2. Ensuite on montre
$$\bigcap_{G\in\mathcal{G}} A \cup G \subset A \cup \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G.$$
En effet, si $x \in \bigcap_{G\in\mathcal{G}} A \cup G$ alors pour tout $G \in \mathcal{G}$, $x \in A \cup G$,on examine l'alternative suivante
   (a) Soit il existe $G \in \mathcal{G}$ tel que $x \notin G$.
   (b) Soit pour tout $G \in \mathcal{G}$ $x \in G$.
   (a) Si il existe G_0 tel que $x \notin G_0$, l'appartenance de x à $A \cup G_0$ entraîne l'appartenance de x à A, Ainsi
$$x \in A \cup \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G.$$
   (b) Sinon, pour tout $G \in \mathcal{G}$, $x \in G$, par suite $x \in \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G$ et
$$x \in A \cup \bigcap_{G\in\mathcal{G}} G.$$

(v)

1. D'abord on montre
$$A \cap \left(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c \subset \bigcap_{G\in\mathcal{G}} A \cap G^c$$
D'après la définition de la réunion d'une famille (définition (1.4) page 11) pour tout $G \in \mathcal{G}$ on a $G \subset \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G$, (i) et (ii) permettent alors d'affirmer que pour tout $G \in \mathcal{G}$
$$A \cap \left(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c \subset A \cap G^c.$$
La définition de l'intersection (définition (1.5) page 12) montre alors que
$$A \cap \left(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c \subset \bigcap_{G\in\mathcal{G}} A \cap G^c$$

2. Ensuite on montre
$$\bigcap_{G\in\mathcal{G}} A\cap G^c \subset A\cap\left(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c.$$
Or, si $x\in\bigcap_{G\in\mathcal{G}} A\cap G^c$ alors
$$\forall G\in\mathcal{G}\ x\in A\cap G^c$$
en d'autres termes
$$(x\in A)\quad \text{et}\quad (\forall G\in\mathcal{G}\ x\in G^c)$$
mais la deuxième parenthèse est la négation logique de l'assertion $x\in\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G$, c'est à dire $x\in\left(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c$. Ainsi on obtient
$$x\in\bigcap_{G\in\mathcal{G}} A\cap G^c \Rightarrow (x\in A)\ et\ (x\in\left(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c).$$

(vi)

1. D'abord on montre
$$\bigcup_{G\in\mathcal{G}} A\cap G^c \subset A\cap\left(\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c$$
D'après la définition de l'intersection d'une famille (définition (1.5) page 12) pour tout $G\in\mathcal{G}$ on a $\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G\subset G$, (i) et (ii) permettent alors d'affirmer que pour tout $G\in\mathcal{G}$
$$A\cap G^c\subset A\cup\left(\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c.$$
La définition de la réunion (définition (1.4) page 11) montre alors que
$$\bigcup_{G\in\mathcal{G}} A\cap G^c \subset A\cap\left(\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c$$
2. Ensuite on montre que
$$A\cap\left(\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c \subset \bigcup_{G\in\mathcal{G}} A\cap G^c$$
Or, si $x\in A\cap\left(\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c$ alors $x\in A$ et $x\notin\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G$,mais l'assertion $x\notin\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G$ est la négation logique de l'assertion
$$\forall G\in\mathcal{G}: x\in G$$
qui s'écrit
$$\exists\ G\in\mathcal{G}: x\notin G.$$
Ainsi l'assertion $x\in A\cap\left(\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G\right)^c$ implique
$$(x\in A)\ et\ (\exists\ G\in\mathcal{G}: x\in G^c).$$

d'où

$$x \in A \cap \left(\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G \right)^c \Rightarrow (\exists\, G \in \mathcal{G} : x \in A \cap G^c)$$

et la parenthèse du second membre est l'assertion

$$x \in \bigcup_{G \in \mathcal{G}} A \cap G^c.$$

■

singleton

Si X est un ensemble non vide, un singleton de X est un sous-ensemble de X vérifiant l'assertion logique

$$p(A) : (x \in A) \quad \text{et} \quad (y \in A) \Rightarrow x = y.$$

L'ensemble

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{P}(X)/p(A)\}.$$

est appelé la famille des singletons de X. Si A est un singleton non vide contenant x on le note $A = \{x\}$. Il est clair que X est réunion de la famille de ses singletons non vide, on exprime cela en écrivant

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}.$$

Les six axiomes présentés permettent de définir quelques outils mathématiques.

1.3 *Relation, fonction, application*

1.3.1 *Relation*

Etablir une relation entre l'ensemble X et l'ensemble Y, c'est se donner un sous-ensemble non vide de $X \times Y$. Les axiomes [1.3] et [1.4] page 9 permettent d'affirmer que l'objet constitué des sous-ensembles de $X \times Y$ est un ensemble. La définition suivante est basée sur ces axiomes.

Définition 1.7 *Si X et Y sont des ensembles non vides, on appelle* ***relation*** *de X dans Y un sous-ensemble non vide de $X \times Y$. On note*

$$\mathrm{R}[X, Y] = \{R \in \mathcal{P}(X \times Y)/R \neq \varnothing\}$$

l'ensemble des relations de X dans Y

Remarquons que $\mathrm{R}[X, Y]$ est défini par spécification, c'est donc l'axiome [1.2] page 8 qui permet d'affirmer que c'est un ensemble. C'est aussi cet axiome qui permet de définir les ensembles suivants.

Définition 1.8 *Si X et Y sont des ensembles non vides et R est une relation de X dans Y*

1. *on appelle* ***domaine de définition*** *de R le sous-ensemble* $\mathrm{dom}(R)$ *de X défini par*

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \in X/\exists\, y \in Y : (x, y) \in R\}$$

2. *si A est un sous-ensemble de X, on appelle* ***image*** *de A par R le sous-ensemble $R(A)$ de Y défini par*

$$R(A) = \{y \in Y/\exists\, x \in A : (x, y) \in R\}$$

En particulier,lorsque A est le singleton $A = \{x\}$ on a

$$R(\{x\}) = \{y \in Y/(x, y) \in R\}$$

3. *On appelle **image** de R le sous-ensemble* $\mathrm{im}(R)$ *de Y défini par*

$$\mathrm{im}(R) = R(X) = \{y \in Y / \exists\ x \in X : (x, y) \in R\}.$$

4. *On appelle **relation inverse** ou **relation réciproque** de R la relation R^{-1} de Y dans X défini par*

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X / (x, y) \in R\}$$

5. *si B est un sous-ensemble de Y, on appelle **image réciproque** de B par R le sous-ensemble $R^{-1}(B)$ de X défini par*

$$R^{-1}(B) = \{x \in X / \exists\ y \in B : (x, y) \in R\}$$

En particulier,lorsque B est le singleton $B = \{y\}$, on a

$$R^{-1}(\{y\}) = \{x \in X / (x, y) \in R\}$$

Le lemme suivant est une conséquence directe des définitions.

Lemme 1.5 *On note X et Y des ensembles et R une relation de X dans Y.*
(i) Si A et B sont des sous-ensembles de X, alors

$$A \subset B \Rightarrow R(A) \subset R(B).$$

(ii) Si A et B sont des sous-ensembles de Y, alors

$$A \subset B \Rightarrow R^{-1}(A) \subset R^{-1}(B).$$

(iii) Si B est un sous-ensemble de Y

$$R^{-1}(B) \subset \mathrm{dom}(R),$$

de plus

$$x \in R^{-1}(B) \Leftrightarrow R(\{x\}) \cap B \neq \varnothing.$$

(iv) Si A est un sous-ensemble de X alors

$$A \cap \mathrm{dom}(R) \subset R^{-1}(R(A)).$$

De plus, si R possède la propriété suivante[1] *:*

$$\mathbf{i}(R) : [((x, y) \in R) \text{ et } ((x', y) \in R) \Rightarrow x = x'] \tag{1.1}$$

alors

$$R^{-1}(R(A)) = A \cap \mathrm{dom}(R)$$

(v) les égalités suivantes sont vérifiées :

1. $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{im}(R)$
2. $\mathrm{im}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$
3. $(R^{-1})^{-1} = R$.

(vi) Si B est un sous-ensemble de Y alors

$$B \cap \mathrm{im}(R) \subset R(R^{-1}(B)).$$

De plus, si R possède la propriété suivante[2] *:*

$$\mathbf{f}(R) : [((x, y) \in R) \quad \text{et} \quad ((x, y') \in R) \Rightarrow y = y'] \tag{1.2}$$

1. On dit que la relation R est injective, ou que R^{-1} est une fonction
2. On dit que la relation R est une fonction

alors

$$R(R^{-1}(B)) = B \cap \mathrm{im}(R)$$

(vii) *Si $\mathcal{G}$ est une famille de sous-ensembles de X et $R(\mathcal{G})$ est le sous-ensemble de $\mathcal{P}(Y)$ défini par*

$$R(\mathcal{G}) = \{B \in \mathcal{P}(Y) / \exists\ A \in \mathcal{G} : B = R(A)\}$$

alors

$$R(\bigcup_{A\in\mathcal{G}} A) = \bigcup_{B\in R(\mathcal{G})} B.$$

Cette égalité sera systématiquement notée

$$R(\bigcup_{A\in\mathcal{G}} A) = \bigcup_{A\in\mathcal{G}} R(A).$$

$(viii)$ *Si $\mathcal{G}$ est une famille de sous-ensembles de X et $R(\mathcal{G})$ est le sous-ensemble de $\mathcal{P}(Y)$ défini par*

$$R(\mathcal{G}) = \{B \in \mathcal{P}(Y) / \exists\ A \in \mathcal{G} : B = R(A)\}$$

alors

$$R(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) \subset \bigcap_{B\in R(\mathcal{G})} B.$$

Cette inclusion sera systématiquement notée

$$R(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{G}} R(A).$$

De plus, si R possède la propriété (1.1) *page* 17 *on a*

$$R(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) = \bigcap_{B\in R(\mathcal{G})} B.$$

Cette égalité sera systématiquement notée

$$R(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) = \bigcap_{A\in\mathcal{G}} R(A).$$

(ix) *Si $\mathcal{F}$ est une famille de sous-ensembles de Y et $R^{-1}(\mathcal{F})$ est le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ défini par*

$$R^{-1}(\mathcal{F}) = \{A \in \mathcal{P}(X) / \exists\ B \in \mathcal{F} : A = R^{-1}(B)\}$$

alors

$$R^{-1}(\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B) \subset \bigcap_{A\in R^{-1}(\mathcal{F})} A.$$

Cette inclusion sera systématiquement notée

$$R^{-1}(\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B) \subset \bigcap_{B\in\mathcal{F}} R^{-1}(B).$$

De plus, si R possède la propriétée (1.2) *page* 17 *on a*

$$R^{-1}(\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B) = \bigcap_{A\in R^{-1}(\mathcal{F})} A.$$

Cette égalité sera systématiquement notée

$$R^{-1}(\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B) = \bigcap_{B\in\mathcal{F}} R^{-1}(B).$$

Preuve

(i)

si $y \in R(A)$ alors il existe x appartenant à A tel que $(x, y) \in A$, il résulte de l'inclusion $A \subset B$ que $x \in B$. Par suite

$$\exists\, x \in B : (x, y) \in R,$$

ainsi $y \in R(B)$.

(ii)

C'est (i) appliqué à la relation R^{-1} de Y dans X.

(iii)

Si x appartient à $R^{-1}(B)$ il existe y appartenant à B tel que $(x, y) \in R$, en particulier, puisque $B \subset Y$

$$\exists\, y \in Y : (x, y) \in R,$$

ainsi $x \in \mathrm{dom}(R)$.

1. On montre d'abord $x \in R^{-1}(B) \Rightarrow R(\{x\}) \cap B \neq \varnothing$. Si x appartient à $R^{-1}(B)$ il existe y appartenant à B tel que $(x, y) \in R$, en particulier, $y \in R(\{x\}) \cap B$.
2. On montre ensuite $R(\{x\}) \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in R^{-1}(B)$. Si y appartient à $R(\{x\}) \cap B$ alors $y \in B$ et $(x, y) \in R$, par suite $x \in R^{-1}(B)$.

(iv)

Soit $x \in A \cap \mathrm{dom}(R)$,
- — puisque $x \in \mathrm{dom}(R)$ il existe $y \in Y$ tel que $(x, y) \in R$,
- — il résulte de $[x \in A$ et $(x, y) \in R]$ que $y \in R(A)$,
- — par suite il existe y dans $R(A)$ tel que $(x, y) \in R$ et $x \in R^{-1}(R(A))$.

Ceci montre que $A \cap \mathrm{dom}(R) \subset R^{-1}(R(A))$.
On montre maintenant que si R vérifie la propriété (1.1) page 17 alors

$$R^{-1}(R(A)) \subset A.$$

Si x appartient à $R^{-1}(R(A))$ il existe y appartenant à $R(A)$ tel que $(x, y) \in R$. En particulier, puisque $y \in R(A)$ il existe x' appartenant à A tel que $(x', y) \in A$, par suite

$$[(x, y) \in R\ (x', y) \in R,\ x' \in A]$$

la propriété (1.1) permet alors d'affirmer que $x = x'$,et ceci combiné au fait que $x' \in A$ permet d'affirmer que $x \in A$. Ainsi $R^{-1}(R(A)) \subset A$, comme par ailleur, d'après (iii) on a $R^{-1}(R(A)) \subset \mathrm{dom}(R)$ on obtient dans ce cas

$$R^{-1}(R(A)) = A \cap \mathrm{dom}(R).$$

(v)

1. $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{im}(R)$
   (a) D'abord on montre
   $$\mathrm{dom}(R^{-1}) \subset \mathrm{im}(R)$$
   Si y appartient à $\mathrm{dom}(R^{-1})$ alors il existe x appartenant à X tel que $(y, x) \in R^{-1}$, par suite $(x, y) \in R$ et $y \in \mathrm{im}(R)$.
   (b) Ensuite on montre
   $$\mathrm{im}(R) \subset \mathrm{dom}(R^{-1})$$
   Si y appartient à $\mathrm{im}(R)$ alors il existe x appartenant à X tel que $(x, y) \in R$, par suite $(y, x) \in R^{-1}$ et $y \in \mathrm{dom}(R^{-1})$.

2. $\mathrm{im}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$ est une conséquence des équivalences suivantes :

$$x \in \mathrm{im}(R^{-1}) \Leftrightarrow [\exists y \in Y : (y,x) \in R^{-1}] \Leftrightarrow [\exists y \in Y : (x,y) \in R] \Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(R)$$

3. $(R^{-1})^{-1} = R$
   (a) D'abord on montre
   $$(R^{-1})^{-1} \subset \ R$$
   Si (x,y) appartient à $(R^{-1})^{-1}$ alors $(y,x) \in R^{-1}$, par suite $(x,y) \in R$.
   (b) Ensuite on montre
   $$R \subset (R^{-1})^{-1}$$
   Si (x,y) appartient à R alors $(y,x) \in R^{-1}$, par suite $(x,y) \in (R^{-1})^{-1}$.

(vi)

En appliquant (iv) à la relation R^{-1} on obtient

$$B \cap \mathrm{dom}(R^{-1}) \subset (R^{-1})^{-1}(R^{-1}(B)),$$

ainsi (v) permet d'affirmer
$$B \cap \mathrm{im}(R) \subset R(R^{-1}(B)).$$
On montre maintenant que si R possède la propriété (1.2) page 17 alors R^{-1} possède la propriété (1.1) page 17. En effet, si $(y,x) \in R^{-1}$ et $(y',x) \in R^{-1}$ alors $(x,y) \in R$ et $(x,y') \in R$ et la propriété (1.2) permet alors d'affirmer que $y = y'$. Or l'application de (iv) à R^{-1} donne dans ce cas

$$B \cap \mathrm{dom}(R^{-1}) = (R^{-1})^{-1}(R^{-1}(B))$$

et (v) montre alors
$$B \cap \mathrm{im}(R) = R(R^{-1}(B)).$$

(vii)

1. D'abord on montre que pour tout $B \in R(\mathcal{G})$

   $$B \subset R(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A).$$

   En effet, si $B \in R(\mathcal{G})$ alors il existe $A_0 \in \mathcal{G}$ tel que $B = R(A_0)$, or par définition de la réunion on a $A_0 \subset \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A$, ainsi (i) permet d'affirmer

   $$R(A_0) \subset R(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A),$$

   autrement dit,
   $$B \subset R(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A).$$
   Par suite la définition de la réunion (voir définition [1.4] page 11) montre que

   $$\bigcup_{B \in R(\mathcal{G})} B \subset R(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A).$$

2. Ensuite on montre

$$R(\bigcup_{A\in\mathcal{G}} A) \subset \bigcup_{B\in R(\mathcal{G})} B.$$

En effet, si $y \in R(\bigcup_{A\in\mathcal{G}} A)$ alors il existe $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{G}} A$ vérifiant $(x, y) \in R$. En particulier il existe $A_y \in \mathcal{G}$ tel que $x \in A_y$ et $(x, y) \in R$. Ainsi A_y est un élément de $\mathcal{G}$ tel que $y \in R(A_y)$,il résulte alors du fait que $R(A_y) \in R(\mathcal{G})$ que :

$$y \in \bigcup_{B\in R(\mathcal{G})} B.$$

$(viii)$

1. On montre que pour tout $B \in R(\mathcal{G})$ l'inclusion $R(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) \subset B$ est vérifiée. En effet, si $B \in R(\mathcal{G})$ il existe $A_1 \in \mathcal{G}$ tel que $B = R(A_1)$,Par définition de l'intersection (voir définition [1.5] page 12) on a

$$\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A \subset A_1$$

ainsi (i) permet d'affirmer

$$R(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) \subset R(A_1),$$

autrement dit, pour tout $B \in R(\mathcal{G})$,

$$R(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) \subset B.$$

La définition de l'intersection montre alors que

$$R(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) \subset \bigcap_{B\in R(\mathcal{G})} B.$$

2. On montre maintenant que la propriété (1.1) page 17 entraîne l'égalité

$$R(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) = \bigcap_{B\in R(\mathcal{G})} B.$$

Si y est un élément de $\bigcap_{B\in R(\mathcal{G})} B$, alors pour tout $A \in \mathcal{G}$ on a, puisque $R(A) \in R(\mathcal{G})$, $y \in R(A)$. Fixons $A_0 \in \mathcal{G}$, il résulte de l'assertion $y \in R(A_0)$ qu'il existe $x_0 \in A_0$ tel que $(x_0, y) \in R$, j'affirme que pour tout $A \in \mathcal{G}$ l'élément x_0 est un élément de A. En effet, soit $A \in \mathcal{G}$, puisque $y \in R(A)$ il existe $x \in A$ vérifiant $(x, y) \in R$, ainsi on obtient

$$x \in A\ ,\ [(x_0, y) \in R\ et\ (x, y) \in R]$$

la propriété (1.1) page 17 entraîne alors

$$(x \in A)\ ,\ x = x_0$$

ce qui montre que pour tout $A \in \mathcal{G}$ x_0 est égal à un élément de A, par suite

$$x_0 \in \bigcap_{A\in\mathcal{G}} A\ et\ (x_0, y) \in R$$

autrement dit, $y \in R(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A)$, et

$$\bigcap_{B\in R(\mathcal{G})} B \subset R(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A).$$

■

Loi de composition des relations

Si X, Y et Z sont des ensembles non vides, on veut établir une relation de X dans Z au moyen d'une relation de X dans Y et d'une relation de Y dans Z.

Définition 1.9 *Si X, Y et Z sont des ensembles non vides, $R \subset X \times Y$ un sous-ensemble de $X \times Y$ et $S \subset Y \times Z$ un sous-ensemble de de $Y \times Z$, on appelle **composé** de S et de R le sous-ensemble $S \circ R$ de $X \times Z$ défini par*

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z / \ \exists \ y \in Y : (x, y) \in R, (y, z) \in S\}$$

Autrement dit, $(x, z) \in S \circ R$ si et seulement si on peut trouver un chemin $x \to y \to z$ avec $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in S$.

Proposition 1.1 *On note X, Y et Z des ensembles non vides, R une relation de X dans Y, S une relation de Y dans Z.*
(i) Pour que $S \circ R$ soit une relation de X dans Z il faut et il suffit que

$$\mathrm{im}(R) \cap \mathrm{dom}(S) \neq \varnothing,$$

on a alors

1. $\mathrm{dom}(S \circ R) = R^{-1}(\mathrm{dom}(S))$
2. $\mathrm{im}(S \circ R) = S(\mathrm{im}(R))$
3. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(ii) Si $A \subset X \times Y$ est un sous-ensemble de R et $B \subset Y \times Z$ est un sous-ensemble de S alors

$$B \circ A \subset S \circ R.$$

(iii) Si T est un ensemble et si
— $F \in \mathrm{R}[X, Y]$ *est une relation de X dans Y*
— $G \in \mathrm{R}[Y, Z]$ *est une relation de Y dans Z*
— $H \in \mathrm{R}[Z, T]$ *est une relation de Z dans T*
alors

$$(H \circ G) \circ F = \{(x, t) \in X \times T / G \cap (F(\{x\}) \times H^{-1}(\{t\})) \neq \varnothing\} = H \circ (G \circ F).$$

Preuve

(i)

1. D'abord on montre $\mathrm{im}(R) \cap \mathrm{dom}(S) \neq \varnothing \Rightarrow S \circ R \neq \varnothing$. En effet, si $y \in \mathrm{im}(R) \cap \mathrm{dom}(S) \neq \varnothing$ alors $y \in \mathrm{im}(R)$, ainsi il existe $x \in X$ tel que $(x, y) \in R$ et $y \in \mathrm{dom}(S)$ donc il existe $z \in Z$ tel que $(y, z) \in S$. Le couple (x, z) est donc un élément de $S \circ R$.
2. Ensuite on montre $S \circ R \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{im}(R) \cap \mathrm{dom}(S) \neq \varnothing$.En effet, si $x \in \mathrm{dom}(S \circ R)$ alors il existe $z \in Z$ tel que $(x, z) \in S \circ R$. En particulier il existe $y \in Y$ tel que $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in S$, cet élément appartient à $\mathrm{im}(R) \cap \mathrm{dom}(S)$.

On établit maintenant les assertions sur le domaine et l'image de $S \circ R$.

1. $\mathrm{dom}(S \circ R) = R^{-1}(\mathrm{dom}(S))$
   (a) D'abord on montre $\mathrm{dom}(S \circ R) \subset R^{-1}(\mathrm{dom}(S))$. En effet,si on a $x \in \mathrm{dom}(S \circ R)$ alors il existe $z \in Z$ tel que $(x, z) \in S \circ R$, ainsi il existe $y \in Y$ vérifiant $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in S$, or
   — puisque $(y, z) \in S$, $y \in \mathrm{dom}(S)$
   — puisque $y \in \mathrm{dom}(S)$ et $(x, y) \in R$ on obtient $x \in R^{-1}(\mathrm{dom}(S))$
   (b) Ensuite on montre $R^{-1}(\mathrm{dom}(S)) \subset \mathrm{dom}(S \circ R)$. Si $x \in R^{-1}(\mathrm{dom}(S))$ alors Il existe y appartenant à $\mathrm{dom}(S)$ tel que $(x, y) \in R$,
   — puisque $y \in \mathrm{dom}(S)$ il existe $z \in Z$ tel que $(y, z) \in S$
   — puisque $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in S$ on a $(x, z) \in S \circ R$, par suite $x \in \mathrm{dom}(S \circ R)$.

2. $\text{im}(S \circ R) = S(\text{im}(R))$
   (a) D'abord on montre $\text{im}(S \circ R) \subset S(\text{im}(R))$. Si $z \in \text{im}(S \circ R)$ alors il existe $x \in X$ tel que $(x, z) \in S \circ R$, ainsi il existe $y \in Y$ tel que $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in S$
   — puisque $(x, y) \in R$, on a $y \in \text{im}(R)$,
   — puisque $y \in \text{im}(R)$ et $(y, z) \in S$ on obtient $z \in S(\text{im}(R))$.
   (b) Ensuite on montre $S(\text{im}(R)) \subset \text{im}(S \circ R)$. Si $z \in S(\text{im}(R))$ alors il existe $y \in \text{im}(R)$ tel que $(y, z) \in S$
   — puisque $y \in \text{im}(R)$ il existe $x \in X$ tel que $(x, y) \in R$
   — puisque $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in S$, on a $(x, z) \in S \circ R$, et en particulier $z \in \text{im}(S \circ R)$.
3. L'égalité $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ provient des équivalences suivantes :

$$(z, x) \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow [\exists y \in Y : (x, y) \in R \textit{ et } (y, z) \in S] \Leftrightarrow$$

$$[\exists y \in Y : (z, y) \in S^{-1} \textit{ et } (y, x) \in R^{-1}] \Leftrightarrow (z, x) \in R^{-1} \circ S^{-1}.$$

(ii)

Si $(x, z) \in B \circ A$ alors il existe $y \in Y$ tel que $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in B$, les inclusions $A \subset R$ et $B \subset S$ entraînent donc

$$\exists y \in Y : (x, y) \in R \textit{ et } (y, z) \in S$$

par suite $(x, z) \in S \circ R$.

(iii)

1. D'abord on montre

$$(H \circ G) \circ F \subset \{(x, t) \in X \times T / G \cap (F(\{x\}) \times H^{-1}(\{t\})) \neq \varnothing\}.$$

   En effet, si $(x, t) \in (H \circ G) \circ F$, il existe y appartenant à Y tel que $(x, y) \in F$ et $(y, t) \in H \circ G$. Puisque $(y, t) \in H \circ G$, il existe z appartenant à Z vérifiant $(y, z) \in G$ et $(z, t) \in H$,
   — puisque $(x, y) \in F$ on a $y \in F(\{x\})$
   — puisque $(z, t) \in H$ on a $z \in H^{-1}(\{t\})$.
   Par suite

$$(y, z) \in G \cap F(\{x\}) \times H^{-1}(\{t\}).$$

2. Ensuite on montre

$$\{(x, t) \in X \times T / G \cap (F(\{x\}) \times H^{-1}(\{t\})) \neq \varnothing\} \subset (H \circ G) \circ F.$$

   En effet, si

$$(y, z) \in G \cap F(\{x\}) \times H^{-1}(\{t\})$$

   alors $(x, y) \in F$ et $[(y, z) \in G, (z, t) \in H]$ et cette dernière assertion montre que $(y, t) \in H \circ G$. Ainsi on obtient

$$(x, y) \in F \textit{ et } (y, t) \in H \circ G,$$

   c'est à dire $(x, t) \in (H \circ G) \circ F$.
3. Maintenant on montre

$$H \circ (G \circ F) \subset \{(x, t) \in X \times T / G \cap (F(\{x\}) \times H^{-1}(\{t\})) \neq \varnothing\}.$$

   En effet, si $(x, t) \in H \circ (G \circ F)$, il existe z appartenant à Z tel que $(x, z) \in G \circ F$ et $(z, t) \in H$. Puisque $(x, z) \in G \circ F$ il existe $y \in Y$ tel que $(x, y) \in F$ et $(y, z) \in G$
   — puisque $(x, y) \in F$ on a $y \in F(\{x\})$
   — puisque $(z, t) \in H$ on a $z \in H^{-1}(\{t\})$.

Ce qui montre que
$$(y,z) \in G \cap F(\{x\}) \times H^{-1}(\{t\}).$$

4. Enfin on montre
$$\{(x,t) \in X \times T/G \cap (F(\{x\}) \times H^{-1}(\{t\})) \neq \varnothing\} \subset H \circ (G \circ F).$$
En effet, si
$$(y,z) \in G \cap F(\{x\}) \times H^{-1}(\{t\})$$
alors $[(x,y) \in F, (y,z) \in G]$ et $(z,t) \in H$ et l'assertion entre crochets entraîne $(x,z) \in G \circ F$. Ainsi on obtient
$$(x,z) \in G \circ F \text{ et } (z,t) \in H,$$
c'est à dire $(x,t) \in H \circ (G \circ F)$.

■

Relation identique et loi de composition

Définition 1.10 *Si X est un ensemble non vide, on appelle* ***identité*** *de X la relation id_X de X dans X définie par*
$$id_X = \{(x,x') \in X \times X/x = x'\}$$

Les assertions suivantes s'utilisent systématiquement.

Proposition 1.2 *Soient X et Y des ensembles non vides ; on note $F \in \mathrm{R}[X,Y]$ une relation de X dans Y et $G \in \mathrm{R}[Y,X]$ une relation de Y dans X.*
(i) Si $A \subset X$ est un sous-ensemble non vide de X alors
$$F \circ id_A = F \cap (A \times Y).$$
(ii)Si $B \subset Y$ est un sous-ensemble non vide de Y alors
$$id_B \circ F = F \cap (X \times B).$$
(iii) Si $A \subset X$ est un sous-ensemble non vide de X vérifiant $id_A \subset G \circ F$ alors
$$A \subset \mathrm{im}(G) \cap \mathrm{dom}(F).$$
(iv) Si $A \subset X$ est un sous-ensemble non vide de X tel que $G \circ F \subset id_A$ alors
$$F^{-1} \cap (\mathrm{dom}(G) \times X) \subset G \cap (Y \times A).$$
(v) En particulier si $G \circ F = id_X$ et $F \circ G = id_Y$ alors
1. $\mathrm{im}(G) = \mathrm{dom}(F) = X$*,* $\mathrm{im}(F) = \mathrm{dom}(G) = Y$
2. $F^{-1} = G$.

Preuve

$$(i)$$

1. D'abord on montre $F \circ id_A \subset F \cap (A \times Y)$.
   Si $(x,y) \in F \circ id_A$ il existe $x' \in X$ tel que $(x,x') \in id_A$ et $(x',y) \in F$.
   — Puisque $(x,x') \in id_A$ on a $x \in A$ et $x = x'$
   — il résulte de l'égalité $x = x'$ et de l'assertion $(x',y) \in F$ que $(x,y) \in F$
   Ainsi on obtient $(x,y) \in F \cap (A \times Y)$

2. Ensuite on montre $F \cap (A \times Y) \subset F \circ id_A$.
   Si $(x, y) \in F \cap (A \times Y)$ alors $(x, x) \in id_A$ et $(x, y) \in F$, ainsi $(x, y) \in F \circ id_A$.

(ii)

1. D'abord on montre $id_B \circ F \subset F \cap (X \times B)$.
   Si $(x, y) \in id_B \circ F$ il existe $y' \in Y$ tel que $(x, y') \in F$ et $(y', y) \in id_B$.
   — Puisque $(y', y) \in id_B$ on a $y \in B$ et $y = y'$
   — il résulte de l'égalité $y = y'$ et de l'assertion $(x, y') \in F$ que $(x, y) \in F$
   Ainsi on obtient $(x, y) \in F \cap (X \times B)$
2. Ensuite on montre $F \cap (X \times B) \subset id_B \circ F$.
   Si $(x, y) \in F \cap (X \times B)$ alors $(x, y) \in F$ et $(y, y) \in id_B$, ainsi $(x, y) \in id_B \circ F$.

(iii)

Si $x \in A$ alors $(x, x) \in id_A$, il résulte de l'inclusion $id_A \subset G \circ F$ que $(x, x) \in G \circ F$. Ainsi, par définition de la composition, il existe $y \in Y$ tel que $(x, y) \in F$ et $(y, x) \in G$.
— Puisque $(x, y) \in F$ on a $x \in \mathrm{dom}(F)$
— Puisque $(y, x) \in G$ on a aussi $x \in \mathrm{im}(G)$

(iv)

Si $(y, x) \in F^{-1} \cap (\mathrm{dom}(G)) \times X)$ alors

$$y \in \mathrm{dom}(G) \textit{ et } (x, y) \in F,$$

l'assertion $y \in \mathrm{dom}(G)$ entraîne qu'il existe $x' \in X$ vérifiant $(y, x') \in G$, ainsi on obtient

$$(x, y) \in F \textit{ et } (y, x') \in G,$$

ce qui implique $(x, x') \in G \circ F$. L'inclusion $G \circ F \subset id_A$ montre alors que $x = x'$ et $x \in A$ en particulier on en déduit

1. $(y, x) \in Y \times A$
2. $(y, x) = (y, x')$ et par suite $(y, x) \in G$.

(v)

1. D'abord de l'inclusion $id_X \subset G \circ F$ et de (iii) il résulte

   $$X \subset \mathrm{dom}(F) \cap \mathrm{im}(G) \subset X.$$

   De même, de l'inclusion $id_Y \subset F \circ G$ et de (iii) on déduit

   $$Y \subset \mathrm{dom}(G) \cap \mathrm{im}(F) \subset Y.$$

2. (a) D'abord on montre $F^{-1} \subset G$. En effet, l'inclusion $G \circ F \subset id_X$ et (iv) entraînent, puisque $G \subset Y \times X$,

   $$F^{-1} \cap (\mathrm{dom}(G) \times X) \subset G,$$

   l'inclusion $F^{-1} \subset G$ résulte alors de l'égalité $\mathrm{dom}(G) = Y$.

   (b) Ensuite on montre $G \subset F^{-1}$. si $(y, x) \in G$, alors, puisque

   $$\mathrm{dom}(F) = X,$$

   il existe $y' \in Y$ tel que $(x, y') \in F$. Ainsi on obtient

   $$(y, x) \in G \textit{ et } (x, y') \in F$$

   par suite $(y, y') \in F \circ G$ et l'inclusion $F \circ G \subset id_Y$ montre que $y = y'$, Ainsi il résulte de l'assertion $(x, y') \in F$ que $(x, y) \in F$, d'où $(y, x) \in F^{-1}$.

■

1.3.2 *Fonction*

Une fonction f d'un ensemble non vide X dans un ensemble non vide Y est une *relation* de X dans Y vérifiant que pour tout élément x de $\mathrm{dom}(f)$ l'ensemble $f(\{x\})$ est un singleton. Cela signifie que la conjonction des assertions suivantes est vraie :

1. f est un sous-ensemble non vide de $X \times Y$
2. $y \in f(\{x\})$ *et* $y' \in f(\{x\}) \Rightarrow y = y'$.

Définition 1.11 *Soient X et Y des ensembles non vides ; un sous-ensemble non vide f de $X \times Y$ est appelé une **fonction** si l'assertion $p(f)$ suivante est vérifiée :*

$$p(f) : [(x, y) \in f \quad \text{et} \quad (x, y') \in f \Rightarrow y = y'].$$

L'ensemble

$$\mathrm{F}[X, Y] = \{f \in \mathrm{R}[X, Y]/p(f)\}$$

est appelé l'ensemble des fonctions de X dans Y.

En particulier, si $\mathcal{F} \subset \mathrm{F}[X, Y]$ est une famille de fonctions alors $\mathcal{F}$ est une famille de sous-ensembles de $X \times Y$ on peut donc considérer sa réunion (voir définition [1.4] page 11), on a souvent besoin de montrer que l'ensemble $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ est une fonction de X dans Y. Le lemme suivant donne des conditions simples permettant d'établir ce résultat.

Lemme 1.6 *On note X et Y des ensembles non vides.*
(i) Si $R \in \mathrm{R}[X, Y]$ est une relation de X dans Y et $f \in \mathrm{F}[X, Y]$ une fonction de X dans Y alors l'assertion $R \subset f$ entraîne

1. *R est une fonction,*
2. *$\mathrm{dom}(R) \subset \mathrm{dom}(f)$,*
3. *pour tout $x \in \mathrm{dom}(R)$ on a $R(\{x\}) = f(\{x\})$*

(ii) Si $g \in \mathrm{F}[X, Y]$ et $f \in \mathrm{F}[X, Y]$ sont des fonctions de X dans Y alors l'assertion $g \subset f$ est équivalente à la conjonction des assertions suivantes :

a) $\mathrm{dom}(g) \subset \mathrm{dom}(f)$,
b) pour tout $x \in \mathrm{dom}(g)$ on a $g(\{x\}) = f(\{x\})$

(iii) Si $g \in \mathrm{F}[X, Y]$ et $f \in \mathrm{F}[X, Y]$ sont des fonctions de X dans Y, pour que $g \cup f$ soit une fonction il faut et il suffit que la propriété suivante soit vérifiée :

$$[(x, y) \in g \quad \text{et} \quad (x, y') \in f] \Rightarrow y = y'.$$

on a alors

$$\mathrm{dom}(g \cup f) = \mathrm{dom}(g) \cup \mathrm{dom}(f) \text{ et } \mathrm{im}(g \cup f) = \mathrm{im}(g) \cup \mathrm{im}(f).$$

(iv) Si $\mathcal{F} \subset \mathrm{F}[X, Y]$ est une famille de fonctions de X dans Y, pour que l'ensemble $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ soit une fonction il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ vérifie la propriété suivante :

$$f \in \mathcal{F} \text{ et } g \in \mathcal{F} \Rightarrow f \cup g \in \mathrm{F}[X, Y]. \tag{1.3}$$

En particulier si $\mathcal{F}$ possède l'une des propriétés (1.4) ou (1.5) suivantes :

$$f \in \mathcal{F} \text{ et } g \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \varnothing \tag{1.4}$$

ou ([3])

$$f \in \mathcal{F} \text{ et } g \in \mathcal{F} \Rightarrow f \subset g \text{ ou } g \subset f \tag{1.5}$$

3. Dans le cas (1.5) on dit que $\mathcal{F}$ est totalement ordonnée par l'inclusion.

alors $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f$ *est une fonction.*
Enfin on a

$$\mathrm{dom}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f) = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{dom} f \; et \; \mathrm{im}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f) = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{im} f$$

Preuve

(i)

1. R est une fonction. En effet, si $(x, y) \in R$ *et* $(x, y') \in R$ alors l'inclusion $R \subset f$ montre que $(x, y) \in f$ *et* $(x, y') \in f$, f étant une fonction cette assertion entraîne $y = y'$.
2. On montre $\mathrm{dom}(R) \subset \mathrm{dom}(f)$. Si $x \in \mathrm{dom}(R)$ il existe $y \in Y$ tel que $(x, y) \in R$ l'inclusion $R \subset f$ entraîne $(x, y) \in f$, par suite $x \in \mathrm{dom}(f)$
3. $\forall x \in \mathrm{dom}(R), R(\{x\}) = f(\{x\})$
   (a) D'abord on montre que pour tout $x \in \mathrm{dom}(R)$ on a $R(\{x\}) \subset f(\{x\})$. En effet, si $y \in R(\{x\})$ alors $(x, y) \in R$, l'inclusion $R \subset f$ montre alors que $(x, y) \in f$, ainsi $y \in f(\{x\})$.
   (b) Ensuite on montre que pour tout $x \in \mathrm{dom}(R)$ on a $f(\{x\}) \subset R(\{x\})$. En effet, si $y \in f(\{x\})$ alors $(x, y) \in f$, d'autre part, l'assertion $x \in \mathrm{dom}(R)$ montre qu'il existe un élément y' de Y tel que $(x, y') \in R$. On obtient donc

$$(x, y) \in f \; et \; (x, y') \in R.$$

   L'inclusion $R \subset f$ entraîne alors

$$(x, y) \in f \; et \; (x, y') \in f.$$

   Il résulte du fait que f est une fonction que $y = y'$, l'assertion $(x, y') \in R$ montre alors que $(x, y) \in R$, c'est à dire $y \in R(\{x\})$.

(ii)

D'abord, si $g \subset f$ alors (i) montre que *a)* et *b)* sont vérifiés. Ensuite on montre que si *a)* et *b)* sont vérifiés alors $g \subset f$. Si $(x, y) \in g$ alors $x \in \mathrm{dom}(g)$ et $y \in g(\{x\})$, ainsi *b)* permet d'affirmer, puisque $g(\{x\}) = f(\{x\})$. que $y \in f(\{x\})$. Autrement dit on obtient $(x, y) \in f$.

(iii)

d'abord il est clair que si $f \cup g$ est une fonction l'assertion

$$(x, y) \in g \; et \; (x, y') \in f \Rightarrow y = y' \tag{1.6}$$

est vraie puisque $g \subset f \cup g$ et $f \subset f \cup g$. On montre maintenant que si (1.6) est vérifiée alors $f \cup g$ est une fonction. En effet, l'assertion

$$(x, y) \in f \cup g \quad \text{et} \quad (x, y') \in f \cup g$$

est vraie si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

1. $(x, y) \in f \quad \text{et} \quad (x, y') \in f$,
2. $(x, y) \in f \quad \text{et} \quad (x, y') \in g$,
3. $(x, y) \in g \quad \text{et} \quad (x, y') \in f$,
4. $(x, y) \in g \quad \text{et} \quad (x, y') \in g$

Si 1. ou 4. est vraie alors $y = y'$ puisque f et g sont des fonctions. Si 2 ou 3 est vraie alors (1.6) page 27 permet d'affirmer $y = y'$. Ainsi, sous l'hypothèse de (iii) on obtient

$$(x, y) \in f \cup g \; et \; (x, y') \in f \cup g \Rightarrow y = y',$$

autrement dit, $f \cup g$ est une fonction.
Enfin l'égalité $\mathrm{dom}(f \cup g) = \mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g)$ provient des équivalences suivantes :

$$x \in \mathrm{dom}(f \cup g) \Leftrightarrow [\exists y \in Y : (x, y) \in f] \quad \text{ou} \quad [\exists y \in Y : (x, y) \in g] \Leftrightarrow [x \in \mathrm{dom}(f)] \quad \text{ou} \quad [x \in \mathrm{dom}(g)].$$

De même l'égalité $\mathrm{im}(f \cup g) = \mathrm{im}(f) \cup \mathrm{im}(g)$ provient des équivalences suivantes :

$$y \in \mathrm{im}(f \cup g) \Leftrightarrow [\exists x \in X : (x, y) \in f] \quad \text{ou} \quad [\exists x \in X : (x, y) \in g] \Leftrightarrow [y \in \mathrm{im}(f)] \quad \text{ou} \quad [y \in \mathrm{im}(g)].$$

(iv)

D'abord, si $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ est une fonction, pour tout $f \in \mathcal{F}$ et pour tout $g \in \mathcal{F}$ l'inclusion

$$f \cup g \subset \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$$

et (i) montre que $f \cup g$ est une fonction. On montre maintenant que si $\mathcal{F}$ vérifie (1.3) page 26 alors $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ est une fonction. Si

$$(x, y) \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f \; et \; (x, y') \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$$

alors, par définition de la réunion, il existe un élément f de $\mathcal{F}$ tel que $(x, y) \in f$ et un élément g de $\mathcal{F}$ tel que $(x, y') \in g$, ainsi on obtient

$$(x, y) \in f \cup g \; et \; (x, y') \in f \cup g. \tag{1.7}$$

Or notre hypothèse est justement que si f et g sont des éléments de $\mathcal{F}$ alors $f \cup g$ est une fonction, ainsi (1.7) entraîne $y = y'$. Par suite on obtient

$$(x, y) \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f \quad \text{et} \quad (x, y') \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f \Rightarrow y = y'$$

et $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ est une fonction.
Pour montrer que sous l'hypothèse (1.4) page 26 l'ensemble $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ est une fonction il suffit de montrer :

$$f \in \mathrm{F}[X, Y], g \in \mathrm{F}[X, Y] \quad \text{et} \quad \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \varnothing \Rightarrow f \cup g \in \mathrm{F}[X, Y].$$

Or, si $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \varnothing$, l'assertion

$$(x, y) \in f \cup g \quad \text{et} \quad (x, y') \in f \cup g$$

entraîne

$$[(x, y) \in f \quad \text{et} \quad (x, y') \in f] \quad \text{ou} \quad [(x, y) \in g \; et \; (x, y') \in g]$$

puisque si $(x, y) \in f$ et $(x, y') \in g$ alors $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ et par hypothèse ce dernier ensemble est vide. Le fait que f et g sont des fonctions permet alors d'affirmer que $y = y'$. Ainsi, sous l'hypothèse (1.4) on obtient

$$(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \Rightarrow f \cup g \in \mathrm{F}[X, Y].$$

Or, on vient de voir que ceci entraîne que $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f$ est une fonction.

Sous l'hypothèse (1.5) page 26 on a

$$(f,g)\in\mathcal{F}\times\mathcal{F}\Rightarrow f\cup g=f \quad \text{ou} \quad f\cup g=g,$$

Ainsi (1.3) est vérifié et $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f$ est une fonction.

On montre maintenant $\operatorname{dom}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)=\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\operatorname{dom}(f)$

1. D'abord on montre $\operatorname{dom}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)\subset\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\operatorname{dom}(f)$. Si $x\in\operatorname{dom}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)$ alors il existe $y\in Y$ tel que $(x,y)\in\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f$, la définition de la réunion montre alors qu'il existe $f\in\mathcal{F}$ tel que $(x,y)\in f$, pour un tel f on a $x\in\operatorname{dom}(f)$, par suite :
$$\operatorname{dom}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)\subset\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\operatorname{dom}(f)$$
2. Ensuite on montre $\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\operatorname{dom}(f)\subset\operatorname{dom}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)$. Si $x\in\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\operatorname{dom}(f)$ alors il existe un élément f de $\mathcal{F}$ vérifiant $x\in\operatorname{dom}(f)$, pour un tel f il existe $y\in Y$ tel que $(x,y)\in f$, par suite il existe $y\in Y$ tel que $(x,y)\in\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f$. Ainsi on obtient
$$x\in\operatorname{dom}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)$$

On montre enfin $\operatorname{im}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)=\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\operatorname{im}(f)$

1. D'abord on montre $\operatorname{im}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)\subset\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\operatorname{im}(f)$. Si $y\in\operatorname{im}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)$ alors il existe $x\in X$ tel que $(x,y)\in\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f$, la définition de la réunion montre alors qu'il existe $f\in\mathcal{F}$ tel que $(x,y)\in f$, pour un tel f on a $y\in\operatorname{im}(f)$, par suite :
$$\operatorname{im}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)\subset\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\operatorname{im}(f)$$
2. Ensuite on montre $\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\operatorname{im}(f)\subset\operatorname{im}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)$. Si $y\in\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\operatorname{im}(f)$ alleors il existe un élément f de $\mathcal{F}$ vérifiant $y\in\operatorname{im}(f)$, pour un tel f il existe $x\in X$ tel que $(x,y)\in f$, par suite il existe $x\in X$ tel que $(x,y)\in\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f$. Ainsi on obtient
$$y\in\operatorname{im}(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f)$$

■

On utilisera souvent le fait que si une famille $\mathcal{F}$ vérifie (1.5) page 26 alors $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f$ est une fonction. Enfin si f et g sont des fonctions de X dans Y on ne rappellera plus que l'assertion $g\subset f$ est équivalente á : $\operatorname{dom}(g)\subset\operatorname{dom}(f)$ et $g(\{x\})=f(\{x\})$ pour tout $x\in\operatorname{dom}(g)$.

Notations usuelles sur les fonctions

Si l'appréhension d'une fonction comme sous-ensemble d'un ensemble produit se justifie comme application directe des six premiers axiomes, le fait que pour toute fonction f d'un ensemble X dans un ensemble Y l'ensemble $f(\{x\}) = \{y \in Y/(x,y) \in f\}$ ne contient qu'un seul élément si $x \in \mathrm{dom}(f)$ (par définition d'une fonction), montre que l'on peut construire une fonction en se donnant, pour certain élément de X, un et un seul élément de Y. On appellera $f(x)$ l'élément de Y qui vérifie $(x, f(x)) \in f$. Il faut distinguer entre *l'élément* $f(x)$ et *l'ensemble* $f(\{x\})$, ainsi, si A est un ensemble, une assertion du type $f(x) \in A$ est grammaticalement correcte alors que l'assertion $f(x) \subset A$ ne l'est pas. La lecture des textes mathématiques impose cependant de décrypter des phrases comme

— Soit $y = f(x)$ une fonction de X dans Y

— Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction de X dans Y

Ces phrases on toutes deux la signification suivante :

1. L'assertion $p(x,y) : y = f(x)$ est une assertion logique
2. l'ensemble
$$G(f) = \{(x,y) \in X \times Y/p(x,y)\} = \{(x,y) \in X \times Y/y = f(x)\}$$
est une fonction et pour tout $x \in \mathrm{dom}(G(f))$, $f(x)$ est l'unique élément de $G(f)(\{x\})$.

En accord avec cette convention on posera

$$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(G(f)) = \{x \in X/\exists\ y \in Y : (x,y) \in G(f)\}$$

et

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(G(f)) = \{y \in Y/\exists\ x \in X : (x,y) \in G(f)\}.$$

Pour des raisons encore inconnues, la fonction $G(f)$ est appelée le graphe de la fonction f. Si $x \mapsto f(x)$ est une fonction, $G(f)$ désignera systématiquement le graphe de la fonction f, avec ces conventions on a donc

$$(x,y) \in G(f) \Leftrightarrow y = f(x) \tag{1.8}$$

puisque $f(x)$ est l'unique élément de $G(f)(\{x\})$. Pour transcrire les constructions ensemblistes sur les fonctions il suffit de remplacer la phrase : soit $x \mapsto f(x)$ une fonction de X dans Y par la phrase suivante « si $G(f) = \{(x,y) \in X \times Y/y = f(x)\}$ est le graphe d'une fonction » . Pour l'exemple on traduit le lemme [1.6] page 26

Lemme 1.7 *On note X et Y des ensembles non vide.*
(i) Si $R \in \mathrm{R}[X,Y]$ est une relation de X dans Y et $x \mapsto f(x)$ une fonction de X dans Y alors l'assertion $R \subset G(f)$ entraîne

1. *R est le graphe d'une fonction r ,*
2. *$\mathrm{dom}(R) \subset \mathrm{dom}(f)$,*
3. *pour tout $x \in \mathrm{dom}(R)$ on a $r(x) = f(x)$*

(ii) Si $x \mapsto g(x)$ et $x \mapsto f(x)$ sont des fonctions de X dans Y de graphe $G(g)$ et $G(f)$ alors l'assertion $G(g) \subset G(f)$ est équivalente à la conjonction des assertions suivantes :

a) $\mathrm{dom}(g) \subset \mathrm{dom}(f)$*,*

b) pour tout $x \in \mathrm{dom}(g)$ on a $g(x) = f(x)$

(iii) Si $x \mapsto g(x)$ et $x \mapsto f(x)$ sont des fonctions de X dans Y de graphe $G(g)$ et $G(f)$, pour que $G(g) \cup G(f)$ soit le graphe d'une fonction il faut et il suffit que la propriété suivante soit vérifiée :

$$x \in \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(f) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

de plus si $h \in \mathrm{F[X,Y]}$ vérifie $G(h) = G(g) \cup G(f)$ alors

$$\mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(g) \cup \mathrm{dom}(f) \text{ et } \mathrm{im}(h) = \mathrm{im}(g) \cup \mathrm{im}(f).$$

et

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in \mathrm{dom}(g) \\ f(x) & si \quad x \in \mathrm{dom}(f) \end{cases}$$

(iv) Si $\mathcal{F} \subset \mathrm{F}[X,Y]$ est une famille de fonctions de X dans Y, pour que l'ensemble $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(f)$ soit le graphe d'une fonction il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ vérifie la propriété suivante : pour tout couple (f,g) de fonctions de $\mathcal{F}$ l'ensemble $G(f) \cup G(g)$ est le graphe d'une fonction. En particulier si $\mathcal{F}$ possède l'une des propriétés (1.9) ou (1.10) suivantes :

$$f \in \mathcal{F} \text{ et } g \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \varnothing \tag{1.9}$$

ou ([4])

$$f \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{F} \Rightarrow G(f) \subset G(g) \quad \text{ou} \quad G(g) \subset G(f) \tag{1.10}$$

alors $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(f)$ est le graphe d'une fonction.

Enfin si $G(h) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(f)$

$$\mathrm{dom}(h) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{dom}(f) \quad \text{et} \quad \mathrm{im}(h) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{im}(f)$$

et si $f \in \mathcal{F}$ alors

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f),\ h(x) = f(x)$$

Preuve

(i)

1. Si $(x,y) \in R$ *et* $(x,y') \in R$ alors $(x,y) \in G(f)$ *et* $(x,y') \in G(f)$, ainsi d'après (1.8) page 30 on obtient $y = y' = f(x)$. Si pour tout $x \in \mathrm{dom}(R)$ on note $r(x)$ l'unique élément de $R(\{x\})$ alors $R = G(r)$.
2. Si x est un élément de $\mathrm{dom}(R)$ il existe $y \in Y$ tel que $(x,y) \in R$, l'inclusion $R \subset G(f)$ entraîne $(x,y) \in G(f)$, par suite $x \in \mathrm{dom}(G(f))(= \mathrm{dom}(f))$.
3. Si $x \in \mathrm{dom}(R)$ on a $(x, r(x)) \in R$, l'inclusion $R \subset G(f)$ montre que $(x, r(x)) \in G(f)$ ainsi (1.8) page 30 permet d'affirmer $r(x) = f(x)$.

(ii)

d'après (i) la condition est nécessaire, on montre qu'elle est suffisante. Si $(x,y) \in G(g)$ alors $x \in \mathrm{dom}(g)$ et $y = g(x)$,ainsi *a)* entraîne $x \in \mathrm{dom}(f)$ et *b)* montre que $g(x) = f(x)$ par suite $(x, g(x)) = (x, f(x)) \in G(f)$.

(iii)

On montre que sous l'hypothèse de (iii) on a

$$(x,y) \in G(g) \cup G(f) \text{ et } (x,y') \in G(g) \cup G(f) \Rightarrow y = y'.$$

Or l'assertion $(x,y) \in G(g) \cup G(f)$ *et* $(x,y') \in G(g) \cup G(f)$ n'est vraie que si au moins l'une des assertions suivantes est vraie :

1. $(x,y) \in G(g)$ *et* $(x,y') \in G(g)$,
2. $(x,y) \in G(g)$ *et* $(x,y') \in G(f)$,
3. $(x,y) \in G(f)$ *et* $(x,y') \in G(g)$,

4. Dans le cas (1.10) on dira encore que $\mathcal{F}$ est totalement ordonnée par l'inclusion.

4. $(x, y) \in G(f)$ *et* $(x, y') \in G(f)$.

On examine ces éventualités.

1. Si 1 est vérifiée alors $y = y' = g(x)$.
2. Si 2 est vérifiée alors $x \in \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(f)$, $y = g(x)$ et $y' = f(x)$, ainsi l'hypothèse de (iii) permet d'affirmer que $y = g(x) = f(x) = y'$.
3. Si 3 est vérifiée alors $x \in \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(f)$, $y = f(x)$ et $y' = g(x)$, ainsi l'hypothèse de (iii) permet d'affirmer que $y = f(x) = g(x) = y'$,
4. Si 4 est vérifiée alors $y = y' = f(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{dom}(G(g) \cup G(f))$ l'ensemble

$$G(g) \cup G(f)(\{x\}) = \{y \in Y/(x, y) \in G(g) \cup G(f)\}$$

ne contient qu'un élément, si on le note $h(x)$ alors

$$G(h) = G(g) \cup G(f).$$

On montre maintenant que $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(g) \cup \mathrm{dom}(f)$ et

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in \mathrm{dom}(g) \\ f(x) & si \quad x \in \mathrm{dom}(f) \end{cases}$$

D'abord, puisque $G(g) \subset G(h)$ et $G(f) \subset G(h)$ (i) permet d'affirmer que $\mathrm{dom}(g) \subset \mathrm{dom}(h)$ et $h(x) = g(x)$ pour tout x et $\mathrm{dom}(g)$ et $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(h)$ avec $h(x) = f(x)$ pour tout x de $\mathrm{dom}(f)$.
Il reste à montrer que $\mathrm{dom}(h) \subset \mathrm{dom}(g) \cup \mathrm{dom}(f)$. Or, si $x \in \mathrm{dom}(h)$ alors $(x, h(x)) \in G(h)$ ainsi $(x, h(x)) \in G(g) \cup G(f)$, ce qui montre que $x \in \mathrm{dom}(g)$ ou $x \in \mathrm{dom}(f)$. L'assertion similaire pour $\mathrm{im}(h)$ est laissée au soin du lecteur.

(iv)

La preuve de (iv) est encore un copier-coller du lemme [1.6] page 26. On montre que sous l'hypothèse de (iv) on a

$$(x, y) \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(f) \quad \text{et} \quad (x, y') \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(f) \Rightarrow y = y'.$$

Or, l'assertion $(x, y) \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(f)$ et $(x, y') \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(f)$ entraîne qu'il existe des éléments $f \in \mathcal{F}$ et $f' \in \mathcal{F}$ tels que

$$(x, y) \in G(f) \quad \text{et} \quad (x, y') \in G(f').$$

Mais, par hypothèse, $G(f) \cup G(f')$ est le graphe d'une fonction, ainsi il existe une fonction $u : x \mapsto u(x)$ telle que

$$(x, y) \in G(u) \ et \ (x, y') \in G(u)$$

ce qui montre que $y = u(x) = y'$. Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{dom}(\bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(f))$ l'ensemble

$$(\bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(f))(\{x\}) = \{y \in Y/(x, y) \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(f)\}$$

ne contient qu'un élément, si on le note $h(x)$ alors

$$G(h) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(f).$$

Puisque pour tout élément f de $\mathcal{F}$ $G(f) \subset G(h)$, l'assertion (i) permet d'affirmer que $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(h)$ et $[x \in \mathrm{dom}(f) \Rightarrow f(x) = h(x)]$. On montre maintenant :

$$\mathrm{im}(h) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{im}(f).$$

1. D'abord on montre
$$\bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(h).$$
En effet, si $y \in \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{im}(f)$ alors il existe un élément f appartenant à $\mathcal{F}$ tel que $y \in \mathrm{im}(f)$, ainsi il existe $x \in X$ vérifiant $(x, y) \in G(f)$. Or, par définition de h, on a $G(f) \subset G(h)$, par suite $(x, y) \in G(h)$, c'est à dire $y \in \mathrm{im}(h)$.
2. Ensuite on montre
$$\mathrm{im}(h) \subset \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{im}(f).$$
Si $y \in \mathrm{im}(h)$ alors il existe un élément $x \in X$ tel que $(x, y) \in G(h)$, L'égalité $G(h) = \bigcup_{f\in\mathcal{F}} G(f)$ montre alors qu'il existe un élément f appartenant à $\mathcal{F}$ tel que $(x, y) \in G(f)$ ainsi $y \in \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{im}(f)$.

L'égalité similaire pour $\mathrm{dom}(h)$ est laissée au soin du lecteur. ■

Ainsi, si $x \mapsto f(x)$ est une fonction de X dans Y son graphe
$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y / y = f(x)\}$$
est une fonction au sens de la définition [1.11] page 26. Pour passer du formalisme $x \mapsto f(x)$ au formalisme ensembliste il suffit donc de considérer son graphe. Par exemple, suivant le définition [1.8] page 16, lorsque $x \mapsto f(x)$ est une fonction de X dans Y on défini

1. Si $A \subset X$, *l'image* de A par f est
$$f(A) = G(f)(A) = \{y \in Y/\exists\ x \in A : (x, y) \in G(f)\}$$
2. Si $B \subset Y$, *l'image réciproque* de B par f est
$$f^{-1}(B) = G(f)^{-1}(B) = \{x \in X/\exists\ y \in B : (x, y) \in G(f)\}$$

La traduction du lemme [1.5] page 17 sera utile.

Lemme 1.8 *On note X et Y des ensembles et $x \mapsto f(x)$ une fonction de X dans Y.*
(i) Pour tout sous-ensemble A de X,
$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists\ x \in \mathrm{dom}(f) \cap A : y = f(x).$$
En particulier, si A et A' sont des sous-ensembles de X qui vérifient $A \subset A'$ alors
$$f(A) \subset f(A').$$
(ii) Pour tout sous-ensemble B de Y,
$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } f(x) \in B.$$
En particulier, si B et B' sont des sous-ensembles de Y qui vérifient $B \subset B'$ alors
$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B').$$
(iii) Pour tout sous-ensemble B de Y,
$$f(f^{-1}(B)) = B \cap \mathrm{im}(f)$$
(iv) Pour tout sous-ensemble A de X,
$$A \cap \mathrm{dom}(f) \subset f^{-1}(f(A))$$

de plus, si f possède la propriété suivante ;

$$[x \in \mathrm{dom}(f), x' \in \mathrm{dom}(f), f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'] \tag{1.11}$$

alors

$$A \cap \mathrm{dom}(f) = f^{-1}(f(A))$$

(v) Si $\mathcal{G}$ est une famille de sous-ensembles de X et $f(\mathcal{G})$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(Y)$ défini par

$$f(\mathcal{G}) = \{B \in \mathcal{P}(Y) / \exists\ A \in \mathcal{G} : B = f(A)\}$$

alors

$$f(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A) = \bigcup_{B \in f(\mathcal{G})} B,$$

cette égalité sera systématiquement notée

$$f(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A) = \bigcup_{A \in \mathcal{G}} f(A)$$

(vi) Si $\mathcal{G}$ est une famille de sous-ensembles de X et $f(\mathcal{G})$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(Y)$ défini par

$$f(\mathcal{G}) = \{B \in \mathcal{P}(Y) / \exists\ A \in \mathcal{G} : B = f(A)\}$$

alors

$$f(\bigcap_{A \in \mathcal{G}} A) \subset \bigcap_{B \in f(\mathcal{G})} B,$$

cette inclusion sera systématiquement notée

$$f(\bigcap_{A \in \mathcal{G}} A) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{G}} f(A).$$

De plus, si f vérifie la propriété (1.11) page 34 alors,

$$f(\bigcap_{A \in \mathcal{G}} A) = \bigcap_{B \in f(\mathcal{G})} B,$$

cette égalité sera systématiquement notée

$$f(\bigcap_{A \in \mathcal{G}} A) = \bigcap_{A \in \mathcal{G}} f(A).$$

(vii) Si $\mathcal{E}$ est une famille de sous-ensembles de Y et $f^{-1}(\mathcal{E})$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ défini par

$$f^{-1}(\mathcal{E}) = \{A \in \mathcal{P}(X) / \exists\ B \in \mathcal{E} : A = f^{-1}(B)\}$$

alors

$$f^{-1}(\bigcup_{B \in \mathcal{E}} B) = \bigcup_{A \in f^{-1}(\mathcal{E})} A,$$

et

$$f^{-1}(\bigcap_{B \in \mathcal{E}} B) = \bigcap_{A \in f^{-1}(\mathcal{E})} A,$$

ces égalités seront systématiquement notées

$$f^{-1}(\bigcup_{B \in \mathcal{E}} B) = \bigcup_{B \in \mathcal{E}} f^{-1}(B)$$

et

$$f^{-1}(\bigcap_{B \in \mathcal{E}} B) = \bigcap_{B \in \mathcal{E}} f^{-1}(B)$$

Preuve

(i)

1. D'abord on montre $[y \in f(A) \Rightarrow \exists\ x \in \mathrm{dom}(f) \cap A : f(x) = y]$. En effet, si y est un élément de $f(A)$ alors il existe un élément x de A tel que $(x, y) \in G(f)$, cet élément est un élément de $A \cap \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$.
2. Ensuite on montre $[\exists\ x \in \mathrm{dom}(f) \cap A : f(x) = y \Rightarrow y \in f(A)]$. En effet, si x est un élément de $\mathrm{dom}(f) \cap A$ tel que $f(x) = y$ alors $(x, y) \in G(f)$ et $x \in A$, ainsi $y \in f(A)$.

Enfin, si $(A, A') \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X)$ vérifie $A \subset A'$ alors l'assertion $y \in f(A)$ entraîne qu'il existe $x \in \mathrm{dom}(f) \cap A$ tel que $y = f(x)$. Cet x est un élément de $\mathrm{dom}(f) \cap A'$ tel que $y = f(x)$, par suite $y \in f(A')$.

(ii)

1. D'abord on montre $[x \in f^{-1}(B) \Rightarrow x \in \mathrm{dom}(f)\ et\ f(x) \in B]$.En effet, si $x \in f^{-1}(B)$ alors il existe un élément y de B tel que $(x, y) \in G(f)$. Ainsi $x \in \mathrm{dom}(f)$ et, puisque $y = f(x)$ on obtient $f(x) \in B$.
2. Ensuite on montre $[x \in \mathrm{dom}(f)\ et\ f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)]$. En effet, si $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $f(x) \in B$ alors $(x, f(x))$ est un élément de $G(f)$ tel que $f(x) \in B$.

Enfin, si $(B, B') \in \mathfrak{P}(Y) \times \mathfrak{P}(Y)$ vérifie $B \subset B'$ alors l'assertion $x \in f^{-1}(B)$ entraîne $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $f(x) \in B$. Par suite on obtient $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $f(x) \in B'$, c'est à dire $x \in f^{-1}(B')$.

(iii)

1. D'abord on montre $B \cap \mathrm{im}(f) \subset f(f^{-1}(B))$. En effet, si $y \in B \cap \mathrm{im}(f)$ alors $y \in B$ et il existe un élément x de X tel que $(x, y) \in G(f)$,
   — Puisque $y \in B$ on a $x \in f^{-1}(B)$
   — puisque $y = f(x)$ on obtient $y \in f(f^{-1}(B))$.
2. Ensuite on montre $f(f^{-1}(B)) \subset B \cap \mathrm{im}(f)$. En effet, si $y \in f(f^{-1}(B))$ alors il existe $x \in \mathrm{dom}(f) \cap f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$
   — puisque $x \in f^{-1}(B)$ $f(x) \in B$, ainsi $y \in B$,
   — puisque $y = f(x)$ on a $y \in \mathrm{im}(f)$,
   ceci montre que $y \in B \cap \mathrm{im}(f)$.

(iv)

Si $x \in A \cap \mathrm{dom}(f)$ alors il existe $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G(f)$
— puisque $x \in A$, $y \in f(A)$,
— puisque $y = f(x)$ est un élément de $f(A)$ on obtient $x \in f^{-1}(f(A))$.
On montre maintenant que si f possède la propriété (1.11) page 34 alors

$$f^{-1}(f(A)) \subset A \cap \mathrm{dom}(f).$$

En effet, si $x \in f^{-1}(f(A))$ alors $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $f(x) \in f(A)$
— puisque $f(x) \in f(A)$ il existe un élément x' de $A \cap \mathrm{dom}(f)$ tel que $f(x) = f(x')$,
— la propriété (1.11) permet d'affirmer que $x = x'$,
— il résulte alors de $x' \in A \cap \mathrm{dom}(f)$ que $x \in A \cap \mathrm{dom}(f)$.
Ainsi si (1.11) est vrai

$$f^{-1}(f(A)) \subset A \cap \mathrm{dom}(f) \subset f^{-1}(f(A))$$

(v)

1. D'abord on montre
$$f(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A) \subset \bigcup_{B \in f(\mathcal{G})} B.$$
Si $y \in f(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A)$ alors il existe $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A$ tel que $y = f(x)$

— puisque $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{G}} A$ il existe un élément A de $\mathcal{G}$ tel que $x \in A$,

— puisque $y = f(x)$ on obtient $y \in f(A)$, ainsi $f(A)$ est un ensemble de $f(\mathcal{G})$ qui contient y

2. Ensuite on montre

$$\bigcup_{B\in f(\mathcal{G})} B \subset f(\bigcup_{A\in\mathcal{G}} A).$$

Par définition de la réunion il suffit de montrer que tout élément B de $f(\mathcal{G})$ vérifie

$$B \subset f(\bigcup_{A\in\mathcal{G}} A).$$

Or, si $B \in f(\mathcal{G})$ il existe $A \in \mathcal{G}$ tel que $B = f(A)$. L'inclusion $A \subset \bigcup_{A\in\mathcal{G}} A$ et (i) montre alors que

$$f(A) \subset f(\bigcup_{A\in\mathcal{G}} A),$$

autrement dit

$$B \subset f(\bigcup_{A\in\mathcal{G}} A).$$

(vi)

Par définition de l'intersection il suffit de montrer que tout élément B de $f(\mathcal{G})$ vérifie

$$f(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) \subset B.$$

Or, si $B \in f(\mathcal{G})$, il existe un élément A de $\mathcal{G}$ vérifiant $B = f(A)$, L'inclusion $\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A \subset A$ et (i) montre alors que

$$f(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) \subset f(A),$$

autrement dit

$$f(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A) \subset B.$$

On montre maintenant que si f possède la propriété (1.11) page 34 alors

$$\bigcap_{B\in f(\mathcal{G})} B \subset f(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A).$$

Si $y \in \bigcap_{B\in f(\mathcal{G})} B$ alors, pour tout $B \in f(\mathcal{G}))$, $y \in B$, et en particulier, pour tout $A \in \mathcal{G}$, $y \in f(A)$. Fixons $A_0 \in \mathcal{G}$, puisque $y \in f(A_0)$ il existe $x_0 \in \mathrm{dom}(f) \cap A_0$ tel que $y = f(x_0)$. On montre que pour tout A de $\mathcal{G}$, $x_0 \in A$. En effet, puisque pour tout A de $\mathcal{G}$ $y \in f(A)$ il existe $x \in \mathrm{dom}(f) \cap A$ tel que $y = f(x)$, par suite on a $f(x) = f(x_0) = y$ et la propriété (1.11) permet d'affirmer que $x_0 = x$. L'assertion $x \in A$ montre que

$$\forall A \in \mathcal{G}\ x_0 \in A$$

Ainsi

$$x_0 \in \bigcap_{A\in\mathcal{G}} A \ et\ y = f(x_0) \in f(\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A).$$

(vii)

1. D'abord on montre
$$\bigcup_{A\in f^{-1}(\mathcal{E})} A \subset f^{-1}(\bigcup_{B\in\mathcal{E}} B).$$
Par définition de la réunion il suffit de montrer que tout élément A de $f^{-1}(\mathcal{E})$ vérifie
$$A \subset f^{-1}(\bigcup_{B\in\mathcal{E}} B).$$
Or, si $A \in f^{-1}(\mathcal{E})$ alors il existe $B \in \mathcal{E}$ tel que $A = f^{-1}(B)$, l'inclusion $B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{E}} B$ et (ii) permet d'affirmer
$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\bigcup_{B\in\mathcal{E}} B),$$
autrement dit
$$A \subset f^{-1}(\bigcup_{B\in\mathcal{E}} B).$$
2. Ensuite on montre
$$f^{-1}(\bigcup_{B\in\mathcal{E}} B) \subset \bigcup_{A\in f^{-1}(\mathcal{E})} A.$$
si $x \in f^{-1}(\bigcup_{B\in\mathcal{E}} B)$ alors x vérifie $[x \in \mathrm{dom}(f)$ et $f(x) \in \bigcup_{B\in\mathcal{E}} B]$.
   — puisque $f(x) \in \bigcup_{B\in\mathcal{E}} B$ il existe $B \in \mathcal{E}$ tel que $f(x) \in B$, en particulier $x \in f^{-1}(B)$ pour un certain B de $\mathcal{E}$.
   — ainsi, puisque $f^{-1}(B)$ est un élément de $f^{-1}(\mathcal{E})$,
$$x \in \bigcup_{A\in f^{-1}(\mathcal{E})} A.$$

L'assertion similaire pour l'intersection est laissée au soin du lecteur. ■

Le décryptage des textes mathématiques necessite encore quelques définitions.

Quelques définitions usuelles

On débute par l'incontournable.

Définition 1.12 *Soit X et Y des ensembles ; un sous-ensemble non vide f de $X \times Y$ est appelé une* ***application*** *X dazns Y si*

1. *f est une fonction (voir définition* [1.11] *page* 26)
2. $\mathrm{dom}(f) = X$.

On note
$$\mathrm{A}[X,Y] = \{f \in \mathrm{F}[X,Y]/\mathrm{dom}(f) = X\}$$
l'ensemble des applications de X dans Y.

Les relations $R \subset X \times Y$ qui vérifient la propriété que R^{-1} est une fonction ont droit à une définition.

Définition 1.13 *Si X et Y sont des ensembles, une relation R de X dans Y est dite* ***injective*** *si R^{-1} est une fonction.*

Dans le cas où R est une fonction on parle de fonction injective.

Définition 1.14 *Si X et Y sont des ensembles, une relation f de X dans Y est appelée* ***fonction injective*** *si f et f^{-1} sont des fonctions. On note*

$$\mathrm{inj}[X,Y] = \{f \in \mathrm{F}[X,Y]/f^{-1} \in \mathrm{F}[Y,X]\}$$

l'ensemble des fonctions injectives.

Les relations $R \subset X \times Y$ telles que $\mathrm{im}(R) = Y$ sont dites surjective.

Définition 1.15 *Si X et Y sont des ensembles, une relation R de X dans Y est dite* ***surjective*** *si $\mathrm{im}(R) = Y$.*

Enfin une relation $f \subset X \times Y$ qui vérifient la propriété que f et f^{-1} sont des applications est appelée une bijection.

Définition 1.16 *Si X et Y sont des ensembles, une relation f de X dans Y est appelée une* ***bijection*** *si f et f^{-1} sont des applications. On note*

$$\mathrm{B}[X,Y] = \{f \in \mathrm{A}[X,Y]/f^{-1} \in \mathrm{A}[Y,X]\}$$

l'ensemble des bijections.

Le lemme suivant donne des propriétés nécessaires et suffisantes permettant d'affirmer qu'une relation satisfait l'une de ces définitions.

Lemme 1.9 *On note X et Y des ensembles.*
(i) Pour qu'une relation R de X dans Y soit injective il faut et il suffit que la propriété suivante soit vérifiée :

$$(x,y) \in R \quad \text{et} \quad (x',y) \in R \Rightarrow x = x'. \tag{1.12}$$

(ii) Pour qu'une fonction $x \mapsto f(x)$ de X dans Y soit injective il faut et il suffit que la propriété suivante soit vérifiée :

$$x \in \mathrm{dom}(f), x' \in \mathrm{dom}(f) \quad \text{et} \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'. \tag{1.13}$$

(iii) Pour qu'une fonction $x \mapsto f(x)$ de X dans Y soit surjective il faut et il suffit que la propriété suivante soit vérifiée :

$$\forall\ y \in Y, \exists\ x \in \mathrm{dom}(f) : f(x) = y. \tag{1.14}$$

(iv) Pour qu'une application f de X dans Y soit une bijection il faut et il suffit que f soit injective et surjective.

Preuve

(i)

Si (1.12) est vrai alors

$$(y,x) \in R^{-1}\ et\ (y,x') \in R^{-1} \Rightarrow (x,y) \in R\ et\ (x',y) \in R \Rightarrow x = x'.$$

Ainsi R^{-1} est une fonction .
Si R^{-1} est une fonction alors

$$(x,y) \in R\ et\ (x',y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R^{-1}\ et\ (y,x') \in R^{-1} \Rightarrow x = x'.$$

(ii)

Si (1.13) est vrai alors

$$(y,x) \in f^{-1}\ et\ (y,x') \in f^{-1} \Rightarrow y = f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Ainsi f^{-1} est une fonction.
Si f^{-1} est une fonction et $(x,x') \in \mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(f)$ vérifient $f(x) = f(x')$ alors $(f(x),x) \in f^{-1}$ *et* $(f(x),x') \in f^{-1}$ par suite $x = x'$.

(iii)

Si f est surjective alors $\mathrm{im}(f) = Y$, ainsi pour tout élément y de Y il existe $x \in X$ tel que $(x,y) \in f$, c'est à dire $y = f(x)$.

(iv)

D'abord on montre que si f est une application injective et surjective alors f est une bijection. Si f est injective f^{-1} est une fonction, le lemme [1.5] page 17 permet d'affirmer $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$, f étant surjective on obtient donc $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f) = Y$, par suite $f^{-1} \in \mathrm{A}[Y,X]$. Ensuite, si f est une bijection alors f^{-1} est une application par suite f est injective et l'égalité $Y = \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$ montre que f est surjective. ■

Si X, Y et Z sont des ensembles et $(f,g) \in \mathrm{A}[X,Y]\times\mathrm{A}[Y,Z]$ alors la composition $G(g)\circ G(f)$ des graphes de f et g (voir définition [1.9] page 22) est le graphe d'une unique application qu'on note $g\circ f$, le lemme suivant justifie et étudie cette notation.

Lemme 1.10 *On note X, Y et Z des ensembles non vides et*

$$\mathrm{D}(\circ) = \{(f,g) \in \mathrm{F}[X,Y]\times\mathrm{F}[Y,Z]/f^{-1}(\mathrm{dom}(g)) \neq \varnothing\}.$$

(i) Si $(f,g) \in \mathrm{D}(\circ)$ alors la relation $k_{f,g}$ de X dans Z définie par

$$k_{f,g} = \{(x,z) \in \mathrm{dom}(f)\times Z/(f(x),z) \in G(g)\}$$

est le graphe d'une fonction $k : x \mapsto k(x)$ qui vérifie

1. $\mathrm{dom}(k) = f^{-1}(\mathrm{dom}(g))$,
2. $G(k) = G(g)\circ G(f)$.

(ii)La relation ψ de $\mathrm{F}[X,Y]\times\mathrm{F}[Y,Z]$ dans $F[X,Z]$ définie par

$$\psi = \{((f,g),k) \in \mathrm{D}(\circ)\times\mathrm{F}[X,Z]/G(k) = G(g)\circ G(f)\}$$

est une fonction et $\mathrm{dom}(\psi) = \mathrm{D}(\circ)$. Si $(f,g) \in \mathrm{D}(\circ)$ on note $g\circ f$ l'unique fonction k de X dans Z qui vérifie $((f,g),k) \in \psi$. En notations usuelles la fonction $x \mapsto g\circ f(x)$ est la fonction définie par

$$\forall x \in f^{-1}(\mathrm{dom}(g)) \quad g\circ f(x) = g(f(x))$$

(iii) $\mathrm{A}[X,Y]\times\mathrm{A}[Y,Z] \subset \mathrm{D}(\circ)$ et pour tout $(f,g) \in \mathrm{A}[X,Y]\times\mathrm{A}[Y,Z]$ on a $f\circ g \in \mathrm{A}[X,Z]$. la relation $\underline{\psi}$ de $\mathrm{A}[X,Y]\times\mathrm{A}[Y,Z]$ dans $\mathrm{A}[X,Z]$ définie par

$$\underline{\psi} = \{((f,g),k) \in (\mathrm{A}[X,Y]\times\mathrm{A}[Y,Z])\times\mathrm{A}[X,Z]/G(k) = G(g)\circ G(f)\}$$

est le graphe d'une application qu'on note $(f,g) \mapsto g\circ f$.
(iv) si T est un ensemble non vide et si

- *$f \in \mathrm{A}[X,Y]$ est une application de X dans Y*
- *$g \in \mathrm{A}[Y,Z]$ est une application de Y dans Z*
- *$h \in \mathrm{A}[Z,T]$ est une application de Z dans T*

alors

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f).$$

Preuve

(i)

On montre $[(x,z) \in k_{f,g} \; et \; (x,z') \in k_{f,g} \Rightarrow z = z']$. En effet l'assertion

$$(x,z) \in k_{f,g} \; et \; (x,z') \in k_{f,g}$$

entraîne par définition $(f(x),z) \in g \; et \; (f(x),z') \in g$, ainsi l'égalité $z = z'$ provient du fait que g est une fonction. Ceci montre que $k_{f,g}$ est une fonction, ainsi le passage de la notation ensembliste à la notation usuelle montre que $k_{f,g} = G(k)$.

1. On prouve $\mathrm{dom}(k) = f^{-1}(\mathrm{dom}(g))$
   (a) D'abord, on montre $\mathrm{dom}(k) \subset f^{-1}(\mathrm{dom}(g))$. En effet, si $x \in \mathrm{dom}(k)$ alors il existe $z \in Z$ tel que $(x,z) \in k_{f,g}$
   — puisque $k_{f,g} \subset \mathrm{dom}(f) \times Z$ on a $x \in \mathrm{dom}(f)$,
   — puisque $(f(x),z) \in G(g)$ on a $f(x) \in \mathrm{dom}(g)$. Ainsi on obtient $x \in f^{-1}(\mathrm{dom}(g)) = \{x \in \mathrm{dom}(f)/f(x) \in \mathrm{dom}(g)\}$.
   (b) Ensuite on montre $f^{-1}(\mathrm{dom}(g)) \subset \mathrm{dom}(k)$. En effet, si $x \in f^{-1}(\mathrm{dom}(g))$ alors $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $f(x) \in \mathrm{dom}(g)$ et l'assertion $x \in \mathrm{dom}(g)$ entraîne qu'il existe $z \in Z$ vérifiant $(f(x),z) \in g$, pour un tel z on a $(x,z) \in xk_{f,g}$, par suite $x \in \mathrm{dom}(k)$.
2. On prouve $k_{f,g} = G(g) \circ G(f)$.
   (a) D'abord on montre $k_{f,g} \subset G(g) \circ G(f)$. En effet, si $(x,z) \in k_{f,g}$ alors $(x, f(x)) \in G(f)$ et $(f(x),z) \in G(g)$ par suite $(x,z) \in G(g) \circ G(f)$.
   (b) Ensuite on montre $G(g) \circ G(f) \subset k_{f,g}$. En effet, si $(x,z) \in G(g) \circ G(f)$ alors il existe $y \in Y$ vérifiant $(x,y) \in G(f) \; et \; (y,z) \in G(g)$,
   — puisque f est une fonction on a $y = f(x)$
   — puisque $y = f(x)$ et $(y,z) \in G(g)$ on obtient $(f(x),z) \in G(g)$
   ainsi $(x,z) \in k_{f,g}$.

(ii)

L'assertion $[((f,g),k) \in \psi \; et \; ((f,g),k') \in \psi]$ entraîne $G(k) = G(k')$, par suite $k = k'$. Puisque $\psi \subset \mathrm{D}(\circ) \times F[X,Z]$ on a $\mathrm{dom}(\psi) \subset \mathrm{D}(\circ)$, d'autre part, (i) permet d'affirmer que si $(f,g) \in \mathrm{D}(\circ)$ alors il existe une fonction $k \in \mathrm{F}[X,Z]$ tel que $G(k) = G(g) \circ G(f)$, cette fonction vérifie $((f,g),k) \in \psi$ par suite on a aussi $\mathrm{D}(\circ) \subset \mathrm{dom}(\psi)$. D'après (i) on a, en passant de la notation ensembliste à la notation usuelle,

$$G(g \circ f) = \{(x,z) \in \mathrm{dom}(f) \times Z/(f(x),z) \in G(g)\} = \{(x,z) \in \mathrm{dom}(f) \times Z/z = g(f(x))\}$$

(iii)

Si $(f,g) \in \mathrm{A}[X,Y] \times \mathrm{A}[Y,Z]$ alors $\mathrm{dom}(g) = Y$ et $\mathrm{dom}(f) = X$ par suite

$$f^{-1}(\mathrm{dom}(g)) = f^{-1}(Y) = \mathrm{dom}(f) = X.$$

Ceci montre que $\mathrm{A}[X,Y] \times \mathrm{A}[Y,Z] \subset \mathrm{D}(\circ))$ et que si $f \in \mathrm{A}[X,Y]$ et $g \in \mathrm{A}[Y,Z]$ alors

$$\mathrm{dom}(g \circ f)) = f^{-1}(\mathrm{dom}(g)) = X,$$

ainsi $g \circ f \in \mathrm{A}[X,Z]$. Enfin, puisque

$$\underline{\psi} = \psi \cap (\mathrm{A}[X,Y] \times \mathrm{A}[Y,Z]) \times \mathrm{A}[X,Z]$$

$\underline{\psi}$ est une fonction et

$$\mathrm{dom}(\underline{\psi}) = \mathrm{dom}(\psi) \cap (\mathrm{A}[X,Y] \times \mathrm{A}[Y,Z]) = \mathrm{D}(\circ) \cap (\mathrm{A}[X,Y] \times \mathrm{A}[Y,Z])$$

. et l'inclusion $(\mathrm{A}[X,Y] \times \mathrm{A}[Y,Z]) \subset \mathrm{D}(\circ)$ montre alors que

$$\mathrm{dom}(\underline{\psi}) = \mathrm{A}[X,Y] \times \mathrm{A}[Y,Z],$$

par suite $\underline{\psi}$ est une application à valeurs dans $\mathrm{A}[X, Z]$.

(iv)

En passant aux graphes on obtient, puisque par définition $G(f \circ g) = G(f) \circ G(g)$,

$$G((h \circ g) \circ f)) = G(h \circ g) \circ G(f) = (G(h) \circ G(g)) \circ G(f)$$

et

$$G(h \circ (g \circ f)) = G(h) \circ G(g \circ f) = G(h) \circ (G(g)) \circ G(f)$$

or la proposition [1.1] page 22 permet d'affirmer que

$$(G(h) \circ G(g)) \circ G(f) = G(h) \circ (G(g) \circ G(f))$$

ainsi $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont même graphe. ■

L'axiome suivant concerne l'existence d'un ensemble ≪ non fini ≫. Un ensemble X est dit fini si le seul sous-ensemble de X en bijection avec X est X.

Définition 1.17 *Un ensemble X est dit **fini** si*

$$A \subset X \quad \text{et} \quad \mathrm{B}[A, X] \neq \varnothing \Rightarrow A = X$$

L'axiome suivant dit axiome de l'infini est un enoncé simple.

Axiome 1.7 ***Axiome de l'infini*** *: il existe un ensemble non fini.*

On étudie maintenant l'axiome du choix et le lemme de Zorn.

Chapitre 2

Axiome du choix et lemme de Zorn

2.1 *Ensemble Ordonné*

2.1.1 *Définition de la notion d'ordre et énoncé de l'axiome du choix*

On définit une relation d'ordre.

Définition 2.1 *On note X un ensemble non vide, une relation O de X dans X (c'est à dire un sous-ensemble non vide O de $X \times X$) est appelée une* **relation d'ordre** *si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *O est réflexive : $\forall\, x \in X,\ (x, x) \in O$,*
2. *O est transitive : $(x, y) \in O$ et $(y, z) \in O \Rightarrow (x, z) \in O$,*
3. *O est antisymétrique : $(x, y) \in O$ et $(y, x) \in O \Rightarrow x = y$.*

Si O est une relation d'ordre sur X alors

$$\mathrm{dom}(O) = \mathrm{im}(O) = X$$

Lorsque $(x, y) \in O$ on dit que x est inférieur à y et on le note $x \leq y$. Si O est une relation d'ordre alors O^{-1} est une relation d'ordre, lorsque $(x, y) \in O^{-1}$ on dit que x est supérieur à y et on le note $x \geq y$. Dans cette notation les propriétés caractérisant une relation d'ordre s'écrivent :

1. $\forall\, x \in X,\ x \leq x$,
2. $(x \leq y)$ et $(y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$,
3. $(x \leq y)$ et $(y \leq x) \Rightarrow x = y$.

Définition 2.2 *On appelle* **ensemble ordonné** *un couple (X, O) où*
- *X est un ensemble non vide,*
- *O est une relation d'ordre sur X.*

On notera quelquefois $(X, \leq)$ un ensemble ordonné.

Définition 2.3 *Si (X, O) est un ensemble ordonné et $A \subset X$ est un sous-ensemble non vide de X on appelle* **ordre induit** *par O sur A la relation*

$$O_A = O \cap (A \times A).$$

On vérifie aisément que O_A est une relation d'ordre sur A. Dans un ensemble ordonné on n'a pas forcément $x \leq y$ ou $y \leq x$, si c'est le cas on dit que les éléments x et y sont comparables.

Définition 2.4 *Si (X,O) est un ensemble ordonné on dit que les éléments $x \in X$ et $y \in Y$ sont* ***comparables*** *si*

$$(x,y) \in O \quad \text{ou} \quad (y,x) \in O.$$

Si des éléments quelconques de X sont comparables pour un ordre O on dit que (X,O) est totalement ordonné.

Définition 2.5 *Un ensemble ordonné (X,O) est dit* ***totalement ordonné*** *si :*

$$(x,y) \in X \times X \Rightarrow [(x,y) \in O \quad \text{ou} \quad (y,x) \in O]$$

Ainsi, dire qu'un ensemble est totalement ordonné c'est dire que si $(x,y) \in X \times X$ alors $x \leq y$ ou $y \leq x$. Les notions de majorant, minorant, borne supérieure ou inférieure, élément maximal ou minimal jouent un rôle fondamental en analyse.

Définition 2.6 *Si (X,O) est un ensemble ordonné et $A \subset X$ un sous-ensemble non vide de X on dit qu'un élément $x \in X$ est un* ***majorant*** *de A pour l'ordre O si*

$$a \in A \Rightarrow (a,x) \in O.$$

On note

$$\mathrm{Maj}(A,O) = \{x \in X / \forall\ a \in A : (a,x) \in O\}$$

l'ensemble des majorants de A pour l'ordre O

Ainsi, dire que x est un majorant de A, c'est dire que pour tout $a \in A$ on a $a \leq x$. Lorsque A est le singleton $\{x\}$ on dispose d'une notation imagée pour $\mathrm{Maj}(\{x\},O)$:

$$[x, \rightarrow [= \mathrm{Maj}(\{x\},O) = \{y \in X/(x,y) \in O\} = \{y \in X/x \leq y\}.$$

Si on remplace O par O^{-1} on obtient la définition d'un minorant.

Définition 2.7 *Si (X,O) est un ensemble ordonné et $A \subset X$ un sous-ensemble non vide de X on dit qu'un élément $x \in X$ est un* ***minorant*** *de A pour l'ordre O si*

$$a \in A \Rightarrow (x,a) \in O.$$

On note

$$\mathrm{Min}(A,O) = \{x \in X / \forall\ a \in A : (x,a) \in O\}$$

l'ensemble des minorants de A pour l'ordre O

Lorsque A est le singleton $\{x\}$ on note

$$] \leftarrow, x] = \mathrm{Min}(\{x\},O) = \{y \in X/(y,x) \in O\} = \{y \in X/y \leq x\}.$$

Un majorant de A qui est un élément de A est appelé un plus grand élément ou un maximum.

Définition 2.8 *On note (X,O) un ensemble ordonné et $A \subset X$ un sous-ensemble non vide de X.Un élément $x \in X$ est appelé un* ***plus grand élément*** *de A pour l'ordre O ou un* ***maximum*** *de A pour O si $x \in A \cap \mathrm{Maj}(A,O)$.*

Un minorant de A qui est un élément de A est appelé un plus petit élément ou un minimum.

Définition 2.9 *On note (X,O) un ensemble ordonné et $A \subset X$ un sous-ensemble non vide de X.Un élément $x \in X$ est appelé un* ***plus petit élément*** *de A pour l'ordre O ou un* ***minimum*** *de A pour O si $x \in A \cap \mathrm{Min}(A,O)$.*

La borne supérieure d'un sous-ensemble A d'un ensemble ordonné est le plus petit élément de $\mathrm{Maj}(A,O)$.

Définition 2.10 *On note (X, O) un ensemble ordonné et $A \subset X$ un sous-ensemble non vide de X tel que* $\mathrm{Maj}(A, O) \neq \varnothing$*.Un élément $x \in X$ est appelé une **borne supérieure** de A pour l'ordre O si x est un plus petit élément de* $\mathrm{Maj}(A, O)$*.*

Si on remplace O par O^{-1} on obtient la définition de la borne inférieure.

Définition 2.11 *On note (X, O) un ensemble ordonné et $A \subset X$ un sous-ensemble non vide de X tel que* $\mathrm{Min}(A, O) \neq \varnothing$*.Un élément $x \in X$ est appelé une **borne inférieure** de A pour l'ordre O si x est un plus grand élément de* $\mathrm{Min}(A, O)$*.*

Un élément d'un ensemble ordonné est dit maximal s'il ne possède d'autre majorant que lui-même.

Définition 2.12 *Si (X, O) est un ensemble ordonné un élément $x \in X$ est appelé un élément **maximal** pour l'ordre O si*

$$\mathrm{Maj}(\{x\}, O) = [x, \rightarrow [= \{x\}.$$

Un élément d'un ensemble ordonné est dit minimal s'il ne possède d'autre minorant que lui-même.

Définition 2.13 *Si (X, O) est un ensemble ordonné un élément $x \in X$ est appelé un élément **minimal** pour l'ordre O si*

$$\mathrm{Min}(\{x\}, O) =]\leftarrow, x] = \{x\}.$$

L'énoncé et la preuve du lemme de Zorn nécessitent les définitions suivantes.

Définition 2.14 *Un ensemble ordonné (X, O) est dit **inductif** si tout sous-ensemble non vide totalement ordonné de X possède un majorant.*

On en fini avec

Définition 2.15 *Un ensemble ordonné (X, O) est dit **fortement inductif** si tout sous-ensemble non vide totalement ordonné de X possède une borne supérieure.*

Le lemme suivant permet de se familiariser avec ces notions.

Lemme 2.1 *On note (X, O) un ensemble ordonné.*
(i) Si un sous-ensemble A de X possède un plus grand élément, il est unique et on le note

$$\max_O\{a : a \in A\}$$

(ii) Si un sous-ensemble A de X possède un plus petit élément, il est unique et on le note

$$\min_O\{a : a \in A\}$$

(iii) Si un sous-ensemble A de X possède une borne supérieure , elle est unique et on la note

$$\sup_O\{a : a \in A\} = \min_O\{x : x \in \mathrm{Maj}(A, O)\}$$

(iv) Si un sous-ensemble A de X possède une borne inférieure , elle est unique et on la note

$$\inf_O\{a : a \in A\} = \max_O\{x : x \in \mathrm{Min}(A, O)\}$$

(v) Si X est un ensemble, la relation $O[X]$ de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$ définie par

$$O[X] = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) / A \subset B\}$$

est une relation d'ordre appelée relation d'inclusion sur X.
(vi) Si X et Y sont des ensembles non vides, l'ensemble $\mathrm{F}[X, Y]$ des fonctions de X dans Y est, en tant que sous-ensemble de $\mathcal{P}(X \times Y)$, ordonné par la relation d'inclusion $O[X \times Y]$, de plus l'ensemble ordonné

$$(\mathrm{F}[X, Y], O[X \times Y] \cap (\mathrm{F}[X, Y] \times \mathrm{F}[X, Y]))$$

est fortement inductif.
(vii) Si X et Y sont des ensembles non vides, l'ensemble $\mathrm{inj}[X, Y]$ *des fonctions injectives de X dans Y est, en tant que sous-ensemble de $\mathcal{P}(X \times Y)$, ordonné par la relation d'inclusion $O[X \times Y]$, de plus l'ensemble ordonné*

$$(\mathrm{inj}[X, Y], O[X \times Y] \cap (\mathrm{inj}[X, Y] \times \mathrm{inj}[X, Y]))$$

est fortement inductif.

Preuve

(i)

Si x et x' sont des plus grand éléments de A alors
— puisque x' est un élément de A et x est un majorant de A on a $(x', x) \in O$
— puisque x est un élément de A et x' est un majorant de A on a $(x, x') \in O$
Par suite $(x, x') \in O$ et $(x', x) \in O$, l'antisymmétrie de la relation d'ordre permet alors d'affirmer que $x = x'$.

(ii)

Si x et x' sont des plus petits éléments de A alors
— puisque x' est un élément de A et x est un minorant de A on a $(x, x') \in O$
— puisque x est un élément de A et x' est un minorant de A on a $(x', x) \in O$
Par suite $(x, x') \in O$ et $(x', x) \in O$, l'antisymmétrie de la relation d'ordre permet alors d'affirmer que $x = x'$.

(iii)

La borne supérieure de A est le plus petit élément de $\mathrm{Maj}(A, O)$, elle est donc unique d'après (ii)

(iv)

La borne inférieure de A est le plus grand élément de $\mathrm{Min}(A, O)$, elle est donc unique d'après (i)

(v)

1. $O[X]$ est réflexive puisque $x \in A \Rightarrow x \in A$,
2. $O[X]$ est transitive : si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors

   $$x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$$

   par suite $A \subset C$
3. $O[X]$ est antisymmétrique : Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$ par définition de l'égalité d'ensembles.

(vi)

On montre que toute famille totalement ordonnée de fonctions possède une borne supérieure. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions de X dans Y qui est totalement ordonnée pour l'inclusion,

1. D'après le lemme [1.6] page 26 la relation $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ est une fonction puisque $\mathcal{F}$ vérifie (1.5) page 26.
2. D'autre part, par définition de la réunion (voir définition [1.4] page 11) la fonction $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ est la borne supérieure de $\mathcal{F}$, en effet
   (a) $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ est un majorant de $\mathcal{F}$ pour l'inclusion puisque pour tout $f \in \mathcal{F}$

   $$f \subset \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f,$$

(b) si h est un majorant de $\mathcal{F}$ alors pour tout $f \in \mathcal{F}$ on a $f \subset h$ par suite

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f \subset h.$$

Par suite $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ est le plus petit majorant de $\mathcal{F}$.

(vii)

On montre que toute famille totalement ordonnée de fonctions injective possède une borne supérieure injective. Soit $\mathcal{F} \subset \text{inj}[X, Y]$ une famille de fonctions injectives de X dans Y qui est totalement ordonnée pour l'inclusion, on a vu en (vi) que $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ est la borne supérieure de $\mathcal{F}$ dans $\mathrm{F}[X, Y]$, il suffit donc de montrer que $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ est injective. Or si

$$(x, y) \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f \ et \ (x', y) \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$$

alors il existe un élément $f \in \mathcal{F}$ tel que $(x, y) \in f$ et un élément $f' \in \mathcal{F}$ tel que $(x', y) \in f'$. puisque $\mathcal{F}$ est totalement ordonné pour l'inclusion on a $f \subset f'$ ou $f' \subset f$

1. si $f \subset f'$ alors
$$(x, y) \in f' \ et \ (x', y) \in f',$$
l'injectivité de f' permet alors d'affirmer que $x = x'$,
2. si $f' \subset f$ alors
$$(x, y) \in f \ et \ (x', y) \in f,$$
l'injectivité de f permet alors d'affirmer que $x = x'$,

Ainsi toute famille totalement ordonnée de fonctions injectives possède une borne supérieure injective. ■

Vous remarquerez que dès qu'un sous-ensemble de $\mathrm{F}[X, Y]$ est stable par réunion de famille totalement ordonnée par l'inclusion alors cet ensemble est fortement inductif pour l'inclusion.

Formulation de l'axiome du choix et du lemme de Zorn.

Si X est un ensemble non vide on note $\mathcal{P}^*(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) / A \neq \varnothing\}$ la famille des sous-ensembles non vides de X et $\mathbf{choix}(X)$ la famille des fonctions h de $\mathcal{P}^*(X)$ dans X qui vérifient la propriété que pour tout $A \in \text{dom}(h)$, l'image de A est un élément de A :

$$\mathbf{choix}(X) = \{h \in \mathrm{F}[\mathcal{P}^*(X), X] / (A, x) \in h \Rightarrow x \in A\}.$$

En tant que sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathcal{P}^*(X) \times X)$ cet ensemble est ordonné par la relation d'inclusion (voir aussi le lemme [1.6] page 26) qu'on note $O_{\mathbf{c}}$:

$$O_{\mathbf{c}} = \{(h_1, h_2) \in \mathbf{choix}(X) \times \mathbf{choix}(X) / h_1 \subset h_2\}.$$

On va montrer

1. $(\mathbf{choix}(X), O_{\mathbf{c}})$ est fortement inductif (voir définition [2.15] page 44).
2. Pour qu'il existe une **application** de $\mathcal{P}^*(X)$ dans X qui soit un élément de $\mathbf{choix}(X)$ il faut et il suffit que $(\mathbf{choix}(X), O_{\mathbf{c}})$ possède un élément maximal (voir définition [2.12] page 44).

Lemme 2.2 *Pour tout ensemble non vide X,* $(\mathbf{choix}(X), O_{\mathbf{c}})$ *est fortement inductif*

Preuve Soit $\mathcal{F}$ une famille totalement ordonnée de $(\mathbf{choix}(X), O_{\mathbf{c}})$, on montre que la relation

$$h = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$$

est la borne supérieure de $\mathcal{F}$. Il s'agit de montrer

1. h est une fonction et $h \in \mathbf{choix}(X)$,
2. pour l'ordre $O_{\mathbf{c}}$ h est un majorant de $\mathcal{F}$ et tout majorant de $\mathcal{F}$ contient h.

1. h est une fonction et $h \in \mathbf{choix}(X)$,
   (a) D'abord on montre que h est une fonction (voir aussi lemme [1.6] page 26) . Si

   $$(A, x) \in h \ et \ (A, x') \in h$$

   alors il existe un élément f de $\mathcal{F}$ et un élément f' de $\mathcal{F}$ qui vérifient

   $$(A, x) \in f \quad \text{et} \quad (A, x') \in f'$$

   puisque $\mathcal{F}$ est totalement ordonnée pour l'inclusion on a $f \subset f'$ ou $f' \subset f$
   — si $f \subset f'$ alors

   $$(A, x) \in f' \quad \text{et} \quad (A, x') \in f'$$

   et, f' étant une fonction, on obtient $x = x'$
   — si $f' \subset f$ alors

   $$(A, x) \in f \quad \text{et} \quad (A, x') \in f$$

   et, f étant une fonction, on obtient $x = x'$
   ainsi on obtient

   $$(A, x) \in h \quad \text{et} \quad (A, x') \in h \Rightarrow x = x'$$

   autrement dit h est une fonction.
   (b) Ensuite on montre $h \in \mathbf{choix}(X)$. Or, si $(A, x) \in h$ il existe un élément f de $\mathcal{F}$ tel que $(A, x) \in f$, mais f est un élément de $\mathbf{choix}(X)$ par suite $x \in A$.
2. il reste à voir que pour l'ordre $O_{\mathbf{c}}$ la fonction h est un majorant de $\mathcal{F}$ et tout majorant de $\mathcal{F}$ contient h.
   En effet, il est clair que

   $$\forall f \in \mathcal{F}, f \subset h,$$

   de plus si h' est un majorant de $\mathcal{F}$ alors pour tout $f \in \mathcal{F}$ on a $f \subset h'$ la définition de la réunion (définition [1.4] page 11) entraîne alors $h \subset h'$.

Par suite toute famille totalement ordonnée de $\mathbf{choix}(X)$ possède une borne supérieure. ■

On montre maintenant que si $\mathbf{choix}(X)$ possède un élément maximal pour l'ordre $O_{\mathbf{c}}$ alors cet élément est une application.

Lemme 2.3 *Si X est un ensemble non vide, pour qu'il existe un élément de* $\mathbf{choix}(X)$ *qui soit une* ***application*** *de $\mathcal{P}^*(X)$ dans X il faut et il suffit que* $(\mathbf{choix}(X), O_{\mathbf{c}})$ *possède un élément maximal.*

Preuve

1. D'abord on montre que si h est un élément maximal de $(\mathbf{choix}(X), O_{\mathbf{c}})$ alors h est une application. En effet, si h n'est pas une application alors il existe un élément B de $\mathcal{P}^*(X)$ tel que $B \notin \mathrm{dom}(h)$. Si $b \in B$ on montre que la relation

   $$h' = h \cup \{(B, b)\}$$

   est un élément de $\mathbf{choix}(X)$.

(a) D'abord on montre que h' est une fonction (voir aussi lemme [1.6] page 26). En effet l'assertion

$$(A, x) \in h' \quad \text{et} \quad (A, x') \in h'$$

entraîne, par définition de la réunion, que l'une des assertions suivantes est vraie :

i. $(A, x) \in h$ et $(A, x') \in h$

ii. $(A, x) \in h$ et $(A, x') = (B, b)$

iii. $(A, x') \in h$ et $(A, x) = (B, b)$

iv. $(A, x) = (B, b) = (A, x')$

Mais les assertions ii. et iii. sont toujours fausses puisqu'elles entraînent $B \in \text{dom}(h)$, par suite i. ou iv. est vraie.

— si i. est vraie alors $x = x'$ puisque h est une fonction,

— si iv. est vraie alors $x = x' = b$

Ainsi h' est une fonction, en notation usuelle on peut l'écrire :

$$h'(A) = \begin{cases} h(A) & si \quad A \in \text{dom}(h) \\ b & si \quad A = B \end{cases}$$

(b) le fait que $h' \in \textbf{choix}(X)$ provient de

$$(A, x) \in h' \Leftrightarrow [(A, x) \in h \quad \text{ou} \quad (A = B \quad \text{et} \quad x = b)]$$

Ainsi, si h n'est pas une application il existe un élément h' de $\textbf{choix}(X)$ qui vérifie

$$h \subsetneqq h'$$

ce qui montre que tout élément maximal de $(\textbf{choix}(X), O_{\mathbf{c}})$ est une application.

2. Ensuite on montre que toute application de $\textbf{choix}(X)$ est un élément maximal de $(\textbf{choix}(X), O_{\mathbf{c}})$. On va montrer que si $h \in \mathrm{A}[\mathcal{P}^*(X), X] \cap \textbf{choix}(X)$ et h' un élément de $\textbf{choix}(X)$ tel que $h \subset h'$,alors $h' = h$. on remarque d'abord que h' est une application, puisque $h \subset h' \Rightarrow \text{dom}(h) \subset \text{dom}(h')$ et $\text{dom}(h) = \mathcal{P}^*(X)$. On veut montrer que $h' \subset h$, si

$$(A, x') \in h'$$

alors, puisque $\text{dom}(h) = \mathcal{P}^*(X)$, il existe $x \in X$ tel que $(A, x) \in h$. Il résulte de l'inclusion $h \subset h'$ que $(A, x) \in h'$, ainsi on obtient

$$(A, x') \in h' \quad \text{et} \quad (A, x) \in h',$$

ce qui entraîne $x = x'$ puisque h' est une fonction, en particulier $(A, x') = (A, x) \in h$.Ceci montre que $h' \subset h$, par suite, puisque par hypothèse $h \subset h'$ on obtient $h = h'$.

■

En fait c'est l'objet de l'axiome du choix de supposer qu'il existe une application de $\mathcal{P}^*(X)$ dans X qui appartient à $\textbf{choix}(X)$.

Axiome 2.1 ***Axiome du choix*** *Si X est un ensemble non vide il existe une application*

$$h_X : \mathcal{P}^*(X) \mapsto X$$

qui possède la propriété suivante :

$$\forall A \in \mathcal{P}^*(X), h_X(A) \in A.$$

Autrement dit il existe une application qui est un élément de **choix**(X). Cet axiome nous dit que pour les ensembles non vide on peut trouver une procédure logique qui permet d'associer à chacun de ses sous-ensembles non vide un et un seul élément de ce sous-ensemble. Une telle application est appelée une fonction de choix pour l'ensemble X. La conséquence la plus simple de l'axiome du choix est la suivante.

Lemme 2.4 *Si X et Y sont des ensembles, pour qu'une application f de X dans Y soit surjective il faut et il suffit qu'il existe une application injective g de Y dans X qui vérifie*

$$f \circ g = id_Y$$

Preuve

1. D'abord on montre f surjective $\Rightarrow \exists\ g \in \text{inj}[Y, X] : f \circ g = id_Y$. En effet, si f est surjective alors, pour tout $y \in Y$, l'ensemble
$$f^{-1}(y) = \{x \in X / y = f(x)\}$$
est non vide. Notons h_X une fonction de choix pour X alors l'application $g : Y \mapsto X$ définie par
$$g(y) = h_X(f^{-1}(y))$$
vérifie :$\forall\ y \in Y, g(y) \in f^{-1}(y)$ par suite $f(g(y)) = y$. g est injective puisque $g(y) = g(y')$ implique
$$y = f(g(y)) = f(g(y')) = y'.$$
2. Ensuite l'assertion $\exists\ g \in \text{inj}[Y, X] : f \circ g = id_Y \Rightarrow f$ surjective est claire puisqu'elle entraîne que pour tout $y \in Y, g(y) \in f^{-1}(y)$.

■

On est maintenant en mesure d'énoncer les seuls axiomes utilisés dans ce texte.

2.1.2 *Récapitulation des axiomes*

Le jeu consiste maintenant à montrer qu'on peut faire des mathématiques avec les axiomes énoncés précédemment, qu'on récapitule :

Axiome 1 **Axiome d' égalité** Les ensembles A et B sont égaux si les assertions suivantes sont vérifiées :

$$x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{et} \quad x \in B \Rightarrow x \in A$$

Axiome2 **spécification** supposons que l'on dispose des données suivantes

1. un ensemble X,
2. un énoncé logique $p(x)$ (auquel on peut attribuer une valeur « vrai » ou « faux ») dans lequel intervient un symbole x qui n'est pas immédiatement précédé d'un quantificateur.

L'axiome de spécification affirme que l'objet constitué des éléments $x \in X$ tel que $p(x)$ est vrai est un ensemble. Cet ensemble est unique et est noté

$$\{x \in X / p(x)\}.$$

Axiome 3 **Produit cartésien** le produit cartésien $X \times Y$ des ensembles X et Y est un **ensemble** dont les éléments sont les couples (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$.

Axiome 4 **Ensemble des parties** Soit X un ensemble ; il existe un ensemble noté $\mathcal{P}(X)$ dont les éléments sont les sous-ensembles de X. Cet ensemble est appelé l'ensemble des parties de X

Axiome 5 **Ensemble vide** il existe un ensemble, appelé ensemble vide et noté $\varnothing$ qui ne contient aucun élément, autrement dit l'assertion $x \in \varnothing$ est toujours fausse. En particulier, pour tout ensemble A, $\varnothing \subset A$ (puisque $faux \Rightarrow vrai$).

Axiome 6 **Union** Si A et B sont des ensembles, il existe un ensemble X qui contient tous les éléments de A et de B, ainsi X vérifie

$$A \subset X \text{ et } B \subset X$$

Axiome 7 (**Axiome de l'infini**) Il existe un ensemble ≪ non fini ≫.

Axiome 8 **Axiome du choix** Si X est un ensemble non vide il existe une application

$$h_X : \mathcal{P}^*(X) \mapsto X$$

qui possède la propriété suivante :

$$\forall A \in \mathcal{P}^*(X), h_X(A) \in A.$$

L'axiome du choix à une conséquence extrêmement importante dégagée par Zorn.

Lemme 2.5 *(**Lemme de Zorn**) Si l'axiome du choix est vérifié alors dans tout ensemble ordonné et **inductif** (X, O) chaque élément x de X est majoré par un élément **maximal**. En particulier l'ensemble des éléments maximaux est non vide.*

Remarquons que si la propriété que dans tout ensemble ordonné et inductif (X, O) chaque élément x de X est majoré par un élément maximal est vraie alors l'axiome du choix est vérifié. En effet, d'après le lemme [2.2] page 46 l'ensemble $(\mathbf{choix}(X), O_{\mathbf{c}})$ est inductif, par suite il possède un élément maximal, mais d'après le lemme [2.3] page 47 tout élément maximal de $(\mathbf{choix}(X), O_{\mathbf{c}})$ est une fonction de choix. Le paragraphe suivant est consacré à la preuve du lemme [2.5].

2.2 *Equivalence du lemme de Zorn et de l'axiome du choix*

Pour prouver le lemme [2.5] le théorème suivant est pratique.

Théorème 2.1 *Si (X, O) est un ensemble fortement inductif et $f : X \mapsto X$ une application vérifiant la propriété suivante :*

$$\forall\ x \in X, (x, f(x)) \in O$$

(en d'autres termes $x \in X \Rightarrow f(x) \geq x$) alors il existe un élément x de X tel que

$$f(x) = x$$

Preuve Fixons $x_0 \in X$, on dira qu'un sous-ensemble A de X est *stable* si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $x_0 \in A$,
2. pour tout sous-ensemble Γ de A qui est totalement ordonné pour l'ordre O on a

$$\sup_O\{x : x \in \Gamma\} \in A.$$

3. $f(A) \subset A : \forall\ x \in A, f(x) \in A$,

On notera $\mathcal{H}$ la famille des sous-ensembles stables de X et $S = \bigcap_{A \in \mathcal{H}} A$. On va montrer les points suivants :

1. S est stable,
2. S est totalement ordonné,
3. S possède un plus grand élément y et cet élément vérifie $f(y) = y$.

1. S est stable

1. Puisque pour tout $A \in \mathcal{H}$, $x_0 \in A$ on a

$$x_0 \in \bigcap_{A\in\mathcal{H}} A,$$

2. Si $\Gamma \subset S$ est un sous-ensemble totalement ordonné de S pour l'ordre O, alors, pour tout $A \in \mathcal{H}$, Γ est un sous-ensemble totalement ordonné de A pour l'ordre O, par suite,

$$\forall\ A \in \mathcal{H}, \sup_O\{x : x \in \Gamma\} \in A$$

ainsi

$$\sup_O\{x : x \in \Gamma\} \in S.$$

3. d'après le lemme [1.5] page 17 on a

$$f(S) = f(\bigcap_{A\in\mathcal{H}} A) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{H}} f(A) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{H}} A = S,$$

2. S est totalement ordonné Rappelons d'abord que si $x \in X$ on note

$$[x, \rightarrow [= \{y \in X/(x, y) \in O\} = \{y \in X/x \leq y\},$$

$$]x, \rightarrow [= \{y \in [x, \rightarrow [/y \neq x\},$$

et

$$] \leftarrow, x] = \{y \in X/(y, x) \in O\} = \{y \in X/y \leq x\},$$
$$] \leftarrow, x[= \{y \in] \leftarrow, x]/y \neq x\}.$$

On veut montrer

$$(x, y) \in S \times S \Rightarrow y \leq x \quad \text{ou} \quad y \geq f(x).$$

En termes ensembliste, cela s'écrit

$$\forall\ x \in S, S \subset] \leftarrow, x] \cup [f(x), \rightarrow [,$$

On est ainsi amené à montrer que l'ensemble

$$T = \{x \in S/S \subset] \leftarrow, x] \cup [f(x), \rightarrow [\}$$

est égal à S. Notons

$$P_x =] \leftarrow, x] \cup [f(x), \rightarrow [,$$

il est clair que si x est un élément de S tel que $P_x \cap S$ est stable alors $x \in T$, puisque S est contenu dans tout ensemble stable. Le jeu consiste donc à montrer que pour tout $x \in S$, $P_x \cap S$ est stable.

1. pour tout $x \in S$, $x_0 \in P_x$. On va montrer que x_0 est le plus petit élément de S. Si $A = [x_0, \rightarrow [$ alors A est stable. En effet
   (a) $x_0 \in A$
   (b) si Γ est un sous-ensemble totalement ordonné de A, alors pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\gamma \geq x_0$, par suite $\sup_O\{x : x \in \Gamma\} \in A$.
   (c) si $x \in A$ alors $f(x) \geq x \geq x_0$, par suite $f(x) \in A$.

   La stabilité de A entraîne $S \subset A$, par suite,

$$x \in S \Rightarrow x \geq x_0 \Rightarrow x_0 \in] \leftarrow, x] \Rightarrow x_0 \in P_x \cap S.$$

2. si Γ est un sous-ensemble totalement ordonné de $P_x \cap S$ on examine l'alternative suivante
   (a) x est un majorant de Γ : pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \leq x$,
   (b) x n'est pas un majorant de Γ : il existe $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \notin]\leftarrow, x]$,

   En effet,
   (a) Si x est un majorant de Γ, il résulte du fait que $\sup_O\{x : x \in \Gamma\}$ est le plus petit majorant de Γ que $\sup_O\{x : x \in \Gamma\} \leq x$, par suite $\sup_O\{x : x \in \Gamma\} \in P_x$.
   (b) Si x n'est pas un majorant de Γ, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \notin]\leftarrow, x]$, comme tout élément de P_x est inférieur à x ou supérieur à $f(x)$, on obtient qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \geq f(x)$. Puisque $\sup_O\{x : x \in \Gamma\}$ est un majorant de Γ on obtient $\sup_O\{x : x \in \Gamma\} \geq f(x)$ et
   $$\sup_O\{x : x \in \Gamma\} \in P_x$$

3. Il reste à voir $f(P_x \cap S) \subset P_x \cap S$. Considérons l'ensemble
   $$P = \{x \in S /]\leftarrow, x[\cap S \subset f^{-1}(]\leftarrow, x])\},$$
   on commence par montrer :
   $$\forall\ x \in P,\ f(P_x \cap S) \subset P_x \cap S.$$
   En effet, si $x \in P$ puisque l'assertion $y \in P_x \cap S$ entraîne $f(y) \in S$ et l'une des assertions suivantes
   (a) $y \geq f(x)$
   (b) $y \leq x$

   il suffit de montrer que les conditions (a) et (b) entraînent $f(y) \in P_x$.
   (a) si $y \geq f(x)$ alors $f(y) \geq y \geq f(x)$ par suite $f(y) \in P_x$,
   (b) si $y \leq x$ alors $y = x$ ou $y \in]\leftarrow, x[\cap S$
   — si $y = x$, alors $f(y) = f(x)$, par suite $f(y) \in P_x$,
   — si $y \in]\leftarrow, x[\cap S$ l'hypothèse $x \in P$ entraînent $f(y) \leq x$ par suite $f(y) \in P_x$,

   ceci montre (avec 1 et 2) que pour tout $x \in P$, l'ensemble $P_x \cap S$ est stable, en particulier
   $$x \in P \Rightarrow P_x \cap S = S. \tag{2.1}$$
   Par suite <u>*tout élément de S est comparable à tout élément de P*</u> puisque
   $$(x, y) \in P \times S \Rightarrow y \in P_x \Rightarrow [y \leq x \text{ ou } y \geq f(x) \geq x].$$
   On va montrer que $P = S$ en montrant que P est stable.
   (a) $x_0 \in P$, en effet on a vu que x_0 est le plus petit élément de S (en montrant que $[x_0, \rightarrow[$ est stable) par suite
   $$]\leftarrow, x_0[\cap S = \varnothing.$$
   (b) Si Γ est un sous-ensemble totalement ordonné de l'ensemble P alors $\sup_O\{x : x \in \Gamma\} \in P$. Posons $a = \sup_O\{x : x \in \Gamma\}$, puisque S est stable $a \in S$, il suffit donc de montrer
   $$]\leftarrow, a[\cap S \subset f^{-1}(]\leftarrow, a]).$$
   Or, si $y \in]\leftarrow, a[\cap S$ alors y - qui est comparable à tout élément de P, donc de Γ - n'est pas un majorant de Γ, puisque a est le plus petit majorant de Γ, ainsi il existe un élément γ_y de Γ tel que
   $$y \in]\leftarrow, \gamma_y[\cap S.$$
   Puisque $\gamma_y \in P$ on a
   $$]\leftarrow, \gamma_y[\cap S \subset f^{-1}(]\leftarrow, \gamma_y])$$
   et en particulier $f(y) \leq \gamma_y \leq a$.

(c) $f(P) \subset P$, il s'agit de montrer que pour tout $x \in P$

$$]\leftarrow, f(x)[\cap S \subset f^{-1}(]\leftarrow, f(x)])$$

Mais, puisque pour tout $x \in P$ on a $S = P_x \cap S$ on obtient

$$]\leftarrow, f(x)[\cap S = (]\leftarrow, f(x)[\cap P_x) \cap S,$$

or, puisque $f(x) \geq x$ on a, par définition de P_x,

$$]\leftarrow, f(x)[\cap P_x \subset]\leftarrow, x].$$

Il suffit donc de montrer

$$]\leftarrow, x] \cap S \subset f^{-1}(]\leftarrow, f(x)]),$$

or, si $y \in]\leftarrow, x] \cap S$ alors $y \in]\leftarrow, x[$ ou $y = x$

— si $y = x$ alors $f(y) = f(x)$ par suite $y \in f^{-1}(]\leftarrow, f(x)])$

— si $y \in]\leftarrow, x[\cap S$ alors, puisque $x \in P$, $y \in f^{-1}(]\leftarrow, x])$ mais, puisque $f(x) \geq x$, on a $f^{-1}(]\leftarrow, x]) \subset f^{-1}(]\leftarrow, f(x)])$.

ceci montre que P est un sous-ensemble stable de S, par suite $P = S$

Ceci permet de montrer que S est totalement ordonné, puisque d'après (2.1) page 52

$$P = S \Rightarrow \forall\ x\ \in S, S \subset P_x$$

En particulier

$$(x, y) \in S \times S \Rightarrow y \in P_x \Rightarrow y \leq x \quad \text{ou} \quad y \geq f(x) \geq x,$$

et des éléments quelconques de S sont comparables.

S possede un plus grand élément y tel que f(y)=y En effet, en tant que sous-ensemble stable et totalement ordonné si $y = \sup_O\{x : x \in S\}$ alors $y \in S$ et $f(y) \in S$, par suite $f(y) \leq y$, mais par hypothèse $f(y) \geq y$ ainsi $f(y) = y$. ■

Le théorème [2.1] page 50 permet déjà de montrer que tout ensemble fortement inductif possède un élément maximal.

Lemme 2.6 *L'axiome du choix entraîne que tout ensemble ordonné fortement inductif possède un élément maximal.*

Preuve Soit (X, O) un ensemble fortement inductif, dire que (X, O) ne possède pas d'élément maximal, c'est dire que pour tout $x \in X$

$$]x, \rightarrow [\neq \varnothing.$$

Si $h_X : \mathcal{P}^*(X) \mapsto X$ est une fonction de choix de l'ensemble X alors l'application g de X dans X définie par

$$g(x) = h_X(]x, \rightarrow [)$$

est une application vérifiant $(\forall\ x \in X, g(x) \geq x)$ et $(\forall\ x \in X, g(x) \neq x)$, ce qui est impossible d'après le théorème [2.1]. ■

On en vient à la preuve du lemme [2.5] page 50 .

Lemme 2.7 *L'axiome du choix entraîne que dans un ensemble ordonné inductif (X, O) tout élément a de X est majoré par un élément maximal.*

Preuve Soit (X,O) un ensemble ordonné inductif et a un élément de X, on considère l'ensemble

$$\mathcal{E}_a = \{A \in \mathcal{P}^*(X)/a \in A \quad \text{et} \quad (A, O \cap (A \times A)) \textit{ est totalement ordonné}\}.$$

Un élément de $\mathcal{E}_a$ est donc un sous-ensemble de X qui contient a et qui est totalement ordonné pour l'ordre induit par O sur A. On munit $\mathcal{E}_a$ de la relation d'inclusion :

$$O(\mathcal{E}) = \{(A,B) \in \mathcal{E}_a \times \mathcal{E}_a / A \subset B\}.$$

et on montre

1. $(\mathcal{E}_a, O(\mathcal{E}))$ est un ensemble fortement inductif,
2. si $S_{\max}$ est un élément maximal de $(\mathcal{E}_a, O(\mathcal{E}))$ alors tout majorant de $(S_{\max}, O)$ est un élément maximal de (X,O) qui majore a.

1. D'abord il est clair que $O(\mathcal{E})$ est une relation d'ordre, il suffit donc de montrer que si $\mathcal{G}$ est une famille totalement ordonnée de $(\mathcal{E}_a, O(\mathcal{E}))$, elle possède une borne supérieure. La famille $\mathcal{G}$ étant fixée totalement ordonnée, on montre que

$$Y = \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A$$

est la borne supérieure de $\mathcal{G}$ dans $(\mathcal{E}_a, O(\mathcal{E}))$. Il s'agit de montrer

(a) $a \in Y$ et $(Y, O \cap (Y \times Y))$ est totalement ordonné

(b) si H est un élément de $\mathcal{E}_a$ tel que :

$$\forall\ A \in \mathcal{G}, A \subset H$$

alors $Y \subset H$.

(a) L'assertion $a \in Y$ provient du fait que tout élément de $\mathcal{G}$ contient a. On montre maintenant

$$(x,y) \in Y \times Y \Rightarrow [(x,y) \in O \quad \text{ou} \quad (y,x) \in O].$$

Or, si $(x,y) \in Y \times Y$ il existe $A_x \in \mathcal{G}$ et $A_y \in \mathcal{G}$ tels que $x \in A_x$ et $y \in A_y$, $\mathcal{G}$ étant totalement ordonnée pour l'inclusion on a $A_x \subset A_y$ ou $A_y \subset A_x$

i. si $A_x \subset A_y$ alors $(x,y) \in A_y \times A_y$, mais par définition de $\mathcal{E}_a$, A_y est totalement ordonné pour l'ordre induit, par suite

$$(x,y) \in O \quad \text{ou} \quad (y,x) \in O.$$

ii. si $A_y \subset A_x$ alors $(x,y) \in A_x \times A_x$, mais par définition de $\mathcal{E}_a$, A_x est totalement ordonné pour l'ordre induit, par suite

$$(x,y) \in O \quad \text{ou} \quad (y,x) \in O.$$

Ce qui montre que $(Y, O \cap (Y \times Y))$ est totalement ordonné.

(b) Par définition de la réunion (voir définition [1.4] page 11) si H est un majorant de $\mathcal{G}$ pour l'inclusion alors

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \subset H.$$

Ainsi $(\mathcal{E}_a, O(\mathcal{E}))$ est fortement inductif.

2. D'après le lemme [2.6] page 53, l'ensemble $\mathcal{E}_a$ possède, en tant qu'ensemble fortement inductif, un élément maximal $S_{\max} \in \mathcal{E}_a$, par définition de $\mathcal{E}_a$ $S_{\max}$ est totalement ordonné pour l'ordre induit. Ainsi il résulte de l'hypothèse d'inductivité de (X,O) que $S_{\max}$ possède un majorant y. On montre que y est un élément maximal. En effet, dans le cas contraire $]y, \to[$ est non vide, on montre que si $z \in]y, \to[$ alors $S_{\max} \cup \{z\}$ est un élément de $\mathcal{E}_a$

(a) D'abord, puisque $a \in S_{\max}$ on a $a \in S_{\max} \cup \{z\}$,

(b) ensuite on montre que $S_{\max} \cup \{z\}$ est totalement ordonné : en effet, si $(u, v) \in (S_{\max} \cup \{z\}) \times (S_{\max} \cup \{z\})$ alors l'une des assertions suivantes est vérifiée

   i. $(u, v) \in S_{\max} \times S_{\max}$

   ii. $u \in S_{\max}$ et $v = z$

   iii. $u = z$ et $v \in S_{\max}$

   iv. $u = v = z$

   i. Si $(u, v) \in S_{\max} \times S_{\max}$, puisque $S_{\max}$ est totalement ordonné pour l'ordre induit on a

$$(u, v) \in O \quad \text{ou} \quad (v, u) \in O.$$

   ii. Si $u \in S_{\max}$ et $v = z$, puisque y est un majorant de $S_{\max}$ on a $(u, y) \in O$ et puisque $(y, z) \in O$ la transitivité de la relation d'ordre permet d'affirmer $(u, v) \in O$. Ainsi u et v sont comparable.

   iii. le cas iii. est similaire à ii.

   iv. si $u = v = z$ alors u et v sont comparables.

Ainsi $S_{\max} \cup \{z\}$ est un élément de $\mathcal{E}_a$ qui majore strictement $S_{\max}$ et ceci contredit la maximalité de $S_{\max}$. Par suite y est un élément maximal de (X, O) et cet élément majore a puisqu'il majore $S_{\max}$. $\blacksquare$

Une première application du lemme de Zorn consiste à montrer que si X et Y sont des ensembles alors il existe une bijection de X dans un sous-ensemble de Y ou une bijection de Y dans un sous-ensemble de X.

Théorème 2.2 *Si X et Y sont des ensembles non vide alors au moins l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

1. *Il existe une **application** injective de X dans Y .*
2. *Il existe une **application** injective de Y dans X .*

Preuve Soit X et Y des ensembles, d'après le lemme [2.1] page 44 l'ensemble $\text{inj}|X, Y]$ des fonctions injectives de X dans Y est inductif pour la relation d'inclusion

$$O = \{(f, g) \in \text{inj}|X, Y] \times \text{inj}|X, Y]/f \subset g\}.$$

Ainsi le lemme de Zorn permet d'affirmer qu'il possède un élément maximal . On montre que tout élément maximal $g_{\max}$ de $(\text{inj}|X, Y], O)$ vérifie au moins l'une des propriétés suivantes

1. $\text{dom}(g_{\max}) = X$
2. $\text{im}(g_{\max}) = Y$.

En effet si aucunes de ces propriétés est vraie alors il existe $(a, b) \in X \times Y$ tel que $a \notin \text{dom}(g_{\max})$ et $b \notin \text{im}(g_{\max})$, d'après le lemme [1.6] page 26 la relation $f = g_{\max} \cup \{(a, b)\}$ est une fonction. De plus puisque $f^{-1} = g_{\max}^{-1} \cup \{(b, a)\}$ est aussi une fonction, f est une fonction injective qui majore strictement $g_{\max}$ et ceci contredit la maximalité de $g_{\max}$. Par suite on obtient $\text{dom}(g_{\max}) = X$ ou $\text{im}(g_{\max}) = Y$,

1. si $\text{dom}(g_{\max}) = X$ alors $g_{\max}$ est une application injective de X dans Y
2. si $\text{im}(g_{\max}) = Y$ alors $g_{\max}^{-1}$ est une application injective de Y dans X.

$\blacksquare$

On étudie maintenant une troisième formulation de l'axiome du choix.

Chapitre 3

Ensemble bien ordonné et théorème du bon ordre

3.1 *Ensembles bien ordonnés*

Un ensemble est dit bien ordonné si ses sous-ensembles non vide possèdent un plus petit élément.

Définition 3.1 *un ensemble ordonné (X, O) est dit* ***bien ordonné*** *si tout sous-ensemble non vide de X possède un élément minimum.*

Il est clair que tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné. Dans un ensemble bien ordonné (X, O) on dispose d'une fonction de choix, c'est l'application h_X de $\mathcal{P}^*(X)$ dans X définie par

$$h_X(A) = \min_O\{a : a \in A\}$$

qui à chaque sous-ensemble non vide de X fait correspondre son élément minimum.

Définition 3.2 *Si (X, O) est un ensemble bien ordonné, un sous-ensemble S de X est appelé une* ***section commençante*** *de (X, O) si*

1. $\min_O\{x : x \in X\} \in S$
2. *pour tout élément s de S l'ensemble des éléments inférieurs à s est inclus dans S :*

$$s \in S \Rightarrow]\leftarrow, s] \subset S.$$

On note $\mathcal{S}_c(X)$ la famille des sections commençantes de (X, O)

Lorsque (X, O) est bien ordonné, la structure des sections commençantes de (X, O) est particulièrement simple.

Lemme 3.1 *On note (X, O) est un ensemble bien ordonné.*
(i) Si $\mathcal{F}$ est une famille de sections commençantes de (X, O) alors

$$\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S \in \mathcal{S}_c(X) \quad \text{et} \quad \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S \in \mathcal{S}_c(X)$$

(ii) Si S est une section commençante de (X, O) différente de X alors

$$S =]\leftarrow, h_X(S^c)[= \{x \in X/x < h_X(S^c)\} = [h_X(X), h_X(S^c)[$$

ou $h_X(S^c) = \min_O\{x : x \in S^c\}$ et $h_X(X) = \min_O\{x : x \in X\}$.
(iii) si

$$O(\mathcal{S}_c(X)) = \{(S, S') \in \mathcal{S}_c(X) \times \mathcal{S}_c(X)/S \subset S'\}$$

l'ensemble $(\mathcal{S}_c(X), O(\mathcal{S}_c(X))$ est totalement ordonné.

Preuve

(i)

1. Il est clair que $\min_O\{x : x \in X\} \in \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S$ et $\min_O\{x : x \in X\} \in \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S$
2. (a) Si $s \in \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S$, il existe $S \in \mathcal{F}$ tel que $s \in S$, par suite

$$]\leftarrow, s] \subset S \subset \bigcup_{S\in\mathcal{F}} S.$$

ainsi $\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S \in \mathcal{S}_c(X)$.

(b) Si $s \in \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S$, pour tout $S \in \mathcal{F}$ on a $s \in S$, par suite pour tout $S \in \mathcal{F}$

$$]\leftarrow, s] \subset S$$

et

$$]\leftarrow, s] \subset \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S$$

ainsi $\bigcap_{S\in\mathcal{F}} S \in \mathcal{S}_c(X)$.

(ii)

Si $S \neq X$ alors $S^c \neq \varnothing$, par suite $h_X(S^c)$ est défini par définition d'un ensemble bien ordonné.

1. D'abord on montre $]\leftarrow, h_X(S^c)[\subset S$. Puisque $h_X(S^c)$ est le plus petit élément de S^c l'inclusion $S^c \subset [h_X(S^c), \rightarrow[$ est vérifiée par suite

$$([h_X(S^c), \rightarrow[)^c \subset S$$

c'est à dire, puisque tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné,

$$]\leftarrow, h_X(S^c)[\subset S.$$

2. Ensuite on montre $S \subset]\leftarrow, h_X(S^c)[$. En effet, si $s \in S$, puisque (X, O) est totalement ordonné on a $s < h_X(S^c)$ ou $h_X(S^c) \leq s$ mais l'assertion $h_X(S^c) \leq s$ entraîne que $h_X(S^c) \in S$, puisque S est une section commençante. Par suite on obtient $s < h_X(S^c)$.

(iii)

On montre que si $S_0 \in \mathcal{S}_c(X)$ et $S_1 \in \mathcal{S}_c(X)$ alors

$$S_0 \subset S_1 \quad \text{ou} \quad S_1 \subset S_0.$$

Si $S_0 = X$ ou $S_1 = X$ le résultat est évident, on peut donc supposer $S_0 \neq X$ et $S_1 \neq X$. D'après (ii) on a dans ce cas

$$S_0 =]\leftarrow, h_X(S_0^c)[\quad \text{et} \quad S_1 =]\leftarrow, h_X(S_1^c)[.$$

(X, O) étant totalement ordonné $h_X(S_0^c)$ et $h_X(S_1^c)$ sont comparables,

— si $h_X(S_0^c) \leq h_X(S_1^c)$ alors $S_0 \subset S_1$
— si $h_X(S_1^c) \leq h_X(S_0^c)$ alors $S_1 \subset S_0$

■

Le théorème [2.2] page 55 montre que si X et Y sont des ensembles il existe une application injective de X dans Y ou il existe une application injective de Y dans X. On peut préciser ce résultat dans le cas ou X et Y sont munis d'un bon ordre. Dans ce cas l'application injective peut être choisie comme étant strictement croissante avec une image qui est une section commençante.

Isomorphismes de sections commençantes On définit quelques notions sur la croissance.

Définition 3.3 *On note* (X, O_X) *et* (Y, O_Y) *des ensembles ordonnés, une fonction* f *de* X *dans* Y *est dite* ***croissante*** *si*

$$(x, x') \in O_X \cap (\mathrm{dom}(f) \times \mathrm{dom}(f)) \Rightarrow (f(x), f(x')) \in O_Y.$$

On note $\mathrm{cr}[X, Y]$ *ou* $\mathrm{cr}[(X, O_X), (Y, O_Y)]$ *l'ensemble des fonctions croissantes de* X *dans* Y.

En termes plus usuels une fonction $f \in \mathrm{F}[X, Y]$ est croissante si

$$[x \in \mathrm{dom}(f), x' \in \mathrm{dom}(f) \text{ et } x \leq x'] \Rightarrow f(x) \leq f(x').$$

Une fonction strictement croissante est une fonction injective et croissante.

Définition 3.4 *On note* (X, O_X) *et* (Y, O_Y) *des ensembles ordonnés, une fonction* f *de* X *dans* Y *est dite* ***strictement croissante*** *si* f *est croissante et injective. On note*

$$\mathrm{stcr}[X, Y] = \mathrm{cr}[X, Y] \cap \mathrm{inj}[X, Y] = \{f \in \mathrm{cr}[X, Y]/f^{-1} \in \mathrm{F}[Y, X]\}$$

l'ensemble de fonctions strictement croissantes.

On en vient à la définition des isomorphismes de sections.

Définition 3.5 *On note* (X, O_X) *et* (Y, O_Y) *des ensembles bien ordonnés, une fonction* f *de* X *dans* Y *est appelée un* ***isomorphisme de sections commençantes*** *si* f *est une fonction strictement croissante telle que* $\mathrm{dom}(f)$ *est une section commençante de* (X, O_X) *et* $\mathrm{im}(f)$ *est une section commençante de* (Y, O_Y). *On note*

$$\mathrm{Iso}[X, Y] = \{f \in \mathrm{stcr}[X, Y]/\mathrm{dom}(f) \in \mathcal{S}_c(X) \text{ et } \mathrm{im}(f) \in \mathcal{S}_c(Y)\}$$

l'ensemble des isomorphismes de sections commençantes.

Il est clair que si (X, O_X) et (Y, O_Y) sont bien ordonnés la relation $f = \{(h_X(X), h_Y(Y))\}$ est un élément de $\mathrm{Iso}[X, Y]$. On veut montrer que si (X, O_X) et (Y, O_Y) sont bien ordonnés $\mathrm{Iso}[X, Y]$ est fortement inductif si il est munit de la relation d'inclusion.

Lemme 3.2 *On note* (X, O_X) *et* (Y, O_Y) *des ensembles bien ordonnés.*
(i)

$$f \in \mathrm{Iso}[X, Y] \Leftrightarrow f^{-1} \in \mathrm{Iso}[Y, X]$$

(ii) si O_i *est l'ordre sur* $\mathrm{Iso}[X, Y]$ *défini par*

$$O_i = \{(f, g) \in \mathrm{Iso}[X, Y] \times \mathrm{Iso}[X, Y]/f \subset g\}$$

alors $(\mathrm{Iso}[X, Y], O_i)$ *est fortement inductif.*

Preuve

(i)

On montre :

$$f \in \mathrm{Iso}[X, Y] \Rightarrow f^{-1} \in \mathrm{Iso}[Y, X]. \tag{3.1}$$

Il résulte de l'égalité $(f^{-1})^{-1} = f$ (voir lemme [1.5] page 17) que f^{-1} est injective. D'autre part les égalités $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$ et $\mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$ montrent que $\mathrm{dom}(f^{-1})$ et $\mathrm{im}(f^{-1})$ sont des sections commençantes, il reste à montrer que f^{-1} est croissante et c'est une conséquence directe du fait que O_X est un ordre total. En effet, si

$$(y, y') \in O_Y \cap (\mathrm{dom}(f^{-1}) \times \mathrm{dom}(f^{-1})),$$

puisque (X, O_X) est totalement ordonné on a

$$(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \in O_X \quad \text{ou} \quad (f^{-1}(y'), f^{-1}(y)) \in O_X.$$

Si $(f^{-1}(y'), f^{-1}(y)) \in O_X$, la croissance de f entraîne $(y', y) \in O_Y$, par suite l'antisymétrie de O_Y montre que $y = y'$, ainsi $(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \in O_X$, ceci montre que

$$(y, y') \in O_Y \cap (\mathrm{dom}(f^{-1}) \times \mathrm{dom}(f^{-1})) \Rightarrow (f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \in O_X.$$

L'implication inverse provient de (3.1) appliquée à f^{-1} puisque

$$f^{-1} \in \mathrm{Iso}[Y, X] \Rightarrow f = (f^{-1})^{-1} \in \mathrm{Iso}[X, Y].$$

(ii)

Soit $\mathcal{G}$ une famille totalement ordonnée de $(\mathrm{Iso}[X, Y], O_i)$, Le lemme [1.6] page 26 montre que la relation

$$h = \bigcup_{f \in \mathcal{G}} f$$

est une fonction (remarquer que $(f, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \Rightarrow [f \cup g = f \textit{ ou } f \cup g = g]$) vérifiant

$$\mathrm{dom}(h) = \bigcup_{f \in \mathcal{G}} \mathrm{dom}(f) \textit{ et } \mathrm{im}(h) = \bigcup_{f \in \mathcal{G}} \mathrm{im}(f),$$

le lemme [3.1] page 56 permet donc d'affirmer que $\mathrm{dom}(h)$ et $\mathrm{im}(h)$ sont des sections commençantes comme réunion de sections commençantes. On montre maintenant

1. h est injective,
2. h est croissante.

1. h est injective. En effet, si

   $$(x, y) \in h \textit{ et } (x', y) \in h$$

   alors il existe $f \in \mathcal{G}$ et $f' \in \mathcal{G}$ tel que $(x, y) \in f$ et $(x', y) \in f'$, $\mathcal{G}$ étant totalement ordonné on a $f \subset f'$ ou $f' \subset f$
   — si $f \subset f'$ alors

   $$(x, y) \in f' \textit{ et } (x', y) \in f'$$

   et il résulte de l'injectivité de f' que $x = x'$
   — si $f' \subset f$ alors

   $$(x, y) \in f \textit{ et } (x', y) \in f$$

   et il résulte de l'injectivité de f que $x = x'$
2. h est croissante. En effet, si

   $$(x, x') \in O_X \cap (\mathrm{dom}(h) \times \mathrm{dom}(h))$$

   alors il existe $f \in \mathcal{G}$ et $f' \in \mathcal{G}$ tel que $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $x' \in \mathrm{dom}(f')$, $\mathcal{G}$ étant totalement ordonné on a $f \subset f'$ ou $f' \subset f$
   — si $f \subset f'$ alors $f \subset f' \subset h$ par suite

   $$f(x) = f'(x) = h(x) \quad \text{et} \quad h(x') = f'(x')$$

   et la croissance de f' implique

   $$(h(x), h(x')) = (f'(x), f'(x')) \in O_Y$$

— si $f' \subset f$ alors $f' \subset f \subset h$ par suite

$$f(x') = f'(x') = h(x') \quad \text{et} \quad h(x) = f(x)$$

et la croissance de f implique

$$(h(x), h(x')) = (f(x), f(x')) \in O_Y$$

Ainsi h est un élément de $\mathrm{Iso}[X, Y]$, il est facile de voir que c'est une borne supérieure de $\mathcal{G}$. En effet,

— h est un majorant de $\mathcal{G}$ puisque

$$\forall\ f \in \mathcal{G}, f \subset h$$

— h est le plus petit majorant de $\mathcal{G}$, puisque par définition de la réunion, si g vérifie

$$\forall\ f \in \mathcal{G}, f \subset g$$

alors

$$\bigcup_{f \in \mathcal{G}} f \subset g.$$

■

Le corollaire immédiat de ce lemme concerne la comparaison des ensembles bien ordonnés.

Corollaire 3.1 *On note (X, O_X) et (Y, O_Y) des ensembles bien ordonnés, alors l'une des assertions suivantes est vérifiée*

1. *Il existe une application strictement croissante f de X dans Y tel que* $\mathrm{im}(f)$ *est une section commençante de (Y, O_Y)*
2. *Il existe une application strictement croissante g de Y dans X tel que* $\mathrm{im}(g)$ *est une section commençante de (X, O_X)*

Preuve Puisque $(\mathrm{Iso}[X, Y], O_i)$ est inductif (voir lemme [3.2] page 58), le lemme de Zorn (voir lemme [2.7] page 53) permet d'affirmer qu'il possède un élément maximal $g_{\max}$ (pour la relation d'inclusion), on montre que $\mathrm{dom}(g_{\max}) = X$ ou $\mathrm{im}(g_{\max}) = Y$. En effet, si $\mathrm{dom}(g_{\max}) \neq X$ et $\mathrm{im}(g_{\max}) \neq Y$ alors le lemme [3.1] page 56 permet d'affirmer

$$\mathrm{dom}(g_{\max}) =]\leftarrow, h_X((\mathrm{dom}(g_{\max}))^c)[\ \textit{et}\ \mathrm{im}(g_{\max}) =]\leftarrow, h_Y((\mathrm{im}(g_{\max}))^c)[$$

ou $h_X(A) = \min_{O_X}\{x : x \in A\}$ et $h_Y(B) = \min_{O_Y}\{y : y \in B\}$. On montre que la relation g' définie par $g' = g_{\max} \cup \{(h_X((\mathrm{dom}(g_{\max}))^c), h_Y((\mathrm{im}(g_{\max}))^c)\}$ est un isomorphisme de sections commençantes :

1. D'après le lemme [1.6] page 26 g' est une fonction avec

$$\mathrm{dom}(g') = \mathrm{dom}(g_{\max}) \cup \{h_X(\mathrm{dom}(g_{\max}))^c\} =]\leftarrow, h_X(\mathrm{dom}(g_{\max}))^c]$$

et

$$\mathrm{im}(g') = \mathrm{im}(g_{\max}) \cup \{h_Y(\mathrm{im}(g_{\max}))^c\} =]\leftarrow, h_Y(\mathrm{im}(g_{\max}))^c].$$

Ainsi l'image et le domaine de g' sont des sections commençantes.

2. l'égalité $g'^{-1} = g_{\max}^{-1} \cup \{(h_Y((\mathrm{im}(g_{\max}))^c), h_X((\mathrm{dom}(g_{\max}))^c)\}$ montre que g' est injective
3. il reste à voir que g' est croissante. Mais si

$$(x, x') \in O_X \cap (\mathrm{dom}(g') \times \mathrm{dom}(g'))$$

alors au moins une des assertions suivantes est vérifiée :

(a) $(x, x') \in O_X \cap (\mathrm{dom}(g_{\max}) \times \mathrm{dom}(g_{\max}))$

(b) $x \in \mathrm{dom}(g_{\max})$ et $x' = h_X(\mathrm{dom}(g_{\max}))^c$

(c) $x = x' = h_X(\mathrm{dom}(g_{\max}))^c$

il suffit d'examiner ces cas :

(a) si $(x, x') \in O_X \cap (\mathrm{dom}(g_{\max}) \times \mathrm{dom}(g_{\max}))$ alors

$$g'(x) = g_{\max}(x) \textit{ et } g'(x') = g_{\max}(x')$$

et la croissance de $g_{\max}$ permet d'affirmer

$$(g'(x), g'(x')) \in O_Y.$$

(b) si $x \in \mathrm{dom}(g_{\max})$ et $x' = h_X(\mathrm{dom}(g_{\max}))^c$ alors

$$g'(x) = g_{\max}(x) \textit{ et } g'(x') = h_Y(\mathrm{im}(g_{\max}))^c$$

en particulier, $g'(x) \in \mathrm{im}(g_{\max})$ et il résulte l'égalité

$$\mathrm{im}(g_{\max}) =]\leftarrow, h_Y(\mathrm{im}(g_{\max}))^c[$$

que $(g'(x), g'(x')) \in O_Y$.

(c) si $x = x' = h_X(\mathrm{dom}(g_{\max}))^c$ alors $g'(x) = g'(x')$.

Ainsi l'assertion $\mathrm{dom}(g_{\max}) \neq X$ et $\mathrm{im}(g_{\max}) \neq Y$ entraîne que $g_{\max}$ n'est pas maximal. Par suite on obtient

$$\mathrm{dom}(g_{\max}) = X \quad \text{ou} \quad \mathrm{im}(g_{\max}) = Y$$

— si $\mathrm{dom}(g_{\max}) = X$ alors $g_{\max}$ est une application strictement croissante de X dans Y dont l'image est une section commençante de (Y, O_Y)

— si $\mathrm{im}(g_{\max}) = Y$ alors, le lemme [3.2] page 58 permet d'affirmer que

$$g_{\max}^{-1} \in \mathrm{A}[Y, X] \cap \mathrm{Iso[Y,X]},$$

cette application est donc une application strictement croissante de Y dans X dont l'image est une section commençante de (X, O_X).

■

Une précision importante est l'unicité d'un isomorphisme de sections vérifiant les conclusions du corollaire [3.1]

Lemme 3.3 *On note (X, O_X) et (Y, O_Y) des ensembles bien ordonnés.*

(i) Si $f \in \mathrm{A}[X, X] \cap \mathrm{Iso}[X, X]$ alors

$$\forall\ x \in X\ \ (x, f(x)) \in O_X$$

autrement dit : $x \in X \Rightarrow f(x) \geq x$.

(ii) Si $f \in \mathrm{A}[X, X] \cap \mathrm{Iso}[X, X]$ alors

$$\forall\ x \in X,\ \ f(x) = x.$$

(iii)Si $(f, g) \in (\mathrm{A}[X, Y] \cap \mathrm{Iso}[X, Y]) \times (\mathrm{A}[X, Y] \cap \mathrm{Iso}[X, Y])$ alors

$$\forall\ x \in X,\ \ f(x) = g(x).$$

autrement dit, s'il existe une ***application*** *strictement croissante de X dans Y dont l'image est une section commençante de (Y, O_Y) elle est unique.*

Preuve

(i)

On montre que l'ensemble

$$E = \{x \in X/(x, f(x)) \notin O_X\} = \{x \in X/f(x) < x\}$$

est vide. Si E est non vide il possède un élément minimum qu'on note $h_X(E)$. Si $y = f(h_X(E))$ alors, puisque par définition d'un minimum $h_X(E) \in E$, on a $(h_X(E), y) \notin O_X$ et en particulier $y \neq h_X(E)$. Puisque (X, O_X) est totalement ordonné on obtient $(y, h_X(E)) \in O_X$ (en d'autres termes $y < h_X(E)$). Ainsi y - qui est strictement plus petit que l'élément minimum de E - est un élément de E^c. Mais la croissance stricte de f montre que $y \in E$, puisque $y < h_X(E) \Rightarrow f(y) < y$. Ainsi l'assertion $E \neq \varnothing$ entraîne $E^c \cap E \neq \varnothing$, par suite $E = \varnothing$ et

$$\forall\, x \in X : (x, f(x)) \in O_X.$$

(ii)

On montre d'abord que $\mathrm{im}(f) = X$. En effet, si $\mathrm{im}(f) \neq X$ alors le lemme [3.1] page 56 permet d'affirmer que

$$\mathrm{im}(f) =]\leftarrow, h_X(\mathrm{im}(f)^c)[$$

mais par (i) $f(h_X(\mathrm{im}(f)^c)) \geq h_X(\mathrm{im}(f)^c)$, ainsi $f(h_X(\mathrm{im}(f)^c))$ est un élément de $\mathrm{im}(f)$ qui ne peut appartenir à $\mathrm{im}(f)$. Par suite $\mathrm{im}(f) = X$ et d'après le lemme [3.2] page 58 on a $f^{-1} \in \mathrm{A}[X, X] \cap \mathrm{Iso}[X, X]$. On peut donc appliquer (i) à f^{-1}, ce qui donne

$$\forall\, x \in X : f^{-1}(x) \geq x.$$

La croissance de f entraîne alors

$$\forall\, x \in X : f(f^{-1}(x)) \geq f(x)$$

autrement dit,

$$\forall\, x \in X : f(x) \leq x.$$

et (i) montre alors que

$$\forall\, x \in X : f(x) \leq x \leq f(x).$$

(iii)

D'après le lemme [3.1] page 56 l'ensemble $\mathcal{S}_c(Y)$ est totalement ordonné par l'inclusion, par suite $\mathrm{im}(g) \subset \mathrm{im}(f)$ ou $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(g)$. On montre que si l'inclusion $\mathrm{im}(g) \subset \mathrm{im}(f)$ est vérifiée alors

$$f^{-1} \circ g \in \mathrm{A}[X, X] \cap \mathrm{Iso}[X, X].$$

1. On montre $\mathrm{dom}(f^{-1} \circ g) = X$ et $\mathrm{im}(f^{-1} \circ g) \in \mathcal{S}_c(X)$.
   (a) Si $x \in X$ alors $g(x) \in \mathrm{im}(g)$, ainsi il résulte de $\mathrm{im}(g) \subset \mathrm{im}(f)$ que $g(x) \in \mathrm{im}(f)$, or $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(f^{-1})$, par suite
   $$\forall\, x \in X : g(x) \in \mathrm{dom}(f^{-1})$$
   et $\mathrm{dom}(f^{-1} \circ g) = X$.
   (b) On montre $x_0 \in \mathrm{im}(f^{-1} \circ g) \Rightarrow]\leftarrow, x_0] \subset f^{-1}(\mathrm{im}(g))$. Il est clair que $\mathrm{im}(f^{-1} \circ g) = f^{-1}(\mathrm{im}(g))$, ainsi l'hypothèse $x_0 \in \mathrm{im}(f^{-1} \circ g)$ entraîne $f(x_0) \in \mathrm{im}(g)$, il résulte alors du fait que $\mathrm{im}(g)$ est une section commençante de (Y, O_Y) que
   $$]\leftarrow, f(x_0)] = \{y \in Y/y \leq f(x_0)\} = \{y \in Y/(y, f(x_0)) \in O_Y\}$$
   est inclus dans $\mathrm{im}(g)$. Par suite, pour tout $y \in]\leftarrow, f(x_0)]$ il existe $x \in X$ tel que $y = g(x)$. Cela permet de montrer que
   $$]\leftarrow, x_0] \subset f^{-1}(\mathrm{im}(g)).$$

En effet, si $x \in]\leftarrow, x_0]$ alors la croissance de f permet d'affirmer que $f(x) \leq f(x_0)$, ainsi,

$$x \in]\leftarrow, x_0] \Rightarrow f(x) \in]\leftarrow, f(x_0)] \Rightarrow f(x) \in \mathrm{im}(g) \Rightarrow x \in f^{-1}(\mathrm{im}(g)).$$

Ce qui montre que $\mathrm{im}(f^{-1} \circ g)$ est une section commençante de (X, O_X).

2. Le fait que $f^{-1} \circ g$ soit croissante provient de la croissance de g et de f^{-1} (voir lemme [3.2] page 58) puisque

$$(x, x') \in O_X \Rightarrow (g(x), g(x')) \in O_Y \Rightarrow (f^{-1}(g(x)), f^{-1}(g(x'))) \in O_X.$$

3. Enfin le fait que $f^{-1} \circ g$ soit injective provient de $(f^{-1} \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f$.

Ainsi l'assertion $\mathrm{im}(g) \subset \mathrm{im}(f)$ entraîne que $f^{-1} \circ g$ est une application et un isomorphisme de sections commençantes, (ii) montre alors que

$$\forall\, x \in X : f^{-1} \circ g(x) = x$$

par suite

$$\forall\, x \in X : g(x) = f(x).$$

Il reste à examiner le cas $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(g)$, or ce cas entraîne que

$$g^{-1} \circ f \in \mathrm{A}[X, X] \cap \mathrm{Iso}[X, X]$$

par suite $f = g$. ■

On peut ainsi préciser le corollaire [3.1] page 60

Théorème 3.1 *On note (X, O_X) et (Y, O_Y) des ensembles bien ordonnés, alors l'une des assertions suivantes est vérifiée*

1. *Il existe une unique application strictement croissante de (X, O_X) dans (Y, O_Y) dont l'image est une section commençante de (Y, O_Y)*
2. *Il existe une unique application strictement croissante de (Y, O_Y) dans (X, O_X) dont l'image est une section commençante de (X, O_X).*

Preuve D'après le corollaire [3.1] page 60 il en existe au moins une, et le lemme [3.3] page 61 permet d'affirmer qu'elle est unique. ■

Le théorème de Zermelo permet d'affirmer que tout ensemble peut être munit d'un bon ordre.

3.2 *Théorème du bon ordre*

Si X est un ensemble, $A \subset X$ est un sous-ensemble de X et $O \subset X \times X$ une relation de X dans X On dira que (A, O) est bien ordonné si $O \subset A \times A$ et O est un bon ordre sur A. On considère l'ensemble de Zermelo défini par

$$\mathcal{Z} = \{(A, O) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X \times X)/(A, O) \text{ est bien ordonné}\}.$$

Le jeu consiste à munir $\mathcal{Z}$ d'un ordre inductif et à montrer que si $(A_{\max}, O_{\max})$ est un élément maximal pour cet ordre alors $A_{\max} = X$.

Définition de l'ordre

Si $(A, O) \in \mathcal{Z}$ et $(A', O') \in \mathcal{Z}$ on dira que $(A, O) \leq (A', O')$ si les conditions suivantes sont vérifiées

1. $A \subset A'$
2. $O' \cap (A \times A) = O$

3. $O' \cap ((A' \cap A^c) \times A) = \varnothing$.

Notons que la condition 2 signifie que O est l'ordre induit par O' sur A et la condition 3 que tout élément de $A' \cap A^c$ est un majorant de A pour l'ordre O'. Ainsi A est une section commençante de (A', O'). Enfin, si $(A, O) \in \mathcal{Z}$ on notera $h_{A,O}$ la fonction minimum de l'ensemble bien ordonné (A, O), ainsi $\mathrm{dom}(h_{A,O}) = \mathcal{P}^*(A)$ et

$$\forall\ B \in \mathcal{P}^*(A) : h_{A,O}(B) = \min_O\{x : x \in B\}.$$

De plus, puisque tout sous-ensemble non vide de $\mathcal{Z}$ est une relation de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ dans l'ensemble $\mathcal{P}(X \times X)$, si $\mathcal{F} \subset \mathcal{Z}$ on note

$$\mathrm{dom}(\mathcal{F}) = \{A \in \mathcal{P}(X) / \exists\ O \in \mathcal{P}(X \times X) : (A, O) \in \mathcal{F}\}$$

et

$$\mathrm{im}(\mathcal{F}) = \{O \in \mathcal{P}(X \times X) / \exists\ A \in \mathcal{P}(X) : (A, O) \in \mathcal{F}\}$$

Lemme 3.4 (**Zermelo**)

(i) $\leq$ *est une relation d'ordre sur* $\mathcal{Z}$.

(ii)Si $(A_0, O_0) \in \mathcal{Z}$ *et* $(A_1, O_1) \in \mathcal{Z}$ *vérifient* $(A_0, O_0) \leq (A_1, O_1)$ *alors*

$$h_{A_0,O_0} \subset h_{A_1,O_1}$$

(iii) Si $\mathcal{F}$ *est une famille totalement ordonné de* $(\mathcal{Z}, \leq)$ *alors*

1.

$$O(\mathcal{F}) = \bigcup_{O \in \mathrm{im}(\mathcal{F})} O$$

est un ordre sur

$$A(\mathcal{F}) = \bigcup_{A \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})} A$$

2. $(A(\mathcal{F}), O(\mathcal{F}))$ *est bien ordonné.*

3. $(A(\mathcal{F}), O(\mathcal{F}))$ *est un majorant de* $\mathcal{F}$ *dans* $(\mathcal{Z}, \leq)$

(iv) $(\mathcal{Z}, \leq)$ *est inductif.*

Preuve

(i)

La réflexivité et l'antisymétrie sont évidentes, on montre la transitivité. Si $(A_0, O_0) \leq (A_1, O_1)$ et $(A_1, O_1) \leq (A_2, O_2)$ alors

1. $A_0 \subset A_1 \subset A_2$, par suite $A_0 \subset A_2$
2. du fait que $(A_0 \times A_0) \subset (A_1 \times A_1)$ on obtient

$$O_2 \cap (A_0 \times A_0) = O_2 \cap (A_1 \times A_1) \cap (A_0 \times A_0) = O_1 \cap (A_0 \times A_0) = O_0$$

3. Enfin on montre

$$y \in A_0 \quad \text{et} \quad (x, y) \in O_2 \Rightarrow x \in A_0.$$

Or, si $y \in A_0$ et $(x, y) \in O_2$ alors $x \in A_1$, puisque dans le cas contraire $(x, y) \in ((A_2 \cap A_1^c) \times A_1) \cap O_2$ et l'inégalité $(A_1, O_1) \leq (A_2, O_2)$ entraîne que cet ensemble est vide, par suite $(x, y) \in O_2 \cap (A_1 \times A_1)$ et l'inégalité $(A_1, O_1) \leq (A_2, O_2)$ entraîne que cet ensemble est O_1, ainsi on obtient $y \in A_0$ et $(x, y) \in O_1$. Mais l'inégalité $(A_0, O_0) \leq (A_1, O_1)$ entraîne que $O_1 \cap ((A_1 \cap A_0^c) \times A_0) = \varnothing$ par suite $x \in A_0$.

ce qui montre que $\leq$ est une relation d'ordre.

(ii)

D'après le lemme [1.6] page 26 il faut montrer :

1. $\mathrm{dom}(h_{A_0,O_0}) \subset \mathrm{dom}(h_{A_1,O_1})$
2. $\forall\ B \in \mathrm{dom}(h_{A_0,O_0})$,
$$h_{A_0,O_0}(B) = h_{A_1,O_1}(B)$$

1. Puisque $\mathrm{dom}(h_{A_0,O_0}) = \mathcal{P}^*(A_0)$ et $A_0 \subset A_1 \Rightarrow \mathcal{P}^*(A_0) \subset \mathcal{P}^*(A_1)$ on a 1.
2. Il s'agit de montrer que si B est un sous-ensemble non vide de A_0 alors
$$\min_{O_1}\{x : x \in B\} = \min_{O_0}\{x : x \in B\}.$$
Or,
— Il résulte de $\min_{O_0}\{x : x \in B\} \in B$ que
$$(\min_{O_1}\{x : x \in B\}, \min_{O_0}\{x : x \in B\}) \in O_1$$
comme de plus $(\min_{O_1}\{x : x \in B\}, \min_{O_0}\{x : x \in B\}) \in A_0 \times A_0$ on obtient
$$(\min_{O_1}\{x : x \in B\}, \min_{O_0}\{x : x \in B\}) \in O_1 \cap (A_0 \times A_0)$$
l'inégalité $(A_0, O_0) \leq (A_1, O_1)$ qui entraîne $O_1 \cap (A_0 \times A_0) = O_0$ montre alors que
$$(\min_{O_1}\{x : x \in B\}, \min_{O_0}\{x : x \in B\}) \in O_0$$
— enfin puisque $\min_{O_1}\{x : x \in B\} \in B$ on a aussi
$$(\min_{O_0}\{x : x \in B\}, \min_{O_1}\{x : x \in B\}) \in O_0$$
L'antisymétrie de O_0 permet de conclure à l'égalité.

(iii)

1. (a) (*réflexivité*) Si $x \in A(\mathcal{F})$ il existe $A \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ tel que $x \in A$, puisque $A \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ il existe $O \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ tel que $(A, O) \in \mathcal{F}$, ainsi $(x, x) \in O$ et
$$(x, x) \in O(\mathcal{F}).$$
(b) (*antisymétrie*) Si $(x, x') \in O(\mathcal{F})$ et $(x', x) \in O(\mathcal{F})$ alors il existe $O \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ et $O' \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ tels que
$$(x, x') \in O \textit{ et } (x', x) \in O'$$
puisque $(O, O') \in \mathrm{im}(\mathcal{F}) \times \mathrm{im}(\mathcal{F})$ il existe $(A, A') \in \mathrm{dom}(\mathcal{F}) \times \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ tel que
$$(A, O) \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad (A', O') \in \mathcal{F}.$$
puisque $\mathcal{F}$ est totalement ordonné on a
$$(A, O) \leq (A', O') \textit{ ou } (A', O') \leq (A, O)$$
— si $(A, O) \leq (A', O')$ alors, puisque $O = O' \cap (A \times A)$, $(x, x') \in O'$ et $(x', x) \in O'$, ainsi l'antisymétrie de O' permet d'affirmer $x = x'$
— si $(A', O') \leq (A, O)$ alors $(x, x') \in O$ et $(x', x) \in O$, ainsi l'antisymétrie de O permet d'affirmer $x = x'$

(c) (*transitivité*) si $(x,y) \in O(\mathcal{F})$ et $(y,z) \in O(\mathcal{F})$ alors il existe un élément $O \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ tel que $(x,y) \in O$ et un élément $O' \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ tel que $(y,z) \in O'$. Si A et A' vérifient $(A,O) \in \mathcal{F}$ et $(A',O') \in \mathcal{F}$ on a
$$(A,O) \leq (A',O') \quad \text{ou} \quad (A',O') \leq (A,O).$$
— si $(A,O) \leq (A',O')$ alors $(x,y) \in O'$ et $(y,z) \in O'$ la transitivité de O' entraîne $(x,z) \in O'$, par suite $(x,z) \in O(\mathcal{F})$
— si $(A',O') \leq (A,O)$ alors $(x,y) \in O$ et $(y,z) \in O$ la transitivité de O entraîne $(x,z) \in O$, par suite $(x,z) \in O(\mathcal{F})$

Ainsi $O(\mathcal{F})$ est un ordre sur $A(\mathcal{F})$.

2. Pour montrer que $(A(\mathcal{F}), O(\mathcal{F}))$ est bien ordonné on considère la relation h de $\mathcal{P}^*(A(\mathcal{F}))$ dans $A(\mathcal{F})$ définie par
$$h = \{(Y,z) \in \mathcal{P}^*(A(\mathcal{F})) \times A(\mathcal{F}) / \exists\ (A,O) \in \mathcal{F} : z = h_{A,O}(Y \cap A)\}$$
et on montre
(a) h est une fonction,
(b) h est une application : $\mathrm{dom}(h) = \mathcal{P}^*(A(\mathcal{F}))$,
(c) $h(Y)$ est l'élément minimum de Y pour l'ordre $O(\mathcal{F})$:
$$\forall\ Y \in \mathcal{P}^*(A(\mathcal{F})), h(Y) = \min\nolimits_{O(\mathcal{F})}\{x : x \in Y\}.$$
(a) <u>h est une fonction.</u> En effet, si $(Y,x) \in h$ et $(Y,x') \in h$ alors il existe $(A,O) \in \mathcal{F}$ et $(A',O') \in \mathcal{F}$ qui vérifient $x = h_{A,O}(Y \cap A)$ et $x' = h_{A',O'}(Y \cap A')$. L'ensemble $\mathcal{F}$ étant totalement ordonné, on a
$$(A,O) \leq (A',O') \ ou \ (A',O') \leq (A,O),$$
i. si $(A,O) \leq (A',O')$ alors,(ii) assure que $h_{A,O} \subset h_{A',O'}$, en particulier, puisque $Y \cap A \in \mathrm{dom}(h_{A,O})$ on obtient
$$x = h_{A,O}(Y \cap A) = h_{A',O'}(Y \cap A)$$
l'inclusion $Y \cap A \subset Y \cap A'$ et l'assertion $h_{A,O}(Y \cap A) \in Y \cap A$ montre alors que $(x',x) \in O'$ puisque $h_{A,O}(Y \cap A) \in Y \cap A'$. Ainsi on est dans la situation suivante
$$x \in A \ et \ (x',x) \in O',$$
cela implique que $x' \in A$ puisque si $x' \in A^c$ alors
$$(x',x) \in ((A' \cap A^c) \times A) \cap O'$$
et l'inégalité $(A,O) \leq (A',O')$ entraîne que l'ensemble
$$((A' \cap A^c) \times A) \cap O'$$
est vide. Par suite
$$(x',x) \in O' \cap (A \times A)$$
et l'inégalité $(A,O) \leq (A',O')$ entraîne $O' \cap (A \times A) = O$, on a donc obtenu
$$(x',x) \in O$$
mais, puisque $x' \in Y \cap A$ on a aussi $(x,x') \in O$, ainsi l'antisymétrie de O permet d'affirmer que $x = x'$.
ii. si $(A',O') \leq (A,O)$ une preuve similaire montre que
$$(x',x) \in O' \ et \ (x,x') \in O'$$
ainsi on obtient encore $x = x'$.

ceci montre que h est une fonction.

(b) <u>h est une application.</u> Si Y est un sous-ensemble non vide de $A(\mathcal{F})$ alors il existe $A \in \operatorname{dom}(\mathcal{F})$ tel que $Y \cap A \neq \varnothing$. Puisque $A \in \operatorname{dom}(\mathcal{F})$ il existe $O \in \operatorname{im}(\mathcal{F})$ tel que $(A, O) \in \mathcal{F}$ ainsi

$$(Y, h_{A,O}(Y \cap A)) \in h$$

et $Y \in \operatorname{dom}(h)$.

(c) <u>$h(Y) = \min_{O(\mathcal{F})}\{x : x \in Y\}$</u> Il s'agit de montrer que pour tout sous-ensemble non vide Y de $A(\mathcal{F})$ les assertions suivantes sont vérifiées

i. $h(Y) \in Y$,

ii. $x \in Y \Rightarrow (h(Y), x) \in O(\mathcal{F})$.

i. par définition de h il existe $(A_0, O_0) \in \mathcal{F}$ tel que

$$h(Y) = h_{A_0,O_0}(Y \cap A_0)$$

par suite il existe $A_0 \in \operatorname{dom}(\mathcal{F})$ tel que $h(Y) \in Y \cap A_0$.

ii. si $x \in Y$ alors il existe $A \in \operatorname{dom}(\mathcal{F})$ tel que $x \in Y \cap A$, puisque $A \in \operatorname{dom}(\mathcal{F})$ il existe $O \in \operatorname{im}(\mathcal{F})$ tel que $(A, O) \in \mathcal{F}$, par définition de h, on a $(Y, h_{A,O}(Y \cap A)) \in h$. Ainsi il résulte du fait que h est une fonction que $h(Y) = h_{A,O}(Y \cap A)$, par suite

$$(h(Y), x) \in O$$

et puisque $O \in \operatorname{im}(\mathcal{F})$ on obtient

$$(h(Y), x) \in O(\mathcal{F}).$$

3. On doit montrer que si $(A', O') \in \mathcal{F}$ alors

$$(A', O') \leq (A(\mathcal{F}), O(\mathcal{F})).$$

(a) Il est clair que $A' \subset A(\mathcal{F})$

(b) Pour montrer que $O(\mathcal{F}) \cap (A' \times A') = O'$ on montre que pour tout $O \in \operatorname{im}(\mathcal{F})$ on a

$$O \cap (A' \times A') \subset O'$$

en effet, puisque $O \in \operatorname{im}(\mathcal{F})$ il existe $A \in \operatorname{dom}(\mathcal{F})$ tel que $(A, O) \in \mathcal{F}$:

— si $(A, O) \leq (A', O')$ alors

$$O = O' \cap (A \times A) \subset O'$$

— si $(A', O') \leq (A, O)$ alors

$$O' = O \cap (A' \times A').$$

Ainsi on obtient

$$O(\mathcal{F}) \cap (A' \times A') = \bigcup_{O \in \operatorname{im}(\mathcal{F})} O \cap (A' \times A') \subset O'$$

de plus, puisque $O' \in \operatorname{im}(\mathcal{F})$, l'inclusion inverse est trivialement vérifiée, par suite :

$$O(\mathcal{F}) \cap (A' \times A') = O'.$$

(c) On montre que pour tout $O \in \operatorname{im}(\mathcal{F})$

$$O \cap ((A')^c \times A') = \varnothing.$$

en effet, puisque $O \in \operatorname{im}(\mathcal{F})$ il existe $A \in \operatorname{dom}(\mathcal{F})$ tel que $(A, O) \in \mathcal{F}$

— si $(A,O) \leq (A',O')$ alors
$$O \subset O' \subset A' \times A'$$
et l'égalité provient de
$$((A')^c \times A') \cap (A' \times A') = \varnothing.$$
— si $(A',O') \leq (A,O)$ alors l'égalité provient de la définition de l'ordre sur $\mathcal{Z}$.

Ces propriétés entraînent que $(A(\mathcal{F}), O(\mathcal{F}))$ est un majorant de $\mathcal{F}$ dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{Z}, \leq)$.

(iv)

On vient de vérifier que tout sous-ensemble totalement ordonné de $(\mathcal{Z}, \leq)$ possède un majorant, et c'est pile la définition d'un ensemble inductif. ■

Le lemme [3.4] page 64 permet de montrer le théorème suivant.

Théorème 3.2 *Le lemme de Zorn entraîne que tout ensemble X peut être muni d'un bon ordre.*

Preuve D'après le lemme [3.4] l'ensemble
$$\mathcal{Z} = \{(A,O) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X \times X)/(A,O) \text{ est bien ordonné}\}.$$
muni de l'ordre $\leq$ défini par $(A,O) \leq (A',O') \Leftrightarrow$

1. $A \subset A'$
2. $O' \cap (A \times A) = O$
3. $O' \cap (A^c \times A) = \varnothing$

est inductif, en particulier, d'après le lemme de Zorn (lemme [2.7] page 53) l'ensemble $(\mathcal{Z}, \leq)$ possède un élément maximal $(A_{\max}, O_{\max})$. On montre que $A_{\max} = X$. En effet, si $A_{\max} \neq X$ il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \notin A_{\max}$, on va munir $A_{\max} \cup \{x_0\}$ d'un bon ordre qui majore $(A_{\max}, O_{\max})$. Considérons le sous-ensemble de $((A_{\max} \cup \{x_0\}) \times (A_{\max} \cup \{x_0\}))$ défini par
$$O = O_{\max} \cup (A_{\max} \times \{x_0\}) \cup \{(x_0, x_0)\}$$
alors l'assertion $(x,y) \in O$ est équivalente à ce que l'une des assertions suivantes soient vérifiées :

1. $(x,y) \in O_{\max}$
2. $x \in A_{\max}$ et $y = x_0$
3. $x = y = x_0$

O est un ordre sur $A_{\max} \cup \{x_0\}$

1. O est réflexive : si $x \in A_{\max} \cup \{x_0\}$ alors
   (a) si $x \in A_{\max}$, $(x,x) \in O_{\max}$,
   (b) si $x = x_0$ alors $(x_0,x_0) \in O$
2. O est antisymétrique : en effet, l'assertion $[(x,y) \in O \textit{ et } (y,x) \in O]$ entraîne - en remarquant que pour tout $y \neq x_0$, $(x_0, y) \notin O$ - l'une des assertions suivantes
   (a) $(x,y) \in O_{\max}$ et $(y,x) \in O_{\max}$ et l'antisymétrie de $O_{\max}$ permet de conclure $x = y$
   (b) $x = y = x_0$
3. O est transitive : en effet, l'assertion $[(x,y) \in O \textit{ et } (y,z) \in O]$ entraîne l'une des assertions suivantes :
   (a) $(x,y) \in O_{\max}$ et $(y,z) \in O_{\max}$, et la transitivité de $O_{\max}$ permet de conclure $(x,z) \in O$.
   (b) $(x,y) \in O_{\max}$, $y \in A_{\max}$ et $z = x_0$, par suite $(x,z) \in A_{\max} \times \{x_0\}$ et $(x,z) \in O$,
   (c) $x \in A_{\max}$, $y = z = x_0$, par suite $(x,z) \in A_{\max} \times \{x_0\}$ et $(x,z) \in O$,

(d) $x = y = z = x_0$ d'où $(x, z) \in O$.

Enfin on montre que $(A_{\max} \cup \{x_0\}, O)$ est bien ordonné. Soit Y un sous-ensemble non vide de $A_{\max} \cup \{x_0\}$, si $Y = \{x_0\}$ alors x_0 est un minimum de Y pour O, si $Y \neq \{x_0\}$ alors $Y \cap A_{\max} \neq \varnothing$ et on montre que $\min_{O_{\max}}\{x : x \in Y \cap A_{\max}\}$ est un minimum de Y pour O. En effet,si $y \in Y$ alors

— si $y = x_0$ alors $(\min_{O_{\max}}\{x : x \in Y \cap A_{\max}\}, y) \in O$ puisque x_0 est le plus grand élément de $A_{\max} \cup \{x_0\}$ pour O

— si $y \in A_{\max}$ alors $(\min_{O_{\max}}\{x : x \in Y \cap A_{\max}\}, y) \in O_{\max}$ par définition d'un minimum, ainsi $(\min_{O_{\max}}\{x : x \in Y \cap A_{\max}\}, y) \in O$.

Par suite $(A_{\max} \cup \{x_0\}, O) \in \mathcal{Z}$, on montre que

$$(A_{\max}, O_{max}) \leq (A_{\max} \cup \{x_0\}, O),$$

1. Il est clair que $A_{\max} \subset A_{\max} \cup \{x_0\}$
2. l'égalité $O \cap (A_{\max} \times A_{\max}) = O_{\max}$ provient de

$$O \cap (A_{\max} \times A_{\max}) = O_{\max} \cup [(A_{\max} \times \{x_0\}) \cap (A_{\max} \times A_{\max})] \cup [(\{x_0\} \times \{x_0\}) \cap (A_{\max} \times A_{\max})]$$

et de

$$(A_{\max} \times \{x_0\}) \cap (A_{\max} \times A_{\max}) = \varnothing = (\{x_0\} \times \{x_0\}) \cap (A_{\max} \times A_{\max})$$

3. enfin on montre

$$(x, y) \in O \text{ et } y \in A_{\max} \Rightarrow x \in A_{\max}.$$

or, si $(x, y) \in O$ *et* $y \in A_{\max}$ alors $y \neq x_0$ par suite $(x, y) \notin A_{\max} \times \{x_0\}$ et $(x, y) \neq (x_0, x_0)$, ainsi $(x, y) \in O_{\max}$ et $x \in A_{\max}$.

Ainsi l'assertion $A_{\max} \neq X$ contredit la maximalité de $(A_{\max}, O_{\max})$, par suite $A_{\max} = X$ et $O_{\max}$ est un bon ordre sur X. ■

Ainsi on a obtenu le théorème suivant :

Théorème 3.3 *L'axiome du choix, le lemme de Zorn et le théorème du bon ordre sont équivalent.*

Preuve Pour axiome du choix $\Rightarrow$ lemme de Zorn voir lemme [2.7] page 53, pour lemme de Zorn $\Rightarrow$ théorème du bon ordre voir théorème [3.2] page 68. Enfin, si (X, O) est un ensemble bien ordonné alors l'application h_X de $\mathcal{P}^*(X)$ dans X définie par $h_X(A) = \min_O\{x : x \in A\}$ est une fonction de choix. ■

Chapitre 4

Ensembles bien ordonnés et axiome de l'infini

4.1 *Succession et ensembles héréditaires*

Succession

Si (X, O) est un ensemble ordonné on note $\mathrm{Max}(X, O)$ l'ensemble des éléments maximaux de (X, O) :

$$\mathrm{Max}(X, O) = \{x \in X /]x, \to [= \varnothing\}.$$

Il est clair que si (X, O) est totalement ordonné et non réduit à un point, le complémentaire de l'ensemble des éléments maximaux de (X, O) est non vide. Enfin, lorsque (X, O) est bien ordonné on note encore h_X l'application de $\mathcal{P}^*(X)$ dans X définie par $h_X(A) = \min_O\{x : x \in A\}$, en particulier on note toujours $h_X(X) = \min_O\{x : x \in X\}$ le plus petit élément de X.

Lemme 4.1 *On note (X, O) un ensemble bien ordonné non réduit à un point.*
(i) L'ensemble $\mathrm{Max}(X, O)$ est vide ou réduit à un point.
(ii) Le sous-ensemble s_X de $X \times X$ défini par

$$s_X = \{(x, y) \in X \times X / y = h_X(]x, \to [)\}$$

possède les propriétés suivantes :

1. *s_X est une fonction et $\mathrm{dom}(s_X) = (\mathrm{Max}(X, O))^c$. En particulier*
   (a) *si $\mathrm{Max}(X, O) = \varnothing$, alors $\mathrm{dom}(s_X) = X$*
   (b) *si $\mathrm{Max}(X, O) \neq \varnothing$ alors, si m est l'élément maximal de (X, O),*
   $$\mathrm{dom}(s_X) =] \leftarrow, m[.$$
2. *s_X est croissante*
3. *s_X est strictement croissante*
4. *Si $x \in \mathrm{dom}(s_X)$ alors*
$$] \leftarrow, s_X(x)] =] \leftarrow, x] \cup \{s_X(x)\}$$

Preuve

(i)

Si $m \in \mathrm{Max}(X, O)$ et $m' \in \mathrm{Max}(X, O)$, puisque (X, O) est totalement ordonné on a

$$(m, m') \in O \quad \text{ou} \quad (m', m) \in O,$$

or,

— si $(m, m') \in O$, la maximalité de m entraîne $m' = m$
— si $(m', m) \in O$, la maximalité de m' entraîne $m = m'$.

(ii)

1. On remarque que puisque X n'est pas réduit à un élément
$$(\mathrm{Max}(X, O))^c \neq \varnothing.$$
D'abord si $x \notin \mathrm{Max}(X, O)$ alors $]x, \rightarrow[\neq \varnothing$ et la définition d'un ensemble bien ordonné entraîne que $]x, \rightarrow[$ possède un élément minimum, si y est cet élément alors $(x, y) \in s_X$, par suite $x \in \mathrm{dom}(s_X)$. Ensuite si $(x, y) \in s_X$ alors $y \in]x, \rightarrow[$, par suite $x \notin \mathrm{Max}(X, O)$. Ceci montre que $s_X \neq \varnothing$ et $\mathrm{dom}(s_X) = (\mathrm{Max}(X, O))^c$.Enfin s_X est une fonction comme composée de la fonction $\varphi : (\mathrm{Max}(X, O))^c \mapsto \mathcal{P}^*(X)$ définie par $\varphi(x) =]x, \rightarrow[$ et de la fonction $h_X : \mathcal{P}^*(X) \mapsto X$.
   (a) Si $\mathrm{Max}(X, O) = \varnothing$ alors $(\mathrm{Max}(X, O))^c = X$ et
   $$\mathrm{dom}(s_X) = (\mathrm{Max}(X, O))^c = X.$$
   (b) Il est clair que $] \leftarrow, m[\subset (\mathrm{Max}(X, O))^c$, d'autre part, si $x \in (\mathrm{Max}(X, O))^c$ alors $x \neq m$ et, puisque (X, O) est totalement ordonné on a
   $$(x, m) \in O \quad \text{ou} \quad (m, x) \in O$$
   et l'assertion $(m, x) \in O$ contredit la maximalité de m, par suite $x \in] \leftarrow, m[$.Ainsi
   $$\mathrm{dom}(s_X) = (\mathrm{Max}(X, O))^c =] \leftarrow, m[.$$
2. Si $(x, x') \in O \cap (\mathrm{dom}(s_X) \times \mathrm{dom}(s_X))$ alors $x = x'$ ou $x' \in]x, \rightarrow[$,
   — si $x = x'$ alors $s_X(x) = s_X(x')$ et $(s_X(x), s_X(x')) \in O$
   — si $x' \in]x, \rightarrow[$ alors $(s_X(x), x') \in O$ puisque $s_X(x)$ est le plus petit élément de $]x, \rightarrow[$, d'autre part, puisque $s_X(x')$ est le plus petit élément de $]x', \rightarrow[$ on a $(x', s_X(x')) \in O$ ainsi la transitivité de O entraîne $(s_X(x), s_X(x')) \in O$.
3. On montre $x \neq x' \Rightarrow s_X(x) \neq s_X(x')$. En effet, puisque (X, O) est totalement ordonné, l'assertion $x \neq x'$ entraîne $x \in]x', \rightarrow[$ ou $x' \in]x, \rightarrow[$.
   — si $x \in]x', \rightarrow[$ alors $s_X(x')$ qui est le plus petit élément de $]x', \rightarrow[$ vérifie $s_X(x') \in] \leftarrow, x]$, comme par ailleurs on a $s_X(x) \in]x, \rightarrow[$ on obtient $s_X(x') \neq s_X(x)$. En d'autre termes on vient de dire :
   $$x' < x \Rightarrow s_X(x') \leq x < s_X(x).$$
   — si $x' \in]x, \rightarrow[$ alors $s_X(x)$ qui est le plus petit élément de $]x, \rightarrow[$ vérifie $s_X(x) \in] \leftarrow, x']$, comme par ailleurs on a $s_X(x') \in]x', \rightarrow[$ on obtient $s_X(x') \neq s_X(x)$.
4. Il s'agit de montrer
$$(y, s_X(x)) \in O \Rightarrow (y, x) \in O \quad \text{ou} \quad y = s_X(x).$$
Or, puisque (X, O) est totalement ordonné on a
$$(y, x) \in O \quad \text{ou} \quad [y \neq x \text{ et } (x, y) \in O]$$
en d'autre termes, l'ordre total sur X entraîne
$$(y, x) \in O \quad \text{ou} \quad y \in]x \rightarrow[$$
mais puisque $s_X(x)$ est le plus petit élément de $]x, \rightarrow[$ l'assertion
$$(y, s_X(x)) \in O \quad \text{et} \quad y \in]x, \rightarrow[$$
entraîne $y = s_X(x)$.

$\blacksquare$

Définition 4.1 *Si (X, O) est un ensemble bien ordonné on appelle* ***succession*** *de X la fonction s_X de X dans X définie par*

$$s_X(x) = \min_O\{y : y \in]x, \rightarrow [\}.$$

le domaine de s_X est X si cet ensemble ne possède pas d'élément maximal, et si (X, O) possède un élément maximal m alors

$$\mathrm{dom}(s_X) =] \leftarrow, m[.$$

La succession d'un ensemble bien ordonné permet de définir la notion d'ensemble héréditaire.

Ensembles héréditaires

Si (X, O) est bien ordonné, on note encore h_X la fonction minimum de (X, O) et s_X la succession de (X, O).

Définition 4.2 *On note (X, O) un ensemble bien ordonné non réduit à un point, un sous-ensemble A de X est dit* ***héréditaire*** *si les conditions suivantes sont vérifiées*

1. $h_X(X) \in A$
2. $s_X(A) \subset A$ *c'est à dire :* $x \in A \cap \mathrm{dom}(s_X) \Rightarrow s_X(x) \in A$.

On note $\mathcal{H}$ la famille des ensembles héréditaires de X :

$$\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{P}(X)/h_X(X) \in A \quad \text{et} \quad s_X(A) \subset A\}.$$

Ainsi un ensemble est héréditaire si le plus petit élément de X est dans cet ensemble et s'il est stable par la succession. Lorsque (X, O) est un ensemble bien ordonné non réduit à un point alors, puisque X possède au plus un élément maximal, $\mathrm{dom}(s_X) \neq \varnothing$ et $X \in \mathcal{H}$.
Nous allons voir que tout ensemble bien ordonné contient un « plus petit » ensemble héréditaire, c'est l'ensemble qui nous intéresse.

Lemme 4.2 *On note (X, O) un ensemble bien ordonné non réduit à un point alors l'ensemble $\mathbb{N}_X$ défini par*

$$\mathbb{N}_X = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$$

possède les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{N}_X$ *est un sous-ensemble héréditaire de (X, O), en particulier* $\mathbb{N}_X \neq \varnothing$.
2. *Si H est un sous-ensemble héréditaire de (X, O) alors*
$$\mathbb{N}_X \subset H.$$
3. $\mathbb{N}_X$ *est une section commençante de (X, O).*
4. *Si A est un sous-ensemble de X vérifiant :*
   (a) $s_X(h_X(X)) \in A$
   (b) $s_X(A) \subset A$
   alors $\mathbb{N}_X \subset A \cup \{h_X(X)\}$. *En particulier*
$$\mathbb{N}_X \subset \mathrm{im}(s_X) \cup \{h_X(X)\}$$
5. *Si A est un sous-ensemble non vide de X majoré par un élément de $\mathbb{N}_X$ alors A possède un plus grand élément pour l'ordre O.*

6. *Si* $O_{\mathbb{N}_X} = O \cap (\mathbb{N}_X \times \mathbb{N}_X)$ *est l'ordre induit par* O *sur* $\mathbb{N}_X$ *alors l'ensemble ordonné* $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$ *est bien ordonné et pour tout sous-ensemble non vide* A *de* $\mathbb{N}_X$

$$\min_{O_{\mathbb{N}_X}}\{n : n \in A\} = \min_O\{n : n \in A\} \tag{4.1}$$

7. *si* $s_{\mathbb{N}_X}$ *désigne la succession de l'ensemble* $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$ *alors*
   (a) $\mathrm{dom}(s_{\mathbb{N}_X}) \subset \mathrm{dom}(s_X)$ *et pour tout* $n \in \mathrm{dom}(s_{\mathbb{N}_X})$ *on a*

   $$s_{\mathbb{N}_X}(n) = s_X(n).$$

   (b) $\mathbb{N}_X$ *est le seul sous-ensemble héréditaire de* $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$. *En d'autres termes, pour qu'un sous-ensemble de* $\mathbb{N}_X$ *soit égal à* $\mathbb{N}_X$ *il faut et il suffit qu'il soit héréditaire.*
   (c) $\mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X}) = \mathbb{N}_X^* = \{n \in \mathbb{N}_X / n \neq h_X(X)\}$
   (d) *Si* A *est un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{N}_X$ *majoré pour l'ordre* $O_{\mathbb{N}_X}$, *alors* A *possède un plus grand élément.*

Preuve

1. (a) Puisque pour tout $H \in \mathcal{H}$ on a $h_X(X) \in H$, on obtient

   $$h_X(X) \in \mathbb{N}_X.$$

   (b) Si $x \in \mathrm{dom}(s_X) \cap \mathbb{N}_X$ alors, pour tout $H \in \mathcal{H}$ on a $x \in \mathrm{dom}(s_X) \cap H$, par suite, $\forall\ H \in \mathcal{H}, s_X(x) \in H$ et

   $$s_X(x) \in \mathbb{N}_X$$

2. Par définition d'une intersection, $H \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{N}_X \subset H$.
3. Posons

   $$H = \{n \in \mathbb{N}_X / [h_X(X), n] \subset \mathbb{N}_X\}$$

   et montrons que H est héréditaire.
   (a) D'abord $h_X(X) \in H$ puisque $[h_X(X), h_X(X)] = \{h_X(X)\}$ et, d'après *1.*, $h_X(X) \in \mathbb{N}_X$.
   (b) Ensuite on montre $[n \in \mathrm{dom}(s_X) \cap H \Rightarrow s_X(n) \in H]$. Or, d'après le lemme 4.1 page 70 on a

   $$]\leftarrow, s_X(n)] = [h_X(X), s_X(n)] = [h_X(X), n] \cup \{s_X(n)\}$$

   or :
   — puisque $\mathbb{N}_X$ est héréditaire, $s_X(n) \in \mathbb{N}_X$
   — puisque $n \in H$ $[h_X(X), n] \subset \mathbb{N}_X$
   par suite $[h_X(X), n] \cup \{s_X(n)\} \subset \mathbb{N}_X$.

   Ainsi H est héréditaire et $\mathbb{N}_X \subset H \subset \mathbb{N}_X$. En particulier,

   $$n \in \mathbb{N}_X \Rightarrow n \in H \Rightarrow]\leftarrow, n] \subset \mathbb{N}_X.$$

4. Les conditions (a) et (b) entraînent que $A \cup \{h_X(X)\}$ est héréditaire, d'autre part il est clair que $\mathrm{im}(s_X)$ vérifie (a) et (b).
5. Posons

   $$H = \{n \in \mathbb{N}_X / A \neq \varnothing \textit{ et } A \subset]\leftarrow, n] \Rightarrow \min_O\{x : x \in \mathrm{Maj(A, O)}\} \in A\}$$

   ainsi H est l'ensemble des éléments n de $\mathbb{N}_X$ qui vérifient la propriété que si A est un sous-ensemble non vide de X majoré par n, la borne supérieure de A est un élément de A. On montre que H est héréditaire.
   (a) D'abord $h_X(X) \in H$, puisque $]\leftarrow, h_X(X)] = \{h_X(X)\}$ est le seul ensemble non vide majoré par $h_X(X) = \min_O\{x : x \in X\}$.

(b) Ensuite on montre $n \in \mathrm{dom}(s_X) \cap H \Rightarrow s_X(n) \in H$. en effet, si A est un sous-ensemble de X majoré par $s_X(n)$ on examine les cas suivants :

i. $A \cap]n, \to [= \varnothing$

ii. $A \cap]n, \to [\neq \varnothing$.

i. si $A \cap]n, \to [= \varnothing$ alors il résulte du fait que O est un ordre total que si $x \in A$ alors

$$(x, n) \in O \text{ ou } [x \neq n \text{ et } (n, x) \in O]$$

et l'assertion entre crochets contredit l'égalité $A \cap]n, \to [= \varnothing$. Par suite pour tout $x \in A$, $(x, n) \in O$, ainsi n est un majorant de A et l'hypothèse $n \in H$ entraîne que la borne supérieure de A appartient à A

ii. On montre que si $A \cap]n, \to [\neq \varnothing$ alors $s_X(n) \in A$. En effet, par hypothèse il existe un élément y de $A \cap]n, \to [$

— puisque $s_X(n)$ est un minorant de $]n, \to [$ on a

$$(s_X(n), y) \in O$$

— puisque $s_X(n)$ est un majorant de A on a

$$(y, s_X(n)) \in O$$

Ainsi l'antisymétrie de O montre que $s_X(n)$ est le seul élément de $A \cap]n, \to [$,en particulier, puisque $s_X(n)$ est un majorant de A, c'est le plus grand élément de A.

Ainsi H est héréditaire et 2. montre alors que $\mathbb{N}_X \subset H \subset \mathbb{N}_X$. Par suite tout sous-ensemble de X majoré par un élément de $\mathbb{N}_X$ possède un plus grand élément.

6. On sait que $O_{\mathbb{N}_X}$ est un ordre, Si $A \subset \mathbb{N}_X$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}_X$ alors pour tout $y \in A$ on a $(\min_O\{n : n \in A\}, y) \in O$, et puisque $\min_O\{n : n \in A\} \in A$ on obtient

$$y \in A \Rightarrow (\min_O\{n : n \in A\}, y) \in O \cap (\mathbb{N}_X \times \mathbb{N}_X)$$

ainsi $\min_O\{n : n \in A\} = \min_{O_{\mathbb{N}_X}}\{n : n \in A\}$

7. (a) i. D'abord on montre $\mathrm{dom}(s_{\mathbb{N}_X}) \subset \mathrm{dom}(s_X)$.En effet,si $n \in \mathrm{dom}(s_{\mathbb{N}_X})$ alors n n'est pas maximal dans $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$ par suite il existe $y \in \mathbb{N}_X$ tel que

$$y \neq n \text{ et } (n, y) \in O_{\mathbb{N}_X}.$$

L'inclusion $O_{\mathbb{N}_X} \subset O$ montre alors que n n'est pas maximal dans (X, O), ainsi $n \in \mathrm{dom}(s_X)$.

ii. Ensuite on montre $n \in \mathrm{dom}(s_{\mathbb{N}_X}) \Rightarrow s_{\mathbb{N}_X}(n) = s_X(n)$. Soit $n \in \mathrm{dom}(s_{\mathbb{N}_X})$, par i on a $n \in \mathrm{dom}(s_X)$, par suite $n \in \mathrm{dom}(s_X) \cap \mathbb{N}_X$ et l'hérédité de $\mathbb{N}_X$ permet d'affirmer que $s_X(n) \in \mathbb{N}_X$, en particulier, $(n, s_X(n)) \in O \cap (\mathbb{N}_X \times \mathbb{N}_X)$. Ainsi, si on pose

$$A(n) = \{p \in \mathbb{N}_X / p \neq n \; et \; (n, p) \in O_{\mathbb{N}_X}\}$$

on a $s_X(n) \in A(n)$, mais par définition :

$$s_{\mathbb{N}_X}(n) = \min_{O_{\mathbb{N}_X}}\{p : p \in A(n)\}$$

par suite $(s_{\mathbb{N}_X}(n), s_X(n)) \in O_{\mathbb{N}_X}$. d'autre part, puisque

$$]n, \to [= \{x \in X / x \neq n \; et \; (n, x) \in O\}$$

on a $A(n) \subset]n, \to [$, ainsi, de $s_{\mathbb{N}_X}(n) \in A(n)$ on déduit que $s_{\mathbb{N}_X}(n) \in]n, \to [$ mais par définition :

$$s_X(n) = \min_O\{x : x \in]n, \to [\}$$

par suite on a aussi $(s_X(n), s_{\mathbb{N}_X}(n)) \in O$. L'antisymétrie de O permet alors de conclure $s_{\mathbb{N}_X}(n) = s_X(n)$

(b) On montre que tout sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$ est un sous-ensemble héréditaire de (X, O). En d'autres termes il s'agit de montrer que si A est un sous-ensemble de $\mathbb{N}_X$ vérifiant

   i. $\min_{O_{\mathbb{N}_X}}\{n : n \in \mathbb{N}_X\} \in A$

   ii. $s_{\mathbb{N}_X}(A) \subset A$

   alors A vérifie

   i. $h_X(X) \in A$

   ii. $s_X(A) \subset A$.

   Or, puisque $h_X(X)$ est à la fois le plus petit élément de X pour O et un élément de $\mathbb{N}_X$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}_X$

$$(h_X(X), n) \in O \cap (\mathbb{N}_X \times \mathbb{N}_X)$$

   par suite $h_X(X) = \min_{O_{\mathbb{N}_X}}\{n : n \in \mathbb{N}_X\}$ et l'hypothèse d'hérédité de A dans $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$ montre que $h_X(X) \in A$. Ensuite on montre

$$n \in \mathrm{dom}(s_X) \cap A \Rightarrow s_X(n) \in A.$$

   On remarque d'abord que l'assertion $n \in \mathrm{dom}(s_X) \cap A$ entraîne que n n'est pas maximal dans $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$. En effet, puisque $A \subset \mathbb{N}_X$,l'hérédité de $\mathbb{N}_X$ dans (X, O) montre que

$$n \in \mathrm{dom}(s_X) \cap A \Rightarrow n \in \mathrm{dom}(s_X) \cap \mathbb{N}_X \Rightarrow s_X(n) \in \mathbb{N}_X,$$

   ainsi $(n, s_X(n)) \in O_{\mathbb{N}_X}$ et $s_X(n)$ est un majorant strict de n dans $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$. En particulier

$$n \in \mathrm{dom}(s_X) \cap A \Rightarrow n \in \mathrm{dom}(s_{\mathbb{N}_X}) \cap A,$$

   et l'hérédité de A dans $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$ montre alors que $s_{\mathbb{N}_X}(n) \in A$. Or, d'après (a) on a $s_{\mathbb{N}_X}(n) = s_X(n)$. Ainsi A est héréditaire dans (X, O) et *2.* permet donc d'affirmer que $\mathbb{N}_X \subset A$, par suite $\mathbb{N}_X \subset A \subset \mathbb{N}_X$ et $A = \mathbb{N}_X$.

(c) On montre que $\mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X}) \cup \{h_X(X)\}$ est héréditaire dans $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$

   i. On vient de voir que $h_X(X) = \min_{O_{\mathbb{N}_X}}\{n : n \in \mathbb{N}_X\}$ par suite $\min_{O_{\mathbb{N}_X}}\{n; n \in \mathbb{N}_X\} \in \mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X}) \cup \{h_X(X)\}$.

   ii. Si $n \in \mathrm{dom}(s_{\mathbb{N}_X}) \cap (\mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X}) \cup \{h_X(X)\})$ alors $s_{\mathbb{N}_X}(n) \in \mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X})$ par définition de l'image, par suite
$$s_{\mathbb{N}_X}(\mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X}) \cup \{h_X(X)\}) \subset \mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X}) \cup \{h_X(X)\}.$$

   Ainsi $\mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X}) \cup \{h_X(X)\}$ est héréditaire et *7.*(b) permet donc d'affirmer que $\mathbb{N}_X = \mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X}) \cup \{h_X(X)\}$. Pour conclure que $\mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X}) = \mathbb{N}_X^*$ il suffit donc de montrer que $h_X(X) \notin \mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X})$. Or si l'assertion $h_X(X) \in \mathrm{im}(s_{\mathbb{N}_X})$ est vérifiée alors il existe $n \in \mathbb{N}_X$ tel que $s_{\mathbb{N}_X}(n) = h_X(X)$, en particulier $h_X(X) \in]n, \to[$ et ceci contredit la définition de $h_X(X)$ comme plus petit élément de (X, O).

(d) d'après *5.* A possède un plus grand élément pour l'ordre O, il suffit donc de montrer que

$$\max_O\{n : n \in A\} = \max_{O_{\mathbb{N}_X}}\{n : n \in A\}.$$

   Puisque $A \subset \mathbb{N}_X$ il est clair que $\max_O\{n : n \in A\} \in \mathbb{N}_X$, par suite, si $n \in A$

$$(n, \max_O\{n : n \in A\}) \in O_{\mathbb{N}_X}$$

   ainsi $\max_O\{n : n \in A\}$ est à la fois un élément de A et un majorant de A pour l'ordre $O_{\mathbb{N}_X}$.

■

Le lemme [4.2] page 72 permet d'obtenir le théorème suivant

Théorème 4.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Il existe un ensemble bien ordonné* (X, O_X) *tel que* $\mathbb{N}_X \subset \mathrm{dom}(s_X)$
2. *Il existe un ensemble bien ordonné* (Y, O_Y) *vérifiant les propriétés suivantes :*
   (a) $\mathrm{dom}(s_Y) = Y$
   (b) Y *est le seul sous-ensemble héréditaire de* (Y, O_Y) *:* $\mathbb{N}_Y = Y$.
3. *Il existe un ensemble bien ordonné sans élément maximal.*

Preuve

$$1 \Rightarrow 2$$

Soit (X, O_X) un ensemble bien ordonné vérifiant $\mathbb{N}_X \subset \mathrm{dom}(s_X)$, on montre que si $Y = \mathbb{N}_X$ et $O_Y = O_X \cap (\mathbb{N}_X \times \mathbb{N}_X)$ alors (Y, O_Y) vérifie *2*. D'abord, d'après le lemme 4.2 page 72 $\mathbb{N}_X$ est le seul sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$, ainsi (b) est vérifié. Il reste à voir (a) et ceci est une conséquence de $\mathbb{N}_X \subset \mathrm{dom}(s_X)$. En effet,

— puisque $\mathbb{N}_X \subset \mathrm{dom}(s_X)$, pour tout $n \in \mathbb{N}_X$, $s_X(n)$ est un majorant strict de n dans (X, O_X)

— puisque $\mathbb{N}_X$ est héréditaire, $s_X(n) \in \mathbb{N}_X$ par suite

$$n \in \mathbb{N}_X \Rightarrow (n, s_X(n)) \in O \cap (\mathbb{N}_X \times \mathbb{N}_X)$$

ainsi, puisque $s_X(n) \neq n$, tout élément de $\mathbb{N}_X$ possède un majorant strict dans $(\mathbb{N}_X, O_{\mathbb{N}_X})$ et cet ensemble est sans élément maximal, par suite, puisque $\mathrm{dom}(s_{\mathbb{N}_X})$ est le complémentaire des éléments maximaux de $\mathbb{N}_X$, $\mathrm{dom}(s_{\mathbb{N}_X}) = \mathbb{N}_X$.

$$2 \Rightarrow 3$$

Si (Y, O_Y) est bien ordonné et $\mathrm{dom}(s_Y) = Y$, alors (Y, O_Y) est sans élément maximal puisque $\mathrm{dom}(s_Y)$ est le complémentaire des éléments maximaux.

$$3 \Rightarrow 1$$

Si (X, O) est bien ordonné sans éléments maximaux alors $\mathrm{dom}(s_X) = X$, par suite $\mathbb{N}_X \subset \mathrm{dom}(s_X)$. ■

Ce théorème permet d'attaquer le dernier axiome.

4.2 *Axiome de l'infini et définition des entiers naturels*

L'existence d'un ensemble vérifiant la propriété *2* du théorème [4.1] page 76 permet de construire l'ensemble des entiers naturels et tous les espaces numériques de base. Cette existence est assurée par l'axiome du choix (voir axiome [2.1)] page 48), l'axiome de l'infini (Voir axiome [1.7] page 41) qui postule l'existence d'un ensemble non fini (on rappelle qu'un ensemble X est fini si tout sous-ensemble de X en bijection avec X est **égal** à X) et le théorème suivant :

Théorème 4.2 *On note* X *un ensemble infini,* O_X *un bon ordre sur* X*,* $\mathcal{F}(X)$ *la famille des sous-ensembles finis de* X*,* $\mathrm{Max}(X, O_X)$ *l'ensemble des éléments maximaux de* (X, O_X) *(qui est vide ou réduit à un point), enfin* h *est l'application de* $\mathcal{P}^*(X)$ *dans* X *défini par* $h(A) = \min_{O_X}\{x : x \in A\}$ *et* $s : \mathrm{Max}(X, O_X)^c \mapsto X$ *la succession de* (X, O_X) *:* $s(x) = h(]x, \rightarrow[)$

(i) Si A *est un ensemble fini et* $b \notin A$ *il n'existe pas d'application injective de* $A \cup \{b\}$ *dans* A.

(ii) Si A *est un ensemble fini et* $b \notin A$ *alors* $A \cup \{b\}$ *est fini.*

(iii) Si $(X\ , O_X)$ *possède un élément maximal* m *alors*

1. $X = [h(X), m] = \{x \in X / h(X) \leq x \leq m\}$

2. l'ensemble

$$H = \{x \in X/[h(X)\ ,\ x] \in \mathcal{F}(X)\}$$

vérifie les propriétés suivantes

a $m \notin H$ *et* $H \subset \mathrm{dom}(s)$

b $s(H) \subset H : x \in H \Rightarrow s(x) \in H$

c $(\ H\ , O \cap (H \times H)\ )$ *est un ensemble bien ordonné sans élément maximal.*

(iv) L'axiome du choix et l'axiome de l'infini entraîne l'existence d'un ensemble bien ordonné sans élément maximal.

Preuve

(i)

On montre que si i est une application injective de $A \cup \{b\}$ dans A alors $b \in A$. Si i est une application injective de $A \cup \{b\}$ dans A alors i est une bijection de l'ensemble A dans le sous-ensemble $i(A)$ de A défini par

$$i(A) = \{y \in A/\exists x \in A : i(x) = y\}$$

— puisque A est fini on a $i(A) = A$ ainsi pour tout $y \in A$ il existe $x \in A$ tel que $i(x) = y$
— puisque $i(b) \in A$ il existe $x \in A$ tel que $i(x) = i(b)$

l'injectivité de i montre alors que $x = b$ et ceci entraîne $b \in A$

(ii)

Il s'agit de montrer que si $C \subset A \cup \{b\}$ et s'il existe une bijection g de C dans $A \cup \{b\}$ alors $C = A \cup \{b\}$.

1. D'abord on montre que $b \in C$ et qu'il existe une bijection f de C dans $A \cup \{b\}$ telle que $f(b) = b$. En effet
   — si $b \notin C$ alors $C \subset A$ et g^{-1} est une application injective de $A \cup \{b\}$ dans A.
   — si $g^{-1}(b) = b$ alors on prend $f = g$ si $g^{-1}(b) \neq b$ on considère l'application φ de C dans C définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & si \quad x \notin \{b, g^{-1}(b)\} \\ b & si \quad x = g^{-1}(b) \\ g^{-1}(b) & si \quad x = b \end{cases}$$

   puisque φ est une bijection de C dans C alors $f = g \circ \varphi$ est une bijection de C dans $A \cup \{b\}$ telle que $f(b) = g(g^{-1}(b)) = b$.
2. Ensuite on montre que $C = A \cup \{b\}$. En effet , si f est une bijection de C dans $A \cup \{b\}$ telle que $f(b) = b$ alors $f(C \cap \{b\}^c) = A$ ainsi $C \cap \{b\}^c$ est un sous-ensemble de A en bijection avec A, A étant fini on obtient $C \cap \{b\}^c = A$, par suite

$$C = (C \cap \{b\}^c) \cup \{b\} = A \cup \{b\}$$

(iii)

1. $h(X)$ est le plus petit élément de X et m le plus grand.
2. **a** par hypothèse $X = [h(X)\ ,\ m]$ est infini par suite $H \subset [h(X), m[$ or $\mathrm{dom}(s) = [h(X), m[$.

   b D'après le lemme [4.1] page 70 on a

$$[h(X)\ ,\ s(x)] = [h(X), x] \cup \{s(x)\}$$

   par suite si $x \in H$ l'ensemble $[h(X)\ , s(x)]$ est fini d'après (ii)

   c il est clair que $(H\ ,\ O \cap (H \times H))$ est bien ordonné, de plus H est sans élément maximal puisque $x \in H \Rightarrow s(x) \in H \cap]x, m]$

(iv)

D'après le théorème [3.3] page 69 l'axiome du choix entraîne le théorème du bon ordre par suite il existe un bon ordre sur X,

— si (X, O_X) est sans élément maximal il n'y a rien à vérifier .

— si (X, O_X) posséde un élément maximal, puisque X est infini, il existe d'après (iii) un sous-ensemble de X qui est sans élément maximal pour l'ordre induit .

■

Ce théorème permet d'affirmer l'existence d'un « ensemble d'entiers naturels » au sens de la définition suivante :

Définition 4.3 *On appelle **ensemble d'entiers naturels** un couple* $(\mathbb{N}, O)$ *où* $\mathbb{N}$ *est un ensemble et* O *est un bon ordre sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant les propriétés suivantes*

1. *la succession* $s_{\mathbb{N}}$ *de* $(\mathbb{N}, O)$ *vérifie* $\mathrm{dom}(s_{\mathbb{N}}) = \mathbb{N}$
2. $\mathbb{N}$ *est le seul sous-ensemble héréditaire de* $(\mathbb{N}, O)$.

D'après le théorème [4.1] page 76 l'existence d'un ensemble d'entiers naturels est assurée par le théorème [4.2] page 76. Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels on appelle zéro l'élément $\min_O\{n : n \in \mathbb{N}\}$ et on le note 0 :

$$\min_O\{n : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Le lemme suivant donne quelques propriétés élémentaires des ensembles d'entiers naturels.

Lemme 4.3 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* s *la succession de* $(\mathbb{N}, O)$ *:*

$$s(n) = \min_O\{k : k \in]n, \rightarrow [\}.$$

(i) s *est une application strictement croissante de* $(\mathbb{N}, O)$ *dans* $(\mathbb{N}, O)$.

(ii) Pour qu'un sous-ensemble H *de* $\mathbb{N}$ *soit égal à* $\mathbb{N}$ *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées*

1. $0 \in H$
2. $n \in H \Rightarrow s(n) \in H$.

(iii) $\mathrm{im}(s) = \mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}/n \neq 0\}$ *et plus généralement pour tout élément* n *de* $\mathbb{N}$

$$s([n, \rightarrow [) = [s(n), \rightarrow [=]n, \rightarrow [\text{ et } s(]n, \rightarrow [) =]s(n), \rightarrow [$$

(iv) Si A *est un sous-ensemble non vide majoré de* $(\mathbb{N}, O)$ *alors* A *possède un plus grand élément.*

Preuve

(i)

— D'après le lemme [4.1] page 70 la fonction s est strictement croissante

— Par définition d'un ensemble d'entiers naturels $\mathrm{dom}(s) = \mathbb{N}$

Ainsi s est une application strictement croissante.

(ii)

Les conditions de (ii) entraînent que H est héréditaire et par définition d'un ensemble d'entiers naturels, le seul ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O)$ est $\mathbb{N}$.

(iii)

1. On montre $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$:
   Si $H = s(\mathbb{N}) \cup \{0\}$ alors
   — $0 \in H$
   — $n \in H \Rightarrow s(n) \in s(\mathbb{N}) \Rightarrow s(n) \in H$

Ainsi par (ii) on obtient $\mathbb{N} = s(\mathbb{N}) \cup \{0\}$. En particulier $\mathbb{N}^* \subset s(\mathbb{N})$, ainsi il suffit de montrer que $0 \notin s(\mathbb{N})$,or l'assertion $0 \in s(\mathbb{N})$ contredit la minimalité de 0.

2. On montre $s([n, \rightarrow [) = [s(n), \rightarrow [$:
   (a) d'abord la croissance de s montre que
   $$s([n, \rightarrow [) \subset [s(n), \rightarrow [$$
   (b) ensuite, puisque $[s(n), \rightarrow [\subset \mathbb{N}^*$ on a, d'après l'égalité $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$, $[s(n), \rightarrow [\subset s(\mathbb{N})$. Par suite pour tout $k \in [s(n), \rightarrow [$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = s(p)$ la croissance de s montre qu'un tel p ne peut être inférieur à n , ainsi
   $$[s(n), \rightarrow [\subset s[n, \rightarrow [$$
3. On montre $[s(n), \rightarrow [=]n, \rightarrow [$. D'abord puisque $s(n) \in]n, \rightarrow [$ on a
   $$[s(n), \rightarrow [\subset]n, \rightarrow [,$$
   ensuite puisque $s(n)$ est le minimum de $]n, \rightarrow [$ on a $]n, \rightarrow [\subset [s(n), \rightarrow [$.
4. On montre $s(]n, \rightarrow [) =]s(n), \rightarrow [$. d'après ce qu'on vient de voir
   $$s(]n, \rightarrow [) = s([s(n), \rightarrow [) =]s(n), \rightarrow [.$$

$$(iv)$$

Remarquons que puisque $\mathbb{N}_{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, ce résultat est une conséquence du lemme [4.2] page 72. L'importance de ce résultat justifie qu'on en remette une couche. Posons

$$H = \{n \in \mathbb{N}/A \neq \varnothing \text{ } et \text{ } A \subset [0, n] \Rightarrow \min_O\{n : n \in \mathrm{Maj(A, O)}\} \in \mathrm{A}\}$$

Ainsi H est l'ensemble des éléments n de $\mathbb{N}$ qui vérifient la propriété que la borne supérieure de tout ensemble non vide A majoré par n est dans A. On montre que H est héréditaire :

1. D'abord $0 \in H$ puisque $\{0\}$ est le seul sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ majoré par 0.
2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow s(n) \in H]$. Si $n \in H$ et A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ majoré par $s(n)$ on examine l'alternative :
   (a) $A \subset (]n, \rightarrow [)^c$
   (b) $A \cap]n, \rightarrow [\neq \varnothing$.

   (a) Si $A \subset (]n, \rightarrow [)^c$ alors, puisque l'ordre est total on a $(]n, \rightarrow [)^c = [0, n]$ ainsi on obtient $A \subset [0, n]$ et l'hypothèse $n \in H$ entraîne que A possède un plus grand élément.
   (b) Si $A \cap]n, \rightarrow [\neq \varnothing$ on montre que $s(n)$ est le plus grand élément de A. En effet, d'après (iii) on a $]n, \rightarrow [= [s(n), \rightarrow [$ par suite
   $$A \cap]n, \rightarrow [= A \cap [s(n), \rightarrow [.$$
   Mais si $A \cap [s(n), \rightarrow [\neq \varnothing$ le seul élément de cet ensemble est $s(n)$. En effet, si $y \in A \cap [s(n), \rightarrow [$ alors
   — puisque $s(n)$ est un majorant de A, $(y, s(n)) \in O$
   — puisque $y \in [s(n), \rightarrow [$, $(s(n), y) \in O$
   par suite l'antisymétrie de O entraîne $y = s(n)$.

Ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$. ■

Le théorème qui suit est à la base de la plupart des constructions d'analyse.

Théorème 4.3 *(théorème d'induction) On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* s *la succession de* $(\mathbb{N}, O)$*, si* X *est un ensemble et* $x_0 \in X$ *alors pour toute application* f *de* X *dans* X *il existe une unique application* g *de* $\mathbb{N}$ *dans* X *vérifiant*

$$g(0) = x_0 \quad \text{et} \quad f \circ g = g \circ s.$$

Preuve

Démonstration de l'existence

On note $\mathcal{G}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times X)$ défini par

$$\mathcal{G} = \{R \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times X)/(0, x_0) \in R \textit{ et } [(n, x) \in R \Rightarrow (s(n), f(x)) \in R]\}$$

ainsi $\mathcal{G}$ est l'ensemble des relations de $\mathbb{N}$ dans X qui vérifient $x_0 \in R(\{0\})$ et $f(x) \in R(\{s(n)\})$ si $x \in R(\{n\})$. On va montrer que la relation g de $\mathbb{N}$ dans X définie par

$$g = \bigcap_{R \in \mathcal{G}} R = \{(n, x) \in \mathbb{N} \times X/\forall\ R \in \mathcal{G}\ (n, x) \in R\}$$

possède les propriétés suivantes

1. $g \in \mathcal{G}$,
2. $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$,
3. g est une application.

1. On montre $g \in \mathcal{G}$.
   (a) D'abord, puisque pour tout R appartenant à $\mathcal{G}$ on a $(0, x_0) \in R$ on obtient $(0, x_0) \in g$.
   (b) Ensuite, si $(n, x) \in g$ alors la définition de g entraîne que pour tout R appartenant à $\mathcal{G}$ $(n, x) \in R$, ainsi, par définition de $\mathcal{G}$, pour tout R appartenant à $\mathcal{G}$ on a $(s(n), f(x)) \in R$, par suite $(s(n), f(x)) \in g$.
2. On montre $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$ en vérifiant que c'est un ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O)$.
   (a) D'abord $0 \in \mathrm{dom}(g)$ puisque $(0, x_0) \in g$.
   (b) Ensuite on montre $[n \in \mathrm{dom}(s) \cap \mathrm{dom}(g) \Rightarrow s(n) \in \mathrm{dom}(g)]$. Mais si $n \in \mathrm{dom}(g)$ alors il existe $x \in X$ tel que $(n, x) \in g$, puisque $g \in \mathcal{G}$ on a $(s(n), f(x)) \in g$, par suite $s(n) \in \mathrm{dom}(g)$.

   Ainsi $\mathrm{dom}(g)$ est un ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O)$, or, par définition d'un ensemble d'entiers naturels le seul ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O)$ est $\mathbb{N}$, par suite $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$.
3. Puisque $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$, pour montrer que g est une application il suffit de montrer que g est une fonction. Posons

   $$H = \{n \in \mathbb{N}/(n, x) \in g \quad \text{et} \quad (n, x') \in g \Rightarrow x = x'\},$$

   H est donc l'ensemble des n de $\mathbb{N}$ tels que $g(\{n\})$ est un singleton. On montre que $H = \mathbb{N}$ en vérifiant que H est héréditaire.
   (a) D'abord on montre que $0 \in H$ par l'absurde. Il s'agit de montrer que l'assertion $0 \notin H$ entraîne une assertion fausse. Or l'assertion $0 \notin H$ signifie qu'il existe un élément y de X tel que $y \neq x_0$ et $(0, y) \in g$. Posons

   $$g' = \{(n, x) \in \mathbb{N} \times X/(n, x) \in g \textit{ et } (n, x) \neq (0, y)\}$$

   et montrons que $g' \in \mathcal{G}$.
   i. D'abord $(0, x_0) \in g'$ puisque $(0, x_0) \in g$ et $x_0 \neq y$.
   ii. Ensuite si $(n, x) \in g'$ alors $(n, x) \in g$ par suite $(s(n), f(x)) \in g$ et puisque $s(n) \neq 0$ on obtient $(s(n), f(x)) \neq (0, y)$ par suite $(s(n), f(x)) \in g'$.

Ainsi g' est un élément de $\mathcal{G}$, mais cette assertion est fausse puisqu'elle entraîne $g \subset g'$, or $(0, y) \in g$ et $(0, y) \notin g'$.

(b) Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow s(n) \in H]$. En effet, dans le cas contraire il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \in H$ et $s(n_0) \notin H$,
— puisque $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$ il existe $y_0 \in X$ tel que $(n_0, y_0) \in g$, par suite $(s(n_0), f(y_0)) \in g$,
— puisque $s(n_0) \notin H$ il existe $y \in X$ vérifiant les conditions $y \neq f(y_0)$ et $(s(n_0), y) \in g$.
On pose
$$g'' = \{(m, x) \in g/(m, x) \neq (s(n_0), y)\}$$
et on montre encore que $g'' \in \mathcal{G}$.
   i. l'argument pour montrer que $(0, x_0) \in g''$ est $s(n_0) \neq 0$,
   ii. on montre maintenant $(m, x) \in g'' \Rightarrow (s(m), f(x)) \in g''$. Or, si $(m, x) \in g''$ alors $(m, x) \in g$, par suite $(s(m), f(x)) \in g$, il suffit donc de montrer que $(s(m), f(x)) \neq (s(n_0), y)$. Si $m \neq n_0$ l'injectivité de la succession s permet d'affirmer que $s(m) \neq s(n_0)$ par suite $(s(m), f(x)) \neq (s(n_0), y)$. Il reste à examiner le cas où $m = n_0$, or si $m = n_0$ alors $(n_0, x) \in g$ et $(n_0, y_0) \in g$, l'hypothèse $n_0 \in H$ entraîne alors $x = y_0$ par suite
$$(s(m), f(x)) = (s(n_0), f(y_0))$$
et la condition $y \neq f(y_0)$ montre alors $(s(m), f(x)) \neq (s(n_0), y)$.

Ainsi $g'' \in \mathcal{G}$, mais cette assertion est fausse puisque elle implique $g \subset g''$ et par construction $(s(n_0), y) \in g$ et $(s(n_0), y) \notin g''$. Ainsi la négation de l'assertion $[n \in H \Rightarrow s(n) \in H]$ entraîne une assertion fausse, par suite cette assertion est vraie.

Ceci montre que H est un sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O)$. Puisque $\mathbb{N}$ est le seul sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O)$ on obtient $H = \mathbb{N}$.

Maintenant qu'on a vu que g est une application on peut passer en notations usuelles :
— l'assertion $g(0) = x_0$ est l'assertion $(0, x_0) \in g$
— l'assertion $f \circ g = g \circ s$ est l'assertion
$$(n, g(n)) \in g \Rightarrow (s(n), f(g(n))) \in g.$$

Démonstration de l'unicité

Si g_0 et g_1 sont des applications qui vérifient
$$g_0(0) = x_0 = g_1(0)\ ,\ f \circ g_0 = g_0 \circ s \textit{ et } f \circ g_1 = g_1 \circ s \tag{4.2}$$
on montre que l'ensemble
$$H' = \{n \in \mathbb{N}/g_0(n) = g_1(n)\}$$
est héréditaire,

1. d'abord $0 \in H$ puisque $g_0(0) = x_0 = g_1(0)$
2. ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow s(n) \in H]$. Si $n \in H$ alors $g_0(n) = g_1(n)$, par suite on obtient $f(g_0(n)) = f(g_1(n))$ et les égalités (4.2) montre que $f(g_0(n)) = g_0(s(n))$ et $f(g_1(n)) = g_1(s(n))$. Ainsi l'égalité $f(g_0(n)) = f(g_1(n))$ est l'assertion $s(n) \in H'$.

Ceci montre que H' est un sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O)$. Puisque $\mathbb{N}$ est le seul sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O)$ on obtient $H' = \mathbb{N}$.Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $g_0(n) = g_1(n)$. ■

Ce théoréme peut être précisé.

Définition 4.4 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels de succession* s *et* X *un ensemble, un couple* $(f, g) \in \mathrm{A}[X, X] \times \mathrm{A}[\mathbb{N}, X]$ *est appelé un* ***diagramme commutatif*** *au dessus de* s *si* $f \circ g = g \circ s$. *On note*
$$\mathrm{diag}(X, \mathbb{N}) = \{(f, g) \in \mathrm{A}[X, X] \times \mathrm{A}[\mathbb{N}, X]/f \circ g = g \circ s\}$$
l'ensemble des diagrammes commutatifs au dessus de s.

Le résultat suivant est une reformulation du théorème [4.3] page 80.

Corollaire 4.1 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels de succession* s *et* X *un ensemble,*

1. *La relation* φ *de* $X \times \mathrm{A}[X,X]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N},X]$ *définie par*
$$\varphi = \{((x,f),g) \in (X \times \mathrm{A}[X,X]) \times \mathrm{A}[\mathbb{N},X]/g(0) = x \text{ et } (f,g) \in \mathrm{diag}(X,\mathbb{N})\}$$
est une application.
2. *si* $f \in \mathrm{A}[X,X]$ *la relation* $\varphi(.\,,f)$ *de* X *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N},X]$ *définie par*
$$\varphi(.\,,f) = \{(x,g) \in X \times \mathrm{A}[\mathbb{N},X]/((x,f),g) \in \varphi\}$$
est une application.
3. *si* $f \in \mathrm{A}[X,X]$, *il existe une application* $x \mapsto f_x$ *de* X *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N},X]$ *qui vérifie les propriétés (a) et (b) suivantes :*
   (a)
   $$\forall\ x \in X\ f_x(0) = x \text{ et } f_x \circ s = f \circ f_x.$$
   (b) *Si* g *est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* X *vérifiant*
   $$g(0) = x \text{ et } f \circ g = g \circ s$$
   alors $g = f_x$.

Preuve

1. (a) D'abord on montre $\mathrm{dom}(\varphi) = X \times \mathrm{A}[X,X]$. En effet, si $x \in X$ et $f \in \mathrm{A}[X,X]$ le théorème [4.3] page 80 montre qu'il existe $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N},X]$ tel que
$$g(0) = x \text{ et } f \circ g = g \circ s$$
par suite $((x,f),g) \in \varphi$ et $\mathrm{dom}(\varphi) = X \times \mathrm{A}[X,X]$.
   (b) Ensuite on montre $[((x,f),g) \in \varphi \text{ et } ((x,f),g') \in \varphi \Rightarrow g = g']$. En effet, posons
$$H = \{n \in \mathbb{N}/g(n) = g'(n)\}$$
alors H est héréditaire puisque
   i. l'assertion $0 \in H$ provient de $g(0) = x = g'(0)$
   ii. l'assertion $[n \in H \Rightarrow s(n) \in H]$ provient de
$$g(n) = g'(n) \Rightarrow f \circ g(n) = f \circ g'(n) \Rightarrow g \circ s(n) = g' \circ s(n) \Rightarrow g(s(n)) = g'(s(n)).$$
par suite $H = \mathbb{N}$ et $g = g'$.
2. (a) D'abord on a $\mathrm{dom}(\varphi(.\,,f)) = X$ puisque $\mathrm{dom}(\varphi) = X \times \mathrm{A}[X,X]$.
   (b) Ensuite on a $[(x,g) \in \varphi(.\,,f) \text{ et } (x,g') \in \varphi(.\,,f) \Rightarrow g = g']$ puisque l'assertion $[(x,g) \in \varphi(.\,,f) \text{ et } (x,g') \in \varphi(.\,,f)]$ implique
$$[((x,f),g) \in \varphi \text{ et } ((x,f),g') \in \varphi].$$
Ceci montre que la relation $\varphi(.\,,f)$ est une application,
3. C'est le passage de la notation ensembliste des applications à la notation usuelle. En effet, si on note $f_x = \varphi(x,f)$ l'unique élément de $\varphi(.\,,f)(\{x\})$ alors les assertions (a) et (b) sont la traduction usuelle de l'assertion $((x,f),f_x) \in \varphi$ et si $g \in \mathrm{A}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ vérifie
$$g(0) = x \text{ et } f \circ g = g \circ s$$
alors $((x,f),g)$ est par définition un élément de φ, ainsi il résulte du fait que φ est une fonction que $g = f_x$.

■

le théorème [4.3] page 80 permet de montrer que « à isomorphisme d'ensembles ordonnés près » il n'existe qu'un seul ensemble d'entiers naturels.

Théorème 4.4 *Si* $(\mathbb{N}, O)$ *et* $(\mathbb{N}', O')$ *sont des ensembles d'entiers naturels, il existe une bijection croissante de* $(\mathbb{N}, O)$ *dans* $(\mathbb{N}', O')$

Preuve On note s la succession de $(\mathbb{N}, O)$, s' la succession de $(\mathbb{N}', O')$ et

$$0 = \min_O\{n : n \in \mathbb{N}\}\ ,\ 0' = \min_{O'}\{n : n \in \mathbb{N}'\}.$$

Par définition d'un ensemble d'entiers naturels, s' est une application de $\mathbb{N}'$ dans $\mathbb{N}'$, ainsi le théorème d'induction (voir théorème [4.3] page 80) permet d'affirmer qu'il existe une application $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}']$ telle que

$$g(0) = 0' \quad \text{et} \quad s' \circ g = g \circ s.$$

On montre

1. g est surjective : $\mathrm{im}(g) = \mathbb{N}'$,
2. g est strictement croissante (et donc injective).

1. Puisque $(\mathbb{N}', O')$ est un ensemble d'entiers naturels, il suffit, pour montrer que $\mathrm{im}(g) = \mathbb{N}'$, de montrer que $\mathrm{im}(g)$ est héréditaire.
   (a) D'abord on a $0' \in \mathrm{im}(g)$ puisque $g(0) = 0'$
   (b) Ensuite on montre $[m \in \mathrm{im}(g) \Rightarrow s'(m) \in \mathrm{im}(g)]$. En effet, si $m \in \mathrm{im}(g)$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = g(n)$. Ainsi on obtient

   $$s'(m) = s'(g(n)) = s' \circ g(n).$$

   l'égalité $s' \circ g = g \circ s$ montre alors que $s'(m) = g(s(n))$, par suite $s'(m) \in \mathrm{im}(g)$.
2. Pour montrer que g est strictement croissante on notera

   $$]n, \to [= \{k \in \mathbb{N}/k \neq n \ et\ (n, k) \in O\}$$

   et

   $$]g(n), \to [= \{p \in \mathbb{N}'/p \neq g(n)\ et\ (g(n), p) \in O'\}.$$

   On montre que l'ensemble

   $$H = \{n \in \mathbb{N}/g(]n, \to [) \subset]g(n), \to [\}$$

   est héréditaire dans $(\mathbb{N}, O)$.
   (a) D'abord on prouve que $0 \in H$. Il s'agit de montrer

   $$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow g(n) \neq 0'.$$

   Or l'égalité $\mathbb{N}^* = s(\mathbb{N})$ établie par le lemme [4.3] page 78 montre que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $n = s(k)$,par suite $g(n) = g(s(k)) = s'(g(k))$, ainsi l'assertion $g(n) \neq 0'$ provient de $[p \in \mathbb{N}' \Rightarrow s'(p) \neq 0']$.
   (b) Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow s(n) \in H]$. Il s'agit de montrer que si $n \in H$ et $k \in]s(n), \to [$ alors $g(k) \in]g(s(n)), \to [$. Mais, d'après le lemme [4.3] on a $]s(n), \to [= s(]n, \to [)$, par suite si $k \in]s(n), \to [$ il existe $m \in]n, \to [$ tel que $k = s(m)$, en particulier $g(k) = g \circ s(m) = s'(g(m))$.Or, puisque $n \in H$ et $m \in]n, \to [$, on a $g(m) \in]g(n), \to [$ par suite $g(k) \in s'(]g(n), \to [)$. les égalités $s'(]g(n), \to [) =]s'(g(n)), \to [$ (encore le lemme [4.3]) et $s'(g(n)) = g(s(n))$ entraînent donc

   $$g(k) \in]g(s(n)), \to [.$$

Ainsi H est héréditaire dans $(\mathbb{N}, O)$ et $H = \mathbb{N}$. Ceci montre que si $n \in \mathbb{N}$ et $k > n$ on a $g(k) > g(n)$.

■

On résume dans le théorème suivant les propriétés des ensembles d'entiers naturels.

Théorème 4.5 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels, alors*
(i) $(\mathbb{N}, O)$ *est un ensemble bien ordonné sans élément maximal et la succession* s *de* $(\mathbb{N}, O)$ *vérifie*

1. $\mathrm{dom}(s) = \mathbb{N}$ *et* $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}/n \neq \min_O\{n : n \in \mathbb{N}\}\}$,
2. *le seul ensemble héréditaire de* $(\mathbb{N}, O)$ *est* $\mathbb{N}$

(ii) Si A *est un sous-ensemble majoré de* $(\mathbb{N}, O)$ *alors* A *possède un plus grand élément.*
(iii) Si X *est un ensemble,* $f \in \mathrm{A}[X, X]$ *il existe une application* $x \mapsto f_x$ *de* X *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, X]$ *vérifiant*

$$\forall\ x \in X\ \ f_x(\min_O\{n : n \in \mathbb{N}\}) = x \ \ et\ \ f \circ f_x = f_x \circ s.$$

(iv) Si $(\mathbb{N}', O')$ *est un ensemble d'entiers naturels il existe une bijection strictement croissante de* $(\mathbb{N}, O)$ *dans* $(\mathbb{N}', O')$.

Ainsi, d'après le théorème [4.4] page 83 tous les ensembles d'entiers naturels sont identiques,

Chapitre 5

Entiers naturels

L'existence d'un ensemble entiers naturels permet de justifier rigoureusement les opérations élémentaires. Il est temps d'apprendre à compter.

5.1 *Opérations élémentaires*

5.1.1 *Addition*

C'est en fait le théorème d'induction (théorème [4.3] page 80) qui permet de définir rigoureusement l'addition d'entiers naturels. Dans le lemme qui suit on note, si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels,

$$0 = \min_O\{n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad 1 = s(0) = \min_O\{n : n \in \mathbb{N}^*\}$$

Lemme 5.1 ***(Définition de l'addition)*** *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels de succession s.*
(i) Il existe une application $m \mapsto s_m$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ qui vérifie les propriétés (α) et (β) ci dessous :
(α)

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ s_m(0) = m \quad \text{et} \quad s \circ s_m = s_m \circ s.$$

(β) si $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ vérifie

$$g(0) = m \quad \text{et} \quad s \circ g = g \circ s$$

alors $g = s_m$.
L'application $m \mapsto s_m$ possède les propriétés suivantes

1. *$s_0 = id_{\mathbb{N}}$ et $s_1 = s$.*
2. *Si $n \in \mathbb{N}$ alors $s_{s(n)} = s \circ s_n = s_n \circ s$.*
3. *Si $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $k = s_m(n)$ alors $s_k = s_m \circ s_n$.*
4. *Si $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alors $s_m(n) = s_n(m)$.*

(ii) La relation $+$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$+ = \{((n, m), k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}/k = s_n(m)\} = \{((n, m), k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}/(m, k) \in s_n\}$$

est une application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On note $n + m$ l'unique $k \in \mathbb{N}$ qui vérifie $((n, m), k) \in +$.
(iii) l'application $+$ possède les propriétés suivantes :

1. *Commutativité :pour trout couple d'entiers naturels*

$$n + m = m + n.$$

2. *Élément neutre : si $n \in \mathbb{N}$ alors*

$$n + 0 = n.$$

3. *Associativité : si $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ alors*

$$(n + m) + k = n + (m + k).$$

Preuve

(i)

Puisque la succession s de $\mathbb{N}$ est une application (par définition d'un ensemble d'entiers naturels), le corollaire [4.1] page 82 du théorème d'induction que l'on applique avec $X = \mathbb{N}$ et $f = s$ montre qu'il existe une application $m \mapsto s_m$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ qui vérifie les propriétés (α) et (β).

1. $id_{\mathbb{N}}$ est une application qui vérifie

$$id_{\mathbb{N}}(0) = 0 \textit{ et } s \circ id_{\mathbb{N}} = id_{\mathbb{N}} \circ s$$

la propriété (β) entraîne donc $id_{\mathbb{N}} = s_0$.
De même s est une application qui vérifie

$$s(0) = 1 \textit{ et } s \circ s = s \circ s$$

la propriété (β) entraîne donc $s = s_1$.

2. Posons $g = s \circ s_n$, par définition de s_n l'égalité $s \circ s_n = s_n \circ s$ est vérifiée, par suite

$$s \circ g = s \circ (s \circ s_n) = s \circ (s_n \circ s) = (s \circ s_n) \circ s = g \circ s,$$

de plus on a $s \circ s_n(0) = s(n)$ puisque $s_n(0) = n$, ainsi : $g = s_{s(n)}$

3. Posons $g' = s_m \circ s_n$ alors

$$s \circ g' = (s \circ s_m) \circ s_n = (s_m \circ s) \circ s_n = s_m \circ (s \circ s_n) = (s_m \circ s_n) \circ s = g' \circ s,$$

de plus $g'(0) = s_m(s_n(0)) = k$, ainsi $g' = s_k$.

4. Posons

$$H = \{m \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} \ s_m(n) = s_n(m)\}$$

et montrons que H est héréditaire.

(a) D'abord $0 \in H$ puisque $s_0 = id_{\mathbb{N}}$, ainsi si $n \in \mathbb{N}$ on obtient

$$s_0(n) = n = s_n(0).$$

(b) Ensuite on montre $[m \in H \Rightarrow s(m) \in H]$. En effet, si $m \in H$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $s_m(n) = s_n(m)$ par suite $s \circ s_m(n) = s \circ s_n(m)$. Or, d'après *2.* on a $s \circ s_m = s_{s(m)}$, ainsi on obtient $s_{s(m)}(n) = s \circ s_n(m)$. Or, la définition de s_n entraîne $s \circ s_n = s_n \circ s$, par suite $s \circ s_n(m) = s_n(s(m))$, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient

$$s_{s(m)}(n) = s \circ s_n(m) = s_n(s(m)).$$

(ii)

Si $((m, n), k) \in +$ et $((m, n), k') \in +$ alors $(m, k) \in s_n$ et $(m, k') \in s_n$ et il résulte du fait que s_n est une fonction que $k = k'$, par suite $+$ est une fonction. Si $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, alors $s_n \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ et $((n, m), s_n(m)) \in +$, par suite $\mathrm{dom}(+) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $+$ est une application.

(iii)

1. <u>*commutativité*</u> C'est l'assertion $s_n(m) = s_m(n)$ établie en *(i) 4*.
2. <u>*élément neutre*</u> C'est l'assertion $s_0 = id_{\mathbb{N}}$
3. <u>*associativité*</u> si $p = s_n(m)$ alors
$$(n+m)+k = s_p(k)$$
et
$$n+(m+k) = s_n(s_m(k)).$$
il suffit donc d'appliquer *(i) 3*.

■

Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels l'application $+$ de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par le lemme [5.1] page 85 s'appelle l'addition.

Définition 5.1 *Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels on appelle **addition** sur $(\mathbb{N}, O)$ l'application $+ : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par le lemme [5.1]. Si $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ l'entier naturel $n+m$ s'appelle la **somme** de m et n.*

La notation additive permet de se ramener à la notion intuitive des entiers naturels. Ainsi, puisque $s = s_1$ le successeur $s(n)$ de l'entier n est
$$s(n) = s_1(n) = 1+n = n+1$$
par suite prendre le successeur d'un entier c'est « rajouter un ». En particulier, dire que le seul sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O)$ est $\mathbb{N}$, c'est dire que si H est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui vérifie
1. $0 \in H$ et
2. $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$

alors $H = \mathbb{N}$. De même, l'application s_m s'écrit
$$s_m(n) = m+n$$
et par définition c'est l'unique application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifie
$$s_m(0) = m \text{ et } s_m(n+1) = s_m(n)+1.$$
Enfin le théorème d'induction (théorème [4.3] page 80) nous dit que si $f \in \mathrm{A}[X,X]$ et $x_0 \in X$ il existe une unique application $n \mapsto g_n$ de $\mathbb{N}$ dans X qui vérifie
$$g_0 = x_0 \text{ et } g_{n+1} = f(g_n),$$
ce résultat est tellement « intuitif » qu'on omet généralement de le montrer. On s'intéresse maintenant à la compatibilité de l'ordre et de l'addition.

Lemme 5.2 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels.*
(i) si $m \in \mathbb{N}$, l'application s_m vérifie
1. *$s_m(\mathbb{N}) = [m, \to [= \{n \in \mathbb{N}/(m,n) \in O\}$. En particulier, si $n \in [m, \to [$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = m+k = s_m(k)$.*
2. *s_m est strictement croissante, ainsi s_m^{-1} est une fonction strictement croissante et*
$$\mathrm{dom}(s_m^{-1}) = [m, \to [.$$
Si $n \in [m, \to [$ on note $n-m$ l'unique entier naturel p tel que $m+p = n$.

(ii) $(\mathbb{N},+)$ *est* <u>*simplifiable*</u> *: si* $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *l'équation*

$$m + x = m + n$$

n'a qu'une solution $x = n$
(iii) Si $m \in \mathbb{N}$ *et* $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *pour que* $m+p \leq m+q$ *il faut et il suffit que*

$$p \leq q.$$

(iv) Si $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *et* $(r,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *vérifient* $p \leq r$ *et* $q \leq s$ *alors*

$$p + q \leq r + s.$$

(v) si X *est un ensemble ordonné, pour qu'une application* $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, X]$ *soit croissante, il faut et il suffit que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq x_{n+1}$$

(vi) si X *est un ensemble ordonné, pour qu'une application* $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, X]$ *soit strictement croissante, il faut et il suffit que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n < x_{n+1}$$

Preuve

(i)

1. Posons
$$H = \{m \in \mathbb{N}/s_m(\mathbb{N}) = [m, \rightarrow [\}$$
et montrons que H est héréditaire.
   (a) D'abord $0 \in H$ puisque $s_0 = id_{\mathbb{N}}$.
   (b) Ensuite on montre $[m \in H \Rightarrow s(m) \in H]$,
      i. d'abord on montre $s_{s(m)}(\mathbb{N}) \subset [s(m), \rightarrow [$, en effet, si $n \in s_{s(m)}(\mathbb{N})$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = s_{s(m)}(k)$, or d'après le lemme [5.1] page 85 on a $s_{s(m)} = s \circ s_m$, ainsi l'assertion $n \in s_{s(m)}(\mathbb{N})$ entraîne qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = s(s_m(k))$. Puisque $m \in H$ on a $s_m(k) \in [m, \rightarrow [$, par suite tout élément de $s_{s(m)}(\mathbb{N})$ est l'image par s d'un élément de $[m, \rightarrow [$, mais le lemme [4.3] page 78 permet d'affirmer que $s[m, \rightarrow [= [s(m), \rightarrow [$ ainsi on obtient $n \in [s(m), \rightarrow [$.
      ii. ensuite on montre $[s(m), \rightarrow [\subset s_{s(m)}(\mathbb{N})$, en effet d'après le lemme [4.3] page 78 on a $[s(m), \rightarrow [= s([m, \rightarrow [)$, ainsi tout élément de $[s(m), \rightarrow [$ est l'image par s d'un élément de $[m, \rightarrow [$, l'assertion $m \in H$ montre alors que tout élément de $[s(m), \rightarrow [$ est l'image par s d'un élément de $s_m(\mathbb{N})$, ainsi pour tout $n \in [s(m), \rightarrow [$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = s(s_m(k))$, l'égalité $s \circ s_m = s_{s(m)}$ montre alors que $n \in s_{s(m)}(\mathbb{N})$.

   Ainsi H est un sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O)$ et $H = \mathbb{N}$.
2. On note strc$[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ l'ensemble des applications strictements croissantes de $(\mathbb{N}, O)$ dans $(\mathbb{N}, O)$. Posons
$$H' = \{m \in \mathbb{N}/s_m \in \mathrm{strc}[\mathbb{N},\mathbb{N}]\}$$
et montrons que H' est héréditaire.
   (a) D'abord, puisque $s_0 = id_{\mathbb{N}}$, on a $0 \in H'$.
   (b) Ensuite on montre $[m \in H' \Rightarrow s(m) \in H']$. En effet, d'après le lemme [5.1] page 85 l'égalité $s_{s(m)} = s \circ s_m$ est vérifiée,or
   — Puisque $m \in H'$ $s_m \in \mathrm{strc}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$
   — le lemme [4.3] page 78 permet d'affirmer que $s \in \mathrm{strc}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$

par suite $s_{s(m)}$ est la composée d'applications strictements croissantes, ainsi

$$p < n \Rightarrow s_m(p) < s_m(n) \Rightarrow s(s_m(p)) < s(s_m(n)) \Rightarrow s_{s(m)}(p) < s_{s(m)}(n).$$

et $s_{s(m)} \in \mathrm{strc}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$.

Ainsi H' est héréditaire et $H' = \mathbb{N}$. La stricte croissance de s_m entraîne que s_m est injective puisque si $n \neq n'$ alors $n < n'$ ou $n' < n$
— si $n < n'$ alors $s_m(n) < s_m(n')$ et $s_m(n) \neq s_m(n')$
— si $n' < n$ alors $s_m(n') < s_m(n)$ et $s_m(n') \neq s_m(n)$.
Ainsi s_m^{-1} est une fonction. De plus , d'après *1.*, on obtient

$$\mathrm{dom}(s_m^{-1}) = \mathrm{im}(s_m) = [m, \rightarrow [.$$

Enfin s_m^{-1} est strictement croissante, puisque si $(n, n') \in [m, \rightarrow [\times[m, \rightarrow [$ et $n < n'$ alors, puisque O est un ordre total, on a $s_m^{-1}(n') \leq s_m^{-1}(n)$ ou $s_m^{-1}(n) < s_m^{-1}(n')$ et l'inégalité $s_m^{-1}(n') \leq s_m^{-1}(n)$ contredit la croissance de s_m.

(ii)

L'égalité $m + x = m + n$ est l'égalité $s_m(x) = s_m(n)$, ainsi l'injectivité de s_m entraîne $x = n$.

(iii)

1. D'abord l'assertion $[p \leq q \Rightarrow m + p \leq m + q]$ provient de la croissance de s_m.
2. Ensuite l'assertion $[m + p \leq m + q \Rightarrow p \leq q]$ provient de la croissance de s_m^{-1}.

(iv)

En appliquant (iii) on obtient

$$p + q \leq r + q \leq r + s.$$

(v)

Si $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_n = \{p \in \mathbb{N} / x_n \leq x_{n+p}\}$$

et on montre que H_n est héréditaire,

1. D'abord on a $0 \in H_n$ puisque $x_n \leq x_n$.
2. Ensuite on montre $[p \in H_n \Rightarrow p + 1 \in H_n]$. En effet par hypothèse $x_{n+p} \leq x_{n+p+1}$ par suite

$$x_n \leq x_{n+p} \leq x_{n+p+1}.$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leq x_{n+p}$, ceci montre que x est croissante puisque (i) permet d'affirmer que si $(n, m) \in O$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $m = n + p$.

(vi)

Si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in]n, \rightarrow [$ alors (i) permet d'affirmer qu'il existe $p \in [1, \rightarrow [$ tel que $k = n + p$, or par (v) x est croissante par suite

$$x_{n+1} \leq x_{n+p}$$

ainsi on obtient

$$x_n < x_{n+1} \leq x_{n+p}$$

et $x_n < x_k$. ∎

Le lemme [5.2] page 87 montre que l'application $s_m : n \mapsto n + m$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $[m, \rightarrow [$, ainsi pour tout $n \in [m, \rightarrow [$ il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $p + m = n$.

Définition 5.2 *Si* $(\mathbb{N}, O)$ *est un ensemble d'entiers naturels* $m \in \mathbb{N}$ *et* $n \in [m, \rightarrow [$ *on appelle* ***différence*** *de* m *et* n *l'unique entier naturel* $p \in \mathbb{N}$ *qui vérifie* $m + p = n$*, cet entier est noté* $n - m$.

Le théorème [4.4] page 83 montre que si $(\mathbb{N}, O)$ et $(\mathbb{N}', O')$ sont des ensembles d'entiers naturels il existe une bijection strictement croissante de $(\mathbb{N}, O)$ dans $(\mathbb{N}', O')$. Cette bijection permet d'identifier $(\mathbb{N}, O)$ et $(\mathbb{N}', O')$, On montre qu'elle permet en plus d'identifier l'addition sur $\mathbb{N}$ et l'addition sur $\mathbb{N}'$.

Théorème 5.1 *Si* $(\mathbb{N}, O)$ *est un ensemble d'entiers naturels de succession* s *dont l'addition est notée* $+$ *et* $(\mathbb{N}', O')$ *est un ensemble d'entiers naturels de succession* s' *dont l'addition est notée* $\oplus$ *il existe une unique bijection croissante* g *de* $(\mathbb{N}, O)$ *dans* $(\mathbb{N}', O')$*. Cette bijection vérifie les propriétés suivantes*

1. $$g(\min_O\{n : n \in \mathbb{N}\}) = \min_{O'}\{p : p \in \mathbb{N}'\} \textit{ et } g \circ s = s' \circ g$$

2. $$\forall\ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ g(n + m) = g(n) \oplus g(m)$$

Preuve On note $0 = \min_O\{n : n \in \mathbb{N}\}$, $0' = \min_{O'}\{p : p \in \mathbb{N}'\}$ et on pose $s(0) = 1$ $s'(0') = 1'$.

Preuve de l'unicité

On montre que si h est une bijection croissante de $(\mathbb{N}, O)$ dans $(\mathbb{N}', O')$ alors $h(0) = 0'$ et $h \circ s = s' \circ h$.

1. D'abord on montre $h(0) = 0'$. En effet, $(0, h^{-1}(0')) \in O$ puisque 0 est le plus petit élément de $(\mathbb{N}, O)$, ainsi, la croissance de h entraîne $(h(0), 0') \in O'$ et ceci montre que $h(0) = 0'$ puisque $0'$ est le plus petit élément de $(\mathbb{N}', O')$.
2. Ensuite on montre $[n \in \mathbb{N} \Rightarrow h(s(n)) = s'(h(n))]$.
   (a) D'abord on prouve $(s'(h(n)), h(s(n))) \in O'$. Puisque $s'(h(n))$ est le plus petit élément (pour O') de l'ensemble
   $$]h(n), \rightarrow [= \{p \in \mathbb{N}'/p \neq h(n) \textit{ et } (h(n), p) \in O'\}$$
   il suffit de montrer que $h(s(n)) \in]h(n), \rightarrow |$. Or l'injectivité de h entraîne $h(n) \neq h(s(n))$ et la croissance de h entraîne
   $$(h(n), h(s(n)) \in O'.$$
   Ainsi $h(s(n)) \in]h(n), \rightarrow [$.
   (b) Ensuite on prouve $(h(s(n)), s'(h(n)) \in O'$(en appliquant (a) à h^{-1}).Pour cela on remarque d'abord que $(n, h^{-1}(s'(h(n))) \in O$, en effet, si $(n, h^{-1}(s'(h(n))) \notin O$ la totalité de l'ordre O entraîne que
   $$(h^{-1}(s'(h(n)), n) \in O,$$
   or cela contredit la croissance de h puisque celle ci donne
   $$(h^{-1}(s'(h(n))), n) \in O \Rightarrow (s'(h(n)), h(n)) \in O'$$
   et la définition de s' entraîne $(s'(h(n)), h(n)) \notin O'$. Ainsi on obtient $(n, h^{-1}(s'(h(n))) \in O$, de plus l'injectivité de h^{-1} entraîne $h^{-1}(s'(h(n)) \neq n$ puisque $s'(h(n)) \neq h(n)$. En particulier si
   $$]n, \rightarrow [= \{k \in \mathbb{N}/k \neq n \textit{ et } (n, k) \in O\}$$
   on a $h^{-1}(s'(h(n))) \in]n, \rightarrow [$, mais par définition $s(n)$ est le plus petit élément (pour O) de l'ensemble $]n, \rightarrow [$, par suite $(s(n), h^{-1}(s'(h(n))) \in O$ et la croissance de h montre que $(h(s(n)), s'(h(n))) \in O'$.

   L'antisymétrie de O' et les assertions (a) et (b) permettent alors d'affirmer que $h(s(n)) = s'(h(n))$.

Ainsi, toute bijection croissante h de $(\mathbb{N}, O)$ dans $(\mathbb{N}', O')$ vérifie

$$h(0) = 0' \text{ et } h \circ s = s' \circ h. \tag{5.1}$$

Ce résultat permet de montrer qu'il n'en existe qu'une puisque toutes les applications vérifiant (5.1) sont égales. Soit h et g des applications vérifiant (5.1), posons

$$H = \{\ n \in \mathbb{N}/g(n) = h(n)\}$$

et montrons que H est héréditaire pour $(\mathbb{N}, O)$.

— D'abord $0 \in H$ puisque $g(0) = 0' = h(0)$.

— Ensuite si $n \in H$ alors $g(n) = h(n)$ par suite $s'(g(n)) = s'(h(n))$ et les égalités $s' \circ g = g \circ s$ et $s' \circ h = h \circ s$ entraînent $g(s(n)) = h(s(n))$

Ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$.

Preuve de l'existence

Par définition d'un ensemble d'entiers naturels, la succession s' de $(\mathbb{N}', O')$ est une application de $\mathbb{N}'$ dans $\mathbb{N}'$, ainsi l'application du théorème d'induction avec $X = \mathbb{N}'$ et $f = s'$ (voir théorème [4.3] page 80) montre qu'il existe une application $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}']$ vérifiant

$$g(0) = 0' \text{ et } g \circ s = s' \circ g.$$

En notation additive l'égalité $g \circ s = s' \circ g$ s'écrit, puisque $s(n) = n + 1$ et $s'(p) = p \oplus 1'$,

$$g(n + 1) = g(n) \oplus 1'.$$

On montre

1. $\mathrm{im}(g) = \mathbb{N}'$,
2. g est strictement croissante,
3. si $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'égalité
$$g(n + m) = g(n) \oplus g(m)$$
est vérifiée.

1. Puisque $(\mathbb{N}', O')$ est un ensemble d'entiers naturels, pour montrer que $\mathrm{im}(g) = \mathbb{N}'$ il suffit de montrer que $\mathrm{im}(g)$ est héréditaire dans $(\mathbb{N}', O')$ or :
   (a) puisque $0' = g(0)$ on a $0' \in \mathrm{im}(g)$.
   (b) il reste à voir $[p \in \mathrm{im}(g) \Rightarrow s'(p) \in \mathrm{im}(g)]$. Or, si $p \in \mathrm{im}(g)$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) = p$ par suite on obtient $s'(p) = s' \circ g(n)$ et l'égalité $s' \circ g = g \circ s$ entraîne donc $s'(p) = g(s(n))$, ainsi $s'(p) \in \mathrm{im}(g)$.
2. Pour montrer que g est strictement croissante il suffit, d'après le lemme [5.2] page 87, de voir $[n \in \mathbb{N} \Rightarrow g(n) < g(n + 1)]$. Or, par définition de g on a $g(n + 1) = s'(g(n))$ et la définition de s' montre que
$$s'(g(n)) \in]g(n), \rightarrow [= \{k \in \mathbb{N}'/k \neq g(n) \text{ et } (g(n), k) \in O'\} = \{k \in \mathbb{N}'/g(n) < k\}$$
ainsi $g(n) < g(n + 1)$ et g est strictement croissante.
3. Soit $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on pose
$$H_n = \{m \in \mathbb{N}/g(n + m) = g(n) \oplus g(m)\}$$
et on montre que H_n est héréditaire dans $(\mathbb{N}, O)$.

(a) D'abord $0 \in H_n$, en effet, d'après le lemme [5.1] page 85 on a $n + 0 = n$ et $g(n) \oplus 0' = g(n)$, par suite, puisque $g(0) = 0'$,

$$g(n + 0) = g(n) = g(n) \oplus 0' = g(n) \oplus g(0).$$

(b) Ensuite on montre $[m \in H_n \Rightarrow m + 1 \in H_n]$. En effet, puisque $n + m + 1 = s(n + m)$ on a $g(m + n + 1) = g \circ s(n + m) = s'(g(n + m))$,
— puisque $m \in H_n$ on a

$$g(n + m) = g(n) \oplus g(m)$$

par suite

$$g(n + m + 1) = s'(g(n) \oplus g(m))$$

l'égalité $s'(p) = p \oplus 1'$ donne alors

$$g(n + m + 1) = (g(n) \oplus g(m)) \oplus 1'$$

la propriété d'associativité (voir lemme [5.1] page 85) montre alors que

$$g(n + m + 1) = g(n) \oplus (g(m) \oplus 1')$$

les égalités $g(m) \oplus 1' = s'(g(m)) = g \circ s(m) = g(m + 1)$ entraînent donc

$$g(n + m + 1) = g(n) \oplus g(m + 1)$$

Ainsi si $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \mathbb{N}$ et pour tout $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'égalité

$$g(n + m) = g(n) \oplus g(m)$$

est vérifiée.

■

Le théorème d'induction permet aussi de définir rigoureusement la multiplication.

5.1.2 *Multiplication*

Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels l'application s_m définie par le lemme [5.1] page 85 permet aussi de définir la multiplication par la procédure suivante : puisque $s_m \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ le théorème d'induction permet d'affirmer qu'il existe une unique application p_m de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifie les propriétés

$$p_m(0) = 0 \text{ et } p_m \circ s = s_m \circ p_m.$$

En notation additive l'égalité $p_m \circ s(n) = s_m \circ p_m(n)$ s'écrit

$$p_m(n + 1) = p_m(n) + m$$

autrement dit si la notation $p_m(n) = mn$ a une signification alors on a

$$m(n + 1) = mn + m\ .$$

Lemme 5.3 ***(Définition de la multiplication)*** *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels, s la succession de $(\mathbb{N}, O)$, et $+$ l'addition sur $\mathbb{N}$.*
(i) Il existe une application $m \mapsto p_m$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ qui vérifie
(α)

$$\forall m \in \mathbb{N}\ p_m(0) = 0 \quad \text{et} \quad [\forall n \in \mathbb{N}\ \ p_m(n + 1) = p_m(n) + m].$$

(β) *Si* $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ *est une application vérifiant*

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad [\forall n \in \mathbb{N} \; g(n+1) = g(n) + m]$$

alors $g = p_m$.

Cette application vérifie

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $p_0(n) = 0$
2. $p_1 = id_{\mathbb{N}}$
3. *Si* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *alors* $p_n(m) = p_m(n)$
4. *Si* $m \in \mathbb{N}$ *et* $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *alors*

$$p_m(n+k) = p_m(n) + p_m(k),$$

5. *Si* $(m, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *et* $k = p_m(q)$ *alors*

$$p_k = p_m \circ p_q$$

6. *Si* $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *alors* $p_m(n) \in \mathbb{N}^*$
7. *Si* $m \in \mathbb{N}^*$ *l'application* p_m *est strictement croissante.*

(ii) La relation $\times$ *de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *définie par*

$$\times = \{((m, n), k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} / (n, k) \in p_m\} = \{((m, n), k) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} / k = p_m(n)\}$$

est une application et on note $m \times n = p_m(n)$ *l'image de* $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *par* $\times$, *c'est l'unique élément* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $((m, n), k) \in \times$.

(iii) l'application $(m, n) \mapsto m \times n$ *possède les propriétés suivantes :*

1. *<u>élément absorbant</u> : Si* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $0 \times n = 0$.
2. *<u>élément neutre</u> : Si* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $1 \times n = n$
3. *<u>commutativité</u> : Si* $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *alors*

$$m \times n = n \times m.$$

4. *<u>distributivité par rapport à l'addition</u> : Si* $m \in \mathbb{N}$ *et* $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *alors*

$$m \times (n + k) = m \times n + m \times k.$$

5. *<u>associativité</u> : Si* $m \in \mathbb{N}$ *et* $(n, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *alors*

$$m \times (q \times n) = (m \times q) \times n.$$

6. *<u>intégrité</u> : si* $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *et* $m \times n = 0$ *alors*

$$m = 0 \text{ ou } n = 0.$$

7. *Si* $m \in \mathbb{N}^*$ *l'application* $n \mapsto m \times n$ *est strictement croissante.*

Preuve

(i)

Preuve de l'existence de $m \mapsto p_m$

On rappelle qu'on note

$$\mathrm{diag}(\mathbb{N},\mathbb{N}) = \{(f,g) \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}] \times \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]/f \circ g = g \circ s\}.$$

Si $m \mapsto s_m$ est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ définie par le lemme [5.1] page 85 , on considére la relation p de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ définie par

$$p = \{(m,g) \in \mathbb{N} \times \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]/g(0) = 0 \ et \ (s_m, g) \in \mathrm{diag}(\mathbb{N},\mathbb{N})\}$$

et on montre que p est une application.

1. D'abord on montre que $\mathrm{dom}(p) = \mathbb{N}$. En effet, si $m \in \mathbb{N}$ alors m appartient au domaine de définition de $m \mapsto s_m$, par suite $s_m \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$, ainsi le théorème d'induction (théorème [4.3] page 80) qu'on applique avec $X = \mathbb{N}$ et $f = s_m$ montre qu'il existe une application $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ qui vérifie

   $$g(0) = 0 \ et \ s_m \circ g = g \circ s$$

   par suite $(m,g) \in p$ et $\mathrm{dom}(p) = \mathbb{N}$.
2. Ensuite on montre $[(m,g) \in p \ et \ (m,g') \in p \Rightarrow g = g']$. Si $(m,g) \in p$ et $(m,g') \in p$ on prouve que l'ensemble

   $$H = \{n \in \mathbb{N}/g(n) = g'(n)\}$$

   est héréditaire,
   (a) D'abord on a $0 \in H$ puisque par définition de p, $g(0) = 0 = g'(0)$
   (b) Ensuite l'assertion $[n \in H \Rightarrow s(n) \in H]$ provient des l'égalités $g \circ s = s_m \circ g$ et $g' \circ s = s_m \circ g$ qui entraînent $s_m(g(n)) = g(s(n))$ et $s_m(g'(n)) = g'(s(n))$, par suite

   $$g(n) = g'(n) \Rightarrow s_m(g(n)) = s_m(g'(n)) \Rightarrow g(s(n)) = g'(s(n)).$$

   Ainsi $H = \mathbb{N}$ et $g = g'$.

Ceci montre que p est une application. En passant de la notation ensembliste à une notation usuelle on obtient donc une application $m \mapsto p_m$ où p_m est l'unique élément de $\mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ qui vérifie $(m, p_m) \in p$. Ainsi on obtient déjà

$$\forall m \in \mathbb{N} \ (m, p_m) \in p.$$

Or, la traduction de l'assertion $\forall m \in \mathbb{N} \ (m, p_m) \in p$ est

$$\forall m \in \mathbb{N} \ p_m(0) = 0 \quad \text{et} \quad s_m \circ p_m = p_m \circ s,$$

et en notation additive, puisque $s(n) = n+1$ et $s_m(n) = n+m$, cela donne

$$\forall m \in \mathbb{N} \ p_m(0) = 0 \quad \text{et} \quad [\forall n \in \mathbb{N}, \ p_m(n+1) = p_m(n) + m],$$

ainsi (α) est vérifié. Enfin dire que $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ vérifie (β) c'est dire que $g(0) = 0 \ et \ s_m \circ g = g \circ s$, ainsi $(m,g) \in p$ et puisque p est une fonction les assertions $(m,g) \in p$ et $(m, p_m) \in p$ entraînent $g = p_m$.

Preuve de (i)*1. à* (i)*7.*

1. Si $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ est définie par $[\forall n \in \mathbb{N} \ g(n) = 0]$ alors $g(0) = 0$ et $[\forall n \in \mathbb{N}, \ g(n+1) = g(n) + 0]$, par suite $g = p_0$.
2. $id_{\mathbb{N}}$ vérifie $id_{\mathbb{N}}(0) = 0$ et $[\forall n \in \mathbb{N} \ id_{\mathbb{N}}(n+1) = id_{\mathbb{N}}(n) + 1]$ par suite $p_1 = id_{\mathbb{N}}$
3. Si $m \in \mathbb{N}$ on pose

   $$H_m = \{n \in \mathbb{N}/p_m(n) = p_n(m)\}$$

   et on montre que H_m est héréditaire.
   (a) D'abord $0 \in H$ puisque $p_0(m) = 0 = p_m(0)$.

(b) Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. Pour cela on montre d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$p_{n+1}(k) = k + p_n(k). \tag{5.2}$$

Par définition de p_{n+1} il suffit de montrer que si $g(k) = k + p_n(k)$ alors

$$g(0) = 0 \ et \ [\forall k \in \mathbb{N} \ g(k+1) = g(k) + n + 1].$$

Or $g(0) = 0 + p_n(0) = 0$ et

$$g(k+1) = k + 1 + p_n(k+1)$$

et l'égalité $p_n(k+1) = p_n(k) + n$ entraîne

$$g(k+1) = k + 1 + p_n(k) + n,$$

ainsi la commutativité de l'addition montre

$$g(k+1) = k + p_n(k) + n + 1 = g(k) + n + 1,$$

par suite $[\forall k \in \mathbb{N} \ p_{n+1}(k) = k + p_n(k)]$. L'égalité (5.2) permet de montrer l'implication $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$ puisque si $n \in H$ alors

$$p_{n+1}(m) = m + p_n(m) = m + p_m(n) = p_m(n+1).$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$ H_m est héréditaire et $H_m = \mathbb{N}$.

4. Si $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_{n,m} = \{k \in \mathbb{N} / p_m(n+k) = p_m(n) + p_m(k)\}$$

et on montre que $H_{n,m}$ est héréditaire.

(a) D'abord $0 \in H_{n,m}$ puisque $p_m(0) = 0$.

(b) Ensuite on montre $[k \in H_{n,m} \Rightarrow k+1 \in H_{n,m}]$. En effet, soit $k \in H_{n,m}$, la définition de p_m montre que

$$p_m(n+k+1) = p_m(n+k) + m,$$

puisque $k \in H_{n,m}$ l'égalité $p_m(n+k) = p_m(n) + p_m(k)$ est vérifiée et

$$p_m(n+k+1) = (p_m(n) + p_m(k)) + m$$

ainsi l'associativité de l'addition entraîne

$$p_m(n+k+1) = p_m(n) + (p_m(k) + m)$$

or, par définition de p_m on a $p_m(k) + m = p_m(k+1)$. Ainsi on obtient

$$p_m(n+k+1) = p_m(n) + p_m(k+1)$$

et $k+1 \in H_{n,m}$.

Ceci montre que $H_{n,m}$ est héréditaire, par suite pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ on obtient $H_{n,m} = \mathbb{N}$.

5. Posons $g = p_m \circ p_q$ alors $g(0) = p_m(p_q(0)) = 0$ et si $n \in \mathbb{N}$

$$g(n+1) = p_m(p_q(n+1)) = p_m(p_q(n) + q)$$

et *4.* permet d'affirmer que

$$p_m(p_q(n) + q) = p_m(p_q(n)) + p_m(q)) = p_m \circ p_q(n) + k = g(n) + k$$

ainsi

$$g(0) = 0 \ et \ [\forall n \in \mathbb{N} \ g(n+1) = g(n) + k],$$

et la définition de p_k montre que $g = p_k$.

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, par construction on a $p_m(n+1) = p_m(n) + m$ et le lemme [5.2] page 87 permet d'affirmer que $m + p_m(n) \geq m > 0$.
7. d'après le lemme [5.2] on a, si $n \in \mathbb{N}$

$$p_m(n) < p_m(n) + m,$$

par suite $p_m(n) < p_m(n+1)$.

(ii)

1. D'abord on montre $\text{dom}(\times) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Si $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alors m est un élément du domaine de l'application $m \mapsto p_m$ par suite, puisque $p_m \in \text{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$, $n \in \text{dom}(p_m)$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(n,k) \in p_m$, ainsi $((n,m),k) \in \times$ et $(n,m) \in \text{dom}(\times)$.
2. Ensuite on montre $[((n,m),k) \in \times \ et \ ((n,m),k') \in \times \Rightarrow k = k']$. Mais si $((m,n),k) \in \times$ et $((m,n),k') \in \times$ alors $(n,k) \in p_m$ et $(n,k') \in p_m$, p_m étant une fonction, ces assertions entraînent $k = k'$.

(iii)

1. D'après (i), si $n \in \mathbb{N}$, $0 = p_0(n) = 0 \times n$.
2. D'après (i), si $n \in \mathbb{N}$, $n = id_{\mathbb{N}}(n) = p_1(n) = 1 \times n$.
3. D'après (i), si $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$n \times m = p_n(m) = p_m(n) = m \times n.$$

4. D'après (i) si $m \in \mathbb{N}$ et $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$m \times (n+k) = p_m(n+k) = p_m(n) + p_m(k) = m \times n + m \times k$$

5. D'après (i), si $k = m \times q$ et $n \in \mathbb{N}$ alors

$$(m \times q) \times n = p_k(n) = p_m \circ p_q(n) = p_m(p_q(n)) = m \times (q \times n).$$

6. C'est la contraposée de l'assertion (i)*6*.
7. C'est l'assertion (i)*7*.

■

L'application $\times : (m,n) \mapsto m \times n$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par le lemme [5.3] page 92 s'appelle la multiplication.

Définition 5.3 *Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels on appelle* ***multiplication*** *sur $\mathbb{N}$ l'application $\times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par le lemme [5.3]. Si $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'entier naturel $m \times n$ s'appelle le* ***produit*** *de m et n.*

Le théorème [5.1] page 90 permet d'affirmer que si $(\mathbb{N}, O)$ et $(\mathbb{N}', O')$ sont des ensembles d'entiers naturels il n'existe qu'une seule bijection croissante de $(\mathbb{N}, O)$ dans $(\mathbb{N}', O')$. De plus on a vu que cette bijection est compatible avec les additions sur $\mathbb{N}$ et sur $\mathbb{N}'$ dans le sens ou l'image de la somme d'entiers est la somme des images de ces entiers , on montre qu'elle est aussi compatible avec la multiplication.

Théorème 5.2 *Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels de succession s dont l'addition est notée $+$ et la multiplication notée $\times$ et $(\mathbb{N}', O')$ est un ensemble d'entiers naturels de succession s' dont l'addition est notée $\oplus$ et la multiplication notée $\otimes$ alors l'unique bijection croissante g de $(\mathbb{N}, O)$ dans $(\mathbb{N}', O')$ vérifiant $s' \circ g = g \circ s$ vérifie*

$$\forall (m,n) \ \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ g(m+n) = g(m) \oplus g(n) \ et \ g(m \times n) = g(m) \otimes g(n).$$

Preuve Comme d'habitude on note

$$0 = \min_O\{n : n \in \mathbb{N}\}, 0' = \min_{O'}\{p : p \in \mathbb{N}'\}$$

et $1 = s(0)$, $1' = s'(0')$. Le théorème [5.1] page 90 montre l'existence et l'unicité d'une bijection croissante de $(\mathbb{N}, O)$ dans $(\mathbb{N}', O')$. Il établit de plus que cette application vérifie

$$(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow g(m + n) = g(m) \oplus g(n),$$

il suffit donc de montrer

$$(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow g(m \times n) = g(m) \otimes g(n).$$

Si $m \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_m = \{n \in \mathbb{N}/g(m \times n) = g(m) \otimes g(n)\}$$

et on prouve $H_m = \mathbb{N}$ en montrant que H_m est héréditaire.

1. D'abord on montre que $0 \in H_m$. En effet, d'après le théorème [5.1] page 90, g vérifie $g(0) = 0'$ et le lemme [5.3] page 92 permet d'affirmer $n \times 0 = 0$ et $0' = g(m) \otimes 0'$ par suite

$$g(m \times 0) = g(0) = 0' = g(m) \otimes 0' = g(m) \otimes g(0).$$

2. Ensuite on montre $[n \in H_m \Rightarrow n + 1 \in H_m]$. En effet, d'après la définition de la multiplication on a $m \times (n + 1) = m \times n + m$ par suite

$$g(m \times (n + 1)) = g((m \times n) + m)$$

puisque,si $(p, k) \in \mathbb{N}$ l'égalité $g(p + k) = g(p) \oplus g(k)$ est vérifiée on obtient

$$g(m \times (n + 1)) = g(m \times n) \oplus g(m)$$

l'assertion $n \in H_m$ entraîne alors

$$g(m \times (n + 1)) = (g(m) \otimes g(n)) \oplus g(m)$$

la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et l'égalité $g(m) = g(m) \otimes 1'$ donne alors

$$g(m \times (n + 1)) = g(m) \otimes (g(n) \oplus 1')$$

il suffit donc de voir $g(n) \oplus 1' = g(n + 1)$. Or, puisque $s(n) = n + 1$ et $s'(p) = p \oplus 1'$ cette égalité est l'égalité $g \circ s(n) = s' \circ g(n)$ qui est assurée par le théorème [5.1].

■

A partir de maintenant le produit d'entiers naturels sera noté $mn = m \times n$.

5.1.3 *Division*

Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels et $b \in \mathbb{N}^*$ on note

$$[0, b[= \{r \in \mathbb{N}/r \neq b \text{ } et \text{ } (r, b) \in O\} = \{r \in \mathbb{N}/r < b\},$$

et on veut montrer que l'application φ_b de $\mathbb{N} \times [0, b[$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\varphi_b(q, r) = bq + r$$

est une bijection.

Lemme 5.4 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels dont l'addition est notée* $+$ *et la multiplication* $(m, n) \mapsto mn$. *De plus, pour tout* $b \in \mathbb{N}^*$, *on définit l'application* φ_b *de* $\mathbb{N} \times [0, b[$ *dans* $\mathbb{N}$ *par*

$$\varphi_b(q, r) = bq + r$$

(i) φ_b *est surjective :* $\mathrm{im}(\varphi_b) = \mathbb{N}$.

(ii) Si A_b *est l'application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ *définie par*

$$A_b(n) = \{k \in \mathbb{N}/bk \leq n\}$$

alors

1. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $A_b(n)$ *est majoré,*
2. *l'application* d *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *définie par* $d(n) = \max_O\{k : k \in A_b(n)\}$ *vérifie :* $\forall (q, r) \in \mathbb{N} \times [0, b[$

$$d(\varphi_b(q, r)) = q$$

(iii) φ_b *est injective.*

Preuve

(i)

On montre que $\mathrm{im}(\varphi_b) = \mathbb{N}$ en montrant que c'est un ensemble héréditaire.

1. D'abord $0 \in \mathrm{im}(\varphi_b)$ puisque $0 = \varphi_b(0, 0)$.
2. Ensuite on montre $[n \in \mathrm{im}(\varphi_b) \Rightarrow n + 1 \in \mathrm{im}(\varphi_b)]$. En effet, si $n \in \mathrm{im}(\varphi_b)$ alors il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times [0, b[$ tel que $n = bq + r$. Puisque $r \in [0, b[$ on a $r + 1 = b$ ou $r + 1 < b$
   — si $r + 1 = b$ alors $n + 1 = bq + r + 1 = b(q + 1)$ et $n + 1 = \varphi_b(q + 1, 0)$ par suite $n + 1 \in \mathrm{im}(\varphi_b)$
   — si $r + 1 < b$ alors $n + 1 = bq + r + 1 = \varphi_b(q, r + 1)$ par suite $n + 1 \in \mathrm{im}(\varphi_b)$

Ainsi $\mathrm{im}(\varphi_b)$ est héréditaire et $\mathrm{im}(\varphi_b) = \mathbb{N}$.

(ii)

1. D'abord, puisque $b \geq 1$ on a
$$k \in A_b(n) \Rightarrow k \leq bk \leq n$$
   ainsi n est un majorant de $A_b(n)$
2. si $n = bq + r$ alors $bq \leq n$, par suite $q \leq d(n)$. D'autre part l'assertion $d(n) \geq q + 1$ est fausse puisqu'elle entraîne $bd(n) \geq bq + b > bq + r$, ainsi
$$q \leq d(n) < q + 1$$
   et $d(n) = q$.

(iii)

On montre $\varphi_b(q, r) = \varphi_b(q', r') \Rightarrow q = q'$ *et* $r = r'$. D'abord d'après *(ii)* on a

$$\varphi_b(q, r) = \varphi_b(q', r') \Rightarrow q = d(\varphi_b(q, r)) = d(\varphi_b(q', r')) = q'$$

ce qui montre que $q = q'$, ainsi on obtient

$$\varphi_b(q, r) = \varphi_b(q', r') \Rightarrow bq + r = bq + r' \Rightarrow r = r'$$

■

Ainsi l'application $\varphi_b \in \mathrm{A}[(\mathbb{N} \times [0, b[), \mathbb{N}]$ possède une application réciproque qu'on note $\varphi_b^{-1} \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, (\mathbb{N} \times [0, b[)]$, c'est cette application qu'on appelle la division par b.

Définition 5.4 *Si* $(\mathbb{N}, O)$ *est un ensemble d'entiers naturels et* $b \in \mathbb{N}^*$, *on appelle* ***division*** *par* b *l'application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N} \times [0, b[$ *définie comme l'application réciproque de l'application* $\varphi_b : (q, r) \mapsto bq + r$ *de* $\mathbb{N} \times [0, b[$ *dans* $\mathbb{N}$. *Ainsi, diviser* n *par* b *c'est trouver un couple* $(q, r) \in \mathbb{N} \times [0, b[$ *qui vérifie* $n = bq + r$. *L'entier* q *est appelé le* ***quotient*** *de la division de* n *par* b *et* r *est le* ***reste*** *de cette division.*

Notons que d'après le lemmme [5.4] on a, si $A_b(n) = \{k \in \mathbb{N}/bk \leq n\}$,

$$\varphi_b^{-1}(n) = (\max\{k : k \in A_b(n)\}, n - b \max\{k : k \in A_b(n)\})$$

5.1.4 *Puissance d'un entier*

La définition de la puissance d'un entier naturel est encore une application du théorème d'induction.

Lemme 5.5 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels de succession s, $+$ est l'addition sur $\mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto mn$ est la multiplication sur $\mathbb{N}$, 0 est l'élément minimum de $\mathbb{N}$ et $1 = s(0)$.*
(i) Il existe une application $m \mapsto e_m$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $$\forall m \in \mathbb{N} \;\; e_m(0) = 1 \; et \; [\; \forall n \in \mathbb{N} \; e_m(n+1) = me_m(n)].$$
2. *si $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ vérifie*
$$g(0) = 1 \; et \; [\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; g(n+1) = mg(n)].$$
alors $g = e_m$.

Si $(m,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on note $e_m(k) = m^k$.
(ii) L'application $m \mapsto e_m$ possède les propriétés suivantes :

1. *Si $n \in \mathbb{N}^*$*
$$e_0(n) = 0 : 0^n = 0$$
2. *Si $n \in \mathbb{N}$*
$$e_1(n) = 1 : 1^n = 1$$
3. *Si $m \in \mathbb{N}$ et $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,*
$$e_m(n+p) = e_m(n)e_m(p) : m^{n+p} = m^n m^p.$$
4. *Si $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $k = e_m(n)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,*
$$e_k(p) = e_m(np) : (m^n)^p = m^{np}.$$
5. *Si $(m,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$,*
$$e_{mp}(n) = e_m(n)e_p(n) : (mp)^n = m^n p^n.$$
6. *Si $m \in]1, \rightarrow [$ alors e_m est strictement croissante.*
7. *Si $m \in]1, \rightarrow [$ et $n \in \mathbb{N}$*
$$e_m(n) \geq n : m^n \geq n.$$
En particulier, si $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m^n > p$.

Preuve

(i)

On note
$$\mathrm{diag}(\mathbb{N},\mathbb{N}) = \{(f,g) \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}] \times \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}] / f \circ g = g \circ s\},$$
Si $m \mapsto p_m$ est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ définie par le lemme [5.3] page 92 ($p_m(n) = mn$) on considère la relation e de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ définie par
$$e = \{(m,g) \in \mathbb{N} \times \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}] / g(0) = 1 \; et \; (p_m, g) \in \mathrm{diag}(\mathbb{N},\mathbb{N})\}$$
et on montre que e est une application.

1. D'abord on montre $\mathrm{dom}(e) = \mathbb{N}$. En effet, si $m \in \mathbb{N}$, puisque $p_m \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$, on peut appliquer le théorème [4.3] page 80 avec $X = \mathbb{N}$ et $f = p_m$, ainsi il existe une application $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ qui vérifie
$$g(0) = 1 \; et \; g \circ s = p_m \circ g.$$
Pour un tel g on a $(m,g) \in e$, par suite $\mathrm{dom}(e) = \mathbb{N}$.

2. Ensuite on montre que e est une fonction :

$$[(m,g) \in e \ et\ (m,g') \in e \Rightarrow g = g'],$$

il suffit de voir que l'ensemble H défini par

$$H = \{n \in \mathbb{N} / g(n) = g'(n)\}$$

est héréditaire. Or,
— $0 \in H$ puisque $g(0) = 1 = g'(0)$,
— l'assertion $[n \in H \Rightarrow s(n) \in H]$ provient des égalités $p_m \circ g = g \circ s$ et $p_m \circ g' = g' \circ s$ qui entraînent $p_m(g(n)) = g(s(n))$ et $p_m(g'(n)) = g'(s(n))$, par suite

$$g(n) = g'(n) \Rightarrow p_m(g(n)) = p_m(g'(n)) \Rightarrow g(s(n)) = g'(s(n)).$$

Ainsi H est héréditaire et $\forall n \in \mathbb{N}\ g(n) = g'(n)$.

Ainsi e est une application et en passant de la notation ensembliste à la notation usuelle on obtient une application $m \mapsto e_m$ ou e_m est l'unique application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $(m, e_m) \in e$. Ainsi on a

$$\forall m \in \mathbb{N}\ e_m(0) = 1 \ et\ e_m \circ s = p_m \circ e_m,$$

en termes multiplicatifs et additifs, puisque $s(n) = n+1$ et $p_m(n) = mn$ cela se traduit par

$$\forall m \in \mathbb{N}\ e_m(0) = 1 \ et\ [\forall n \in \mathbb{N},\ e_m(n+1) = me_m(n)],$$

ainsi $m \mapsto e_m$ vérifie $((i)\ 1.)$. Enfin, dire qu'une application $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ vérifie $((i)2.)$, c'est dire que $(m, g) \in e$, e étant une fonction, les assertions $(m, e_m) \in e$ et $(m, g) \in e$ impliquent $g = e_m$.

(ii)

1. La fonction $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ définie par

$$g(0) = 1 \ et\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ g(n) = 0$$

vérifie

$$g(0) = 1 \ et\ \forall n \in \mathbb{N}\ g(n+1) = 0g(n)$$

par suite $g = e_0$.

2. La fonction $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ g(n) = 1$$

vérifie

$$g(0) = 1 \ et\ \forall n \in \mathbb{N}\ g(n+1) = 1g(n)$$

par suite $g = e_1$.

3. si $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on pose

$$H_{n,m} = \{k \in \mathbb{N} / e_m(n+k) = e_m(n)e_m(k)\}$$

et on montre que $H_{n,m}$ est héréditaire.

(a) D'abord puisque $e_m(0) = 1$ on a $0 \in H_{n,m}$.

(b) ensuite on montre $[k \in H_{n,m} \Rightarrow k+1 \in H_{n,m}]$. Si $k \in H_{n,m}$ alors
— par définition de e_m,

$$e_m(n+k+1) = me_m(n+k)$$

— l'assertion $k \in H_{n,m}$ entraîne donc

$$e_m(n+k+1) = m(e_m(n)e_m(k))$$

l'associativité et la commutativité de la multiplication montre alors

$$e_m(n+k+1) = e_m(n)(me_m(k))$$

— l'égalité $me_m(k) = e_m(k+1)$ donne alors

$$e_m(n+k+1) = e_m(n)e_m(k+1)$$

c'est à dire $k+1 \in H_{n,m}$.

Ainsi $H_{n,m} = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}\ e_m(n+k) = e_m(n)e_m(k)$.

4. L'application $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ définie par
$$g(p) = e_m(np)$$
vérifie $g(0) = 1$ et
$$g(p+1) = g(n(p+1)) = g(np+n)$$
et d'après ((*ii*)*3.*) on a
$$g(np+m) = e_m(np+n) = e_m(np)e_m(n) = g(n)k = kg(n)$$
par suite g vérifie
$$g(0) = 1 \textit{ et } g(p+1) = kg(p)$$
et $g = e_k$.
5. L'application $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ définie par
$$g(n) = e_m(n)e_p(n)$$
vérifie $g(0) = 1$ et
$$g(n+1) = e_m(n+1)e_p(n+1) = (me_m(n))(pe_p(n)) = mpe_m(n)e_p(n) = (mp)g(n)$$
ainsi $g = e_{mp}$.
6. D'après le lemme [5.2] page 87 il suffit de montrer que si $n \in \mathbb{N}$ alors $e_m(n) < e_m(n+1)$, or la croissance stricte de $m \mapsto mn$ (voir lemme [5.3] page 92) montre
$$1 < m \Rightarrow e_m(n) < me_m(n)$$
et l'égalité $me_m(n) = e_m(n+1)$ permet de conclure $e_m(n) < e_m(n+1)$.
7. Posons
$$H = \{n \in \mathbb{N} / e_m(n) \geq n\}$$
et montrons que H est héréditaire.
   (a) D'abord $0 \in H$ puisque $1 > 0$.
   (b) Ensuite si $e_m(n) \geq n$ alors $e_m(n+1) > e_m(n) \geq n$, par suite
   $$e_m(n+1) \geq n+1.$$

   En particulier, si $p \in \mathbb{N}$ on a $e_m(p+1) \geq p+1 > p$.

■

Le lemme [5.5] page 99 permet d'introduire une définition

Définition 5.5 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels, on appelle* ***puissance*** *de m l'application $k \mapsto m^k$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par le lemme [5.5]. L'entier m^k est appelé la puissance $k^{\text{ième}}$ de m.*

Le raisonnement standard permet aussi de définir l'itération.

5.1.5 *Itération*

Si X est un ensemble le lemme [1.10] page 39 permet d'étudier l'application $(f,g) \mapsto g \circ f$ de $\mathrm{A}[X,X] \times \mathrm{A}[X,X]$ dans $\mathrm{A}[X,X]$. La définition de l'itération n'est que la mise en oeuvre du théorème d'induction pour l'application φ_f de $\mathrm{A}[X,X]$ dans $\mathrm{A}[X,X]$ définie par

$$\varphi_f(g) = f \circ g.$$

Lemme 5.6 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels de succession s, $+$ est l'addition sur $\mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto mn$ la multiplication sur $\mathbb{N}$, 0 est lélément minimum de $(\mathbb{N}, O)$ et $1 = s(0)$, enfin X est un ensemble.*
(i) Il existe une application $f \mapsto I_f$ de $\mathrm{A}[X,X]$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathrm{A}[X,X]]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $$\forall f \in \mathrm{A}[X,X] \; I_f(0) = id_X \text{ et } [\forall n \in \mathbb{N},\; I_f(n+1) = f \circ I_f(n)]$$
2. *Si $\psi \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathrm{A}[X,X]]$ vérifie*
$$\psi(0) = id_X \text{ et } [\forall n \in \mathbb{N},\; \psi(n+1) = f \circ \psi(n)]$$
alors $\psi = I_f$.

On note $I_f(n) = f^n$.
(ii) L'application $f \mapsto I_f$ possède les propriétés suivante

1. *Si $f = id_X$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_f(n) = id_X$.*
2. *Si $f \in \mathrm{A}[X,X]$ et $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alors*
$$I_f(n+p) = I_f(n) \circ I_f(p) : f^{n+p} = f^n \circ f^p.$$
En particulier $I_f(n) \circ I_f(p) = I_f(p) \circ I_f(n)$.
3. *Si $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{A}[X,X]$ et $g = I_f(n)$ alors :*
$$I_g(p) = I_f(np) : (f^n)^p = f^{np}.$$
4. *Si $(f,g) \in \mathrm{A}[X,X] \times \mathrm{A}[X,X]$ vérifie $f \circ g = g \circ f$ et $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alors*
$$I_f(n) \circ I_g(p) = I_g(p) \circ I_f(n) : f^n \circ g^p = g^p \circ f^n.$$

Preuve

(i)

On note

$$\mathrm{diag}(\mathrm{A}[X,X], \mathbb{N}) = \{(\psi, g) \in \mathrm{A}[\mathrm{A}[X,X], \mathrm{A}[X,X]] \times \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathrm{A}[X,X]] / g \circ s = \psi \circ g\}$$

et on considère l'application $f \mapsto \varphi_f$ de $\mathrm{A}[X,X]$ dans $\mathrm{A}[\mathrm{A}[X,X], \mathrm{A}[X,X]]$ définie par

$$\varphi_f(h) = f \circ h.$$

Enfin on pose

$$I = \{(f,g) \in \mathrm{A}[X,X] \times \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathrm{A}[X,X]] / g(0) = id_X \text{ et } (\varphi_f, g) \in \mathrm{diag}(\mathrm{A}[X,X], \mathbb{N})\}$$

et on montre que I est une application.

1. D'abord on montre que $\mathrm{dom}(I) = \mathrm{A}[X,X]$. En effet, si $f \in \mathrm{A}[X,X]$ alors, puisque φ_f est une application de $\mathrm{A}[X,X]$ dans $\mathrm{A}[X,X]$ le théorème d'induction (th [4.3] page 80) permet d'affirmer qu'il existe une application g de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[X,X]$ qui vérifie

$$g(0) = id_X \ et \ [\forall n \in \mathbb{N} \ g(n+1) = \varphi_f(g(n))]$$

un tel g vérifie $(f,g) \in I$.

2. Ensuite on montre $[(f,g) \in I \ et \ (f,g') \in I \Rightarrow g = g']$. Il suffit encore de voir que l'ensemble

$$H = \{n \in \mathbb{N}/g(n) = g'(n)\}$$

est héréditaire. Or,
— $0 \in H$ puisque $g(0) = id_X = g'(0)$
— L'assertion $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$ provient de

$$g(n) = g'(n) \Rightarrow \varphi_f(g(n)) = \varphi_f(g'(n)) \Rightarrow g(n+1) = g'(n+1).$$

Ainsi I est une application et en passant de la notation ensembliste à la notation usuelle on obtient une application $f \mapsto I_f$ de $\mathrm{A}[X,X]$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N},\mathrm{A}[X,X]]$ où I_f est l'unique élément de $\mathrm{A}[\mathbb{N},\mathrm{A}[X,X]]$ tel que $(f,I_f) \in I$. Ainsi cette application vérifie

$$I_f(0) = id_X \ et \ [\forall n \in \mathbb{N} \ I_f(n+1) = \varphi_f(I_f(n)) = f \circ I_f(n)].$$

Enfin, dire que $\psi \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathrm{A}[X,X]]$ vérifie

$$\psi(0) = id_X \ et \ [\forall n \in \mathbb{N}, \ \psi(n+1) = f \circ \psi(n)],$$

c'est dire que $(f,\psi) \in I$, ainsi $\psi = I_f$.

(ii)

1. Il est clair que l'application ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[X,X]$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \psi(n) = id_X$$

vérifie

$$\psi(0) = id_X \ et \ [\forall n \in \mathbb{N} \ \psi(n+1) = id_X \circ \psi(n)].$$

2. Si $k \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_k = \{n \in \mathbb{N}/I_f(n+k) = I_f(n) \circ I_f(k)\}$$

et on montre que H_k est héréditaire.

(a) D'abord $0 \in H_k$ puisque $I_f(0) = id_X$.

(b) Ensuite on montre $[n \in H_k \Rightarrow n+1 \in H_k]$. Or, par définition de I_f on a

$$I_f(n+1+k) = I_f(n+k+1) = f \circ I_f(n+k)$$

puisque $n \in H_k$ on obtient

$$I_f(n+1+k) = f \circ (I_f(n) \circ I_f(k)) = (f \circ I_f(n)) \circ I_f(k) = I_f(n+1) \circ I_f(k).$$

Ainsi $H_k = \mathbb{N}$.

3. Posons $\psi(p) = I_f(np)$ alors $\psi(0) = id_X$ et $\psi(p+1) = I_f(n+np)$ et on vient de montrer que $I_f(n+np) = I_f(n) \circ I_f(np)$. Ainsi ψ est une application qui vérifie

$$\psi(0) = id_X \ et \ [\forall p \in \mathbb{N}, \psi(p+1) = g \circ \psi(p)]$$

ainsi $\psi = I_g(p)$.

4. On montre d'abord $[f \circ g = g \circ f \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, I_f(n) \circ g = g \circ I_f(n)]$. On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / g \circ I_f(n) = I_f(n) \circ g\}$$

et on montre que H est héréditaire.
— Il est clair que $0 \in H$
— L'assertion $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$ provient des égalités

$$I_f(n+1) \circ g = I_f(n) \circ (f \circ g) = (I_f(n) \circ g) \circ f = (g \circ I_f(n)) \circ f = g \circ I_f(n+1)$$

En particulier on obtient aussi

$$[g \circ I_f(n) = I_f(n) \circ g \Rightarrow I_g(p) \circ I_f(n) = I_f(n) \circ I_g(p)].$$

■

Le théorème d'induction permet aussi de définir rigoureusement les sommes et produits finis.

5.2 *Définition de* $\sum$ *et* $\prod$

Si $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ on veut donner une signification aux symboles $\sum_{k=0}^{n} x_k$ et $\prod_{k=0}^{n} x_k$ couramment utilisés en mathématiques.

5.2.1 *Définition de* $\sum$

Dans le lemme qui suit on montre qu'il existe une application σ de $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ qui vérifie

$$\forall x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}] \ \sigma(x)(0) = x_0 \ et \ [\forall n \in \mathbb{N} \ \sigma(x)(n+1) = \sigma(x)(n) + x_{n+1}]$$

Lemme 5.7 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,*
(i) la relation σ *de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ *définie par*

$$\sigma = \{(x, f) \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}] \times \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}] / x_0 = f_0 \ et \ \forall n \in \mathbb{N} \ f_{n+1} = f_n + x_{n+1}\}$$

vérifie $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$.
(ii) σ *est une application, c'est l'unique application de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ *qui vérifie*

$$\forall x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}] \ (\sigma(x)(0) = x_0 \ et \ [\forall n \in \mathbb{N} \ \sigma(x)(n+1) = \sigma(x)(n) + x_{n+1}]).$$

On note

$$\sigma(x)(n) = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

en particulier

$$\sum_{k=0}^{0} x_k = x_0 \ et \ [\forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{k=0}^{n+1} x_k = \sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1}]$$

(iii) Si $(x, y) \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}] \times \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ *et*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_k \leq y_k$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} x_k \leq \sum_{k=0}^{n} y_k \ .$$

(iv) Si $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ *,* $a \in \mathbb{N}$ *et* $y \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ *est définie par*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ y_k = ax_k$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}\quad \sum_{k=0}^{n} y_k = a\sum_{k=0}^{n} x_k.$$

(v) Si $(x,y) \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}] \times \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ *et* $z \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ *est définie par*

$$\forall k \in \mathbb{N}\quad z_k = x_k + y_k$$

alors

$$\sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k\ .$$

Preuve

(i)

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ il existe $f \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ tel que $(x,f) \in \sigma$. Si $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ on définit l'application φ_x de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ par

$$\varphi_x(n,k) = (n+1, k + x_{n+1}),$$

le théorème d'induction (théorème [4.3] page 80) permet d'affirmer qu'il existe une application γ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ qui vérifie

$$\gamma(0) = (0,x_0)\ et\ [\forall n \in \mathbb{N}\ \gamma(n+1) = \varphi_x(\gamma(n))].$$

Si p_1 et p_2 sont les applications de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$p_1(n,k) = n\ et\ p_2(n,k) = k,$$

on montre

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ p_1(\gamma(n)) = n$
2. si $f \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ est définie par
$$f_n = p_2(\gamma(n))$$
alors $(x,f) \in \sigma$.

1. On pose
$$H = \{n \in \mathbb{N} / p_1(\gamma(n)) = n\}$$
et on montre que H est héréditaire.
   (a) D'abord $0 \in H$ puisque $\gamma(0) = (0,x_0)$.
   (b) Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. En effet, si $n \in H$ alors $\gamma(n) = (n,f_n)$ avec $f_n = p_2(\gamma(n))$ ainsi on obtient
   $$\gamma(n+1) = \varphi_x(n,f_n) = (n+1, f_n + x_{n+1}).$$
   ainsi $n+1 \in H$.
2. D'abord on a $f_0 = p_2(\gamma(0)) = p_2(0,x_0) = x_0$. Ensuite, d'après 1., si $n \in \mathbb{N}$ on a $\gamma(n) = (n,f_n)$, par suite
$$\gamma(n+1) = (n+1, f_{n+1}) = \varphi_x(n,f_n) = (n+1, f_n + x_{n+1})$$
et $\forall n \in \mathbb{N}\quad f_{n+1} = f_n + x_{n+1}$

Ceci montre que $(x, f) \in \sigma$, ainsi $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$.

(ii)

Puisque $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ il suffit de montrer que σ est une fonction, ainsi on vérifie l'assertion $[(x, f) \in \sigma \ et \ (x, g) \in \sigma \Rightarrow f = g]$. Si $(x, f) \in \sigma$ et $(x, g) \in \sigma$ on pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / f_n = g_n\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. D'abord $0 \in H$ puisque $f_0 = x_0 = g_0$.
2. L'assertion $[n \in H \Rightarrow n + 1 \in H]$ provient des égalités $f_{n+1} = f_n + x_{n+1}$ et $g_{n+1} = g_n + x_{n+1}$ qui entraînent
$$f_n = g_n \Rightarrow f_n + x_{n+1} = g_n + x_{n+1} \Rightarrow f_{n+1} = g_{n+1}.$$

Ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$. Ceci montre que σ eest une application.

(iii)

On pose
$$H = \{n \in \mathbb{N} / \sum_{k=0}^{n} x_k \leq \sum_{k=0}^{n} y_k\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. D'abord $0 \in H$ puisque $\sum_{k=0}^{0} x_k = x_0 \leq y_0 = \sum_{k=0}^{0} y_k$
2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n + 1 \in H]$. Si $n \in H$ alors
$$\sum_{k=0}^{n} x_k \leq \sum_{k=0}^{n} y_k$$
ainsi l'inégalité $x_{n+1} \leq y_{n+1}$ et le lemme [5.2] page 87 montrent alors
$$x_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} x_k \leq y_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} y_k$$
et par définition de $\sum$ cette inégalité s'écrit
$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k \leq \sum_{k=0}^{n+1} y_k$$

Ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$.

(iv)

On montre que l'ensemble
$$H = \{n \in \mathbb{N} / \sum_{k=0}^{n} y_k = a \sum_{k=0}^{n} x_k\}$$

est héréditaire.

1. Il est clair que $0 \in H$.
2. Si $n \in H$ alors

— par définition de σ
$$\sum_{k=0}^{n+1} y_k = \sum_{k=0}^{n} y_k + y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} y_k + ax_{n+1}$$
— puisque $n \in H$
$$\sum_{k=0}^{n+1} y_k = a\sum_{k=0}^{n} x_k + ax_{n+1}$$
— d'après la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication (voir lemme [5.3] page 92)
$$\sum_{k=0}^{n+1} y_k = a(\sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1})$$
— enfin, de la définition de σ on obtient
$$\sum_{k=0}^{n+1} y_k = a\sum_{k=0}^{n+1} x_k$$
c'est à dire $n+1 \in H$.

(v)

On montre que l'ensemble
$$H = \{n \in \mathbb{N} / \sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k\}$$
est héréditaire.

1. Il est clair que $0 \in H$.
2. Si $n \in H$ alors

— par définition de σ
$$\sum_{k=0}^{n+1} z_k = \sum_{k=0}^{n} z_k + x_{n+1} + y_{n+1}$$
— puisque $n \in H$
$$\sum_{k=0}^{n+1} z_k = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k + x_{n+1} + y_{n+1}$$
— la commutativité de l'addition entraîne
$$\sum_{k=0}^{n+1} z_k = (\sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1}) + (\sum_{k=0}^{n} y_k + y_{n+1})$$
— la définition de σ donne alors
$$\sum_{k=0}^{n+1} z_k = \sum_{k=0}^{n+1} x_k + \sum_{k=0}^{n+1} y_k$$
c'est à dire $n+1 \in H$.

■

On veut maintenant donner une signification à des symboles du type
$$\sum_{k=m}^{m+n} x_k.$$

pour cela on considère l'application τ_m de A$[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ dans A$[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ définie par

$$\tau_m(x)(k) = x_{m+k}.$$

Si σ est l'application de A$[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ dans A$[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ définie par le lemme [5.7] page 104 alors $\sigma(\tau_m(x))$ est définie et on note

$$\sigma(\tau_m(x))(n) = \sum_{k=0}^{n}(\tau_m(x))(k) = \sum_{k=0}^{n} x_{m+k} = \sum_{k=m}^{m+n} x_k.$$

Dans ces notations il est facile d'établir le lemme suivant.

Lemme 5.8 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* σ *l'application de* A$[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ *dans* A$[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ *définie par le lemme [5.7] page 104.*
(i) Pour tout $x \in$ A$[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ *et* $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$\sigma(x)(m+1+n) = \sigma(x)(m) + \sigma(\tau_{m+1}(x))(n),$$

en d'autre termes

$$\sum_{k=0}^{m+n+1} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{n+m+1} x_k$$

(ii) Si $x \in$ A$[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ *vérifie*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \tau_{m+1}(x)(k) = a_m y_k$$

alors

$$\sum_{k=0}^{m+n+1} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + a_m \sum_{k=0}^{n} y_k$$

En particulier,

1. *si* $[\forall k \geq m+1 \ x_k = 0]$ *alors pour tout* $n \geq m+1$

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k.$$

2. *Si il existe* $b \in \mathbb{N}$ *et* $a \in$ A$[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ *tels que* $[\forall k \in \mathbb{N}, \ x_k = b^k a_k]$ *alors*

$$\sum_{k=0}^{m+1+n} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + b^{m+1}\sum_{k=0}^{n} b^k(\tau_{m+1}(a))(k)$$

Preuve

(i)

On fixe $m \in \mathbb{N}$ et on montre que l'ensemble

$$H = \{n \in \mathbb{N}/\sigma(x)(m+1+n) = \sigma(x)(m) + \sigma(\tau_{m+1}(x))(n)\}$$

est héréditaire.

1. D'abord on montre $0 \in H$. En effet, par définition de σ on a

$$\sigma(x)(m+1) = \sigma(x)(m) + x_{m+1} = \sigma(x)(m) + \tau_{m+1}(x)(0) = \sigma(x)(m) + \sigma(\tau_{m+1}(x))(0).$$

2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. En effet, par définition de σ on a

$$\sigma(x)(m+1+n+1) = \sigma(x)(m+1+n) + x_{m+1+n+1} = \sigma(x)(m+1+n) + \tau_{m+1}(x)(n+1)$$

— puisque $n \in H$ on a

$$\sigma(x)(m+1+n) = \sigma(x)(m) + \sigma(\tau_{m+1}(x))(n)$$

par suite on obtient

$$\sigma(x)(m+1+n+1) = \sigma(x)(m) + \sigma(\tau_{m+1}(x))(n) + \tau_{m+1}(x)(n+1)$$

— la définition de σ donne

$$\sigma(\tau_{m+1}(x))(n+1) = \sigma(\tau_{m+1}(x))(n) + \tau_{m+1}(x)(n+1),$$

ainsi

$$\sigma(x)(m+1+n+1) = \sigma(x)(m) + \sigma(\tau_{m+1}(x))(n+1),$$

autrement dit $n+1 \in H$.

Ainsi H est héréditaire et puisque le seul sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O)$ est $\mathbb{N}$ on obtient $H = \mathbb{N}$.

(ii)

D'après le lemme 5.7 page 104 si

$$\tau_{m+1}(x)(k) = a_m y_k$$

alors

$$\sigma(\tau_{m+1}(x))(n) = a_m \sigma(y)(n)$$

ainsi (i) permet d'affirmer que

$$\sigma(x)(m+1+n) = \sigma(x)(m) + a_m \sigma(y)(n).$$

En notation additive cette égalité s'écrit

$$\sum_{k=0}^{m+n+1} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + a_m \sum_{k=0}^{n} y_k. \tag{5.3}$$

1. Si $[\forall k \geq m+1 \; x_k = 0]$ alors $[\forall k \in \mathbb{N} \; \tau_{m+1}(x)(k) = 0]$, ainsi on peut prendre $a_m = 0$ dans l'égalité (5.3)
2. Si x est défini par $x_k = b^k a_k$ alors $[\forall k \in \mathbb{N} \; \tau_{m+1}(x)(k) = b^{m+1}(b^k a_{m+1+k})]$,ainsi on peut appliquer (5.3) avec $a_m = b^{m+1}$ et $y_k = b^k(\tau_{m+1}(a))(k)$.

■

Si on remplace l'addition par le produit, des démonstrations identiques permettent de définir rigoureusement des expressions du type

$$\prod_{k=0}^{n} x_k.$$

5.2.2 *Définition de* $\prod$

Le lemme suivant est le jumeau du lemme 5.7 page 104.

Lemme 5.9 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels.*
(i) La relation π *de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ *définie par*

$$\pi = \{(x, f) \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}] \times \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}] / f_0 = x_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \; f_{n+1} = f_n x_{n+1}\}$$

vérifie $\mathrm{dom}(\pi) = \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$.
(ii) π *est une application, c'est l'unique application de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ *qui vérifie*

$$\forall x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}] \; \pi(x)(0) = x_0 \text{ et } [\forall n \in \mathbb{N} \; \pi(x)(n+1) = \pi(x)(n) x_{n+1}].$$

On note

$$\pi(x)(n) = \prod_{k=0}^{n} x_k.$$

(iii) Il existe une unique application $n \to n!$ qui vérifie

$$0! = 1 \ et \ \forall n \in \mathbb{N} \ n+1! = (n+1)n!$$

le symbole $n!$ est lu " factoriel n".

Preuve

(i)

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ il existe $f \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ tel que $(x,f) \in \pi$. Si $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ on défini l'application φ_x de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par

$$\varphi_x(n,k) = (n+1, kx_{n+1}),$$

le théorème d'induction (théorème [4.3] page 80) permet d'affirmer qu'il existe $\gamma \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}\times\mathbb{N}]$ qui vérifie

$$\gamma(0) = (0,x_0) \ et \ [\forall n \in \mathbb{N}, \ \gamma(n+1) = \varphi_x(\gamma(n))].$$

Si p_1 et p_2 sont les applications de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$p_1(n,k) = n \ et \ p_2(n,k) = k$$

on montre

1. $\forall n \in \mathbb{N} \ p_1(\gamma(n)) = n$
2. si $f \in \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$ est définie par
$$f_n = p_2(\gamma(n))$$
alors $(x,f) \in \pi$

1. On pose
$$H = \{n \in \mathbb{N} / p_1(\gamma(n)) = n\}$$
et on montre que H est héréditaire.
   (a) D'abord $0 \in H$ puisque $\gamma(0) = (0,x_0)$
   (b) Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. En effet, si $n \in H$ alors
$$\gamma(n) = (p_1(\gamma(n)), p_2(\gamma(n))) = (n, p_2(\gamma(n))$$
par suite
$$\gamma(n+1) = \varphi_x(n, p_2(\gamma(n)) = (n+1, p_2(\gamma(n))x_{n+1})$$
et $p_1(\gamma(n+1)) = n+1$.
2. D'abord puisque $\gamma(0) = (0,x_0)$ on a $f_0 = p_2(0,x_0) = x_0$, ensuite d'après 1. et la définition de f, on a,pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(n) = (n, f_n)$, par suite
$$\gamma(n+1) = (n+1, f_{n+1}) = \varphi_x(n, f_n) = (n+1, f_n x_{n+1}).$$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient $f_{n+1} = f_n x_{n+1}$

Ceci montre que $(x,f) \in \pi$, par suite $\mathrm{dom}(\pi) = \mathrm{A}[\mathbb{N},\mathbb{N}]$.

(ii)

Pour montrer (ii) il reste à voir que π est une fonction. Autrement dit il faut montrer $[(x,f) \in \pi \ et \ (x,g) \in \pi \Rightarrow f = g]$. Si $(x,f) \in \pi$ et $(x,g) \in \pi$ on pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / f_n = g_n\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. D'abord 0 appartient à H puisque $f_0 = x_0 = g_0$.
2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. En effet, si $n \in H$ alors $f_n = g_n$ par suite

$$f_{n+1} = f_n x_{n+1} = g_n x_{n+1} = g_{n+1}$$

Ainsi H est héréditaire, par suite $H = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n = g_n$.

(iii)

On définit l'application $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ par

$$x_0 = 1 \ et\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n = n$$

L'application $\pi(x)$ vérifie

$$\pi(x)(0) = x_0 = 1 \ et\ \pi(x)(n+1) = \pi(x)(n) x_{n+1} = (n+1)\pi(x)(n).$$

c'est cette application qu'on note $n \to n!$ ■

5.3 *Sections commençantes des entiers naturels*

5.3.1 *Premiers résultats*

Dans la suite, si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels et $n \in \mathbb{N}$, on note indifféremment

$$\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N}/k \leq n\} = [0, n] = \{0, 1, ..., n\} = \{k \in \mathbb{N}/(k, n) \in O\}$$

Lemme 5.10 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels.*
(i) Toute section commençante de $(\mathbb{N}, O)$ différente de $\mathbb{N}$ est de la forme

$$\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N}/k \leq n\}$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Si $p \in \mathbb{N}_{n+1}$ il existe une bijection de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ dans l'ensemble

$$\mathbb{N}_{n+1} \setminus \{p\} = \{k \in \mathbb{N}_{n+1}/k \neq p\}.$$

(iii) Si $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $m > n$ il n'existe pas d'application injective de $\mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}_n$. En particulier, pour qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}_n$ il faut que $n = m$.

(iv) Si $n \in \mathbb{N}$, toute application injective de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ est bijective.

(v) Si $n \in \mathbb{N}$, toute application surjective de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ est bijective.

(vi) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $O_n = O \cap (\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n)$, $(\mathbb{N}_n, O_n)$ est un ensemble bien ordonné, la sucession s_n de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ vérifie

1. $$\mathrm{dom}(s_n) = \mathbb{N}_{n-1}$$
2. *si $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ alors $s_n(k) = k+1$*
3. $\mathrm{im}(s_n) = \mathbb{N}_n^* = \{k \in \mathbb{N}_n/k \neq 0\}$
4. *le seul sous ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ est $\mathbb{N}_n$, en d'autre termes, pour qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{N}_n$ soit égal à $\mathbb{N}_n$ il faut et il suffit que les propriétés suivantes soient vérifiées*

(a) $0 \in A$

(b) *Si* $k \in A$ *et* $k < n$ *alors* $k+1 \in A$

5. *L'identité de* $\mathbb{N}_n$ *est l'unique bijection strictement croissante de* $(\mathbb{N}_n, O_n)$ *dans* $(\mathbb{N}_n, O_n)$.

Preuve

(i)

D'après le lemme 3.1 page 56, toute section commençante S de $(\mathbb{N}, O)$ différente de $\mathbb{N}$ est de la forme

$$S =]\leftarrow, m[$$

où $m = \min_O\{k : k \in S^c\}$. En particulier, S est majorée, par suite le lemme 4.3 page 78 montre que S possède un plus grand élément $n \in S$. On a

1. $[0, n] \subset S$ puisque S est une section commençante de $(\mathbb{N}, O)$
2. $S \subset [0, n]$ puisque n est un majorant de S

ainsi on obtient

$$S = [0, n] = \mathbb{N}_n.$$

(ii)

Si $p = n+1$ alors $id_{\mathbb{N}_n}$ est une bijection de $\mathbb{N}_{n+1} \setminus \{p\}$ dans $\mathbb{N}_n$ et si $p < n+1$ l'application f de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_{n+1} \setminus \{p\}$ définie par

$$f_k = \begin{cases} k & si \quad k < p \\ k+1 & si \quad k \geq p \end{cases}$$

est une bijection .

(iii)

Notons

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \forall m > n \ \mathrm{Inj}[\mathbb{N}_m, \mathbb{N}_n] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}_m, \mathbb{N}_n] = \varnothing\}$$

H est donc l'ensemble des éléments n de $\mathbb{N}$ qui vérifient la propriété que si $m > n$ il n'existe pas d'application injective de $\mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}_n$. On montre que $H = \mathbb{N}$ en montrant que H est héréditaire.

1. D'abord in montre $0 \in H$. En effet, puisque $\mathbb{N}_0 = \{0\}$, si $m \neq 0$ toute application f de $\mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}_0$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$.
2. Ensuite on montre $[n+1 \notin H \Rightarrow n \notin H]$. En effet, l'assertion $n+1 \notin H$ signifie qu'il existe un entier $m > n+1$ qui vérifie

$$\mathrm{Inj}[\mathbb{N}_m, \mathbb{N}_{n+1}] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}_m, \mathbb{N}_{n+1}] \neq \varnothing.$$

Si g est une application injective de $\mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}_{n+1}$ et $p = g(m)$ la restriction g' de g à $\mathbb{N}_{m-1}$ est une injection de $\mathbb{N}_{m-1}$ dans $\mathbb{N}_{n+1} \setminus \{p\}$. Si f est une bijection de $\mathbb{N}_{n+1} \setminus \{p\}$ dans $\mathbb{N}_n$, l'application $f \circ g'$ est une injection de $\mathbb{N}_{m-1}$ dans $\mathbb{N}_n$, or , par construction $m-1 > n$, ceci montre donc que $n \notin H$.

Ainsi H est héréditaire et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{Inj}[\mathbb{N}_m, \mathbb{N}_n] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}_m, \mathbb{N}_n] = \varnothing$ dès que $m > n$. Si f est une bijection de $\mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}_n$ alors f est une application injective de $\mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}_n$ par suite $m \leq n$ et f^{-1} est une application injective de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m$ par suite $n \leq m$.

(iv)

Notons

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \forall u \in \mathrm{Inj}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n] \ \mathrm{im}(u) = \mathbb{N}_n\},$$

H est donc l'ensemble des éléments n de $\mathbb{N}$ qui vérifient la propriété que toute application injective de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ est surjective (et donc bijective). On montre que $H = \mathbb{N}$ en montrant que H est héréditaire.

1. D'abord $0 \in H$, en effet, puisque $\mathbb{N}_0 = \{0\}$, toute application de $\mathbb{N}_0$ dans $\mathbb{N}_0$ est surjective.
2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. Il s'agit de montrer que si $n \in H$ alors toute application injective de $\mathbb{N}_{n+1}$ dans $\mathbb{N}_{n+1}$ est surjective. On montre que si $n \in H$
   (a) toute application injective de $\mathbb{N}_{n+1}$ dans $\mathbb{N}_{n+1}$ vérifiant
   $$u(n+1) = n+1$$
   est surjective,
   (b) toute application injective de $\mathbb{N}_{n+1}$ dans $\mathbb{N}_{n+1}$ vérifiant
   $$u(n+1) < n+1$$
   est surjective.

   (a) Si $u \in \mathrm{Inj}[\mathbb{N}_{n+1}, \mathbb{N}_{n+1}]$ et $u(n+1) = n+1$ alors la restriction u' de u à $\mathbb{N}_n$ est une application injective à valeur dans $\mathbb{N}_n$, l'assertion $n \in H$ permet d'affirmer que $\mathrm{im}(u') = \mathbb{N}_n$ par suite on obtient $\mathrm{im}(u) = \mathrm{im}(u') \cup \{u(n+1)\} = \mathbb{N}_{n+1}$.
   (b) Si $u \in \mathrm{Inj}[\mathbb{N}_{n+1}, \mathbb{N}_{n+1}]$ et $u(n+1) < n+1$ on considère l'application τ de $\mathbb{N}_{n+1}$ dans $\mathbb{N}_{n+1}$ définie par
   $$\tau(k) = \begin{cases} k & si \quad k \notin \{u(n+1), n+1\} \\ n+1 & si \quad k = u(n+1) \\ u(n+1) & si \quad k = n+1 \end{cases}$$
   et on montre
      i. $\tau \circ \tau = id_{\mathbb{N}_{n+1}}$ et τ est bijective
      ii. si $v = \tau \circ u$ alors v est bijective

      i. si $k \notin \{u(n+1), n+1\}$ alors $\tau \circ \tau(k) = \tau(k) = k$, d'autre part, puisque τ inverse $u(n+1)$ et $n+1$ on obtient
      $$\tau \circ \tau(u(n+1)) = \tau(n+1) = u(n+1) \ et \ \tau \circ \tau(n+1) = \tau(u(n+1)) = n+1.$$
      ce qui montre que $\tau \circ \tau = id_{\mathbb{N}_{n+1}}$,
      ii. comme composée d'applications injectives, v est injective, de plus
      $$v(n+1) = \tau(u(n+1)) = n+1$$
      ainsi v est une application injective de $\mathbb{N}_{n+1}$ dans $\mathbb{N}_{n+1}$ qui vérifie $v(n+1) = n+1$ et (a) permet d'affirmer qu'elle est bijective. Il suffit alors de voir que
      $$\tau \circ v = (\tau \circ \tau) \circ u = id_{\mathbb{N}_{n+1}} \circ u = u$$
      pour voir que u est la composée d'applications bijectives.

   Ainsi H est héréditaire et pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute application injective de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ est une bijection.

(v)

Si u est une application surjective de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ l'ensemble $u^{-1}(k) = \{j \in \mathbb{N}_n / u(j) = k\}$ est non vide. On définit l'application v de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ par
$$v(k) = \min_O\{j : j \in u^{-1}(k)\}.$$
On montre que v est injective en montrant que $u \circ v = id_{\mathbb{N}_n}$: par définition d'un minimum, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ $v(k) \in u^{-1}(k)$, par suite $u(v(k)) = k$ ainsi on obtient
$$v(k) = v(k') \Rightarrow u(v(k)) = u(v(k')) \Rightarrow k = k'.$$

Ainsi v est une application injective de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ et (iv) permet d'affirmer que v est bijective. Il résulte alors de l'égalité $u \circ v = id_{\mathbb{N}_n}$ que $u = v^{-1}$, ainsi u est bijective.

(vi)

On montre que $(\mathbb{N}_n, O_n)$ est bien ordonnné en montrant que pour tout ensemble non vide A de $\mathbb{N}_n$

$$\min_{O_n}\{k : k \in A\} = \min_{O}\{k : k \in A\}$$

or

- $\min_O\{k : k \in A\} \in A$ par définition d'un élément minimum et en particulier $\min_O\{k : k \in A\} \in \mathbb{N}_n$,
- si $k \in A$ alors $(\min_O\{k : k \in A\}, k) \in O$ et puisque $A \subset \mathbb{N}_n$ on obtient $(\min_O\{k : k \in A\}, k) \in O \cap (\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n)$.

On montre maintenant les assertions *1.* à *5.*

1. Il est clair que n est l'élément maximal de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ ainsi le lemme [4.1] page 70 permet d'affirmer que
$$\mathrm{dom}(s_n) =]\leftarrow, n[= [0, n[= \mathbb{N}_{n-1}$$
2. Par définition si $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $s_n(k) = \min_{O_n}\{p : p \in A(k)\}$ où
$$A(k) = \{p \in \mathbb{N}_n / p \neq k \ et \ (k, p) \in O_n\}$$
   - puisque $k + 1 \in A(k)$ on a $s_n(k) \leq k + 1$
   - puisque $s_n(k)$ est un entier naturel strictement supérieur à k on a $s_n(k) \geq k + 1$

   ainsi $s_n(k) = k + 1$
3. Si $k \in \mathbb{N}_n^*$ alors $k - 1 \in \mathbb{N}_{n-1}$ et $k = s_n(k-1)$ par suite $\mathbb{N}_n^* \subset \mathrm{im}(s_n)$. D'autre part $0 \notin \mathrm{im}(s_n)$ puisque si $0 = s_n(k)$ alors $k < 0$ par suite $\mathrm{im}(s_n) \subset \mathbb{N}_n^*$.
4. On montre d'abord que tout sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ contient n. En effet, d'après le lemme [4.3] page 78 si A est un sous-ensemble de $\mathbb{N}_n$ alors A possède un maximum noté m, si $m < n$ alors $m \in \mathrm{dom}(s_n)$, par suite, puisque A est héréditaire, $s_n(m) = m + 1$ est un élément de A et ceci contredit la maximalité de m. Ainsi on obtient $m = n$ ce qui montre que $n \in A$. On montre ensuite que dès que A est héréditaire dans $(\mathbb{N}_n, O_n)$ alors l'ensemble
$$B = \{k \in \mathbb{N}_n / [0, k] \subset A\}$$
est héréditaire.
   (a) D'abord $0 \in B$ puisque $0 \in A$,
   (b) ensuite on montre $[k \in \mathrm{dom}(s_n) \cap B \Rightarrow s_n(k) \in B]$. En effet, si $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ et $[0, k] \subset A$ alors $k \in A$, A étant héréditaire $s_n(k) \in A$ par suite
$$[0, s_n(k)] = [0, k] \cup \{s_n(k)\} \subset A,$$
   et $s_n(k) \in B$.

   Ainsi B est héréditaire et on a vu qu'un tel ensemble contient n. Or , l'assertion $n \in B$ est l'assertion $[0, n] \subset A$, par suite $A = \mathbb{N}_n$. Pour finir il suffit de remarquer que les assertions
   (a) $0 \in A$
   (b) $k < n \ et \ k \in A \Rightarrow k + 1 \in A$

   ne sont que la transcription de l'hérédité de A.
5. Il est clair que $id_{\mathbb{N}_n}$ est une application strictement croissante de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dans $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dont l'image est une section commençante de $(\mathbb{N}_n, O_n)$, et le lemme [3.3] page 61 permet d'affirmer qu'il n'existe qu'une seule application de ce type. En particulier, la seule application strictement croissante dont l'image est $\mathbb{N}_n$ est l'identité.

■

5.3.2 *Numération des entiers naturels*

On appelle numération le procédé qui permet d'exprimer tout entier naturel à l'aide de quelques symboles typographique.

numération binaire

Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels on a travaillé avec les symboles
- $0 = \min_O\{n : n \in \mathbb{N}\}$
- $1 = s(0) = \min_O\{n : n \in \mathbb{N}^*\}$

On introduit maintenant un autre symbole : $2 = s(1) = \min_O\{n : n \in]1, \rightarrow [\}$, et on veut exprimer tout entier naturel au moyen de ces symboles ou de puissances de 2 (voir lemme [5.5] page 99). Plus précisément on montre que si $n \in [2, \rightarrow [$ et si $p(n) = \max\{k : 2^k \leq n\}$ alors il existe une unique application a de $\mathbb{N}_{p(n)-1}$ dans $\{0, 1\}$ qui vérifie

$$n = 2^{p(n)} + \sum_{k=0}^{p(n)-1} a_k 2^k$$

Lemme 5.11 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels.*
(i)Pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{p} 2^k = 2^{p+1} - 1$$

(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ l'application f_p de $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \{0, 1\}]$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$f_p(a) = 2^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k 2^k$$

vérifie :

1. $$\forall a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \{0, 1\}] \quad f_p(a) < 2^{p+1}$$
2. *f_p est injective*
3. $\mathrm{im}(f_p) = [2^p, 2^{p+1}[= \{k \in \mathbb{N}/2^p \leq k < 2^{p+1}\}$

(iii) Si $n \in [2, \rightarrow [$ alors l'ensemble

$$A(n) = \{k \in \mathbb{N}^*/2^k \leq n\}$$

est non vide majoré et l'application p de $[2, \rightarrow [$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$p(n) = \max_O\{k : k \in A(n)\}$$

est une application à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie : pour tout $n \in [2, \rightarrow [$ il existe une unique application $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \{0, 1\}]$ tel que

$$n = 2^{p(n)} + \sum_{k=0}^{p(n)-1} a_k 2^k.$$

Preuve

(i)

On montre que pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{p} 2^k = 2^{p+1} - 1.$$

Posons

$$H = \{p \in \mathbb{N} / \sum_{k=0}^{p} 2^k = 2^{p+1} - 1\},$$

on vérifie que H est héréditaire.

1. D'abord on a $0 \in H$ puisque $2^0 = 1 = 2 - 1$.
2. Ensuite on montre $[p \in H \Rightarrow p + 1 \in H]$. En effet, si $p \in H$ alors :
   — par définition de $\sum$

   $$\sum_{k=0}^{p+1} 2^k = \sum_{k=0}^{p} 2^k + 2^{p+1}$$

   — ainsi, puisque $p \in H$, on obtient

   $$\sum_{k=0}^{p+1} 2^k = 2^{p+1} - 1 + 2^{p+1} = 2 \times 2^{p+1} - 1 = 2^{(p+1)+1} - 1,$$

   et cette égalité est l'assertion $p + 1 \in H$.

(ii)

1. Puisque pour tout $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \{0, 1\}]$ on a $a_k \leq 1$ et $a_k 2^k \leq 2^k$ si $k \in \mathbb{N}_{p-1}$ le lemme [5.7] page 104 permet d'affirmer que

   $$\sum_{k=0}^{p-1} a_k 2^k \leq \sum_{k=0}^{p-1} 2^k$$

   par suite

   $$f_p(a) = 2^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k 2^k \leq \sum_{k=0}^{p} 2^k.$$

   et (i) permet d'affirmer

   $$f_p(a) \leq 2^{p+1} - 1$$

2. Pour montrer que f_p est injective on montre d'abord

   $$f_p(a) = f_p(b) \Rightarrow a_0 = b_0. \tag{5.4}$$

   D'abord, si $p = 1$ alors pour tout $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_0, \{0, 1\}]$ on a $f_1(a) = 2 + a_0$ ainsi (5.4) est vérifiée, on peut donc supposer $p > 1$. On montre alors que (5.4) provient du fait que si $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \{0, 1\}]$ alors a_0 est le reste de la division de $f_p(a)$ par 2. En effet :

   (a) d'après le lemme [5.8] page 108 par définition de $\sum$ on a

   $$f_p(a) = 2^p + a_0 + \sum_{k=1}^{p-1} a_k 2^k = a_0 + 2(2^{p-1} + \sum_{j=0}^{p-2} a_{j+1} 2^j)$$

   ainsi, si φ_2 est l'application de $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

   $$\varphi_2(q, r) = r + 2q$$

   on obtient

   $$f_p(a) = \varphi_2(2^{p-1} + \sum_{j=0}^{p-2} a_{j+1} 2^j, a_0),$$

et

$$f_p(b) = \varphi_2(2^{p-1} + \sum_{j=0}^{p-2} b_{j+1}2^j, b_0).$$

En particulier l'égalité $f_p(a) = f_p(b)$ entraîne

$$f_p(a) = \varphi_2(2^{p-1} + \sum_{j=0}^{p-2} a_{j+1}2^j, a_0) = f_p(b) = \varphi_2(2^{p-1} + \sum_{j=0}^{p-2} b_{j+1}2^j, b_0) \tag{5.5}$$

(b) Le lemme [5.4] page 98 permet d'affirmer que φ_2 est bijective.Ainsi, l'injectivité de φ_2 et l'égalité (5.5) entraînent $a_0 = b_0$

Pour finir on montre

$$f_p(a) = f_p(b) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}_{p-1}\ a_k = b_k. \tag{5.6}$$

En effet, si $U = \{k \in \mathbb{N}_{p-1} / a_k \neq b_k\}$ on montre que l'assertion $U \neq \varnothing$ entraîne une assertion fausse. Si U est non vide alors il possède un plus petit élément qu'on note m. D'après (5.4) on a $m > 0$, et par définition de m on a $a_k = b_k$ si $k \leq m-1$.

(a) Si $m = p-1$ alors pour tout $k \in [0, p-1[$ on a $a_k = b_k$ par suite l'égalité $f_p(a) = f_p(b)$ entraîne $a_{p-1}2^{p-1} = b_{p-1}2^{p-1}$ ainsi on obtient l'assertion fausse $m \in U \cap U^c$

(b) si $m < p-1$ on remarque encore que le quotient de la division de $f_p(a)$ par 2^m est $f_{p-m}(\tau_m(a))$. En effet, d'après le lemme [5.8] page 108

$$f_p(a) = 2^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k 2^k = 2^p + \sum_{k=0}^{m-1} a_k 2^k + \sum_{k=m}^{m-1} a_k 2^k$$

et le lemme [5.8] permet d'affirmer

$$\sum_{k=m}^{p-1} a_k 2^k + 2^p = 2^m(\sum_{j=0}^{p-1-m} a_{j+m}2^j + 2^{p-m}) = 2^m f_{p-m}(\tau_m(a))$$

ainsi on obtient

$$f_p(a) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k 2^k + 2^m f_{p-m}(\tau_m(a)),$$

comme d'après (i)

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k 2^k < 2^m,$$

si φ_{2^m} est l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{2^m-1}$ dans $\mathbb{N}$ défini par

$$\varphi_{2^m}(q, r) = r + 2^m q$$

on obtient

$$f_p(a) = \varphi_{2^m}(f_{p-m}(\tau_m(a)), \sum_{k=0}^{m-1} a_k 2^k)$$

et

$$f_p(b) = \varphi_{2^m}(f_{p-m}(\tau_m(b)), \sum_{k=0}^{m-1} b_k 2^k).$$

Ainsi, l'égalité $f_p(a) = f_p(b)$ se traduit par

$$\varphi_{2^m}(f_{p-m}(\tau_m(a)), \sum_{k=0}^{m-1} a_k 2^k) = \varphi_{2^m}(f_{p-m}(\tau_m(b)), \sum_{k=0}^{m-1} b_k 2^k).$$

Or le lemme [5.4] page 98 permet d'affirmer que φ_{2^m} est injective par suite

$$f_p(a) = f_p(b) \Rightarrow f_{p-m}(\tau_m(a)) = f_{p-m}(\tau(b))$$

et (5.4) permet alors d'affirmer que

$$a_m = \tau_m(a)_0 = \tau_m(b)_0 = b_m,$$

et on a encore $m \in U \cap U^c$.

Ainsi l'assertion $U \neq \varnothing$ entraîne l'assertion fausse $U \cap U^c \neq \varnothing$ par suite $U = \varnothing$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_{p-1}$ on a $a_k = b_k$.

3. D'abord il est clair que si $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \{0,1\}]$ alors $f_p(a) \geq 2^p$ et *1.* permet d'affirmer que $f_p(a) < 2^{p+1}$ par suite $\mathrm{im}(f_p) \subset [2^p, 2^{p+1}[$. Pour voir l'inclusion inverse on considère l'ensemble

$$H = \{j \in \mathbb{N}_{2^p-1} / 2^p + j \in \mathrm{im}(f_p)\},$$

et on montre que $H = \mathbb{N}_{2^p-1}$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

(a) $0 \in H$

(b) $j \in H$ *et* $j < 2^p - 1 \Rightarrow j + 1 \in H$.

(a) Si $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \{0,1\}]$ est défini par $[\forall k \in \mathbb{N}_{p-1}\ a_k = 0]$ alors on a $2^p = f_p(a)$ par suite $0 \in H$

(b) Si $j \in H \cap [0, 2^p - 1[$ il existe $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \{0,1\}]$ tel que $2^p + j = f_p(a)$, pour cet a l'ensemble

$$V = \{k \in \mathbb{N}_{p-1} / a_k = 0\}$$

est non vide. En effet, si $V = \varnothing$ alors $\forall k \in \mathbb{N}_{p-1}\ a_k = 1$ par suite

$$f_p(a) = 2^p + \sum_{k=0}^{p-1} 2^k = 2^{p+1} - 1$$

et $j = 2^p - 1$ or par hypothèse $j < 2^p - 1$. Posons

$$m = \min_O \{k : k \in V\}$$

i. si $m = 0$ alors $a_0 = 0$ par suite

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k 2^k = \sum_{k=1}^{p-1} a_k 2^k$$

et l'application $b \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \{0,1\}]$ définie par

$$b_k = \begin{cases} 1 & si \quad k = 0 \\ a_k & si \quad k \geq 1 \end{cases}$$

vérifie

$$2^p + j + 1 = f_p(b) = 2^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} a_k 2^k$$

ii. Si $0 < m < p-1$ alors puisque $[k \leq m-1 \Rightarrow a_k = 1]$ on obtient

$$f_p(a) = 2^p + \sum_{k=0}^{m-1} 2^k + \sum_{k=m}^{p-1} a_k 2^k = 2^p + 2^m - 1 + \sum_{k=m}^{p-1} a_k 2^k$$

mais $a_m = 0$ par suite

$$f_p(a) = 2^p + 2^m - 1 + \sum_{k=m+1}^{p-1} a_k 2^k$$

et l'application $b \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \{0,1\}]$ définie par

$$b_k = \begin{cases} 0 & si \quad k \leq m-1 \\ 1 & si \quad k = m \\ a_k & si \quad k \geq m+1 \end{cases}$$

vérifie

$$f_p(b) = 2^p + \sum_{k=0}^{p-1} b_k 2^k = 2^p + 2^m + \sum_{k=m+1}^{p-1} a_k 2^k = f_p(a) + 1 = 2^p + j + 1$$

iii. Si $m = p-1$ alors

$$f_p(a) = 2^p + \sum_{k=0}^{m-1} 2^k = 2^p + 2^m - 1 = 2^p + 2^{p-1} - 1$$

par suite

$$f_p(a) + 1 = 2^p + 2^{p-1}$$

et l'application $b \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \{0,1\}]$ définie par

$$b_k = \begin{cases} 0 & si \quad k < p-1 \\ 1 & si \quad k = p-1 \end{cases}$$

vérifie

$$f_p(b) = f_p(a) + 1 = 2^p + j + 1$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}_{2^p-1}$ on a $2^p + k \in \mathrm{im}(f_p)$,par suite

$$[2^p, 2^{p+1}[\subset \mathrm{im}(f_p).$$

(iii)

Puisque $n \geq 2$ on a $1 \in A(n)$ par suite $A(n) \neq \varnothing$ et d'après le lemme [5.5] page 99 l'inégalité $k \leq 2^k$ est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$, ainsi l'entier n est un majorant de $A(n)$ puisque

$$k \in A(n) \Rightarrow k \leq 2^k \leq n.$$

Si $n \geq 2$ alors $1 \in A(n)$ par suite $p(n) \geq 1$ et on obtient $p(n) \in \mathbb{N}^*$. Par définition de $p(n)$, $p(n) \in A(n)$ et $p(n)+1 \notin A(n)$ par suite $2^{p(n)} \leq n$ et $n < 2^{p(n)+1}$, Ainsi on obtient $n \in [2^{p(n)}, 2^{p(n)+1}[$ et par (ii)

$$[2^{p(n)}, 2^{p(n)+1}[= \mathrm{im}(f_{p(n)}),$$

ce qui montre que $n \in [2 \rightarrow [\Rightarrow \ n \in \mathrm{im}(f_{p(n)})$. Par suite il existe un certain $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p(n)-1}, \{0,1\}]$ tel que

$$n = f_{p(n)}(a) = 2^{p(n)} + \sum_{k=0}^{p(n)-1} a_k 2^k.$$

L'unicité de a est assurée par l'injectivité de $f_{p(n)}$. ■

Si $n \geq 2$ et
$$n = 2^{p(n)} + \sum_{k=0}^{p(n)-1} a_k 2^k$$
est la représentation de n du lemme [5.11] page 115 l'usage veut que l'on écrive n sous la forme abrégé
$$n = 1a_{p(n)-1}...a_1a_0$$
et pour bien préciser que c'est en rapport avec des puissances de 2 on écrit
$$n = [1a_{p(n)-1}...a_1a_0]_2$$
ainsi on peut exprimer les entiers naturels comme une compilation de 0 et de 1. Par exemple on a
- $2 = 1 \times 2 + 0 \times 2^0 = [10]_2$
- $s(2) = 2 + 1 = 1 \times 2 + 1 \times 2^0 = [11]_2$
- $s([11]_2) = [11]_2 + 1 = 1 \times 2 + 1 + 1 = 2 \times 2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0 \times 2^0 = [100]_2$
- $s([100]_2) = 1 \times 2^2 + 1 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 2^0 = [101]_2$.

Une généralisation triviale du lemme [5.11] page 115 permet d'introduire la numération dite « décimale ».

Numération en base b

Si b est un entier strictement supérieur à 1 on note $\mathbb{N}^*_{b-1} = \{k \in \mathbb{N}_{b-1}/k \neq 0\}$, On montre dans le lemme qui suit que si $n \in [b, \rightarrow [$ et si $p(n) = \max\{k : b^k \leq n\}$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*_{b-1}$ et $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p(n)-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ tel que
$$n = \alpha b^{p(n)} + \sum_{k=0}^{p(n)-1} a_k b^k$$

Lemme 5.12 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels.*
(i) Si $b \in [1, \rightarrow [$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$
$$(b-1)\sum_{k=0}^{p} b^k = b^{p+1} - 1.$$
(ii) Si $b \in [2, \rightarrow [$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathbb{N}^*_{b-1} = \{k \in \mathbb{N}_{b-1}/k \neq 0\}$ et g_p l'application de $\mathbb{N}^*_{b-1} \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ dans $\mathbb{N}$ définie par
$$g_p(\alpha, a) = \alpha b^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k b^k.$$
L'application g_p possède les propriété suivantes

1. $$\forall(\alpha, a) \in \mathbb{N}^*_{b-1} \times \mathrm{A}[\mathrm{N_{p-1}}, \mathrm{N_{b-1}}] \quad g_p(\alpha, a) < b^{p+1}$$
2. *g_p est injective*
3. $\mathrm{im}(g_p) = [b^p, b^{p+1}[$

(iii) si $n \in [b, \rightarrow [$ alors l'ensemble
$$A(n) = \{k \in \mathbb{N}/b^k \leq n\}$$
est non vide majoré et l'application p de $[b, \rightarrow [$ dans $\mathbb{N}$ définie par
$$p(n) = \max_O\{k : k \in A(n)\}$$

est une application à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ *qui vérifie : pour tout* $n \in [b, \to [$ *il existe un unique couple* $(\alpha, a) \in \mathbb{N}_{b-1}^* \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ *tel que*

$$n = \alpha b^{p(n)} + \sum_{k=0}^{p(n)-1} a_k b^k.$$

Preuve

(i)

On pose

$$H = \{p \in \mathbb{N} / (b-1) \sum_{k=0}^{p} b^k = b^{p+1} - 1\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. Il est clair que $0 \in H$ puisque $\sum_{k=0}^{0} b^k = b^0 = 1$,
2. on montre maintenant $[p \in H \Rightarrow p+1 \in H]$. en effet,
   — par définition de $\sum$ on a

$$(b-1) \sum_{k=0}^{p+1} b^k = (b-1)(b^{p+1} + \sum_{k=0}^{p} b^k) = (b-1)b^{p+1} + (b-1) \sum_{k=0}^{p} b^k$$

   — puisque $p \in H$ on a

$$(b-1) \sum_{k=0}^{p} b^k = b^{p+1} - 1$$

   par suite

$$(b-1) \sum_{k=0}^{p+1} b^k = (b-1)b^{p+1} + b^{p+1} - 1 = b^{(p+1)+1} - 1.$$

Ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$

(ii)

1. Si $(\alpha, a) \in \mathbb{N}_{b-1}^* \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ alors $\alpha \leq b-1$ et

$$[\forall k \in \mathbb{N}_{p-1} \ a_k b^k \leq (b-1) b^k]$$

   par suite, d'après le lemme [5.7] page 104,

$$g_p(\alpha, a) \leq (b-1)(b^p + \sum_{k=0}^{p-1} b^k)$$

   et on vient de voir (en (i)) que

$$(b-1)(b^p + \sum_{k=0}^{p-1} b^k) = (b-1) \sum_{k=0}^{p} b^k = b^{p+1} - 1.$$

2. Pour montrer que g_p est injective on montre d'abord

$$g_p(\alpha, a) = g_p(\beta, h) \Rightarrow a_0 = h_0 \tag{5.7}$$

   et cela provient du fait que si $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ et $\alpha \in \mathbb{N}_{b-1}^*$ alors a_0 est le reste de la division de $g_p(\alpha, a)$ par b. En effet,

— si $p = 1$ pour tout $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_{b-1}]$ on a

$$g_1(\alpha, a) = \alpha b + a_0$$

— si $p > 1$ d'après le lemme [5.8] page 108 on a

$$a_0 + \sum_{k=1}^{p-1} a_k b^k = a_0 + \sum_{k=0}^{p-2} a_{k+1} b^{k+1} = a_0 + b \sum_{k=0}^{p-2} a_{k+1} b^k$$

par suite

$$g_p(\alpha, a) = a_0 + b(\alpha b^{p-1} + \sum_{k=0}^{p-2} a_{k+1} b^k).$$

Ainsi, si φ_b est l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{b-1}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\varphi_b(q, r) = r + bq$$

on obtient

$$g_p(\alpha, a) = \varphi_b(\alpha b^{p-1} + \sum_{k=0}^{p-2} a_{k+1} b^k, a_0)$$

et

$$g_p(\beta, h) = \varphi_b(\beta b^{p-1} + \sum_{k=0}^{p-2} h_{k+1} b^k, h_0),$$

par suite l'égalité $g_p(\alpha, a) = g_p(\beta, h)$ se traduit par
— si $p = 1$ alors

$$\varphi_b(\alpha, a_0) = g_1(\alpha, a) = g_1(\beta, h) = \varphi_b(\beta, h_0) \tag{5.8}$$

— si $p > 1$

$$\varphi_b(\alpha b^{p-1} + \sum_{k=0}^{p-2} a_{k+1} b^k, a_0) = \varphi_b(\beta b^{p-1} + \sum_{k=0}^{p-2} h_{k+1} b^k, h_0). \tag{5.9}$$

Or, le lemme 5.4 page 98 permet d'affirmer que φ_b est injective, en particulier les égalités (5.8) et (5.9) entraînent $a_0 = h_0$. De plus l'égalité (5.8) montre que g_1 est injective, Plus généralement on montre

$$g_p(\alpha, a) = g_p(\beta, h) \Rightarrow \alpha = \beta \tag{5.10}$$

en identifiant α comme le quotient de la division par b^p de $g_p(\alpha, a)$. En effet, puisque si $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ on a $[\forall k \in \mathbb{N}_{p-1}\ a_k \leq b - 1]$ le lemme [5.7] page 104 permet alors d'affirmer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k b^k \leq (b-1) \sum_{k=0}^{p-1} b^k$$

et (i) permet alors d'affirmer

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k b^k < b^p$$

par suite si φ_{b^p} est l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{b^p-1}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\varphi_{b^p}(q, r) = q b^p + r$$

on obtient

$$g_p(\alpha, a) = \varphi_{b^p}(\alpha, \sum_{k=0}^{p-1} a_k b^k).$$

par suite l'égalité $g_p(\alpha,a)=g_p(\beta,h)$ se traduit par

$$\varphi_{b^p}(\alpha,\sum_{k=0}^{p-1}a_kb^k)=\varphi_{b^p}(\beta,\sum_{k=0}^{p-1}h_kb^k). \tag{5.11}$$

Mais le lemme 5.4 page 98 permet d'affirmer que φ_{b^p} est injective, en particulier l'égalité (5.11)) entraînent $\alpha=\beta$.
Pour finir on montre

$$g_p(\alpha,a)=g_p(\alpha,h)\Rightarrow[\forall k\in\mathbb{N}_{p-1}\ a_k=h_k] \tag{5.12}$$

On montre que si $g_p(\alpha,a)=g_p(\beta,h)$ l'ensemble

$$U=\{k\in\mathbb{N}_{p-1}/a_k\neq h_k\}$$

est vide. Si U est non vide il possède un plus petit élément qu'on note m. D'après (5.7) page 121 on a $m>0$ (en particulier $p>1$).

(a) si $m=p-1$ alors, puisque $[k\in[0,p-1[\Rightarrow\ a_k=h_k]$ l'égalité $g_p(\alpha,a)=g_p(\alpha,h)$ se traduit par

$$\alpha b^p+a_mb^m=\alpha b^p+h_mb^m$$

par suite $a_m=h_m$ et $m\in U\cap U^c$.

(b) Si $m<p-1$ il résulte du lemme [5.8] page 108 que

$$\sum_{k=0}^{p-1}a_kb^k=\sum_{k=0}^{m-1}a_kb^k+\sum_{k=m}^{p-1}a_kb^k=\sum_{k=0}^{m-1}a_kb^k+b^m\sum_{k=0}^{p-1-m}a_{k+m}b^k$$

par suite

$$g_p(\alpha,a)=\sum_{k=0}^{m-1}a_kb^k+b^m(\alpha b^{p-m}+\sum_{k=0}^{p-1-m}a_{k+m}b^k),$$

en d'autres termes on obtient

$$g_p(\alpha,a)=\sum_{k=0}^{m-1}a_kb^k+b^mg_{p-m}(\alpha,\tau_ma). \tag{5.13}$$

Il résulte de l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{m-1}a_kb^k\leq(b-1)\sum_{k=0}^{m-1}b^k<b^m$$

qu'on peut identifier $g_{p-m}(\alpha,\tau_ma)$ comme le quotient de la division de $g_p(\alpha,a)$ par b^m. Autrement dit si φ_{b^m} est l'application de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_{b^m-1}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\varphi_{b^m}(q,r)=qb^m+r$$

on a

$$g_p(\alpha,a)=\varphi_{b^m}(g_{p-m}(\alpha,\tau_ma),\sum_{k=0}^{m-1}a_kb^k).$$

Ainsi l'égalité $g_p(\alpha,a)=g_p(\beta,h)$ se traduit par

$$\varphi_{b^m}(g_{p-m}(\alpha,\tau_ma),\sum_{k=0}^{m-1}a_kb^k)=\varphi_{b^m}(g_{p-m}(\beta,\tau_mh),\sum_{k=0}^{m-1}h_kb^k), \tag{5.14}$$

or le lemme [5.4] page 98 assure l'injectivité de φ_{b^m} par suite (5.14) entraîne déjà

$$g_p(\alpha, a) = g_p(\beta, h) \Rightarrow g_{p-m}(\alpha, \tau_m a) = g_{p-m}(\beta, \tau_m h).$$

Or, d'aprés (5.7) page 121, l'égalité $g_{p-m}(\alpha, \tau_m a) = g_{p-m}(\beta, \tau_m h)$ entraîne

$$a_m = (\tau_m a)_0 = (\tau_m h)_0 = h_m.$$

par suite $m \in U \cap U^c$.

Ainsi l'assertion $U \neq \varnothing$ entraîne l'assertion fausse $U \cap U^c \neq \varnothing$ par suite $U = \varnothing$ et g_p est injective.

3. D'abord, puisque $\alpha \in \mathbb{N}_{b-1}^*$ on a $g_p(\alpha, a) \geq b^p$ et le point *1*. montre que $g_p(\alpha, a) < b^{p+1}$ par suite $\mathrm{im}(g_p) \subset [b^p, b^{p+1}[$. Pour montrer l'inclusion inverse on considère l'ensemble

$$H = \{k \in [0, b^{p+1} - b^p - 1]/b^p + j \in \mathrm{im}(g_p)\}$$

et on montre que $H = [0, b^{p+1} - b^p - 1]$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

(a) $0 \in H$

(b) $j \in H$ *et* $j < b^{p+1} - b^p - 1 \Rightarrow j + 1 \in H$.

(a) Si $a \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ est définie par $[\forall k \in \mathbb{N}_{p-1}\ a_k = 0]$ alors

$$b^p = g_p(1, a)$$

par suite $0 \in H$.

(b) si $j \in H \cap [0, b^{p+1} - b^p - 1[$ alors il existe $(\alpha, a) \in \mathbb{N}_{b-1}^* \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ tel que $b^p + j = g_p(\alpha, a)$, pour montrer que $b^p + j + 1 \in \mathrm{im}(g_p)$ on distingue les cas suivants :

i. l'ensemble $V = \{k \in \mathbb{N}_{p-1}/a_k < b - 1\}$ est vide

ii. l'ensemble $V = \{k \in \mathbb{N}_{p-1}/a_k < b - 1\}$ est non vide.

i. Si $V = \varnothing$ alors $\forall k \in \mathbb{N}_{p-1},\ a_k = b - 1$, par suite

$$b^p + j = g_p(\alpha, a) = \alpha b^p + (b - 1) \sum_{k=0}^{p-1} b^k = \alpha b^p + b^p - 1$$

l'assertion $j < b^{p+1} - b^p - 1$ entraîne $\alpha < b - 1$ ainsi $\alpha + 1 \in \mathbb{N}_{b-1}$ et si $b \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ est définie par $[\forall k \in \mathbb{N}_{p-1}\ b_k = 0]$ on obtient

$$b^p + j + 1 = (\alpha + 1)b^p = g_p(\alpha + 1, b).$$

ii. si $V \neq \varnothing$ alors V possède un plus petit élément qu'on note m.

— Si $m = 0$ alors $a_0 < b - 1$ par suite l'application $h \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ définie par

$$h_k = \begin{cases} a_0 + 1 & si \quad k = 0 \\ a_k & si \quad k > 0 \end{cases}$$

vérifie

$$g_p(\alpha, h) = \alpha b^p + b_0 + \sum_{k=1}^{p-1} h_k b^k = \alpha b^p + a_0 + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} a_k b^k$$

par suite

$$g_p(\alpha, b) = g_p(\alpha, a) + 1 = b^p + j + 1.$$

— si $0 < m < p-1$ alors il résulte de $[k \leq m-1 \Rightarrow a_k = b-1]$ que

$$g_p(\alpha, a) = \alpha b^p + (b-1)\sum_{k=0}^{m-1} b^k + \sum_{k=m}^{p-1} a_k b^k = \alpha b^p + b^m - 1 + \sum_{k=m}^{p-1} a_k b^k$$

par suite

$$g_p(\alpha, a) + 1 = \alpha b^p + (a_m + 1)b^m + \sum_{k=m+1}^{p-1} a_k b^k.$$

Puisque $m \in V$ on a $a_m + 1 \leq b-1$ et l'application $h \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ définie par

$$h_k = \begin{cases} 0 & si \quad k < m-1 \\ a_m + 1 & si \quad k = m \\ a_k & si \quad k \geq m+1 \end{cases}$$

vérifie

$$g_p(\alpha, h) = g_p(\alpha, a) + 1 = b^p + j + 1.$$

— si $m = p-1$ on obtient

$$g_p(\alpha, a) = \alpha b^p + b^{p-1} - 1 + a_{p-1} b^{p-1}$$

et l'application $h \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ définie par

$$h_k = \begin{cases} 0 & si \quad k < p-1 \\ a_{p-1} + 1 & si \quad k = p-1 \end{cases}$$

vérifie

$$g_p(\alpha, b) = g_p(\alpha, a) + 1 = b^p + j + 1.$$

Ainsi $H = [0, b^{p+1} - b^p - 1]$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{im}(g_p) = [b^p, b^{p+1}[.$$

(iii)

Puisque $n \geq b$ on a $1 \in A(n)$ par suite $A(n) \neq \varnothing$ et d'après le lemme [5.5] page 99 l'inégalité $k \leq b^k$ est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$, ainsi l'entier n est un majorant de $A(n)$ puisque

$$k \in A(n) \Rightarrow k \leq b^k \leq n.$$

Si $n \geq b$ alors $1 \in A(n)$ par suite $p(n) \geq 1$ et on obtient $p(n) \in \mathbb{N}^*$. Par définition de $p(n)$, $p(n) \in A(n)$ et $p(n) + 1 \notin A(n)$ par suite $b^{p(n)} \leq n$ et $n < b^{p(n)+1}$, Ainsi on obtient $n \in [b^{p(n)}, b^{p(n)+1}[$ et par (ii)

$$[2^{p(n)}, 2^{p(n)+1}[= \mathrm{im}(g_{p(n)}),$$

ce qui montre que $n \in [b \to [\Rightarrow \quad n \in \mathrm{im}(g_{p(n)})$. Par suite il existe un certain $(\alpha, a) \in \mathbb{N}_{b-1}^* \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_{p(n)-1}, \mathbb{N}_{b-1}]$ tel que

$$n = g_{p(n)}(\alpha, a) = \alpha b^{p(n)} + \sum_{k=0}^{p(n)-1} a_k b^k.$$

L'unicité de (α, a) est assurée par l'injectivité de $g_{p(n)}$. ■

Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels, pour $n \geq b$ si

$$n = \alpha b^{p(n)} + \sum_{k=0}^{p(n)-1} a_k b^k$$

est la représentation du lemme [5.12] page 120 on écrit n sous la forme

$$n = \alpha a_{p(n)-1}...a_1 a_0$$

ou -si on veut préciser que cette représentation est en rapport avec des puissances de b-

$$n = [\alpha a_{p(n)-1}...a_1 a_0]_b,$$

et on dit qu'on a développé n en base b. Ainsi, si on se fixe des symboles typographiques qui représente la section commençante $\mathbb{N}_b$ on peut exprimer tout entier naturel avec les symboles de $\mathbb{N}_{b-1}$. Le lemme [5.11] page 115 permet d'exprimer tout entier naturel avec les symboles

— $0 = \min_O\{n : n \in \mathbb{N}\}$
— $1 = s(0) = \min_O\{n : n \in \mathbb{N}^*\}$
— $2 = s(1) = \min_O\{n :]1, \to [\}$

mais la numération binaire n'est pas commode, on utilise une typographie dite décimale, a savoir

— $3 = s(2) = \min_O\{n : n \in]2, \to [\} = [11]_2$
— $4 = s(3) = \min_O\{n : n \in]3, \to [\} = [100]_2$
— $5 = s(4) = \min_O\{n : n \in]4, \to [\} = [101]_2$
— $6 = s(5) = \min_O\{n : n \in]5, \to [\} = [110]_2$
— $7 = s(6) = \min_O\{n : n \in]6, \to [\} = [111]_2$
— $8 = s(7) = \min_O\{n : n \in]7, \to [\} = [1000]_2$
— $9 = s(8) = \min_O\{n : n \in]8, \to [\} = [1001]_2$
— $10 = s(9) = \min_O\{n : n \in]9, \to [\} = [1010]_2$

Ainsi le lemme [5.12] permet d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe

$$\alpha \in \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\} = \mathbb{N}^*_{10-1}$$

$p \in \mathbb{N}$ et pour $k \leq p - 1$

$$a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\} = \mathbb{N}_{10-1}$$

tel que

$$n = \alpha 10^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k 10^k$$

Chapitre 6

Ensembles finis et dénombrables

6.1 *Introduction*

On veut comparer un ensemble quelconque X a un ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}, O)$.

Théorème 6.1 *on note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels, si* X *est un ensemble alors au moins l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

[cas 1] *il existe une application injective de* X *dans* $\mathbb{N}$ *et aucune application injective de* X *dans* $\mathbb{N}$ *n'est surjective.*

[cas 2] *il existe une application bijective de* X *dans* $\mathbb{N}$

[cas 3] *il existe une application injective de* $\mathbb{N}$ *dans* X *et aucune application injective de* $\mathbb{N}$ *dans* X *n'est surjective..*

Preuve D'après le théorème [2.2] page 55 au moins l'une des assertions suivantes est vérifiée

1. Il existe une application injective de X dans $\mathbb{N}$: $\mathrm{Inj}[X, \mathbb{N}] \cap \mathrm{A}[X, \mathbb{N}] \neq \varnothing$,
2. il existe une application injective de $\mathbb{N}$ dans X : $\mathrm{Inj}[\mathbb{N}, X] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}, X] \neq \varnothing$.

1. Si $\mathrm{Inj}[X, \mathbb{N}] \cap \mathrm{A}[X, \mathbb{N}] \neq \varnothing$ alors on a l'alternative suivante pour l'ensemble $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}]$ des bijections de X dans $\mathbb{N}$
   (a) Si $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}] = \varnothing$ alors [**cas 1**] est vérifiée,
   (b) si $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}] \neq \varnothing$ alors [**cas 2**] est vérifiée,
2. Si $\mathrm{Inj}[\mathbb{N}, X] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}, X] \neq \varnothing$ alors :
   (a) Si $\mathrm{B}[\mathbb{N}, X] = \varnothing$ [**cas 3**] est vérifiée,
   (b) si $\mathrm{B}[\mathbb{N}, X] \neq \varnothing$ [**cas 2**] est vérifiée,

■

Lorsque X est muni d'un bon ordre on peut remplacer application injective par application srictement croissante.

Théorème 6.2 *on note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels, si* (X, O_X) *est un ensemble bien ordonné alors au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

[cas 1'] *il existe une application strictement croissante de* (X, O_X) *dans* $(\mathbb{N}, O)$ *dont l'image est une section commençante de* $(\mathbb{N}, O)$ *différente de* $\mathbb{N}$ *.*

[cas 2'] *il existe une application bijective strictement croissante de* (X, O_X) *dans* $(\mathbb{N}, O)$

[cas 3'] *il existe une application strictement croissante de* $(\mathbb{N}, O)$ *dans* (X, O_X) *dont l'image est une section commençante de* (X, O_X) *différente de* X*.*

Preuve On rappelle que si (X, O_X) et (Y, O_Y) sont des ensembles ordonnés $\mathrm{Iso}[X, Y]$ est l'ensemble des fonctions strictements croissantes de (X, O_X) dans (Y, O_Y) dont le domaine est une section commençante de (X, O_X) et l'image une section commençante de (Y, O_Y). Le théorème [3.1] page 63 montre que au moins l'une des assertions suivantes est vérifiée :

1. $\mathrm{Iso}[X, \mathbb{N}] \cap \mathrm{A}[X, \mathbb{N}]$ contient un et un seul élément,
2. $\mathrm{Iso}[\mathbb{N}, X] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}, X]$ contient un et un seul élément,

1. Si $\mathrm{Iso}[X, \mathbb{N}] \cap \mathrm{A}[X, \mathbb{N}] \neq \varnothing$ alors
   — si l'élément f de $\mathrm{Iso}[X, \mathbb{N}] \cap \mathrm{A}[X, \mathbb{N}]$ vérifie $\mathrm{im}(f) \neq \mathbb{N}$ alors [**cas 1′**] est vérifiée
   — si l'élément f de $\mathrm{Iso}[X, \mathbb{N}] \cap \mathrm{A}[X, \mathbb{N}]$ vérifie $\mathrm{im}(f) = \mathbb{N}$ alors [**cas 2′**] est vérifiée
2. Si $\mathrm{Iso}[\mathbb{N}, X] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}, X] \neq \varnothing$ alors
   — si l'élément g de $\mathrm{Iso}[\mathbb{N}, X] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}, X]$ vérifie $\mathrm{im}(g) \neq X$ alors [**cas 3′**] est vérifiée
   — si l'élément g de $\mathrm{Iso}[\mathbb{N}, X] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}, X]$ vérifie $\mathrm{im}(g) = X$ alors [**cas 2′**] est vérifiée puisque g^{-1} est une bijection strictement croissante de X dans $\mathbb{N}$.

■

Remarquons que si la condition [**cas 1′**] est vérifiée alors le lemme [5.10] page 111 permet d'affirmer, puisque toute section commençante de $\mathbb{N}$ différente de $\mathbb{N}$ est de la forme $\mathbb{N}_n$ pour un certain n, qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$. Ce type d'ensemble peut être identifié par une propriété intrinsèque qu'on étudie dans la section suivante.

6.2 *Définition et premières propriétés des ensembles finis*

Un ensemble X est fini s'il ne possède pas de sous-ensemble strict en bijection avec lui.

Définition 6.1 *Un ensemble X est dit **fini** s'il possède la propriété suivante :*

$$A \in \mathcal{P}(X) \text{ et } \mathrm{B}[X, A] \neq \varnothing \Rightarrow A = X.$$

Le théorème qui suit montre qu'un ensemble non vide X est fini si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$.

Théorème 6.3 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels.*

(i) Si X est un ensemble fini et Y est un sous-ensemble de X alors Y est fini.

(ii) Si X est un ensemble fini et Y est un ensemble tel que $\mathrm{B}[X, Y] \neq \varnothing$ alors Y est fini.

(iii) Si X est un ensemble et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$ alors X est fini.

(iv) $\mathbb{N}$ n'est pas fini et pour qu'un sous-ensemble non vide X de $\mathbb{N}$ soit fini il faut et il suffit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$, l'entier naturel n est alors unique.

*(v) Si X est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ **non majoré** il existe une application bijective de X dans $\mathbb{N}$.*

(vi) Si X est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ alors :

1. *soit X est fini et majoré*
2. *soit X n'est pas fini et il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans X.*

(vii) Pour qu'un ensemble non vide X soit fini il faut et il suffit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing.$$

l'entier n est alors unique.
*(viii) Si X est un ensemble **non fini** alors il existe une application injective de $\mathbb{N}$ dans X. Si De plus, il*

existe une application injective de X dans $\mathbb{N}$ alors il existe une bijection de X dans $\mathbb{N}$.
(ix) Si X et Y sont des ensembles finis tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing \text{ et } \mathrm{B}[Y, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$$

alors :

1. *toute application injective de X dans Y est une bijection,*
2. *toute application surjective de X dans Y est une bijection.*

(x) Si X est un ensemble et Y est un ensemble fini

1. *s'il existe une appplication injective de X dans Y alors X est fini,*
2. *s'il existe une application surjective de Y dans X alors X est fini.*

(xi) Si X est un ensemble fini et Y est un ensemble, pour toute application f de X dans Y l'ensemble $f(X) = \mathrm{im}(f)$ est fini.

Preuve

(i)

Soit A un sous-ensemble de Y tel que $\mathrm{B}[Y, A] \neq \varnothing$, si $g \in \mathrm{B}[Y, A]$ et si on note $Y^c = \{x \in X / x \notin Y\}$ l'application f de X dans $Y^c \cup A$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in Y^c \\ g(x) & si \quad x \in Y \end{cases}$$

est une bijection dont l'application réciproque est l'application de $Y^c \cup A$ dans X définie par

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in Y^c \\ g^{-1}(x) & si \quad x \in A \end{cases}$$

en particulier on obtient

$$\mathrm{B}[Y, A] \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{B}[X, Y^c \cup A] \neq \varnothing.$$

l'hypothèse que X est fini montre alors

$$\mathrm{B}[Y, A] \neq \varnothing \Rightarrow X = Y^c \cup A$$

par suite puisque l'égalité $X = Y^c \cup A$ entraîne $A = Y$ on conclut

$$\mathrm{B}[Y, A] \neq \varnothing \Rightarrow A = Y,$$

ce qui montre que Y est fini.

(ii)

Soit A un sous-ensemble de Y tel que $\mathrm{B}[Y, A] \neq \varnothing$, on montre que pour tout $g \in \mathrm{B}[X, Y]$ on a $\mathrm{B}[X, g^{-1}(A)] \neq \varnothing$. En effet, si $f \in \mathrm{B}[Y, A]$ l'application $u = g^{-1} \circ f \circ g$ est une bijection de X dans $g^{-1}(A)$. Ainsi on obtient

$$\mathrm{B}[Y, A] \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{B}[X, g^{-1}(A)] \neq \varnothing$$

l'hypothèse que X est fini montre donc

$$\mathrm{B}[Y, A] \neq \varnothing \Rightarrow X = g^{-1}(A) \Rightarrow Y = g(X) = g(g^{-1}(A)) = A.$$

par suite Y est fini.

(iii)

D'après *(ii)* il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathbb{N}_n$ est fini. Puisque $\mathbb{N}_0 = \{0\}$ le seul sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}_0$ est lui-même, par suite $\mathbb{N}_0$ est fini. Si $n \geq 1$ on montre que l'assertion ≪ $\mathbb{N}_n$ non fini ≫ entraîne qu'il existe une injection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_{n-1}$. En effet, si $\mathbb{N}_n$ n'est pas fini il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{N}_n$ qui vérifie

— $A \neq \mathbb{N}_n$
— $\mathrm{B}[\mathbb{N}_n, A] \neq \varnothing$.

Puisque $A \neq \mathbb{N}_n$ il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $A \subset \mathbb{N}_n \setminus \{k\}$ où par définition $\mathbb{N}_n \setminus \{k\} = \{p \in \mathbb{N}_n / p \neq k\}$. Le lemme [5.10] page 111 permet d'affirmer qu'il existe une bijection f de $\mathbb{N}_n \setminus \{k\}$ dans $\mathbb{N}_{n-1}$, par suite si $g \in \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, A]$ l'application $f \circ g$ est une application injective de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_{n-1}$. Le lemme [5.10] montre qu'il n'existe pas d'application injective de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_{n-1}$, ainsi l'assertion ≪ $\mathbb{N}_n$ non fini ≫ entraîne une assertion fausse, par suite $\mathbb{N}_n$ est fini.

(iv)

D'abord puisque l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par $n \mapsto n+1$ est bijective, $\mathbb{N}$ n'est pas fini. On montre maintenant que tout sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}_n$ pour un unique $n \in \mathbb{N}$.

Preuve de l'existence

Si X est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, on le munit de l'ordre induit $O_X = O \cap (X \times X)$, ainsi l'ensemble (X, O_X) est bien ordonné. Le théorème [6.2] page 127 permet d'affirmer que au moins l'une des assertions suivantes est vérifiée

[cas 1'] il existe une application strictement croissante de (X, O_X) dans $(\mathbb{N}, O)$ dont l'image est une section commençante de $(\mathbb{N}, O)$ différente de $\mathbb{N}$.

[cas 2'] il existe une application bijective strictement croissante de (X, O_X) dans $(\mathbb{N}, O)$

[cas 3'] il existe une application strictement croissante de $(\mathbb{N}, O)$ dans (X, O_X) dont l'image est une section commençante de (X, O_X) différente de X.

On montre que lorsque X est fini les assertions [**cas 2′**] et [**cas 3′**] ne sont pas vérifiées. En effet, si [**cas 2′**] etait vérifiée alors d'après *(ii)* $\mathbb{N}$ serait fini comme étant en bijection avec un ensemble fini. Si [**cas 3′**] était vérifiée et f est une application strictement croissante de $(\mathbb{N}, O)$ dans (X, O_X) alors $f(\mathbb{N})$ est fini comme sous-ensemble de l'ensemble fini X ainsi $\mathbb{N}$ serait fini comme étant en bijection avec l'ensemble fini $f(\mathbb{N})$. Ainsi lorsque X est fini l'assertion [**cas 1′**] est vérifiée et il existe une application strictement croissante f de (X, O_X) dans $(\mathbb{N}, O)$ dont l'image est une section commençante de $\mathbb{N}$ différente de $\mathbb{N}$. Puisque d'après le lemme [5.10] page 111 de telles sections sont de la forme $\mathbb{N}_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on obtient $\mathrm{im}(f) = \mathbb{N}_n$ par suite $f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n]$.

Preuve de l'unicité

Si $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifie $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$ et $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_m] \neq \varnothing$, alors pour tout $f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n]$ et $g \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_m]$ l'application $g \circ f^{-1}$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m$ et le lemme [5.10] page 111 permet d'affirmer que l'existence d'une telle bijection entraîne $n = m$.

(v)

Si X n'est pas majoré alors $\forall x \in X$ l'ensemble $X \cap]x \rightarrow [$ est non vide, par suite il possède un minimum. On considère l'application s_X de X dans X définie par

$$s_X(x) = \min_O\{n : n \in X \cap]x, \rightarrow [\},$$

si $h_{\mathbb{N}}(X) = \min_O\{k : k \in X\}$ alors le théorème d'induction (théorème [4.3] page 80) permet d'affirmer qu'il existe une application g de $\mathbb{N}$ dans X qui vérifie :

$$g(0) = h_{\mathbb{N}}(X) \quad \text{et} \quad [\forall n \in \mathbb{N},\ g(n+1) = s_X(g(n))].$$

On montre

1. g est strictement croissante
2. $\mathrm{im}(g) = X$.

1. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ $s_X(g(n)) \in X \cap]g(n), \rightarrow [$ on a
$$\forall n \in \mathbb{N}\ g(n+1) > g(n)$$
ainsi le lemme [5.2] page 87 permet d'affirmer que g est strictement croissante.
2. Pour montrer que $\mathrm{im}(g) = X$ on montre que si
$$A_n = X \cap [h_{\mathbb{N}}(X), h_{\mathbb{N}}(X) + n] = \{x \in X / x \leq h_{\mathbb{N}}(X) + n\}$$
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inclusion $A_n \subset \mathrm{im}(g)$ est vérifiée. Posons
$$H = \{n \in \mathbb{N} / A_n \subset \mathrm{im}(g)\}$$
et montrons que H est héréditaire.
(a) D'abord, puisque $A_0 = \{h_{\mathbb{N}}(X)\}$ et $g(0) = h_{\mathbb{N}}(X)$ on a $0 \in H$.
(b) Ensuite on montre $[A_n \subset \mathrm{im}(g) \Rightarrow A_{n+1} \subset \mathrm{im}(g)]$. Remarquons d'abord que si $h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1$ n'appartient pas à X alors $A_{n+1} = A_n$ par suite l'implication est trivialement vérifiée, on peut donc supposer
$$h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1 \in X. \tag{6.1}$$
et dans ce cas $A_{n+1} = A_n \cup \{h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1\}$.On va voir que si (6.1) est vérifiée et si $x_n = \max_O\{p : p \in A_n\}$ est le plus grand élément de A_n alors
$$h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1 = s_X(x_n) = \min_O\{k : k \in X \cap]x_n, \rightarrow [\}. \tag{6.2}$$
Remarquons que l'existence d'un plus grand élément de A_n est assurée par le lemme [4.3] page 78 et le fait que A_n est majoré par $h_{\mathbb{N}}(X) + n$.
i. D'abord on montre $h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1 \geq \min_O\{k : k \in X \cap]x_n, \rightarrow [\}$. En effet, par hypothèse $h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1 \in X$ et puisque $h_{\mathbb{N}}(X) + n$ est un majorant de A_n on obtient
$$h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1 > h_{\mathbb{N}}(X) + n \geq x_n$$
ainsi $h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1 \in X \cap]x_n, \rightarrow [$.
ii. Ensuite on montre
$$k \in X \cap]x_n, \rightarrow [\Rightarrow k \geq h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1. \tag{6.3}$$
et cela provient de l'égalité
$$X \cap]x_n, \rightarrow [\cap] \leftarrow, h_{\mathbb{N}}(X) + n] = \varnothing,$$
En effet, si $k \in X \cap [\leftarrow, h_{\mathbb{N}}(X) + n]$ alors $k \in A_n$ par suite $k \leq x_n$, ainsi
$$X \cap] \leftarrow, h_{\mathbb{N}}(X) + n] \subset] \leftarrow, x_n]$$
et
$$X \cap]x_n, \rightarrow [\cap] \leftarrow, h_{\mathbb{N}}(X) + n] \subset] \leftarrow, x_n] \cap]x_n, \rightarrow [= \varnothing.$$
en particulier
$$X \cap]x_n, \rightarrow [\subset (] \leftarrow, h_{\mathbb{N}}(X) + n])^c,$$
or cette inclusion est la traduction de l'implication (6.3).

Ainsi l'hypothèse (6.1) entraîne $h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1 = s_X(x_n)$. En particulier si $A_n \subset \mathrm{im}(g)$ alors $x_n \in \mathrm{im}(g)$ par suite il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = g(p)$ et $h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1 = s_X(g(p)) = g(p+1)$, ceci montre que $h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1 \in \mathrm{im}(g)$ par suite $A_{n+1} = A_n \cup \{h_{\mathbb{N}}(X) + n + 1\} \subset \mathrm{im}(g)$.

Ainsi H est héréditaire et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n \subset \mathrm{im}(g)$ par suite

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \mathrm{im}(g) \subset X,$$

et g est une bijection de $\mathbb{N}$ dans X.

(vi)

1. Si X est fini alors X est majoré puisque d'après (v) tout ensemble non majoré est en bijection avec $\mathbb{N}$ qui n'est pas fini.
2. Si X n'est pas fini alors X n'est pas majoré puisque si X est majoré il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X \subset \mathbb{N}_n$ ainsi X est fini comme sous-ensemble d'un ensemble fini, par suite (v) permet d'affirmer que X est en bijection avec $\mathbb{N}$.

(vii)

Preuve de l'existence

D'après le théorème [6.1] page 127, si X est un ensemble alors au moins l'une des assertions suivantes est vérifiée :

[cas 1] il existe une application injective de X dans $\mathbb{N}$ qui n'est pas surjective.

[cas 2] il existe une application bijective de X dans $\mathbb{N}$

[cas 3] il existe une application injective de $\mathbb{N}$ dans X qui n'est pas surjective.

On montre que lorsque X est fini [**cas 2**] et [**cas 3**] ne sont pas vérifiées. En effet, si [**cas 2**] était vérifiée alors $\mathbb{N}$ serait fini comme étant en bijection avec un ensemble fini . Si [**cas 3**] était vérifiée et $g \in \mathrm{Inj}[\mathbb{N}, X] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}, X]$ alors $g(\mathbb{N})$ serait fini comme sous-ensemble d'un ensemble fini et $\mathbb{N}$ serait fini comme étant en bijection avec l'ensemble fini $g(\mathbb{N})$. Ainsi [**cas 1**] est vérifiée et il existe au moins une application $f \in \mathrm{Inj}[X, \mathbb{N}] \cap \mathrm{A}[X, \mathbb{N}]$.

— Puisque $f(X)$ est en bijection avec X, $f(X)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$,

— Puisque $f(X)$ est fini (iv) permet d'affirmer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{B}[f(X), \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$.

Ainsi, si $g \in \mathrm{B}[f(X), \mathbb{N}_n]$ alors $g \circ f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n]$.

Preuve de l'unicité

Si $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifie $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$ et $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_m] \neq \varnothing$, alors pour tout $f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n]$ et $g \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_m]$ l'application $g \circ f^{-1}$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m$ et le lemme [5.10] page 111 permet d'affirmer que l'existence d'une telle bijection entraîne $n = m$.

(viii)

D'après le théorème [2.2] page 55 au moins l'une des assertions suivantes est vérifiée

1. Il existe une application injective de X dans $\mathbb{N}$: $\mathrm{Inj}[X, \mathbb{N}] \cap \mathrm{A}[X, \mathbb{N}] \neq \varnothing$,
2. il existe une application injective de $\mathbb{N}$ dans X : $\mathrm{Inj}[\mathbb{N}, X] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}, X] \neq \varnothing$.

On montre que si X n'est pas fini et 1 est vérifiée il existe une bijection de X dans $\mathbb{N}$. En effet, si $f \in \mathrm{Inj}[X, \mathbb{N}] \cap \mathrm{A}|X, \mathbb{N}]$ alors

— $f(X)$ n'est pas fini sinon X serait fini comme étant en bijection avec l'ensemble fini $f(X)$,

— d'après (vi) tout sous-ensemble non fini de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ ainsi il existe une bijection de $f(X)$ dans $\mathbb{N}$

si g est une bijection de $f(X)$ dans $\mathbb{N}$ alors $g \circ f$ est une bijection de X dans $\mathbb{N}$. Si 1 n'est pas vérifiée alors 2 est vérifié et il existe une application injective de $\mathbb{N}$ dans X

(ix)

On fixe $f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n]$ et $g \in \mathrm{B}[Y, \mathbb{N}_n]$

1. Si $h \in \mathrm{Inj}[X, Y] \cap \mathrm{A}[X, Y]$ alors $g \circ h \circ f^{-1} \in \mathrm{Inj}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n]$ ainsi le lemme [5.10] page 111 permet d'affirmer que $g \circ h \circ f^{-1}$ est une bijection, par suite $h = g^{-1} \circ (g \circ h \circ f^{-1}) \circ f$ est une bijection comme composée de bijections.
2. Si h est une application surjective de X dans Y l'application $g \circ h \circ f^{-1}$ est surjective de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$, ainsi le lemme [5.10] page 111 permet d'affirmer que $g \circ h \circ f^{-1}$ est une bijection, par suite $h = g^{-1} \circ (g \circ h \circ f^{-1}) \circ f$ est une bijection comme composée de bijections.

(x)

1. Si $f \in \mathrm{Inj}[X, Y] \cap \mathrm{A}[X, Y]$ alors $f(X)$ est fini comme sous-ensemble d'un ensemble fini, par suite X est fini comme étant en bijection avec l'ensemble fini $f(X)$.
2. D'après le lemme [2.4] page 49 s'il existe une application surjective de Y dans X il existe une application injective de X dans Y il suffit donc d'appliquer 1.

(xi)

Il est clair que f est une application surjective de l'ensemble fini X dans $f(X)$ il suffit donc d'appliquer (x) ■

Il est facile de montrer que tout sous-ensemble fini d'un ensemble totalement ordonné est bien ordonné pour l'ordre induit. Ainsi le théorème [3.1] page 63 permet de comparer ces ensembles à n'importe quel ensemble bien ordonné, l'objet du lemme suivant est de comparer ces ensembles aux sections commençantes des entiers naturels.

Lemme 6.1 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels et (Y, O_Y) un ensemble totalement ordonné. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $O_n = O \cap (\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n)$ sera l'ordre induit par O sur $\mathbb{N}_n$ et si $A \subset Y$ et $A \neq \varnothing$ on note $O_A = O_Y \cap (A \times A)$ l'ordre induit sur A par O_Y.*
(i) Si A est un sous-ensemble fini non vide de Y alors :

1. *(A, O_A) est bien ordonné.*
2. *A possède un plus grand élément pour l'ordre O_Y.*
3. *si Y est fini alors (Y, O_Y) est bien ordonné*

(ii) Si A est un sous-ensemble fini non vide de Y et si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $\mathrm{B}[A, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$ alors :

1. *il existe une unique bijection strictement croissante de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dans (A, O_A).*
2. *si $p > n$ il n'existe pas d'application strictement croissante de $(\mathbb{N}_p, O_p)$ dans (A, O_A).*

(iii) Si A est un sous-ensemble non fini de Y alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une application strictement croissante de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dans (A, O_A).
(iv) On note

$$\mathrm{stcr}[\mathbb{N}_n, A] = \{g \in \mathrm{Inj}[\mathbb{N}_n, A] \cap \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, A] / (k, p) \in O_n \Rightarrow (g_k, g_p) \in O_A\}$$

l'ensemble des applications strictements croissantes de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dans (A, O_A), pour que A soit fini il faut et il suffit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{strc}[\mathbb{N}_n, A] = \varnothing$
(v) Si X est un ensemble fini et $f \in \mathrm{A}[X, Y]$ est une application de X dans Y il existe $x_* \in X$ tel que

$$f(x_*) = \min_{O_Y}\{y : y \in f(X)\}$$

(vi) Si X est un ensemble fini et $f \in \mathrm{A}[X, Y]$ est une application de X dans Y il existe $x^* \in X$ tel que

$$f(x^*) = \max_{O_Y}\{y : y \in f(X)\}$$

Preuve

(i)

1. On montre d'abord que tout ensemble fini non vide A de Y possède un élément minimum. Puisque A est fini le théorème [6.3] page 128 permet d'affirmer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{B}[\mathbb{N}_n, A] \neq \varnothing$. Si $f \in \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, A]$ et $k \in \mathbb{N}_n$ on note

$$\mathrm{Min}[f(\mathbb{N}_k), O_Y] = \{y \in Y / \forall j \in \mathbb{N}_k \ (y, f_j) \in O_Y\}$$

l'ensemble des minorants de $f(\mathbb{N}_k)$ et

$$U = \{k \in \mathbb{N}_n / f(\mathbb{N}_k) \cap \mathrm{Min}[f(\mathbb{N}_k), O_Y] \neq \varnothing\}$$

l'ensemble des éléments k de $\mathbb{N}_n$ tels que $f(\mathbb{N}_k)$ possède un plus petit élément. On montre que $U = \mathbb{N}_n$, d'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer :

(a) $0 \in U$

(b) $k \in U \ et \ k < n \Rightarrow k + 1 \in U$

(a) D'abord puisque $\mathbb{N}_0 = \{0\}$ on a $f(\mathbb{N}_0) = \{f_0\}$ ainsi f_0 est le plus petit élément de $f(\mathbb{N}_0)$ et $0 \in U$.

(b) Ensuite on montre $[k \in U \ et \ k < n \Rightarrow k + 1 \in U]$. En effet, si $k \in U$ il existe $p \in \mathbb{N}_k$ tel que $f_p = \min_{O_Y}\{y : y \in f(\mathbb{N}_k)\}$.
— puisque f est injective on a $f_p \neq f_{k+1}$,
— puisque (Y, O_Y) est totalement ordonné on obtient $f_p < f_{k+1}$ ou $f_{k+1} < f_p$

i. si $f_p < f_{k+1}$ alors pour tout $j \in \mathbb{N}_{k+1}$ on a $f_p \leq f_j$ par suite

$$f_p = \min_{O_Y}\{y : y \in f(\mathbb{N}_{k+1})\}$$

et $k + 1 \in U$.

ii. si $f_{k+1} < f_p$ alors pour tout $j \in \mathbb{N}_{k+1}$ on a $f_{k+1} \leq f_j$ par suite

$$f_{k+1} = \min_{O_Y}\{y : y \in f(\mathbb{N}_{k+1})\} \ .$$

et $k + 1 \in U$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ l'ensemble $f(\mathbb{N}_k)$ possède un plus petit élément. En particulier, puisque $A = f(\mathbb{N}_n)$, l'ensemble A possède un plus petit élément. Pour démontrer que (A, O_A) est bien ordonné il faut montrer que tout sous-ensemble non vide de A possède un plus petit élément mais si $B \subset A$ alors le théorème [6.3] page 128 permet d'affirmer que B est fini comme sous-ensemble d'un ensemble fini, et on vient de voir que tout sous-ensemble fini de Y possède un plus petit élément.

2. Considérons la relation O_Y^{-1} de Y dans Y définie par

$$O_Y^{-1} = \{(x, y) \in Y \times Y / (y, x) \in O_Y\},$$

alors O_Y^{-1} est une relation d'ordre total sur Y, ainsi *1* permet d'affirmer que tout sous-ensemble non vide fini A de Y possède un plus petit élément pour l'ordre O_Y^{-1}, mais si

$$\alpha = \min_{O_Y^{-1}}\{a : a \in A\}$$

alors

$$\alpha = \max_{O_Y}\{a : a \in A\}$$

puisque

$$(\alpha, a) \in O_Y^{-1} \Leftrightarrow (a, \alpha) \in O_Y.$$

3. Puisque Y est fini et totalement ordonné, le point 1 montre qu'il est bien ordonné.

(ii)

On note g une bijection de A dans $\mathbb{N}_n$.

1. (a) *Preuve de l'existence*

   Puisque d'après (i) l'ensemble ordonné (A, O_A) est bien ordonné le théorème [3.1] page 63 permet d'affirmer que au moins l'une des assertions (φ) ou (τ) suivantes est vérifiée :

   (φ) Il existe une (unique) application strictement croissante de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dans (A, O_A) dont l'image est une section commençante de (A, O_A)

   (τ) Il existe une (unique) application strictement croissante de (A, O_A) dans $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dont l'image est une section commençante de $(\mathbb{N}_n, O_n)$.

   On montre

   i. Si f est une application vérifiant (φ) alors $\mathrm{im}(f) = A$ par suite f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans A.

   ii. Si h est une application vérifiant (τ) alors $\mathrm{im}(h) = \mathbb{N}_n$ par suite h^{-1} est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans A.

   α Soit f une application vérifiant (φ), puisque A est fini il suffit de montrer $\mathrm{B}[\mathrm{im}(f), A] \neq \varnothing$ pour voir que $\mathrm{im}(f) = A$. Or $f^{-1} \in \mathrm{B}[\mathrm{im}(f), \mathbb{N}_n]$ et $g^{-1} \in \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, A]$, par suite $g^{-1} \circ f^{-1}$ est une bijection de $\mathrm{im}(f)$ dans A.

   β De même si h vérifie (τ) alors $g \circ h^{-1}$ est une bijection de $\mathrm{im}(h)$ dans $\mathbb{N}_n$ par suite, puisque $\mathbb{N}_n$ est fini, $\mathrm{im}(h) = \mathbb{N}_n$.

   Ainsi l'existence d'applications qui vérifient (φ) ou (τ) entraîne l'existence d'une bijection strictement croissante de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dans (A, O_A).

   (b) *Preuve de l'unicité*

   Si f et h sont des bijections strictement croissantes de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dans (A, O_A) alors $f^{-1} \circ h$ est une bijection strictement croissante de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dans $(\mathbb{N}_n, O_n)$, ainsi le lemme [5.10] page 111 permet d'affirmer que $f^{-1} \circ h = id_{\mathbb{N}_n}$, par suite $f = h$.

2. Si h est une application strictement croissante de $\mathbb{N}_p$ dans A et f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans A alors $f^{-1} \circ h$ est une application injective de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, ainsi le lemme [5.10] page 111 permet d'affirmer que $p \leq n$.

(iii)

Si A est non fini le théorème [6.3] page 128 permet d'affirmer qu'il existe une application injective φ de $\mathbb{N}$ dans A. Si $n \in \mathbb{N}$ alors la restriction de φ à $\mathbb{N}_n$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans $\varphi(\mathbb{N}_n)$, par suite il existe d'après (ii) une bijection strictement croissante f_n de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dans $(\varphi(\mathbb{N}_n), O_{\varphi(\mathbb{N}_n)})$. L'application f_n est une application strictement croissante de $(\mathbb{N}_n, O_n)$ dans (A, O_A).

(iv)

1. Si A est fini alors d'après le théorème [6.3] page 128 il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{B}[A, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$ et (ii) permet d'affirmer que si $p > n$ on a $\mathrm{strc}[\mathbb{N}_p, A] = \varnothing$.
2. Si A n'est pas fini alors d'après (iii) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{strc}[\mathbb{N}_n, A] \neq \varnothing$.

(v)

Le théorème [6.3] page 128 permet d'affirmer que $f(X)$ est fini, ainsi, d'après (i) l'enemble $f(X)$ possède un plus petit élément $m = \min_{O_Y}\{y : y \in f(X)\}$, puisque $m \in f(X)$ il existe $x_* \in X$ tel que $m = f(x_*)$.

(vi)

Le théorème [6.3] page 128 permet d'affirmer que $f(X)$ est fini, ainsi, d'après (i) l'enemble $f(X)$ possède un plus grand élément $M = \max_{O_Y}\{y : y \in f(X)\}$, puisque $M \in f(X)$ il existe $x^* \in X$ tel que $M = f(x^*)$. ■

6.3 *Cardinaux des ensembles finis*

6.3.1 *Définition et premières propriétés*

Le théorème [6.3] page 128 permet d'affirmer que si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels et X un ensemble fini alors il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$, cette propriété permet de donner une définition.

Définition 6.2 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels, si X est un ensemble fini non vide et $n \in \mathbb{N}$ est l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n] \neq \varnothing$, l'entier $n+1$ est appelé le **cardinal** de l'ensemble X, on le note $\mathrm{Card}(X)$. On note de plus $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.*

Il est clair que le cardinal d'un ensemble fini dépend de l'ensemble d'entiers naturels de référence. Si $\mathrm{Card}(X) = n$ on dit que X est un ensemble à n éléments.

Lemme 6.2 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels, X et Y sont des ensembles non vides et finis.*
(i) $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y) \Leftrightarrow \mathrm{B}[X, Y] \neq \varnothing$.
(ii) Pour que $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$ il faut et il suffit qu'il existe une application injective de X dans Y.
(iii) Pour qu'il existe un application bijective de X dans Y il faut et il suffit qu'il existe une application injective de X dans Y et une application injective de Y dans X
(iv) Si $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alors $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m) = (n+1)(m+1) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}_n)\mathrm{Card}(\mathbb{N}_m).$$

(v) $X \times Y$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(X \times Y) = \mathrm{Card}(X)\mathrm{Card}(Y).$$

(vi) Si $X \cap Y = \varnothing$ alors $X \cup Y$ est fini et

$$\mathrm{Card}(X \cup Y) = \mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(Y)$$

(vii) Si $\mathbf{U}$ est un ensemble et $F \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \mathcal{P}(\mathbf{U})]$ une application vérifiant

1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ F_k est non vide fini,*
2. *$[(i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ et $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \varnothing]$*

alors $\bigcup_{k=0}^{n} F_k$ est fini et

$$\mathrm{Card}(\bigcup_{k=0}^{n} F_k) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(F_k). \tag{6.4}$$

(viii) $X \cup Y$ est fini et

$$\mathrm{Card}(X \cup Y) + \mathrm{Card}(X \cap Y) = \mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(Y). \tag{6.5}$$

Preuve

(i)

1. Si $n + 1 = \mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$ et $f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n]$, $g \in \mathrm{B}[Y, \mathbb{N}_n]$ alors $g^{-1} \circ f \in \mathrm{B}[X, Y]$.
2. Si $\mathrm{Card}(Y) = n + 1$ et $\mathrm{B}[X, Y] \neq \varnothing$, pour tout $f \in \mathrm{B}[X, Y]$ et $g \in \mathrm{B}[Y, \mathbb{N}_n]$ $g \circ f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n]$ par suite $\mathrm{Card}(X) = n + 1$.

(ii)

On pose $\mathrm{Card}(X) = p + 1$, $\mathrm{Card}(Y) = n + 1$ et on fixe des applications

$$f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_p] \text{ et } g \in \mathrm{B}[Y, \mathbb{N}_n]$$

1. Si h est une application injective de X dans Y alors $g \circ h \circ f^{-1}$ est une application injective de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, ainsi le lemme [5.10] page 111 permet d'affirmer que $p \leq n$, par suite $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$.
2. Si $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$ alors $p \leq n$ et si i est l'application de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ définie par $i(k) = k$ alors $g^{-1} \circ i \circ f$ est une application injective de X dans Y.

(iii)

D'après *(ii)* l'existence de telles applications est vérifiée si et seulement si $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y) \leq \text{Card}(X)$ et *(i)* permet alors d'affirmer que $\text{B}[X, Y] \neq \varnothing$.

(iv)

Pour voir *(iv)* il suffit de savoir faire une division. En effet, d'après le lemme [5.4] page 98 l'application φ_{m+1} de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\varphi_{m+1}(q, r) = q(m + 1) + r$$

est une bijection, on montre que

$$\varphi_{m+1}(\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m) = \mathbb{N}_{n(m+1)+m}.$$

En effet,

1. Si $(q, r) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ alors $q \leq n$ et $r \leq m$ par suite $q(m + 1) + r \leq n(m + 1) + m$, ainsi $\varphi_{m+1}(\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m) \subset \mathbb{N}_{n(m+1)+m}$.
2. Si $k \in \mathbb{N}_{n(m+1)+m}$ alors le quotient q de la division de k par $m+1$ est inférieur ou égal à n puisque

$$q > n \Rightarrow k = q(m + 1) + r \geq (n + 1)(m + 1) > n(m + 1) + m$$

par suite $\mathbb{N}_{n(m+1)+m} \subset \varphi_{m+1}(\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m)$.

Ainsi si g est la restriction de φ_{m+1} à $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ alors $g \in \text{B}[\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m, \mathbb{N}_{n(m+1)+m}]$ et on obtient

$$\text{Card}(\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m) = \text{Card}(\mathbb{N}_{n(m+1)+m}) = n(m + 1) + m + 1 = (n + 1)(m + 1)$$

(v)

Si $\text{Card}(X) = n + 1$ et $\text{Card}(Y) = m + 1$, $f \in \text{B}[X, \mathbb{N}_n]$ et $g \in \text{B}[Y, \mathbb{N}_m]$ l'application h de $X \times Y$ dans $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ définie par

$$h(x, y) = (f(x), g(y))$$

est une bijection par suite *(i)* permet d'affirmer que

$$\text{Card}(X \times Y) = \text{Card}(\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m)$$

et il résulte de *(iv)* que

$$\text{Card}(X \times Y) = \text{Card}(\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m) = \text{Card}(\mathbb{N}_n)\text{Card}(\mathbb{N}_m) = \text{Card}(X)\text{Card}(Y).$$

(vi)

Si $\text{Card}(X) = n + 1$ et $\text{Card}(Y) = m + 1$, $f \in \text{B}[X, \mathbb{N}_n]$ et $g \in \text{B}[Y, \mathbb{N}_m]$ l'application h de $X \cup Y$ dans $\mathbb{N}_{n+m+1}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in X \\ g(y) + n + 1 & si \quad y \in Y \end{cases},$$

est une bijection d'inverse

$$h^{-1}(k) = \begin{cases} f^{-1}(k) & si \quad k \in \mathbb{N}_n \\ g^{-1}(k - (n + 1)) & si \quad k \in [n + 1, n + m + 1] \end{cases},$$

ainsi $\mathrm{B}[X \cup Y, \mathbb{N}_{n+m+1}] \neq \varnothing$ par suite $X \cup Y$ est fini et (i) permet d'affirmer :

$$\mathrm{Card}(X \cup Y) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}_{n+m+1}) = (n+m+1)+1$$

or

$$(n+m+1)+1 = (n+1)+(m+1) = \mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(Y).$$

(vii)

On note $\mathbb{F}(\mathbf{U})$ la famille des sous-ensembles finis de $\mathbf{U}$ et

$$H = \left\{ p \in \mathbb{N}_n / \bigcup_{k=0}^{p} F_k \in \mathbb{F}(\mathbf{U}) \ \textit{et} \ \mathrm{Card}(\bigcup_{k=0}^{p} F_k) = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{Card}(F_k) \right\}.$$

On montre que $H = \mathbb{N}_n$, d'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

1. $0 \in H$
2. $[p < n \ \textit{et} \ p \in H \Rightarrow p+1 \in H]$

1. Puisque $\bigcup_{k=0}^{k=0} F_k = F_0$ et $\sum_{k=0}^{k=0} \mathrm{Card}(F_k) = \mathrm{Card}(F_0)$ on a $0 \in H$.
2. Si $p \in H$ et $p < n$, il résulte de (vi) et des égalités

$$\bigcup_{k=0}^{p+1} F_k = \left(\bigcup_{k=0}^{p} F_k\right) \cup F_{p+1} \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_{k=0}^{p} F_k\right) \cap F_{p+1} = \varnothing$$

que $\bigcup_{k=0}^{p+1} F_k \in \mathbb{F}(\mathbf{U})$ et

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=0}^{p+1} F_k\right) = \mathrm{Card}(\bigcup_{k=0}^{p} F_k) + \mathrm{Card}(F_{p+1}).$$

L'assertion $p \in H$ entraîne donc

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=0}^{p+1} F_k\right) = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{Card}(F_k) + \mathrm{Card}(F_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p+1} \mathrm{Card}(F_k)$$

Ainsi $H = \mathbb{N}_n$ et

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(F_k).$$

$(viii)$

Si $X \cap Y = \varnothing$ alors $\mathrm{Card}(X \cap Y) = 0$ ainsi (vi) entraîne l'égalité (6.5).Si $X \cap Y \neq \varnothing$ l'égalité

$$X \cup Y = (X \cap Y^c) \cup (X \cap Y) \cup (X^c \cap Y)$$

entraîne d'après (vii) que $X \cup Y$ est fini et

$$\mathrm{Card}(X \cup Y) = \mathrm{Card}(X \cap Y^c) + \mathrm{Card}(X \cap Y) + \mathrm{Card}(X^c \cap Y)$$

Or les égalités

$$(X \cap Y) \cup (X^c \cap Y) = Y \ \textit{et} \ (X \cap Y) \cap (X \cap Y^c) = \varnothing$$

entraînent d'après (vi)

$$\text{Card}(X \cap Y) + \text{Card}(X^c \cap Y) = \text{Card}(Y).$$

par suite on obtient

$$\text{Card}(X \cup Y) = \text{Card}(X \cap Y^c) + \text{Card}(X \cap Y) + \text{Card}(X^c \cap Y) = \text{Card}(X \cap Y^c) + \text{Card}(Y)$$

Ainsi,

$$\text{Card}(X \cup Y) + \text{Card}(X \cap Y) = \text{Card}(X \cap Y^c) + \text{Card}(X \cap Y) + \text{Card}(Y)$$

Or les égalités

$$(X \cap Y^c) \cup (X \cap Y) = X \ et \ (X \cap Y) \cap (X \cap Y^c) = \varnothing$$

entraînent

$$\text{Card}(X \cap Y) + \text{Card}(X^c \cap Y) = \text{Card}(X).$$

d'où la conclusion

$$\text{Card}(X \cup Y) + \text{Card}(X \cap Y) = \text{Card}(X) + \text{Card}(Y)$$

■

6.3.2 *Analyse combinatoire,dénombrement*

Il est facile de voir que si X et Y sont des ensembles finis l'ensemble $\text{A}[X, Y]$ des applications de X dans Y est un ensemble fini. Le jeu du dénombrement est de calculer le cardinal de cet ensemble et de ces sous-ensembles en fonction des cardinaux de X et Y. Le dénombrement utilise des notations spécifiques qu'on donne maintenant. Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels on note

1. si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $S_n = \text{B}[\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{n-1}]$ est l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}_{n-1}$ dans $\mathbb{N}_{n-1}$
2. Si $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$ alors $\mathfrak{I}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n) = \text{Inj}[\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n] \cap \text{A}[\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n]$ est l'ensemble des applications injectives de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$.
3. Si $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ alors

   $$S_{p,q} = \{\sigma \in S_{p+q} / \sigma(0) < \sigma(1) < ... < \sigma(p-1) \text{ et } \sigma(p) < \sigma(p+1) < ... < \sigma(p+q-1)\}$$

   est l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dans $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dont les restrictions à $\mathbb{N}_{p-1}$ et à $[p, p+q-1]$ sont strictement croissantes.
4. Si $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ Alors

   $$H_q = \{\sigma \in S_{p+q} / \forall k \in \mathbb{N}_{p-1} \ \sigma(k) = k\}$$

   est l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dans $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dont la restriction à $\mathbb{N}_{p-1}$ est l'identité et

   $$G_p = \{\sigma \in S_{p+q} / \forall k \in [p, p+q-1] \ \sigma(k) = k\}$$

   est l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dans $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dont la restriction à $[p, p+q-1]$ est l'identité.
5. Si X est un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$ vérifie $p \leq \text{Card}(X)$ alors

   $$\text{Com}_p(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) / \text{Card}(A) = p\}$$

   est la famille des sous-ensembles de X dont le cardinal est p.
6. Si X et Y sont des ensembles finis vérifiant $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$ alors

   $$\mathfrak{I}(X, Y) = \text{Inj}[X, Y] \cap \text{A}[X, Y]$$

   est l'ensemble des applications injectives de X dans Y.

Le lemme qui suit à pour objet d'établir les premières formules de dénombrement.

Lemme 6.3 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels.*
(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *l'ensemble* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]$ *des applications de* $\mathbb{N}_n$ *dans* $\{0,1\}$ *est fini et*

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]) = 2^{n+1}$$

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *la famille* $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$ *des sous-ensembles de* $\mathbb{N}_n$ *est finie et*

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)) = 2^{n+1}$$

(iii) Si X *est un ensemble fini la famille* $\mathcal{P}(X)$ *des sous-ensembles de* X *est finie et*

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\mathrm{Card}(X)}$$

(iv) Si $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *l'ensemble* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{p-1}]$ *des applications de* $\mathbb{N}_{n-1}$ *dans* $\mathbb{N}_{p-1}$ *est fini et*

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{p-1}]) = p^n$$

(v) Si $X \neq \varnothing$ *et* $Y \neq \varnothing$ *sont des ensembles finis l'ensemble* $\mathrm{A}[X,Y]$ *des applications de* X *dans* Y *est fini et*

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}[X,Y]) = (\mathrm{Card}(Y))^{\mathrm{Card}(X)}$$

(vi) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *(*[1]*)*

$$\mathrm{Card}(S_n) = n!$$

(vii) Si X *est un ensemble fini*

$$\mathrm{Card}(\mathrm{B}[X,X]) = \mathrm{Card}(X)\ !$$

(viii) L'application f_0 *de* $S_{p,q} \times G_p \times H_q$ *dans* S_{p+q} *définie par*

$$f_0(\rho, \sigma_p, \sigma_q) = \rho \circ \sigma_p \circ \sigma_q$$

est une bijection de $S_{p,q} \times G_p \times H_q$ *dans* S_{p+q}*,*
(ix)Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *on a*

$$p!q!\ \mathrm{Card}(S_{p,q}) = p+q!$$

ce qui s'écrit :

$$\mathrm{Card}(S_{p,q}) = \frac{p+q!}{p!q!}.$$

(x) L'application f_1 *de* $S_{p,q}$ *dans* $\mathrm{Com}_p(\mathbb{N}_{p+q-1})$ *définie par*

$$f_1(\rho) = \rho(\mathbb{N}_{p-1})$$

est une bijection, par suite

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Com}_p(\mathbb{N}_{p+q-1})) = \frac{p+q!}{p!q!}$$

(xi) si X *est un ensemble fini de cardinal* n *et* $p \leq n$ *alors*

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Com}_p(X)) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

(xii) il existe une bijection de $\mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})$ *dans* $S_{p,q} \times S_p$ *ainsi*

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})) = \frac{p+q!}{q!}$$

(xiii) Si X *est un ensemble fini de cardinal* p *et* Y *est un ensemble fini de cardinal* n *où* $p \leq n$ *alors*

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{I}(X,Y)) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

1. $n!$ est définie dans le lemme [5.9] page 109

Preuve

(i)

Posons $A_n = \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_1]$ et

$$H = \{n \in \mathbb{N}/\mathrm{B}[A_n, \mathbb{N}_{2^{n+1}-1}] \neq \varnothing\} = \{n \in \mathbb{N}/A_n \textit{ fini et } \mathrm{Card}(A_n) = 2^{n+1}\}.$$

On montre que $H = \mathbb{N}$ en montrant que H est héréditaire.

1. D'abord puisque $\mathbb{N}_0 = \{0\}$ les seules applications de $\mathbb{N}_0$ dans $\mathbb{N}_1 = \{0,1\}$ sont les singletons $\{(0,0)\}$ et $\{(0,1)\}$ de $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_1$ ainsi l'application f de $\mathbb{N}_1$ dans A_0 définie par $f(0) = \{(0,0)\}$ et $f(1) = \{(0,1)\}$ est une bijection de $\mathbb{N}_1$ dans A_1, par suite $0 \in H$.
2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. Pour cela on remarque qu'il existe une bijection de $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, \{0,1\}]$ dans $\{0,1\} \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]$. En effet, si pour $u \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, \{0,1\}]$ on note $\mathrm{R}_n u = u \cap (\mathbb{N}_n \times \{0,1\})$ la restriction de u à $\mathbb{N}_n$, l'application φ de $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, \{0,1\}]$ dans $\{0,1\} \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]$ définie par
$$\varphi(u) = (u(n+1), \mathrm{R}_n u)$$
est une bijection d'inverse l'application $(\varepsilon, v) \mapsto \varphi^{-1}(\varepsilon, v)$ où
$$\varphi^{-1}(\varepsilon, v)(k) = \begin{cases} v(k) & si \quad k \in \mathbb{N}_n \\ \varepsilon & si \quad k = n+1 \end{cases} .$$
Mais l'assertion $n \in H$ entraîne que $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]) = 2^{n+1}$. Ainsi, d'après le lemme 6.2 page 136 l'ensemble $\{0,1\} \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]$ est fini et
$$\mathrm{Card}(\{0,1\} \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]) = \mathrm{Card}(\{0,1\})\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]) = 2^{(n+1)+1}$$
or on vient de voir que $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, \{0,1\}]$ est en bijection avec l'ensemble $\{0,1\} \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]$ par suite $\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, \{0,1\}]) = 2^{(n+1)+1}$ et on obtient $n+1 \in H$.

Ainsi H est héréditaire et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]) = 2^{n+1}$$

(ii)

Considérons l'application f de $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$ définie par

$$f(u) = \{k \in \mathbb{N}_n / u_k = 1\} ,$$

c'est une bijection dont l'inverse est l'application f^{-1} de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]$ définie par

$$f^{-1}(A)(k) = \begin{cases} 1 & si \quad k \in A \\ 0 & si \quad k \in A^c \end{cases} .$$

ainsi le lemme [6.2] page 136 et (i) permettent d'affirmer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$ est fini et

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \{0,1\}]) = 2^{n+1}$$

(iii)

Si $X = \varnothing$ alors l'ensemble vide est le seul sous-ensemble de X et

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{P}(X)) = 1 = 2^{\mathrm{Card}(X)}.$$

Si $\mathrm{Card}(X) = n+1$ et $f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_n]$ alors l'application f^* de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$ définie par

$$f^*(A) = f(A) = \{k \in \mathbb{N}_n / \exists\, x \in A : k = f(x)\}$$

est une bijection d'inverse

$$(f^*)^{-1}(B) = f^{-1}(B) = \{x \in X / f(x) \in B\}.$$

Ainsi on obtient

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(X)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)) = 2^{n+1} = 2^{\mathrm{Card}(X)}$$

(iv)

D'abord, puisque $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{p-1}] \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}_{n-1} \times \mathbb{N}_{p-1})$ l'ensemble $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{p-1}]$ est fini. Posons

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_{p-1}]) = p^{n+1}\}.$$

On montre que $H = \mathbb{N}$ en vérifiant que H est héréditaire.

1. D'abord puisque $\mathbb{N}_0 = \{0\}$ les seules applications de $\mathbb{N}_0$ dans $\mathbb{N}_{p-1}$ sont les singletons $\{(0,k)\}$ où $k \in \mathbb{N}_{p-1}$, ainsi l'application f de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_{p-1}]$ définie par $f(k) = \{(0,k)\}$ est une bijection et $0 \in H$.
2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. Pour cela on remarque qu'il existe une bijection de $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, \mathbb{N}_{p-1}]$ dans $\mathbb{N}_{p-1} \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_{p-1}]$. En effet, si pour $u \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, \mathbb{N}_{p-1}]$ on note $\mathrm{R}_n u = u \cap (\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_{p-1})$ la restriction de u à $\mathbb{N}_n$ alors l'application φ de $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, \mathbb{N}_{p-1}]$ dans $\mathbb{N}_{p-1} \times \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_{p-1}]$ définie par

$$\varphi(u) = (u(n+1), \mathrm{R}_n u)$$

est une bijection d'inverse l'application $(m, v) \mapsto \varphi^{-1}(m, v)$ où

$$\varphi^{-1}(m,v)(k) = \begin{cases} v(k) & si \quad k \in \mathbb{N}_n \\ m & si \quad k = n+1 \end{cases}.$$

Ainsi (voir lemme [6.2] page 136) pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, \mathbb{N}_{p-1}]) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}_{p-1})\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_{p-1}])$$

ainsi, puisque $\mathrm{Card}(\mathbb{N}_{p-1}) = p$,

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, \mathbb{N}_{p-1}]) = p\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_{p-1}]).$$

En particulier l'assertion $n \in H$ entraîne

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, \mathbb{N}_{p-1}]) = p \times p^{n+1} = p^{(n+1)+1}$$

c'est à dire $n+1 \in H$

Ainsi H est héréditaire et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_{p-1}]) = p^{n+1}.$$

(v)

Si $\mathrm{Card}(X) = n$ et $\mathrm{Card}(Y) = p$ on fixe $f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_{n-1}]$ et $g \in \mathrm{B}[Y, \mathbb{N}_{p-1}]$. L'application φ de $\mathrm{A}[X,Y]$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{p-1}]$ définie par

$$\varphi(u) = g \circ u \circ f^{-1}$$

est une bijection dont l'inverse est l'application φ^{-1} de $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{p-1}]$ dans $\mathrm{A}[X,Y]$ définie par

$$\varphi^{-1}(v) = g^{-1} \circ v \circ f.$$

Par suite (voir lemme [6.2] page 136) on obtient

$$\mathrm{Card}(\mathrm{A}[X,Y]) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{p-1}]) = p^n = (\mathrm{Card}(Y))^{\mathrm{Card}(X)}$$

(vi)

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Card}(S_{n+1}) = (n+1)\text{Card}(S_n)$$

Considérons l'application $k \mapsto F_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathfrak{P}(S_{n+1})$ définie par

$$F_k = \{\sigma \in S_{n+1} / \sigma(n) = k\}.$$

On montre successivement :

1. (a) $S_{n+1} = \bigcup_{k=0}^{n} F_k$
   (b) $[(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n \text{ et } i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \varnothing]$
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$
$$\text{Card}(F_k) = \text{Card}(F_n) = \text{Card}(S_n)$$
3.
$$\text{Card}(S_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \text{Card}(F_k) = (n+1)\text{Card}(S_n)$$

1. (a) D'abord puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ $F_k \subset S_{n+1}$ on a $\bigcup_{k=0}^{n} F_k \subset S_{n+1}$, ensuite puisque $\sigma \in S_{n+1} \Rightarrow \sigma \in F_{\sigma(n)}$ on obtient $S_{n+1} \subset \bigcup_{k=0}^{n} F_k$.
   (b) Si $F_i \cap F_j \neq \varnothing$ et $\sigma \in F_i \cap F_j$ alors $i = \sigma(n) = j$.
2. On montre que si $k \in \mathbb{N}_n$ alors $\text{B}[F_k, F_n] \neq \varnothing$. Si $\tau_{n,k}$ est l'application de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ définie par
$$\tau_{n,k}(i) = \begin{cases} i & si \quad i \notin \{k,n\} \\ k & si \quad i = n \\ n & si \quad i = k \end{cases}.$$
alors $\tau_{n,k} \circ \tau_{n,k} = id_{\mathbb{N}_n}$ et l'application $f_{n,k}$ de S_{n+1} dans S_{n+1} définie par
$$f_{n,k}(\sigma) = \tau_{n,k} \circ \sigma$$
est une bijection de S_{n+1} dans S_{n+1} qui vérifie $f_{n,k} \circ f_{n,k} = id_{S_{n+1}}$. On vérifie que $f_{n,k}(F_k) = F_n$
   — D'abord si $\sigma \in F_k$ alors $f_{n,,k}(\sigma)(n) = \tau_{n,k}(\sigma(n)) = \tau_{n,k}(k) = n$ par suite $f_{n,k}(F_k) \subset F_n$,
   — Ensuite si $\sigma \in F_n$ alors $f_{n,,k}(\sigma)(n) = \tau_{n,k}(\sigma(n)) = \tau_{n,k}(n) = k$ par suite $f_{n,k}(\sigma) \in F_k$, et $\sigma = f_{n,k} \circ f_{n,k}(\sigma) = f_{n,k}(f_{n,k}(\sigma))$, ainsi $\sigma \in f_{n,k}(F_k)$ et $F_n \subset f_{n,k}(F_k)$.

   Ainsi la restriction de $f_{n,k}$ à F_k est une bijection de F_k dans F_n et le lemme 6.2 page 136 permet d'affirmer $\text{Card}(F_k) = \text{Card}(F_n)$.
   Il reste à voir que $\text{Card}(F_n) = \text{Card}(S_n)$, mais si $\sigma \mapsto \varphi(\sigma)$ est l'application de S_n dans F_n définie par
$$\varphi(\sigma)(i) = \begin{cases} \sigma(i) & si \quad i \in \mathbb{N}_{n-1} \\ n & si \quad i = n \end{cases}.$$
φ est une bijection dont l'inverse est l'application φ^{-1} de F_n dans S_n où $\varphi^{-1}(\sigma)$ est définie comme la restriction de σ à $\mathbb{N}_{n-1}$, par suite $\text{Card}(F_n) = \text{Card}(S_n)$.
3. Puisque $[i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \varnothing]$ l'égalité (6.4) page 136 du lemme [6.2] est vérifiée, ainsi
$$\text{Card}(S_{n+1}) = \text{Card}(\bigcup_{k=0}^{n} F_k) = \sum_{k=0}^{n} \text{Card}(F_k) \tag{6.6}$$
par suite, puisque d'après 2. on a $\text{Card}(F_k) = \text{Card}(S_n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, l'égalité (6.6) entraîne
$$\text{Card}(S_{n+1}) = (n+1)\text{Card}(S_n).$$

(vii)

Si Card$(X) = n$ et $f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_{n-1}]$ alors l'application φ de S_n dans $\mathrm{B}[X, X]$ définie par

$$\varphi(\sigma) = f^{-1} \circ \sigma \circ f$$

est une bijection d'inverse

$$\varphi^{-1}(g) = f \circ g \circ f^{-1}$$

par suite

$$\mathrm{Card}(\mathrm{B}[X, X]) = \mathrm{Card}(S_n) = n! = \mathrm{Card}(X)\ !$$

(viii)

on montre d'abord que pour tout $(\sigma_p, \sigma_q) \in G_p \times H_q$

$$\sigma_p(\mathbb{N}_{p-1}) = \mathbb{N}_{p-1} \ et\ \sigma_q([p, p+q-1]) = [p, p+q-1] \tag{6.7}$$

1. D'abord on montre $\sigma_p^{-1}(\mathbb{N}_{p-1}) \subset \mathbb{N}_{p-1}$. Il suffit de montrer

   $$[\sigma_p^{-1}(i) \geq p \Rightarrow i \geq p].$$

   Or, l'assertion $\sigma_p^{-1}(i) \geq p$ entraîne, -puisque si $k \geq p$ alors $\sigma_p(k) = k$- que $\sigma_p(\sigma_p^{-1}(i)) = \sigma_p^{-1}(i)$, par suite $i = \sigma_p(\sigma_p^{-1}(i)) = \sigma_p^{-1}(i) \geq p$ ainsi on obtient

   $$\mathbb{N}_{p-1} \subset \sigma_p(\mathbb{N}_{p-1})$$

2. Ensuite on montre $\sigma_p(\mathbb{N}_{p-1}) \subset \mathbb{N}_{p-1}$. En effet l'assertion $\sigma_p(i) \geq p$ entraîne $\sigma_p(\sigma_p(i)) = \sigma_p(i)$, l'injectivité de σ_p implique alors $\sigma_p(i) = i$, par suite $[\sigma_p(i) \geq p \Rightarrow i \geq p]$. En particulier $i \leq p-1 \Rightarrow \sigma_p(i) \leq p-1$.
3. On montre $\sigma_q^{-1}[p, p+q-1] \subset [p, p+q-1]$. Il suffit de montrer

   $$\sigma_q^{-1}(i) \leq p-1 \Rightarrow i \leq p-1.$$

   Or, l'assertion $\sigma_q^{-1}(i) \leq p-1$ entraîne, -puisque si $k \leq p-1$ alors $\sigma_q(k) = k$- que $\sigma_q(\sigma_q^{-1}(i)) = \sigma_q^{-1}(i)$, par suite $i = \sigma_q(\sigma_q^{-1}(i)) = \sigma_p^{-1}(i) \leq p-1$
4. Ensuite on montre $\sigma_q([p, p+q-1]) \subset [p, p+q-1]$. En effet l'assertion $\sigma_q(i) \leq p-1$ entraîne $\sigma_q(\sigma_q(i)) = \sigma_q(i)$, l'injectivité de σ_q implique alors $\sigma_q(i) = i$, par suite $[\sigma_q(i) \leq p-1 \Rightarrow i \leq p-1]$. En particulier

   $$i \geq p \Rightarrow \sigma_q(i) \geq p.$$

Une conséquence immédiate des égalités (6.7) est donné par le fait que pour tout $(\sigma_p, \sigma_q) \in G_p \times H_q$

$$\sigma_p \circ \sigma_q(\mathbb{N}_{p-1}) = \mathbb{N}_{p-1} \ et\ \sigma_p \circ \sigma_q([p, p+q-1]) = [p, p+q-1] \tag{6.8}$$

En effet

— Puisque, par définition de H_q, on a $[k \in \mathbb{N}_{p-1} \Rightarrow \sigma_q(k) = k]$ on obtient

$$\sigma_p \circ \sigma_q(\mathbb{N}_{p-1}) = \sigma_p(\mathbb{N}_{p-1})$$

et (6.7) permet de conclure

$$\sigma_p \circ \sigma_q(\mathbb{N}_{p-1}) = \sigma_p(\mathbb{N}_{p-1}) = \mathbb{N}_{p-1}.$$

— D'autre part, par (6.7) on a

$$\sigma_q[p, p+q-1] = [p, p+q-1]$$

par suite

$$\sigma_p \circ \sigma_q([p, p+q-1]) = \sigma_p([p, p+q-1])$$

or par définition de G_p on a $[k \in [p, p+q-1] \Rightarrow \sigma_p(k) = k]$ ainsi

$$\sigma_p \circ \sigma_q([p, p+q-1]) = \sigma_p([p, p+q-1]) = [p, p+q-1]$$

On prouve maintenant que l'application f_0 de $S_{p,q} \times G_p \times H_q$ dans S_{p+q} définie par $f_0(\rho, \sigma_p, \sigma_q) = \rho \circ \sigma_p \circ \sigma_q$ est bijective.

1) $\underline{f_0 \text{ est injective}}$

On montre que si $(\rho, \sigma_p, \sigma_q) \in S_{p,q} \times G_p \times H_q$ et $(\rho', \sigma'_p, \sigma'_q) \in S_{p,q} \times G_p \times H_q$ vérifie

$$\rho \circ \sigma_p \circ \sigma_q = \rho' \circ \sigma'_p \circ \sigma'_q \tag{6.9}$$

alors $\rho = \rho'$, $\sigma_p = \sigma'_p$ et $\sigma_q = \sigma'_q$. Posons

$$\sigma = \rho \circ \sigma_p \circ \sigma_q,$$

on montre que si (6.9) est vérifiée alors

1. La restriction $\mathrm{R}_p\rho$ de ρ à $\mathbb{N}_{p-1}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $\sigma(\mathbb{N}_{p-1})$
2. La restriction $\mathrm{R}_p\rho'$ de ρ' à $\mathbb{N}_{p-1}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $\sigma(\mathbb{N}_{p-1})$
3. $\forall k \in \mathbb{N}_{p-1}$ on a $\rho_k = \rho'_k$
4. L'application α de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\mathbb{N}_{p+q-1}$ définie par

$$\alpha_k = \rho_{p+k}$$

est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\sigma([p, p+q-1])$

5. L'application α' de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\mathbb{N}_{p+q-1}$ définie par

$$\alpha'_k = \rho'_{p+k}$$

est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\sigma([p, p+q-1])$

6. $\forall k \in [p, p+q-1]$ on a $\rho_k = \rho'_k$

Preuve

1. Par définition de $S_{p,q}$ ρ est strictement croissante sur $\mathbb{N}_{p-1}$ il suffit donc de montrer que $\rho(\mathbb{N}_{p-1}) = \sigma(\mathbb{N}_{p-1})$. Or il résulte de (6.8) page 144 que

$$\sigma(\mathbb{N}_{p-1}) = \rho(\sigma_p \circ \sigma_q(\mathbb{N}_{p-1})) = \rho(\mathbb{N}_{p-1})$$

2. Par définition de $S_{p,q}$ ρ' est strictement croissante sur $\mathbb{N}_{p-1}$ il suffit donc de montrer que $\rho'(\mathbb{N}_{p-1}) = \sigma(\mathbb{N}_{p-1})$. Or il résulte de l'égalité (6.9) et de (6.8) page 144 que

$$\sigma(\mathbb{N}_{p-1}) = \rho'(\sigma'_p \circ \sigma'_q(\mathbb{N}_{p-1})) = \rho'(\mathbb{N}_{p-1})$$

3. Posons $u = \mathrm{R}_p\rho$ et $v = \mathrm{R}_p\rho'$, d'après 1. et 2. u et v sont des bijections strictement croissantes de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $\sigma(\mathbb{N}_{p-1})$ ainsi $u^{-1} \circ v$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $\mathbb{N}_{p-1}$, le lemme [5.10] page 111 permet alors d'affirmer que $u^{-1} \circ v = id_{\mathbb{N}_{p-1}}$, par suite $u = v$ et

$$k \in \mathbb{N}_{p-1} \Rightarrow \rho_k = \rho'_k$$

4. Puisque par définition de $S_{p,q}$ α est strictement croissante sur $\mathbb{N}_{q-1}$ il suffit de montrer que $\alpha(\mathbb{N}_{q-1}) = \rho[p, p+q-1] = \sigma([p, p+q-1])$. Or il résulte de (6.8) page 144 que
$$\sigma([p, p+q-1]) = \rho(\sigma_p \circ \sigma_q([p, p+q-1]) = \rho([p, p+q-1])$$
5. Puisque par définition de $S_{p,q}$ α' est strictement croissante sur $\mathbb{N}_{q-1}$ il suffit de montrer que $\alpha'(\mathbb{N}_{q-1}) = \rho'[p, p+q-1] = \sigma([p, p+q-1])$. Or il résulte de (6.8) page 144 que
$$\sigma([p, p+q-1]) = \rho'(\sigma'_p \circ \sigma'_q([p, p+q-1]) = \rho'([p, p+q-1])$$
6. D'après 4. et 5. α et α' sont des bijections strictement croissantes de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\sigma([p, p+q-1])$ ainsi $\alpha^{-1} \circ \alpha'$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\mathbb{N}_{q-1}$, le lemme [5.10] page 111 permet alors d'affirmer que $\alpha^{-1} \circ \alpha' = id_{\mathbb{N}_{q-1}}$, par suite $\alpha = \alpha'$ et
$$k \in [p, p+q-1] \Rightarrow \rho_k = \rho'_k$$

Ainsi l'égalité
$$\rho \circ \sigma_p \circ \sigma_q = \rho' \circ \sigma'_p \circ \sigma'_q$$
entraîne déjà $\rho = \rho'$. En particulier si l'égalité (6.9) page 145 est vérifiée alors
$$\rho = \rho' \ et \ \sigma_p \circ \sigma_q = \sigma'_p \circ \sigma'_q$$
Il reste donc à montrer $[\sigma_p \circ \sigma_q = \sigma'_p \circ \sigma'_q \Rightarrow (\sigma_p = \sigma'_p \ et \ \sigma_q = \sigma'_q)]$, or cela résulte des implications évidentes
$$[k \in \mathbb{N}_{p-1} \Rightarrow \sigma_p \circ \sigma_q(k) = \sigma_p(k)] \ et \ [k \in [p, p+q-1] \Rightarrow \sigma_p \circ \sigma_q(k) = \sigma_q(k)].$$
Ainsi f_0 est injective. On montre maintenant que f_0 est surjective.

2) f_0 est surjective

Il s'agit de montrer que pour tout $\sigma \in S_{p+q}$ il existe $(\rho, \sigma_p, \sigma_q) \in S_{p,q} \times G_p \times H_q$ tel que
$$\sigma = \rho \circ \sigma_p \circ \sigma_q.$$

1. *Construction de ρ*
   (a) Si $\sigma \in S_{p+q}$ alors l'ensemble $\sigma(\mathbb{N}_{p-1})$ est un ensemble de cardinal p, ainsi le lemme [6.1] page 133 permet d'affirmer qu'il existe une application strictement croissante ρ_0 de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $\sigma(\mathbb{N}_{p-1})$
   (b) Si $\sigma \in S_{p+q}$ alors l'ensemble $\sigma([p, p+q-1])$ est un ensemble de cardinal q, ainsi le lemme [6.1] page 133 permet d'affirmer qu'il existe une application strictement croissante ρ_1 de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\sigma([p, p+q-1])$

   considérons l'application ρ^σ de $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dans $\mathbb{N}_{p+q-1}$ définie par
$$\rho^\sigma(k) = \begin{cases} \rho_0(k) & si \quad k \in \mathbb{N}_{p-1} \\ \rho_1(k-p) & si \quad k \in [p, p+q-1] \end{cases}$$
   alors ρ^σ est une bijection de $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dans $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dont l'inverse est
$$(\rho^\sigma)^{-1}(k) = \begin{cases} \rho_0^{-1}(k) & si \quad k \in \sigma(\mathbb{N}_{p-1}) \\ \rho_1^{-1}(k) + p & si \quad k \in \sigma([p, p+q-1]) \end{cases},$$
   comme par construction ρ^σ est est strictement croissante sur $\mathbb{N}_{p-1}$ et sur $[p, p+q-1]$ on obtient $\rho^\sigma \in S_{p,q}$. On remarque de plus que
$$\rho^\sigma(\mathbb{N}_{p-1}) = \rho_0(\mathbb{N}_{p-1}) = \sigma(\mathbb{N}_{p-1}) \tag{6.10}$$
   et
$$\rho^\sigma([p, p+q-1]) = \rho_1(\mathbb{N}_{q-1}) = \sigma([p, p+q-1]) \tag{6.11}$$

2. <u>*Constructions de* σ_p et σ_q</u>

   (a) D'après (6.10) l'application $(\rho^\sigma)^{-1}\circ\sigma$ est une bijection de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $\mathbb{N}_{p-1}$ ainsi l'application σ_p de $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dans $\mathbb{N}_{p+q-1}$ définie par

$$\sigma_p(k)=\left\{\begin{array}{lll}(\rho^\sigma)^{-1}\circ\sigma(k) & si & k\in\mathbb{N}_{p-1}\\ k & si & k\in[p,p+q-1]\end{array}\right.$$

   est un élément de G_p qui vérifie

$$k\in\mathbb{N}_{p-1}\Rightarrow\sigma(k)=\rho^\sigma\circ\sigma_p(k).$$

   (b) D'après (6.11) l'application $(\rho^\sigma)^{-1}\circ\sigma$ est une bijection de $[p,p+q-1]$ dans $[p,p+q-1]$ ainsi l'application σ_q de $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dans $\mathbb{N}_{p+q-1}$ définie par

$$\sigma_q(k)=\left\{\begin{array}{lll}k & si & k\in\mathbb{N}_{p-1}\\ (\rho^\sigma)^{-1}\circ\sigma(k) & si & k\in[p,p+q-1]\end{array}\right.$$

   est un élément de H_q qui vérifie

$$k\in[p,p+q-1]\Rightarrow\sigma(k)=\rho^\sigma\circ\sigma_q(k).$$

On vérifie $\sigma=\rho^\sigma\circ\sigma_p\circ\sigma_q$. En effet,

— Si $k\in\mathbb{N}_{p-1}$ alors
$$\rho^\sigma\circ\sigma_p\circ\sigma_q(k)=\rho^\sigma\circ\sigma_p(k)=\sigma(k)$$

— Si $k\in[p,p+q-1]$ alors
$$\rho^\sigma\circ\sigma_p\circ\sigma_q(k)=\rho^\sigma\circ\sigma_q(k)=\sigma(k).$$

Ce qui conclut la preuve de (*viii*).

(*ix*)

On montre que $\mathrm{Card}(G_p)=\mathrm{Card}(S_p)=p!$. On montre que l'application $\varphi:\sigma\mapsto\varphi(\sigma)$ de S_p dans G_p définie par

$$\varphi(\sigma)(k)=\left\{\begin{array}{lll}\sigma(k) & si & k\in\mathbb{N}_{p-1}\\ k & si & k\in[p,p+q-1]\end{array}\right.$$

est une bijection. En effet, d'après (6.7) page 144 la restriction $\mathrm{R}_p\sigma$ de $\sigma\in G_p$ à $\mathbb{N}_{p-1}$ est un élément de S_p et par définition de G_p on a $\varphi(\mathrm{R}_p\sigma)=\sigma$ ainsi φ est surjective. L'injectivité est évidente par suite, d'après (*vi*),

$$\mathrm{Card}(G_p)=\mathrm{Card}(S_p)=p!.$$

De même l'application ψ de $\mathrm{B}[[p,p+q-1],[p,p+q-1]]$,dans H_q définie par

$$\psi(\sigma)(k)=\left\{\begin{array}{lll}k & si & k\in\mathbb{N}_{p-1}\\ \sigma(k) & si & k\in[p,p+q-1]\end{array}\right.$$

est une bijection dont l'inverse est la restriction à $[p,p+q-1]$. Par suite

$$\mathrm{Card}(H_q)=\mathrm{Card}(\mathrm{B}[[p,p+q-1],[p,p+q-1]])$$

or $\mathrm{Card}([p,p+q-1])=q$ ainsi (*vii*) permet d'affirmer

$$\mathrm{Card}(H_q)=\mathrm{Card}(\mathrm{B}[[p,p+q-1],[p,p+q-1]])=q!.$$

On a vu en (*viii*) que $S_{p,q}\times G_p\times H_q$ est en bijection avec S_{p+q}, par suite

$$\mathrm{Card}(S_{p,q}\times G_p\times H_q)=\mathrm{Card}(S_{p+q})=(p+q)!$$

ainsi, par le lemme [6.2] page 136 on obtient

$$\text{Card}(S_{p,q})\text{Card}(G_p)\text{Card}(H_q) = \text{Card}(S_{p,q})p!q! = p+q!$$

c'est à dire

$$\text{Card}(S_{p,q}) = \frac{p+q!}{p!q!}.$$

(x)

D'abord, puisque tout élément de $S_{p,q}$ est injectif on a

$$\rho \in S_{p,q} \Rightarrow \text{Card}(\rho(\mathbb{N}_{p-1})) = p$$

Ainsi $f_1(S_{p,q}) \subset \text{Com}_p(\mathbb{N}_{p+q-1})$.

f_1 *est injective*

il faut montrer

$$[(\rho, \rho') \in S_{p,q} \times S_{p,q} \ et \ \rho(\mathbb{N}_{p-1}) = \rho'(\mathbb{N}_{p-1})] \Rightarrow \rho = \rho'.$$

On montre que si $\rho(\mathbb{N}_{p-1}) = \rho'(\mathbb{N}_{p-1})$ alors

1. $$\rho[p, p+q-1] = \rho'[p, p+q-1]$$
2. $\forall k \in \mathbb{N}_{p-1}$ on a $\rho_k = \rho'_k$
3. $\forall k \in [p, p+q-1]$ on a $\rho_k = \rho'_k$

1. Si $k \in [p, p+q-1]$ alors l'injectivité de ρ implique $\rho(k) \notin \rho(\mathbb{N}_{p-1})$, ρ' étant surjective il existe $k' \in \mathbb{N}_{p+q-1}$ vérifiant $\rho(k) = \rho'(k')$. l'égalité $\rho(\mathbb{N}_{p-1}) = \rho'(\mathbb{N}_{p-1})$ entraîne $k' \notin \mathbb{N}_{p-1}$ puisque si $k' \in \mathbb{N}_{p-1}$ alors $\rho(k) \in \rho'(\mathbb{N}_{p-1})$ par suite $\rho(k) \in \rho(\mathbb{N}_{p-1})$ ainsi $k' \in [p, p+q-1]$ et pour tout $k \in [p, p+q-1]$ il existe $k' \in [p, p+q-1]$ tel que $\rho(k) = \rho'(k')$ c'est à dire

$$\rho([p, p+q-1]) \subset \rho'([p, p+q-1])$$

en inversant les rôles de ρ et ρ' on obtient l'inclusion inverse

$$\rho'([p, p+q-1]) \subset \rho([p, p+q-1])$$

2. Notons u la restriction de ρ à $\mathbb{N}_{p-1}$ et v la restriction de ρ' à $\mathbb{N}_{p-1}$ alors par définition de $S_{p,q}$
— u est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $\rho(\mathbb{N}_{p-1})$
— v est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $\rho'(\mathbb{N}_{p-1})$
Ainsi, puisque $\rho(\mathbb{N}_{p-1}) = \rho'(\mathbb{N}_{p-1})$ u et v sont des bijections strictement croissantes de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans le même ensemble, par suite $v^{-1} \circ u$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $\mathbb{N}_{p-1}$, le lemme [5.10] page 111 permet alors d'affirmer que $v^{-1} \circ u = id_{\mathbb{N}_{p-1}}$ par suite

$$k \in \mathbb{N}_{p-1} \Rightarrow \rho_k = u_k = v_k = \rho'_k.$$

3. Notons f l'application de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\rho([p, p+q-1])$ définie par

$$f_k = \rho_{p+k}$$

et g l'application de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\rho'([p, p+q-1])$ définie par

$$g_k = \rho'_{p+k}$$

alors par définition de $S_{p,q}$
— f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\rho([p, p+q-1])$

— g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\rho'([p,p+q-1])$
Ainsi, puisque d'après 1. $\rho([p,p+q-1]) = \rho'([p,p+q-1])$ f et g sont des bijections strictement croissantes de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans le même ensemble, par suite $f^{-1}\circ g$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans $\mathbb{N}_{q-1}$, le lemme [5.10] page 111 permet alors d'affirmer que $f^{-1}\circ g = id_{\mathbb{N}_{q-1}}$ par suite

$$k \in \mathbb{N}_{q-1} \Rightarrow \rho_{p+k} = f_k = g_k = \rho'_{p+k}.$$

Ainsi f_1 est injective.

<u>f_1 *est surjective*</u>

Il s'agit de montrer que si $A \in \mathrm{Com}_p(\mathbb{N}_{p+q-1})$ il existe $\rho \in S_{p,q}$ tel que

$$\rho(\mathbb{N}_{p-1}) = A.$$

Puisque $\mathrm{Card}(A) = p$ le lemme [6.1] page 133 permet d'affirmer qu'il existe une bijection strictement croissante f de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans A . Si $A^c = \{k \in \mathbb{N}_{p+q-1}/k \notin A\}$ alors le lemme [6.2] page 136 permet d'affirmer que $\mathrm{Card}(A^c) = p+q-p = q$ ainsi il existe une application strictement croissante g de $\mathbb{N}_{q-1}$ dans A^c, on montre que l'application ρ de $\mathbb{N}_{p+q-1}$ dans $\mathbb{N}_{p+q-1}$ définie par

$$\rho_k = \begin{cases} f_k & si \quad k \in \mathbb{N}_{p-1} \\ g_{k-p} & si \quad k \in [p,p+q-1] \end{cases}$$

est un élément de $S_{p,q}$. Pour montrer que $\rho \in S_{p+q}$ il suffit, d'après le lemme [5.10] page 111, de montrer que ρ est surjective, or si $p \in A$ il existe $k \in \mathbb{N}_{p-1}$ tel que $f_k = p$, par suite $\rho_k = f_k = p$ et si $p \in A^c$ il existe $k \in \mathbb{N}_{q-1}$ tel que $g_k = p$, par suite $\rho_{p+k} = g_k = p$. D'autre part il résulte de la croissance stricte de f et g que ρ est strictement croissante sur $\mathbb{N}_{p-1}$ et sur $[p,p+q-1]$. Enfin on a

$$f_1(\rho) = \rho(\mathbb{N}_{p-1}) = f(\mathbb{N}_{p-1}) = A$$

par suite f_1 est surjective.
Puisque $S_{p,q}$ est en bijection avec $\mathrm{Com}_p(\mathbb{N}_{p+q-1})$ on obtient par (ix)

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Com}_p(\mathbb{N}_{p+q-1})) = \mathrm{Card}(S_{p,q}) = \frac{p+q!}{p!q!}$$

(xi)

On fixe $g \in \mathrm{B}[X,\mathbb{N}_{n-1}]$ et on pose $q = n-p$. Puisque g est bijective l'application g_* de $\mathfrak{P}(X)$ dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_{p+q-1})$ définie par

$$g_*(A) = g(A) = \{k \in \mathbb{N}_{p+q-1}/\exists x \in A : g(x) = k\}$$

est une bijection d'inverse l'application g_*^{-1} de $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_{p+q-1})$ dans $\mathfrak{P}(X)$ définie par

$$g_*^{-1}(B) = g^{-1}(B) = \{x \in X/g(x) \in B\}.$$

g et g^{-1} étant des applications injectives on a

$$A \in \mathfrak{P}(X) \Rightarrow \mathrm{Card}(g_*(A)) = \mathrm{Card}(A)$$

et

$$B \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}_{p+q-1}) \Rightarrow \mathrm{Card}(g_*^{-1}(B)) = \mathrm{Card}(B)$$

ainsi la restriction de g_* à $\mathrm{Com}_p(X)$ est une bijection de $\mathrm{Com}_p(X)$ dans $\mathrm{Com}_p(\mathbb{N}_{p+q-1})$ et (x) donne alors

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Com}_p(X)) = \mathrm{Card}(\mathrm{Com}_p(\mathbb{N}_{p+q-1})) = \frac{p+q!}{p!q!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

(xii)

On montre d'abord qu'il existe une application $\eta \to \rho(\eta)$ de $\mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})$ dans $S_{p,q}$ qui vérifie : $\forall \eta \in \mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})$

$$\rho(\eta)(\mathbb{N}_{p-1}) = \eta(\mathbb{N}_{p-1}). \tag{6.12}$$

Considérons l'application φ de $\mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})$ dans $\mathrm{Com}_p(\mathbb{N}_{p+q-1})$ définie par

$$\varphi(\eta) = \eta(\mathbb{N}_{p-1}),$$

Si f_1^{-1} est l'application de $\mathrm{Com}_p(\mathbb{N}_{p+q-1})$ dans $S_{p,q}$ définie comme l'application inverse de la bijection f_1 définie dans (ix) alors, par définition, l'application $f_1^{-1} \circ \varphi$ vérifie (6.12). Remarquons maintenant que pour tout $\eta \in \mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})$ alors $\rho(\eta)^{-1} \circ \eta \in S_p$. En effet il est clair que $\rho(\eta)^{-1} \circ \eta$ est injective, il suffit donc de montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}_{p-1}$ il existe $k \in \mathbb{N}_{p-1}$ tel que $\rho(\eta)^{-1} \circ \eta(k) = m$. mais si $m \in \mathbb{N}_{p-1}$ alors $\rho(\eta)(m) \in \rho(\eta)(\mathbb{N}_{p-1})$ et (6.12) montre alors qu'il existe $k \in \mathbb{N}_{p-1}$ tel que $\rho(\eta)(m) = \eta(k)$ ainsi $\rho(\eta)^{-1} \circ \eta(k) = m$. Considérons l'application f_2 de $\mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})$ dans $S_{p,q} \times S_p$ définie par

$$f_2(\eta) = (\rho(\eta), \rho(\eta)^{-1} \circ \eta)$$

et montrons que f_2 est une bijection.

f_2 est injective

En effet $f_2(\eta) = f_2(\eta') \Leftrightarrow [\rho(\eta) = \rho(\eta') \textit{ et } \rho(\eta)^{-1} \circ \eta = \rho(\eta')^{-1} \circ \eta']$ ainsi on obtient

$$\eta = \rho(\eta)(\rho(\eta)^{-1} \circ \eta) = \rho(\eta')(\rho(\eta)^{-1} \circ \eta) = \rho(\eta')(\rho(\eta')^{-1} \circ \eta') = \eta'.$$

f_2 est surjective

On montre que si $(\rho, \sigma) \in S_{p,q} \times S_p$ et si $\eta = \rho \circ \sigma$ alors $f_2(\eta) = (\rho, \sigma)$. D'abord si $\eta = \rho \circ \sigma$ alors, puisque $\sigma(\mathbb{N}_{p-1}) = \mathbb{N}_{p-1}$ on a

$$\varphi(\eta) = \eta(\mathbb{N}_{p-1}) = \rho(\sigma(\mathbb{N}_{p-1})) = \rho(\mathbb{N}_{p-1}) = f_1(\rho)$$

par suite $\rho(\eta) = f_1^{-1}(\varphi(\eta)) = \rho$ et $\rho(\eta)^{-1} \circ \eta = \rho^{-1} \circ (\rho \circ \sigma) = \sigma$. ainsi f_2 est une bijection de $\mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})$ dans $S_{p,q} \times S_p$, par suite

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})) = \mathrm{Card}(S_{p,q} \times S_p) = \mathrm{Card}(S_{p,q})\mathrm{Card}(S_p)$$

qui donne

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})) = \frac{p+q!}{p!q!} \times p! = \frac{p+q!}{q!}$$

$(xiii)$

On fixe $f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}_{p-1}]$, $g \in \mathrm{B}[Y, \mathbb{N}_{n-1}]$, $q = n - p$ et on remarque que l'application φ de $\mathfrak{I}(X, Y)$ dans $\mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})$ définie par

$$\varphi(\sigma) = g \circ \sigma\ f^{-1}$$

est une bijection d'inverse

$$\varphi^{-1}(\eta) = g^{-1} \circ \eta \circ f$$

par suite

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{I}(X, Y)) = \mathrm{Card}(\mathfrak{I}(\mathbb{N}_{p-1}, \mathbb{N}_{p+q-1})) = \frac{p+q!}{q!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

■

On vient d'étudier les ensembles en bijection avec une section commençante stricte d'un ensemble d'entiers naturels . Les ensembles en bijection avec un ensemble d'entiers naturels ont quelques propriétés.

6.3.3 *Ensembles dénombrables*

Un ensemble est dit dénombrable s'il existe un ensemble d'entiers naturels en bijection avec lui.

Définition 6.3 *Un ensemble X est dit* ***dénombrable*** *s'il existe un ensemble d'entiers naturels* $(\mathbb{N}', O')$ *tel que* $\mathrm{B}[X, \mathbb{N}'] \neq \varnothing$.

Théorème 6.4 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels*
(i) Pour que X soit dénombrable il faut et il suffit qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans X

(ii) Si X est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ il est fini ou dénombrable. plus précisèment

1. *Si X est majoré il est fini,*
2. *Si X n'est pas majoré il est dénombrable.*

(iii) Si X est dénombrable et Y est un ensemble vérifiant $\mathrm{B}[X, Y] \neq \varnothing$ *alors Y est dénombrable.*

(iv) Si X est dénombrable et A est un sous-ensemble de X, A est fini ou dénombrable

(v) Pour qu'un ensemble X soit dénombrable il faut et il suffit qu'il existe une application injective de X dans $\mathbb{N}$ et une application injective de $\mathbb{N}$ dans X.

(vi) pour qu'un ensemble X soit fini ou dénombrable il faut et il suffit qu'il existe une application surjective de $\mathbb{N}$ sur X

(vii) L'ensemble $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \{0, , 1\}]$ *des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.*

(viii) La famille $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

(ix) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

(x) Si $\mathbb{U}$ est un ensemble et $X \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{U})]$ *est une application vérifiant la propriété que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble X_n est fini ou dénombrable, alors l'ensemble*

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

est fini ou dénombrable. En d'autres termes, la réunion d'une famille finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrable est un ensemble fini ou dénombrable.

(xi) Si X et Y sont des ensembles dénombrables, $X \times Y$ est dénombrable.

(xii) La famille $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

(xiii) Si X est un ensemble non fini il contient un ensemble dénombrable.

Preuve

(i)

La partie ≪ il suffit ≫ provient de la définition d'un ensemble dénombrable. Si X est dénombrable il existe un ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}', O')$ et une bijection g de $\mathbb{N}'$ dans X, mais le théorème [4.4] page 83 permet d'affirmer qu'il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}'$, ainsi $g \circ f$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans X.

(ii)

Voir le (vi) du théorème [6.3] page 128

(iii)

Si f est une bijection de X dans $\mathbb{N}$ et g une bijection de X dans Y alors $f \circ g^{-1}$ est une bijection de Y dans $\mathbb{N}$.

(iv)

Si f est une bijection de X dans $\mathbb{N}$ alors $f(A)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, par suite d'après (ii) il est fini ou dénombrable

— Si $f(A)$ est fini alors A est fini comme étant en bijection avec $f(A)$
— Si $f(A)$ est dénombrable alors A est dénombrable comme étant en bijection avec $f(A)$

(v)

Si f est une application injective de X dans $\mathbb{N}$ alors $f(X)$ est fini ou dénombrable par suite X est fini ou dénombrable comme étant en bijection avec un ensemble fini ou dénombrable, mais l'existence d'une application injective de $\mathbb{N}$ dans X montre que X n'est pas fini.

(vi)

1. D'abord on montre que s'il existe une application surjective de $\mathbb{N}$ dans X alors X est fini ou dénombrable. Si f est une application surjective de $\mathbb{N}$ dans X alors pour tout $x \in X$ l'ensemble
$$f^{-1}(x) = \{k \in \mathbb{N}/f(k) = x\}$$
est non vide, on montre que l'application g de X dans $\mathbb{N}$ définie par
$$g(x) = \min_O\{k : k \in f^{-1}(x)\}$$
est injective. En effet, par définition d'un minimum, pour tout $x \in X$ on a $g(x) \in f^{-1}(x)$ par suite $f(g(x)) = x$ ainsi on obtient
$$g(x) = g(x') \Rightarrow f(g(x)) = f(g(x')) \Rightarrow x = x'.$$
ainsi X est en bijection avec $g(X)$ qui est fini ou dénombrable comme sous-ensemble de $\mathbb{N}$.
2. Ensuite on montre que si X est fini ou dénombrable il existe une application surjective de $\mathbb{N}$ dans X,
   — Si X est dénombrable toute application bijective de $\mathbb{N}$ dans X est surjective
   — Si X est de cardinal $n + 1$ et $g \in \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, X]$, on considère l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}_n$ définie par
$$f(k) = \begin{cases} k & si \quad k \in \mathbb{N}_n \\ n & si \quad k \notin \mathbb{N}_n \end{cases}$$
   alors $g \circ f$ est surjective de $\mathbb{N}$ dans X

(vii)

On montre qu'il n'existe pas d'application surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \{0, 1\}]$, autrement dit on montre que si $\varphi \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathrm{A}[\mathbb{N}, \{0, 1\}]]$ il existe $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \{0, 1\}]$ tel que $x \notin \mathrm{im}(\varphi)$. Or si $\varphi \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathrm{A}[\mathbb{N}, \{0, 1\}]]$ l'application x de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$ définie par
$$x_k = \begin{cases} 0 & si \quad \varphi(k)(k) = 1 \\ 1 & si \quad \varphi(k)(k) = 0 \end{cases}$$
ne peut être un élément de $\mathrm{im}(\varphi)$. En effet l'assertion $x \in \mathrm{im}(\varphi)$ signifie qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $[\forall k \in \mathbb{N}\ \varphi(n_0)(k) = x_k]$, mais par construction de x on a $x_{n_0} \neq \varphi(n_0)(n_0)$. Ainsi il n'existe pas d'application surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \{0, 1\}]$ et (vi) montre alors que cet ensemble n'est pas dénombrable.

$(viii)$

L'application φ de $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \{0, 1\}]$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par
$$\varphi(x) = \{k \in \mathbb{N}/x_k = 1\}$$
est une bijection dont l'inverse est l'application φ^{-1} de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \{0, 1\}]$ définie par
$$\varphi^{-1}(A)(k) = \begin{cases} 1 & si \quad k \in A \\ 0 & si \quad k \notin A \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable puisqu'il est en bijection avec un ensemble non dénombrable.

(ix)

On montre que l'application ν de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\nu(p, q) = 2^p(2q + 1) - 1$$

est bijective

1) ν est injective

Il s'agit de montrer que si

$$2^p(2q + 1) = 2^{p'}(2q' + 1) \tag{6.13}$$

alors $p = p'$ et $q = q'$. Mais

- si $p < p'$ alors (6.13) entraîne $2q + 1 = 2^{p'-p}(2q' + 1)$ par suite $2q + 1$ serait pair ainsi on obtient $p \geq p'$
- si $p' < p$ alors (6.13) entraîne $2q' + 1 = 2^{p-p'}(2q + 1)$ par suite $2q' + 1$ serait pair ainsi on obtient $p' \geq p$.

par suite

$$2^p(2q + 1) = 2^{p'}(2q' + 1) \Rightarrow p = p' \Rightarrow 2^p(2q + 1) = 2^p(2q' + 1) \Rightarrow q = q'.$$

et ν est injective. Puisqu'il existe clairement une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (v) permet de conclure que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable mais le meilleur moyen de s'en convaincre est de sortir l'application inverse de ν

2) ν est surjective

Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2^p(2q + 1)$. On considère l'application A de $\mathbb{N}$ dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ définie par

$$A(n) = \{k \in \mathbb{N} / \exists\ q \in \mathbb{N}^* : n + 1 = 2^k q\}$$

et on montre

1. $\forall\ n \in \mathbb{N}\ A(n) \neq \varnothing$
2. $n + 1$ est un majorant de $A(n)$,
3. si p est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $p(n) = \max_O\{k : k \in A(n)\}$ alors l'ensemble

   $$B(n) = \{q \in \mathbb{N} / n + 1 = 2^{p(n)}(2q + 1)\}$$

   est un singleton non vide : $B(n) = \{q(n)\}$
4. L'application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

   $$\varphi(n) = (p(n), q(n))$$

   est l'inverse de ν.

1. Puisque $n + 1 = 2^0(n + 1)$, $0 \in A(n)$,
2. puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $k \leq 2^k$ on obtient, si $k \in A(n)$ et $n + 1 = 2^k q$,

   $$k \in A(n) \Rightarrow k \leq 2^k \leq 2^k q \leq n + 1$$

3. Par définition de $p(n)$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2^{p(n)}m$, mais si $m = 2m'$ est pair alors $n + 1 = 2^{p(n)+1}m'$ par suite $p(n) + 1 \in A(n)$ ce qui contredit la maximalité de $p(n)$, ainsi m est impair et il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2q + 1$, par suite

   $$n + 1 = 2^{p(n)}(2q + 1).$$

   Si $q \in B(n)$ et $q' \in B(n)$ alors $2^{p(n)}(2q + 1) = 2^{p(n)}(2q' + 1)$ par suite $q = q'$.

4. par définition

$$\nu \circ \varphi(n) = \nu(p(n), q(n)) = 2^{p(n)}(2q(n)+1) - 1 = n + 1 - 1 = n.$$

ainsi ν est surjective et $\varphi = \nu^{-1}$.

(x)

On montre

1. Il existe une application h de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{U}]$ qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ h(n)(\mathbb{N}) = \mathrm{im}(h(n)) = X_n. \tag{6.14}$$

2. Si h vérifie (6.14) l'application φ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ définie par

$$\varphi(n, m) = h(n)(m)$$

est surjective.

1. On note $\mathfrak{S}$ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{U}])$ définie par

$$\mathfrak{S}_n = \{f \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{U}]/f(\mathbb{N}) = X_n\},$$

puisque pour chaque $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble X_n est fini ou dénombrable (vi) permet d'affirmer que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \mathfrak{S}_n \neq \varnothing$, ainsi si $h_{[\mathrm{A}]}$ designe une fonction de choix pour $\mathrm{A}[\mathbb{N}, \mathbb{U}]$ (voir axiome [2.1] page 48), pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathfrak{S}_n \in \mathrm{dom}(h_{[\mathrm{A}]})$ et l'application h définie par

$$h(n) = h_{[\mathrm{A}]}(\mathfrak{S}_n)$$

vérifie (6.14) puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(n) \in \mathfrak{S}_n$.

2. Il s'agit de montrer que si $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ alors il existe $(n_x, m_x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $h(n_x)(m_x) = x$. Or, si $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ alors l'ensemble

$$\Gamma_x = \{n \in \mathbb{N}/x \in X_n\}$$

est non vide, ainsi si $n_x = \min_O\{n : n \in \Gamma_x\}$ on obtient $x \in X_{n_x}$ et il résulte de l'égalité $h(n_x)(\mathbb{N}) = X_{n_x}$ qu'il existe $m_x \in \mathbb{N}$ tel que $h(n_x)(m_x) = x$.

Ainsi φ est une application surjective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans D, or (ix) permet d'affirmer qu'il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, par suite $\varphi \circ f$ est une application surjective de $\mathbb{N}$ dans D et (vi) permet alors d'affirmer que D est fini ou dénombrable.

(xi)

Fixons $f \in \mathrm{B}[X, \mathbb{N}]$ et $g \in \mathrm{B}[Y, \mathbb{N}]$ alors l'application h de $X \times Y$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$h(x, y) = (f(x), g(y))$$

est une bijection d'inverse

$$h^{-1}(m, n) = (f^{-1}(m), g^{-1}(n))$$

ainsi $X \times Y$ est en bijection avec l'ensemble dénombrable $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(xii)

On montre que

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$$

où $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})/A \subset \mathbb{N}_n\}$

1. D'abord on montre
$$\mathcal{F}(\mathbb{N}) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(\mathbb{N}_n).$$
En effet, si $A \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ alors A est majoré en tant que sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, par suite il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \subset \mathbb{N}_n$, pour un tel n on a $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$
2. Ensuite il est clair que $[\forall n \in \mathbb{N}\ \mathcal{P}(\mathbb{N}_n) \subset \mathcal{F}(\mathbb{N})]$ puisque tout sous-ensemble de $\mathbb{N}_n$ est fini. Ainsi on obtient aussi
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(\mathbb{N}_n) \subset \mathcal{F}(\mathbb{N}).$$

Mais le lemme [6.3] page 140 permet d'affirmer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$ est fini de cardinal 2^{n+1} par suite (x) permet d'affirmer que $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ est fini ou dénombrable, mais il n'est pas fini puisque l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ définie par $f(n) = \mathbb{N}_n$ est injective.

$(xiii)$

Voir le $(viii)$ du théorème [6.3] page 128 ■

Chapitre 7

Compléments utiles sur les ensembles

7.1 *Non existence de l'ensemble de tous les ensembles*

L'axiome de l'ensemble vide (axiome [1.5] page 9) permet d'affirmer qu'il existe un ensemble $X(= \varnothing)$ vérifiant la propriété que pour tout symbole x l'assertion $x \in X$ est fausse. Existe t'il un ensemble X vérifiant la propriété que pour tout symbole x l'assertion $x \in X$ est vraie ? remarquons que si X est un tel ensemble alors non seulement tout ensemble Y est un élément de X (puisque $Y \in X$) mais tout ensemble est inclus dans X puisque de la relation logique *vrai* $\Rightarrow$ *vrai* on tire $x \in Y \Rightarrow x \in X$. Le théorème qui suit montre que l'existence d'un tel ensemble est contradictoire avec l'axiomatique naïve.

Théorème 7.1 *On note X un ensemble*
(i) Il n'existe pas d'application surjective de X dans l'ensemble $\mathrm{A}[X, \{0, 1\}]$ *des applications de X dans* $\{0, 1\}$
(ii) Il n'existe pas d'application surjective de X dans $\mathcal{P}(X)$.
(iii) Il n'existe pas d'ensemble X pour lequel l'assertion $Y \subset X$ est vraie pour tout ensemble Y
(iv) Il existe un élément e_X tel que $e_X \notin X$.

Preuve

(i)

Si f une application de X dans $\mathrm{A}[X, \{0, 1\}]$, on montre que l'application v de X dans $\{0, 1\}$ définie par

$$v(x) = \begin{cases} 0 & si \quad f(x)(x) = 1 \\ 1 & si \quad f(x)(x) = 0 \end{cases}$$

n'est pas dans l'image de f. En effet, dire que $v \in \mathrm{im}(f)$, c'est dire qu'il existe $x_0 \in X$ tel que

$$[\forall x \in X, v(x) = f(x_0)(x)]. \tag{7.1}$$

Mais par définition de v on a, pour tout $x_0 \in X$, $v(x_0) \neq f(x_0)(x_0)$ ainsi (7.1) ne peut être vérifiée.

(ii)

L'application g de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathrm{A}[X, \{0, 1\}]$ définie par

$$g(A)(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \in A^c \end{cases}$$

est une bijection d'inverse l'application g^{-1} de $\mathrm{A}[X,\{0,1\}]$ dans $\mathcal{P}(X)$ définie par

$$g^{-1}(u) = \{x \in X / u(x) = 1\}$$

par suite si f est une surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$ alors $g^{-1} \circ f$ est une surjection de X dans $\mathrm{A}[X,\{0,1\}]$, et ceci est exclu par (i).

(iii)

Si X est un tel ensemble alors

$$\mathcal{P}(X) \subset X$$

et l'application f de X dans $\mathcal{P}(X)$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in \mathcal{P}(X) \\ X & si \quad x \in \mathcal{P}(X)^c \end{cases}$$

est une application surjective de X dans $\mathcal{P}(X)$, or (ii) permet d'affirmer qu'il n'existe pas d'application surjective de X dans $\mathcal{P}(X)$.

(iv)

D'après (iii) il existe un ensemble Y tel que $Y \cap X^c = \{y \in Y / y \notin X\}$ est non vide, ainsi l'assertion $e \in Y \cap X^c$ est vraie pour un élément. ■

Ainsi le fait que l'on ne puisse pas parler de l'ensemble de tous les ensembles montre que tout ensemble possède un point « externe ».

Définition 7.1 *Si X est un ensemble on appelle **point externe** à X un élément e tel que $e \notin X$.*

Si e est un point externe à un ensemble fini F l'ensemble $F \cup \{e\}$ n'est pas en bijection avec F, pour les ensembles non finis la situation est différente.

Exercice 7.1 *On note X un ensemble non fini et $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels.*
(i) Si e est un point externe à X alors il existe une application injective de $X \cup \{e\}$ dans X.
(ii) Si e est un point externe à $\mathbb{N}$ alors

1. *Il existe un bon ordre O_e sur $\mathbb{N} \cup \{e\}$*
2. *il existe un sous-ensemble Y de $\mathbb{N} \cup \{e\}$ qui possède les propriétés suivantes*
   - *(a) Y est en bijection avec $\mathbb{N} \cup \{e\}$*
   - *(b) il n'existe pas de bijection strictement croissante de $(\mathbb{N} \cup \{e\}, O_e)$ dans $(Y, O_e \cap (Y \times Y))$*

Preuve

(i)

Puisque X n'est pas fini il existe un sous-ensemble Y de X tel que $Y \neq X$ et $\mathrm{B}[X,Y] \neq \varnothing$. Si g est une bijection de X dans Y et $x_0 \in X \cap Y^c$ l'application f de $X \cup \{e\}$ dans $Y \cup \{x_0\}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in X \\ x_0 & si \quad x = e \end{cases}$$

est une bijection de $X \cup \{e\}$ dans $Y \cup \{x_0\}$ donc une application injective de $X \cup \{e\}$ dans X.

(ii)

1. Posons

   $$O_e = O \cup (\mathbb{N} \times \{e\}) \cup \{(e,e)\}$$

   alors O_e est l'ordre sur $\mathbb{N} \cup \{e\}$ qui fait de e le plus grand élément de $\mathbb{N} \cup \{e\}$ et qui coïncide avec O sur $\mathbb{N}$. La fonction minimum de O_e est la fonction h de $\mathcal{P}^*(\mathbb{N} \cup \{e\})$ dans $\mathbb{N} \cup \{e\}$ définie par

   $$h(A) = \begin{cases} \min_O\{x : x \in A \cap \mathbb{N}\} & si \quad A \cap \mathbb{N} \neq \varnothing \\ e & si \quad A = \{e\} \end{cases}.$$

2. (a) On montre que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N} \cup \{e\}$ en notant que l'application f de $\mathbb{N} \cup \{e\}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \in \mathbb{N} \\ 0 & si \quad x = e \end{cases}$$

est une bijection d'inverse

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x \in \mathbb{N}^* \\ e & si \quad x = 0 \end{cases}$$

(b) il est clair que $\mathbb{N}$ est une section commençante de $(\mathbb{N} \cup \{e\}, O_e)$, par suite si f est une application strictement croissante vérifiant $\mathrm{im}(f) = \mathbb{N}$ c'est un isomorphisme de sections commençantes et le lemme [3.3] page 61 montre alors que $f(e) = e$ par suite $\mathrm{im}(f) \neq \mathbb{N}$.

■

Ainsi les ensembles non finis ont un comportement amusant, si on rajoute un élément il ne contient pas plus d'élément que l'ensemble de départ. Cependant pour tout ensemble X il existe un ensemble qui contient strictement plus d'éléments que X, c'est l'ensemble $\mathcal{P}(X)$. Il est temps d'introduire quelques points de vocabulaire.

Définition 7.2 *Un ensemble est dit* ***infini*** *s'il n'est pas fini. Autrement dit X est infini s'il existe un sous-ensemble $Y \subsetneqq X$ tel que $\mathrm{B}[X,Y] \neq \varnothing$.*

Définition 7.3 *Les ensembles X et Y sont dit* ***équipotents*** *si il existe une bijection de X dans Y.*

Le lemme [6.2] page 136 et le théorème [6.4] page 151 permettent d'affirmer que si X et Y sont des ensembles finis (resp dénombrables) et s'il existe une application injective de X dans Y et une application injective de Y dans X alors X et Y sont équipotents, c'est l'objet du théorème de Cantor-Bernstein de montrer que des ensembles X et Y sont équipotents si il existe une application injective de X dans Y et une application injective de Y dans X.

7.2 *Théorème de Cantor-Bernstein*

7.2.1 *Énoncé et preuve du théorème*

On veut montrer le théorème suivant

Théorème 7.2 *Si X et Y sont des ensembles, pour que X et Y soient équipotents il faut et il suffit qu'il existe une application injective de X dans Y et une application injective de Y dans X. En d'autre termes*

$$\mathrm{B}[X,Y] \neq \varnothing \Leftrightarrow (\mathrm{Inj}[X,Y] \cap \mathrm{A}[X,Y] \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \mathrm{Inj}[Y,X] \cap \mathrm{A}[Y,X] \neq \varnothing)$$

Pour prouver ce théorème on établit quelques lemmes simples.

Lemme 7.1 *On note X et Y des ensembles , e un point externe à $X \cup Y$, $Z = X \cup Y \cup \{e\}$, de plus $f \in \mathrm{Inj}[X,Y] \cap \mathrm{A}[X,Y]$ est une application injective de X dans Y, $g \in \mathrm{Inj}[Y,X] \cap \mathrm{A}[Y,X]$ est une application injective de Y dans X. Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels alors :*

(i) Il existe une application $F \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, (\mathrm{A}[X \cup \{e\}, Z])]$ vérifiant les propriétés suivante

1. $F_0 = id_{X \cup \{e\}}$
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$ $F_{2n} \in \mathrm{A}[X \cup \{e\}, X \cup \{e\}]$ et $F_{2n+1} \in \mathrm{A}[X \cup \{e\}, Y \cup \{e\}]$*
3. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

$$F_{2n}(x) = \begin{cases} f^{-1}(F_{2n-1}(x)) & si \quad F_{2n-1}(x) \in f(X) \\ e & si \quad F_{2n-1}(x) \notin f(X) \end{cases} \tag{7.2}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F_{2n+1}(x) = \begin{cases} g^{-1}(F_{2n}(x)) & si \quad F_{2n}(x) \in g(Y) \\ e & si \quad F_{2n}(x) \notin g(Y) \end{cases} \tag{7.3}$$

4. e est un point cimetière de F : s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n_0}(x) = e$ alors pour tout $n \geq n_0$ $F_n(x) = e$

(ii) Il existe une application $G \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, (\mathrm{A}[Y \cup \{e\}, Z])]$ vérifiant les propriétés suivante

1. $G_0 = id_{Y\cup\{e\}}$

2. pour tout $n \in \mathbb{N}$ $G_{2n} \in \mathrm{A}[Y \cup \{e\}, Y \cup \{e\}]$ et $G_{2n+1} \in \mathrm{A}[Y \cup \{e\}, X \cup \{e\}]$

3. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$G_{2n}(y) = \begin{cases} g^{-1}(G_{2n-1}(y)) & si \quad G_{2n-1}(y) \in g(Y) \\ e & si \quad G_{2n-1}(y) \notin g(Y) \end{cases} \tag{7.4}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$G_{2n+1}(y) = \begin{cases} f^{-1}(G_{2n}(y)) & si \quad G_{2n}(y) \in f(X) \\ e & si \quad G_{2n}(y) \notin f(X) \end{cases} \tag{7.5}$$

4. e est un point cimetière de G : s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $G_{n_0}(y) = e$ alors pour tout $n \geq n_0$ $G_n(y) = e$

(iii) Supposons $X \cap Y = \varnothing$ alors

1. Si $y \in Y$ et si pour tout $k \leq n$ $G_{2j+1+k}(y) \in f(X) \cup g(Y)$ alors pour tout $p \leq n$

$$F_p(G_{2j+1}(y)) = G_{2j+1+p}(y) \tag{7.6}$$

2. Si $x \in X$ et si pour tout $k \leq n$ $F_{2j+1+k}(x) \in f(X) \cup g(Y)$ alors pour tout $p \leq n$

$$G_p(F_{2j+1}(x)) = F_{2j+1+p}(x). \tag{7.7}$$

Preuve

(i)

Considérons les applications $u \in \mathrm{A}[X \cup \{e\}, Y \cup \{e\}]$ et $v \in \mathrm{A}[Y \cup \{e\}, X \cup \{e\}]$ définies par

$$u(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & si \quad x \in g(Y) \\ e & si \quad x \notin g(Y) \end{cases}, \tag{7.8}$$

et

$$v(y) = \begin{cases} f^{-1}(x) & si \quad y \in f(X) \\ e & si \quad y \notin f(X) \end{cases}. \tag{7.9}$$

Puisque $v \circ u \in \mathrm{A}[X \cup \{e\}, X \cup \{e\}]$ le lemme [5.6] page 102 permet de définir l'itéré $(v \circ u)^n$ de $v \circ u$ on montre que si on pose

$$F_{2n} = (v \circ u)^n \text{ et } F_{2n+1} = u \circ (v \circ u)^n$$

F vérifie les propriétés de (i).

1. Par définition des itérés $F_0 = id_{X\cup\{e\}}$
2. Par définition des itérés $(v \circ u)^n \in \mathrm{A}[X \cup \{e\}, X \cup \{e\}]$ de plus, puisque $u \in \mathrm{A}[X \cup \{e\}, Y \cup \{e\}]$, on obtient $u \circ (v \circ u)^n \in \mathrm{A}[X \cup \{e\}, Y \cup \{e\}]$.
3. Par définition si $n \in \mathbb{N}^*$ on a $F_{2n-1} = u \circ (v \circ u)^{n-1}$ par suite

$$v \circ F_{2n-1} = v \circ u \circ (v \circ u)^{n-1} = (v \circ u)^n = F_{2n}$$

   et (7.2) n'est que la traduction de l'égalité $F_{2n} = v \circ F_{2n-1}$. De même (7.3) n'est que la traduction de l'égalité $F_{2n+1} = u \circ F_{2n}$
4. On suppose que $F_{n_0}(x) = e$ et on note

$$H = \{k \in \mathbb{N} / F_{n_0+k}(x) = e\}$$

   et on montre que H est héréditaire.

— Par hypothèse $0 \in H$
— on montre $[k \in H \Rightarrow k+1 \in H]$. Mais si $k \in H$ alors
  — Si $n_0 + k = 2n$ est pair on a $F_{n_0+k+1}(x) = u(F_{n_0+k}(x)) = u(e) = e$
  — Si $n_0 + k = 2n+1$ est impair : $F_{n_0+k+1}(x) = v(F_{n_0+k}(x)) = v(e) = e$

(ii)

Si u et v sont définies par (7.8) et (7.9) on vérifie aisèment que l'application G définie par

$$G_{2n} = (u \circ v)^n \text{ } et \text{ } G_{2n+1} = v \circ (u \circ v)^n$$

satisfait à *(ii)*

(iii)

Remarquons d'abord que puisque $X \cap Y = \varnothing$, on a $f(X) \cap g(Y) = \varnothing$, par suite l'assertion $G_l(y) \in f(X) \cup g(Y)$ signifie $G_l(y) \in f(X)$ si l est pair et $G_l(y) \in g(Y)$ si l est impair.

1. On pose
$$H = \{p \in \mathbb{N}_n / F_p(G_{2j+1}(y)) = G_{2j+1+p}(y)\}$$
et on montre que $H = \mathbb{N}_n$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer
   (a) $0 \in H$
   (b) $p < n \text{ } et \text{ } p \in H \Rightarrow p+1 \in H.$
   (a) D'abord puisque $F_0 = id_{X\cup\{e\}}$ on a $0 \in H$
   (b) Pour montrer $p < n \text{ } et \text{ } p \in H \Rightarrow p+1 \in H$ on distingue les cas p pair et p impair :
      i. D'abord on montre : $[p = 2k < n \text{ } et \text{ } p \in H \Rightarrow 2k+1 \in H]$. En effet, si $2k \in H$ alors $F_{2k}(G_{2j+1}(y)) = G_{2j+1+2k}(y)$, mais par hypothèse, puisque $2j+1+2k$ est impair, $G_{2j+1+2k}(y) \in g(Y)$, par suite $F_{2k}(G_{2j+1}(y) \in g(Y))$ et (7.3) montre alors que
      $$F_{2k+1}(G_{2j+1}(y)) = g^{-1}(F_{2k}(G_{2j+1}(y))) = g^{-1}(G_{2j+1+2k}(y))$$
      et par (7.4) on obtient donc
      $$F_{2k+1}(G_{2j+1}(y)) = G_{2j+1+2k+1}(y).$$
      ii. Ensuite on montre : $[p = 2k+1 < n \text{ } et \text{ } p \in H \Rightarrow 2k+2 \in H]$. En effet, si $2k+1 \in H$ alors $F_{2k+1}(G_{2j+1}(y)) = G_{2(j+k+1)}(y)$, mais par hypothèse, puisque $2j+2+2k$ est pair, $G_{2j+2+2k}(y) \in f(X)$, par suite $F_{2k+1}(G_{2j+1}(y) \in f(X))$ et (7.2) montre alors que
      $$F_{2k+2}(G_{2j+1}(y)) = f^{-1}(F_{2k+1}(G_{2j+1}(y))) = f^{-1}(G_{2j+1+2k}(y))$$
      et par (7.5) on obtient donc
      $$F_{2k+2}(G_{2j+1}(y)) = G_{2j+1+2k+2}(y).$$
2. La preuve de *2* qui est similaire à celle de *1* est laissée au soin du lecteur.

■

Ainsi le jeu consiste à appliquer g^{-1} et f^{-1} si on peut le faire, si ce n'est pas possible on arrête. On considère les applications U de X dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ et V de Y dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ définies par

$$U(x) = \{n \in \mathbb{N}/F_n(x) \notin f(X) \cup g(Y)\} \text{ } et \text{ } V(y) = \{n \in \mathbb{N}/G_n(y) \notin f(X) \cup g(Y)\}.$$

Si $+\infty$ est un point externe à $\mathbb{N}$ on note τ_X l'application de X dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\tau_X(x) = \begin{cases} \min_O\{n : n \in U(x)\} & si \quad U(x) \neq \varnothing \\ +\infty & si \quad U(x) = \varnothing \end{cases}$$

et τ_Y l'application de Y dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\tau_Y(y) = \left\{ \begin{array}{lll} \min_O\{n : n \in V(y)\} & si & V(y) \neq \varnothing \\ +\infty & si & V(y) = \varnothing \end{array} \right. .$$

Ainsi, dire que $\tau_X(x) = 0$ c'est dire que $x \in X \cap f(X)^c \cap g(Y)^c$. Dans le cas où $X \cap Y = \varnothing$ alors

— dire que $\tau_X(x) = 1$ c'est affirmer les assertions suivantes :
  1. $x \in g(Y)$
  2. $g^{-1}(x) \notin f(X)$,

— dire que $\tau_X(x) = 2$ c'est affirmer les assertions suivantes :
  1. $x \in g(Y)$
  2. $g^{-1}(x) \in f(X)$
  3. $f^{-1}(g^{-1}(x)) \notin g(Y)$

On va partitionner les ensembles X et Y en posant

$$X_\infty = \{x \in X / \tau_X(x) = +\infty\} \ , \ Y_\infty = \{y \in Y / \tau_Y(y) = +\infty\}$$

$$X_p = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X / \tau_X(x) = 2k\} \ , \ Y_p = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{y \in Y / \tau_Y(y) = 2k\}$$

et

$$X_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X / \tau_X(x) = 2k+1\} \ , \ Y_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{y \in Y / \tau_Y(y) = 2k+1\}$$

On a

$$X = X_\infty \cup X_p \cup X_i \textit{ et } Y = Y_\infty \cup Y_p \cup Y_i$$

et

$$X_\infty \cap X_p = X_\infty \cap X_i = X_p \cap X_i = \varnothing$$

Les triplets (X_∞, X_p, X_i) et (Y_∞, Y_p, Y_i) sont appelés les partitions de X et Y subordonnées à f et g. Le lemme qui suit est la preuve du théorème de Cantor-Bernstein dans le cas $X \cap Y = \varnothing$.

Lemme 7.2 *On note X et Y des ensembles d'intersection vide, $f \in \mathrm{Inj}[X, Y] \cap \mathrm{A}[X, Y]$ une application injective de X dans Y, $g \in \mathrm{Inj}[Y, X] \cap \mathrm{A}[Y, X]$ une application injective de Y dans X. Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels, (X_∞, X_p, X_i) et (Y_∞, Y_p, Y_i) sont les partitions de X et Y subordonnées à f et g alors :*
(i) $f(X_\infty) = Y_\infty$
(ii) $f(X_p) = Y_i$
(iii) $g^{-1}(X_i) = Y_p$
(iii) La relation h de X dans Y définie par

$$h = [f \cap ((X_\infty \cup X_p) \times Y)] \cup [g^{-1} \cap (X_i \times Y)]$$

est une bijection de X dans Y qui s'écrit en notation usuelle

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{lll} f(x) & si & x \in X_\infty \cup X_p \\ g^{-1}(x) & si & x \in X_i \end{array} \right. .$$

Preuve

(i)

1. D'abord on montre $f(X_\infty) \subset Y_\infty$. Si $x \in X_\infty$ on pose

$$H = \{n \in \mathbb{N}/F_n(x) = G_{n+1}(f(x))\}$$

et on montre que H est héréditaire.

(a) D'abord $0 \in H$ puisque d'après (7.5) page 159 on a $G_1(f(x)) = x$

(b) Pour montrer $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$ on distingue les cas n pair et n impair :

i. D'abord on montre : $[n = 2k \textit{ et } n \in H \Rightarrow 2k+1 \in H]$. En effet, si $2k \in H$ alors $F_{2k}(x) = G_{2k+1}(f(x))$, mais par hypothèse, puisque $x \in X_\infty$ et $2k$ est pair, $F_{2k}(x) \in g(Y)$, par suite on a $G_{2k+1}(f(x)) \in g(Y)$ ainsi par (7.3) et (7.4) page 159 on obtient

$$F_{2k+1}(x) = g^{-1}(F_{2k}(x)) = g^{-1}(G_{2k+1}(f(x))) = G_{2k+2}(f(x))$$

en particulier

$$F_{2k+1}(x) = G_{2k+2}(f(x)).$$

et $2k+1 \in H$.

ii. Ensuite on montre : $[n = 2k+1 \textit{ et } n \in H \Rightarrow 2k+2 \in H]$. En effet, si $2k+1 \in H$ alors $F_{2k+1}(x) = G_{2(k+1)}(f(x))$, mais il résulte de l'hypothèse $x \in X_\infty$ et du fait que $2k+1$ est impair que $F_{2k+1}(x) \in f(X)$, par suite $G_{2(k+1)}(f(x)) \in f(X)$ et (7.2) page 158 montre alors que

$$F_{2k+2}(x) = f^{-1}(F_{2k+1}(x)) = f^{-1}(G_{2k+2}(f(x)))$$

et par (7.5) on obtient donc

$$F_{2k+2}(x) = G_{2k+2+1}(f(x)).$$

Ainsi H est héréditaire et

$$x \in X_\infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ F_n(x) = G_{n+1}(f(x))$$

puisque $G_0(f(x)) = f(x)$ on obtient

$$x \in X_\infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ G_n(f(x)) \in F(X) \cup g(Y),$$

par suite $f(X_\infty) \subset Y_\infty$.

2. Ensuite on montre $Y_\infty \subset f(X_\infty)$. En effet, si $y \in Y_\infty$ alors (7.6) page 159 permet d'affirmer que pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$F_p(G_1(y)) = G_{p+1}(y)$$

ainsi on obtient

$$y \in Y_\infty \Rightarrow G_1(y) \in X_\infty. \tag{7.10}$$

mais si $y \in Y_\infty$ alors $G_1(y) = f^{-1}(y)$ par suite (7.10) entraîne l'inclusion $f^{-1}(Y_\infty) \subset X_\infty$ d'où (puisque $Y_\infty \subset \mathrm{dom}(f^{-1})$ $Y_\infty \subset f(X_\infty)$.

(ii)

1)*Preuve de* $f(X_p) \subset Y_i$

On montre que si $\tau_X(x) = 2n$ alors $\tau_Y(f(x)) = 2n+1$. d'abord si $n = 0$ alors $x \notin g(Y)$ par suite $f(x) \in f(X)$ et $f^{-1}(f(x)) \notin g(Y)$ ainsi $\tau_Y(f(x)) = 1$. On peut donc supposer $n > 0$.

1. D'abord on montre $\tau_Y(f(x)) \geq 2n+1$. On pose

$$H = \{k \in \mathbb{N}_{2n-1}/F_k(x) = G_{k+1}(f(x))\}$$

et on montre que $H = \mathbb{N}_{2n-1}$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

(a) $0 \in H$

(b) $[k < 2n-1 \; et \; k \in H \Rightarrow k+1 \in H]$

(a) Le fait que $0 \in H$ provient de $G_1(f(x)) = x$

(b) Pour montrer $k < 2n-1 \; et \; k \in H \Rightarrow k+1 \in H$ on distingue les cas k pair et k impair :

i. D'abord on montre : $[k = 2p < 2n-1 \; et \; k \in H \Rightarrow 2p+1 \in H]$. En effet, si $2p \in H$ alors $F_{2p}(x) = G_{2p+1}(f(x))$, mais par hypothèse, puisque $2p < \tau_X(x)$ et $2p$ est pair, $F_{2p}(x) \in g(Y)$, par suite on a $G_{2p+1}(f(x)) \in g(Y))$ ainsi par (7.3) et (7.4) on obtient

$$F_{2p+1}(x) = g^{-1}(F_{2p}(x)) = g^{-1}(G_{2p+1}(f(x))) = G_{2p+2}(f(x))$$

en particulier

$$F_{2p+1}(x) = G_{2p+2}(f(x)),$$

et $2p+1 \in H$.

ii. Ensuite on montre : $[k = 2p+1 < 2n-1 \; et \; k \in H \Rightarrow 2p+2 \in H]$. En effet, si $2p+1 \in H$ alors $F_{2p+1}(x) = G_{2(p+1)}(f(x))$, mais il résulte de l'hypothèse $2p+1 < \tau_X(x)$ et du fait que $2p+1$ est impair, $F_{2p+1}(x) \in f(X)$, par suite $G_{2(p+1)}(f(x)) \in f(X))$ et (7.2) montre alors que

$$F_{2p+2}(x) = f^{-1}(F_{2p+1}(x)) = f^{-1}(G_{2p+2}(f(x)))$$

et par (7.5) on obtient donc

$$F_{2p+2}(x) = G_{2p+2+1}(f(x)).$$

Ainsi $H = \mathbb{N}_{2n-1}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}_{2n-1}$ on a $G_{p+1}(f(x)) \in f(X) \cup g(Y)$, ce qui montre que $\tau_Y(f(x)) > 2n$.

2. ensuite on montre $\tau_Y(f(x)) \leq 2n+1$. Mais si $\tau_Y(f(x)) > 2n+1$ alors pour tout $k \leq 2n+1$ $G_k(f(x)) \in f(X) \cup g(Y)$ ainsi il résulte de l'égalité (7.6) page 159 que pour $p \leq 2n$

$$F_p(G_1(f(x))) = G_{p+1}(f(x))$$

l'égalité $G_1(f(x)) = x$ donne alors lorsque $p = 2n$

$$F_{2n}(x) = G_{2n+1}(x)$$

et cette égalité contredit l'assertion $\tau_X(x) = 2n$, par suite on obtient $\tau_Y(f(x)) = 2n+1$.

2) *Preuve de* $\;Y_i \subset f(X_p)$

Puisque $Y_i \subset f(X)$ il suffit de montrer $f^{-1}(Y_i) \subset X_p$. On montre que l'égalité $\tau_Y(y) = 2n+1$ entraîne $\tau_X(f^{-1}(y)) = 2n$.

1. D'abord on montre $\tau_X(f^{-1}(y)) \geq 2n$. En effet, puisque pour tout $k \leq 2n$ on a $G_k(y) \in f(X) \cup g(Y)$ l'égalité (7.6) page 159 permet d'affirmer que pour tout $p \leq 2n-1$ on a $F_p(G_1(y)) = G_{p+1}(y)$ par suite si $p \leq 2n-1$ alors $F_p(G_1(y)) \in f(X) \cup g(Y)$. Mais par définition de G_1 on a, si $y \in f(X)$, $G_1(y) = f^{-1}(y)$, ainsi pour tout $p \leq 2n-1$, $F_p(f^{-1}(y)) \in f(X) \cup g(Y)$ et $\tau_X(f^{-1}(y)) \geq 2n$.
2. Ensuite on montre $\tau_X(f^{-1}(y)) \leq 2n$. Pour cela, on prouve que l'assertion $\tau_X(f^{-1}(y)) > 2n$ entraîne $G_{2n+1}(y) \in g(Y)$, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ $\tau_Y(y) = 2n+1$. On pose

$$H = \{k \in \mathbb{N}_{2n} / F_p(f^{-1}(y)) = G_{p+1}(y)\}$$

et on montre que $H = \mathbb{N}_{2n}$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

(a) $0 \in H$

(b) $[p < 2n \; et \; p \in H \Rightarrow p+1 \in H]$.

(a) Le fait que $0 \in H$ provient de l'égalité $G_1(y) = f^{-1}(y)$

(b) Pour montrer $[p < 2n \; et \; p \in H \Rightarrow p+1 \in H]$ on distingue les cas p pair et p impair.

i. D'abord on montre $[p = 2k < 2n \; et \; p \in H \Rightarrow 2k+1 \in H]$. En effet, si $2k \in H$ alors $F_{2k}(f^{-1}(y)) = G_{2k+1}(y)$ ainsi il résulte de l'hypothèse $\tau_X(f^{-1}(y)) > 2n$ que $G_{2k+1}(y) \in g(Y)$ par suite on obtient

$$F_{2k+1}(f^{-1}(y)) = g^{-1}(F_{2k}(f^{-1}(y))) = g^{-1}(G_{2k+1}(y)) = G_{2k+2}(y).$$

ii. Ensuite on montre $[p = 2k+1 < 2n \; et \; p \in H \Rightarrow 2k+2 \in H]$. En effet, si $2k+1 \in H$ alors $F_{2k+1}(f^{-1}(y)) = G_{2k+2}(y)$ ainsi il résulte de l'hypothèse $\tau_X(f^{-1}(y)) > 2n$ que $G_{2k+2}(y) \in f(X)$ par suite on obtient

$$F_{2k+2}(f^{-1}(y)) = f^{-1}(F_{2k+1}(f^{-1}(y))) = f^{-1}(G_{2k+2}(y)) = G_{2k+2+1}(y).$$

Ainsi $H = \mathbb{N}_{2n}$ et en particulier $F_{2n}(f^{-1}(y)) = G_{2n+1}(y)$, par suite $\tau_X(f^{-1}(y)) = 2n$ et $Y_i \subset f(X_p)$.

(iii)

Les permutations formelles $X \leftrightarrow Y$ et $f \leftrightarrow g$ montrent que $g(Y_p) = X_i$ par suite l'injectivité de g entraîne $g^{-1}(X_i) = Y_p$.

(iv)

Puisque $X_i \subset g(Y)$ on a

$$\mathrm{dom}(g^{-1} \cap (X_i \times Y)) = X_i \; et \; \mathrm{dom}(f \cap (X_\infty \cup X_p) \times Y) = X_\infty \cup X_p$$

ainsi l'égalité $(X_\infty \cup X_p) \cap X_i = \varnothing$ et le lemme [1.6] page 26 permettent d'affirmer que h est une fonction avec

$$\mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(f \cap (X_\infty \cup X_p) \times Y) \cup \mathrm{dom}(g^{-1} \cap (X_i \times Y)) = X_\infty \cup X_p \cup X_i = X$$

ainsi h est une application et on vérifie facilement (en utilisant (i) (ii) et (iii)) que l'application h^{-1} de Y dans X définie par

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & si \quad y \in Y_\infty \cup Y_i \\ g(y) & si \quad y \in Y_p \end{cases}$$

est l'inverse de h. ■

Ainsi dans le cas où $X \cap Y = \varnothing$ le théorème de Cantor-Bernstein est prouvé, le cas "général" provient du lemme suivant.

Lemme 7.3 *On note X et Y des ensembles et e un point externe à $X \cup Y$.*
(i) S'il existe une bijection de $X \times \{e\}$ dans $\{e\} \times Y$ il existe une bijection de X dans Y.
(ii) S'il existe une application injective de X dans Y et une application injective de Y dans X il existe une bijection de X dans Y.

Preuve

(i)

Si h est une bijection de $X \times \{e\}$ dans $\{e\} \times Y$ la relation φ de X dans Y définie par

$$\varphi = \{(x,y) \in X \times Y / (e,y) = h(x,e)\}$$

est une bijection d'inverse

$$\varphi^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X / (x,e) = h^{-1}(e,y)\}$$

(ii)

Si $f \in \mathrm{Inj}[X,Y] \cap \mathrm{A}[X,Y]$ est une application injective de X dans Y et $g \in \mathrm{Inj}[Y,X] \cap \mathrm{A}[Y,X]$ est une application injective de Y dans X l'application u de $X \times \{e\}$ dans $\{e\} \times Y$ définie par

$$u(x,e) = (e, f(x))$$

est une application injective de $X \times \{e\}$ dans $\{e\} \times Y$ et l'application v de $\{e\} \times Y$ dans $X \times \{e\}$ définie par

$$v(e,y) = (g(y), e)$$

est une application injective de $\{e\} \times Y$ dans $X \times \{e\}$, ainsi il résulte de l'égalité $(X \times \{e\}) \cap (\{e\} \times Y) = \varnothing$ et du lemme [7.2] page 161 qu'il existe une bijection de $X \times \{e\}$ dans $\{e\} \times Y$, (i) permet alors d'affirmer qu'il existe une bijection de X dans Y. ∎

Le théorème de Cantor-Bernstein peut aussi s'exprimer de la manière suivante

Théorème 7.3 *Si X et Y sont des ensembles, pour que X et Y soient équipotents il faut et il suffit qu'il existe une surjection de X dans Y et une surjection de Y dans X.*

Preuve En effet, si $s : X \mapsto Y$ est une surjection de X dans Y alors pour tout $y \in Y$ l'ensemble

$$s^{-1}(y) = \{x \in \mathrm{dom}(s) / s(x) = y\}$$

est non vide, ainsi si h_X est une fonction de choix pour X (voir axiome [2.1] page 48) l'application g de Y dans X définie par $g(y) = h_X(s^{-1}(y))$ qui vérifie $s \circ g = id_Y$ est injective, par suite il existe une application injective de Y dans X. Ainsi, s'il existe une surjection de X dans Y et une surjection de Y dans X il existe une application injective de X dans Y et une application injective de Y dans X, le théorème de Cantor-Bernstein montre alors que X et Y sont équipotents. ∎

Le théorème de Cantor-Bernstein permet d'introduire des connecteurs acceptables supplémentaires dans la théorie des ensembles.

7.2.2 *Équipotence*

On commence par les définitions.

Définition 7.4 *Si X et Y sont des ensembles*

1. *l'assertion*
$$X \cong Y$$
signifie que X et Y sont équipotents : $\mathrm{B}[X,Y] \neq \varnothing$
2. *L'assertion*
$$X \preceq Y$$
signifie qu'il existe une application injective de X dans Y : autrement dit $\mathrm{Inj}[X,Y] \cap \mathrm{A}[X,Y] \neq \varnothing$. *de plus l'assertion*
$$X \prec Y$$
signifie $X \preceq Y$ et $\mathrm{B}[X,Y] = \varnothing$
3. *Si $X \cong Y$ on dit que X et Y ont même cardinal et on écrit*
$$\mathrm{card}(X) = \mathrm{Card}(Y).$$
4. *Si $X \preceq Y$ on dit que le cardinal de X est inférieur au cardinal de Y et on écrit*
$$\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(Y)$$

Les théorèmes de plongement et de Cantor-Bernstein s'énoncent alors simplement.

Lemme 7.4 ***(relation d'équipotence)***
(i) Si X et Y sont des ensembles alors

$$X \preceq Y \quad \text{ou} \quad Y \preceq X$$

(ii) Si X et Y sont des ensembles vérifiant $X \preceq Y$ et $Y \preceq X$ alors $X \cong Y$.
(iii) Si $\mathbb{U}$ est un ensemble alors La relation Eq *de $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ définie par*

$$\mathrm{Eq} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{U}) \times \mathcal{P}(\mathbb{U})/X \cong Y\}$$

vérifie

1. Eq *est réflexive :* $[\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{U})\ (X, X) \in \mathrm{Eq}]$
2. Eq *est symmétrique :* $[(X, Y) \in \mathrm{Eq} \Rightarrow (Y, X) \in \mathrm{Eq}]$
3. Eq *est transitive :* $[(X, Y) \in \mathrm{Eq}$ *et* $(Y, Z) \in \mathrm{Eq} \Rightarrow (X, Z) \in \mathrm{Eq}]$.
4. *L'application $X \mapsto \mathrm{Eq}(X)$ de $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{U}))$ définie par*

$$\mathrm{Eq}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{U})/(X, Y) \in \mathrm{Eq}\}$$

   vérifie : $\mathrm{Eq}(X) \cap \mathrm{Eq}(X') \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{Eq}(X) = \mathrm{Eq}(X')$

(iv) Si $\mathbb{U}$ est un ensemble alors La relation O de $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ définie par

$$O_{eq} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{U}) \times \mathcal{P}(\mathbb{U})/X \preceq Y\}$$

vérifie

1. O_{eq} *est réflexive :* $[\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{U})\ (X, X) \in O_{eq}]$
2. $[(X, Y) \in O_{eq}$ *et* $(Y, X) \in O_{eq} \Rightarrow X \cong Y]$.
3. O_{eq} *est transitive :* $[(X, Y) \in O_{eq} \quad \text{et} \quad (Y, Z) \in O_{eq} \Rightarrow (X, Z) \in O_{eq}]$.

(v) Si $(\mathbb{U}, O)$ est un ensemble bien ordonné et $\mathcal{S}(\mathbb{U})$ l'ensemble des sections commençantes de $(\mathbb{U}, O)$ il existe une application φ de $\mathcal{P}^*(\mathbb{U})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{U})$ qui possède la propriété suivante :

$$\forall X \in \mathcal{P}^*(\mathbb{U})\ \varphi(X) \cong X.$$

Preuve

(i)

C'est le théorème [2.2] page 55

(ii)

C'est le théorème de Cantor-Bernstein (th [7.2]) page 158)

(iii)

1. id_X est une bijection de X dans X.
2. Si f est une bijection de X dans Y alors f^{-1} est une bijection de Y dans X.
3. Si f est une bijection de X dans Y et g est une bijection de Y dans Z alors $g \circ f$ est une bijection de X dans Z.
4. (a) D'abord on montre $\mathrm{Eq}(X) \subset \mathrm{Eq}(X')$.On remarque que $X \in \mathrm{Eq}(X')$,en effet si $Z \in \mathrm{Eq}(X) \cap \mathrm{Eq}(X')$ on a $(X, Z) \in \mathrm{Eq}$ et $(X', Z) \in \mathrm{Eq}$ ainsi
   — par symmétrie on a $(X', Z) \in \mathrm{Eq}$ et $(Z, X) \in \mathrm{Eq}$
   — par transitivité on obtient $(X', X) \in \mathrm{Eq}$

par suite on obtient

$$\mathrm{Eq}(X) \cap \mathrm{Eq}(X') \neq \varnothing \Rightarrow X \in \mathrm{Eq}(X').$$

En particulier $Y \in \mathrm{Eq}(X) \Rightarrow (X, Y) \in \mathrm{Eq}$ et puisque $(X', X) \in \mathrm{Eq}$ la transitivité de Eq permet d'affirmer que $(X', Y) \in \mathrm{Eq}$, autrement dit $Y \in \mathrm{Eq}(X')$.

(b) Pour montrer $\mathrm{Eq}(X') \subset \mathrm{Eq}(X)$ il suffit de transposer formellement X et X'.

(iv)

1. id_X est une application injective de X dans X
2. voir (ii)
3. Si f est une application injective de X dans Y et g est une application injective de Y dans Z alors $g \circ f$ est une application injective de X dans Z.

(v)

On note Γ la relation de $\mathcal{P}^*(\mathbb{U})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{U})$ définie par

$$\Gamma = \{(X, S) \in \mathcal{P}^*(\mathbb{U}) \times \mathcal{S}(\mathbb{U}) / X \cong S\}$$

et on montre $\mathrm{dom}(\Gamma) = \mathcal{P}^*(\mathbb{U})$. Il s'agit de montrer que si $X \in \mathcal{P}^*(\mathbb{U})$ il existe $S \in \mathcal{S}(\mathbb{U})$ tel que $X \cong S$. Si X est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{U}$ alors $(X, O \cap (X \times X))$ est bien ordonné, ainsi le théorème [3.1] page 63 permet d'affirmer que l'une des assertions suivantes est vraie :

1. Il existe une application strictement croissante de $(X, O \cap (X \times X))$ dans $(\mathbb{U}, O)$ dont l'image est une section commençante de $(\mathbb{U}, O)$
2. Il existe une application strictement croissante de $(\mathbb{U}, O)$ dans l'ensemble ordonné $(X, O \cap (X \times X))$ dont l'image est une section commençante de $(X, O \cap (X \times X))$

Si 1 est vrai alors X est en bijection avec une section commençante de $(\mathbb{U}, O)$ par suite $X \in \mathrm{dom}(\Gamma)$. On montre que si 2 est vrai alors X est en bijection avec $\mathbb{U}$. On montre d'abord que si f est une application strictement croissante de $(\mathbb{U}, O)$ dans $(\mathbb{U}, O)$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{U}\ (x, f(x)) \in O. \tag{7.11}$$

On montre que l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{U} / (x, f(x)) \notin O\} = \{x \in \mathbb{U} / f(x) < x\}$$

est vide. Si E est non vide il possède un élément minimum qu'on note $h_{\mathbb{U}}(E)$. Si $y = f(h_{\mathbb{U}}(E))$ alors, puisque par définition d'un minimum $h_{\mathbb{U}}(E) \in E$, on a $(h_{\mathbb{U}}(E), y) \notin O$ et en particulier $y \neq h_{\mathbb{U}}(E)$. Puisque $(\mathbb{U}, O)$ est totalement ordonné on obtient $(y, h_{\mathbb{U}}(E)) \in O$ (en d'autres termes $y < h_{\mathbb{U}}(E)$). Ainsi y - qui est strictement plus petit que l'élément minimum de E - est un élément de E^c. Mais la croissance stricte de f montre que $y \in E$, puisque $y < h_{\mathbb{U}}(E) \Rightarrow f(y) < y$. Ainsi l'assertion $E \neq \varnothing$ entraîne $E^c \cap E \neq \varnothing$, par suite $E = \varnothing$ et

$$\forall\ x \in X : (x, f(x)) \in O.$$

Ceci permet de montrer que $X \cap (f(\mathbb{U}))^c = \varnothing$, en effet, si cet ensemble est non vide il posséde un plus petit élément $h = \min_O\{x : x \in X \cap (f(\mathbb{U}))^c\}$. On a $(h, f(h)) \in X \times X$ et par (7.11) on obtient

$$(h, f(h)) \in O \cap (X \times X).$$

Puisque $f(\mathbb{U})$ est une section commençante de $(X, O \cap (X \times X))$ l'assertion $(h, f(h)) \in O \cap (X \times X)$ entraîne, puisque $f(h) \in f(\mathbb{U})$, que $h \in f(\mathbb{U})$ ainsi on obtient :

$$X \cap (f(\mathbb{U}))^c \neq \varnothing \Rightarrow h \in f(\mathbb{U}) \cap (f(\mathbb{U}))^c,$$

par suite $X \cap (f(\mathbb{U})^c = \varnothing$ et $f(\mathbb{U}) = X$, ce qui montre que f est une bijection de $\mathbb{U}$ dans X. On vient donc de montrer que pour tout $X \in \mathcal{P}^*(\mathbb{U})$ l'ensemble

$$\Gamma(X) = \{S \in \mathcal{S}(\mathbb{U})/X \cong S\}$$

est non vide. L'axiome du choix (axiome [2.1] page 48) permet d'affirmer qu'il existe une application h de $\mathcal{P}^*(\mathcal{S}(\mathbb{U}))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{U})$ qui vérifie

$$\forall\ Y \in \mathcal{P}^*(\mathcal{S}(\mathbb{U}))\ h(Y) \in Y$$

L'application φ de $\mathcal{P}^*(\mathbb{U})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{U})$ définie par

$$\varphi(X) = h(\Gamma(X))$$

vérifie donc $\varphi(X) \cong X$. ■

D'après le théorème [6.4] page 151 si D est dénombrable alors il existe une bijection de $D \times D$ dans D : $\mathrm{B}[D \times D, D] \neq \varnothing$. En fait on peut voir que pour tout ensemble infini X on a $\mathrm{B}[X \times X, X] \neq \varnothing$.

7.3 *Ensembles infinis*

7.3.1 *Quelques résultats utiles*

Si X est un ensemble infini on note $\mathcal{P}_\infty(X)$ la famille des sous-ensembles infinis de X, le théorème [6.3] page 128 montre que tout ensemble infini possède un ensemble dénombrable, par suite l'ensemble

$$\Gamma(X) = \{F \in \mathcal{P}_\infty(X)/\mathrm{B}[F \times F, F] \neq \varnothing\}$$

est non vide puisque tout sous-ensemble dénombrable de X est un élément de $\Gamma(X)$. Dans le lemme [7.5] on montre que si $F \in \Gamma(X)$ l'ensemble

$$\mathfrak{U}(F) = \{A \in \mathcal{P}(X)/\mathrm{B}[F, A] \neq \varnothing\}$$

est stable par réunion disjointe.

Lemme 7.5 *On note $\mathbb{U}$ un ensemble, X un ensemble infini , F un élément de l'ensemble*

$$\Gamma(X) = \{F \in \mathcal{P}_\infty(X)/\mathrm{B}[F \times F, F] \neq \varnothing\}$$

et

$$\mathfrak{U}(F, \mathbb{U}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{U})/\mathrm{B}[F, A] \neq \varnothing\}$$

(i) Si Y est un ensemble infini et e un point externe à Y alors

$$\mathrm{B}[Y, Y \cup \{e\}] \neq \varnothing.$$

(ii) Si Y et Z sont des ensembles infinis tels que $Y \cap Z = \varnothing$ il existe une application injective de $Y \cup Z$ dans $Y \times Z$.

(iii) Si $(Y, Z) \in \mathfrak{U}(F, \mathbb{U}) \times \mathfrak{U}(F, \mathbb{U})$ et $Y \cap Z = \varnothing$ il existe une bijection de $Y \cup Z$ dans F. En d'autres termes, pour tout ensemble $\mathbb{U}$ l'assertion

$$(Y, Z) \in \mathfrak{U}(F, \mathbb{U}) \times \mathfrak{U}(F, \mathbb{U}) \quad \text{et} \quad Y \cap Z = \varnothing \Rightarrow Y \cup Z \in \mathfrak{U}(F, \mathbb{U}).$$

est vérifiée.

(iv) Si $Y \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, \mathfrak{U}(F, \mathbb{U})]$ est une application de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathfrak{U}(F, \mathbb{U})$ qui vérifie

$$k \neq p \Rightarrow Y_k \cap Y_p = \varnothing \tag{7.12}$$

il existe une bijection de $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} Y_k$ dans F

(v) Si l'ensemble $F^c = \{x \in X/x \notin F\}$ est non vide et s'il existe une application injective de F^c dans F il existe une bijection de X dans F et une bijection de $X \times X$ dans X.

Preuve

(i)

On montre qu'il existe une application injective de $Y \cup \{e\}$ dans Y. Puisque Y est infini il existe un sous-ensemble Z de Y tel que $Y \neq Z$ et $\mathrm{B}[Y, Z] \neq \varnothing$. Si g est une bijection de Y dans Z et $y_0 \in Y \cap Z^c$ l'application f de $Y \cup \{e\}$ dans $Z \cup \{y_0\}$ définie par

$$f(y) = \begin{cases} g(y) & si \quad y \in Y \\ y_0 & si \quad y = e \end{cases}$$

est une bijection de $Y \cup \{e\}$ dans $Z \cup \{x_0\}$ donc une application injective de $Y \cup \{e\}$ dans Y. Comme id_Y est une application injective de Y dans $Y \cup \{e\}$ le théorème de Cantor-Bernstein (théorème [7.2] page 158) permet d'affirmer qu'il existe une bijection de $Y \cup \{e\}$ dans Y.

(ii)

Si e est un point externe á $Y \cup Z$ l'application f de $Y \cup Z$ dans $(Y \cup \{e\}) \times (Z \cup \{e\})$ définie par

$$f(y) = \begin{cases} (y, e) & si \quad y \in Y \\ (e, y) & si \quad y \in Z \end{cases}$$

est une application injective de $Y \cup Z$ dans $(Y \cup \{e\}) \times (Z \cup \{e\})$, mais d'après (i) il existe une bijection g de $Y \cup \{e\}$ dans Y et une bijection h de $Z \cup \{e\}$ dans Z, ainsi si φ est la bijection de $(Y \cup \{e\}) \times (Z \cup \{e\})$ dans $Y \times Z$ définie par

$$\varphi(y, z) = (g(y), h(z))$$

$\varphi \circ f$ est une application injective de $Y \cup Z$ dans $Y \times Z$.

(iii)

On montre qu'il existe une application injective de $Y \cup Z$ dans F. D'après (ii) il existe une application injective f de $Y \cup Z$ dans $Y \times Z$, or par définition de $\mathfrak{U}(F)$ il existe une bijection g de Y dans F et une bijection h de Z dans F, ainsi si φ est la bijection de $Y \times Z$ dans $F \times F$ définie par

$$\varphi(y, z) = (g(y), h(z))$$

$\varphi \circ f$ est une application injective de $Y \cup Z$ dans $F \times F$. Par définition de $\Gamma(X)$ il existe une bijection ψ de $F \times F$ dans F par suite $\psi \circ \varphi \circ f$ est une application injective de $Y \cup Z$ dans F. Puisque g^{-1} est une application injective de F dans $Y \cup Z$ le théorème de Cantor-Bernstein (th [7.2] page 158) permet d'affirmer qu'il existe une bijection de $Y \cup Z$ dans F.

(iv)

On pose

$$H = \{p \in \mathbb{N}_n / \bigcup_{k=0}^{p} Y_k \in \mathfrak{U}(F, \mathbb{U})\}$$

et on montre que $H = \mathbb{N}_n$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

— $0 \in H$, c'est l'hypothèse $Y_0 \in \mathfrak{U}(F, \mathbb{U})$

— $p < n$ *et* $p \in H \Rightarrow p + 1 \in H$. Or si $p < n$ *et* $p \in H$ et $Y = \bigcup_{k=0}^{p} Y_k$, $Z = Y_{p+1}$ on a $(Y, Z) \in \mathfrak{U}(F, \mathbb{U}) \times \mathfrak{U}(F, \mathbb{U})$ et $Y \cap Z = \varnothing$ par suite (iii) montre que

$$Y \cup Z = \bigcup_{k=0}^{p+1} X_k \in \mathfrak{U}(F, \mathbb{U}).$$

(v)

On montre

1. Il existe une bijection de $F \times F^c$ dans F
2. il existe une bijection de $F \times X$ dans F
3. il existe une bijection X dans F
4. il existe une bijection de $X \times X$ dans X.

1. On note f une bijection de $F \times F$ dans F et g une application injective de F^c dans F alors l'application h de $F \times F^c$ dans F définie par
$$h(x, y) = f(x, g(y))$$
est une application injective de $F \times F^c$ dans F, d'autre part si $a \in F^c$ l'application i de F dans $F \times F^c$ définie par $i(x) = (x, a)$ est injective,ainsi le théorème de Cantor-Bernstein (th [7.2] page 158) permet d'affirmer qu'il existe une bijection de $F \times F^c$ dans F.
2. On note $\mathfrak{U}(F) = \mathfrak{U}(F, X \times X) = \{\Gamma \in \mathcal{P}(X \times X)/\mathrm{B}[\Gamma, F] \neq \varnothing\}$ alors
— d'après 1. on a $F \times F^c \in \mathfrak{U}(F)$
— par définition de $\Gamma(X)$ on a $F \times F \in \mathfrak{U}(F)$.
Ainsi (ii) permet d'affirmer que $(F \times F^c) \cup (F \times F) = F \times X$ est un élément de $\mathfrak{U}(F)$.
3. Si φ est une bijection de $F \times X$ dans F alors si $a \in F$ l'application ψ de X dans F définie par
$$\psi(x) = \varphi(a, x)$$
est injective, puisque $F \subset X$ le théorème de Cantor-Bernstein entraîne qu'il existe une bijection de F dans X.
4. Si f est une bijection de $F \times F$ dans F et g est une bijection de X dans F l'application h de $X \times X$ dans X définie par
$$h(x, y) = g^{-1}(f(g(x), g(y)))$$
est une bijection de $X \times X$ dans X.

■

Ainsi pour montrer que $\mathrm{B}[X \times X, X] \neq \varnothing$ il suffit de trouver un élément F de $\Gamma(X)$ qui est suffisamment « gros » pour qu'il existe une application injective de F^c dans F. On considère le sous-ensemble $\Phi(X)$ de l'ensemble $\Gamma = \mathcal{P}^*(X) \times \mathrm{F}[X \times X, X]$ défini par
$$\Phi(X) = \{(F, f) \in \Gamma/f \in \mathrm{B}[F \times F, F]\}$$
et on le munit de l'ordre
$$O_\Phi = \{((F, f), (G, g)) \in \Phi(X) \times \Phi(X)/F \subset G \ et \ f \subset g\}.$$
On montre que $(\Phi(X), O_\Phi)$ est fortement inductif et que si $(F_{\max}, f_{\max})$ est un élément maximal de $(\Phi(X), O_\Phi)$ tel que $(F_{\max})^c \neq \varnothing$ il existe une application injective de $(F_{max})^c$ dans F_{max}.

Théorème 7.4 *On note X un ensemble infini,*
$$\Gamma = \mathfrak{P}(X)^* \times \mathrm{F}[X \times X, X],$$
$$\Phi(X) = \{(F, f) \in \Gamma/f \in \mathrm{B}[F \times F, F]\}$$
et
$$O_\Phi = \{((F, f), (G, g)) \in \Phi(X) \times \Phi(X)/F \subset G \ et \ f \subset g\}.$$
(i) $(\Phi(X), O_\Phi)$ est un ensemble ordonné inductif.

(ii) Si F est un ensemble infini vérifiant $(F, f) \in \Phi(X)$ et s'il existe une application injective de F dans F^c alors (F, f) n'est pas maximal dans $(\Phi(X), O_\Phi)$.

(iii) Il existe une bijection de $X \times X$ dans X.

Preuve

(i)

On laisse au lecteur le soin de montrer que O_Φ est un ordre sur $\Phi(X)$, on montre que $(\Phi(X), O_\Phi)$ est inductif. Si $\mathcal{F}$ est une famille totalement ordonnée de $(\Phi(X), O_\Phi)$ Alors les ensembles

$$\mathrm{dom}(\mathcal{F}) = \{F \in \mathfrak{P}(X)^*/\exists f \in \mathrm{F}[X \times X, X] : (F, f) \in \mathcal{F}\}$$

et

$$\mathrm{im}(\mathcal{F}) = \{f \in \mathrm{F}[X \times X, X]/\exists\ F \in \mathfrak{P}(X)^* : (F, f) \in \mathcal{F}\}$$

Sont totalement ordonnés pour l'inclusion, en effet

1. D'abord on montre $(\mathrm{dom}(\mathcal{F}), \subset)$ est totalement ordonné. Si $F_0 \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ et $F_1 \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ il existe une fonction $f_0 \in \mathrm{F}[X \times X, X]$ qui vérifie $(F_0, f_0) \in \mathcal{F}$ de même il existe une fonction $f_1 \in \mathrm{F}[X \times X, X]$ tel que $(F_1, f_1) \in \mathcal{F}$ puisque $\mathcal{F}$ est totalement ordonnée on a
$$((F_0, f_0), ((F_1, f_1)) \in O_\Phi\ ou\ ((F_1, f_1), ((F_0, f_0)) \in O_\Phi$$
   — Si $((F_0, f_0), ((F_1, f_1)) \in O_\Phi$ alors $F_0 \subset F_1$
   — Si $((F_1, f_1), ((F_0, f_0)) \in O_\Phi$ alors $F_1 \subset F_0$
2. Ensuite on montre $(\mathrm{im}(\mathcal{F}), \subset)$ est totalement ordonné. Si $f_0 \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ et $f_1 \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ il existe un ensemble $F_0 \in \mathfrak{P}(X)$ qui vérifie $(F_0, f_0) \in \mathcal{F}$ de même il existe un ensemble $F_1 \in \mathfrak{P}(X)$ tel que $(F_1, f_1) \in \mathcal{F}$ puisque $\mathcal{F}$ est totalement ordonnée on a
$$((F_0, f_0), ((F_1, f_1)) \in O_\Phi\ ou\ ((F_1, f_1), ((F_0, f_0)) \in O_\Phi$$
   — Si $((F_0, f_0), ((F_1, f_1)) \in O_\Phi$ alors $f_0 \subset f_1$
   — Si $((F_1, f_1), ((F_0, f_0)) \in O_\Phi$ alors $f_1 \subset f_0$

on montre que si
$$U = \bigcup_{F \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})} F\ et\ h = \bigcup_{f \in \mathrm{im}(\mathcal{F})} f$$
alors $h \in \mathrm{B}[U \times U, U]$. Il resulte du fait que $\mathrm{im}(\mathcal{F})$ est totalement ordonnée pour l'inclusion et du lemme [1.6] page 26 que h est une fonction. On montre

1. $\mathrm{dom}(h) = U \times U$
2. h est injective
3. $\mathrm{im}(h) = U$.

1. $\mathrm{dom}(h) = U \times U$
   (a) D'abord puisque par définition de $\Phi(X)$ pour tout $f \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$, $\mathrm{dom}(f)$ est un produit cartésien du type $F \times F$ avec $F \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ on obtient
$$f \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathrm{dom}(f) \subset U \times U$$
   et
$$\mathrm{dom}(h) = \bigcup_{f \in \mathrm{im}(\mathcal{F})} \mathrm{dom}(f) \subset U \times U$$
   (b) Ensuite on montre $U \times U \subset \mathrm{dom}(h)$. En effet, si $(x, y) \in U \times U$ alors il existe $F_0 \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ et $F_1 \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ tel que $x \in F_0$ et $y \in F_1$, puisque $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$ est totalement ordonné pour l'inclusion on a $F_0 \subset F_1$ ou $F_1 \subset F_0$
      i. Si $F_0 \subset F_1$ alors $(x, y) \in F_1 \times F_1$ par suite si $f_1 \in \mathrm{F}[X \times X, X]$ vérifie $(F_1, f_1) \in \mathcal{F}$ alors $(x, y) \in \mathrm{dom}(f_1) \subset \mathrm{dom}(h)$

ii. Si $F_1 \subset F_0$ alors $(x,y) \in F_0 \times F_0$ par suite si $f_0 \in \mathrm{F}[X \times X, X]$ vérifie $(F_0, f_0) \in \mathcal{F}$ alors $(x,y) \in \mathrm{dom}(f_0) \subset \mathrm{dom}(h)$

2. h est injective. En effet, si $((x,y),z) \in h$ et $((x',y'),z) \in h$ il existe $f_0 \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ et $f_1 \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ vérifiant $((x,y),z) \in f_0$ et $((x',y'),z) \in f_1$. Puisque $\mathrm{im}(\mathcal{F})$ est totalement ordonné pour l'inclusion on a $f_0 \subset f_1$ ou $f_1 \subset f_0$
   — si $f_0 \subset f_1$ alors $((x,y),z) \in f_1$ et $((x',y'),z) \in f_1$ ainsi l'injectivité de f_1 entraîne $(x,y) = (x',y')$,
   — si $f_1 \subset f_0$ alors $((x,y),z) \in f_0$ et $((x',y'),z) \in f_0$ ainsi l'injectivité de f_0 entraîne $(x,y) = (x',y')$,
3. Enfin on montre $\mathrm{im}(h) = U$
   (a) D'abord on montre $U \subset \mathrm{im}(h)$. En effet, si $z \in U$ alors il existe un $F \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ tel que $z \in F$, puisque $F \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ il existe $f \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ tel que $(F,f) \in \Phi(X)$, mais par définition de $\Phi(X)$ on a
   $$(F,f) \in \Phi(X) \Rightarrow F = \mathrm{im}(f)$$
   par suite $z \in \mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(h)$.
   (b) Ensuite on montre $\mathrm{im}(h) \subset U$. Si $z \in \mathrm{im}(h)$ il existe $(x,y) \in X \times X$ tel que $((x,y),z) \in h$ ainsi il existe $f \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ tel que $((x,y),z) \in f$, puisque $f \in \mathrm{im}(\mathcal{F})$ il existe $F \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ tel que $(F,f) \in \mathcal{F}$, mais par définition de $\Phi(X)$,
   $$(F,f) \in \Phi(X) \Rightarrow \mathrm{im}(f) = F.$$
   Ainsi les assertions $((x,y),z) \in f$ et $(F,f) \in \mathcal{F}$ entraînent $z \in F$, par suite
   $$z \in \mathrm{im}(h) \Rightarrow z \in U.$$

Ces propriétés montrent que $(U,h) \in \Phi(X)$, d'autre part il est clair que (U,h) est un majorant de $\mathcal{F}$ pour O_Φ puisque
$$(F,f) \in \mathcal{F} \Rightarrow F \subset U \;\; et \;\; f \subset h.$$
Ainsi tout sous-ensemble totalement ordonné de $(\Phi(X), O_\Phi)$ possède un majorant.

(ii)

Si $(F,f) \in \Phi(X)$ et i est une application injective de F dans F^c on pose
$$H = F \cup i(F)$$
$$Z = (i(F) \times F) \cup (i(F) \times i(F)) \cup (F \times i(F))$$
et on montre

1. Il existe une bijection g de Z dans $i(F)$
2. $H \times H = (F \times F) \cup Z$ et l'application h de $H \times H$ dans H est définie par
   $$h(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si \quad (x,y) \in F \times F \\ g(x,y) & si \quad (x,y) \in Z \end{cases}$$
   est un majorant strict de (F,f).

1. pour montrer que $\mathrm{B}[Z, i(F)] \neq \varnothing$ on montre
   (a) il existe une bijection de $i(F) \times i(F)$ dans $i(F)$. Il suffit de voir que l'application u de $i(F) \times i(F)$ dans $i(F)$ définie par
   $$u(x,y) = i(f(i^{-1}(x), i^{-1}(y)))$$
   est bijective or

i. u est injective, puisque d'après l'injectivité de i l'égalité

$$i(f(i^{-1}(x), i^{-1}(y))) = i(f(i^{-1}(x'), i^{-1}(y')))$$

entraîne

$$f(i^{-1}(x), i^{-1}(y))) = f(i^{-1}(x'), i^{-1}(y'))$$

l'injectivité de f montre alors que

$$i^{-1}(x) = i^{-1}(x') \ et \ i^{-1}(y) = i^{-1}(y')$$

par suite $x = x'$ et $y = y'$.

ii. u est surjective, en effet, si $z \in i(F)$ alors $i^{-1}(z) \in F$, f étant surjective il existe $(x, y) \in F \times F$ tel que $f(x, y) = i^{-1}(z)$ ainsi on obtient

$$u(i(x), i(y)) = i(f(x, y)) = z.$$

(b) De même l'application v de $i(F) \times F$ dans $i(F)$ définie par

$$v(x, y) = i(f(i^{-1}(x), y))$$

est bijective

(c) Enfin l'application w de $F \times i(F)$ dans $i(F)$ définie par

$$w(x, y) = i(f(x, i^{-1}(y)))$$

est bijective.

Puisque $i(F)$ est infini le lemme [7.5] page 168 permet d'affirmer que l'ensemble

$$\mathfrak{U}(i(F), X \times X) = \{\Gamma \in \mathfrak{P}(X \times X)/\mathrm{B}[\Gamma, i(F)] \neq \varnothing\}$$

est stable par réunions disjointes, ainsi l'ensemble Z qui est réunion disjointe d'éléments de cet ensemble est un élément de cet ensemble, par suite il existe une bijection g de Z dans $i(F)$.

2. IL est clair que $H \times H = (F \times F) \cup Z$. Puisque $(F \times F) \cap Z = \varnothing$ pour toute bijection g de Z dans $i(F)$ la relation $h = f \cup g$ est une application de $H \times H$ dans H qui s'écrit en notation usuelle

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & si \quad (x, y) \in F \times F \\ g(x, y) & si \quad (x, y) \in Z \end{cases}$$

est une bijection dont l'inverse $h^{-1} = f^{-1} \cup g^{-1}$ s'écrit en notation usuelle

$$h^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & si \quad x \in F \\ g^{-1}(x) & si \quad x \in i(F) \end{cases}$$

Ainsi (H, h) est un élément de $\Phi(X)$ qui vérifie $F \subsetneqq H$ et $f \subsetneqq h$, autrement dit (H, h) est un majorant strict de (F, f).

(iii)

Puisque X est infini la théorème [6.3] page 128 permet d'affirmer qu'il contient un sous-ensemble dénombrable. Si D est un sous-ensemble dénombrable de X et f_0 est une bijection de $D \times D$ dans D (l'existence d'une telle bijection est prouvée au théorème [6.4] page 151) , alors $(D, f_0) \in \Phi(X)$, $\Phi(X)$ étant inductif (D, f_0) est, d'après le lemme de Zorn (lemme [2.5]page 50), majoré par un élément maximal $(F_{\max}, f_{\max})$. Si $(F_{\max})^c = \varnothing$ alors $F_{\max} = X$ et $X \times X$ est en bijection avec X. Si $(F_{\max})^c \neq \varnothing$ on montre qu'il existe une application injective de $(F_{\max})^c$ dans $F_{\max}$. En effet, d'après le théorème [2.2] page 55 il existe une application injective de $F_{\max}$ dans $(F_{\max})^c$ ou il existe une application injective de $(F_{\max})^c$ dans $F_{\max}$ mais, puisque $F_{\max}$ contient un ensemble infini, par (ii) l'existence d'une application injective de $F_{\max}$ dans $(F_{\max})^c$ contredit la maximalité de $F_{\max}$. Ainsi il existe une application injective de $(F_{\max})^c$ dans $F_{\max}$, le lemme [7.5] page 168 montre alors qu'il existe une bijection de $X \times X$ dans X. ■

Ainsi, si X est infini, du point de vue ensembliste X et $X \times X$ sont indistinguables puisque $X \cong X \times X$, par contre $X \prec \mathfrak{P}(X)$. L'analyse utilise quelques résultats sur les ensembles infinis, on donne une définition.

Définition 7.5 *Si X est un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$ on appelle n-uplet d'éléments de X une fonction de $\mathbb{N}$ dans X dont le domaine de définition est $\mathbb{N}_{n-1}$, on note*

$$X^n = \{f \in \mathrm{F}[\mathbb{N}, X]/\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}_{n-1}\}$$

l'ensemble des n-uplets d'éléments de X et

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X^n = \{f \in \mathrm{F}[\mathbb{N}, X]/\exists\ n \in \mathbb{N}^* : f \in X^n\}$$

On remarque que si $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $p \neq q$ alors

$$X^p \cap X^q = \varnothing$$

Si $k \mapsto f_k$ est un $n - uplet$ d'éléments de X on le note de temps en temps $f = (f_0, f_1, ..., f_{n-1})$. En particulier si $n = 2$ les $2 - uplets$ sont de la forme (f_0, f_1) et on les identifie comme couple, les $3 - uplets$ sont appelés les triplets (f_0, f_1, f_2). Le lemme qui suit consigne les résultats sur les ensembles infinis qu'on utilise en analyse.

Lemme 7.6 ***(Résultats utiles sur les ensembles infinis)***

(i) Si X et Y sont des ensembles tels que

1. *$X \neq \varnothing$ et Y est infini*
2. *il existe une application injective de X dans Y*

alors il existe une bijection de $X \times Y$ dans Y.

(ii) Si X est un ensemble infini alors

1. *il existe une bijection de $\mathbb{N} \times X$ dans X,*
2. *pour tout ensemble dénombrable D il existe une bijection de $D \times X$ dans X*

(iii) Si X est un ensemble infini, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une bijection de X^n dans X.

(iv) Si X est un ensemble infini il existe une bijection de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X^n$ dans X.

(v) Si X est un ensemble infini il existe une bijection de l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ des parties finies de X dans X.

Preuve

(i)

On note f une application injective de X dans Y. Puisque Y est infini le théorème [7.4] page 170 montre qu'il existe une bijection g de $Y \times Y$ dans Y, l'application h de $X \times Y$ dans Y définie par

$$h(x, y) = g(f(x), y)$$

est une application injective. D'autre part, si $a \in X$ l'application i de Y dans $X \times Y$ définie par $i(y) = (a, y)$ est injective, ainsi le théorème de Cantor-Bernstein (th [7.2] page 158) montre qu'il existe une bijection de $X \times Y$ dans Y.

(ii)

1. D'après le théorème [6.3] page 128, si X est infini il existe une application injective de $\mathbb{N}$ dans X,il suffit donc d'appliquer (i),
2. Si f est une bijection de D dans $\mathbb{N}$ et g une bijection de $\mathbb{N} \times X$ dans X l'application h de $D \times X$ dans X définie par
$$h(x, y) = g(f(x), y)$$
est une bijection.

(iii)

On pose
$$H = \{n \in \mathbb{N} / \mathrm{B}[X^{n+1}, X] \neq \varnothing\}$$
et on montre que H est héréditaire.

1. D'abord $0 \in H$ puisque l'application $f \mapsto f_0$ est une bijection de X^1 dans X
2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. On montre que si g est une bijection de X^{n+1} dans X et si p_n est l'application de X^{n+2} dans X^{n+1} définie par $p_n f = f \cap (\mathbb{N}_n \times X)$ (pour $f \in X^{n+2}$ $p_n f$ est la restriction de f à $\mathbb{N}_n$) l'application φ de X^{n+2} dans $X \times X$ définie par
$$\varphi(f) = (g(p_n f), f_{n+1})$$
est bijective. Or si φ^{-1} est l'application de $X \times X$ dans X^{n+2} définie par
$$\varphi^{-1}(x,y)(k) = \begin{cases} g^{-1}(x)(k) & si \quad k \in \mathbb{N}_n \\ y & si \quad k = n+1 \end{cases}$$
alors $p_n(\varphi^{-1}(x,y)) = g^{-1}(x)$ et $\varphi^{-1}(x,y)(n+1) = y$ par suite φ^{-1} est l'inverse de φ. Mais X étant infini il existe, d'après le théorème [7.4] page 170 une bijection h de $X \times X$ dans X, ainsi $h \circ \varphi$ est une bijection de X^{n+2} dans X

Par suite H est héréditaire et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathrm{B}[X^n, X] \neq \varnothing$.

(iv)

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $X^n \subset \mathrm{F}[\mathbb{N}, X]$ l'inclusion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X^n \subset \mathrm{F}[\mathbb{N}, X]$ est vérifiée ainsi toute relation de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X^n$ dans X est un sous-ensemble de l'ensemble $Y = \mathrm{F}[\mathbb{N}, X] \times X$ l'axiome de spécification (axiome [1.2] page 8) permet alors de définir un ensemble Z par ([1])
$$Z = \{\varphi \in \mathcal{P}(Y) / \exists\ n \in \mathbb{N}^* : \varphi \in \mathrm{B}[X^n, X]\}.$$
D'après (iii) si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\mathrm{B}[X^n, X] \neq \varnothing$ ainsi si h_Z est une fonction de choix pour Z (voir axiome [2.1] page 48), alors $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \mathrm{B}[X^n, X] \in \mathrm{dom}(h_Z)$ et l'application φ de $\mathbb{N}^*$ dans Z définie par
$$\varphi(n) = h_Z(\mathrm{B}[X^n, X])$$
vérifie, par définition d'une fonction de choix,
$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ \varphi(n) \in \mathrm{B}[X^n, X].$$
Si $\varphi(n)^{-1}$ est l'application de X dans X^n définie comme l'inverse de la bijection $\varphi(n)$ on montre que l'application f de $\mathbb{N}^* \times X$ dans $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} X^k$ définie par
$$f(n,x) = \varphi(n)^{-1}(x)$$
est bijective.

1. D'abord on montre que f est surjective. En effet si $z \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} X^k$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $z \in X^k$ ainsi $\varphi(k)(z)$ est un élément de X qui vérifie
$$f(k, \varphi(k)(z)) = z.$$

1. $Z = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathrm{B}[X^n, X]$

2. Ensuite on montre que f est injective. En effet si $f(p,x) = f(q,y)$ alors

$$f(p,x) \in \mathrm{im}(\varphi(p)^{-1}) \cap \mathrm{im}(\varphi(q)^{-1})$$

ainsi $f(p,x) \in X^p \cap X^q$ ce qui entraîne $p = q$ par suite

$$f(p,x) = f(q,y) \Rightarrow p = q \Rightarrow \varphi(p)^{-1}(x) = \varphi(p)^{-1}(y) \Rightarrow x = y.$$

Ainsi il existe une bijection f de $\mathbb{N}^* \times X$ dans $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} X^k$, mais par (ii) il existe une bijection g de X dans $\mathbb{N}^* \times X$, $f \circ g$ est une bijection de X dans $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} X^k$

(v)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note φ_n l'application de X^n dans $\mathcal{P}(X)$ éfinie par

$$\varphi_n(f) = f(\mathbb{N}_{n-1}) = \{x \in X/\exists\ k \in \mathbb{N}_{n-1} : f_k = x\},$$

on montre que la relation $\varphi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \varphi_n$ est une surjection de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} X^n$ sur $\mathcal{F}(X)$.

1. D'abord il résulte de l'assertion $p \neq q \Rightarrow X^p \cap X^q = \varnothing$ et du lemme [1.7] page 30 que φ est une fonction.
2. Si $F \in \mathcal{F}(X)$ alors d'après le lemme [6.3] page 128 il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{B}[\mathbb{N}_{n-1}, F] \neq \varnothing$, et toute bijection f de $\mathbb{N}_{n-1}$ dans F est un élément de X^n qui vérifie $\varphi(f) = \varphi_n(f) = f(\mathbb{N}_{n-1}) = F$.

■

On examine maintenant quelques constructions usuelles autours des familles d'ensembles

7.4 *Produit cartésien, produit et coproduit d'une famille d'ensembles*

A partir de maintenant si X et Y sont des ensembles on note indifféremment

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,Y) = \mathrm{A}[X,Y]$$

l'ensemble des applications de X dans Y qui sont quelquefois appelé les *morphismes* de X dans Y.

Définition 7.6 *On note X_0 et X_1 des ensembles,*

1. *On dit que le triplet (P, p_0, p_1) est un produit de X_0 et X_1 si*
   (a) $p_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(P, X_0)$, $p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(P, X_1)$
   (b) *pour tout ensemble Y et $(g_0, g_1) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, X_0) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, X_1)$ il existe un unique morphisme $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, P)$ vérifiant*

$$p_0 \circ g = g_0 \text{ et } p_1 \circ g = g_1$$

2. *On dit que le triplet (P^0, f_0, f_1) est un coproduit de X_0 et X_1 si*
   (a) $f_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_0, P^0)$, $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_1, P^0)$
   (b) *pour tout ensemble Y et $(h_0, h_1) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_0, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_1, Y)$ il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(P^0, Y)$ vérifiant*

$$h \circ f_0 = h_0 \text{ et } h \circ f_1 = h_1$$

3. *Si* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_0, X_1)$ *on dit que le triplet* (M, p_0, p_1) *est une limite projective du système « projectif »* $X_0 \xrightarrow{f} X_1$ *si*
   (a) $p_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M, X_0)$, $p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M, X_1)$ *vérifie*
   $$p_1 = f \circ p_0$$
   (b) *pour tout ensemble* Y *et* $(g_0, g_1) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, X_0) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, X_1)$ *vérifiant*
   $$g_1 = f \circ g_0$$
   il existe un unique morphisme $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, M)$ *vérifiant*
   $$p_0 \circ g = g_0 \text{ et } p_1 \circ g = g_1$$
4. *Si* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_0, X_1)$ *on dit que le triplet* (M^0, f_0, f_1) *est une limite inductive du système « inductif »* $X_0 \xrightarrow{f} X_1$ *si*
   (a) $f_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_0, M^0)$, $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_1, M^0)$ *vérifie*
   $$f_0 = f_1 \circ f$$
   (b) *pour tout ensemble* Y *et* $(h_0, h_1) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_0, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_1, Y)$ *vérifiant*
   $$h_0 = h_1 \circ f$$
   il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M^0, Y)$ *vérifiant*
   $$h \circ f_0 = h_0 \text{ et } h \circ f_1 = h_1$$

Dans certains cas, lorsque des ensembles sont équipotents on parle d'isomorphisme

Définition 7.7 *On dit que les ensembles* X *et* Y *sont* ***isomorphes*** *si il existe* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, Y)$ *et* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, X)$ *tels que*
$$g \circ f = id_X \text{ et } f \circ g = id_Y.$$

Une conséquence directe de la définition est que les produits et coproduits de mêmes objets sont isomorphe

Lemme 7.7 *On note* X_0 *et* X_1 *des ensembles .*
(i) Si (P, p_0, p_1) *et* (Q, q_0, q_1) *sont des produits de* X_0 *et* X_1 *alors* P *et* Q *sont isomorphes.*
(ii) Si (P^0, f_0, f_1) *et* (Q^0, g_0, g_1) *sont des coproduits de* X_0 *et* X_1 *alors* P^0 *et* Q^0 *sont isomorphes.*

Preuve

(i)

Puisque $(q_0, q_1) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Q, X_0) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Q, X_1)$ la propriété (b) d'un produit montre qu'il existe un unique morphisme $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Q, P)$ tel que
$$p_0 \circ g = q_0 \text{ et } p_1 \circ g = q_1$$
de même il existe un unique morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(P, Q)$ qui vérifie
$$q_0 \circ f = p_0 \text{ et } q_1 \circ f = p_1$$
par suite on obtient
$$p_0 \circ (g \circ f) = (p_0 \circ g) \circ f = q_0 \circ f = p_0 \tag{7.13}$$

et
$$p_1 \circ (g \circ f) = (p_1 \circ g) \circ f = q_1 \circ f = p_1. \tag{7.14}$$
De même on obtient
$$q_0 \circ (f \circ g) = (q_0 \circ f) \circ g = p_0 \circ g = q_0 \tag{7.15}$$
et
$$q_1 \circ (f \circ g) = (q_1 \circ f) \circ g = p_1 \circ f = q_1. \tag{7.16}$$
Mais par définition d'un produit, id_P est l'unique morphisme de P dans P vérifiant (7.13) et (7.14) et id_Q est l'unique morphisme de Q dans Q vérifiant (7.15) et (7.16) par suite
$$g \circ f = id_P \text{ et } f \circ g = id_Q$$
(ii)

Puisque $(g_0, g_1) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(X_0, Q^0) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(X_1, Q^0)$ la propriété (b) d'un coproduit montre qu'il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(P^0, Q^0)$ tel que
$$h \circ f_0 = g_0 \text{ et } h \circ f_1 = g_1$$
de même il existe un unique morphisme $w \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(Q^0, P^0)$ qui vérifie
$$w \circ g_0 = f_0 \text{ et } w \circ g_1 = f_1$$
par suite on obtient
$$(w \circ h) \circ f_0 = w \circ (h \circ f_0) = w \circ g_0 = f_0 \tag{7.17}$$
et
$$(w \circ h) \circ f_1 = w \circ g_1 = f_1. \tag{7.18}$$
De même on obtient
$$(h \circ w) \circ g_0 = h \circ f_0 = g_0 \tag{7.19}$$
et
$$(h \circ w) \circ g_1 = (h \circ f_1) = g_1. \tag{7.20}$$
Mais par définition d'un coproduit, id_{P^0} est l'unique morphisme de P^0 dans P^0 vérifiant (7.17) et (7.18) et id_{Q^0} est l'unique morphisme de Q^0 dans Q^0 vérifiant (7.19) et (7.20) par suite
$$w \circ h = id_{P^0} \text{ et } h \circ w = id_{Q^0}$$
■

Remarquons que dire que (P, p_0, p_1) est un produit de X_0 et X_1 c'est dire que pour tout objet Y de $\mathfrak{S}$ l'application φ de *l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(Y, P)$ dans *l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(Y, X_0) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(Y, X_1)$ définie par
$$\varphi(g) = (p_0 \circ g, p_1 \circ g)$$
est bijective. On définit maintenant le produit cartésien d'une famille d'ensembles.

Définition 7.8 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles et $F : i \mapsto F_i$ une application de I dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ (F est une famille de sous-ensembles de $\mathbb{U}$ indexée par I), on appelle* ***produit cartésien*** *de la famille F l'ensemble $\prod\limits_{i \in I} F_i$ défini par*
$$\prod_{i \in I} F_i = \{x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[I, \mathbb{U}] / \forall i \in I : x(i) \in F_i\}.$$
Pour tout $i \in I$ l'application p_i de $\prod\limits_{i \in I} F_i$ dans F_i définie par
$$p_i(x) = x(i)$$
est appelée la projection de $\prod\limits_{i \in I} F_i$ sur F_i.

Remarquons que si $\varnothing \notin F(I)$ alors $F(I) \subset \mathcal{P}^*(\mathbb{U})$ par suite si h est une fonction de choix pour $\mathbb{U}$ (voir axiome [2.1] page 48) alors l'application x définie par $x_i = h(F_i)$ vérifie $x \in \prod_{i\in I} F_i$. Enfin si Y est un ensemble et $i \in I$ puisque toute relation de Y dans F_i est un sous-ensemble de $Y \times F_i$ donc de $Y \times \mathbb{U}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, F_i)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(Y \times \mathbb{U})$. Ainsi on peut définir comme ensemble

$$\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, F_i) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathcal{P}(Y \times \mathbb{U}))/\forall\ i \in I : \varphi(i) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, F_i)\}.$$

Un élément de $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, F_i)$ est donc une application φ de I dans $\mathfrak{P}(Y \times \mathbb{U})$ tel que pour tout $i \in I$ $\varphi(i) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, F_i)$. Ainsi pour tout ensemble Y l'ensemble $\prod_{i\in I} \mathrm{A}[Y, F_i]$ est un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[I, \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, \mathbb{U})]$ et l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, \prod_{i\in I} F_i]$ est un sous-ensemble de l'ensemble d'applications $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathbb{U})]$

Lemme 7.8 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, l'application F de I dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ $F : i \mapsto F_i$ est une famille de sous-ensembles non vides de $\mathbb{U}$, et X_F le produit cartésien de F*
(i) Pour tout ensemble Y l'application l'application α de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathbb{U})]$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}]$ *définie par*

$$\alpha(g)(y, i) = g(y)(i)$$

est une bijection qui vérifie

$$\alpha(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, X_F]) = \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}]/\forall\ (y, i) \in Y \times I : h(y, i) \in F_i\}$$

(ii) Pour tout ensemble Y l'application l'application β de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[I, \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, \mathbb{U})]$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}]$ *définie par*

$$\beta(g)(y, i) = g(i)(y)$$

est une bijection qui vérifie

$$\beta(\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i]) = \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}]/\forall\ (y, i) \in Y \times I : h(y, i) \in F_i\}$$

(iii) Pour tout ensemble Y l'application φ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, X_F]$ *dans* $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i]$ *définie par*

$$\varphi(g)(i) = p_i \circ g$$

est une bijection. En d'autres termes pour tout $h \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i]$ il existe une unique application g de Y dans X_F telle que

$$h_i = p_i \circ g$$

Preuve

(i)

L'application α^{-1} de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}]$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, \mathrm{A}[I, \mathbb{U}]]$ définie par

$$\alpha^{-1}(h)(y) = h(y, .)$$

où $h(y, .)$ est l'application de I dans $\mathbb{U}$ définie par

$$h(y, .)(i) = h(y, i)$$

est l'inverse de α.

1. Si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, X_F]$ alors pour tout $y \in Y$ in a $g(y) \in X_F$ et la définition d'un produit cartésien montre alors que pour tout $i \in I$ $g(y)(i) \in F_i$. Par suite $(y,i) \in Y \times I \Rightarrow \alpha(g)(y,i) \in F_i$ et

$$\alpha(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, X_F]) \subset \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}] / \forall\ (y,i) \in Y \times I : h(y,i) \in F_i\}$$

2. si $h \in \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}] / \forall\ (y,i) \in Y \times I : h(y,i) \in F_i\}$ alors pour tout $y \in Y$ $\alpha^{-1}(h)(y)(i) = h(y,i) \in F_i$ par suite pour tout $y \in Y$ on a $\alpha^{-1}(h)(y) \in X_F$, $\alpha^{-1}(h) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, X_F]$ et $h = \alpha(\alpha^{-1}(h)) \in \alpha(\mathrm{A}[Y, X_F])$, d'où

$$\{h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}] / \forall\ (y,i) \in Y \times I : h(y,i) \in F_i\} \subset \alpha(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, X_F]).$$

(ii)

L'application β^{-1} de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}]$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[I, \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, \mathbb{U}]]$ définie par

$$\beta^{-1}(h)(i) = h(.,i)$$

où $h(.,i)$ est l'application de Y dans $\mathbb{U}$ définie par

$$h(.,i)(y) = h(y,i)$$

est l'inverse de β.

1. Si $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i]$ alors pour tout $i \in I$ on a $g(i) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i]$ ainsi pour tout $y \in Y$ et $i \in I$ $g(i)(y) \in F_i$. Par suite
$$(y,i) \in Y \times I \Rightarrow \beta(g)(y,i) \in F_i$$
et
$$\beta(\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i]) \subset \{h \in \mathrm{A}[Y \times I, \mathbb{U}] / \forall\ (y,i) \in Y \times I : h(y,i) \in F_i\}$$

2. si $h \in \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}] / \forall\ (y,F) \in Y \times I : h(y,i) \in F_i\}$ alors pour tout $i \in I$ $\beta^{-1}(h)(y)(i) = h(y,i) \in F_i$ par suite pour tout $i \in I$ on a $\beta^{-1}(h)(i) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i]$, $\beta^{-1}(h) \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i]$
et
$$h = \beta(\beta^{-1}(h)) \in \beta(\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i])$$
d'où
$$\{h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}] / \forall\ (y,i) \in Y \times I : h(y,i) \in F_i\} \subset \beta(\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i]).$$

(iii)

Puisque

$$\alpha(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, X_F]) = \beta(\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i]) = \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y \times I, \mathbb{U}] / \forall\ (y,i) \in Y \times I : h(y,i) \in F_i\}$$

$\beta^{-1} \circ \alpha$ est une bijection de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, X_F]$ dans $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, F_i]$ mais φ est la restriction de $\beta^{-1} \circ \alpha$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}[Y, X_F]$. ■

Lorsque I est fini de cardinal $n+1$ il est usuel de noter les applications de Y dans $\prod_{i \in I} F_i$ sous la forme d'un $n+1-uplet$ d'applications.

Notation 7.1 *On note* $\mathbb{U}$ *un ensemble et* $F : \mathbb{N}_n \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{U})$ *une famille de sous-ensemble de* $\mathbb{U}$*, pour tout ensemble* Y *la notation*

$$f : y \mapsto (f_0(y), ..., f_n(y))$$

signifie que f *est l'unique application de* Y *dans* $\prod_{k\in\mathbb{N}_n} F_k$ *qui vérifie*

$$\forall k \in \mathbb{N}_n \; f_k = p_k \circ f$$

en particulier :

- *si* $n = 1$ *toute application de* Y *dans* $F_0 \times F_1 = \prod_{k\in\mathbb{N}_1} F_k$ *sera notée*

$$f : y \mapsto (f_0(y), f_1(y))$$

  ou $f(y) = (f_0(y), f_1(y))$

- *si* $n = 2$ *toute application de* Y *dans* $\prod_{k=0}^{2} F_k$ *sera notée*

$$f : y \mapsto (f_0(y), f_1(y), f_2(y))$$

  ou $f(y) = (f_0(y), f_1(y), f_2(y))$

On définit le produit et le coproduit d'une famille d'ensembles .

Définition 7.9 *On note* $\mathbb{U}$ *et* I *des ensembles et* $F : i \mapsto F_i$ *de* I *dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ *une famille de sous-ensembles de* $\mathbb{U}$*,*

1. *On appelle produit de la famille* F *un couple* (P, p) *où* P *est un ensemble et* $p \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(P, F_i)$ *vérifie la propriété suivante : pour tout ensemble* Y *et pour tout* $g \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, F_i)$ *il existe une unique application* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, P)$ *qui vérifie*

$$\forall i \in I \; g_i = p_i \circ h.$$

   En d'autre termes, pour tout ensemble Y *l'application* $\varphi : h \mapsto \varphi(h)$ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, P)$ *dans* $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, F_i)$ *définie par*

$$\varphi(h)(i) = p_i \circ h$$

   est bijective.

2. *On appelle coproduit de la famille* F *un couple* (P^0, f) *où* P^0 *est un ensemble et* $f \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_i, P^0)$ *vérifie la propriété suivante : pour tout ensemble* Y *et pour tout* $g \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_i, Y)$ *il existe une unique application* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(P^0, Y)$ *qui vérifie*

$$\forall i \in I \; g_i = h \circ f_i.$$

   En d'autre termes, pour tout ensemble Y *l'application* $\iota : h \mapsto \iota(h)$ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(P^0, Y)$ *dans* $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_i, Y)$ *définie par*

$$\iota(h)(i) = h \circ f_i$$

   est bijective.

Le lemme [7.8] page 179 montre que le produit cartésien d'une famille est un produit, on montre que tous les produits et coproduits d'une même famille sont équipotents.

Lemme 7.9 *On note* $\mathbb{U}$ *et* I *des ensembles, l'application* F *de* I *dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ $F : i \mapsto F_i$ *est une famille de sous-ensembles non vides de* $\mathbb{U}$
(i) Si (P, p) *et* (Q, q) *sont des produits de la famille* F *alors il existe une bijection de* P *dans* Q
(ii) Si (P^0, f) *et* (Q^0, g) *sont des coproduits dans* **ens** *de la famille* F *alors il existe une bijection de* P^0 *dans* Q^0

Preuve

(i)

Puisque $q \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Q, F_i)$ il existe, par définition d'un produit, une unique application $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Q, P)$ qui vérifie

$$\forall\ i \in I\ q_i = p_i \circ h.$$

De même il existe une unique application $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(P, Q)$ qui vérifie

$$\forall\ i \in I\ p_i = q_i \circ g.$$

Ainsi on obtient

$$\forall\ i \in I\ p_i \circ (h \circ g) = (p_i \circ h) \circ g = q_i \circ g = p_i \tag{7.21}$$

mais par définition d'un produit, id_P est l'unique application vérifiant (7.21) par suite on a $h \circ g = id_P$. de même

$$\forall\ i \in I\ q_i \circ (g \circ h) = (q_i \circ g) \circ h = p_i \circ h = q_i \tag{7.22}$$

mais par définition d'un produit, id_Q est l'unique application vérifiant (7.22) par suite on a $g \circ h = id_Q$. Ceci montre que h est bijective, en effet,

— si $y \in P$ alors $g(y) \in h^{-1}(y)$ par suite h est surjective
— si $h(x) = h(x')$ alors
$$x' = g(h(x')) = g(h(x)) = x$$
par suite h est injective.

(ii)

Puisque $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_i, Q^0)$ il existe, par définition d'un coproduit, une unique application $h^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(P^0, Q^0)$ qui vérifie

$$\forall\ i \in I\ g_i = h^0 \circ f_i.$$

De même il existe une unique application $g^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Q^0, P^0)$ qui vérifie

$$\forall\ i \in I\ f_i = g^0 \circ g_i.$$

Ainsi on obtient

$$(h^0 \circ g^0) \circ g_i = h^0 \circ (g^0 \circ g_i) = h^0 \circ f_i = g_i \tag{7.23}$$

mais par définition d'un coproduit, id_{Q^0} est l'unique application vérifiant (7.23) par suite on a $h^0 \circ g^0 = id_{Q^0}$. de même

$$(g^0 \circ h^0) \circ f_i = g^0 \circ (h^0 \circ f_i) = g^0 \circ g_i = f_i \tag{7.24}$$

mais par définition d'un coproduit, id_{P^0} est l'unique application vérifiant (7.24) par suite on a $g^0 \circ h^0 = id_{P^0}$. Ainsi g^0 est bijective. ■

On vérifie que toute famille d'ensembles possède un coproduit.

Lemme 7.10 *on note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, l'application F de I dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ $F : i \mapsto F_i$ est une famille de sous-ensembles non vides de $\mathbb{U}$ alors le couple $(\coprod_{i\in I} F_i, f)$ où*

1. $$\coprod_{i\in I} F_i = \{(x,G) \in \mathbb{U} \times \mathcal{P}(I) / \exists\ i \in I : x \in F_i \text{ et } G = \{i\}\}$$
2. $f \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_i, \coprod_{i\in I} F_i)$ *est définie par*
$$f_i(x) = (x, \{i\})$$

est un coproduit de la famille F.

Preuve On pose
$$X_F^0 = \{(x,G) \in \mathbb{U} \times \mathcal{P}(I) / \exists\ i \in I : x \in F_i \text{ et } G = \{i\}\}$$
et on montre que pour tout ensemble Y et tout $g \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_i, Y)$ la relation h de X_F^0 dans Y définie par
$$h = \{((x,\{i\}), y) \in X_F^0 \times Y / (x,y) \in g_i\} = \{((x,\{i\}), y) \in X_F^0 \times Y / y = g_i(x)\}$$
est une application.

1. D'abord on a $\mathrm{dom}(h) = X_F^0$ puisque si $(x,\{i\}) \in X_F^0$ alors, par définition on a $((x,\{i\}), g_i(x)) \in h$.
2. Ensuite h est une fonction puisque si $((x,\{i\}), y) \in h$ et $((x,\{i\}), y') \in h$ alors $(x,y) \in g_i$ et $(x,y') \in g_i$, g_i étant une fonction on obtient $y = y'$.

ainsi h est une application et $h(x,\{i\}) = g_i(x)$ autrement dit $h \circ f_i = g_i$. Ainsi l'application ι de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_F^0, Y)$ dans $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_i, Y)$ définie par
$$\iota(h)(i) = h \circ f_i$$
est surjective. Mais l'injectivité de cette application est claire puisque si pour tout $i \in I$ $h \circ f_i = h' \circ f_i$ alors pour tout $(x,\{i\}) \in X_F^0$ on a
$$h(x,\{i\}) = h \circ f_i(x) = h' \circ f_i(x) = h'(x,\{i\}).$$
■

Les notions de produit et coproduit se généralisent.

7.4.1 *Limite inductive et projective de familles d'ensembles*

On a souvent à travailler sur des objets construit au moyen de transition.

Définition 7.10 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, l'application F de I dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ $F : i \mapsto F_i$ est une famille de sous-ensembles non vides de $\mathbb{U}$, on appelle famille de* ***transitions*** *de F un couple (R, f) où :*

1. *R est une relation de I dans I qui vérifie les propriétés suivantes :*
   (a) *R est réflexive : $\forall\ i \in I\ (i,i) \in R$*
   (b) *R est transitive : $[(i,j) \in R$ et $(j,k) \in R \Rightarrow (i,k) \in R]$.*
2. *$f = (f_{i,j})_{(i,j)\in R}$ est un élément de $\prod_{(i,j)\in R} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_j, F_i)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*
   (a) *Pour tout $i \in I$ $f_{i,i} = id_{F_i}$*
   (b) *Si $(i,j) \in R$ et $(j,k) \in R$ alors*
$$f_{i,k} = f_{i,j} \circ f_{j,k}$$

On donne la définition des limites projective et inductives.

Définition 7.11 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, l'application F de I dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, $F : i \mapsto F_i$ est une famille de sous-ensembles non vides de $\mathbb{U}$ et (R, f) est une famille de transitions de F.*

limite projective *On appelle limite projective de (R, f) un couple (X, p) où X est un ensemble et $p \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, F_i)$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $(i, j) \in R$*
$$p_i = f_{i,j} \circ p_j$$
2. *pour tout ensemble Y et pour tout $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, F_i)$ vérifiant*
$$(i, j) \in R \Rightarrow g_i = f_{i,j} \circ g_j$$
il existe une unique application $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, X)$ vérifiant
$$g_i = p_i \circ h$$

limite inductive *On appelle limite inductive de (R, f) un couple (X^0, h) où X^0 est un ensemble et $h \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_i, X^0)$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $(i, j) \in R$*
$$h_j = h_i \circ f_{i,j}$$
2. *pour tout ensemble Y et pour tout $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_i, Y)$ vérifiant*
$$g_j = g_i \circ f_{i,j}$$
il existe une unique application $g^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X^0, Y)$ vérifiant
$$g_i = g^0 \circ h_i$$

L'existence des limites projective des familles d'ensembles est simple.

Lemme 7.11 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, l'application F de I dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, $F : i \mapsto F_i$ est une famille de sous-ensembles non vides de $\mathbb{U}$ et (R, f) est une famille de transitions de F. Si l'ensemble*

$$\varprojlim F_i = \{x \in \prod_{i \in I} F_i / \forall (i, j) \in R : p_i(x) = f_{i,j}(p_j(x))\}$$

est non vide et $p \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\varprojlim F_i, F_i)$ est définie par

$$p_i(x) = x_i$$

alors le couple $(\varprojlim F_i, p)$ est une limite projective de la famille F

Preuve

1. D'abord, pour tout $x \in \varprojlim F_i$ on a, si $(i, j) \in R$,
$$f_{i,j} \circ p_j(x) = f_{i,j}(x_j) = x_i = p_i(x)$$

2. Ensuite si Y est un ensemble et $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, F_i)$ vérifie

$$(i,j) \in R \Rightarrow g_i = f_{i,j} \circ g_j \tag{7.25}$$

alors par définition d'un produit il existe une unique application $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, \prod_{i \in I} F_i)$ tel que

$$\forall\ j \in I\ g_j = p_j \circ h$$

par suite, si $(i,j) \in R$, on obtient d'après (7.25) que pour tout $y \in Y$

$$f_{i,j}(p_j(h(y)) = f_{i,j}(g_j(y)) = g_i(y) = p_i(h(y))$$

En d'autres termes $\forall\ y \in Y\ h(y) \in \underleftarrow{\lim} F_i$, ainsi la seule application vérifiant $g_i = p_i \circ h$ est à valeurs dans $\underleftarrow{\lim} F_i$.

■

Ainsi on peut définir les limites projectives à partir d'un sous-ensemble d'un produit, on définit dualement les limites inductives à partir d'un ensemble quotient d'un coproduit.

Définition 7.12 *On note X un ensemble*

1. *Une relation R de X dans X est appelée une* ***relation d'équivalence*** *si les propriétés suivantes sont vérifiées :*
   (a) *R est réflexive : $\forall\ x \in X\ (x,x) \in R$*
   (b) *R est symmétrique :$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$*
   (c) *R est transitive : $(x,y) \in R$ et $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$.*
   On note $[\mathrm{Eq}]_X$ la famille des relations d'équivalence sur X.
2. *On note π l'application de X dans $\mathcal{P}(X)$ définie par*

$$\pi(x) = \{y \in X/(x,y) \in R\}$$

   Pour tout $x \in X$, $\pi(x)$ est appelée la ***classe d'équivalence*** *de x.*
3. *On note X/R l'ensemble* $\mathrm{im}(\pi)$ *:*

$$X/R = \{A \in \mathcal{P}(X)/\exists\ x \in X : A = \pi(x)\}.$$

   (a) *$\pi : X \mapsto X/R$ est appelée* ***l'application canonique***
   (b) *L'ensemble X/R est appelé* ***l'ensemble quotient*** *de X par R*

Les exemples les plus simples de relations d'équivalences sont les suivants :

Exemple 7.1 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels et X et Y des ensembles*
(i) si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,Y)$ est une application de X dans Y la relation R de X dans X définie par

$$R = \{(x,x') \in X \times X/f(x) = f(x')\}$$

est une relation d'équivalence sur X.

(ii) Si $\mathcal{F}(X)$ est l'ensembles des parties finies de X la relation R définie par

$$R = \{(A,B) \in \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)/\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)\}$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(X)$.

(iii) La relation R sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,X)$ définie par

$$R = \{(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,X)/\exists\ u \in \mathrm{B}[X,X] : f = u^{-1} \circ g \circ u\}$$

est une relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,X)$

Preuve

(i)

1. Pour tout $x \in X$ on a $f(x) = f(x)$ par suite $(x, x) \in R$
2. Si $(x, y) \in R$ alors $f(x) = f(y)$ par suite $f(y) = f(x)$ et $(y, x) \in R$
3. Si $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$ alors $f(x) = f(y) = f(z)$ par suite $f(x) = f(z)$ et $(x, z) \in R$

(ii)

C'est un cas particulier de (i) où on considère l'application f de $\mathcal{F}(X)$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(A) = \mathrm{Card}(A)$.

(iii)

1. Pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, X)$ on a $f = id_X^{-1} \circ f \circ id_X$ par suite $(f, f) \in R$
2. Si $(f, g) \in R$ alors il existe $u \in \mathrm{B}[X, X]$ tel que $f = u^{-1} \circ g \circ u$ par suite $g = u \circ f \circ u^{-1} = (u^{-1})^{-1} \circ f \circ u^{-1}$ et $(g, f) \in R$.
3. Si $(f, g) \in R$ et $(g, h) \in R$ alors il existe $(u, v) \in \mathrm{B}[X, X] \times \mathrm{B}[X, X]$ tels que $f = u^{-1} \circ g \circ u$ et $g = v^{-1} \circ h \circ v$, par suite
$$f = u^{-1} \circ (v^{-1} \circ h \circ v) \circ u = (v \circ u)^{-1} \circ h \circ (v \circ u)$$
et $(f, h) \in R$.

■

Le lemme qui suit est une application directe des définitions.

Lemme 7.12 *On note X un ensemble et R une relation d'équivalence sur X, $\pi : X \mapsto X/R$ l'applicaqtion canonique,*

(i) $y \in \pi(x) \Longleftrightarrow \pi(y) = \pi(x)$

(ii) $\pi(x) \neq \pi(x') \Longleftrightarrow \pi(x) \cap \pi(x') = \varnothing$

(iii) Si A est un sous-ensemble de $X \times X$ il existe une unique relation d'équivalence $\rho(A) \in [\mathrm{Eq}]_X$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *$A \subset \rho(A)$*
2. *toute relation d'équivalence contenant A contient $\rho(A)$:*
$$R_* \in [\mathrm{Eq}]_X \text{ et } A \subset R_* \Rightarrow \rho(A) \subset R_*.$$

(iv) Si Y est un ensemble , $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, Y)$ est une application de X dans Y, pour qu'il existe une application g^* de X/R dans Y vérifiant
$$g = g^* \circ \pi$$
il faut et il suffit que
$$R \subset \{(x, x') \in X \times X / g(x) = g(x')\}. \tag{7.26}$$

(v) On note Y un ensemble et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, Y)$ une application de X dans Y, $A \subset X \times X$ un sous-ensemble de $X \times X$ et $\rho(A)$ est la relation d'équivalence définie en (iii) enfin $\pi' : X \mapsto X/\rho(A)$ est l'application canonique.
Pour qu'il existe une application g^* de $X/\rho(A)$ dans Y vérifiant
$$g = g^* \circ \pi'$$
il faut et il suffit que
$$A \subset \{(x, x') \in X \times X / g(x) = g(x')\}. \tag{7.27}$$

Preuve

(i)

On montre $y \in \pi(x) \Rightarrow \pi(y) \subset \pi(x)$. En effet, si $z \in \pi(y)$ alors $(y, z) \in R$, puisque $y \in \pi(x)$ on a $(x, y) \in R$ ainsi la transitivité de R entraîne $(x, z) \in R$, c'est à dire $z \in \pi(x)$. D'autre part, si $y \in \pi(x)$ alors $(x, y) \in R$ et par symmétrie on a $(y, x) \in R$, c'est à dire $x \in \pi(y)$ et on vient de voir que cela entraîne $\pi(x) \subset \pi(y)$.

(ii)

Si $\pi(x) \cap \pi(x') \neq \varnothing$ et $y \in \pi(x) \cap \pi(x')$, (i) entraîne que $\pi(y) = \pi(x) = \pi(x')$, par suite

$$\pi(x) \neq \pi(x') \Rightarrow \pi(x) \cap \pi(x') = \varnothing$$

l'implication inverse est claire.

(iii)

Existence

On note

$$[\mathrm{Eq}]_X(A) = \{R_* \in [\mathrm{Eq}]_X / A \subset R_*\}.$$

Puisque $X \times X \in [\mathrm{Eq}]_X(A)$ on a $[\mathrm{Eq}]_X(A) \neq \varnothing$, on montre que

$$\rho(A) = \bigcap_{R_* \in [\mathrm{Eq}]_X(A)} R_*$$

est une relation d'équivalence.

1. Si $x \in X$, alors puisque pour tout $R_* \in [\mathrm{Eq}]_X$ on a $(x, x) \in R_*$ on obtient donc $(x, x) \in \rho(A)$
2. Si $(x, y) \in \rho(A)$ alors pour tout $R_* \in [\mathrm{Eq}]_X(A)$ on a $(x, y) \in R_*$, ainsi pour tout $R_* \in [\mathrm{Eq}]_X(A)$ on a $(y, x) \in R_*$, par suite $(y, x) \in \rho(A)$.
3. Si $(x, y) \in \rho(A)$ *et* $(y, z) \in \rho(A)$ alors pour tout $R_* \in [\mathrm{Eq}]_X(A)$ on a $(x, y) \in R_*$ *et* $(y, z) \in R_*$, ainsi pour tout $R_* \in [\mathrm{Eq}]_X(A)$ on a $(x, z) \in R_*$, par suite $(x, z) \in \rho(A)$.

Ainsi $\rho(A)$ est une relation d'équivalence qui vérifie, puisque $R_* \in [\mathrm{Eq}]_X(A) \Rightarrow A \subset R_*$,

$$A \subset \rho(A) \quad \text{et} \quad R_* \in [\mathrm{Eq}]_X(A) \Rightarrow \rho(A) \subset R_*$$

Unicité

Si la relation d'équivalence ρ' vérifie *1* et *2* alors $\rho(A) \subset \rho'$ puisque $A \subset \rho'$ et $\rho' \subset \rho(A)$ puisque $A \subset \rho(A)$.

(iv)

1. D'abord on montre que la condition est nécessaire. Si $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X/R\ , Y)$ vérifie

$$g = g^* \circ \pi$$

alors

$$(x, x') \in R \Rightarrow \pi(x) = \pi(x') \Rightarrow g(x) = g^*(\pi(x)) = g^*(\pi(x')) = g(x').$$

2. Ensuite on montre que la condition est suffisante. Notons h_X une fonction de choix pour X (voir axiome [2.1] page 48). On dispose donc d'un diagramme

$$\mathcal{P}^*(X) \xrightarrow{h_X} X \xrightarrow{g} Y$$

puisque $X/R \subset \mathcal{P}^*(X)$ la restriction g^* de $g \circ h_X$ à X/R est une application, on montre que

$$g = g^* \circ \pi.$$

En effet, par définition de g^*, on a $g^*(\pi(x)) = g(h_X(\pi(x)))$, mais par définition d'une fonction de choix, $h_X(\pi(x)) \in \pi(x)$, ainsi on obtient $(x, h_X(\pi(x)) \in R$ et l'hypothèse (7.26) page 186 permet donc d'affirmer que pour tout $x \in X$

$$g(x) = g(h_X(\pi(x))) = g^*(\pi(x)).$$

(v)

1 *La condition 7.27 est suffisante*

Considérons la relation R_* de X dans X définie par

$$R_* = \{(x,x') \in X \times X / g(x) = g(x')\}$$

une vérification immédiate montre que R_* est une relation d'équivalence ([2]). D'autre part, l'hypothèse (7.27) page 186 entraîne $A \subset R_*$, ainsi la définition de $\rho(A)$ montre que $\rho(A) \subset R_*$. En d'autre termes on obtient

$$\rho(A) \subset \{(x,x') \in X \times X / g(x) = g(x')\},$$

ainsi (iv) permet d'affirmer qu'il existe une application g^* de $X/\rho(A)$ dans Y qui vérifie

$$g = g^* \circ \pi'.$$

2 *La condition 7.27 est nécessaire*

Si $(x,x') \in A$ alors $(x,x') \in \rho(A)$ par suite $\pi'(x) = \pi'(x')$ et

$$g(x) = g^*(\pi'(x)) = g^*(\pi'(x')) = g(x').$$

$\blacksquare$

Définition 7.13 *Si X est un ensemble et A est un sous-ensemble de $X \times X$ on appelle relation d'équivalence engendrée par A l'unique relation d'équivalence $\rho(A)$ vérifiant*

1. $A \subset \rho(A)$
2. $R \in [\mathrm{Eq}]_X$ *et* $A \subset R \Rightarrow \rho(A) \subset R$

On montre l'existence de limite inductive pour des familles d'ensembles.

Lemme 7.13 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, l'application F de I dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$:*

$$F : i \mapsto F_i$$

est une famille de sous-ensembles non vides de $\mathbb{U}$ et (R, f) est une famille de transitions de F. On note de plus

- $X_F^0 = \{(x,G) \in \mathbb{U} \times \mathfrak{P}(I) / \exists\ i \in I : x \in F_i, G = \{i\}\},$
- $A = \{((x,\{i\}),(y,\{j\})) \in X_F^0 \times X_F^0 / (i,j) \in R \text{ et } x = f_{i,j}(y)\},$

$\rho(A)$ la relation d'équivalence sur X_F^0 engendrée par A

- $\pi : X_F^0 \mapsto X_F^0/\rho(A)$

l'application canonique, enfin h est l'élément de $\displaystyle\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_i, X_F^0/\rho(A))$ défini par

$$h_i(x) = \pi(x,\{i\}).$$

Le couple $(X_F^0/\rho(A)\ , h)$ est une limite inductive de (F, f).

Preuve

2. Voir aussi exemple [7.1]

1. D'abord, pour tout $(i,j) \in R$ et $y \in F_j$ on a $((f_{i,j}(y), \{i\}), (y, \{j\})) \in A$, par suite on a
$$((f_{i,j}(y), \{i\}), (y, \{j\})) \in \rho(A)$$
ainsi $(f_{i,j}(y), \{i\}) \in \pi(y, \{j\})$ et le lemme 7.12 page 186 permet d'affirmer que
$$\pi(f_{i,j}(y), \{i\}) = \pi(y, \{j\})$$
par suite
$$\forall\ (i,j) \in R\ h_i \circ f_{i,j}(y) = h_j(y)$$
2. Ensuite si Y est un ensemble et $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(F_i, Y)$ vérifie
$$\forall\ (i,j) \in R\ g_j = g_i \circ f_{i,j} \tag{7.28}$$
on montre qu'il existe une application g^* de $X/\rho(A)$ dans Y vérifiant
$$g_i = g^* \circ h_i.$$
Si g^0 est l'application de X_F^0 dans Y définie par
$$g^0(x, \{i\}) = g_i(x)$$
on montre qu'il existe une application g^* de $X_F^0/\rho(A)$ dans Y vérifiant
$$g^0 = g^* \circ \pi.$$
D'après le lemme [7.12] (v) page 186 il suffit de vérifier
$$((x, \{i\}), (y, \{j\})) \in A \Rightarrow g^0(x, \{i\}) = g^0(y, \{j\}),$$
mais l'assertion $((x, \{i\}), (y, \{j\})) \in A$ entraîne $(i,j) \in R$ et $x = f_{i,j}(y)$ par suite
$$g^0(x, \{i\}) = g_i(x) = g_i(f_{i,j}(y)) = g_i \circ f_{i,j}(y)$$
et (7.28) montre alors que
$$g^0(x, \{i\}) = g_j(y) = g^0(y, \{j\}).$$
Ainsi il existe $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X_F^0/\rho(A), Y)$ telle que
$$g^0 = g^* \circ \pi,$$
en particulier, pour tout $i \in I$ et $x \in F_i$ on a
$$g_i(x) = g^0(x, \{i\}) = g^*(\pi(x, \{i\})) = g^* \circ h_i(x).$$

■

Ce type de raisonnement permet de construire la plupart des objets sur lesquels on travaille, pour l'instant on révise la chaîne d'extension
$$\mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$$

Deuxième partie

Construction des espaces numériques

Chapitre 8

Structures de monoïde et de groupe

8.1 *Introduction et calcul formel sur les monoïdes*

8.1.1 *Introduction*

Sur tout ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}, O)$ on a défini des opérations élémentaires (addition, multiplication, division, puissance) qui sont des applications de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Définition 8.1 *On note X un ensemble, on appelle **loi de composition interne** sur X une application $*$ de $X \times X$ dans X :*

$$X \times X \mapsto X$$

$$(x, y) \mapsto x * y$$

Lorsqu'on dispose d'une loi sur un ensemble X on s'intéresse aux propriétés suivantes :

Définition 8.2 *On note X un ensemble et $*$ une loi sur X*
*(i) La loi $*$ est dite **associative** si*

$$\forall\ x \in X\ ,\ \forall\ y \in X\ ,\ \forall\ z \in X\ ,\ (x * y) * z = x * (y * z)$$

*(ii) La loi $*$ est dite **commutative** si*

$$\forall\ x \in X\ ,\ \forall\ y \in X\ ,\ x * y = y * x$$

*(iii) Un élément $a \in X$ est dit **simplifiable** à gauche si l'application $\varphi_{a,d}$ de X dans X définie par*

$$\varphi_{a,d}(x) = a * x$$

est injective
*(iv) Un élément $a \in X$ est dit **simplifiable** à droite si l'application $\varphi_{a,g}$ de X dans X définie par*

$$\varphi_{a,g}(x) = x * a$$

est injective
*(v) Un élément $a \in X$ est dit **simplifiable** s'il est simplifiable à droite et à gauche.*
*(vi) Un élément $e \in X$ est dit **neutre** si pour tout $x \in X$,*

$$x * e = e * x = x.$$

(vii) Si e est un élément neutre de X on dit que l'élément x de X est ***inversible*** *à gauche (respectivement à droite) s'il existe $y \in X$ tel que*

$$y * x = e \ (\textit{respectivement } x * y = e).$$

de plus x est dit inversible s'il existe $y \in X$ tel que

$$x * y = y * x = e.$$

Lorsque la loi possède un élément neutre il est unique, en effet, si e et e' sont des éléments neutres alors
— puisque e est neutre $e' * e = e'$
— puisque e' est neutre $e' * e = e$
ainsi $e' = e' * e = e$.
Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la loi $*$ on la note généralement multiplicativement, autrement dit :

$$x * y = xy$$

cependant on utilisera la notation additive $(x, y) \mapsto x + y$ pour signaler que la loi est commutative, Lorsqu'une loi notée multiplicativement possède un élément neutre on le note 1, lorsque la loi est notée additivement on le note 0.
Les ensembles qui sont munis d'une loi associative possédant un élément neutre ont droit à une définition.

Définition 8.3 *On appelle* ***semi-monoïde*** *un couple $(M, *)$ où*

1. *M est un ensemble*
2. *$* : (x, y) \mapsto xy$ est une loi associative sur M :*

$$\forall\ x \in X,\ \forall\ y \in X,\ \forall\ z \in X,\ (xy)z = x(yz)$$

Si $*$ possède un élément neutre : il existe $e \in M$ tel que

$$\forall\ x \in M\ xe = ex = x.$$

alors M est appelé un ***monoïde****.*

D'après le lemme [1.10] page 39, si X est un ensemble, le couple $(\mathrm{A}[X, X], \circ)$ des applications de X dans X muni de la composition des applications est un monoïde dont l'élément neutre est id_X. Enfin, si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels de succession s, le lemme [5.1] page 85 définit un monoïde commutatif $(\mathbb{N}, +)$ d'élément neutre $0 = \min_O\{k : k \in \mathbb{N}\}$ et le lemme [5.3] page 92 définit un monoïde commutatif $(\mathbb{N}, \times)$ d'élément neutre $1 = s(0)$. Pour établir les règles de calculs formels dans les monoïdes il suffit grosso-modo de recopier bêtement ce qui a été fait sur ces exemples.

Lemme 8.1 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels et $(M, *)$ un monoïde d'élément neutre e où $* : (x, y) \mapsto xy$ est notée multiplicativement.*
(i) Il existe une application $a \mapsto f_a$ de M dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $$\forall a \in M\ f_a(0) = e \quad \text{et} \quad [\forall\ n \in \mathbb{N}\ f_a(n+1) = af_a(n)].$$
2. *si $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ vérifie*
$$g(0) = e \quad \text{et} \quad [\forall\ n \in \mathbb{N}\ g(n+1) = ag(n)]$$
alors $g = f_a$.

On note $f_a(n) = a^n$.
(ii) L'application $a \mapsto f_a$ vérifie les propriétés suivantes :

1. *Si $a = e$ alors $[\forall n \in \mathbb{N}\ f_e(n) = e : e^n = e]$.*

2. *Si* $a \in M$ *et* $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *alors*
$$f_a(n+p) = f_a(n)f_a(p) \ : a^{n+p} = a^n a^p.$$
en particulier $\forall\ (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ f_a(n)f_a(p) = f_a(p)f_a(n) :\ a^n a^p = a^p a^n.$
3. *Si* $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $a \in M$ *et* $b = f_a(n)$ *alors*
$$f_b(p) = f_a(np) :\ (a^n)^p = a^{np}.$$
4. *Si* $(a,b) \in M \times M$ *vérifie* $ab = ba$ *alors :*
   (a)
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f_a(n)f_b(p) = f_b(p)f_a(n) : a^n b^p = b^p a^n,$$
   (b)
$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ f_{ab}(n) = f_a(n)f_b(n) :\ (ab)^n = a^n b^n.$$

Preuve

(i)

On note
$$\mathrm{diag}(M,\mathbb{N}) = \{(\psi,g) \in \mathrm{A}[M,M] \times \mathrm{A}[\mathbb{N},M] / \forall n \in \mathbb{N}\ g(n+1) = \psi(g(n))\}$$
et on considère l'application $a \mapsto \varphi_a$ de M dans $\mathrm{A}[M,M]$ définie par
$$\varphi_a(x) = ax,$$
enfin la relation f de M dans $\mathrm{A}[\mathbb{N},M]$ est définie par
$$f = \{(a,g) \in M \times \mathrm{A}[\mathbb{N},M] / g(0) = e \quad \text{et} \quad (\varphi_a, g) \in \mathrm{diag}(M,\mathbb{N})\}.$$
On montre que f est une application,

1. D'abord on montre que $\mathrm{dom}(f) = M$. Si $a \in M$, puisque $\varphi_a \in \mathrm{A}[M,M]$ le théorème d'induction (théorème [4.3] page 80) permet d'affirmer qu'il existe une application $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N},M]$ vérifiant
$$g(0) = e \quad \text{et} \quad [\forall\ n \in \mathbb{N}\ g(n+1) = \varphi_a(g(n))],$$
   une telle application satisfait $(a,g) \in f$.
2. Ensuite on montre que f est une fonction :
$$[(a,g) \in f \quad \text{et} \quad (a,g') \in f] \Rightarrow g = g'.$$
   Il suffit de voir que l'ensemble
$$H = \{n \in \mathbb{N} / g(n) = g'(n)\}$$
   est héréditaire. Or,
   — $0 \in H$ puisque par définition de f, si $(a,g) \in f$ et $(a,g') \in f$ alors $g(0) = g'(0) = e$.
   — ensuite si $n \in H$ alors $n+1 \in H$, en effet, par définition de f, si $(a,g) \in f$ et $(a,g') \in f$ alors $g(n+1) = ag(n)$ et $g'(n+1) = ag'(n)$ ainsi, puisque $g(n) = g'(n)$, on obtient :
$$g(n+1) = ag(n) = ag'(n) = g'(n+1).$$
   Par suite H est héréditaire ainsi $H = \mathbb{N}$ et $g = g'$.

Ainsi f est une application, le passage de la notation ensembliste à la notation usuelle montre alors que f vérifie *1* . Enfin si g vérifie *2* alors $(a,g) \in f$ par suite $g = f_a$.

(ii)

1. Il est clair que l'application $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ g(n) = e$$

vérifie

$$g(0) = e \text{ et } [\forall\, n \in \mathbb{N}\ g(n+1) = eg(n)]$$

par suite $g = f_e$.

2. Si $k \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_k = \{n \in \mathbb{N}/f_a(n+k) = f_a(n)f_a(k)\}$$

et on montre que H_k est héréditaire.

(a) D'abord $0 \in H_k$ puisque $f_a(0) = e$.

(b) Ensuite on montre $[n \in H_k \Rightarrow n+1 \in H_k]$. Or, par définition de f_a on a

$$f_a(n+1+k) = f_a(n+k+1) = af_a(n+k)$$

puisque $n \in H_k$ on obtient

$$f_a(n+1+k) = a(f_a(n)f_a(k)) = (af_a(n))f_a(k)$$

la définition de f_a montre alors que

$$f_a(n+1+k) = f_a(n+1)f_a(k)$$

c'est à dire $n+1 \in H_k$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note g l'application de $\mathbb{N}$ dans M définie par

$$g(p) = f_a(np),$$

alors on a

$$g(p+1) = f_a(n+np)$$

et on vient de voir en *2* que $f_a(n+np) = f_a(n)f_a(np)$ par suite on obtient

$$g(p+1) = f_a(n)g(p) = bg(p)$$

ainsi g est une application qui vérifie

$$g(0) = f_a(0) = e \text{ et } [\forall\, p \in \mathbb{N}\ g(p+1) = bg(p)]$$

d'où $g = f_b$.

4. (a) On montre d'abord que si $(\alpha, \beta) \in M \times M$ vérifie $\alpha\beta = \beta\alpha$ alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\quad \beta f_\alpha(n) = f_\alpha(n)\beta \tag{8.1}$$

Posons

$$H = \{n \in \mathbb{N}/\beta f_\alpha(n) = f_\alpha(n)\beta\},$$

alors

— $0 \in H$ puisque $f_\alpha(0) = e$

— si $n \in H$ alors

$$f_\alpha(n+1)\beta = \alpha(f_\alpha(n)\beta) = \alpha(\beta f_\alpha(n)) = (\alpha\beta)f_\alpha(n) = \beta(\alpha f_\alpha(n)) = \beta f_\alpha(n+1)$$

ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$.
En posant $\alpha = a$ et $\beta = b$ alors (8.1) page 194 montre que le couple $(b, f_a(n))$ vérifie l'égalité $bf_a(n) = f_a(n)b$, ainsi en posant $\alpha = b$ et $\beta = f_a(n)$ (8.1) montre que

$$\forall\ k \in \mathbb{N}\ f_b(k)f_a(n) = f_a(n)f_b(k).$$

(b) On pose

$$H' = \{n \in \mathbb{N}/f_{ab}(n) = f_a(n)f_b(n)\}$$

alors
— $0 \in H'$ puisque $ee = e$
— si $n \in H'$ alors puisque

$$f_{ab}(n+1) = (ab)f_{ab}(n) = (ab)(f_a(n)f_b(n)) = a(bf_a(n))f_b(n)$$

or, par (8.1) on a $bf_a(n) = f_a(n)b$, par suite

$$f_{ab}(n+1) = a(bf_a(n))f_b(n) = (af_a(n))(bf_b(n)) = f_a(n+1)f_b(n+1)$$

ainsi H' est héréditaire et $H' = \mathbb{N}$.

■

Lorsque le monoïde est commutatif et la loi est notée additivement on note $n \mapsto na$ l'application f_a définie par le lemme [8.1] page 192

Notation 8.1 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* $(M, *)$ *un monoïde commutatif d'élément neutre* 0 *où* $* : (x, y) \mapsto x + y$ *est notée additivement, l'application*

$$f_a : n \mapsto na$$

est l'unique application de $\mathbb{N}$ *dans* M *vérifiant*

$$f_a(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(n+1) = f_a(n) + a$$

En notation additive le lemme [8.1] page 192 s'écrit de la manière suivante :

Lemme 8.2 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* $(M, *)$ *un monoïde d'élément neutre* 0 *où* $* : (x, y) \mapsto x + y$ *est notée additivement.*
(i) Il existe une application $a \mapsto f_a$ *de* M *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $$\forall a \in M\ f_a(0) = 0 \quad \text{et} \quad [\forall\ n \in \mathbb{N}\ f_a(n+1) = f_a(n) + a].$$
2. *si* $g \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ *vérifie*
$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad [\forall\ n \in \mathbb{N}\ g(n+1) = g(n) + a]$$
alors $g = f_a$.

On note $f_a(n) = na$.
(ii) L'application $a \mapsto f_a$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Si* $a = 0$ *alors* $[\forall n \in \mathbb{N}\ f_0(n) = 0 : n0 = 0]$.
2. *Si* $a \in M$ *et* $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *alors*
$$f_a(n+p) = f_a(n) + f_a(p)\ : (n+p)a = na + pa.$$
en particulier $\forall\ (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ f_a(n) + f_a(p) = f_a(p) + f_a(n) :\ na + pa = pa + na.$
3. *Si* $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $a \in M$ *et* $b = f_a(n)$ *alors*
$$f_b(p) = f_a(np) :\ p(na) = (np)a.$$

4. Si $(a,b) \in M \times M$ vérifie $a+b=b+a$ alors :

(a)

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f_a(n) + f_b(p) = f_b(p) + f_a(n) : pb + na = na + pb,$$

(b)

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ f_{a+b}(n) = f_a(n) + f_b(n) :\ n(a+b) = na + nb.$$

Preuve Voir la preuve du lemme [8.1] page 192 ■

8.1.2 *Somme et produit*

Si $(M,*)$ est un monoïde et $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels pour les applications $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ on travaille souvent avec des symboles du type $\sum_{k=0}^{n} x_k$ ou $\prod_{k=0}^{n} x_k$, le lemme qui suit permet de les définir rigoureusement.

Lemme 8.3 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels et $(M,*)$ un semi-monoïde où $* : (x,y) \mapsto xy$ est notée multiplicativement.*
(i) Si

$$\Gamma_0 = \{(x,f) \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M] \times \mathrm{A}[\mathbb{N}, M] / x_0 = f_0\}$$

La relation π^d de $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ définie par

$$\pi^d = \{(x,f) \in \Gamma_0 / \forall\ n \in \mathbb{N}\ f_{n+1} = f_n x_{n+1}\}$$

est une application. En notation usuelle, pour tout $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$

$$\pi^d(x) : n \mapsto \pi^d(x)(n)$$

est l'unique élément de $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ qui vérifie

$$\pi^d(x)(0) = x_0 \ \textit{et}\ [\forall\ n \in \mathbb{N}, \pi^d(x)(n+1) = \pi^d(x)(n) x_{n+1}]. \tag{8.2}$$

De plus si $\rho : \mathrm{A}[\mathbb{N}, M] \mapsto \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ vérifie (8.2) alors $\rho = \pi^d$.
(ii) La relation π^g de $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ définie par

$$\pi^g = \{(x,f) \in \Gamma_0 / \forall\ n \in \mathbb{N}\ f_{n+1} = x_{n+1} f_n\}$$

est une application. En notation usuelle, pour tout $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$

$$\pi^g(x) : n \mapsto \pi^g(x)(n)$$

est l'unique élément de $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ qui vérifie

$$\pi^g(x)(0) = x_0 \ \textit{et}\ [\forall\ n \in \mathbb{N}, \pi^g(x)(n+1) = x_{n+1} \pi^g(x)(n)] \tag{8.3}$$

De plus si $\rho : \mathrm{A}[\mathbb{N}, M] \mapsto \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ vérifie (8.3) alors $\rho = \pi^g$.
(iii) Si $(x,y) \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M] \times \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ vérifie

$$\forall\ k \leq n\ x_k = y_k$$

alors

$$\forall\ p \leq n\ \pi^d(x)(p) = \pi^d(y)(p) \ \textit{et}\ \pi^g(x)(p) = \pi^g(y)(p).$$

(iv) Si $(M,*)$ *est un monoïde d'élément neutre* e *et si* $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N},M]$ *vérifie*

$$\forall\ k > n\ x_k = e$$

alors

$$\forall\ k \geq n\ \pi^d(x)(k) = \pi^d(x)(n)\ \textit{et}\ \pi^g(x)(k) = \pi^g(x)(n) \tag{8.4}$$

(v) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *il existe une application* π_n^d *(respectivement une application* π_n^g*) de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *qui vérifie la propriétés suivante : Pour tout* $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *et pour tout* $y \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ *dont la restriction à* $\mathbb{N}_n$ *est* x *(c'est à dire vérifiant* $k \leq n \Rightarrow\ y_k = x_k$*) on a, si* $k \in \mathbb{N}_n$,

$$\pi_n^d(x)(k) = \pi^d(y)(k)\ (\text{respectivement } \pi_n^g(x)(k) = \pi^g(y)(k)).$$

π_n^d *est l'unique application de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *vérifiant : si* $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$

$$\pi_n^d(x)(0) = x_0\ \textit{et}\ [k < n \Rightarrow \pi_n^d(x)(k+1) = \pi_n^d(x)(k)x_{k+1}].$$

De même π_n^g *est l'unique application de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *vérifiant : si* $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$

$$\pi_n^g(x)(0) = x_0\ \textit{et}\ [k < n \Rightarrow \pi_n^g(x)(k+1) = x_{k+1}\pi_n^g(x)(k)].$$

(vi) Si le semi-monoïde $(M,*)$ *est* ***commutatif*** *alors*

$$\pi^d = \pi^g,$$

ainsi il existe une unique application σ *de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ *vérifiant : pour tout* $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$

$$\sigma(x)(0) = x_0\ \textit{et}\ [\forall\ n \in \mathbb{N}\ \sigma(x)(n+1) = \sigma(x)(n)x_{n+1} = x_{n+1}\sigma(x)(n)].$$

(vii) Si le semi-monoïde $(M,*)$ *est* ***commutatif*** *alors*

$$\pi_n^d = \pi_n^g,$$

ainsi il existe une unique application σ_n *de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *vérifiant : pour tout* $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$

$$\sigma_n(x)(0) = x_0\ \textit{et}\ [\forall\ k < n\ \sigma_n(x)(k+1) = \sigma_n(x)(k)x_{k+1} = x_{k+1}\sigma_n(x)(k)].$$

Preuve

(i)

1. D'abord on montre $\mathrm{dom}(\pi^d) = \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$: pour tout $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ il existe $f \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ tel que $(x, f) \in \pi^d$.
   Si $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ on considère l'application φ_x de $\mathbb{N} \times M$ dans $\mathbb{N} \times M$ définie par

   $$\varphi_x(n, a) = (n+1, ax_{n+1}),$$

   le théorème d'induction (théorème [4.3] page 80) montre qu'il existe une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times M$, $\gamma_x : n \mapsto (\gamma_x^0(n), \gamma_x^1(n))$ vérifiant

   $$\gamma_x(0) = (0, x_0) \quad \text{et} \quad [\forall\ n \in \mathbb{N}\ \gamma_x(n+1) = \varphi_x(\gamma_x(n))]. \tag{8.5}$$

   On montre
   (a) $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \gamma_x^0(n) = n$
   (b) $(x, \gamma_x^1) \in \pi^d$.
   (a) On pose

   $$H = \{n \in \mathbb{N} / \gamma_x^0(n) = n\}$$

   et on montre que H est héréditaire.

i. D'abord $0 \in H$ puisque par construction $\gamma_x(0) = (0, x_0)$, ainsi $\gamma_x^0(0) = 0$ et $\gamma_x^1(0) = x_0$.

ii. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. En effet, si $n \in H$ alors

$$\gamma_x(n) = (\gamma_x^0(n), \gamma_x^1(n)) = (n, \gamma_x^1(n))$$

par suite, par construction on obtient

$$\gamma_x(n+1) = \varphi_x(\gamma_x^0(n), \gamma_x^1(n)) = \varphi_x(n, \gamma_x^1(n)) = (n+1, \gamma_x^1(n)x_{n+1})$$

par suite $\gamma_x^0(n+1) = n+1$ et $n+1 \in H$.

ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$.

(b) Il s'agit de montrer

$$\gamma_x^1(0) = x_0 \quad \text{et} \quad [\forall n \in \mathbb{N}\ \gamma_x^1(n+1) = \gamma_x^1(n)x_{n+1}].$$

or,
- par construction de γ_x on a $\gamma_x(0) = (0, x_0)$ par suite $\gamma_x^1(0) = x_0$,
- puisque d'après (a) on a $\gamma_x^0(n) = n$ on obtient par définition de γ_x

$$(\gamma_x^0(n+1), \gamma_x^1(n+1)) = \gamma_x(n+1) = \varphi_x(n, \gamma_x^1(n)) = (n+1, \gamma_x^1(n)x_{n+1}),$$

ainsi $\gamma_x^1(n+1) = \gamma_x^1(n)x_{n+1}$.

2. Ensuite on montre que π^d est une fonction :

$$[(x, f) \in \pi^d \text{ et } (x, g) \in \pi^d \Rightarrow f = g]$$

On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / f_n = g_n\}$$

et on montre que H est héréditaire.
- D'abord $0 \in H$ puisque l'assertion $(x, f) \in \pi^d$ *et* $(x, g) \in \pi^d$ entraîne $x_0 = f_0 = g_0$.
- Ensuite on a $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$ puisque si $n \in H$ alors $f_n = g_n$ et par construction l'assertion $(x, f) \in \pi^d$ *et* $(x, g) \in \pi^d$ entraîne les égalités $f_{n+1} = f_n x_{n+1}$ et $g_{n+1} = g_n x_{n+1}$, ainsi on obtient

$$f_{n+1} = f_n x_{n+1} = g_n x_{n+1} = g_{n+1}$$

Ainsi H est héréditaire, par suite $H = \mathbb{N}$ et π^d est une fonction.

3. Il reste à voir que si ρ est une application vérifiant (8.2) alors $\rho = \pi^d$. Si $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ on pose

$$H_x = \{n \in \mathbb{N} / \rho(x)(n) = \pi^d(x)(n)\}$$

et on montre que H_x est héréditaire.

(a) D'abord on a $0 \in H_x$ puisque (8.2) entraîne $x_0 = \rho(x)(0) = \pi^d(x)(0)$.

(b) Ensuite si $n \in H_x$ alors

$$\rho(x)(n+1) = \rho(x)(n)x_{n+1} = \pi^d(x)(n)x_{n+1} = \pi^d(x)(n+1)$$

Ainsi pour tout $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ on a $H_x = \mathbb{N}$ par suite

$$\forall x \in\ \mathrm{A}[\mathbb{N}, M] \quad \text{et} \quad \forall n \in\ \mathbb{N}\ \pi^d(x)(n) = \rho(x)(n)$$

et $\pi^d = \rho$.

(ii)

La preuve de (ii) est un copier-coller de la preuve de (i) où on remplace l'application φ par l'application ψ de $\mathbb{N} \times M$ dans $\mathbb{N} \times M$ définie par

$$\psi(n, a) = (n + 1, x_{n+1}a).$$

(iii)

On pose

$$A = \{k \in \mathbb{N}_n / \pi^d(x)(k) = \pi^d(y)(k)\}$$

et on montre $A = \mathbb{N}_n$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

1. $0 \in A$
2. $[k \in A \ et \ k < n] \Rightarrow k + 1 \in A.$

or :

1. $\pi^d(x)(0) = x_0 = y_0 = \pi^d(y)(0)$
2. si $[k \in A \ et \ k < n]$ alors

$$\pi^d(x)(k+1) = \pi^d(x)(k)x_{k+1} = \pi^d(y)(k)x_{k+1} = \pi^d(y)y_{k+1} = \pi^d(y)(k+1).$$

(iv)

On pose

$$H = \{k \in \mathbb{N} / \pi^d(x)(n+k) = \pi^d(x)(n)\}$$

et on montre que H est héréditaire.

— il est clair que $0 \in H$
— si $k \in H$ alors

$$\pi^d(x)(n+k+1) = \pi^d(x)(n+k)x_{n+k+1} = \pi^d(x)(n+k)e$$

par suite

$$\pi^d(x)(n+k+1) = \pi^d(x)(n+k)e = \pi^d(x)(n+k) = \pi^d(x)(n).$$

La preuve pour π^g est similaire.

(v)

Pour $e \in M$ on note i_n l'application de $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ définie par

$$i_n(x)(k) = \begin{cases} x_k & si \quad k \leq n \\ e & si \quad k > n \end{cases}.$$

et r_n la restriction à $\mathbb{N}_n$ des applications de $\mathbb{N}$ dans M (l'application de $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ définie par $\forall \ k \in \mathbb{N}_n \ r_n(x)(k) = x_k$) alors l'application

$$\pi^d_n = r_n \circ \pi^d \circ i_n$$

vérifie (v). En effet

— Si $\forall \ k \leq n \ x_k = y_k$ alors $i_n(x) = i_n(y)$ par suite $\pi^d(i_n(x)) = \pi^d(i_n(y))$ et

$$r_n \circ \pi^d \circ i_n(x) = r_n \circ \pi^d \circ i_n(y)$$

ainsi pour $k \in \mathbb{N}_n$ on a, par définition de r_n,

$$r_n \circ \pi^d \circ i_n(x)(k) = \pi^d \circ i_n(x)(k) = \pi^d \circ i_n(y)(k)$$

et puisque si $k \in \mathbb{N}_n$ on a $i_n(y)_k = y_k$ (iii) montre que

$$k \in \mathbb{N}_n \Rightarrow \pi^d \circ i_n(x)(k) = \pi^d \circ i_n(y)(k) \ .$$

— puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ on a $\pi_n^d(x)(k) = \pi^d(i_n(x))(k)$ on a

$$\pi_n^d(x)(0) = \pi^d(i_n(x))(0) = i_n(x)_0 = x_0$$

et

$$k < n \Rightarrow \pi_n^d(x)(k+1) = \pi^d(i_n(x))(k+1)$$

par suite

$$\pi_n^d(x)(k+1) = \pi^d(i_n(x))(k+1) = \pi^d(i_n(x))(k) i_n(x)_{k+1}$$

ainsi, puisque si $k < n$ alors $i_n(x)_{k+1} = x_{k+1}$,

$$\pi_n^d(x)(k+1) = \pi^d(i_n(x))(k) x_{k+1} = \pi_n^d(x)(k) x_{k+1}$$

(vi)

Si $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ on pose

$$H_x = \{n \in \mathbb{N} / \pi^d(x)(n) = \pi^g(x)(n)\}$$

et on montre que H_x est héréditaire.

1. D'abord puisque $\pi^d(x)(0) = x_0 = \pi^g(x)(0)$ on a $0 \in H$
2. Ensuite si $n \in H_x$ la commutativité de $(M, *)$ montre que

$$\pi^d(x)(n+1) = \pi^d(x)(n) x_{n+1} = x_{n+1} \pi^d(x)(n)$$

par suite, puisque $\pi^d(x)(n) = \pi^g(x)(n)$,

$$\pi^d(x)(n+1) = x_{n+1} \pi^g(x)(n) = \pi^g(x)(n+1).$$

Ainsi pour tout $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ on a $H_x = \mathbb{N}$ par suite

$$\forall x \in \ \mathrm{A}[\mathbb{N}, M] \ et \ \forall n \in \ \mathbb{N} \ \pi^d(x)(n) = \pi^g(x)(n)$$

et $\pi^d = \pi^g$. par suite si on note σ la valeur commune de ces applications, σ vérifie les propriétés enoncées en (v).

(vii)

Puisque d'après (vi) on a $\pi^d = \pi^g$ on obtient, avec les notations de la preuve de (v)

$$\pi_n^d = r_n \circ \pi^d \circ i_n = r_n \circ \pi^g \circ i_n = \pi_n^g$$

■

Lorsque $(M, *)$ est un monoïde commutatif, on a une notation usuelle de l'application σ définie par le lemme [8.2] page 195, cette notation diffère si la loi du monoïde est notée additivement ou si elle est notée multiplicativement.

Notation 8.2 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* $(M, *)$ *un monoïde* ***commutatif*** *:*

1. *Si* $* : (x, y) \mapsto xy$ *est notée multiplicativement et* σ *est l'unique application de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ *vérifiant*

$$\forall x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M] \ \sigma(x)(0) = x_0 \quad \text{et} \quad [\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(x)(n+1) = \sigma(x)(n) x_{n+1}]$$

on note

$$\sigma(x)(n) = \prod_{k=0}^{n} x_k$$

2. *Si* $* : (x, y) \mapsto x + y$ *est notée additivement et* σ *est l'unique application de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ *vérifiant* $\forall x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$

$$\sigma(x)(0) = x_0 \ \textit{et} \ [\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(x)(n+1) = \sigma(x)(n) + x_{n+1}]$$

on note

$$\sigma(x)(n) = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

On a vu au lemme [8.2] page 195 que si $n \in \mathbb{N}$ et

$$i_n(x)(k) = \begin{cases} x_k & si \quad k \leq n \\ e & si \quad k > n \end{cases} .$$

alors la restriction σ_n de l'application $\sigma \circ i_n$ à $\mathbb{N}_n$ est un prolongement de σ à $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ à valeurs dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$. Si on s'en tient aux notations [8.2] on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}_n$

$$\sigma(i_n(x)(k) = \prod_{j=0}^{k} (i_n(x)(j)) = \prod_{j=0}^{k} x_j.$$

il n'y a donc pas d'incohérence à noter de la même manière l'application σ de $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ et l'application σ_n de $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$.

Notation 8.3 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* $(M, *)$ *un monoïde* ***commutatif*** *:*

1. *Si* $* : (x, y) \mapsto xy$ *est notée multiplicativement et* σ_n *est l'unique application de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *vérifiant*

$$\forall x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M] \ \sigma_n(x)(0) = x_0 \ \textit{et} \ [\forall k < n, \sigma_n(x)(k+1) = \sigma_n(x)(k) x_{k+1}]$$

on note, pour $k \in \mathbb{N}_n$

$$\sigma_n(x)(k) = \prod_{j=0}^{k} x_j$$

2. *Si* $* : (x, y) \mapsto x + y$ *est notée additivement et* σ_n *est l'unique application de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ *vérifiant* $\forall x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$

$$\sigma_n(x)(0) = x_0 \ \textit{et} \ [\forall k < n, \sigma_n(x)(k+1) = \sigma_n(x)(k) + x_{k+1}]$$

on note pour $k \in \mathbb{N}_n$

$$\sigma_n(x)(k) = \sum_{j=0}^{k} x_j$$

On a besoin aussi de définir des symboles du type $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} x_k$ ou $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} x_k$

Notation 8.4 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* $(M, *)$ *un monoïde commutatif et pour* $m \in \mathbb{N}$ *l'application* τ_m *est l'application de* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ *dans* $\mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ *définie par*

$$\tau_m(x)(n) = x_{n+m}$$

1. *Si* $* : (x, y) \mapsto xy$ *est notée multiplicativement on note*

$$\prod_{k=m}^{m+n} x_k = \prod_{k=0}^{n} (\tau_m(x)(k)) = \prod_{k=0}^{n} x_{m+k}$$

2. Si $*:(x,y)\mapsto x+y$ est notée additivement on note

$$\sum_{k=m}^{m+n} x_k=\sum_{k=0}^{n}(\tau_m(x)(k))=\sum_{k=0}^{n} x_{m+k}$$

en particulier, pour tout $n\geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} x_k=\sum_{k=0}^{n-m}(\tau_m(x)(k))=\sum_{k=0}^{n-m} x_{m+k}$$

Si $n\in\mathbb{N}$, ces mêmes notations sont utilisées pour l'extension σ_n de σ à $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n,M]$

Notation 8.5 *On note $(\mathbb{N},O)$ un ensemble d'entiers naturels, $(M,*)$ un monoïde commutatif et pour $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ vérifiant $m\leq n$ on note τ_m l'application de $\mathrm{A}[\mathbb{N}_n,M]$ dans $\mathrm{A}[\mathbb{N}_{n-m},M]$ définie par*

$$\forall\ k\in\mathbb{N}_{n-m}\ \tau_m(x)(k)=x_{k+m}$$

1. Si $*:(x,y)\mapsto xy$ est notée multiplicativement on note, pour $k\in\mathbb{N}_{n-m}$

$$\prod_{j=m}^{m+k} x_k=\prod_{j=0}^{k}(\tau_m(x)(j))=\prod_{j=0}^{k} x_{m+j}$$

2. Si $*:(x,y)\mapsto x+y$ est notée additivement on note, pour $k\in\mathbb{N}_{n-m}$

$$\sum_{j=m}^{m+k} x_j=\sum_{j=0}^{k}(\tau_m(x)(j))=\sum_{j=0}^{k} x_{m+j}$$

en particulier, pour tout $n\geq p\geq m$

$$\sum_{k=m}^{p} x_k=\sum_{j=0}^{p-m}(\tau_m(x)(j))=\sum_{j=0}^{p-m} x_{m+j}$$

Enfin la notation suivante est d'usage courant.

Notation 8.6 *On note $(\mathbb{N},O)$ un ensemble d'entiers naturels et $(M,*)$ un monoïde commutatif, où $*:(x,y)\mapsto x+y$ est notée additivement, pour tout $x\in\mathrm{A}[\mathbb{N}_n,M]$ et $\sigma\in\mathrm{A}[\mathbb{N}_n,\mathbb{N}_n]$ on note x_σ l'application de $\mathbb{N}_n$ dans M définie par*

$$x_\sigma(j)=x_{\sigma(j)}$$

et, pour $k\in\mathbb{N}_n$, on note

$$\sum_{j=0}^{k} x_{\sigma(j)}=\sum_{j=0}^{k} x_\sigma(j)$$

Le lemme qui suit permet de se familiariser avec ce formalisme.

Lemme 8.4 *On note $(\mathbb{N},O)$ un ensemble d'entiers naturels et $(M,*)$ un monoïde commutatif, où $*:(x,y)\mapsto x+y$ est notée additivement,*
(i) Pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $x\in\mathrm{A}[\mathbb{N},M]$

$$\sum_{k=m}^{m+n}\tau_p(x)(k)=\sum_{k=m+p}^{m+p+n} x_k.$$

(ii) Si $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}, M]$ alors pour tout $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{m+n+1} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{m+n+1} x_k \tag{8.6}$$

(iii) Si $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ vérifient $n_0 \leq n_1 < n$ alors pour tout $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$

$$\sum_{k=n_0}^{n} x_k = \sum_{k=n_0}^{n_1} x_k + \sum_{k=n_1+1}^{n} x_k \tag{8.7}$$

en particulier

$$\sum_{k=n_0}^{n} x_k = x_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} x_k = \sum_{k=n_0}^{n-1} x_k + x_n$$

(iv) Si $p \geq 1$ et $k \mapsto n_k$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}$ alors pour toute application $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{n_p}, M]$

$$\sum_{j=n_0}^{n_p-1} x_j = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} x_i \right) \tag{8.8}$$

(v) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n]$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ il existe une bijection $\eta \in \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n]$ de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ vérifiant

$$\eta(n) = n \text{ et } \forall x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M] \ \sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} \tag{8.9}$$

(vi) Pour tout $x \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M]$ et pour toute bijection $\sigma \in \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n]$

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

Preuve

(i)

Posons $y_k = \tau_p(x)(k)$ alors par définition

$$\sum_{k=m}^{m+n} y_k = \sum_{k=0}^{n} \tau_m(y)(k)$$

Or $\tau_m(y)(k) = y_{k+m} = \tau_p(x)(k+m) = x_{k+m+p} = \tau_{m+p}(x)(k)$, par suite

$$\sum_{k=m}^{m+n} y_k = \sum_{k=0}^{n} \tau_{m+p}(x)(k) = \sum_{k=m+p}^{m+p+n} x_k.$$

(ii)

On pose

$$H = \left\{ n \in \mathbb{N} / \sum_{k=0}^{m+n+1} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{m+n+1} x_k \right\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. D'abord on montre que $0 \in H$. En effet, pour $n = 0$ l'égalité (8.6) s'écrit
$$\sum_{k=0}^{m+1} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{m+1} x_k$$
or par définition
$$\sum_{k=m+1}^{m+1} x_k = \tau_{m+1}(x)(0) = x_{m+1}$$
ainsi pour $n = 0$ l'égalité (8.6) est
$$\sum_{k=0}^{m+1} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + x_{m+1},$$
qui provient de la définition de $\sum$.
2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n + 1 \in H]$. En effet,
— par définition de $\sum$ on a
$$\sum_{k=0}^{m+n+2} x_k = \sum_{k=0}^{m+n+1} x_k + x_{m+n+2}$$
— puisque $n \in H$ on obtient
$$\sum_{k=0}^{m+n+2} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{m+n+1} x_k + x_{m+n+2}$$
ainsi
$$\sum_{k=0}^{m+n+2} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=0}^{n} \tau_{m+1}(x)(k) + x_{m+n+2}$$
mais puisque $\tau_{m+1}(x)(n + 1) = x_{m+n+2}$ on obtient
$$\sum_{k=0}^{m+n+2} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=0}^{n+1} \tau_{m+1}(x)(k)$$
d'où
$$\sum_{k=0}^{m+n+2} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{m+n+2} x_k$$
et $n + 1 \in H$.

Ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$.

(iii)

Posons
$$m' = n_1 - n_0 \text{ et } n' = n - n_1 - 1$$
alors $m' + n' + 1 = n - n_0$ et (8.6) permet d'affirmer que
$$\sum_{k=0}^{m'+n'+1} \tau_{n_0}(x)(k) = \sum_{k=0}^{m'} \tau_{n_0}(x)(k) + \sum_{k=m'+1}^{m'+n'+1} \tau_{n_0}(x)(k)$$
or :
$$\sum_{k=0}^{m'+n'+1} \tau_{n_0}(x)(k) = \sum_{k=n_0}^{m'+n'+1+n_0} x_k = \sum_{k=n_0}^{n} x_k$$

$$\sum_{k=0}^{m'} \tau_{n_0}(x)(k) = \sum_{k=n_0}^{m'+n_0} x_k = \sum_{k=n_0}^{n_1} x_k$$

il reste donc à montrer que dans le formalisme adopté

$$\sum_{k=m'+1}^{m'+n'+1} \tau_{n_0}(x)(k) = \sum_{k=n_1+1}^{n} x_k,$$

or d'après (i)

$$\sum_{k=m'+1}^{m'+n'+1} \tau_{n_0}(x)(k) = \sum_{k=m'+1+n_0}^{m'+n'+1+n_0} x_k$$

ainsi les égalités $m'+1+n_0 = n_1+1$ et $m'+n'+1+n_0 = n$ permettent de conclure.

(iv)

Posons

$$U = \left\{ l \in [1,p] / \sum_{j=n_0}^{n_l-1} x_j = \sum_{k=0}^{l-1} \left(\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} x_i \right) \right\}$$

Il est clair que $1 \in U$ par suite U est un sous-ensemble non vide majoré de $(\mathbb{N}, O)$ ainsi il possède, d'après le lemme [4.3] page 78, un plus grand élément $m = \max_O\{k : k \in U\}$. On montre que l'assertion $m < p$ contredit la maximalité de m. En effet, d'après (8.7) on a

$$\sum_{j=n_0}^{n_{m+1}-1} x_j = \sum_{i=n_0}^{n_m-1} x_i + \sum_{i=n_m}^{n_{m+1}-1} x_i$$

puisque $m \in U$ on a

$$\sum_{i=n_0}^{n_m-1} x_i = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} x_i \right)$$

par suite

$$\sum_{i=n_0}^{n_{m+1}-1} x_i = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} x_i \right) + \sum_{i=n_m}^{n_{m+1}-1} x_i = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} x_i \right)$$

ainsi l'assertion $m < p$ entraîne $m+1 \in U$, la maximalité de m montre alors que $m = p$, par suite $p \in U$ et l'égalité (8.8) est vérifiée.

(v)

On peut evidemment supposer $n > 1$ puisque les 2 bijections de $\mathbb{N}_1$ dans $\mathbb{N}_1$ sont l'identité et la transposition t définie par $t(0) = 1$ et $t(1) = 0$. D'autre part si $\sigma(n) = n$ on prend $\eta = \sigma$. On peut donc supposer $n \geq 2$ et $\sigma(n) < n$. En particulier, sous cette hypothèse on a $0 \leq \sigma^{-1}(n) < n$. On considère la bijection τ qui transpose n et $\sigma(n)$, elle est définie par

$$\tau(i) = \begin{cases} i & si \quad i \notin \{n, \sigma(n)\} \\ \sigma(n) & si \quad i = n \\ n & si \quad i = \sigma(n) \end{cases} .$$

On pose $\eta = \tau \circ \sigma$ alors $\eta(n) = \tau(\sigma(n)) = n$, on montre que

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)}.$$

En effet, si $n_1 = \sigma^{-1}(n)$, alors par hypothèse $0 \leq n_1 < n$ et (8.7) page 203 permet d'affirmer que

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n_1} x_{\eta(k)} + \sum_{k=n_1+1}^{n} x_{\eta(k)} \tag{8.10}$$

On distingue les cas

1. $0 < n_1 < n-1$
2. $n_1 = 0$
3. $n_1 = n-1$

1. Si $0 < n_1 < n-1$

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n_1-1} x_{\eta(k)} + x_{\eta(n_1)} + \sum_{k=n_1+1}^{n-1} x_{\eta(k)} + x_{\eta(n)}.$$

Or :

(a) pour tout $k \in [0, n_1-1]$ on a $\sigma(k) \notin \{n, \sigma(n)\}$ par suite on obtient $\eta(k) = \tau(\sigma(k)) = \sigma(k)$ et

$$\sum_{k=0}^{n_1-1} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n_1-1} x_{\sigma(k)}$$

(b) $\eta(n_1) = \tau(n) = \sigma(n)$ ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n_1-1} x_{\sigma(k)} + x_{\sigma(n)} + \sum_{k=n_1+1}^{n-1} x_{\eta(k)} + x_{\eta(n)}$$

(c) pour tout $k \in [n_1+1, n-1]$ on a $\sigma(k) \notin \{n, \sigma(n)\}$ par suite on obtient $\eta(k) = \tau(\sigma(k)) = \sigma(k)$ et

$$\sum_{k=n_1+1}^{n-1} x_{\eta(k)} = \sum_{k=n_1+1}^{n-1} x_{\sigma(k)}$$

ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n_1-1} x_{\sigma(k)} + x_{\sigma(n)} + \sum_{k=n_1+1}^{n-1} x_{\sigma(k)} + x_{\eta(n)}$$

(d) $\eta(n) = n$ par suite

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n_1-1} x_{\sigma(k)} + x_{\sigma(n)} + \sum_{k=n_1+1}^{n-1} x_{\sigma(k)} + x_n \tag{8.11}$$

la commutativité de $(M, *)$ permet alors d'écrire (8.11) sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n_1-1} x_{\sigma(k)} + x_n + \sum_{k=n_1+1}^{n-1} x_{\sigma(k)} + x_{\sigma(n)}$$

l'égalité $x_n = x_{\sigma(n_1)}$ montre alors que

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n_1} x_{\sigma(k)} + \sum_{k=n_1+1}^{n-1} x_{\sigma(k)} + x_{\sigma(n)}$$

par suite on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n_1} x_{\sigma(k)} + \sum_{k=n_1+1}^{n} x_{\sigma(k)}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)}.$$

2. Si $n_1 = 0$ alors $n = \sigma(n_1) = \sigma(0)$ et $\eta(0) = \tau(\sigma(0)) = \tau(n) = \sigma(n)$ par suite l'égalité (8.10) page 206 s'écrit
$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = x_{\sigma(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{\eta(k)} + x_n \tag{8.12}$$
mais pour tout $k \in [1, n-1]$ $\sigma(k) \notin \{n, \sigma(n)\}$, par suite $\eta(k) = \sigma(k)$ et
$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = x_{\sigma(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{\sigma(k)} + x_n,$$
puisque $x_n = x_{\sigma(0)}$ la commutativité de $(M, *)$ montre que
$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = x_{\sigma(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{\sigma(k)} + x_{\sigma(n)} = \sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)}$$

3. si $n_1 = n-1$ alors l'égalité (8.10) page 206 s'écrit
$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} x_{\eta(k)} + x_{\eta(n)}$$
   (a) puisque $\eta(n) = n$ on obtient
$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} x_{\eta(k)} + x_n = \sum_{k=0}^{n-2} x_{\eta(k)} + x_{\eta(n-1)} + x_n$$
   (b) il résulte de l'égalité $\eta(n-1) = \tau(\sigma(n_1)) = \tau(n) = \sigma(n)$ que
$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n-2} x_{\eta(k)} + x_{\sigma(n)} + x_n$$
   (c) si $k \in [0, n-2]$ alors $\sigma(k) \notin \{n, \sigma(n)\}$ par suite $\eta(k) = \tau(\sigma(k)) = \sigma(k)$ ainsi
$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n-2} x_{\sigma(k)} + x_{\sigma(n)} + x_n$$
   mais $x_n = x_{\sigma(n_1)} = x_{\sigma(n-1)}$ par suite la commutativité de $(M, *)$ entraîne
$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n-2} x_{\sigma(k)} + x_{\sigma(n-1)} + x_{\sigma(n)} = \sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)}$$

(vi)

On pose
$$H = \left\{ n \in \mathbb{N} / \forall (x, \sigma) \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M] \times \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n] : \sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k \right\}$$
et on montre que H est héréditaire.

1. D'abord il est clair que $0 \in H$ puisque $\mathbb{N}_0 = \{0\}$.
2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. En effet, si

$$(x, \sigma) \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_{n+1}, M] \times \mathrm{B}[\mathbb{N}_{n+1}, \mathbb{N}_{n+1}]$$

alors (v) permet d'affirmer qu'il existe $\eta \in \mathrm{B}[\mathbb{N}_{n+1}, \mathbb{N}_{n+1}]$ tel que

$$\eta(n+1) = n+1 \ et \ \sum_{k=0}^{n+1} x_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{n+1} x_{\eta(k)} \tag{8.13}$$

— puisque $\eta(n+1) = n+1$ on a $\eta(\mathbb{N}_n) = \mathbb{N}_n$, ainsi la restriction η^n de η à $\mathbb{N}_n$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$

— si x^n est la restriction de x à $\mathbb{N}_n$ on a donc

$$(x^n, \eta^n) \in \mathrm{A}[\mathbb{N}_n, M] \times \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n]$$

ainsi l'assertion $n \in H$ entraîne

$$\sum_{k=0}^{n} x^n_{\eta^n(k)} = \sum_{k=0}^{n} x^n_k$$

par suite,puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ les égalités $x_{\eta(k)} = x^n_{\eta(k)} = x^n_{\eta^n(k)}$ et $x^n_k = x_k$ sont vérifiées,

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n} x^n_{\eta(k)} = \sum_{k=0}^{n} x^n_{\eta^n(k)} = \sum_{k=0}^{n} x^n_k = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Il résulte alors de (8.13)

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{n} x_{\eta(k)} + x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} x_k.$$

Ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$. ■

Lorsque le monoïde $(M, *)$ est commutatif et $* : (x, y) \mapsto xy$ est notée multiplicativement on obtient une version multiplicative du lemme[8.3] page 196 en remplaçant $\sum$ par $\prod$.

8.1.3 *Somme et produit fini de famille*

Si Λ est un ensemble et $(M, *)$ est un monoïde où la loi $* : (x, y) \mapsto x + y$ est commutative et notée additivement, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$ est une application de Λ dans M et A est un sous-ensemble fini de Λ on veut définir la « somme de f sur A » :

$$\mu_f(A) = \sum_{\lambda \in A} f(\lambda).$$

On rappelle que les ensembles finis sont définis par [6.1] page 128 et la notion de cardinal est définie par [6.2] page 136, on utilise les notations suivantes :

Notation 8.7 *Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels et Λ un ensemble on note*

1. *$\mathcal{F}(\Lambda)$ la famille des sous-ensembles finis de Λ et $\mathcal{F}^*(\Lambda)$ la famille des sous-ensembles finis non vides de Λ*
2. *$\mathcal{F}_n(\Lambda)$ la famille des sous-ensembles de $\mathcal{F}(\Lambda)$ de cardinal $n+1$*

3. *si $A \in \mathcal{F}_n(\Lambda)$ on note $\chi_n(A)$ l'ensemble*

$$\chi_n(A) = \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, A]$$

des bijections de $\mathbb{N}_n$ dans A.

Le lemme qui suit met en place des notations très courantes.

Lemme 8.5 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels, $(M, *)$ un monoïde commutatif où $* : (x, y) \mapsto x + y$ est notée additivement, enfin Λ est un ensemble.*
(i) La relation μ^n de $\mathcal{F}_n(\Lambda) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$ dans M définie par

$$\mu^n = \{((A, f), a) \in \mathcal{F}_n(\Lambda) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M) \times M / \exists\ x \in \chi_n(A) : a = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\}$$

est une application.
(ii) La relation μ de $\mathcal{F}^*(\Lambda) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$ dans M définie par

$$\mu = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mu^n = \{((A, f), a) \in \mathcal{F}^*(\Lambda) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M) \times M / \exists\ n \in \mathbb{N} : (A, a) \in \mu^n\}$$

est une application . De plus en notation usuelle si A est un sous-ensemble de Λ de cardinal $n + 1$ alors pour tout $x \in \chi_n(A)$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$

$$\mu(A, f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k).$$

Preuve

(i)

1. D'abord on montre $\mathrm{dom}(\mu^n) = \mathfrak{F}_n(\Lambda) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$.

   Si $(A, f) \in \mathfrak{F}_n(\Lambda) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$, par définition d'un cardinal l'ensemble $\chi_n(A)$ des bijections de $\mathbb{N}_n$ dans A est non vide, ainsi si $x \in \chi_n(A)$ alors $((A, f), \sum_{k=0}^{n} f(x_k)) \in \mu^n$.

2. Ensuite on montre que μ^n est une fonction :

   Il s'agit de montrer
   $$[((A, f), a) \in \mu^n \text{ et } ((A, f), b) \in \mu^n] \Rightarrow a = b.$$
   Mais l'assertion $[((A, f), a) \in \mu^n$ et $((A, f), b) \in \mu^n]$ entraîne qu'il existe des bijections $x \in \chi_n(A)$ et $y \in \chi_n(A)$ telles que
   $$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = a \textit{ et } \sum_{k=0}^{n} f(y_k) = b,$$
   posons $\sigma = x^{-1} \circ y$ alors σ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ ainsi le lemme [8.4] page 202 permet d'affirmer que
   $$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{\sigma(k)})$$
   mais $x_{\sigma(k)} = x(\sigma(k)) = x(x^{-1} \circ y(k)) = y_k$, par suite
   $$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{\sigma(k)}) = \sum_{k=0}^{n} f(y_k)$$
   et $a = b$.

(ii)

Puisque si $n \neq p$

$$\text{dom}(\mu^n) \cap \text{dom}(\mu^p) = (\mathfrak{F}_n(\Lambda) \cap \mathfrak{F}_p(\Lambda)) \times \text{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M) = \varnothing$$

le lemme [1.6] page 26 permet d'affirmer que μ est une fonction de domaine

$$\text{dom}(\mu) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\mu^n) = \mathfrak{F}^*(\Lambda) \times \text{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M).$$

Passer en notation usuelle consiste à noter $\mu(A, f)$ l'unique élément de M tel que $((A, f), \mu(A, f)) \in \mu$, mais si A est de cardinal $n + 1$ alors par définition pour tout $x \in \chi_n(A)$

$$((A, f)\ , \sum_{k=0}^{n} f(x_k)) \in \mu^n$$

par suite

$$((A, f)\ , \mu(A, f)) \in \mu \text{ et } [\forall x \in \chi_n(A)\ ((A, f)\ , \sum_{k=0}^{n} f(x_k)) \in \mu],$$

μ étant une fonction on obtient

$$\forall x \in \chi_n(A)\ \mu(A, f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k).$$

■

On dispose d'une notation pratique pour l'application μ définie par le lemme [8.5] page 209

Notation 8.8 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* $(M, *)$ *un monoïde commutatif d'élément neutre* 0 *où* $* : (x, y) \mapsto x + y$ *est notée additivement, enfin* Λ *est un ensemble. .*

1. *Pour tout sous-ensemble fini non vide* A *de* Λ *on note indifféremment*

$$\mu(A, f) = \mu_f(A) = \sum_{\lambda \in A} f(\lambda)$$

et

$$\mu_f(\varnothing) = 0$$

2. *Si* X *est un sous-ensemble de* M *et* i *est l'application de* X *dans* M *définie par*

$$i(x) = x$$

on note, pour tout sous-ensemble fini A *de* X*,*

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in A} i(x) = \mu_i(A) = \mu(A, i)$$

Ainsi, bien que l'application μ du lemme [8.5] n'est définie que sur l'ensemble $\mathfrak{F}^*(\Lambda) \times \text{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$ on prolonge systématiquement cette application à l'ensemble $\mathfrak{F}(\Lambda) \times \text{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$ en posant

$$\forall\ f \in \text{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M) \qquad \mu(\varnothing, f) = 0 = \mu_f(\varnothing) = \sum_{\lambda \in \varnothing} f(\lambda)$$

Le théorème qui suit permet de se familiariser avec ce formalisme.

Théorème 8.1 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* $(M, *)$ *un monoïde commutatif d'élément neutre* 0 *où* $* : (x, y) \mapsto x + y$ *est notée additivement, enfin* Λ *est un ensemble.*
(i) Si $(A, B) \in \mathfrak{F}(\Lambda) \times \mathcal{F}(\Lambda)$ *vérifient* $A \cap B = \varnothing$ *alors pour tout* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$

$$\mu_f(A \cup B) = \mu_f(A) + \mu_f(B) \tag{8.14}$$

en d'autres termes

$$\sum_{\lambda \in A \cup B} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in A} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in B} f(\lambda). \tag{8.15}$$

ou encore

$$\mu(A \cup B, f) = \mu(A, f) + \mu(B, f),$$

(ii) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{F}(\Lambda) \times \mathcal{F}(\Lambda)$ *et tout* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$

$$\mu_f(A \cup B) = \mu_f(A \cap B^c) + \mu_f(A^c \cap B) + \mu_f(A \cap B) \tag{8.16}$$

ainsi

$$\sum_{\lambda \in A \cup B} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in A \cap B^c} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in A^c \cap B} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in A \cap B} f(\lambda) \tag{8.17}$$

(iii) Si $n \in \mathbb{N}$ *et* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F}^*(\Lambda))$ *est une application vérifiant*

$$k \neq p \Rightarrow A_k \cap A_p = \varnothing$$

alors pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$

$$\mu_f(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = \sum_{k=0}^{n} \mu_f(A_k) \tag{8.18}$$

autrement dit on peut « sommer par morceaux » :

$$\sum_{\lambda \in \bigcup_{k=0}^{n} A_k} f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (\sum_{\lambda \in A_k} f(\lambda)) \tag{8.19}$$

(iv) Si I *est un ensemble fini et* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathcal{F}^*(\Lambda))$ *est une application vérifiant*

$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$

alors pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$

$$\mu_f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu_f(A_i) \tag{8.20}$$

(v) Si Γ *est un ensemble et* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda \times \Gamma, M)$*, et si*
— *pour tout* $\lambda \in \Lambda$ *l'application* h_λ *est l'application de* Γ *dans* M *définie par*

$$h_\lambda(\gamma) = g(\lambda\ ,\ \gamma)$$

— *pour tout* $\gamma \in \Gamma$ *l'application* k_γ *est l'application de* Λ *dans* M *définie par*

$$k_\gamma(\lambda) = g(\lambda\ ,\ \gamma)$$

Alors pour tout couple d'ensembles finis $(A, B) \in \mathcal{F}^*(\Lambda) \times \mathcal{F}^*(\Gamma)$ *les applications* u *de* Λ *dans* M *et* v *de* Γ *dans* M *définies par*

$$u(\lambda) = \mu_{h_\lambda}(B) \quad \text{et} \quad v(\gamma) = \mu_{k_\gamma}(A)$$

vérifient

$$\mu_g(A \times B) = \mu_u(A) = \mu_v(B)\ .$$

Ces égalités seront toujours notée

$$\sum_{(\lambda,\gamma)\in A\times B} g(\lambda,\gamma) = \sum_{\lambda,\in A}\left(\sum_{\gamma\in B} g(\lambda,\gamma)\right) = \sum_{\gamma,\in B}\left(\sum_{\lambda\in A} g(\lambda,\gamma)\right) \tag{8.21}$$

(vi) ***Changement de variable***

Si Γ *est un ensemble et* φ *une application* injective *de* Γ *dans* Λ *alors pour tout* $F \in \mathfrak{F}^*(\Gamma)$ *et pour tout* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$

$$\mu_f(\varphi(F)) = \sum_{\lambda\in\varphi(F)} f(\lambda) = \sum_{\gamma\in F} f\circ\varphi(\gamma) = \mu_{f\circ\varphi}(F) \tag{8.22}$$

(vii) Si $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$ *est un couple d'applications de* Λ *dans* M *et* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$ *est définie par*

$$h(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$$

alors pour tout $A \in \mathfrak{F}(\Lambda)$ *on a*

$$\sum_{\lambda\in A} h(\lambda) = \sum_{\lambda\in A} f(\lambda) + \sum_{\lambda\in A} g(\lambda) \tag{8.23}$$

Preuve

(i)

Si $\mathrm{Card}(A) = p+1$ et $\mathrm{Card}(B) = q+1$, $x \in \chi_p(A)$ et $y \in \chi_q(B)$ alors par définition

$$\mu_f(A) = \sum_{k=0}^{p} f(x_k) \text{ et } \mu_f(B) = \sum_{k=0}^{q} f(y_k),$$

on considère l'application z de $\mathbb{N}_{p+q+1}$ dans $A\cup B$ définie par

$$z_k = \begin{cases} x_k & si \quad k \le p \\ y_{k-p-1} & si \quad p+1 \le k \le p+q+1 \end{cases}.$$

Il est clair que $\mathrm{im}(z) = A\cup B$ et l'injectivité de z provient de $A\cap B = \varnothing$. Ainsi $z \in \chi_{p+q+1}(A\cup B)$ et

$$\mu_f(A\cup B) = \sum_{k=0}^{p+q+1} f(z_k)$$

mais le lemme [8.4] page 202 permet d'affirmer

$$\sum_{k=0}^{p+q+1} f(z_k) = \sum_{k=0}^{p} f(z_k) + \sum_{k=p+1}^{p+q+1} f(z_k)$$

ainsi la définition de z montre que

$$\sum_{k=0}^{p+q+1} f(z_k) = \sum_{k=0}^{p} f(x_k) + \sum_{k=p+1}^{p+q+1} f(y_{k-p-1})$$

par suite, puisque par définition,

$$\sum_{k=p+1}^{p+q+1} f(y_{k-p-1}) = \sum_{k=0}^{q} f(y_k)$$

$$\mu_f(A\cup B) = \sum_{k=0}^{p+q+1} f(z_k) = \sum_{k=0}^{p} f(x_k) + \sum_{k=0}^{q} f(y_k) = \mu_f(A) + \mu_f(B)$$

(ii)

Posons $A\Delta B = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$, il résulte des égalités

$$(A\Delta B)\cap(A\cap B)=\varnothing \ et (A\Delta B)\cup(A\cap B)=A\cup B$$

et de (8.14) page 211 que

$$\mu_f(A\cup B)=\mu_f(A\Delta B)+\mu_f(A\cap B).$$

D'autre part l'égalité

$$(A\cap B^c)\cap(A^c\cap B)=\varnothing$$

montre aussi que

$$\mu_f(A\Delta B)=\mu_f(A\cap B^c)+\mu_f(A^c\cap B)$$

par suite on obtient

$$\mu_f(A\cup B)=\mu_f(A\cap B^c)+\mu_f(A^c\cap B)+\mu_f(A\cap B)$$

(iii)

On pose

$$U=\left\{p\in\mathbb{N}_n/\mu_f(\bigcup_{k=0}^{p}A_k)=\sum_{k=0}^{p}\mu_f(A_k)\right\},$$

et on montre que $U=\mathbb{N}_n$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

1. $0\in U$
2. $p<n \ et \ p\in U\Rightarrow p+1\in U.$

1. D'abord l'assertion $0\in U$ provient de

$$\bigcup_{k=0}^{0}A_k=A_0 \ et \ \sum_{k=0}^{0}\mu_f(A_k)=\mu_f(A_0)$$

2. Ensuite on montre $[p<n \ et \ p\in U\Rightarrow p+1\in U]$. En effet il résulte des égalités

$$(\bigcup_{k=0}^{p}A_k)\cap A_{p+1}=\varnothing \ et \ (\bigcup_{k=0}^{p}A_k)\cup A_{p+1}=\bigcup_{k=0}^{p+1}A_k$$

et de l'égalité (8.14) page 211 que

$$\mu_f(\bigcup_{k=0}^{p+1}A_k)=\mu_f(\bigcup_{k=0}^{p}A_k)+\mu_f(A_{p+1})$$

l'assertion $p\in U$ entraîne donc

$$\mu_f(\bigcup_{k=0}^{p+1}A_k)=\sum_{k=0}^{p}\mu_f(A_k)+\mu_f(A_{p+1})=\sum_{k=0}^{p+1}\mu_f(A_k)$$

(iv)

Si $\mathrm{Card}(I)=n+1$ alors par définition pour tout $\sigma\in\mathrm{B}[\mathbb{N}_n,I]$ on a

$$\sum_{i\in I}\mu_f(A_i)=\sum_{k=0}^{n}\mu_f(A_{\sigma(k)}).$$

Or, puisque σ est injective, par hypothèse on a

$$k \neq p \Rightarrow A_{\sigma(k)} \cap A_{\sigma(p)} = \varnothing$$

ainsi l'égalité (8.18) page 211 montre que

$$\sum_{k=0}^{n} \mu_f(A_{\sigma(k)}) = \mu_f(\bigcup_{k=0}^{n} A_{\sigma(k)}) = \mu_f(\bigcup_{i \in I} A_i)$$

(v)

Puisque $A \times B = \bigcup\limits_{\lambda \in A} (\{\lambda\} \times B)$ (iv) permet d'affirmer que

$$\mu_g(A \times B) = \sum_{\lambda \in A} \mu_g(\{\lambda\} \times B)$$

il suffit donc de montrer que

$$\mu_g(\{\lambda\} \times B) = \sum_{\gamma \in B} g(\lambda, \gamma) = \sum_{\gamma \in B} h_\lambda(\gamma).$$

Or si $\mathrm{Card}(B) = n + 1$ et $x \in \chi_n(B)$ alors l'application x^λ de $\mathbb{N}_n$ dans l'ensemble $\{\lambda\} \times B$ définie par

$$x_n^\lambda = (\lambda, x_n)$$

est un élément de $\chi_n(\{\lambda\} \times B)$ par suite

$$\mu_g(\{\lambda\} \times B) = \sum_{k=0}^{n} g(x_k^\lambda) = \sum_{k=0}^{n} g(\lambda, x_k) = \sum_{\gamma \in B} g(\lambda, \gamma).$$

l'égalité

$$\sum_{(\lambda,\gamma) \in A \times B} g(\lambda, \gamma) = \sum_{\gamma \in B} \left(\sum_{\lambda \in A} g(\lambda, \gamma) \right)$$

se déduit aussi de l'égalité

$$A \times B = \bigcup_{\gamma \in B} A \times \{\gamma\}$$

(vi)

Si $\mathrm{Card}(F) = n + 1$ et $x \in \chi_n(F)$ alors

$$\sum_{\gamma \in F} f \circ \varphi(\gamma) = \sum_{k=0}^{n} f \circ \varphi(x_k),$$

mais l'injectivité de φ entraîne que l'application y de $\mathbb{N}_n$ dans $\varphi(F)$ définie par

$$y_k = \varphi(x_k)$$

est une bijection, ainsi $y \in \chi_n(\varphi(F))$ et

$$\sum_{\gamma \in F} f \circ \varphi(\gamma) = \sum_{k=0}^{n} f(\varphi(x_k)) = \sum_{k=0}^{n} f(y_k) = \sum_{\lambda \in \varphi(F)} f(\lambda)$$

(vii)

Si $\text{Card}(A) = n + 1$ et $x \in \chi_n(A)$ on pose

$$U = \{p \in \mathbb{N}_n / \sum_{k=0}^{p} h(x_k) = \sum_{k=0}^{p} f(x_k) + \sum_{k=0}^{p} g(x_k)\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

1. $0 \in U$
2. $p \in U$ *et* $p < n \Rightarrow p + 1 \in U$.

Or,

1. l'assertion $0 \in U$ provient de la définition de h
2. si $p \in U$ et $p < n$ alors par définition de $\sum$

$$\sum_{k=0}^{p+1} h(x_k) = \sum_{k=0}^{p} h(x_k) + f(x_{p+1}) + g(x_{p+1})$$

ainsi

— puisque $p \in U$

$$\sum_{k=0}^{p+1} h(x_k) = \sum_{k=0}^{p} f(x_k) + \sum_{k=0}^{p} g(x_k) + f(x_{p+1}) + g(x_{p+1})$$

— puisque M est commutatif

$$\sum_{k=0}^{p+1} h(x_k) = \sum_{k=0}^{p} f(x_k) + f(x_{p+1}) + \sum_{k=0}^{p} g(x_k) + g(x_{p+1})$$

ainsi

$$\sum_{k=0}^{p+1} h(x_k) = \sum_{k=0}^{p+1} f(x_k) + \sum_{k=0}^{p+1} g(x_k).$$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$. Mais puisque $x \in \chi_n(A)$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} h(x_k) = \sum_{\lambda \in A} h(\lambda) \ , \ \sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \sum_{\lambda \in A} f(\lambda)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} g(x_k) = \sum_{\lambda \in A} g(\lambda)$$

ainsi l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} h(x_k) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} g(x_k)$$

est l'égalité (8.23). ∎

Lorsque la loi du monoïde commutatif $(M, *)$ est notée multiplicativement on a un copier-coller du théorème [8.1] page 211 en remplaçant somme par produit.

Théorème 8.2 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* $(M, *)$ *un monoïde commutatif où* $* : (x, y) \mapsto xy$ *est notée multiplicativement, enfin* Λ *est un ensemble et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$ *est une application de* Λ *dans* M *.*

(i) Si $(A, B) \in \mathfrak{F}(\Lambda) \times \mathfrak{F}(\Lambda)$ *vérifient* $A \cap B = \varnothing$ *alors*

$$\mu_f(A \cup B) = \mu_f(A)\mu_f(B), \tag{8.24}$$

en d'autres termes

$$\prod_{\lambda \in A \cup B} f(\lambda) = \prod_{\lambda \in A} f(\lambda) \prod_{\lambda \in B} f(\lambda). \tag{8.25}$$

(ii) Pour tout $(A, B) \in \mathfrak{F}(\Lambda) \times \mathfrak{F}(\Lambda)$

$$\mu_f(A \cup B) = \mu_f(A \cap B^c)\mu_f(A^c \cap B)\mu_f(A \cap B) \tag{8.26}$$

ainsi

$$\prod_{\lambda \in A \cup B} f(\lambda) = \prod_{\lambda \in A \cap B^c} f(\lambda) \prod_{\lambda \in A^c \cap B} f(\lambda) \prod_{\lambda \in A \cap B} f(\lambda) \tag{8.27}$$

(iii) Si $n \in \mathbb{N}$ *et* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathfrak{F}(\Lambda))$ *est une application vérifiant*

$$k \neq p \Rightarrow A_k \cap A_p = \varnothing$$

alors

$$\mu_f(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = \prod_{k=0}^{n} \mu_f(A_k) \tag{8.28}$$

autrement dit on peut " multiplier par morceaux" :

$$\prod_{\lambda \in \bigcup_{k=0}^{n} A_k} f(\lambda) = \prod_{k=0}^{n} (\prod_{\lambda \in A_k} f(\lambda)) \tag{8.29}$$

(iv) Si I *est un ensemble fini et* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathfrak{F}(\Lambda))$ *est une application vérifiant*

$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$

alors

$$\mu_f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mu_f(A_i) \tag{8.30}$$

(v) Si Γ *est un ensemble et* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda \times \Gamma, M)$*, pour tout couple d'ensembles finis* $(A, B) \in \mathfrak{F}(\Lambda) \times \mathfrak{F}(\Gamma)$

$$\prod_{(\lambda,\mu) \in A \times B} g(\lambda, \mu) = \prod_{\lambda, \in A} \left(\prod_{\mu \in B} g(\lambda, \mu) \right) \tag{8.31}$$

(vi) ***Changement de variable***

Si Γ *est un ensemble et* φ *une application* injective *de* Γ *dans* Λ *alors pour tout* $F \in \mathfrak{F}(\Gamma)$

$$\prod_{\lambda \in \varphi(F)} f(\lambda) = \prod_{\gamma \in F} f \circ \varphi(\gamma) \tag{8.32}$$

(vii) Si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$ *est une application de* Λ *dans* M *et* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$ *est définie par*

$$h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$$

alors pour tout $A \in \mathfrak{F}(\Lambda)$ *on a*

$$\prod_{\lambda \in A} h(\lambda) = \prod_{\lambda \in A} f(\lambda) \prod_{\lambda \in A} g(\lambda) \tag{8.33}$$

Preuve Voir la preuver du théorème [8.1] page 211 ■

Sur la plupart des monoîdes utilisés en analyse on dispose d'un ordre.

Définition 8.4 *On note $(M, *)$ un monoïde.*

1. *Si O est un ordre sur M On dit que l'ordre O est **compatible** avec la loi $*$ si pour tout $a \in M$ les applications t_a et τ_a de M dans M définies par*

$$t_a(x) = a * x \quad \text{et} \quad \tau_a(x) = x * a$$

   sont croissantes.

2. *Si O est un ordre sur M compatible avec la loi $*$ le triplet $(M, *, O)$ est appelé un monoïde ordonné.*

Pour montrer qu'un triplet $(M, *, O)$ est un monoïde ordonné il suffit donc de vérifier que pour tout $a \in M$:

$$x \leq y \Rightarrow a * x \leq a * y \text{ et } x * a \leq y * a$$

Ainsi, si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels et $(\mathbb{N}, +)$ est le monoïde défini par le lemme [5.1] page 85 le triplet $(\mathbb{N}, +, O)$ est un monoïde ordonné, de même si $(\mathbb{N}, \times)$ est le monoïde défini par le lemme [5.3] page 92 le triplet $(\mathbb{N}, \times, O)$ est un monoïde ordonné.

Lemme 8.6 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels et $(M, *, O')$ un monoïde commutatif ordonné d'élément neutre 0 où $* : (x, y) \mapsto x + y$ est notée additivement .*
(i) Si $(a, b) \in M \times M$ et $(x, y) \in M \times M$ vérifient

$$a \leq b \text{ et } x \leq y$$

alors

$$a + x \leq b + y \tag{8.34}$$

(ii) Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, M)$ et $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, M)$ sont des applications de $\mathbb{N}_n$ dans M vérifiant

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n\ x_k \leq y_k$$

alors pour tout $p \in \mathbb{N}_n$

$$\sum_{k=0}^{p} x_x \leq \sum_{k=0}^{p} y_k$$

en particulier si pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ $y_k \geq 0$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}_n$

$$\sum_{k=0}^{p} y_k \geq 0.$$

(iii) Si Λ est un ensemble et $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, M)$ un couple d'applications de Λ dans M les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *si pour tout $\lambda \in \Lambda$*

$$f(\lambda) \leq g(\lambda)$$

   alors pour tout $A \in \mathfrak{F}(\Lambda)$

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in A} g(\lambda),$$

2. *Si pour tout $\lambda \in \Lambda$ $f(\lambda) \geq 0$ alors pour tout couple d'ensembles finis $(A, B) \in \mathfrak{F}(\Lambda) \times \mathfrak{F}(\Lambda)$ vérifiant $A \subset B$*

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in B} f(\lambda)$$

Preuve

(i)

Puisque l'application $t_a : x \mapsto a + x$ est croissante on a

$$a + x \leq a + y,$$

de même puisque l'application $\tau_y : a \mapsto a + y$ est croissante on a

$$a + y \leq b + y$$

par suite

$$a + x \leq a + y \leq b + y.$$

(ii)

On pose

$$U = \{p \in \mathbb{N}_n / \sum_{k=0}^{p} x_k \leq \sum_{k=0}^{p} y_k\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$. d'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

1. $0 \in U$
2. $p < n \; et \; p \in U \Rightarrow p + 1 \in U$.

Or

1. L'assertion $0 \in U$ provient de l'inégalité $x_0 \leq y_0$.
2. L'assertion $[p < n \; et \; p \in U \Rightarrow p+1 \in U]$ provient des remarques suivantes : puisque par définition

$$\sum_{k=0}^{p+1} x_k = \sum_{k=0}^{p} x_k + x_{p+1} \; et \; \sum_{k=0}^{p+1} y_k = \sum_{k=0}^{p} y_k + y_{p+1},$$

si on pose $a = \sum_{k=0}^{p} x_k$ et $b = \sum_{k=0}^{p} y_k$ alors
— puisque $p \in U$ on a $a \leq b$
— par hypothèse $x_{p+1} \leq y_{p+1}$
ainsi l'inégalité (8.34) page 217 permet d'affirmer

$$a + x_{p+1} \leq b + y_{p+1}$$

autrement dit

$$\sum_{k=0}^{p+1} x_k \leq \sum_{k=0}^{p+1} y_k$$

(iii)

1. Par définition (voir lemme [8.5] page 209), si $\text{Card}(A) = n + 1$ on a, pour tout $x \in \chi_n(A)$

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = \mu_f(A) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \; et \; \sum_{\lambda \in A} g(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} g(x_k)$$

mais par hypothèse pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ on a $f(x_k) \leq g(x_k)$ par suite (ii) permet d'affirmer que

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) \leq \sum_{k=0}^{n} g(x_k)$$

c'est à dire

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in A} g(\lambda)$$

2. D'après l'égalité (8.15) du théorème [8.1] page 211 on tire des l'égalités $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c) = A \cup (B \cap A^c)$ et $A \cap (B \cap A^c) = \varnothing$

$$\sum_{\lambda \in B} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in B \cap A^c} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in A} f(\lambda)$$

or par hypothèse pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a $f(\lambda) \geq 0$ ainsi $\displaystyle\sum_{\lambda \in B \cap A^c} f(\lambda) \geq 0$ et la compatibilité de l'ordre et de l'addition montre alors que

$$\sum_{\lambda \in B} f(\lambda) \geq 0 + \sum_{\lambda \in A} f(\lambda).$$

■

On étudie maintenant les monoïdes quotients et les sous-monoïdes

8.2 *Sous-monoïdes et monoïdes quotients*

8.2.1 *Sous-monoïdes*

Définition 8.5 *On note $(M, *)$ un monoïde d'élément neutre e où la loi $*$ est notée multiplicativement, $* : (x, y) \mapsto xy$. un sous-ensemble N de M est appelé un* ***sous-monoïde*** *de M si N vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$e \in N$*
2. *si $(x, y) \in N \times N$ alors $xy \in N$*

On note $\mathcal{M}(M)$ la famille des sous-monoïdes de $(M, *)$

Pour tout monoïde $(M, *)$ l'ensemble $N = \{e\}$ est un sous-monoïde de $(M, *)$ Le lemme suivant est une application directe de la définition

Lemme 8.7 *On note $(M, *)$ un monoïde d'élément neutre e où la loi $*$ est notée multiplicativement, $* : (x, y) \mapsto xy$, et $\mathcal{M}$ une famille non vide de sous-monoïdes de $(M, *)$.*
(i) L'ensemble

$$N = \bigcap_{F \in \mathcal{M}} F$$

est un sous-monoïde de M
(ii) Si A est un sous-ensemble de M il existe un unique sous-monoïde N de M vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. *$A \subset N$*
2. *Si X est un sous-monoïde de M vérifiant $A \subset X$ alors*

$$N \subset X.$$

Preuve

(i)

1. Puisque pour tout $F \in \mathcal{M}$ on a $e \in M$ on obtient

$$e \in \bigcap_{F \in \mathcal{M}} F.$$

2. si $(x,y) \in \bigcap_{F\in\mathcal{M}} F \times \bigcap_{F\in\mathcal{M}} F$ alors pour tout $F \in \mathcal{M}$ on a $(x,y) \in F\times F$ par suite, pour tout $F \in \mathcal{M}$ on a $xy \in F$ et

$$xy \in \bigcap_{F\in\mathcal{M}} F$$

(ii)

Preuve de l'existence

On note

$$\Omega(A) = \{F \in \mathcal{M}(M)/A \subset F\}$$

alors $\Omega(A)$ est une famille de monoïdes et $M \in \Omega(A)$, on montre que le monoïde

$$N = \bigcap_{F\in\Omega(A)} F$$

vérifie *1.* et *2.*,

1. par définition pour tout $F \in \Omega(A)$ on a $A \subset F$ par suite $A \subset N$,
2. Si X est un sous-monoïde de M vérifiant $A \subset X$ alors $X \in \Omega(A)$ par suite $N \subset X$.

Preuve de l'unicité

Si les sous monoïdes N et N' vérifient *1.* et *2.* alors
— puisque $A \subset N'$ et N vérifie *2.* on a $N \subset N'$
— puisque $A \subset N$ et N' vérifie *2.* on a $N' \subset N$
ainsi $N = N'$. ■

Définition 8.6 *On note $(M,*)$ un monoïde d'élément neutre e et A un sous-ensemble de M, on appelle* ***sous-monoïde engendré*** *par A le sous-monoïde $\mathbf{m}(A)$ de M vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. $A \subset \mathbf{m}(A)$

2. Si X est un sous-monoïde de M vérifiant $A \subset X$ alors

$$\mathbf{m}(A) \subset X.$$

Si $(M,*)$ est un monoïde et $A \subset M$ un sous-ensemble de M le lemme qui suit fixe le formalisme permettant de décrire $\mathbf{m}(A)$. Dans ce lemme on utilise les notations et résultats des lemmes [8.1] page 192 et [8.3] page 196.

Lemme 8.8 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels, $(M,*)$ un monoïde d'élément neutre e où $* : (x,y) \mapsto xy$ est notée multiplicativement .*
(i) Si X est un sous-monoïde de $(M,*)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ $x^n \in X$.
(ii) Pour tout sous-ensemble A de M il existe une unique application

$$\mathbf{p}_A : (m,x) \mapsto \mathbf{p}_A(m,x)$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},M)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour tout $(m,x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$

$$\mathbf{p}_A(m,x)(0) = x_0^{m_0}$$

2. pour tout $(m,x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{p}_A(m,x)(n+1) = \mathbf{p}_A(m,x)(n)\ x_{n+1}^{m_{n+1}}$$

(iii) Si $m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ *vérifie : pour tout* $k > p$ $m_k = 0$ *alors pour tout* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ *et* $n \geq p$

$$\mathbf{p}_A(m,x)(n) = \mathbf{p}_A(m,x)(p).$$

(iv) Si $(m,x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ *et* $(p,y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ *vérifient*

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n\ m_k = p_k \ \textit{et}\ x_k = y_k$$

alors

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n\ \mathbf{p}_A(m,x)(k) = \mathbf{p}_A(p,y)(k).$$

(v) La relation $p_{f,A}$ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A) \times \mathbb{N}$ *dans* M *définie par*

$$p_{f,A} = \{((m,x,n),y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A) \times \mathbb{N} \times M / y = \mathbf{p}_A(m,x)(n)\}$$

est une application et $\mathrm{im}(p_{f,A})$ *est un sous-monoïde de* M.

(vi) $\mathrm{im}(p_{f,A})$ *est le sous-monoïde engendré par* A *:*

$$\mathrm{im}(p_{f,A}) = \mathbf{m}(A)$$

Preuve

(i)

L'application $n \mapsto x^n$ est définie par le lemme [8.1] page 192, on pose

$$H = \{n \in \mathbb{N}/x^n \in X\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. D'abord $0 \in H$ puisque $x^0 = e$ et X est un sous-monoïde.
2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. En effet si $n \in H$ alors $x^n \in H$ par suite, puisque X est un monoïde et $x \in X$.
$$x^{n+1} = x^n x \in X$$

Ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$

(ii)

Preuve de l'existence

On considère l'application φ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},M)$ définie par (voir lemme [8.1] page 192)

$$\varphi(m,x)(k) = x_k^{m_k},$$

si π^d est l'application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},M)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},M)$ définie par le lemme [8.3] page 196 on montre que l'application $\mathbf{p}_A = \pi^d \circ \varphi$ vérifie les propriétés énoncées . or par définition de π^d on a (voir (8.2) page 196)

1. $$\mathbf{p}_A(m,x)(0) = \pi^d(\varphi(m,x))(0) = \varphi(m,x)(0) = x_0^{m_0}$$
2. $$\mathbf{p}_A(m,x)(n+1) = \pi^d(\varphi(m,x))(n+1) = \pi^d(\varphi(m,x))(n)\varphi(m,x)(n+1)$$
   or
   $$\pi^d(\varphi(m,x))(n)\varphi(m,x)(n+1) = \mathbf{p}_A(m,x)(n)\ x_{n+1}^{m_{n+1}}$$

Preuve de l'unicité

Si p et p' sont des applications de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},M)$ qui vérifient les propriétés *1* et *2* on montre que $p = p'$ en vérifiant que pour tout $(m,x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ l'ensemble

$$H_{(m,x)} = \{n \in \mathbb{N}/p(m,x)(n) = p'(m,x)(n)\}$$

est héréditaire. Or :

1. $0 \in H_{(m,x)}$ puisque *1* permet d'affirmer que
$$p(m,x)(0) = x_0^{m_0} = p'(m,x)(0)$$
2. Si $n \in H_{(m,x)}$ alors d'après *2*
$$p(m,x)(n+1) = p(m,x)(n)x_{n+1}^{m_{n+1}} = p'(m,x)(n)x_{n+1}^{m_{n+1}} = p'(m,x)(n+1)$$

(iii)

Si $m_k = 0$ pour tout $k > p$ alors pour tout $k > p$ et $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$

$$\varphi(m,x)(k) = x_k^{m_k} = x_k^0 = e$$

ainsi (8.4) page 197 permet d'affirmer que pour tout $n \geq p$

$$\pi^d(\varphi(m,x))(n) = \pi^d(\varphi(m,x))(p)$$

mais par (ii) on a

$$\mathbf{p}_A(m,x)(n) = \pi^d(\varphi(m,x))(n).$$

(iv)

Si $m_k = p_k$ *et* $x_k = y_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}_n$

$$\varphi(m,x)(k) = x_k^{m_k} = y_k^{p_k} = \varphi(p,y)(k)$$

ainsi le (iii) du lemme [8.3] page 196 permet d'affirmer que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$

$$\pi^d(\varphi(m,x))(k) = \pi^d(\varphi(p,y))(k)$$

mais par (ii) on a

$$\mathbf{p}_A(m,x)(k) = \pi^d(\varphi(m,x))(k).$$

par suite

$$\mathbf{p}_A(m,x)(k) = \pi^d(\varphi(m,x))(k) = \pi^d(\varphi(p,y))(k) = \mathbf{p}_A(p,y)(k).$$

(v)

1. D'abord puisque $\mathrm{dom}(\mathbf{p}_A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ et pour tout $(m,x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ on a $\mathrm{dom}(\mathbf{p}_A(m,x)) = \mathbb{N}$ on a
$$\mathrm{dom}(p_{f,A}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A) \times \mathbb{N}.$$
2. Ensuite $p_{f,A}$ est une fonction puisque si
$$((m,x,n),y) \in p_{f,A} \textit{ et } ((m,x,n),y') \in p_{f,A}$$
alors
$$(n,y) \in \mathbf{p}_A(m,x) \textit{ et } (n,y') \in \mathbf{p}_A(m,x).$$
ainsi l'égalité $y = y'$ suit du fait que $\mathbf{p}_A(m,x)$ est une fonction.

On montre maintenant que

$$\mathrm{im}(p_{f,A}) \text{ est un sous-monoïde de } (M,*).$$

1. D'abord on montre $e \in \mathrm{im}(p_{f,A})$. en effet, si $m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ vérifie $m_0 = 0$ alors pour tout $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ on a
$$p_{f,A}(m,x,0) = x_0^{m_0} = x_0^0 = e.$$
2. Ensuite on montre $[(\alpha,\beta) \in \mathrm{im}(p_{f,A}) \times \mathrm{im}(p_{f,A}) \Rightarrow \alpha\beta \in \mathrm{im}(p_{f,A})]$. En effet si $\alpha \in \mathrm{im}(p_{f,A})$ et $\beta \in \mathrm{im}(p_{f,A})$ alors il existe $(u,v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N})$, $(x,y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ et $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que
$$\alpha = p_{f,A}(u,x,n) \; et \; \beta = p_{f,A}(v,y,p).$$
On pose
$$H = \{k \in \mathbb{N} / p_{f,A}(u,x,n)p_{f,A}(v,y,k) \in \mathrm{im}(p_{f,A})\},$$
H est donc l'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe
$$(w,t,q) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A) \times \mathbb{N}$$
vérifiant
$$p_{f,A}(w,t,q) = p_{f,A}(u,x,n)p_{f,A}(v,y,k)$$
et on montre que H est héréditaire.
   (a) D'abord on montre que $0 \in H$. On considère le couple
$$(m,z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$$
défini par
$$m_k = \begin{cases} u_k & si \quad k \leq n \\ v_{k-(n+1)} & si \quad k \geq n+1 \end{cases}$$
et
$$z_k = \begin{cases} x_k & si \quad k \leq n \\ y_{k-(n+1)} & si \quad k \geq n+1 \end{cases} .$$
On montre que
$$p_{f,A}(m,z,n+1) = p_{f,A}(x,u,n)p_{f,A}(y,u,0).$$
Par définition on a
$$p_{f,A}(m,z,n+1) = \mathbf{p}_A(m,z)(n+1) = \mathbf{p}_A(m,z)(n) \; z_{n+1}^{m_{n+1}}$$
or :
— puisque $m_{n+1} = v_0$ et $z_{n+1} = y_0$ on obtient
$$p_{f,A}(m,z,n+1) = \mathbf{p}_A(m,z)(n) \; y_0^{v_0}$$
— puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ $m_k = u_k$ et $z_k = x_k$ on obtient par (iv)
$$\mathbf{p}_A(m,z)(n) = \mathbf{p}_A(u,x)(n) = p_{f,A}(u,x,n)$$
par suite, puisque $p_{f,A}(v,y,0) = y_0^{v_0}$, on obtient
$$p_{f,A}(m,z,n+1) = p_{f,A}(u,x,n) \; y_0^{v_0} = p_{f,A}(u,x,n)p_{f,A}(v,y,0)$$
c'est à dire $0 \in H$

(b) Ensuite on montre $[k \in H \Rightarrow k+1 \in H]$. En effet par définition on a

$$p_{f,A}(u,x,n)p_{f,A}(v,y,k+1) = p_{f,A}(u,x,n)p_{f,A}(v,y,k)\ y_{k+1}^{v_{k+1}} \tag{8.35}$$

or l'assertion $k \in H$ entraîne l'existence d'un triplet

$$(w,t,q) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A) \times \mathbb{N}$$

tel que

$$p_{f,A}(u,x,n)p_{f,A}(v,y,k) = p_{f,A}(w,t,q)$$

par suite, pour un tel triplet, l'égalité (8.35) s'écrit

$$p_{f,A}(u,x,n)p_{f,A}(v,y,k+1) = p_{f,A}(w,t,q)\ y_{k+1}^{v_{k+1}} \tag{8.36}$$

il suffit donc de recopier (a) pour obtenir $k+1 \in H$. On considère le couple

$$(m,z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$$

défini par

$$m_j = \begin{cases} w_j & si \quad j \leq q \\ v_{k+1} & si \quad j \geq q+1 \end{cases}$$

et

$$z_j = \begin{cases} t_j & si \quad j \leq q \\ y_{k+1} & si \quad j \geq q+1 \end{cases} .$$

On montre que

$$p_{f,A}(m,z,q+1) = p_{f,A}(w,t,q)\ y_{k+1}^{v_{k+1}}.$$

Par définition on a

$$p_{f,A}(m,z,q+1) = \mathbf{p}_A(m,z)(q+1) = \mathbf{p}_A(m,z)(q)\ z_{q+1}^{m_{q+1}}$$

or :

— puisque $m_{q+1} = v_{k+1}$ et $z_{q+1} = y_{k+1}$ on obtient

$$p_{f,A}(m,z,q+1) = \mathbf{p}_A(m,z)(q)\ y_{k+1}^{v_{k+1}}$$

— puisque pour tout $j \in \mathbb{N}_q$ $m_j = w_j$ et $z_j = t_j$ on obtient par (iv)

$$\mathbf{p}_A(m,z)(q) = \mathbf{p}_A(w,t)(q) = p_{f,A}(w,t,q)$$

par suite

$$p_{f,A}(m,z,q+1) = p_{f,A}(w,t,q)\ y_{k+1}^{v_{k+1}}$$

et (8.36) montre alors que

$$p_{f,A}(m,z,q+1) = p_{f,A}(w,t,q)\ y_{k+1}^{v_{k+1}} = p_{f,A}(u,x,n)p_{f,A}(v,y,k+1).$$

Ainsi H est héréditaire et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$p_{f,A}(u,x,n)p_{f,A}(v,y,k) \in \mathrm{im}(p_{f,A}).$$

en particulier

$$\alpha\beta = p_{f,A}(u,x,n)p_{f,A}(v,y,p) \in \mathrm{im}(p_{f,A}).$$

1. et 2. montre que $\mathrm{im}(p_{f,A})$ est un sous-monoïde de M.

(vi)

1. D'abord on montre $\mathbf{m}(A) \subset \mathrm{im}(p_{f,A})$. Puisque $\mathrm{im}(p_{f,A})$ est un sous-monoïde de $(M,*)$ par définition de $\mathbf{m}(A)$ (voir définition [8.6] page 220) il suffit de montrer $A \subset \mathrm{im}(p_{f,A})$. Or si $x \in A$ et
$$(m,x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$$
vérifie $m_0 = 1$ et $x_0 = x$ alors
$$p_{f,A}(m,x,0) = x_0^{m_0} = x$$
ainsi $x \in \mathrm{im}(p_{f,A})$.
2. Ensuite on montre $\mathrm{im}(p_{f,A}) \subset \mathbf{m}(A)$. Il suffit de montrer que si
$$(m,x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$$
alors $\forall\ n \in \mathbb{N}$
$$p_{f,A}(m,x,n) \in \mathbf{m}(A).$$
On pose
$$H = \{n \in \mathbb{N}/p_{f,A}(x,m,n) \in \mathbf{m}(A)\}$$
et on montre que H est héréditaire.
   (a) D'abord on montre $0 \in H$. En effet par définition
   $$p_{f,A}(m,x,0) = x_0^{m_0}$$
   Or $x_0 \in A$ par suite $x_0 \in \mathbf{m}(A)$ et (i) montre alors que $x_0^{m_0} \in \mathbf{m}(A)$.
   (b) Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. Par définition on a
   $$p_{f,A}(m,x,n+1) = p_{f,A}(m,x,n)\ x_{n+1}^{m_{n+1}}$$
   or
   — puisque $n \in H$ on a $p_{f,A}(m,x,n) \in \mathbf{m}(A)$
   — puisque $x_{n+1} \in A$ on a aussi $x_{n+1}^{m_{n+1}} \in \mathbf{m}(A)$
   ainsi $p_{f,A}(m,x,n+1)$ est le produit de deux éléments de $\mathbf{m}(A)$.

■

Le lemme [8.8] page 220 est sans doute plus parlant lorsqu'on l'écrit dans un formalisme additif.

Lemme 8.9 *On note* $(\mathbb{N},O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* $(M,*)$ *un monoïde d'élément neutre* e *où* $* : (x,y) \mapsto x+y$ *est notée additivement .*
(i) Si X *est un sous-monoïde de* $(M,*)$ *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in X$ $nx \in X$*.*
(ii) Pour tout sous-ensemble A *de* M *il existe une unique application*
$$\mathbf{s}_A : (m,x) \mapsto \mathbf{s}_A(m,x)$$
de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},M)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*
1. *pour tout* $(m,x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$
$$\mathbf{s}_A(m,x)(0) = m_0x_0$$
2. *pour tout* $(m,x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ *et* $n \in \mathbb{N}$
$$\mathbf{s}_A(m,x)(n+1) = \mathbf{s}_A(m,x)(n) + m_{n+1}x_{n+1}$$

(iii) Si $m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ *vérifie : pour tout* $k > p$ $m_k = 0$ *alors pour tout* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $n \geq p$

$$\mathbf{s}_A(m, x)(n) = \mathbf{s}_A(m, x)(p).$$

(iv) Si $(m, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $(p, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *vérifient*

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n\ m_k = p_k \text{ et } x_k = y_k$$

alors

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n\ \mathbf{s}_A(m, x)(k) = \mathbf{s}_A(p, y)(k).$$

(v) La relation $s_{f,A}$ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$ *dans* M *définie par*

$$s_{f,A} = \{((m, x, n), y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N} / y = \mathbf{s}_A(m, x)(n)\}$$

est une application et $\mathrm{im}(s_{f,A})$ *est un sous-monoïde de* M*.*

(vi) $\mathrm{im}(s_{f,A})$ *est le sous-monoïde engendré par* A *:*

$$\mathrm{im}(s_{f,A}) = \mathbf{m}(A)$$

Preuve C'est la version additive du lemme [8.8] page 220 ■

Lorsque le monoïde est commutatif les notations [8.3] page 201 sont utilisables.

Notation 8.9 *Si* $(\mathbb{N}, O)$ *est un ensemble d'entiers naturels et* $(M, *)$ *est un monoïde commutatif*

1. *Si* $* : (x, y) \mapsto xy$ *est notée multiplicativement l'application* $p_{f,A}$ *définie sur le produit cartésien* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$ *et à valeurs dans* M *construite au lemme* [8.8] *page* 220 *est notée*
$$p_{f,A}(m, x, n) = \prod_{k=0}^{n} x_k^{m_k}$$
2. *Si* $* : (x, y) \mapsto x + y$ *est notée additivement alors l'application* $s_{f,A}$ *définie sur le produit cartésien* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$ *et à valeurs dans* M *construite au lemme* [8.9] *page* 225 *est notée*
$$s_{f,A}(m, x, n) = \sum_{k=0}^{n} m_k x_k$$

Lorsqu'on travaille sur des familles de sous-ensembles $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ comme en théorie de la mesure ou en topologie, on parle souvent de la famille $\mathcal{F}_s$ des réunions finis d'éléments de $\mathcal{F}$ ou de la famille $\mathcal{F}_p$ des intersections finis d'éléments de $\mathcal{F}$, pour définir rigoureusement ces familles d'ensembles il suffit de recopier le lemme [8.8] page 220 en changeant quelques virgules.

Définition 8.7 *On note* $(M, *)$ *un monoïde d'élément neutre* e *où la loi* $*$ *est notée multiplicativement,* $* : (x, y) \mapsto xy$*. un sous-ensemble* A *de* M *est dit* ***stable*** *par le produit* ([1]) *de* M *si* A *vérifie la propriété :*

$$(x, y) \in A \times A \Rightarrow xy \in A$$

On note $\mathcal{S}(M)$ *la famille des sous-ensembles de* M *stable par le produit de* M

Le lemme suivant est une application directe de la définition

1. ou simplement stable

Lemme 8.10 *On note $(M,*)$ un monoïde où la loi $*:(x,y)\mapsto xy$ est notée multiplicativement et où l'élément neutre est noté e.*
(i) Si $\mathcal{S}$ une famille non vide de sous-ensembles stable de M.L'ensemble

$$B=\bigcap_{F\in\mathcal{S}}F$$

est un sous-ensemble stable de M
(ii) Si A est un sous-ensemble de M il existe un unique sous-ensemble stable $\mathbf{s}(A)$ de M vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. *$A\subset\mathbf{s}(A)$*
2. *Si X est un sous-ensemble stable de M vérifiant $A\subset X$ alors*

$$\mathbf{s}(A)\subset X.$$

(iii) Si A est stable $\mathbf{s}(A)=A$
(iv) Pour tout sous-ensemble A de M

$$\mathbf{s}(\mathbf{s}(A))=\mathbf{s}(A)$$

(v) Pour tout sous-ensemble A de M

$$\mathbf{m}(A)=\mathbf{s}(A\cup\{e\}).$$

Preuve

(i)

si $(x,y)\in\bigcap_{F\in\mathcal{S}}F\times\bigcap_{F\in\mathcal{S}}F$ alors pour tout $F\in\mathcal{S}$ on a $(x,y)\in F\times F$ par suite, pour tout $F\in\mathcal{S}$ on a $xy\in F$ et

$$xy\in\bigcap_{F\in\mathcal{S}}F$$

(ii)

Preuve de l'existence

On note

$$\Omega(A)=\{F\in\mathcal{S}(M)/A\subset F\}$$

alors $\Omega(A)$ est une famille de sous-ensemble stable de M qui contient M, on montre que le sous-ensemble stable

$$\mathbf{s}(A)=\bigcap_{F\in\Omega(A)}F$$

vérifie *1* et *2*,

1. par définition pour tout $F\in\Omega(A)$ on a $A\subset F$ par suite $A\subset\mathbf{s}(A)$,
2. Si X est un sous-ensemble stable de M vérifiant $A\subset X$ alors $X\in\Omega(A)$ par suite $\mathbf{s}(A)\subset X$.

Preuve de l'unicité

Si les sous-ensemble stable B et B' vérifient *1.* et *2.* alors
— puisque $A\subset B'$ et B vérifie *2.* on a $B\subset B'$
— puisque $A\subset B$ et B' vérifie *2.* on a $B'\subset B$

ainsi $B = B'$.

(iii)

Puisque A est un sous-ensemble stable vérifiant $A \subset A$ *2* permet d'affirmer que $\mathbf{s}(A) \subset A$ et par *1* on obtient $A \subset \mathbf{s}(A)$.

(iv)

$\mathbf{s}(A)$ est stable il suffit donc d'appliquer *(iii)*.

(v)

Par définition $\mathbf{m}(A)$ est un sous-monoïde contenant A, donc $A \cup \{e\}$, par suite, puisque $\mathbf{m}(A)$ est stable,

$$\mathbf{s}(A \cup \{e\}) \subset \mathbf{m}(A).$$

D'autre part il est clair que
- — puisque $A \cup \{e\} \subset \mathbf{s}(A \cup \{e\})$ on a $e \in \mathbf{s}(A \cup \{e\})$
- — puisque $\mathbf{s}(A \cup \{e\})$ est stable

$$(x, y) \in \mathbf{s}(A \cup \{e\}) \times \mathbf{s}(A \cup \{e\}) \Rightarrow xy \in \mathbf{s}(A \cup \{e\})$$

ainsi $\mathbf{s}(A \cup \{e\})$ est un monoïde contenant A par suite

$$\mathbf{m}(A) \subset \mathbf{s}(A \cup \{e\})$$

■

Définition 8.8 *On note $(M, *)$ un monoïde et A un sous-ensemble de M l'ensemble $\mathbf{s}(A)$ défini par le lemme* [8.10] *page 227 est appelé le sous-ensemble **stable** engendré par A.*

Le calcul formel sur les monoïdes permet de décrire $\mathbf{s}(A)$. Dans le lemme qui suit on utilise les résultats et notations du lemme [8.3] page 196.

Lemme 8.11 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels et $(M, *)$ un monoïde où $* : (x, y) \mapsto xy$ est notée multiplicativement, si A est un sous-ensemble de M pour que $a \in \mathbf{s}(A)$ il faut et il suffit qu'il existe $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ tel que*

$$a = \pi^d(x)(n).$$

Autrement dit

$$\mathbf{s}(A) = \{a \in M / \exists\ (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) : a = \pi^d(x)(n)\}.$$

Preuve On pose

$$B = \{a \in M / \exists\ (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) : a = \pi^d(x)(n)\}$$

et on montre

$$B \subset \mathbf{s}(A) \subset B.$$

1. D'abord on montre $B \subset \mathbf{s}(A)$. On vérifie que pour tout $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ l'ensemble

$$H_x = \{n \in \mathbb{N} / \pi^d(x)(n) \in \mathbf{s}(A)\}$$

est héréditaire.

(a) D'abord $0 \in H_x$ puisque par définition $\pi^d(x)(0) = x_0$ et $x_0 \in A$.

(b) Ensuite on montre $[n \in H_x \Rightarrow n + 1 \in H_x]$. En effet, si $n \in H_x$ alors, puisque $x_{n+1} \in A$ on a $(\pi^d(x)(n), x_{n+1}) \in \mathbf{s}(A) \times \mathbf{s}(A)$, la stabilité de $\mathbf{s}(A)$ montre alors que $\pi^d(x)(n)x_{n+1} \in \mathbf{s}(A)$. Or par définition de π^d

$$\pi^d(x)(n + 1) = \pi^d(x)(n)x_{n+1}$$

ce qui montre que $n + 1 \in H_x$.

Ainsi H_x est héréditaire et pour tout $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$

$$\pi^d(x)(n) \in \mathbf{s}(A) \ .$$

2. Ensuite on montre $\mathbf{s}(A) \subset B$. Par définition de $\mathbf{s}(A)$ il suffit de montrer que B est stable pour le produit de M et $A \subset B$.
   (a) D'abord $A \subset B$ puisque si $a \in A$ alors pour tout $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ vérifiant $x_0 = a$ on a $\pi^d(x)(0) = x_0 = a$
   (b) Pour montrer que B est stable on montre que pour tout couple $(x,y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ et tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$H = \{k \in \mathbb{N} / \pi^d(x)(n)\pi^d(y)(k) \in B\}$$

   est héréditaire.
      i. D'abord on montre que $0 \in H$. Pour cela on considère l'application $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ définie par

$$z_j = \begin{cases} x_j & si \quad j \leq n \\ y_0 & si \quad j \geq n+1 \end{cases} \ .$$

      et on montre que $\pi^d(z)(n+1) = \pi^d(x)(n)\pi^d(y)(0)$. Or, par définition $\pi^d(z)(n+1) = \pi^d(z)(n)\ z_{n+1}$ et puisque $z_{n+1} = y_0$ on obtient

$$\pi^d(z)(n+1) = \pi^d(z)(n)y_0 = \pi^d(z)(n)\pi^d(y)(0).$$

      Enfin, puisque pour tout $j \leq n$ on a $x_j = z_j$ le (iii) du lemme [8.3] page 196 permet d'affirmer que $\pi^d(z)(n) = \pi^d(x)(n)$ ainsi

$$\pi^d(z)(n+1) = \pi^d(x)(n)\pi^d(y)(0)$$

      et $0 \in H$.
      ii. Ensuite on montre $[k \in H \Rightarrow k+1 \in H]$. En effet, si $k \in H$ alors il existe $(q,t) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ tel que

$$\pi^d(x)(n)\pi^d(y)(k) = \pi^d(t)(q)$$

      par suite

$$\pi^d(x)(n)\pi^d(y)(k+1) = (\pi^d(x)(n)\pi^d(y)(k))y_{k+1} = \pi^d(t)(q)y_{k+1}.$$

      On considère l'application $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ définie par

$$z_j = \begin{cases} t_j & si \quad j \leq q \\ y_{k+1} & si \quad j \geq q+1 \end{cases} \ .$$

      et on montre que $\pi^d(z)(q+1) = \pi^d(x)(n)\pi^d(y)(k+1)$. Or, par définition $\pi^d(z)(q+1) = \pi^d(z)(q)\ z_{q+1}$ et puisque $z_{q+1} = y_{k+1}$ on obtient

$$\pi^d(z)(q+1) = \pi^d(z)(q)y_{k+1}.$$

      Enfin, puisque pour tout $j \leq q$ on a $t_j = z_j$ le (iii) du lemme [8.3] page 196 permet d'affirmer que $\pi^d(z)(q) = \pi^d(t)(q)$ ainsi

$$\pi^d(z)(q+1) = \pi^d(z)(q)y_{k+1} = \pi^d(t)(q)y_{k+1} = \pi^d(x)(n)\pi^d(y)(k+1)$$

      et $k+1 \in H$.

Ainsi H est héréditaire et pour tout $(x, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ et $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ il existe $(q, t) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ tel que

$$\pi^d(t)(q) = \pi^d(x)(n)\pi^d(y)(k)$$

ceci permet de montrer que B est stable par le produit de M puisque si $\alpha \in B$ et $\beta \in B$ alors il existe $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ tel que $\alpha = \pi^d(x)(n)$ et $(k, y) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ tel que $\beta = \pi^d(y)(k)$, ainsi

$$\alpha\beta = \pi^d(x)(n)\pi^d(y)(k) \in B.$$

Ainsi B est un sous-ensemble stable contenant A et $\mathbf{s}(A) \subset B$.

■

Si $(M, *)$ est un monoïde et A un sous-ensemble de M, on parle souvent de "produits finis d'éléments de A" ou de "sommes finis d'éléments de A", ces notions sont corrélées au lemme [8.11] page 228.

Définition 8.9 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* $(M, *)$ *un monoïde et* A *un sous-ensemble de* M

1. *Si* $* : (x, y) \mapsto xy$ *est notée multiplicativement et* π^d *est l'unique application de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, M)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, M)$ *vérifiant*
   (a) $\forall\ x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, M)$
   $$\pi^d(x)(0) = x_0$$
   (b) $\forall\ x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, M)$ *et* $n \in \mathbb{N}$
   $$\pi^d(x)(n+1) = \pi^d(x)(n)x_{n+1}$$
   on dit qu'un élément $a \in M$ *est un produit fini d'éléments de* A *s'il existe* $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *tel que*
   $$a = \pi^d(x)(n)$$
   on note
   $$A_p = \{a \in M / \exists\ (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) : a = \pi^d(x)(n)\}$$
   l'ensemble des produits finis d' éléments de A
2. *Si* $* : (x, y) \mapsto x + y$ *est notée additivement et* π^d *est l'unique application de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, M)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, M)$ *vérifiant*
   (a) $\forall\ x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, M)$
   $$\pi^d(x)(0) = x_0$$
   (b) $\forall\ x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, M)$ *et* $n \in \mathbb{N}$
   $$\pi^d(x)(n+1) = \pi^d(x)(n) + x_{n+1}$$
   on dit qu'un élément $a \in M$ *est une somme fini d'éléments de* A *s'il existe* $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *tel que*
   $$a = \pi^d(x)(n)$$
   on note
   $$A_s = \{a \in M / \exists\ (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) : a = \pi^d(x)(n)\}$$
   l'ensemble des sommes finies d' éléments de A

Dans la cas d'un monoïde commutatif on peut utiliser les notations [8.3] page 201 qui sont plus usuelles.

Définition 8.10 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* $(M, *)$ *un monoïde commutatif et* A *un sous-ensemble de* M

1. *Si* $*: (x,y) \mapsto xy$ *est notée multiplicativement on dit qu'un élément* $a \in M$ *est un produit fini d'éléments de* A *s'il existe* $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *tel que*

   $$a = \prod_{k=0}^{n} x_k$$

   on note

   $$A_p = \{a \in M / \exists\ (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) : a = \prod_{k=0}^{n} x_k\}$$

   l'ensemble des produits finis d' éléments de A

2. *Si* $*: (x,y) \mapsto x+y$ *est notée additivement on dit qu'un élément* $a \in M$ *est une somme fini d'éléments de* A *s'il existe* $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *tel que*

   $$a = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

   on note

   $$A_s = \{a \in M / \exists\ (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) : a = \sum_{k=0}^{n} x_k\}$$

   l'ensemble des sommes finies d' éléments de A

Ainsi le lemme [8.11] page 228 permet d'énoncer une tautologie.

Théorème 8.3 *Si* $(\mathbb{N}, O)$ *est un ensemble d'entiers naturels,* $(M, *)$ *est un monoïde et* A *un sous-ensemble de* M *le sous-ensemble stable engendré par* A *est l'ensemble des produits finis d'éléments de* A*.*

Lorsque X est un ensemble la loi $\star_0$ sur $\mathcal{P}(X)$ définie par

$$\star_0 : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mapsto \mathcal{P}(X) :$$

$$\star_0 : (A,B) \mapsto A \cap B$$

munit $\mathcal{P}(X)$ d'une structure de monoïde commutatif d'élément neutre X, on note $(\mathcal{P}(X), \cap)$ ce monoïde. De même la loi $\star_1$ sur $\mathcal{P}(X)$ définie par

$$\star_1 : (A,B) \mapsto A \cup B$$

munit $\mathcal{P}(X)$ d'une structure de monoïde commutatif d'élément neutre $\varnothing$, on note $(\mathcal{P}(X), \cup)$ ce monoïde. Par tradition, pour ces monoïdes, on préfère parler de famille des intersections finies ou de famille des réunions finies plutôt que d'ensemble des produits finis ou des sommes finies

Définition 8.11 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* X *un ensemble et* $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ *une famille de sous-ensemble de* X

1. *On appelle famille des intersections finies d'éléments de* $\mathcal{E}$ *l'ensemble des produits finis d'éléments de* $\mathcal{E}$ *dans le monoïde* $(\mathcal{P}(X), \cap)$ *. On note* $\mathcal{E}_p$ *la famille des intersections finies d'éléments de* $\mathcal{E}$
2. *On appelle famille des réunions finies d'éléments de* $\mathcal{E}$ *l'ensemble des produits finis d'éléments de* $\mathcal{E}$ *dans le monoïde* $(\mathcal{P}(X), \cup)$ *. On note* $\mathcal{E}_s$ *la famille des réunions finies d'éléments de* $\mathcal{E}$

Le lemme qui suit est une application directe des définitions.

Lemme 8.12 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* X *un ensemble et* $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ *une famille de sous-ensembles de* X.

(i) L'application π_i^d *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$ *définie par*

$$\pi_i^d(E)(n) = \bigcap_{k=0}^{n} E_k = \{x \in X / \forall\ k \in \mathbb{N}_n : x \in E_k\}$$

est l'unique application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$ *vérifiant :*

1. *pour tout* $E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$
$$\pi_i^d(E)(0) = E_0$$
2. *pour tout* $E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$ *et* $n \in \mathbb{N}$
$$\pi_i^d(E)(n+1) = \pi_i^d(E)(n) \cap E_{n+1}$$

(ii) Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $A \in \mathcal{E}_p$
2. *il existe* $(n, E) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{E})$ *tel que*
$$A = \bigcap_{k=0}^{n} E_k$$
3. *il existe un ensemble fini non vide* I *et* $E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathcal{E})$ *tel que*
$$A = \bigcap_{i \in I} E_i$$

(iii) L'application π_u^d *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$ *définie par*

$$\pi_u^d(E)(n) = \bigcup_{k=0}^{n} E_k = \{x \in X / \exists\ k \in \mathbb{N}_n : x \in E_k\}$$

est l'unique application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$ *vérifiant :*

1. *pour tout* $E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$
$$\pi_u^d(E)(0) = E_0$$
2. *pour tout* $E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(X))$ *et* $n \in \mathbb{N}$
$$\pi_u^d(E)(n+1) = \pi_u^d(E)(n) \cup E_{n+1}$$

(iv) Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $A \in \mathcal{E}_s$
2. *il existe* $(n, E) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{E})$ *tel que*
$$A = \bigcup_{k=0}^{n} E_k$$
3. *il existe un ensemble fini non vide* I *et* $E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathcal{E})$ *tel que*
$$A = \bigcup_{i \in I} E_i$$

(v) $\mathcal{E}_p$ est stable dans $(\mathcal{P}(X), \cap)$:

$$(A, B) \in \mathcal{E}_p \times \mathcal{E}_p \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}_p.$$

(vi) $\mathcal{E}_s$ est stable dans $(\mathcal{P}(X), \cup)$:

$$(A, B) \in \mathcal{E}_s \times \mathcal{E}_s \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}_s.$$

Preuve

(i)

Il est clair que π_i^d vérifie *1* et *2* et le lemme [8.3] page 196 permet d'affirmer qu'il n'existe qu'une seule application vérifiant ces propriétés.

(ii)

1 $\Leftrightarrow$ *2*

En effet, par définition

$$\mathcal{E}_p = \{A \in \mathfrak{P}(X) / \exists\ (n, E) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{E}) : A = \pi_i^d(E)(n)\}$$

et (i) montre alors que

$$\mathcal{E}_p = \{A \in \mathfrak{P}(X) / \exists\ (n, E) \in \mathbb{N} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{E}) : A = \bigcap_{k=0}^{n} E_k\}$$

2 $\Leftrightarrow$ *3*

D'abord en prenant $I = \mathbb{N}_n$ on obtient *1* $\Rightarrow$ *2*. Si *2* est vérifiée avec l'ensemble I de cardinal $n+1$ et σ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans I l'application

$$F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{E})$$

définie par

$$F_k = \begin{cases} E_{\sigma(k)} & si \quad k \leq n \\ E_{\sigma(n)} & si \quad k \geq n+1 \end{cases}$$

vérifie

$$A = \bigcap_{k=0}^{n} F_k = \bigcap_{k=0}^{n} E_{\sigma(k)} = \bigcap_{i \in I} E_i.$$

(iii)

La preuve, similaire à celle de (i), est laissée au soin du lecteur.

(iv)

La preuve, similaire à celle de (ii), est laissée au soin du lecteur.

(v)

D'après le lemme [8.11] page 228 l'ensemble des produits finis d'éléments de $\mathcal{E}$ dans $(\mathcal{P}(X), \cap)$ est le sous-ensemble stable engendré par $\mathcal{E}$.

(vi)

D'après le lemme [8.11] page 228 l'ensemble des produits finis d'éléments de $\mathcal{E}$ dans $(\mathcal{P}(X), \cup)$ est le sous-ensemble stable engendré par $\mathcal{E}$. ∎

Pour construire des ≪ sur-monoïdes ≫ il nous faut étudier la notion de monoïde quotient.

8.2.2 *Monoïde quotient*

Si $(M,*)$ est un monoïde et R est une relation d'équivalence sur M (voir définition [7.12] page 185) alors la relation R et la loi du monoïde induisent une loi sur $\mathcal{P}(M)$, c'est l'application φ de $\mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}(M)$ dans $\mathcal{P}(M)$ définie par

$$\varphi(A,B)=\bigcup_{(a,b)\in A\times B}\pi(a*b)=\{x\in M/\exists\ (a,b)\in A\times B:(a*b,x)\in R\}$$

où $\pi : M\mapsto M/R$ est l'application canonique. On veut trouver une condition sur R pour que la restriction de φ à $M/R\times M/R$ soit une loi de monoïde, par définition d'un monoïde, il faut

1. φ soit associative
2. φ soit interne : $\varphi(M/R\times M/R)\subset M/R$
$$\forall\ (x,y)\in M\times M\ \ \varphi(\pi(x),\pi(y))\in M/R \tag{8.37}$$
3. φ possède un élément neutre : il existe $u\in M$ tel que
$$\forall\ x\in M\ \ \varphi(\pi(x),\pi(u))=\pi(x). \tag{8.38}$$

Le lemme suivant n'est qu'un examen des conditions (8.37) et (8.38).

Lemme 8.13 *On note M un ensemble, R une relation d'équivalence sur M et $\pi : M\mapsto M/R$ l'application canonique.*
(i) Si $\diamond : M/R\times M/R\mapsto M/R$ est une loi telle que $(M/R,\diamond)$ est un semi-monoïde il existe une application f de $M\times M$ dans M vérifiant

$$(x,y)\in M\times M\Rightarrow\pi(x)\diamond\pi(y)=\pi(f(x,y)). \tag{8.39}$$

Toute application vérifiant (8.39) vérifie les propriétés [**comp**] *et* [**ass**] *suivantes :*
[**comp**] *pour tout $(x,y)\in M\times M$*

$$(a,b)\in\pi(x)\times\pi(y)\Rightarrow(f(a,b),f(x,y))\in R$$

[**ass**] *pour tout $(x,y)\in M\times M$ et $z\in M$*

$$(f(f(x,y),z),f(x,f(y,z)))\in R$$

Si de plus $(M/R,\ \diamond)$ est un monoïde alors f vérifie de plus la propriété [**n**] *suivante :*
[**n**] *il existe $e_0\in M$ tel que pour tout $x\in M$*

$$(x,f(x,e_0))\in R\quad\text{et}\quad(x,f(e_0,x))\in R.$$

(ii) Si $f : M\times M\mapsto M$ est une application vérifiant [**comp**], [**ass**] *et si l'application φ_f de $\mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}(M)$ dans $\mathcal{P}(M)$ est définie par*

$$\varphi_f(A,B)=\bigcup_{(a,b)\in A\times B}\pi(f(a,b))=\{x\in M/\exists\ (a,b)\in A\times B:(f(a,b),x)\in R\}$$

alors

1. *φ_f est une loi associative sur $\mathcal{P}(M)$. En d'autres termes φ_f possède la propriété suivante : pour tout $(A,B)\in\mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}(M)$ et $C\in\mathcal{P}(M)$*
$$\varphi_f\left(\varphi_f(A,B),C\right)=\varphi_f\left(A,\varphi_f(B,C)\right)$$

2. la restriction $\varphi_{f,r}$ de φ_f à $M/R \times M/R$ est une loi de semi-monoïde sur M/R, en d'autre termes $\varphi_{f,r}$ est une loi associative qui vérifie les propriétés suivantes

(a) $\varphi_{f,r}(E/R \times E/R) \subset E/R$: pour tout $(x,y) \in M \times M$

$$\varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(y)) \in E/R,$$

plus précisément

$$(x,y) \in M \times M \Rightarrow \varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(y)) = \pi(f(x,y))) \tag{8.40}$$

(b) Si de plus f vérifie [**n**] *alors $\varphi_{f,r}$ possède un élément neutre : il existe $e_0 \in M$ tel que pour tout $x \in M$*

$$\varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(e_0)) = \pi(x) = \varphi_{f,r}(\pi(e_0), \pi(x))$$

(iii) si f est une loi de semi-monoïde sur M alors f vérifie [**ass**], *ainsi, si f vérifie* [**comp**] *$\varphi_{f,r}$ est une loi de semi-monoïde sur M/R. Si de plus f possède un élément neutre e alors $\varphi_{f,r}$ est une loi de monoïde sur M/R d'élément neutre $\pi(e)$.*
Enfin si $f : M \times M \mapsto M$ est notée $(x,y) \mapsto x * y$ et

$$\varphi_{f,r} : M/R \times M/R \mapsto M/R$$

est notée $(\pi(x), \pi(y)) \mapsto \pi(x) \ \diamond \ \pi(y)$ alors π vérifie :

1. pour tout $(x,y) \in M \times M$

$$\pi(x * y) = \pi(x) \diamond \pi(y).$$

2. $\pi(e)$ est l'élément neutre de $(M/R, \diamond)$

Preuve

(i)

On note P l'application de $M \times M$ dans $\mathcal{P}(M)$ définie par

$$P_{x,y} = \{z \in M / \pi(x) \ \diamond \ \pi(y) = \pi(z)\}$$

puisque pour tout $(x,y) \in M \times M$ $\pi(x) \ \diamond \ \pi(y) \in E/R$, on a

$$\forall \ (x,y) \in M \times M \ P_{x,y} \neq \varnothing.$$

Si $h_M : \mathcal{P}^*(M) \mapsto M$ est une fonction de choix pour M (voir axiome [2.1] page 48) l'application f de $M \times M$ dans M définie par

$$f(x,y) = h_M(P_{x,y})$$

vérifie, par définition d'une fonction de choix, $[\forall \ (x,y) \in M \times M \ f(x,y) \in P_{x,y}]$ en d'autres termes

$$(x,y) \in M \times M \Rightarrow \pi(x) \ \diamond \ \pi(y) = \pi(f(x,y)).$$

1 vérification de [**comp**] Si $(x,y) \in M \times M$ et $(a,b) \in \pi(x) \times \pi(y)$ alors $\pi(a) = \pi(x)$ et $\pi(b) = \pi(y)$ par suite

$$\pi(f(a,b)) = \pi(a) \ \diamond \ \pi(b) = \pi(x) \ \diamond \ \pi(y) = \pi(f(x,y))$$

et l'égalité $\pi(f(a,b)) = \pi(f(x,y))$ est la traduction de l'assertion

$$(f(a,b), f(x,y)) \in R.$$

2 vérification de [**ass**] puisque la loi $\diamond$ est associative on a, si $(x, y) \in M \times M$ et $z \in M$,

$$(\pi(x) \diamond \pi(y)) \diamond \pi(z) = \pi(f(x, y)) \diamond \pi(z) = \pi(x) \diamond (\pi(y) \diamond \pi(z)) = \pi(x) \diamond \pi(f(y, z))$$

ainsi

$$\pi(f(x, y)) \diamond \pi(z) = \pi(x) \diamond \pi(f(y, z))$$

et

$$\pi(f(f(x, y), z)) = \pi(f(x, f(y, z)))$$

or l'égalité $\pi(f(f(x, y), z)) = \pi(f(x, f(y, z)))$ est la traduction de l'assertion

$$(f(f(x, y), z), f(x, f(y, z)) \in R.$$

3 vérification de [**n**] Si ε est l'élément neutre de la loi $\diamond$ et $e_0 \in M$ vérifie $\pi(e_0) = \varepsilon$ alors pour tout $x \in M$

$$\pi(x) = \pi(x) \ \diamond \varepsilon = \pi(x) \ \diamond \ \pi(e_0) = \pi(f(x, e_0))$$

et

$$\pi(x) = \varepsilon \ \diamond \pi(x) = \pi(e_0) \diamond \ \pi(x) = \pi(f(e_0, x))$$

et l'égalité $\pi(x) = \pi(f(x, e_0)) = \pi(f(e_0, x))$ est la traduction de l'assertion

$$(x, f(x, e_0)) \in R \quad \text{et} \quad (x, f(e_0, x)) \in R.$$

(ii)

1. Si $(A, B) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$ et $C \in \mathcal{P}(M)$ on pose

$$\Phi_{A,B,C} = \{x \in M / \exists \ ((a, b), c) \in (A \times B) \times C : (f(f(a, b), c), x) \in R\}$$

et on montre

$$\varphi_f(\varphi_f(A, B), C) = \Phi_{A,B,C} = \varphi_f(A, \varphi_f(B, C))$$

(a) On montre $\varphi_f(\varphi_f(A, B), C) \subset \Phi_{A,B,C}$.
En effet, si $x_0 \in \varphi_f(\varphi_f(A, B), C)$ alors il existe $(\alpha, c) \in \varphi_f(A, B) \times C$ tel que $(f(\alpha, c), x_0) \in R$,
— puisque $\alpha \in \varphi_f(A, B)$ il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $(f(a, b), \alpha) \in R$ en particulier $(f(a, b), c) \in \pi(\alpha) \times \pi(c)$
— la propriété [**comp**] montre alors que

$$(f(f(a, b), c), f(\alpha, c)) \in R$$

la transitivité de R entraîne donc

$$(f(f(a, b), c), x_0) \in R,$$

par suite $x_0 \in \Phi_{A,B,C}$.

(b) on montre $\Phi_{A,B,C} \subset \varphi_f(\varphi_f(A, B), C)$.
En effet, si $x_0 \in \Phi_{A,B,C}$ il existe $(a, b) \in A \times B$ et $c \in C$ tel que

$$(f(f(a, b), c), x_0) \in R$$

ainsi si $\alpha = f(a, b)$ on obtient $(f(\alpha, c), x_0) \in R$ or il est clair que $\alpha \in \varphi_f(A, B)$ par suite $x_0 \in \varphi_f(\varphi_f(A, B), C)$

(c) On montre $\varphi_f(A, \varphi_f(B, C)) \subset \Phi_{A,B,C}$.
si $x_0 \in \varphi_f(A, \varphi_f(B, C))$ alors il existe $(a, \beta) \in A \times \varphi_f(B, C)$ tel que $(f(a, \beta), x_0) \in R$,
— puisque $\beta \in \varphi_f(B, C)$ il existe $(b, c) \in B \times C$ tel que $(f(b, c), \beta) \in R$ en particulier $(a, f(b, c)) \in \pi(a) \times \pi(\beta)$

— la propriété [**comp**] montre alors que

$$(f(a, f(b, c)), f(a, \beta)) \in R$$

la transitivité de R entraîne donc

$$(f(a, f(b, c)), x_0) \in R,$$

or la propriété [**ass**] permet d'affirmer que

$$(f(f(a, b), c), f(a, f(b, c))) \in R$$

ainsi la transitivité de R montre que $(f(f(a, b), c), x_0) \in R$ et on obtient $x_0 \in \Phi_{A,B,C}$.

(d) on montre $\Phi_{A,B,C} \subset \varphi_f(A, \varphi_f(B, C))$.
En effet, si $x_0 \in \Phi_{A,B,C}$ il existe $(a, b) \in A \times B$ et $c \in C$ tel que

$$(f(f(a, b), c), x_0) \in R$$

or la propriété [**ass**] montre que $(f(a, f(b, c)), f(f(a, b), c))) \in R$ la transitivité de R montre alors que $(f(a, f(b, c)), x_0) \in R$ ainsi si $\beta = f(b, c)$ on obtient $(f(a, \beta), x_0) \in R$ or il est clair que $\beta \in \varphi_f(B, C)$ par suite $x_0 \in \varphi_f(A, \varphi_f(B, C))$

Ainsi (a) et (b) montre que

$$\varphi_f(\varphi_f(A, B), C) = \Phi_{A,B,C}$$

et (c) et (d) montre que

$$\varphi_f(A, \varphi_f(B, C)) = \Phi_{A,B,C}.$$

2. D'après *1* $\varphi_{f,r}$ est associative

(a) On montre que pour tout $(x, y) \in M \times M$

$$\varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(y)) = \pi(f(x, y))$$

i. D'abord on montre $\varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(y)) \subset \pi(f(x, y))$. Si $x_0 \in \varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(y))$ alors il existe $(a, b) \in \pi(x) \times \pi(y)$ tel que $(f(a, b), x_0) \in R$, or la propriété **comp** montre, puisque par construction $(x, a) \in R$ et $(y, b) \in R$, que $(f(x, y), f(a, b)) \in R$ ainsi la transitivité de R entraîne $(f(x, y), x_0) \in R$ par suite $x_0 \in \pi(f(x, y))$.

ii. Ensuite on montre $\pi(f(x, y)) \subset \varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(y))$, or c'est une conséquence directe de l'égalité

$$\varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(y)) = \bigcup_{(a,b)\in\pi(x)\times\pi(y)} \pi(f(a, b)).$$

puisque $(x, y) \in \pi(x) \times \pi(y)$.

(b) Si e_0 vérifie [**n**] alors pour tout $x \in M$ on a

$$\pi(f(x, e_0)) = \pi(x) = \pi(f(e_0, x)),$$

par suite d'après (a) pour tout $x \in M$

$$\varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(e_0)) = \pi(f(x, e_0)) = \pi(x) = \pi(f(e_0, x)) = \varphi_{f,r}(\pi(e_0), \pi(x))$$

(iii)

Si $f(x, y) = x * y$ est une loi de monoïde alors

1. [**ass**] est vérifiée puisque l'associativité de la loi montre que

$$f(f(x, y), z) = (x * y) * z = x * (y * z) = f(x, f(y, z))$$

2. **[n]** est vérifiée puisque si e_0 est lélément neutre de $(M, *)$ alors

$$f(x, e_0) = x * e_0 = x = e_0 * x = f(e_0, x)$$

Ainsi, si f vérifie **[comp]** alors (ii) permet d'affirmer que $\varphi_{f,r}$ est une loi de monoïde sur M/R.

1. L'égalité (8.40) page 235 montre que

$$\varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(y)) = \pi(f(x, y))$$

c'est à dire

$$\pi(x) \diamond \pi(y) = \pi(x * y).$$

2. Enfin si $(M, *)$ est un monoïde d'élément neutre e pour tout $x \in M$ on a

$$\pi(x) \diamond \pi(e) = \pi(x * e) = \pi(x) = \pi(e * x) = \pi(e) \diamond \pi(x)$$

ainsi $\pi(e)$ est lélément neutre de $(M/R, \diamond)$

■

Le lemme [8.13] page 234 suggère une définition.

Définition 8.12 *On note $(M, *)$ un semi-monoïde et R une relation d'équivalence sur M, $\pi : M \mapsto M/R$ l'application canonique, on dit que la relation R est **compatible** avec la loi $*$ si elle vérifie la propriété suivante : pour tout couple $(x, y) \in M \times M$*

$$(a, b) \in \pi(x) \times \pi(y) \Rightarrow (a * b, x * y) \in R.$$

On note $\mathrm{Eq}(M, *)$ *l'ensemble des relations d'équivalences sur M compatibles avec la loi $*$.*

Le lemme [8.13] page 234 permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 8.4 *On note $(M, *)$ un semi-monoïde (respectivement un monoïde d'élément neutre e) et R une relation d'équivalence sur M, $\pi : M \mapsto M/R$ l'application canonique, si R est compatible avec la loi $*$ il existe une loi de semi-monoïde $\diamond$ (respectivement une loi de monoïde d'élément neutre $\pi(e)$) sur M/R qui vérifie : pour tout $(x, y) \in M \times M$*

$$\pi(x * y) = \pi(x) \diamond \pi(y)$$

Preuve Voir le (iii) du lemme [8.13] ■

Le lemme suivant est une application directe des définitions.

Lemme 8.14 *On note $(M, *)$ un semi-monoïde, (respectivement un monoïde d'élément neutre e)*

(i) Si Y est un ensemble, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M, Y)$ est une application de M dans Y, et R une relation d'équivalence sur M compatible avec la loi $*$ vérifiant

$$R \subset \{(x, x') \in M \times M / g(x) = g(x')\}$$

alors

$$R \times R \subset \{((a, x), (b, y)) \in (M \times M) \times (M \times M) / g(a * b) = g(x * y)\}.$$

(ii) Si A est un sous-ensemble de $M \times M$ il existe une unique relation d'équivalence $\rho_*(A)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. *$\rho_*(A)$ est une relation d'équivalence sur M compatible avec la loi $*$*
2. *$A \subset \rho_*(A)$*

3. Si $R_0 \in \mathrm{Eq}(M,*)$ *vérifie* $A \subset R_0$ *alors*

$$\rho_*(A) \subset R_0.$$

(iii) Si Y *est un ensemble,* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M,Y)$ *une application de* M *dans* Y*,* A *un sous-ensemble de* M *et* $\pi_* : M \mapsto M/\rho_*(A)$ *l'application canonique, pour qu'il existe une application* g^* *de* $M/\rho_*(A)$ *dans* Y *vérifiant*

$$g = g^* \circ \pi_*$$

il suffit que que la relation d'équivalence $R_g = \{(x,x') \in M \times M/g(x) = g(x')\}$ *soit une relation compatible avec* $*$ *qui vérifie :* $A \subset R_g$

(iv) On note $(M_1, *_1)$ *un semi-monoïde,* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M,M_1)$ *une application de* M *dans* M_1 *vérifiant, pour tout* $(x,y) \in M \times M$*,*

$$g(x * y) = g(x) *_1 g(y). \tag{8.41}$$

Si A *un sous-ensemble de* $M \times M$ *et* $\pi_* : M \mapsto M/\rho_*(A)$ *l'application canonique, pour qu'il existe une application* g^* *de* $M/\rho_*(A)$ *dans* M_1 *vérifiant*

$$g = g^* \circ \pi_*$$

il faut et il suffit que

$$A \subset \{(x,x') \in M \times M/g(x) = g(x')\}.$$

De plus, si $\diamond$ *est la loi sur* $M/\rho_*(A)$ *vérifiant : pour tout* $(x,y) \in M \times M$

$$\pi_*(x * y) = \pi_*(x) \diamond \pi_*(y)$$

alors g^* *vérifie : pour tout* $(x,y) \in M \times M$

$$g^*(\pi_*(x) \diamond \pi_*(y)) = g^*(\pi_*(x)) *_1 g^*(\pi_*(y)) \tag{8.42}$$

Preuve

(i)

Si $(a,x) \in R$ et $(b,y) \in R$ la compatibilité de R et de la loi $*$ montre que $(a*b, x*y) \in R$, ainsi l'inclusion $R \subset \{(x,x') \in M \times M/g(x) = g(x')\}$ entraîne $g(a*b) = g(x*y)$.

(ii)

1)*Preuve de l'existence*

On note

$$\Omega(A) = \{R \in \mathrm{Eq}(M,*)/A \subset R\}$$

puisque la relation $R = M \times M$ est un élément de $\Omega(A)$ on a $\Omega(A) \neq \varnothing$, on montre que la relation

$$\rho_*(A) = \bigcap_{R \in \Omega(A)} R$$

vérifie les propriétés de (ii).

1. (a) Pour tout $x \in M$ et $R \in \Omega(A)$ on a $(x,x) \in R$ par suite $(x,x) \in \rho_*(A)$
   (b) Si $(x,y) \in \rho_*(A)$ alors pour tout $R \in \Omega(A)$ on a $(x,y) \in R$ par suite, pour tout $R \in \Omega(A)$, $(y,x) \in R$ et $(y,x) \in \rho_*(A)$.
   (c) Si $(x,y) \in \rho_*(A)$ et $(y,z) \in \rho_*(A)$ alors pour tout $R \in \Omega(A)$ on a $(x,y) \in R$ et $(y,z) \in R$ par suite pour tout $R \in \Omega(A)$ on a $(x,z) \in R$ et $(x,z) \in \rho_*(A)$

(d) si $(a, x) \in \rho_*(A)$ et $(b, y) \in \rho_*(A)$ alors pour tout $R \in \Omega(A)$ on a $(a, x) \in R$ et $(b, y) \in R$ par suite, pour tout $R \in \Omega(A)$ on a $(a * b, x * y) \in R$ et $(a * b, x * y) \in \rho_*(A)$.

Ainsi $\rho_*(A)$ est une relation d'équivalence compatible avec la loi $*$

2. Puisque pour tout $R \in \Omega(A)$ on a $A \subset R$ on obtient $A \subset \rho_*(A)$.
3. Si $R_0 \in \mathrm{Eq}(M, *)$ et $A \subset R_0$ alors $R_0 \in \Omega(A)$ par suite $\rho_*(A) \subset R_0$.

2) *Preuve de l'unicité*

Si R' vérifie *1.*, *2.*, *3.* alors
— Puisque $A \subset \rho_*(A)$ et R' vérifie *3.* on obtient $R' \subset \rho_*(A)$
— Puisque $A \subset R'$ et $R' \in \mathrm{Eq}(M, *)$ on obtient $\rho_*(A) \subset R'$.

(iii)

Si la relation $R_g = \{(x, x') \in M \times M / g(x) = g(x')\}$ est une relation d'équivalence compatible avec la loi $*$ qui vérifie $A \subset R_g$ alors par définition de $\rho_*(A)$ on a $\rho_*(A) \subset R_g$ ainsi le *(iv)* du lemme [7.12] page 186 permet d'affirmer qu'il existe une application $g^* : M/\rho_*(A) \mapsto Y$ telle que

$$g = g^* \circ \pi_*.$$

(iv)

1 *La condition $A \subset R_g$ est suffisante*

On montre que si la condition (8.41) page 239 est vérifiée alors la relation

$$R_g = \{(x, x') \in M \times M / g(x) = g(x')\}$$

est compatible avec la loi $*$. Or, si $(a, x) \in R_g$ et $(b, y) \in R_g$ alors $g(a) = g(x)$ et $g(b) = g(y)$ ainsi (8.41) entraîne

$$g(a * b) = g(a) *_1 g(b) = g(x) *_1 g(y) = g(x * y)$$

ainsi $(a * b, x * y) \in R_g$, *(iii)* permet alors d'affirmer qu'il existe une application $g^* : M/\rho_*(A) \mapsto M_1$ telle que

$$g = g^* \circ \pi_*.$$

2 *La condition $A \subset R_g$ est nécessaire*

Si $(x, x') \in A$ alors $(x, x') \in \rho_*(A)$ par suite $\pi_*(x) = \pi_*(x')$ et

$$g(x) = g^*(\pi_*(x)) = g^*(\pi_*(x')) = g(x').$$

Enfin l'égalité (8.42) page 239 provient de :

$$g^*(\pi_*(x) \diamond \pi_*(y)) = g^*(\pi_*(x * y)) = g(x * y) = g(x) *_1 g(y) = g^*(\pi_*(x)) *_1 g^*(\pi_*(y)).$$

■

Ainsi $\rho_*(A)$ est la « plus petite » relation d'équivalence qui est compatible avec la loi du monoïde et qui contient A.

Définition 8.13 *On note $(M, *)$ un semi-monoïde et $A \subset M \times M$ un sous-ensemble de $M \times M$ la relation $\rho_*(A)$ définie par le lemme* [8.14] *page* 238 *est appelée la relation compatible engendrée par A.*

Les applications vérifiant (8.41) page 239 s'appellent des morphismes de semi-monoïdes.

Définition 8.14 *On note $(M_0, *_0)$ un semi-monoïde et $(M_1, *_1)$ un semi-monoïde .*

1. *une application*
$$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M_0, M_1)$$
est dite ***multiplicative*** *de* $(M_0, *_0)$ *dans* $(M_1, *_1)$ *si : pour tout* $(x, y) \in M_0 \times M_0$
$$g(x *_0 y) = g(x) *_1 g(y).$$
L'ensemble des applications multiplicatives de $(M_0, *_0)$ *dans* $(M_1, *_1)$ *est appelé l'ensemble des* ***morphismes*** *du semi-monoïde* $(M_0, *_0)$ *dans le semi-monoïde* $(M_1, *_1)$*. On note*
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{smo}}[(M_0, *_0), (M_1, *_1)]$$
l'ensemble des morphismes de $(M_0, *_0)$ *dans* $(M_1, *_1)$*. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les lois on notera* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{smo}}(M_0, M_1)$ *l'ensemble de ces morphismes.*
2. *Si* $(M_0, *_0)$ *est un monoïde d'élément neutre* e_0 *et* $(M_1, *_1)$ *est un monoïde d'élément neutre* e_1 *on dit qu'une application*
$$g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M_0, M_1)$$
est un ***morphisme de monoïde*** *si* g *est multiplicative et*
$$g(e_0) = e_1$$
On note
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[(M_0, *_0), (M_1, *_1)]$$
l'ensemble des morphismes de $(M_0, *_0)$ *dans* $(M_1, *_1)$*. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les lois on notera* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M_0, M_1)$ *l'ensemble de ces morphismes.*

Le lemme qui suit est une application directe des définitions.

Lemme 8.15 *On note* $(M_0, *_0)$, $(M_1, *_1)$ *et* $(M_2, *_2)$ *des monoïdes.*

(i) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[((M_0, *_0), (M_1, *_1)]$ *et* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[((M_1, *_1), (M_2, *_2)]$ *sont des morphismes de monoïdes alors*
$$g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[((M_0, *_0), (M_2, *_2)]$$
(ii) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[((M_0, *_0), (M_1, *_1)]$ *est un morphisme de* $(M_0, *_0)$ *dans* $(M_1, *_1)$ *alors l'ensemble*
$$\mathrm{im}(f) = \{y \in M_1 / \exists\ x \in M_0 : f(x) = y\}$$
est un sous monoïde de $(M_1, *_1)$

(iii) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[(M_0, *_0), (M_1, *_1)]$ *est un morphisme de* $(M_0, *_0)$ *dans* $(M_1, *_1)$ *et une application bijective de* M_0 *dans* M_1 *alors son inverse* f^{-1} *est un morphisme de* $(M_1, *_1)$ *dans* $(M_0, *_0)$

(iv) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[(M_0, *_0), (M_1, *_1)]$ *est un morphisme de* $(M_0, *_0)$ *dans* $(M_1, *_1)$ *la relation d'équivalence*
$$R = \{(x, x') \in M_0 \times M_0 / f(x) = f(x')\}$$
est compatible avec la loi $*_0$*, ainsi, si* $\pi : M_0 \mapsto M_0/R$ *est l'application canonique, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Il existe une loi de monoïde* $\diamond$ *sur* M_0/R *telle que* π *est un morphisme de* $(M_0, *_0)$ *dans* $(M_0/R, \diamond)$ *: pour tout* $(x, y) \in M_0 \times M_0$
$$\pi(x *_0 y) = \pi(x) \diamond \pi(y)$$
2. *il existe un morphisme de* $(M_0/R, \diamond)$ *dans* $(M_1, *_1)$,
$$f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[(M_0/R, \diamond), (M_1, *_1)]$$
vérifiant
$$f = f^* \circ \pi$$

3. f^* *est une bijection de* M_0/R *dans* $\mathrm{im}(f)$

Preuve

(i)

1. D'abord si e_0, e_1, e_2 sont les éléments neutres respectifs de $(M_0, *_0)$, $(M_1, *_1)$ et $(M_2, *_2)$ alors

$$g \circ f(e_0) = g(f(e_0)) = g(e_1) = e_2$$

2. Ensuite si $(x, y) \in M_0 \times M_0$
   — puisque f est un morphisme

$$g \circ f(x *_0 y) = g(f(x *_0 y)) = g(f(x) *_1 f(y))$$

   — puisque g est un morphisme

$$g(f(x) *_1 f(y)) = g(f(x)) *_2 g(f(y)) = g \circ f(x) *_2 g \circ f(y)$$

   ainsi

$$g \circ f(x *_0 y) = g \circ f(x) *_2 g \circ f(y).$$

(ii)

1. D'abord si e_0 et e_1 sont les éléments neutres respectifs de $(M_0, *_0)$ et $(M_1, *_1)$, puisque $e_1 = f(e_0)$ on a $e_1 \in \mathrm{im}(f)$.
2. Ensuite si $(y, y') \in \mathrm{im}(f) \times \mathrm{im}(f)$ alors il existe $(x, x') \in M_0 \times M_0$ tel que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Puisque f est un morphisme on obtient

$$y *_1 y' = f(x) *_1 f(x') = f(x *_0 x')$$

   ainsi $y *_1 y' \in \mathrm{im}(f)$.

(iii)

1. D'abord si e_0 et e_1 sont les éléments neutres respectifs de $(M_0, *_0)$ et $(M_1, *_1)$, puisque $e_1 = f(e_0)$ on a $f^{-1}(e_1) = e_0$
2. Ensuite si $(y, y') \in M_1 \times M_1$ alors, puisque f est un morphisme,

$$f(f^{-1}(y) *_0 f^{-1}(y')) = f(f^{-1}(y)) *_1 f(f^{-1}(y')) = y *_1 y'$$

   ainsi

$$f(f^{-1}(y) *_0 f^{-1}(y')) = y *_1 y' = f(f^{-1}(y *_1 y'))$$

   et l'injectivité de f entraîne

$$f^{-1}(y *_1 y') = f^{-1}(y) *_0 f^{-1}(y').$$

(iv)

Si $(a, x) \in R$ et $(b, y) \in R$ alors $f(a) = f(x)$ et $f(b) = f(y)$, f étant un morphisme on obtient

$$f(a *_0 b) = f(a) *_1 f(b) = f(x) *_1 f(y) = f(x *_0 y)$$

ainsi $(a *_0 b, x *_0 y) \in R$.

1. Voir le (iii) du lemme [8.13] page 234

2. Puisque $R \subset \{(x,y) \in M_0 \times M_0 / f(x) = f(y)\}$ le (iv) du lemme [7.12] page 186 permet d'affirmer qu'il existe une application f^* de M_0/R dans M_1 vérifiant
$$f = f^* \circ \pi.$$
On montre que f^* est un morphisme du monoïde $(M_0/R\ ,\ \diamond)$ dans le monoïde $(M_1, *_1)$
   (a) Si e_0 et e_1 sont les éléments neutres respectifs de $(M_0, *_0)$ et $(M_1, *_1)$ alors $\pi(e_0)$ est l'élément neutre de $(M_0/R\ ,\ \diamond)$ et
   $$f^*(\pi(e_0)) = f^* \circ \pi(e_0) = f(e_0),$$
   f étant un morphisme on obtient
   $$f^*(\pi(e_0)) = f(e_0) = e_1.$$
   (b) Si $(x,y) \in M_0 \times M_0$ alors, puisque π est un morphisme de monoïdes
   $$f^*(\pi(x) \diamond \pi(y)) = f^*(\pi(x *_0 y)) = f^* \circ \pi(x *_0 y) = f(x *_0 y),$$
   ainsi, puisque f est un morphisme de monoïdes,
   $$f^*(\pi(x) \diamond \pi(y)) = f(x *_0 y) = f(x) *_1 f(y) = f^*(\pi(x)) *_1 f^*(\pi(y))$$
3. (a) D'abord on montre que f^* est injective. Si $f^*(\pi(x)) = f^*(\pi(y))$ alors
   $$f(x) = f^*(\pi(x)) = f^*(\pi(y)) = f(y)$$
   par suite $(x,y) \in R$ et $\pi(x) = \pi(y)$.
   (b) Ensuite on montre $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f^*)$.
   — Si $y \in \mathrm{im}(f)$ alors il existe $x \in M_0$ tel que $y = f(x)$ par suite
   $$y = f(x) = f^* \circ \pi(x) = f^*(\pi(x))$$
   ainsi $y \in \mathrm{im}(f^*)$ et $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(f^*)$.
   — Si $y \in \mathrm{im}(f^*)$ alors il existe $A \in M_0/R$ tel que $y = f^*(A)$, mais par définition $M_0/R = \mathrm{im}(\pi)$ ainsi il existe $x \in M_0$ tel que $A = \pi(x)$, par suite
   $$y = f^*(A) = f^*(\pi(x)) = f^* \circ \pi(x) = f(x).$$
   Ainsi on obtient $y \in \mathrm{im}(f)$ et $\mathrm{im}(f^*) \subset \mathrm{im}(f)$.

■

La définition de la catégorie des monoïdes permet de recopier les constructions de la catégorie des ensembles pour obtenir rigoureusement les constructions usuelles.

8.3 *La catégorie des monoïdes*

La notion de catégorie est définie par [7.6] page 176

Définition 8.15 *La catégorie* **mon** *des monoïdes est la catégorie définie par*

1. *Les objets de* **mon** *sont les monoïdes $(M, *)$ au sens de la définition* [8.3] *page 192,*
2. *Les morphismes de l'objet $(M_0, *_0)$ dans l'objet $(M_1, *_1)$ sont les morphismes de monoïdes définis par* [8.14] *page 240*
3. *La loi de composition est la composition des applications.*

La catégorie **smo** *des semi-monoïdes est la catégorie définie par*

1. *Les objets de* **smo** *sont les semi-monoïdes $(M, *)$ au sens de la définition* [8.3] *page 192,*
2. *Les morphismes de l'objet $(M_0, *_0)$ dans l'objet $(M_1, *_1)$ sont les morphismes de semi-monoïdes définis par* [8.14] *page 240*
3. *La loi de composition est la composition des applications.*

Dans ce qui suit on montre qu'on peut transférer bêtement les constructions de la catégorie des ensembles à la catégorie des monoïdes.

8.3.1 *Produit d'une famille de monoïdes*

Dans la définition qui suit on rappelle que la définition du produit cartésien d'une famille d'ensembles est donnée en [7.8] page 178.

Définition 8.16 *On note I et $\mathbb{U}$ des ensembles.*
*une **famille de monoïdes** indexée par I à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ est un triplet $(M, \circledast, e)$ où*

1. *$M \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathcal{P}(\mathbb{U}))$ est une application de I dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$,*
2. *$\circledast \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M_i \times M_i, M_i)$*
3. *$e \in \prod_{i \in I} M_i$,*
4. *pour tout $i \in I$ le couple $(M_i, \circledast_i)$ est un monoïde d'élément neutre e_i*

*une **famille de semi-monoïdes** indexée par I à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ est un couple $(M, \circledast)$ où*

a *$M \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathcal{P}(\mathbb{U}))$ est une application de I dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$,*

b *$\circledast \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M_i \times M_i, M_i)$*

c *pour tout $i \in I$ le couple $(M_i, \circledast_i)$ est un semi-monoïde .*

Ainsi une famille de monoïdes est une famille d'ensembles dans laquelle chaque ensemble est munit d'une structure de monoïde. Pour définir le produit dans la catégorie **mon** on recopie la définition [7.9] page 181 en changeant ensemble par monoïde et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, Y)$ par $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X, Y)$.

Définition 8.17 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles et $(M, \circledast, e)$ une famille de monoïdes indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, On appelle **produit** de la famille $(M, \circledast, e)$ dans la catégorie **mon** un couple $((\Pi, *), p)$ où $(\Pi, *)$ est un monoïde et $p \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(\Pi, M_i)$ vérifie la propriété suivante : pour tout monoïde $(Y, \diamond)$ et pour tout $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, M_i)$ il existe un unique morphisme de monoïdes $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, \Pi)$ qui vérifie*

$$\forall i \in I \;\; g_i = p_i \circ h.$$

En d'autre termes, pour tout monoïde $(Y, \diamond)$ l'application $\varphi : h \mapsto \varphi(h)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, \Pi)$ dans $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, M_i)$ définie par

$$\varphi(h)(i) = p_i \circ h$$

est bijective.

l'existence d'un produit pour une famille de monoïdes est assurée par le lemme suivant.

Lemme 8.16 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles et $(M, \circledast, e)$ une famille de monoïdes indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, l'application*

$$* : \prod_{i \in I} M_i \times \prod_{i \in I} M_i \longmapsto \prod_{i \in I} M_i$$
$$(x, y) \longmapsto x * y$$

où pour tout $(x, y) \in \prod_{i \in I} M_i \times \prod_{i \in I} M_i$ l'image $x * y$ est l'élément de $\prod_{i \in I} M_i$ défini par

$$(x * y)_i = x_i \circledast_i y_i$$

possède les propriétés suivantes :

1. *$(\prod_{i\in I} M_i, *)$ est un monoïde d'élément neutre e*
2. *Si $p : i \mapsto p_i$ est l'élément de $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\prod_{i\in I} M_i, M_i)$ où p_i est définie par*

$$p_i(x) = x_i$$

alors pour tout $i \in I$, p_i est un morphisme du monoïde $(\prod_{i\in I} M_i, *)$ dans le monoïde $(M_i, \circledast_i)$, ainsi

$$p \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(\prod_{i\in I} M_i, M_i).$$

3. *Si $(Y, \diamond)$ est un monoïde , pour que h soit un morphisme de monoïde de $(Y, \diamond)$ dans $(\prod_{i\in I} M_i, *)$ il faut et il suffit que pour tout $i \in I$ l'application $p_i \circ h$ soit un morphisme de monoïde de $(Y, \diamond)$ dans $(M_i, \circledast_i)$.*
4. *$(\prod_{i\in I} M_i, *)$ est un produit de $(M, \circledast, e)$*

Preuve

1. (a) D'abord on montre que $*$ est associative. Il s'agit de montrer que si $(x, y) \in \prod_{i\in I} M_i \times \prod_{i\in I} M_i$ et $z \in \prod_{i\in I} M_i$ alors l'application $x * (y * z)$ est égale à l'application $(x * y) * z$. Or l'associativité de $\circledast_i$ permet d'affirmer que pour tout $i \in I$ on a

$$(x * (y * z))(i) = x_i \circledast_i (y * z)_i = x_i \circledast_i (y_i \circledast_i z_i) = (x_i \circledast_i y_i) \circledast_i z_i$$

or

$$(x_i \circledast_i y_i) \circledast_i z_i = (x * y)_i \circledast_i z_i = ((x * y) * z)(i)$$

par suite pour tout $i \in I$

$$(x * (y * z))(i) = (x * (y * z))(i)$$

et $x * (y * z) = (x * y) * z$.

(b) Ensuite on montre que e est l'élément neutre de $*$. Or, puisque pour tout $i \in I$, e_i est l'élément neutre de $\circledast_i$ on obtient, pour tout $i \in I$ et $x \in \prod_{i\in I} M_i$

$$(x * e)_i = x_i \circledast_i e_i = x_i = e_i \circledast_i x_i = (e * x)_i,$$

ainsi $x * e = x = e * x$.

2. (a) D'abord, par définition de $*$, si $(x, y) \in \prod_{i\in I} M_i \times \prod_{i\in I} M_i$ alors

$$p_i(x * y) = (x * y)_i = x_i \circledast_i y_i = p_i(x) \circledast_i p_i(y)$$

(b) Ensuite, puisque pour tout $i \in I$ $e_i = p_i(e)$ est l'élément neutre de $(M_i, \circledast_i)$ l'image de l'élément neutre de $(\prod_{i\in I} M_i, *)$ par p_i est l'élément neutre de $(M_i, \circledast_i)$.

3. (a) D'abord la condition est nécessaire puisque si h est un morphisme de $(Y, \diamond)$ dans $(\prod_{i\in I} M_i, *)$ alors $p_i \circ h$ est le composé de deux morphismes, ainsi le lemme [8.15] page 241 permet d'affirmer que c'est un morphisme.

(b) Ensuite on montre que la condition est suffisante. En effet, si pour tout $i \in I$ $p_i \circ h$ est un morphisme de $(Y, \diamond)$ dans $(M_i, \circledast_i)$ alors par définition de $*$ pour tout $(u, v) \in Y \times Y$ et pour tout $i \in I$

$$(h(u) * h(v))(i) = h(u)_i \circledast_i h(v)_i = p_i((h(u))) \circledast_i p_i((h(v)))$$

ainsi, puisque $p_i \circ h$ est un morphisme on obtient, pour tout $i \in I$,

$$(h(u) * h(v))(i) = p_i \circ h(u) \circledast_i p_i \circ h(v) = p_i \circ h(u \diamond v) = h(u \diamond v)(i).$$

Ce qui montre que les applications $h(u) * h(v)$ et $h(u \diamond v)$ sont égales. Enfin, si ε est l'élément neutre de $(Y, \diamond)$ alors pour tout $i \in I$

$$h(\varepsilon)(i) = p_i \circ h(\varepsilon) = e_i$$

par suite $h(\varepsilon) = e$.

4. Pour montrer que $(\prod_{i \in I} M_i, *)$ est un produit dans **mon** il reste à montrer que pour tout monoïde $(Y, \diamond)$ et pour tout $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, M_i)$ il existe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, \prod_{i \in I} M_i)$ vérifiant

$$g_i = p_i \circ h.$$

Mais le lemme [7.8] page 179 permet d'affirmer que si $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, M_i)$ il existe une unique application $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, \prod_{i \in I} M_i)$ tel que

$$g_i = p_i \circ h.$$

Puisque par hypothèse pour tout $i \in I$ g_i est un morphisme de $(Y, \diamond)$ dans $(M_i, \circledast_i)$, l'application h vérifie que pour tout $i \in I$ $p_i \circ h$ est un morphisme de $(Y, \diamond)$ dans $(M_i, \circledast_i)$ ainsi *3* permet d'affirmer que h est un morphisme de $(Y, \diamond)$ dans $(\prod_{i \in I} M_i, *)$.

■

8.3.2 *Monoïde libre et coproduit*

Monoïde libre

Définition 8.18 *On note X un ensemble.*
On appelle ***monoïde libre*** *au-dessus de X un couple $((M, *), i)$ où*

1. *$(M, *)$ est un monoïde*
2. *i est une application de X dans M qui vérifie la propriété suivante : pour tout monoïde $(Y, \diamond)$ et toute application f de X dans Y il existe un unique morphisme de monoïde $\hat{f}$ vérifiant*

$$f = \hat{f} \circ i.$$

En d'autre termes, $((M, *), i)$ est un monoïde libre au-dessus de X si pour tout monoïde $(Y, \diamond)$ l'application φ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((M, *), (Y, \diamond))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, Y)$ définie par

$$\varphi(\hat{f}) = \hat{f} \circ i$$

est bijective.
On appelle ***semi-monoïde libre*** *au-dessus de X un couple $((M, *), i)$ où*

1. $(M, *)$ *est un semi-monoïde*

2. i *est une application de* X *dans* M *qui vérifie la propriété suivante : pour tout semi-monoïde* $(Y, \diamond)$ *et toute application* f *de* X *dans* Y *il existe un unique morphisme de semi-monoïde* $\hat{f}$ *vérifiant*

$$f = \hat{f} \circ i.$$

En d'autre termes, $((M, *), i)$ *est un semi-monoïde libre au-dessus de* X *si pour tout semi-monoïde* $(Y, \diamond)$ *l'application* φ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{smo}}((M, *), (Y, \diamond))$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, Y)$ *définie par*

$$\varphi(\hat{f}) = \hat{f} \circ i$$

est bijective.

Le lemme suivant nous assure que les (semi-) monoïdes sous-jacent à un (semi-)monoïde libre sont isomorphe dans la catégorie des (semi-)monoïdes.

Lemme 8.17 *On note* X *un ensemble, si* $((M, *), i)$ *et* $((N, \bullet), j)$ *sont des monoïdes libres au-dessus de* X *alors il existe* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((M, *), (N, \bullet))$ *et* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((N, \bullet), (M, *))$ *tels que*

$$f \circ g = id_N \qquad \text{et} \qquad g \circ f = id_M$$

Preuve

— Puisque $((M, *), i)$ est libre au dessus de X il existe $\hat{j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((M, *), (N, \bullet))$ tel que

$$j = \hat{j} \circ i$$

— Puisque $((N, \bullet), j)$ est libre au dessus de X il existe $\hat{i} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((N, \bullet), (M, *))$ tel que

$$i = \hat{i} \circ j$$

En particulier $\hat{j} \circ \hat{i}$ est un morphisme de $(N, \bullet)$ dans $(N, \bullet)$ qui vérifie

$$j = \hat{j} \circ \hat{i} \circ j. \tag{8.43}$$

Mais, par définition d'un monoïde libre, le seul morphisme f de $(N, \bullet)$ dans $(N, \bullet)$ vérifiant $j = f \circ j$ est l'identité par suite (8.43) entraîne $\hat{j} \circ \tilde{i} = id_N$. De même l'égalité

$$i = \hat{i} \circ \hat{j} \circ i$$

montre que $\hat{i} \circ \hat{j} = id_M$ ■

Ainsi « à isomorphisme près » il n'existe qu'un seul monoïde libre au-dessus d'un ensemble fixé X. Pour montrer l'existence d'un monoïde libre au-dessus d'un ensemble X les algébristes ont développé un langage alphabétique. Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensenble d'entiers naturels et $n \in \mathbb{N}^*$ un mot de longueur n est une application de $\mathbb{N}_{n-1}$ dans X, on note

$$M_n(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, X) = \{u \in \mathrm{F}(\mathbb{N}, X) / \mathrm{dom}(u) = \mathbb{N}_{n-1}\},$$

l'ensemble des mots de longueur n . On remarque que

$$u \in M_n(X) \cap M_q(X) \Rightarrow \mathrm{dom}(u) = \mathbb{N}_{n-1} = \mathbb{N}_{q-1} \Rightarrow n = q\ .$$

par suite

$$n \neq q \Rightarrow M_n(X) \cap M_q(X) = \varnothing$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $M_n(X) \subset \mathrm{F}(\mathbb{N}, X)$ on peut parler de l'ensemble des mots (de longueur fini) construits sur X, c'est l'ensemble

$$M(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} M_n(X) = \{u \in \mathrm{F}(\mathbb{N}, X) / \exists\ n \in \mathbb{N}^* : \mathrm{dom}(u) = \mathbb{N}_{n-1}\}.$$

L'application $i_X : X \mapsto M_1(X)$ qui à chaque $x \in X$ fait correspondre le mot de longueur 1 défini par $i_X(x)(0) = x$ est une bijection dont l'inverse est l'application i_X^{-1} qui à chaque $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\{0\}, X)$ fait correspondre sont unique valeur $u(0) = u_0$. On va munir $M(X)$ d'une loi de composition en considérant, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, les applications $*_{p,q}^X : M_p(X) \times M_q(X) \mapsto M_{p+q}(X)$ définies par

$$(u,v) \mapsto u *_{p,q}^X v$$

où

$$(u *_{p,q}^X v)_i = \begin{cases} u_i & si \quad i \in \mathbb{N}_{p-1} \\ v_{i-p} & si \quad i \in [p, p+q-1] \end{cases}$$

La preuve du lemme qui suit utilise les résultats et notations du lemme [8.3] page 196

Lemme 8.18 ***Existence de semi-monoïde libre au-dessus d'un ensemble***
On note $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels, X un ensemble et $M(X)$ l'ensemble des mots construits sur X.
(i) La relation $\perp_X : M(X) \times M(X) \mapsto M(X)$ définie par

$$\perp_X = \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} *_{p,q}^X$$

est une loi associative sur $M(X)$.

(ii) Si $(Y, \diamond)$ est un semi-monoïde et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,Y)$ il existe une application $\hat{f} : M(X) \mapsto Y$ vérifiant les propriétés suivantes

1. *$\hat{f}$ est multiplicative*

$$\forall\ (u,v) \in M(X) \times M(X) \qquad \hat{f}(u \perp_X v) = \hat{f}(u) \diamond \hat{f}(v) \tag{8.44}$$

2. *$\hat{f}$ est l'unique application vérifiant* (8.44) *et $f = \hat{f} \circ i_X$*

*En particulier les applications $\hat{f}$ de $M(X)$ dans Y qui vérifient (*8.44*) sont uniquement déterminées par $\hat{f} \circ i_X$.*

(iii) Si $\mathbb{U}$ est un ensemble il existe un triplet $(M, \perp, i)$ où :

1. *M est une application de $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{U}))$ vérifiant*

$$X \subset Y \Rightarrow M(X) \subset M(Y).$$

2. *$i \in \prod_{X \in \mathcal{P}(\mathbb{U})} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, M(X))$, on note i_X l'image de X par i . L'application $X \mapsto i_X$ possède la propriété suivante :*

$$[(X,Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{U}) \times \mathcal{P}(\mathbb{U}) \quad \text{et} \quad X \subset Y] \Rightarrow i_X = i_Y \cap (X \times M(Y))$$

   autrement dit la restriction de i_Y à X est i_X

3. *$\perp \in \prod_{X \in \mathcal{P}(\mathbb{U})} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M(X) \times M(X), M(X))$, notée $X \mapsto \perp_X$ vérifie les propriétés suivantes :*
   (a) *pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{U})$ $\perp_X$ est une loi associative sur $M(X)$*
   (b) *si $(M, \diamond)$ est un semi-monoïde,pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{U})$ et tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, M)$ il existe une unique application $\hat{f} : M(X) \mapsto M$ vérifiant les propriétés (i.) et (ii.) suivantes*
      i. *$f = \hat{f} \circ i_X$*
      ii. *pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{U})$*

$$\forall\ (u,v) \in M(X) \times M(X) \qquad \hat{f}(u \perp_X v) = \hat{f}(u) \diamond \hat{f}(v)$$

(c) pour tout $(X,Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{U}) \times \mathcal{P}(\mathbb{U})$ vérifiant $X \subset Y$ on a

$$\perp_X = \perp_Y \cap (M(X) \times M(X)) \times M(Y)$$

autrement dit la restriction de $\perp_Y$ à $M(X) \times M(X)$ est $\perp_X$.

Preuve

(i)

1. D'abord on montre que $\mathrm{dom}(\perp_X) = M(X) \times M(X)$, en effet,

$$\mathrm{dom}(\perp_X) = \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \mathrm{dom}(*_{p,q}^X) = \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} M_p(X) \times M_q(X) = M(X) \times M(X)$$

2. Ensuite on montre que $\perp_X$ est une fonction :

$$[((u,v),w) \in \perp_X \qquad \text{et} \qquad ((u,v),t) \in \perp_X] \Rightarrow w = t$$

Si $((u,v),w) \in \perp_X$ et $((u,v),t) \in \perp_X$ alors, par définition d'une réunion, il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $(p',q') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ qui vérifient $((u,v),w) \in *_{p,q}^X$ et $((u,v),t) \in *_{p',q'}^X$, ainsi

$$(u,v) \in M_p(X) \times M_q(X), \qquad w = u *_{p,q}^X v$$

et

$$(u,v) \in M_{p'}(X) \times M_{q'}(X), \qquad t = u *_{p',q'}^X v \ .$$

En particulier, $(u,v) \in (M_p(X) \times M_q(X)) \cap (M_{p'}(X) \times M_{q'}(X))$ par suite $M_p(X) \cap M_{p'}(X) \neq \varnothing$ et $M_q(X) \cap M_{q'}(X) \neq \varnothing$. Mais l'inégalité $M_p(X) \cap M_{p'}(X) \neq \varnothing$ entraîne $p = p'$ et l'inégalité $M_q(X) \cap M_{q'}(X) \neq \varnothing$ entraîne $q = q'$ par suite

$$w = u *_{p,q}^X v = u *_{p',q'}^X v = t.$$

3. Il reste à voir l'associativité de $\perp_X$. Mais si $(u,v) \in M_p(X) \times M_q(X)$ et $w \in M_r(X)$ alors $(u \perp_X v) \perp_X w$ est le mot t de longueur $p+q+r$ défini par

$$t_i = \begin{cases} u_i & si \quad i \in \mathbb{N}_{p-1} \\ v_{i-p} & si \quad i \in [p, p+q-1] \\ w_{i-(p+q)} & si \quad i \in [p+q, p+q+r-1] \end{cases}$$

et puisque pour tout $i \in [p, p+q+r-1]$ on a

$$(v \perp_X w)_{i-p} = \begin{cases} v_{i-p} & si \quad i \in [p, p+q-1] \\ w_{i-(p+q)} & si \quad i \in [p+q, p+q+r-1] \end{cases}$$

on obtient

$$(u \perp_X v) \perp_X w = t = u \perp_X (v \perp_X w)$$

(ii)

0n introduit et on rappelle quelques notations.

1. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,Y)$ on considère l'application φ_f^n de $M_n(X)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, Y)$ définie par

$$\varphi_f^n(u)(k) = f(u_k)$$

2. π_Y^d est l'unique application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, Y)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, Y)$ vérifiant (voir lemme [8.3] page 196)

$$\pi_Y^d(u)(0) = u_0 \quad \text{et} \quad \pi_Y^d(u)(k+1) = \pi_Y^d(u)(k) \diamond u_{k+1}$$

3. On note $\hat{f}_n$ l'application de $M_n(X)$ dans Y définie par

$$\hat{f}_n(u) = \pi_Y^d(\varphi_f^n(u))(n-1).$$

Lorsque $(Y, \diamond)$ est commutatif et $\diamond : (u,v) \mapsto uv$ est notée multiplicativement, on peut, en accord avec les notations [8.2] page 200, écrire

$$\hat{f}_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

Enfin on considère la relation $\hat{f} \subset M(X) \times Y$ définie par

$$\hat{f} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \hat{f}_n$$

et on montre que $\hat{f}$ est une application de $M(X)$ dans Y et que c'est l'unique application vérifiant (8.44) page 248 et $f = \hat{f} \circ i_X$.

1. D'abord $\mathrm{dom}(\hat{f}) = M(X)$ puisque

$$\mathrm{dom}(\hat{f}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{dom}(\hat{f}_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} M_n(X) = M(X).$$

2. Ensuite on montre que $\hat{f}$ est une fonction :

$$[(u,y) \in \hat{f} \quad \text{et} \quad (u,z) \in \hat{f}] \Rightarrow y = z.$$

Si $(u,y) \in \hat{f}$ et $(u,z) \in \hat{f}$, alors, par définition d'une réunion, il existe $(n,n') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $(u,y) \in \hat{f}_n$ et $(u,z) \in \hat{f}_{n'}$ ainsi

$$u \in M_n(X),\ y = f_n(u) \qquad \text{et} \qquad u \in M_{n'}(X),\ z = f_{n'}(u).$$

En particulier $M_n(X) \cap M_{n'}(X) \neq \varnothing$, mais cette inégalité entraîne $n = n'$, par suite

$$y = f_n(u) = f_{n'}(u) = z.$$

3. On montre maintenant que pour tout $(u,v) \in M(X) \times M(X)$ on a

$$\hat{f}(u \perp_X v) = \hat{f}(u) \diamond \hat{f}(v).$$

Puisque $u \in M_n(X) \Rightarrow \tilde{f}(x) = \tilde{f}_n(x)$ il sufit de montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour tout $(u,v) \in M_p(X) \times M_q(X)$

$$\hat{f}_{p+q}(u \perp_X v) = \hat{f}_p(u) \diamond \hat{f}_q(v).$$

En d'autres termes il s'agit de montrer

$$\pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p+q-1) = \pi_Y^d(\varphi_f^p(u))(p-1) \diamond \pi_Y^d(\varphi_f^q(v))(q-1).$$

on pose

$$U = \{k \in \mathbb{N}_{q-1} / \pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p+k) = \pi_Y^d(\varphi_f^p(u))(p-1) \diamond \pi_Y^d(\varphi_f^q(v))(k)\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_{q-1}$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

(a) $0 \in U$

(b) $[k \in U\ et\ k < q-1] \Rightarrow k+1 \in U$.

(a) D'abord on montre $0 \in U$. En effet, par définition de π_Y^d on a

$$\pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p) = \pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p-1) \diamond (\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p),$$

or :

i. pour tout $k \in \mathbb{N}_{p-1}$

$$\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v)(k) = f((u \perp_X v)_k) = f(u_k) = \varphi_f^p(u)(k)$$

ainsi le lemme [8.3] page 196 permet d'affirmer que

$$\pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p-1) = \pi_Y^d(\varphi_f^p(u))(p-1)$$

ii.

$$\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v)(p) = f((u \perp_X v)_p) = f(v_0) = \pi_Y(\varphi_f^q(v))(0)$$

(b) Ensuite on montre $[k \in U\ et\ k < q-1 \Rightarrow k+1 \in U]$. En effet, par définition de π_Y^d on a

$$\pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p+k+1) = \pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p+k) \diamond (\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p+k+1),$$

or

i. Puisque $k \in U$ on a

$$\pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p+k) = \pi_Y^d(\varphi_f^p(u))(p-1) \diamond \pi_Y^d(\varphi_f^q(v))(k)$$

Ainsi l'associativité de la loi $\diamond$ montre que, en posant

$$\gamma = \varphi_f^{p+q}(u \perp_X v)(p+k+1)$$

$$\pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p+k+1) = \pi_Y^d(\varphi_f^p(u))(p-1) \diamond [\pi_Y^d(\varphi_f^q(v))(k) \diamond \gamma]$$

mais par définition

$$\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v)(p+k+1) = f((u \perp_X v)_{p+k+1}) = f(v_{k+1}) = \varphi_f^q(v)(k+1)$$

par suite on obtient

$$\pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p+k+1) = \pi_Y^d(\varphi_f^p(u))(p-1) \diamond (\pi_Y^d(\varphi_f^q(v))(k) \diamond \varphi_f^q(v)(k+1)))$$

ii. Enfin la définition de π_Y^d montre que

$$\pi_Y^d(\varphi_f^q(v))(k) \diamond \varphi_f^q(y)(k+1)) = \pi_Y^d(\varphi_f^q(v))(k+1)$$

d' où

$$\pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p+k+1) = \pi_Y^d(\varphi_f^p(u))(p-1) \diamond (\pi_Y^d(\varphi_f^q(v))(k+1))$$

et $k+1 \in U$.

Ainsi $U = \mathbb{N}_{q-1}$, en particulier $q-1 \in U$ et

$$\pi_Y^d(\varphi_f^{p+q}(u \perp_X v))(p+q-1) = \pi_Y^d(\varphi_f^p(u))(p-1) \diamond (\pi_Y^d(\varphi_f^q(v))(q-1))$$

ce qui conclut la preuve de (8.44) page 248

(c) Il est clair $\hat{f}$ vérifie $f = \hat{f} \circ i_X$. On montre maintenant que $\hat{f}$ est l'unique application vérifiant cette égalité et (8.44). Soit g une application de $M(X)$ dans Y vérifiant

$$\forall\ x \in X \qquad f(x) = g(i_X(x)) \tag{8.45}$$

et

$$\forall\ (u,v) \in M(X) \times M(X) \qquad g(u \perp_X v) = g(u) \diamond g(v). \tag{8.46}$$

On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \forall\ u \in M_{n+1}(X)\ \hat{f}(u) = g(u)\},$$

et on montre que $H = \mathbb{N}$ en montrant

i. $0 \in H$

ii. $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$.

i. D'abord on montre $0 \in H$. En effet d'après (8.45) si $u \in M_1(X)$ alors

$$g(u) = g \circ i_X(i_X^{-1}(u)) = f(i_X^{-1}(u)) = \hat{f} \circ i_X(i_X^{-1}(u)) = \hat{f}(u).$$

ii. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. On note p_n l'application de $M_{n+2}(X)$ dans $M_{n+1}(X)$ qui à $u \in M_{n+2}(X)$ fait correspondre sa restriction à $M_{n+1}(X)$:

$$p_n(u) = u \cap (\mathbb{N}_n \times X).$$

par définition de $\perp_X$ on a

$$\forall\ u \in M_{n+2}(X) \qquad u = p_n(u) \perp_X i_X(u_{n+1})$$

ainsi (8.46) montre que

$$g(u) = g(p_n(u)) \diamond g(i_X(u_{n+1})) = g(p_n(u)) \diamond \hat{f}(i_X(u_{n+1}))$$

mais l'assertion $n \in H$ entraîne $\hat{f}(p_n(u)) = g(p_n(u))$, par suite, puisque pour tout $u \in M_{n+2}(X)$

$$\hat{f}(u) = \hat{f}(p_n(u) \perp_X i_X(u_{n+1})) = \hat{f}(p_n(u)) \diamond \hat{f}(i_X(u_{n+1}))$$

on obtient

$$g(u) = g(p_n(u)) \diamond \hat{f}(i_X(u_{n+1}) = \hat{f}(p_n(u)) \diamond \hat{f}(i_X(u_{n+1})) = \hat{f}(u)$$

et $n+1 \in H$

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et $g = \hat{f}$

(iii)

Si $X \in \mathcal{P}(\mathbb{U})$ on pose

1. $$M(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, X)$$

ainsi chaque élément de $M(X)$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans X donc un sous-ensemble de $\mathbb{N} \times X$ donc de $\mathbb{N} \times \mathbb{U}$, ce qui montre que $M(X) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{U})$ par suite $M(X) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{U}))$.
Si $(X,Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{U}) \times \mathcal{P}(\mathbb{U})$ et $X \subset Y$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, X) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, Y)$$

par suite $M(X) \subset M(Y)$.

2. i_X est l'application de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_0, X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\{0\}, X)$ définie par

$$i_X(x)(0) = x$$

en termes ensemblistes i_X est le sous-ensemble de $X \times M(X)$ défini par

$$i_X = \{(x, u) \in X \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\{0\}, X)/u_0 = x\}$$

Si $(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{U}) \times \mathcal{P}(\mathbb{U})$ et $X \subset Y$ alors

$$(x, u) \in i_Y \cap (X \times M(Y)) \Rightarrow x \in X\ , u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\{0\}, Y) \text{ et } u_0 = x$$

par suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\{0\}, X)$ et $(x, u) \in i_X$. Ainsi, de l'inclusion évidente $i_X \subset i_Y$ on obtient

$$i_X \subset i_Y \cap (X \times M(Y)) \subset i_X .$$

3. $\perp_X$ est la loi définie en (i), ainsi *(a)* et *(b)* résultent de (i) et (ii), on montre *(c)*.
Si $(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{U}) \times \mathcal{P}(\mathbb{U})$ et $X \subset Y$ il est clair que

$$\perp_X \subset \perp_Y \cap (M(X) \times M(X)) \times M(Y)\ ,$$

d'autre part, si $((u, v), w) \in \perp_Y \cap (M(X) \times M(X)) \times M(Y)$ alors le couple (u, v) est un élément de $M(X) \times M(X)$ et il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{p-1}, X)$ et $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{q-1}, X)$ ainsi :
— pour tout $i \in \mathbb{N}_{p-1}$

$$w_i = (u \perp_Y v)_i = u_i = (u \perp_X v)_i$$

— pour tout $i \in [p, p + q - 1]$

$$w_i = (u \perp_Y v)_i = v_{i-p} = (u \perp_X v)_i$$

et $((u, v), w) \in \perp_X$.

■

Le lemme [8.18] page 248 permet de montrer l'existence d'un monoïde libre au-dessus des ensembles.

Lemme 8.19 ***Existence de monoïdes libres***
Pour tout ensemble $\mathbb{U}$, il existe un monoïde libre $(M_e, \circledast, i)$ au-dessus de $\mathbb{U}$ et une application M_* de $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ dans $\mathcal{P}(M_e)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. *$M_*(\mathbb{U}) = M_e$.*
2. *Si $(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{U}) \times \mathcal{P}(\mathbb{U})$ vérifient $X \subset Y$ alors*

$$M_*(X) \subset M_*(Y)\ .$$

3. *Si $X \mapsto \circledast_X$ est l'application qui à chaque X de $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ fait correspondre la restriction de $\circledast$ à $M_*(X)$:*

$$\circledast_X = \circledast \cap ((M_*(X) \times M_*(X)) \times M_e)$$

alors $(M_*(X), \circledast_X)$ est un monoïde.

4. *Si $X \mapsto i_X$ est l'application qui à chaque X de $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ fait correspondre la restriction de i à X :*

$$i_X = i \cap (X \times \mathbb{U})$$

alors $((M_*(X), \circledast_X), i_X)$ est un monoïde libre au-dessus de X

Preuve

1. Existence du monoïde libre $(M_e, \circledast, i)$

En suivant le lemme [8.18] page 248 on note :

— pour $n \in \mathbb{N}^\star$
$$M_n(\mathbb{U}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{U})$$
l'ensemble des mots de longueur n et
$$M(\mathbb{U}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{U})$$
l'ensemble des mots construits sur $\mathbb{U}$,

— $\perp_{\mathbb{U}}$ la loi associative (voir lemme [8.18] page 248) sur $M(\mathbb{U})$ vérifiant
$$(u,v) \in M_p(\mathbb{U}) \times M_q(\mathbb{U}) \Rightarrow (u \perp_{\mathbb{U}} v)_i = \begin{cases} u_i & si \quad i \in \mathbb{N}_{p-1} \\ v_{i-p} & si \quad i \in [p, p+q-1] \end{cases}$$

Si $e \notin M(\mathbb{U})$ (le théorème [7.1] page 156 permet l'affirmer l'existence d'un tel e) on note
$$M_e = \{e\} \cup M(\mathbb{U})$$
et on définit la loi $\circledast$ sur M_* par
$$(u \circledast v)_= \begin{cases} u \perp_{\mathbb{U}} v & si \quad (u,v) \in M(\mathbb{U}) \times M(\mathbb{U}) \\ v & si \quad u = e \\ u & si \quad v = e \end{cases} .$$

Il est clair que e est l'élément neutre de $\circledast$ et l'associativité de $\perp_{\mathbb{U}}$ montre que $\circledast$ est associative, par suite $(M_e, \circledast)$ est un monoïde.Enfin on note i l'application de $\mathbb{U}$ dans $M_1(\mathbb{U})$ défini par
$$i(x)(0) = x$$
et on montre que $(M_e, \circledast, i)$ est un monoïde libre au-dessus de $\mathbb{U}$. Si $(Y, \diamond)$ est un monoïde d'élément neutre ε le lemme [8.18] page 248 permet d'affirmer que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{U}, Y)$ il existe une unique application g_f de $M(\mathbb{U})$ dans Y vérifiant les propriétés suivantes :

1. $g_f \circ i = f$
2. pour tout $(u,v) \in M(\mathbb{U}) \times M(\mathbb{U})$
$$g_f(u \perp_{\mathbb{U}} v) = g_f(u) \diamond g_f(v).$$

On défini l'application $\hat{f}$ de M_e dans Y par
$$\hat{f}(u) = \begin{cases} g_f(u) & si \quad u \in M(\mathbb{U}) \\ \varepsilon & si \quad u = e \end{cases}$$
et on montre que $\hat{f}$ est l'unique morphisme de $(M_e, \circledast)$ dans $(Y, \diamond)$ vérifiant $\hat{f} \circ i = f$

1. D'abord on montre que $\hat{f}$ est un morphisme : il est clair que $\hat{f}(e) = \varepsilon$, d'autre part si $(u,v) \in M_e \times M_e$ alors
   (a) si $(u,v) \in M(\mathbb{U}) \times M(\mathbb{U})$ alors
$$\hat{f}(u \circledast v) = \hat{f}(u \perp_{\mathbb{U}} v) = g_f(u \perp_{\mathbb{U}} v) = g_f(u) \diamond g_f(v) = \hat{f}(u) \diamond \hat{f}(v)$$
   (b) si $u = e$ et $v \in M(\mathbb{U})$ alors
$$\hat{f}(e \circledast v) = \hat{f}(v) = \varepsilon \diamond \hat{f}(v) = \hat{f}(e) \diamond \hat{f}(v)$$

(c) si $u \in M(\mathbb{U})$ et $v = e$ alors

$$\hat{f}(u \circledast e) = \hat{f}(u) = \hat{f}(u) \diamond \varepsilon = \hat{f}(u) \diamond \hat{f}(e)$$

2. Ensuite on montre que $\hat{f}$ est l'unique morphisme de $(M_e, \circledast)$ dans $(Y, \diamond)$ vérifiant $f = \hat{f} \circ i$. Mais si h est un morphisme de $(M_e, \circledast)$ dans $(Y, \diamond)$ tel que $f = h \circ i$ et si g est la restriction de h à $M(\mathbb{U})$ alors g vérifie
— $g \circ i = f$
— pour tout $(u, v) \in M(\mathbb{U}) \times M(\mathbb{U})$

$$g(u \perp_{\mathbb{U}} v) = h(u \circledast v) = g(u) \diamond g(v).$$

par suite $g = g_f$ et pour tout $u \in M(\mathbb{U})$ on a $h(u) = g(u) = g_f(u) = \hat{f}(u)$, comme par ailleurs $h(e) = \varepsilon = \hat{f}(e)$ on obtient $h = \hat{f}$.

2. Définition de M_*

On défini $M_* : \mathcal{P}(\mathbb{U}) \mapsto \mathcal{P}(M_u)$ par

$$M_*(X) = \{e\} \cup M(X) = \{e\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, X)$$

1. Par définition on a
$$M_*(\mathbb{U}) = M_e$$
2. Si $(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{U}) \times \mathcal{P}(\mathbb{U})$ vérifient $X \subset Y$ le lemme [8.18] page 248 montre que $M(X) \subset M(Y)$ par suite
$$M_*(X) \subset M_*(Y).$$
3. D'après le lemme [8.18] page 248 on a $\perp_X = \perp_{\mathbb{U}} \cap (M(X) \times M(X)) \times M(\mathbb{U})$, par suite
$$(u \circledast_X v) = \left\{ \begin{array}{lll} u \perp_X v & si & (u, v) \in M(X) \times M(X) \\ v & si & u = e \\ u & si & v = e \end{array} \right. .$$
et $(M_*(X), \circledast_X)$ est un monoïde.
4. D'après le lemme [8.18] page 248 :
$$i_X = i_{\mathbb{U}} \cap (X \times M(\mathbb{U})) = i \cap (X \times M_*(X)).$$
Si $(M, \diamond)$ est un monoïde d'élément neutre ε, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, M)$ et si h est l'unique application de $M(X)$ dans M vérifiant les points a et b suivants :
(a) $h \circ i_X = f$
(b) pour tout $(u, v) \in M(X) \times M(X)$
$$h(u \perp_X v) = h(u) \diamond h(v).$$
L'application $\hat{f}$ de $M_*(X)$ dans M définie par
$$\hat{f}(u) = \left\{ \begin{array}{lll} h(u) & si & u \in M(X) \\ \varepsilon & si & u = e \end{array} \right.$$
est l'unique morphisme de $(M_*(X), \circledast_X)$ dans $(M, \diamond)$ tel que $f = \hat{f} \circ i_X$.

■

On va construire les coproduits dans la catégorie **mon** à l'aide d'un monoïde libre au-dessus du coproduit dans la catégorie **ens**.

Coproduit d'une famille de monoïdes On montre que toute *famille* de monoïdes (voir définition [8.16] page 244) possède un coproduit . Pour la définition d'un coproduit d'une famille de monoïdes on recopie la définition d'un coproduit d'une famille d'ensembles en changeant ensemble par monoïde et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}$ par $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}$, ce qui donne la définition suivante.

Définition 8.19 *On note I et $\mathbb{U}$ des ensembles et $(X, \circledast, e)$ une famille de monoïdes indexés par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$.*
*On appelle **coproduit** de la famille $(X, \circledast, e)$ un couple $((\pi^0, *), f)$ où $(\pi^0, *)$ est un monoïde et*

$$f \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, \pi^0)$$

vérifie la propriété suivante : pour tout monoïde $(Y, \diamond)$ et pour tout $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, Y)$ il existe un unique morphisme de monoïdes $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(\pi^0, Y)$ vérifiant

$$g_i = h \circ f_i.$$

En d'autres termes, $((\pi^0, *), f)$ est un coproduit de $(X, \circledast, e)$ si pour tout monoïde $(Y, \diamond)$ l'application φ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(\pi^0, Y)$ dans $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, Y)$ définie par

$$\varphi(h)(i) = h \circ f_i$$

est bijective .

Le lemme qui suit utilise l'existence de coproduit dans la catégorie des ensembles (voir lemme [7.10] page 183), de monoïde libre au-dessus des ensembles (voir lemme [8.19] page 253), et les résultats du lemme [8.14] page 238.

Lemme 8.20 *On note I et $\mathbb{U}$ des ensembles, $(X, \circledast, e)$ une famille de monoïdes indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, enfin (P^0, f) est un coproduit dans **ens** de la famille $i \mapsto X_i$ et $((M_*(P^0), \star), i_{\mathcal{X}})$ est un monoïde libre au dessus de P^0.*

(i) Il existe une relation d'équivalence $E(f)$ sur $M_*(P^0)$ qui vérifie les propriétés suivantes

1. *$E(f)$ est compatible avec la loi $*$.*
2. *Si $\left(M_*(P^0)/E(f)\ , \bullet\right)$ est le monoïde quotient de $M_*(P^0)$ par $E(f)$ et p le morphisme canonique de $(M_*(P^0), *)$ dans $\left(M_*(P^0)/E(f), \bullet\right)$ alors, pour tout $i \in I$ l'application h_i de X_i dans $M_*(P^0)/E(f)$ définie par*
$$h_i = p \circ i_{\mathcal{X}} \circ f_i$$
est un morphisme de monoïdes de $(X_i, \circledast_i)$ dans $\left(M_*(P^0)/E(f), \bullet\right)$ ainsi $h : i \mapsto h_i$ est un élément de $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}\left(X_i, M_*(P^0)/E(f)\right)$

*(ii)$\left(\left(M_*(P^0)/E(f), \bullet\right), h\right)$ est un coproduit dans la catégorie **mon** de $(X, \circledast, e)$.*

Preuve

(i)

e sera l'élément neutre de $(M_*(P^0), \star)$, de plus on note

— $\alpha_i : X_i \times X_i \mapsto M_*(P^0) \times M_*(P^0)$ l'application définie par

$$\alpha_i(x, y) = \begin{cases} (i_{\mathcal{X}}(f_i(x \circledast_i y))\ , (i_{\mathcal{X}}(f_i(x)) \star (i_{\mathcal{X}}(f_i(y))) & si \quad x \neq e_i \text{ et } y \neq e_i \\ (i_{\mathcal{X}}(f_i(e_i)), e) & si \quad x = e_i \\ (e, i_{\mathcal{X}}(f_i(e_i))) & si \quad y = e_i \end{cases}$$

—
$$A = \bigcup_{i \in I} \mathrm{im}(\alpha_i) \ ,$$

— $E(f)$ la relation d'équivalence compatible avec la loi de $M_*(P^0)$ engendrée par A (voir définition [8.13] page 240)

Le lemme [8.14] page 238 permet d'affirmer que l'ensemble quotient $M_*(P^0)/E(f)$ peut-être muni d'une structure de monoïde pour laquelle l'application canonique p est un morphisme.On montre que pour tout $i \in I$ h_i est un morphisme de $(X_i, \circledast_i)$ dans $(M_*(P^0)/E(f), \bullet)$

1. D'abord, puisque pour tout $i \in I$ $(i_{\mathcal{X}}(f_i(e_i)), e) \in A$ on a
$$h_i(e_i) = p(i_{\mathcal{X}}(f_i(e_i)) = p(e).$$
2. Ensuite si $i \in I$ et $(x, y) \in X_i \times X_i$ alors
$$(i_{\mathcal{X}}(f_i(x \circledast_i y)) \ , (i_{\mathcal{X}}(f_i(x))) \star (i_{\mathcal{X}}(f_i(y)) \in A$$
par suite
$$h_i(x \circledast_i y) = p(i_{\mathcal{X}}(f_i(x \circledast_i y))) = p(i_{\mathcal{X}}(f_i(x))) \star (i_{\mathcal{X}}(f_i(y)) \ ,$$
p étant un morphisme on a
$$p\,(i_{\mathcal{X}}(f_i(x))) \star (i_{\mathcal{X}}(f_i(y)) = p\,(i_{\mathcal{X}}(f_i(x)) \bullet p((i_{\mathcal{X}}(f_i(y)))$$
ainsi
$$h_i(x \circledast_i y) = p(i_{\mathcal{X}}(f_i(x)) \bullet p((i_{\mathcal{X}}(f_i(y))) = h_i(x) \bullet h_i(y).$$

(ii)

Il s'agit de montrer que pour tout monoïde $(Y, , \diamond)$ et pour tout
$$g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, Y)$$
il existe un unique $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M_*(P^0)/E(f), Y)$ vérifiant :
$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g^* \circ h_i$$

Preuve de l'existence

Soit $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, Y)$, alors

— par définition d'un coproduit dans **ens** il existe $g_e \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(P^0, Y)$ vérifiant :
$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g_e \circ f_i$$
— par définition d'un monoïde libre il existe $g_m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M_*(P^0), Y)$ vérifiant :
$$g_e = g_m \circ i_{\mathcal{X}}$$
ainsi on obtient
$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g_m \circ i_{\mathcal{X}} \circ f_i \tag{8.47}$$
— on veut maintenant montrer qu'il existe $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M_*(P^0)/E(f), Y)$ vérifiant :
$$g_m = g^* \circ p.$$
D'après le lemme [8.14] page 238 il suffit de montrer :
$$(u, v) \in A \Rightarrow g_m(u) = g_m(v)$$
et cela provient du fait que pour tout $i \in I$ g_i est un morphisme. En effet, si $(u, v) \in A$ il existe $i \in I$ tel que $(u, v) \in \mathrm{im}(\alpha_i)$, par suite il existe $i \in I$ et $(x, y) \in X_i \times X_i$ tel que
$$\alpha_i(x, y) = (u, v)$$

1. Si $x \neq e_i$ et $y \neq e_i$ alors $u = i_{\mathcal{X}}(f_i(x \circledast_i y))$ et $v = i_{\mathcal{X}}(f_i(x)) \star i_{\mathcal{X}}(f_i(y))$ ainsi, puisque $g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, Y)$,

$$g_m(u) = g_m \circ i_{\mathcal{X}} \circ f_i(x \circledast_i y) = g_i(x \circledast_i y) = g_i(x) \diamond g_i(y)$$

et

$$g_m(v) = g_m(i_{\mathcal{X}}(f_i(x) \star i_{\mathcal{X}}(f_i(y))$$

et par construction g_m est un morphisme de $(M_*(P^0)), \star)$ dans $(Y, \diamond)$ par suite

$$g_m(i_{\mathcal{X}}(f_i(x) \star i_{\mathcal{X}}(f_i(y)) = g_m(i_{\mathcal{X}}(f_i(x)) \diamond g_m(i_{\mathcal{X}}(f_i(y)) = g_i(x) \diamond g_i(y)$$

ce qui montre que

$$g_m(u) = g_m(v).$$

2. Si $x = e_i$ alors $u = i_{\mathcal{X}}(f_i(e_i))$ et $v = e$ ainsi

$$g_m(u) = g_m \circ i_{\mathcal{X}} \circ f_i(e_i) = g_i(e_i)$$

puisque $g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, Y)$, on obtient, si ε est l'élément neutre de $(Y, \diamond)$, $g_m(u) = g_i(e_i) = \varepsilon$. De même, puisque $g_m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M_*(P^0), Y)$ on obtient $g_m(v) = g_m(e) = \varepsilon$ par suite on a encore

$$g_m(u) = g_m(v).$$

3. Le cas $y = e_i$ est similaire au cas $x = e_i$ et permet aussi de conclure

$$g_m(u) = g_m(v).$$

Ainsi il existe un morphisme $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M_*(P^0)/E(f), Y)$ vérifiant

$$g_m = g^* \circ p$$

et (8.47) s'écrit

$$\forall\ i \in I\ g_i = g_m \circ i_{\mathcal{X}} \circ f_i = g^* \circ p \circ i_{\mathcal{X}} \circ f_i = g^* \circ h_i.$$

Preuve de l'unicité

Si $(u, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M_*(P^0)/E(f), Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M_*(P^0)/E(f), Y)$ vérifient

$$g_i = u \circ h_i = u \circ p \circ i_{\mathcal{X}} \circ f_i = v \circ h_i = v \circ p \circ i_{\mathcal{X}} \circ f_i$$

alors les applications

$$g_{e,u} = u \circ p \circ i_{\mathcal{X}} \qquad \text{et} \qquad g_{e,v} = v \circ p \circ i_{\mathcal{X}}$$

sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(P^0, Y)$ qui vérifient

$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g_{e,u} \circ f_i = g_{e,v} \circ f_i$$

ainsi, par définition d'un coproduit $g_{e,u} = g_{e,v}$. Enfin les morphisme $g_{m,u}$ et $g_{m,v}$ définis par

$$g_{m,u} = u \circ p \qquad \text{et} \qquad g_{m,v} = v \circ p$$

sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M_*(P^0), Y)$ qui vérifient

$$g_{m,u} \circ i_{\mathcal{X}} = g_{m,v} \circ i_{\mathcal{X}}$$

ainsi, par définition d'un monoïde libre $g_{m,u} = g_{m,v}$ d'où

$$u \circ p = v \circ p$$

p étant surjective cela entraîne $u = v$. ■

L'existence de produit et coproduit de famille de monoïdes permet de montrer simplement l'existence de limite projective et inductive pour ces familles .

8.3.3 *Limites inductives et projectives de familles de monoïdes*

On définit les transitions d'une famille de monoïdes.

Définition 8.20 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, $(X, \circledast, e)$ une famille de monoïdes indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, on appelle famille de **transitions** de $(X, \circledast, e)$ un couple (R, f) où :*

1. *R est une relation de I dans I qui vérifie les propriétés suivantes :*
   (a) *R est réflexive : $\forall\ i \in I\ (i, i) \in R$*
   (b) *R est transitive : $[(i, j) \in R$ et $(j, k) \in R \Rightarrow (i, k) \in R]$.*
2. *$f = (f_{i,j})_{(i,j)\in R}$ est un élément de $\displaystyle\prod_{(i,j)\in R} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_j, X_i)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*
   (a) *Pour tout $i \in I$ $f_{i,i} = id_{X_i}$*
   (b) *Si $(i, j) \in R$ et $(j, k) \in R$ alors*
   $$f_{i,k} = f_{i,j} \circ f_{j,k}$$

On donne la définition des limites projectives et inductives d'une famille de transitions associées à une famille de monoïdes.

Définition 8.21 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, $(X, \circledast, e)$ une famille de monoïdes indexée par I à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, et (R, f) est une famille de transitions de $(X, \circledast, e)$.*

limite projective *On appelle limite projective de (R, f) un couple $((M, \star), p)$ où $(M, \star)$ est un monoïdes et $p \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M, X_i)$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $(i, j) \in R$*
   $$p_i = f_{i,j} \circ p_j$$
2. *pour tout monoïdes $(Y, \diamond)$ et pour tout $g \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, X_i)$ vérifiant*
   $$(i, j) \in R \Rightarrow g_i = f_{i,j} \circ g_j$$
   il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, M)$ vérifiant
   $$g_i = p_i \circ h$$

limite inductive *On appelle limite inductive de (R, f) un couple $((M^0, \Diamond), h)$ où $(M^0, \Diamond)$ est un monoïde et $h \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, M^0)$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $(i, j) \in R$*
   $$h_j = h_i \circ f_{i,j}$$
2. *pour tout monoïde $(Y, \diamond)$ et pour tout $g \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, Y)$ vérifiant*
   $$g_j = g_i \circ f_{i,j}$$
   il existe un unique morphisme $g^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M^0, Y)$ vérifiant
   $$g_i = g^0 \circ h_i$$

L'existence de produit et de coproduit dans **mon** entraîne l'existence des limites inductive et projective.

Lemme 8.21 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, $(X, \circledast, e)$ une famille de monoïdes indexée par I à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, et (R, f) est une famille de transitions de $(X, \circledast, e)$.*
(i) Si $((P, *), p)$ est un produit (dans la catégorie **mon***) de $(X, \circledast, e)$ alors le sous-ensemble M de P défini par*

$$M = \{x \in P / \forall\ (i,j) \in R \quad p_i(x) = f_{i,j}(p_j(x))\}$$

possède les propriétés suivantes

1. *M est un sous monoïde de $(P, *)$*
2. *si $t \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M, X_i)$ est défini par*

$$t_i = p_i \cap (M \times X_i)$$

   (t_i est la restriction de p_i à M) alors $((M, *), t)$ est une limite projective (dans la catégorie **mon***) de (R, f)*

(ii) Si $((P^0, \star), h)$ est un coproduit (dans la catégorie **mon***) de $(X, \circledast, e)$ alors l'application A de R dans $\mathcal{P}(P^0 \times P^0)$ définie par*

$$A_{(i,j)} = \{(u,v) \in P^0 \times P^0 / \exists\ (x,y) \in X_i \times X_j : u = h_i(x)\ v = h_j(y)\ x = f_{i,j}(y)\}$$

possède les propriétés suivantes

1. *$(i,j) \in R \Rightarrow (h_i(e_i), h_j(e_j)) \in A_{(i,j)}$*
2. *Si on note*
   (a)
   $$A = \bigcup_{(i,j) \in R} A_{(i,j)}$$
   (b) *$\rho_*(A)$ la relation compatible avec la loi de P^0 et engendrée par A,([2])*
   (c) *$(P^0/\rho_*(A), \bullet)$ le monoïde quotient de P^0 par $\rho_*(A)$*
   (d) *π le morphisme canonique de $(P^0, \star)$ dans $(P^0/\rho_*(A), \bullet)$*
   (e) *$g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, P^0/\rho_*(A))$ l'application définie par*
   $$g_i = \pi \circ h_i$$

Alors $((P^0/\rho_*(A), \bullet), g)$ est une limite inductive (dans la catégorie **mon***) de (R, f)*

Preuve

(*i*)

1. M est un sous-monoïde de P
   (a) si e est l'élément neutre de P alors $e \in M$. En effet
   — puisque pour tout $i \in I$ $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P, X_i)$ on a, si $(i,j) \in I \times I$
   $$p_i(e) = e_i \qquad \text{et} \qquad p_j(e) = e_j$$
   — puisque pour tout $(i,j) \in R$ $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_j, X_i)$ on a
   $$f_{i,j}(e_j) = e_i$$
   par suite
   $$p_i(e) = e_i = f_{i,j}(e_j) = f_{i,j}(p_j(e)).$$

2. voir lemme [8.14] page 238

(b) si $(x,y) \in M \times M$ alors $x * y \in M$. En effet
— puisque pour tout $i \in I$ $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P, X_i)$ on a, si $(i,j) \in I \times I$ et $(x,y) \in M \times M$

$$p_i(x * y) = p_i(x) \circledast_i p_i(y) \qquad \text{et} \qquad p_j(x * y) = p_j(x) \circledast_j p_j(y)$$

— puisque pour tout $(i,j) \in R$ $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_j, X_i)$ on a

$$f_{i,j}(p_j(x) \circledast_j p_j(y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \circledast_i f_{i,j}(p_j(y))$$

Ainsi

$$f_{i,j}(p_j(x * y)) = f_{i,j}(p_j(x) \circledast_j p_j(y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \circledast_i f_{i,j}(p_j(y)))$$

mais puisque $(x,y) \in M \times M$ on a $f_{i,j}(p_j(x)) = p_i(x)$ et $f_{i,j}(p_j(y)) = p_i(y)$, par suite

$$f_{i,j}(p_j(x * y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \circledast_i f_{i,j}(p_j(y))) = p_i(x) \circledast_i p_i(y) = p_i(x * y)$$

et $x * y \in M$.

2. $((M,*),t)$ est une limite projective de (R,f). D'abord il est clair que pour tout $(i,j) \in R$ on a $t_i = f_{i,j} \circ t_j$ puisque si $x \in M$

$$t_i(x) = p_i(x) = f_{i,j}(p_j(x)) = f_{i,j} \circ t_j(x)$$

il suffit donc de montrer que si $(Y, \diamond)$ est un monoïde et $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, X_i)$ vérifie

$$(i,j) \in R \Rightarrow g_i = f_{i,j} \circ g_j \tag{8.48}$$

il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, M)$ vérifiant

$$g_i = t_i \circ h\ .$$

Puisque $((P,*),p)$ est un produit dans **mon** il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y,P)$ vérifiant

$$g_i = p_i \circ h\ .$$

mais les égalités (8.48) montre que $\forall\ y \in Y$ on a $h(y) \in M$: en effet, si $(i,j) \in R$

$$f_{i,j}(p_j(h(y)) = f_{i,j}(p_j \circ h(y)) = f_{i,j}(g_j(y)) = g_i(y) = p_i(h(y))$$

ainsi $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, M)$ et

$$g_i = p_i \circ h = t_i \circ h.$$

(ii)

1. Si $(i,j) \in R$ alors $(h_i(e_i), h_j(e_j)) \in A$. En effet, si $(i,j) \in R$ alors, puisque $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_j, X_i)$ on a $f_{i,j}(e_j) = e_i$.
2. D'abord on a

$$\pi \circ h_i \circ f_{i,j} = \pi \circ h_j\ .$$

En effet, par définition de A, pour tout $y \in X_j$ si $x = f_{i,j}(y)$ alors

$$(h_i(x), h_j(y)) \in A$$

par suite, puisque par construction $A \subset \rho_*(A)$, on obtient

$$\pi(h_i(f_{i,j}(y))) = \pi(h_j(y))\ .$$

Il reste á montrer que si $(Y, \diamond)$ est un monoïde et $a \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, Y)$ vérifie

$$a_j = a_i \circ f_{i,j} \tag{8.49}$$

il existe un unique morphisme $a^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A), Y)$ tel que pour tout $i \in I$

$$a_i = a^0 \circ g_i\ .$$

Preuve de l'existence

Puisque $((P^0,\star),h)$ est un coproduit dans **mon** il existe un unique morphisme $a^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0,Y)$ vérifiant :

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^* \circ h_i$$

on va montrer qu'il existe $a^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A),Y)$ tel que

$$a^* = a^0 \circ \pi\ .$$

D'après le lemme [8.14] page 238 il suffit de montrer :

$$(u,v) \in A \Rightarrow a^*(u) = a^*(v)$$

Mais si $(u,v) \in A$ il existe $(i,j) \in R$, $(x,y) \in X_i \times X_j$ tels que $u = h_i(x)$ $v = h_j(y)$ et $x = f_{i,j}(y)$ ainsi la définition de a^* et (8.49) entraîne

$$a^*(u) = a^*(h_i(x)) = a_i(x) = a_i(f_{i,j}(y)) = a_j(y) = a^*(h_j(y)) = a^*(v)\ .$$

Par suite il existe $a^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A),Y)$ tel que $a^* = a^0 \circ \pi$ et

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^* \circ h_i = a^0 \circ \pi \circ h_i = a^0 \circ g_i$$

Preuve de l'unicité

Si $(a^0,b^0) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A),Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A),Y)$ vérifient

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^0 \circ g_i \qquad \text{et} \qquad a_i = b^0 \circ g_i$$

alors $a^* = a^0 \circ \pi$ et $b^* = b^0 \circ \pi$ sont des morphismes de P^0 dans $P^0/\rho_*(A)$ qui vérifient

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^* \circ h_i \qquad \text{et} \qquad a_i = b^* \circ h_i$$

$((P^0,\star),h)$ étant un coproduit de $(X,\circledast,e)$ ces égalités entraînent $a^* = b^*$, ainsi $a^0 \circ \pi = b^0 \circ \pi$, π étant surjective on obtient $a^0 = b^0$. ■

On peut montrer, par « abstract nonsense » que « à isomorphisme près » il n'existe qu'une limite inductive ou projective .

Lemme 8.22 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, $(X,\circledast,e)$ une famille de monoïdes indexée par I à valeurs dans $\mathfrak{P}(\mathbb{U})$, et (R,f) est une famille de transitions de $(X,\circledast,e)$.*

(i) si $((P,\star),p)$ et $((Q,\boldsymbol{.}),q)$ sont des limites projective de (R,f) alors il existe un morphisme bijectif de $(P,\star)$ dans $(Q,\boldsymbol{.})$.

(ii) si $((P^0,\star),h)$ et $((Q^0,\boldsymbol{.}),g)$ sont des limites inductives de (R,f) alors il existe un morphisme bijectif de $(P,\star)$ dans $(Q,\boldsymbol{.})$.

Preuve

(i)

Puisque $q \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Q,X_i)$ et pour tout $(i,j) \in R$

$$q_i = f_{i,j} \circ q_j$$

la définition d'une limite projective montre qu'il existe un unique morphisme u de $(Q,\boldsymbol{.})$ dans $(P,\star)$ vérifiant

$$q_i = p_i \circ u$$

de même il existe un unique morphisme v de $(P, \star)$ dans $(Q, \centerdot)$ vérifiant

$$p_i = q_i \circ v$$

en particulier $v \circ u$ est un morphisme de $(Q, \centerdot)$ dans $(Q, \centerdot)$ qui vérifie

$$q_i = q_i \circ (v \circ u) \tag{8.50}$$

mais par définition d'une limite projective, id_Q est l'unique morphisme de $(Q, \centerdot)$ dans $(Q, \centerdot)$ vérifiant (8.50) par suite $v \circ u = id_Q$. De même l'égalité

$$p_i = p_i \circ (u \circ v)$$

montre que $u \circ v = id_P$

(ii)

Puisque $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, Q^0)$ et pour tout $(i, j) \in R$

$$g_j = g_i \circ f_{i,j}$$

la définition d'une limite inductive montre qu'il existe un unique morphisme u de $(Q^0, \centerdot)$ dans $(P^0, \star)$ vérifiant

$$g_i = u \circ h_i$$

de même il existe un unique morphisme v de $(P^0, \star)$ dans $(Q^0, \centerdot)$ vérifiant

$$h_i = v \circ g_i$$

en particulier $v \circ u$ est un morphisme de $(Q^0, \centerdot)$ dans $(Q^0, \centerdot)$ qui vérifie

$$g_i = (v \circ u) \circ g_i \tag{8.51}$$

mais par définition d'une limite projective, id_{Q^0} est l'unique morphisme de $(Q^0, \centerdot)$ dans $(Q^0, \centerdot)$ vérifiant (8.51) par suite $v \circ u = id_{Q^0}$. De même l'égalité

$$h_i = (u \circ v) \circ h_i$$

montre que $u \circ v = id_{P^0}$ ■

Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturel le lemme [5.1] page 85 permet de définir une structure de monoïde $(\mathbb{N}, +)$ sur $\mathbb{N}$ mais, si $n \neq 0$ l'équation

$$n + x = 0$$

n'a pas de solution. On a besoin d'une structure algébrique dans laquelle ce genre d'équation a toujours une solution.

8.4 *Définition des entiers relatifs*

Les monoïdes dans lesquels l'équation $a * x = e$ possède toujours une solution s'appellent des groupes.

Définition 8.22 *Si $(G, *)$ est un monoïde d'élément neutre e on dit que $(G, *)$ est un* ***groupe*** *si la relation $\varphi_G : G \mapsto G$ définie par*

$$\varphi_G = \{(x, y) \in G \times G / x * y = y * x = e\}$$

est une application. Ainsi $\varphi_G(x)$ est l'unique élément de G vérifiant

$$x * \varphi_G(x) = \varphi_G(x) * x = e.$$

$\varphi_G(x)$ est appelé l'inverse de x on le note souvent $\varphi_G(x) = x^{-1}$, lorsque la loi $*$ est notée additiuement $* : (x, y) \mapsto x + y$ on le note $\varphi_G(x) = -x$.
Lorsque le monoïde $(G, *)$ est commutatif on parle de groupe commutatif.

Pour tout groupe $(G, *)$ l'application φ_G possède les propriétés suivantes dont la preuve est laissée au soin du lecteur.

— $\varphi_G \circ \varphi_G = id_G : \forall\, x \in G \quad (x^{-1})^{-1} = x$

— $\forall\, (x, y) \in G \times G \quad \varphi_G(x * y) = \varphi_G(y) * \varphi_G(y) : (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

— si $(H, \centerdot)$ est un groupe et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H, G)$ alors $f \circ \varphi_H = \varphi_G \circ f$:

$$\forall x \in H \qquad f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$$

en particulier $(f(H), *)$ est un groupe.

Définition 8.23 *Si $(G, *)$ est un groupe et $H \subset G$ est un sous-ensemble de G on dit que H nest un* ***sous-groupe*** *de G si :*

1. $(x, y) \in H \times H \Rightarrow x * y \in H$
2. $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

En analyse la chaîne permettant de construire les entiers relatifs et rationnels

$$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

est basée sur une construction classique.

8.4.1 *Une construction classique*

On rappelle qu'un monoïde $(M, *)$ est dit simplifiable si pour tout couple $(a, b) \in M \times M$ les équations

$$a * x = a * b \quad \text{et} \quad x * a = b * a$$

ne possèdent que la solution $x = b$

Théorème 8.5 *On note $(M, \circledcirc)$ un monoïde commutatif*

(i) Il existe un couple $((K(M), \star), i)$ où

— *$(K(M), \star)$ est un groupe commutatif*

— *i est un morphisme de $(M, \circledcirc)$ dans $(K(M), \star)$*

pour lequel la propriété suivante est vérifiée : Pour tout groupe commutatif $(G, \ominus)$ et pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M, G)$ il existe un unique morphisme $k(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(K(M), G)$ vérifiant

$$f = k(f) \circ i.$$

(ii) Si $(H, \centerdot)$ est un groupe commutatif , $j \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M, H)$ vérifie la propriété :Pour tout groupe commutatif $(G, \ominus)$ et pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M, G)$ il existe un unique morphisme $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H, G)$ vérifiant

$$f = f^* \circ j.$$

alors il existe un morphisme bijectif de H dans $K(M)$.

(iii) Pour tout $u \in K(M)$ il existe $(x, y) \in M \times M$ tel que $u = i(x) \star (i(y))^{-1}$. Si G est un sous-groupe de $K(M)$ tel que $i(M) \subset G$ alors $G = K(M)$.

(iv) Si $(M, \circledcirc)$ est ***simplifiable*** *la relation R de $M \times M$ dans $M \times M$ définie par*

$$R = \{((x, y), (a, b)) \in (M \times M) \times ((M \times M)/x \circledcirc b = a \circledcirc y\}$$

est une relation d'équivalence qui vérifie

$$((x, y), (a, b)) \in R \quad \text{et} \quad ((x', y'), (a', b')) \in R \Rightarrow ((xx', yy'), (aa', bb')) \in R$$

(v) Si $(M, \circledcirc)$ est ***simplifiable*** *alors i est injective.*

(vi) Si M est un groupe commutatif i un morphisme bijectif de $(M, \circledcirc)$ dans $(K(M), \star)$

Preuve

(i)

On notera multiplicativement la loi $\circledcirc$, $x \circledcirc y = xy$. on note $M^2 = M \times M$ et on muni M^2 d'une structure de monoïde en consièrant la loi $\centerdot$ sur M^2 définie par

$$(x, y) \centerdot (a, b) = (xa, yb) = (x \circledcirc a, y \circledcirc b)$$

ainsi si e est l'élément neutre de $(M, \circledcirc)$ alors $(M^2, \centerdot)$ est un monoïde d'élément neutre (e, e) (voir lemme [8.16] page 244). Enfin on note

— A le sous ensemble de $M^2 \times M^2$ défini par

$$A = \{((x, y), (a, b)) \in M^2 \times M^2 / xb = ay\}$$

— $\rho_*(A)$ la relation d'équivalence engendrée par A et compatible avec la loi de M^2 (voir lemme [8.14] page 238)

— π l'application canonique de $(M^2, \centerdot)$ dans $M^2/\rho_*(A)$

— $\star$ l'unique loi sur $M^2/\rho_*(A)$ telle que π est un morphisme de $(M^2, \centerdot)$ dans $(M^2/\rho_*(A), \star)$

— i l'application de M dans $M^2/\rho_*(A)$ définie par

$$i(x) = \pi(x, e) \ .$$

On montre que le couple $((K(M), \star), i)$= $((M^2/\rho_*(A), \star), i)$ vérifie les propriétés de (i).

1. $(M^2/\rho_*(A), \star)$ est un groupe commutatif. Puisque $(M^2/\rho_*(A), \star)$ est un monoïde commutatif, il suffit de montrer que tout élément de $(M^2/\rho_*(A), \star)$ possède un inverse. Notons $\varepsilon = \pi(e, e)$ l'élément neutre de $(M^2/\rho_*(A), \star)$, on remarque que pour tout $x \in M$

$$((x, x), (e, e)) \in A$$

par suite

$$\forall\ x \in M \qquad \pi(x, x) = \pi(e, e) = \varepsilon. \tag{8.52}$$

Cette égalité permet de montrer que pour tout $x \in M$ $\pi(e, x)$ est l'inverse de $\pi(x, e)$ dans $(M^2/\rho_*(A), \star)$. En effet,

(a) par définition de la loi $\centerdot$ on a

$$(x, e) \centerdot (e, x) = (x, x)$$

(b) puisque π est un morphisme de $(M^2, \centerdot)$ dans $(M^2/\rho_*(A), \star)$ on obtient

$$\varepsilon = \pi(x, x) = \pi((x, e) \centerdot (e, x)) = \pi(x, e) \star \pi(e, x)$$

Enfin on montre que pour tout $(x, y) \in M \times M$ $\pi(y, x)$ est l'inverse de $\pi(x, y)$ dans $(M^2/\rho_*(A), \star)$. En effet,

(a) par définition de la loi $\centerdot$ on a

$$(x, e) \centerdot (e, y) = (x, y)$$

(b) puisque π est un morphisme de $(M^2, \centerdot)$ dans $(M^2/\rho_*(A), \star)$ on obtient

$$\pi(x, y) = \pi((x, e) \centerdot (e, y)) = \pi(x, e) \star \pi(e, y)$$

ainsi

$$\pi(x, y) \star \pi(y, x) = (\pi(x, e) \star \pi(e, y)) \star (\pi(y, e) \star \pi(e, x))$$

l'associativité de la loi $\star$ montre que

$$\pi(x, y) \star \pi(y, x) = \pi(x, e) \star (\pi(e, y) \star \pi(y, e)) \star \pi(e, x)$$

ainsi les égalités $\pi(e, y) \star \pi(y, e) = \varepsilon$ et $\pi(x, e) \star \pi(e, x) = \varepsilon$ montrent que

$$\pi(x, y) \star \pi(y, x) = \pi(x, e) \star \varepsilon \star \pi(e, x) = \pi(x, e) \star \pi(e, x) = \varepsilon$$

2. $i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((M, \circledcirc), (M^2/\rho_*(A), \star))$. Par définition de la loi $\centerdot$ l'application $j : M \mapsto M^2$ définie par
$$j(x) = (x, e)$$
est un morphisme de $(M, \circledcirc)$ dans $(M^2, \centerdot)$, par suite $i = \pi \circ j$ est un composé de morphismes.
3. On montre que si $(G, \ominus)$ est un groupe commutatif et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M, G)$ il existe un unique morphisme $k(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M^2/\rho_*(A), G)$ vérifiant
$$f = k(f) \circ i \ .$$

Preuve de l'existence

Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M, G)$ on considère l'application g de $(M^2, \centerdot)$ dans $(G, \ominus)$ définie par
$$g(x, y) = f(x) \ominus (f(y))^{-1}$$
et on montre
(a) $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M^2, G)$
(b) il existe un morphisme $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M^2/\rho_*(A), G)$ vérifiant
$$g = g^* \circ \pi \ .$$
(a) On a, si e' est l'élément neutre de G alors
$$g(e, e) = f(e)(f(e))^{-1} = e'e' = e'$$
Si $(x, y) \in M^2$ et $(a, b) \in M^2$ alors
$$g((x, y) \centerdot (a, b)) = f((xa, yb)) = f(xa)(f(yb))^{-1}$$
puisque $f(yb))^{-1} = f(b)^{-1} \ominus f(y)^{-1}$ on obtient
$$g((x, y) \centerdot (a, b)) = f(x) \ominus f(a)) \ominus (f(b)^{-1} \ominus f(y)^{-1})$$
la commutativité de G montre que
$$g((x, y) \centerdot (a, b)) = f(x) \ominus f(y)^{-1}) \ominus (f(a) \ominus f(b)^{-1}) = g((x, y)) \ominus g((a, b))$$
(b) Puisque g est un morphisme, il suffit, d'après le lemme [8.14] page 238 de montrer :
$$((x, y), (a, b)) \in A \Rightarrow g(x, y) = g(a, b)$$
mais si $xb = ya$ alors $f(x) \ominus f(b) = f(y) \ominus f(a)$ et la commutativité de G montre que $f(x) \ominus (f(y))^{-1} = f(a) \ominus (f(b))^{-1}$

Preuve de l'unicité

Si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M^2/\rho_*(A), G)$ et vérifie
$$u \circ i = f$$
alors on a, puisque $\pi(x, y) = \pi(x, e) \star \pi(e, y) = \pi(x, e) \star (\pi(y, e))^{-1}$
$$u(\pi(x, y)) = u(i(x) \star (i(y))^{-1}) = u(i(x)) \ominus u((i(y)^{-1}))$$
u étant un morphisme, les égalités
$$u(i(x) \star (i(y))^{-1}) = u(i(x)) \ominus u((i(y)^{-1})) \quad \text{et} \quad u((i(y)^{-1})) = (u(i(y))^{-1}$$
entraînent
$$u(\pi(x, y)) = u(i(x)) \ominus (u(i(y))^{-1} = f(x)(f(y))^{-1}$$
par suite $u = k(f)$.

(ii)

Puisque $(K(M), \star)$ est un groupe commutatif et $i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M, K(M))$ il existe un unique morphisme $i^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H, K(M))$ tel que

$$i = i^* \circ j$$

Puisque $(H, \centerdot)$ est un groupe commutatif et $j \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M, H)$ il existe un unique morphisme $k(j) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(K(M), H)$ tel que

$$j = k(j) \circ i$$

Ainsi $i^* \circ k(j)$ est un morphisme de $K(M)$ dans $K(M)$ vérifiant

$$(i^* \circ k(j)) \circ i = i$$

Mais par construction le seul morphisme f de $K(M)$ dans $K(M)$ vérifiant l'égalité $f \circ i = i$ est l'identité de $K(M)$, par suite

$$i^* \circ k(j) = id_{K(M)} \ .$$

De même $k(j) \circ i^*$ est un morphisme de H dans H vérifiant

$$k(j) \circ i^* \circ j = j$$

Mais par hypothèse le seul morphisme f de H dans H vérifiant $f \circ j = j$ est l'identité de H, par suite

$$k(j) \circ i^* = id_H \ .$$

Ainsi $k(j)$ est un morphisme bijectif de $K(M)$ dans H dont l'inverse est i^*.

(iii)

On remarque que pour tout $(x, y) \in M^2$

$$\pi(x, y) = \pi(x, e) \centerdot (e, y) = \pi(x, e) \star \pi(e, y) = i(x) \star (i(y))^{-1}.$$

En particulier, si G est un sous-groupe de $K(M)$ tel $[x \in M \Rightarrow i(x) \in G]$ on obtient

$$(x, y) \in M \times M \Rightarrow i(x) \star (i(y))^{-1} \in G \Rightarrow \pi(x, y) \in G \ .$$

(iv)

Il est clair que R est reflexive et symétrique, on montre la transitivité. Il s'agit de montrer

$$((x, y), (a, b)) \in R \quad \text{et} \quad ((a, b), (u, v)) \in R \Rightarrow ((x, y), (u, v)) \in R$$

c'est à dire

$$xb = ay \quad \text{et} \quad av = ub \Rightarrow xv = uy \ .$$

Mais si $xb = ay$ et $av = ub$ alors la commutativité de M montre que

$$(xv)b = (xb)v = (ay)v = (av)y = (ub)y = (uy)b$$

ainsi $(xv)b = (uy)b$, M étant simplifiable cette égalité entraîne $xv = uy$. Ce qui montre que R est transitive. Enfin on montre

$$((x, y), (x', y')) \in R \quad \text{et} \quad ((a, b), (a', b')) \in R \Rightarrow ((xa, yb), (x'a', y'b')) \in R$$

c'est à dire

$$xy' = x'y \quad \text{et} \quad ab' = a'b \Rightarrow (xa)(y'b') = (x'a')(yb)$$

mais la commutativité de M montre

$$(xa)(y'b') = (xy')(ab') = (x'y)(a'b) = (x'a')(yb) \ .$$

(v)

On montre que si M est simplifiable $A = \rho_*(A)$, il suffit de montrer que A est une relation d'équivalence compatible avec la loi de M^2. D'après (iv) A est une relation d'équivalence.Enfin dire que A est compatible avec la loi de M^2 c'est dire que, puisque par définition $(x,y) \centerdot (a,b) = (xa, yb)$,

$$((x,y),(x',y')) \in A \quad \text{et} \quad ((a,b),(a',b')) \in A \Rightarrow ((xa,yb),(x'a',y'b')) \in A$$

Ainsi $A = \rho_*(A)$, par suite $\pi(x,y) = \pi(a,b) \Rightarrow ((x,y),(a,b)) \in A$ mais l'assertion $((x,e),(y,e)) \in A$ est équivalente à $x = y$ par suite

$$i(x) = i(y) \Leftrightarrow \pi(x,e) = \pi(y,e) \Leftrightarrow ((x,e),(y,e)) \in A \Leftrightarrow x = y$$

ce qui montre que i est injective.

(vi)

En tant que groupe $(M, \circledcirc)$ est simplifiable, par suite i est injective d'après (v) et puisque $i(M)$ est un groupe, (iii) permet d'affirmer que i est surjective. ■

On peut préciser le (iv) du théorème [8.5] page 264 par le théorème suivant.

Théorème 8.6 *On note $(M,+)$ un monoïde **commutatif** et **simplifiable** d'élément neutre 0 , $M^2 = M \times M$ et $\centerdot$ la loi de monoïde sur M^2 définie par*

$$(x,y) \centerdot (a,b) = (x+a, y+b)$$

(i) La relation R sur M^2 définie par

$$R = \{((x,y),(a,b)) \in M^2 \times M^2 / x + b = a + y\}$$

est une relation d'équivalence compatible avec la loi $\centerdot$ sur M^2. On note π l'application canonique de M^2 dans M^2/R et $\oplus$ l'unique loi sur M^2/R telle que l'application canonique soit un morphisme de $(M^2, \centerdot)$ dans $(M^2/R, \oplus)$.

(ii) $(M^2/R, \oplus)$ est un groupe commutatif et pour tout $(x,y) \in M^2$ $\pi(y,x)$ est l'inverse de $\pi(x,y)$

(iii) Si i est l'application de M dans M^2/R définie par

$$i(x) = \pi(x,0)$$

alors

1. *i est un morphisme injectif de $(M,+)$ dans $(M^2/R, \oplus)$*
2. *si pour tout $u \in M^2/R$ on note $\ominus u$ l'inverse de u dans $(M^2/R, \oplus)$ alors pour tout $u \in M^2/R$ il existe $(x,y) \in M^2$ tel que*

$$u = \pi(x,y) = i(x) \ominus i(y) \, (= i(x) \oplus (\ominus y)) \ .$$

3. *Le couple $((M^2/R, \oplus), i)$ possède la propriété universelle suivante : pour tout groupe commutatif $(G, \boxdot)$ et pour tout morphisme f de $(M,+)$ dans $(G, \boxdot)$ il existe un unique morphisme $k(f)$ de $(M^2/R, \oplus)$ dans $(G, \boxdot)$ vérifiant*

$$f = k(f) \circ i \ .$$

De plus, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M,G)$ est un morphisme injectif, alors le morphisme $k(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M^2/R, G)$ est injectif. En d'autres termes tout groupe commutatif contenant une copie de M contient une copie de M^2/R.

Preuve

(i)

Aux notations près c'est le (iv) du théorème [8.5] page 264

(ii)

Il suffit de montrer que pour tout $(x, y) \in M^2$, $\pi(y, x)$ est l'inverse de $\pi(x, y)$. Or

— puisque pour tout $x \in M$ on a $((x, x), (0, 0)) \in R$ on obtient
$$\forall\, x \in M \quad \pi(x, x) = \pi(0, 0).$$

— puisque π est un morphisme de $(M^2, \centerdot)$ dans $(M^2/R, \oplus)$ on tire de l'égalité $(x, y) \centerdot (y, x) = (x + y, x + y)$
$$\pi(x, y) \oplus \pi(y, x) = \pi((x, y) \centerdot (y, x)) = \pi(x + y, x + y) = \pi(0, 0)$$
ainsi $\pi(y, x)$ est l'inverse de $\pi(x, y)$.

(iii)

1. puisque π est un morphisme de $(M^2, \centerdot)$ dans $(M^2/R, \oplus)$ on tire de l'égalité $(x, 0) \centerdot (y, 0) = (x+y, 0)$
$$i(x + y) = \pi(x + y, 0) = \pi((x, 0) \centerdot (y, 0)) = \pi(x, 0) \oplus \pi(y, 0)\ .$$
L'égalité $\pi(x, 0) = \pi(y, 0)$ est équivalente à $((x, 0), (y, 0)) \in R$ par suite
$$i(x) = i(y) \Rightarrow x = y\ .$$
2. si $u \in M^2/R$ il existe $(x, y) \in M^2$ tel que $u = \pi(x, y)$, par suite
$$u = \pi(x, y) = \pi((x, 0) \centerdot (0, y)) = \pi(x, 0) \oplus \pi(0, y)$$
ainsi, puisque $\pi(0, y) = \ominus i(y)$ on obtient $u \oplus i(y) = i(x)$
3. aux notations près la propriété universelle est le (i) du théorème [8.5] page 264 . En fait on a (voir la preuve du théorème [8.5])
$$k(f)(\pi(x, y)) = f(x) \boxdot (f(y))^{-1}\ .$$
On montre que si le morphisme f est injectif $k(f)$ est injective. Or, si $k(f)(\pi(x, y)) = k(f)(\pi(a, b))$ alors $f(x) \boxdot (f(y))^{-1} = f(a) \boxdot (f(b))^{-1}$, ainsi, puisque $(G, \boxdot)$ est commutatif on obtient l'égalité
$$f(x) \boxdot f(b) = f(a) \boxdot f(y)\ .$$
Puisque f est un morphisme de $(M, +)$ dans $(G, \boxdot)$ cette égalité entraîne
$$f(x + b) = f(a + y)\ .$$
l'injectivité de f entraîne alors $x + b = a + y$ par suite
$$((x, y), (a, b)) \in R \quad \text{et} \quad \pi(x, y) = \pi(a, b)\ .$$

■

Pour tout ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}, O)$ le lemme [5.1] page 85 permet de construire un monoïde commutatif et simplifiable $(\mathbb{N}, +)$ (voir aussi lemme [5.2] page 87) ce monoïde permet de construire les entiers relatifs.

Définition 8.24 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels , $(\mathbb{N}, +)$ le monoïde commutatif simplifiable associé à $(\mathbb{N}, O)$ et R la relation de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ définie par*
$$R = \{((m, n), (p, q)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 / m + q = p + n\}$$

1. *On appelle ensemble des* ***entiers relatifs associé à*** $(\mathbb{N}, O)$ *l'ensemble* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *défini par*

$$\mathbb{Z}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^2/R$$

2. *On note*
   — π *l'application canonique de* $\mathbb{N}^2$ *dans* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$,
   — $\centerdot$ *la loi de monoïde sur* $\mathbb{N}^2$ *définie par*

$$(m, n) \centerdot (p, q) = (m + p, n + q)$$

   — $\oplus$ *l'unique loi sur* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *telle que* π *soit un morphisme de* $(\mathbb{N}^2, \centerdot)$ *dans* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$
   On appelle ***groupe des entiers relatifs associé à*** $(\mathbb{N}, O)$ *le groupe* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$
3. *l'application* i *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *définie par*

$$i(n) = \pi(n, 0)$$

   est appelée le ***plongement*** *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$

L'existence de tels objets est assurée par le théorème [8.6] page 268.

Notation 8.10 *Si* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ *est le groupe des entiers relatifs associé à* $(\mathbb{N}, O)$ *alors*

1. *pour tout* $u \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *on note systématiquement* $-u$ *l'inverse de* u *pour la loi* $\oplus$ *ainsi*

$$\pi(n, m) = -\pi(m, n)$$

2. *pour tout* $(u, v) \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *on note* $v - u$ *l'entier relatif défini par*

$$v - u = v \oplus (-u)$$

   ainsi

$$\pi(m, n) = i(m) \oplus (-i(n)) = i(m) - i(n) \ .$$

8.4.2 *Existence d'un ensemble d'entiers relatifs*

Dans ce qui suit la multiplication sur $\mathbb{N}$ (voir lemme [5.3] page 92) est notée $(n, k) \mapsto nk$ et l'addition est notée $(m, n) \mapsto m + n$.

Lemme 8.23 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ *le groupe des entiers relatifs associé à* $(\mathbb{N}, O)$, π *l'application canonique de* $\mathbb{N}^2$ *dans* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *et* i *le plongement de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$.

(i) Le couple $((\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus), i)$ *possède la propriété universelle suivante :*
Pour tout groupe commutatif $(G, *)$ *et pour tout morphisme* f *de* $(\mathbb{N}, +)$ *dans* $(G, *)$ *il existe un unique morphisme* $k(f)$ *de* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *dans* $(G, *)$ *qui vérifie*

$$f = k(f) \circ i \ .$$

(ii) Si $(\mathbb{N}', O')$ *est un ensemble d'entiers naturels et* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}'), \oplus')$ *le groupe des entiers relatifs associé à* $(\mathbb{N}', O')$ *il existe un morphisme bijectif de* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ *dans* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}'), \oplus')$

(iii) Il existe une unique loi associative (notée $\centerdot$ *) sur* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *vérifiant :*

1. $$\forall\ (n, k) \in \mathbb{N}^2 \quad i(nk) = i(n) \centerdot i(k) \ .$$

2. *la loi* $\centerdot$ *est commutative :*

$$\forall\ (u, v) \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \quad u.v = v.u$$

3. la loi $\centerdot$ est distributive par rapport à l'addition $\oplus$:

$$\forall (u,v) \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N}),\ w \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \quad (u \oplus v) \centerdot w = (u \centerdot w) \oplus (v \centerdot w)$$

4. $\pi(1,0)$ est l'élément neutre de la loi $\centerdot$

Ainsi $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \centerdot)$ est un monoïde commutatif d'élément neutre $\pi(1,0)$

Preuve

(i)

C'est le *(iii) 3* du théorème [8.6] page 268

(ii)

Si $(\mathbb{N}', +')$ est le monoïde additif associé à $(\mathbb{N}', O')$ alors le théorème [5.1] page 90 montre qu'il existe un morphisme bijectif g de $(\mathbb{N}, +)$ dans $(\mathbb{N}', +')$. En particulier si i' est le plongement de $\mathbb{N}'$ dans $\mathbb{Z}(\mathbb{N}')$ alors $i' \circ g$ est un morphisme (injectif) de $(\mathbb{N}, +)$ dans $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}'), \oplus')$ ainsi la propriété universelle de $((\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus), i)$ montre qu'il existe un unique morphisme $k(i' \circ g)$ de $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ dans $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}'), \oplus')$ vérifiant

$$i' \circ g = k(i' \circ g) \circ i\ ,$$

de même il existe un unique morphisme $k'(i \circ g^{-1})$ de $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}'), \oplus')$ dans $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ vérifiant

$$i \circ g^{-1} = k'(i \circ g^{-1}) \circ i'\ .$$

Ainsi le morphisme $k'(i \circ g^{-1}) \circ k(i' \circ g)$ de $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ dans $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ vérifie

$$(k'(i \circ g^{-1}) \circ k(i' \circ g)) \circ i = k'(i \circ g^{-1}) \circ (k(i' \circ g) \circ i) = k'(i \circ g^{-1}) \circ (i' \circ g)$$

or

$$k'(i \circ g^{-1}) \circ (i' \circ g) = (k'(i \circ g^{-1}) \circ i') \circ g = i \circ g^{-1} \circ g = i$$

par suite

$$(k'(i \circ g^{-1}) \circ k(i' \circ g)) \circ i = i$$

mais le seul morphisme f de $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ dans $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ vérifiant $f \circ i = i$ est l'identité, par suite

$$k'(i \circ g^{-1}) \circ k(i' \circ g) = id_{\mathbb{Z}(\mathbb{N})}$$

de même on obtient

$$k(i' \circ g) \circ k'(i \circ g^{-1}) = id_{\mathbb{Z}(\mathbb{N}')}$$

ce qui montre que $k(i' \circ g)$ est un morphisme bijectif de $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ dans $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}'), \oplus')$ avec $(k(i' \circ g))^{-1} = k'(i \circ g^{-1})$.

(iii)

Preuve de l'existence

On considère la relation φ de $\mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ définie par, en posant $\mathbb{Z}(\mathbb{N})^3 = (\mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N})) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N})$

$$\varphi = \{((u,v), w) \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})^3 / \exists\ ((x,y),(a,b)) \in \pi^{-1}(u) \times \pi^{-1}(v) : w = \pi(xa + yb, xb + ya)\}$$

et on montre que φ est une application.

1. D'abord on montre $\mathrm{dom}(\varphi) = \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N})$. En effet, par définition de $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$, pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ il existe $((x,y),(a,b)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ tel que

$$u = \pi(x,y) \quad \text{et} \quad v = \pi(a,b)$$

pour un tel couple on a

$$((u,v), \pi(xa + yb, xb + ya)) \in \varphi\ .$$

2. Ensuite on montre que φ est une fonction :

$$[((u,v),w) \in \varphi \quad \text{et} \quad ((u,v),w') \in \varphi] \Rightarrow w = w'$$

mais si $((u,v),w) \in \varphi$ alors il existe $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ et $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant

$$u = \pi(x,y) \quad v = \pi(a,b) \quad \text{et} \quad w = \pi(ax+by, ay+bx)$$

et si $((u,v),w') \in \varphi$ alors il existe $(x',y') \in \mathbb{N}^2$ et $(a',b') \in \mathbb{N}^2$ vérifiant

$$u = \pi(x',y') \quad v = \pi(a',b') \quad \text{et} \quad w' = \pi(a'x'+b'y', a'y'+b'x')$$

il suffit donc de montrer que si $\pi(x,y) = \pi(x',y')$ et $\pi(a,b) = \pi(a',b')$ alors

$$\pi(ax+by, ay+bx) = \pi(a'x'+b'y', a'y'+b'x') \ .$$

pour cela on remarque d'abord que si $\pi(x,y) = \pi(x',y')$ alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$

$$\pi(ax+by, ay+bx) = \pi(ax'+by', ay'+bx') \tag{8.53}$$

puisque d'après le lemme [5.3] page 92

$$x+y' = x'+y \Rightarrow ax+ay' = ax'+ay$$

on a, si $x+y' = x'+y$,

$$ax+by+ay'+bx' = a(x+y')+b(y+x') = a(x'+y)+b(x+y') = ax'+by'+ay+bx$$

et l'égalité

$$ax+by+ay'+bx' = ax'+by'+ay+bx$$

est l'égalité (8.53) . On vérifie de même que si $\pi(a,b) = \pi(a',b')$ alors

$$\pi(ax'+by', ay'+bx') = \pi(a'x'+b'y', a'y'+b'x') \ , \tag{8.54}$$

on a, si $a+b' = a'+b$,

$$ax'+by'+a'y'+b'x' = x'(a+b')+y'(a'+b) = x'(a'+b)+y'(a+b')$$

par suite

$$ax'+by'+a'y'+b'x' = a'x'+b'y'+ay'+bx' \ .$$

en particulier si $\pi(x,y) = \pi(x',y')$ et $\pi(a,b) = \pi(a',b')$ alors (8.53) et (8.54) montrent

$$\pi(ax+by, ay+bx) = \pi(ax'+by', ay'+bx') = \pi(a'x'+b'y', a'y'+b'x') \ .$$

Ainsi φ est une loi et on note $\varphi(u,v) = u \centerdot v$. On montre que $\centerdot$ est associative, il s'agit de vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$

$$(\pi(x,y) \centerdot \pi(a,b)) \centerdot \pi(m,n) = \pi(x,y) \centerdot (\pi(a,b) \centerdot \pi(m,n)) \tag{8.55}$$

or

$$(\pi(x,y) \centerdot \pi(a,b)) \centerdot \pi(m,n) = \pi(xa+yb, ya+xb) \centerdot \pi(m,n)$$

d'où

$$(\pi(x,y) \centerdot \pi(a,b)) \centerdot \pi(m,n) = \pi(m(xa+yb)+n(ya+xb), m(ya+xb)+n(xa+yb)))$$

et

$$\pi(x,y) \centerdot (\pi(a,b) \centerdot \pi(m,n)) = \pi(x,y) \centerdot \pi(am+bn, bm+an)$$

d'où

$$\pi(x,y) \mathbin{.} (\pi(a,b) \mathbin{.} \pi(m,n)) = \pi(x(am+bn)+y(bm+an), x(bm+an)+y(am+bn))$$

ainsi l'égalité (8.55) provient des égalités

$$x(am+bn)+y(bm+an) = m(xa+yb)+n(ya+xb)$$

et

$$x(bm+an)+y(am+bn) = m(ya+xb)+n(xa+yb) \ .$$

On vérifie maintenant les propriétés de la loi $\mathbin{.}$ énumérées en (*iii*).

1. Une application directe de la définition montre que

$$\pi(n,0) \mathbin{.} \pi(k,0) = \pi(nk,0)$$

2. (**commutativité**) On a

$$\pi(x,y) \mathbin{.} \pi(a,b) = \pi(xa+yb, xb+ya) = \pi(ax+by, bx+ay) = \pi(a,b) \mathbin{.} \pi(x,y) \ .$$

3. (**distributivité**) On a

$$\pi(m,n) \mathbin{.} \pi(a,b) \oplus \pi(m,n)\pi(x,y) = \pi(ma+nb, na+mb) \oplus \pi(mx+ny, nx+my)$$

l'égalité

$$\pi(ma+nb, na+mb) \oplus \pi(mx+ny, nx+my) = \pi(m(a+x)+n(b+y), n(a+x)+m(b+y))$$

montre que

$$\pi(m,n) \mathbin{.} \pi(a,b) \oplus \pi(m,n)\pi(x,y) = \pi(m,n) \mathbin{.} (\pi(a,b) \oplus \pi(x,y))$$

4. (**élément neutre**) On a

$$\pi(x,y)\pi(1,0) = \pi(1x+0y, 0x+1y) = \pi(x,y) \ .$$

Preuve de l'unicité

Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ on a $\pi(x,y) = i(x) - i(y)$, si $*$ est une loi sur $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ vérifiant *1.,..., 4.* on a

$$\pi(x,y) * \pi(a,b) = (i(x)-i(y)) * (i(a)-i(b)) = i(xa+yb) - i(xb+ya) = \pi(xa+yb, xb+ya) \ .$$

■

Le monoïde $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbin{.})$ est appelé le monoïde multiplicatif des entiers relatifs. Pour tout ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}, O)$, l'ensemble $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ hérite d'un ordre.

Lemme 8.24 ***(Ordre sur les entiers relatifs)***
On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels et $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ le groupe des entiers relatifs associé à $(\mathbb{N}, O)$, π l'application canonique de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ et i le plongement de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$, enfin $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbin{.})$ sera le monoïde multiplicatif des entiers relatifs .

(i) La relation $\mathbb{O}$ de $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ définie par

$$\mathbb{O} = \{(u,v) \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N}) / \exists n \in \mathbb{N} : v = u \oplus i(n)\}$$

est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$, de plus :

1. le plongement i est strictement croissant de $(\mathbb{N}, O)$ dans $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$, *2. pour que* $\pi(a,b) \le \pi(x,y)$ (3) *il faut et il suffit qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$x + b = y + a + n$$

3. $\mathbb{O}$ *est un ordre total sur* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$

4. pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$]\pi(n,0), \to [\subset [\pi(n+1,0), \to [\quad \text{et} \quad]\pi(0,n+1), \to [\subset [\pi(0,n), \to [$$

(ii) $\mathbb{O} \cap (i(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N})) = \mathbb{O} \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N}))$, *ainsi la restriction* $\mathbb{O}_r$ *de* $\mathbb{O}$ *à* $i(\mathbb{N})$ *vérifie* $\mathbb{O}_r \subset i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})$.

1. $i(\mathbb{N}) = [\pi(0,0), \to [= \{u \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) / (\pi(0,0), u) \in \mathbb{O}\}$

2. $(i(\mathbb{N}), \mathbb{O}_r)$ *est un ensemble bien ordonné de succession*

$$s(u) = u \oplus i(1)$$

(iii) $(i(\mathbb{N}), \mathbb{O}_r)$ *est un ensemble d'entiers naturels et pour tout* $u \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *il existe* $(x,y) \in i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})$ *tels que*

$$u = x - y$$

(iv) Si A *est un sous-ensemble non vide minoré de* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$ *alors* A *possède un minimum.*

(v) Posons

$$\mathbb{Z}_+ = \{u \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) / (\pi(0,0), u) \in \mathbb{O}\} = i(\mathbb{N})$$

et

$$\mathbb{Z}_- = \{u \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) / (u, \pi(0,0)) \in \mathbb{O}\}$$

alors

$$\mathbb{Z}(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{\pi(0,0)\}$$

enfin, pour que $u \in \mathbb{Z}_-$ *il faut et il suffit qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$u = \pi(0,n)$$

de plus

$$u \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow \pi(0,1) \centerdot u \in \mathbb{Z}_-$$

(vi) Pour tout $u \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *l'application* φ_u *de* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *dans* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *définie par*

$$\varphi_u(v) = u \oplus v$$

est strictement croissante de $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$ *dans* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$.

(vii) Si $\mathbb{Z}_+^* = \{u \in \mathbb{Z}_+ / u \neq \pi(0,0)\}$, *pour tout* $u \in \mathbb{Z}_+^*$ *l'application* θ_u *de* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *dans* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *définie par*

$$\theta_u(v) = u \centerdot v$$

est strictement croissante de $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$ *dans* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$.

(viii) Si $\mathbb{Z}_-^* = \{u \in \mathbb{Z}_- / u \neq \pi(0,0)\}$, *pour tout* $u \in \mathbb{Z}_-^*$ *l'application* λ_u *de* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *dans* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *définie par*

$$\lambda_u(v) = u \centerdot v$$

est strictement décroissante de $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$ *dans* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$.

(ix) si $u = \pi(0,0)$ *alors pour tout* $v \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$

$$u \centerdot v = \pi(0,0)$$

3. c'est à dire $(\pi(a,b), \pi(x,y)) \in \mathbb{O}$

si $(u, v) \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *vérifie* $u \centerdot v = \pi(0,0)$ *alors*

$$u = \pi(0,0) \quad \text{ou} \quad v = \pi(0,0) \ .$$

(x) $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *est archimèdien : si* $u \in \mathbb{Z}^*_+$ *et* $v \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$(v, i(n) \centerdot u) \in \mathbb{O} \ .$$

Preuve

(i)

Il s'agit de montrer que $\mathbb{O}$ est réflexive transitive et antisymétrique.

1. puisque $i(0) = \pi(0,0)$ est l'élément neutre de $\oplus$ on a
$$\forall \ u \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \quad u = u + i(0)$$
par suite $u \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \Rightarrow (u, u) \in \mathbb{O}$
2. Si $(u, v) \in \mathbb{O}$ et $(v, w) \in \mathbb{O}$ il existe $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que
$$v = u \oplus i(n) \quad \text{et} \quad w = v \oplus i(k)$$
par suite, puisque par construction i est un morphisme de $(\mathbb{N}, +)$ dans $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$
$$w = (u \oplus i(n)) \oplus i(k) = u \oplus i(n + k)$$
et $(u, w) \in \mathbb{O}$
3. Si $(u, v) \in \mathbb{O}$ et $(v, u) \in \mathbb{O}$ il existe $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que
$$v = u \oplus i(n) \quad \text{et} \quad u = v \oplus i(k)$$
par suite
$$u = (u \oplus i(n)) \oplus i(k) = u \oplus i(n + k)$$
par suite $i(n+k) = \pi(0,0) = i(0)$, i étant injective par construction cette égalité entraîne $n+k = 0$, ainsi $n = k = 0$ et $u = v$

On montre maintenant [*1., ..., 4.*]

1. i est strictement croissante. Puisque i est injective par construction il suffit de montrer
$$k \leq n \Rightarrow (i(k), i(n)) \in \mathbb{O} \ .$$
Si $k \leq n$ le lemme [5.2] page 87 permet d'affirmer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = k + p$, par suite, puisque i est un morphisme
$$i(n) = i(k + p) = i(k) \oplus i(p)$$
et $(i(k), i(n)) \in \mathbb{O}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $\pi(x, y) = \pi(a, b) + i(n)$ alors $\pi(x, y) = \pi(a + n, b)$,et la définition de la relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$ donne
$$x + b = a + n + y$$
3. Si $(u, v) \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ alors il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $u = \pi(x, y)$ et $v = \pi(a, b)$ ainsi *2.* permet d'affirmer que
   (a) si $x + b \leq y + a$ alors $(\pi(x, y), \pi(a, b)) \in \mathbb{O}$
   (b) si $a + y \leq x + b$ alors $(\pi(a, b), \pi(x, y)) \in \mathbb{O}$

4. (a) Si $\pi(n,0)<\pi(x,y)$ alors il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que

$$\pi(x,y)=\pi(n,0)\oplus i(p)=i(n+p)$$

on a $p\neq 0$ puisque $\pi(x,y)\neq\pi(n,0)$ par suite, puisque i est strictement croissante $\pi(x,y)=i(n+p)\geq i(n+1)$. Ainsi on obtient

$$]\pi(n,0),\to[\subset[\pi(n+1,0),\to[$$

et

$$]\pi(n,0),\pi(n+1,0)[=\varnothing$$

(b) Si $\pi(0,n+1)<\pi(x,y)$ alors il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\pi(x,y)=\pi(0,n+1)\oplus i(p)=\pi(p,n+1)$$

mais puisque $n+p\geq n+1$ on a $\pi(p,n+1)\geq\pi(0,n)$ ainsi on obtient

$$]\pi(0,n+1),\to[\subset[\pi(0,n),\to[$$

et

$$]\pi(0,n+1),\pi(0,n)[=\varnothing$$

(ii)

On montre

$$\mathbb{O}\cap(i(\mathbb{N})\times\mathbb{Z}(\mathbb{N}))\subset\mathbb{O}\cap(i(\mathbb{N})\times i(\mathbb{N})\tag{8.56}$$

mais si $(i(n),\pi(x,y))\in\mathbb{O}$ alors il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que

$$\pi(x,y)=i(n)\oplus i(p)=i(n+p)$$

par suite $\pi(x,y)\in i(\mathbb{N})$.

1. D'après (8.56) $\{u\in\mathbb{Z}(\mathbb{N})/(i(0),u)\in\mathbb{O}\}\subset i(\mathbb{N})$ et la croissance de i montre que $i(\mathbb{N})\subset\{u\in\mathbb{Z}(\mathbb{N})/(i(0),u)\in\mathbb{O}\}$
2. (a) $(i(\mathbb{N}),\mathbb{O}_r)$ est bien ordonné. Il s'agit de montrer que que tout sous-ensemble non vide A de $i(\mathbb{N})$ possède un minimum. Or, puisque $(\mathbb{N},O)$ est bien ordonné l'ensemble

$$i^{-1}(A)=\{n\in\mathbb{N}/i(n)\in A\}$$

possède un minimum n_0 (pour O), on montre que $i(n_0)$ est un minimum de A pour $\mathbb{O}$.
— d'abord, puisque $n_0\in i^{-1}(A)$ $i(n_0)\in A$
— ensuite, si $u\in A$ il existe $k\in\mathbb{N}$ tel $x=i(k)$, ainsi $k\in i^{-1}(A)$ et $(n_0,k)\in O$, la croissance de i montre alors que $(i(n_0),i(k))\in\mathbb{O}$.

(b) On montre que pour tout $u\in i(\mathbb{N})$

$$\min_{\mathbb{O}}\{x:x\in]u,\to[\}=u+i(1)$$

— il est clair que $u+i(1)\in]u,\to[$ puisque $i(1)\neq\pi(0,0)$
— d'autre part, si $u=i(n)=\pi(n,0)$ alors (i) *4.* montre que

$$]u,\to[=]\pi(n,0),\to[=[\pi(n+1,0),\to[=[u+i(1),\to[\ .$$

(iii)

1. $(i(\mathbb{N}),\mathbb{O}_r)$ est un ensemble d'entiers naturels. Par (ii) il reste à montrer que le seul ensemble héréditaire de $(i(\mathbb{N}),\mathbb{O}_r)$ est $i(\mathbb{N})$. Puisque le minimum de $i(\mathbb{N})$ est $i(0)=\min_{\mathbb{O}}\{u:u\in i(\mathbb{N})\}$ et la succession de $(i(\mathbb{N}),\mathbb{O}_r)$ est $s(u)=u\oplus i(1)$, dire qu'un sous-ensemble A de $i(\mathbb{N})$ est héréditaire c'est dire

(a) $i(0) \in A$

(b) $u \in A \Rightarrow u \oplus i(1) \in A$

et on veut montrer que les conditions (a) et (b) entraînent $A = i(\mathbb{N})$. On pose

$$H = i^{-1}(A) = \{n \in \mathbb{N}/i(n) \in A\},$$

et on montre que H est héréditaire dans $(\mathbb{N}, O)$,

— d'abord puisque $i(0) \in A$ on a $0 \in H$

— ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. Mais si $n \in H$ alors $i(n) \in A$, la condition (b) entraîne $i(n) \oplus i(1) \in A$, ainsi l'égalité $i(n) \oplus i(1) = i(n+1)$ montre que $n+1 \in H$.

Ceci montre que $H = \mathbb{N}$ par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $i(n) \in A$ et

$$i(\mathbb{N}) \subset A \subset i(\mathbb{N}) \ .$$

2. Si $u \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $u = \pi(a, b)$ or

$$\pi(a, b) = \pi(a, 0) \oplus \pi(0, b) = i(a) - i(b) \ .$$

(iv)

On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N}/A \subset [\pi(0, n), \rightarrow [\Rightarrow A \text{ possède un minimum}\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. D'abord $0 \in H$, en effet on a $i(\mathbb{N}) = [\pi(0, 0), \rightarrow [$ et d'après (ii) $i(\mathbb{N})$ est bien ordonné.
2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. Mais si $A \subset [\pi(0, n+1), \rightarrow [$ alors
   — soit $\pi(0, n+1) \in A$ et $\pi(0, n+1)$ est un minorant de A appartenant à A, donc un minimum de A
   — soit $\pi(0, n+1) \notin A$, par suite $A \subset]\pi(0, n+1), \rightarrow [$ et (i) *4.* permet d'affirmer que $A \subset [\pi(0, n), \rightarrow [$, l'assertion $n \in H$ montre alors que A possède un minimum.

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et tout sous-ensemble de $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ minoré par un entier relatif du type $\pi(0, n)$ possède un minimum. Il suffit alors de remarquer que si $\pi(a, b)$ est un minorant de A alors $\pi(0, b)$ est aussi un minorant de A, puisque l'égalité $\pi(a, b) = i(a) \oplus \pi(0, b)$ montre que $(\pi(0, b), \pi(a, b)) \in \mathbb{O}$.

(v)

L'égalité $\mathbb{Z}_+ = i(\mathbb{N})$ a été vu en (ii). Puisque $\mathbb{O}$ est un ordre total on a, pour tout $u \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$,

$$(\pi(0, 0), u) \in \mathbb{O} \quad \text{ou} \quad (u, \pi(0, 0)) \in \mathbb{O}$$

par suite $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$. Si $u \in \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_-$ alors

— puisque $\mathbb{Z}_+ = i(\mathbb{N})$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u = i(n)$

— puisque $(i(n), \pi(0, 0)) \in \mathbb{O}$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\pi(0, 0) = i(n) \oplus i(p)$ ainsi $\pi(0, 0) = i(0) = i(n+p) = i(n) \oplus i(p)$. Mais par construction i est injective, par suite $n+p = 0$ et $u = i(0) = \pi(0, 0)$

On montre que si $u \in \mathbb{Z}_-$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u = \pi(0, n)$. Puisque $u \in \mathbb{Z}_-$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\pi(0, 0) = u \oplus i(n)$, ainsi

$$\pi(0, n) = \pi(0, 0) \oplus \pi(0, n) = (u \oplus i(n)) \oplus \pi(0, n) = u \oplus (\pi(n, 0) \oplus \pi(0, n)) = u$$

Enfin on montre

$$u \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow \pi(0, 1) \centerdot u \in \mathbb{Z}_- \ .$$

1. Si $u \in \mathbb{Z}_+$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u = i(n)$, par définition de la loi $\centerdot$ (voir lemme[8.23] page 270) on a

$$\pi(0,1) \centerdot i(n) = \pi(0,1) \centerdot \pi(n,0) = \pi(0 \times n + 1 \times 0, 1 \times n + 0 \times 0) = \pi(0,n)$$

   et l'égalité $\pi(0,0) = \pi(n,0) \oplus \pi(0,n) = \pi(0,n) \oplus i(n)$ montre que

$$(\pi(0,n), \pi(0,0)) \in \mathbb{O}$$

2. Si $\pi(0,1) \centerdot u \in \mathbb{Z}_-$ et $u = \pi(a,b)$, puisque $\pi(0,1) \centerdot \pi(a,b) = \pi(b,a)$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\pi(0,0) = \pi(b,a) \oplus i(p)$, par suite

$$\pi(a,b) = \pi(a,b) \oplus \pi(0,0) = (\pi(a,b) \oplus \pi(b,a)) \oplus i(p) = i(p)$$

   et $u = \pi(a,b) \in \mathbb{Z}_+$.

(vi)

1. D'abord puisque $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ est un groupe φ_u est injective.
2. Ensuite si $(v, v') \in \mathbb{O}$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v' = v \oplus i(n)$ par suite

$$u \oplus v' = u \oplus (v \oplus i(n)) = (u \oplus v) \oplus i(n)$$

   et $(u \oplus v, u \oplus v') \in \mathbb{O}$.

(vii)

1. D'abord θ_u est injective. En effet, puisque $u \in \mathbb{Z}_+^*$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u = i(k)$ par suite pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ on a

$$\theta_u(\pi(a,b)) = \pi(k,0) \centerdot \pi(a,b) = \pi(ka, kb),$$

   ainsi l'égalité $\theta_u(\pi(a,b)) = \theta_u(\pi(x,y))$ entraîne $\pi(ka,kb) = \pi(kx,ky)$. La définition de la relation d'équivalence montre alors

$$\theta_u(\pi(a,b)) = \theta_u(\pi(x,y)) \Rightarrow k(a+y) = k(x+b) \tag{8.57}$$

   k étant non nul, le lemme [5.3] page 92 montre que l'égalité

$$k(a+y) = k(x+b)$$

   entraîne $a + y = x + b$ ainsi (8.57) montre

$$\theta_u(\pi(a,b)) = \theta_u(\pi(x,y)) \Rightarrow (a+y) = (x+b) \Rightarrow \pi(a,b) = \pi(x,y) \ .$$

2. Si $(v, v') \in \mathbb{O}$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v' = v \oplus i(n)$, Ainsi le lemme [8.23] page 270 montre que

$$i(k) \centerdot v' = i(k) \centerdot (v \oplus i(n)) = i(k) \centerdot v \oplus i(k) \centerdot i(n) = i(k) \centerdot v \oplus i(kn)$$

   et $(i(k) \centerdot v, i(k) \centerdot v') \in \mathbb{O}$

(viii)

1. D'abord on montre que λ_u est injective. Puisque $u \in \mathbb{Z}_-^*$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u = \pi(0,k)$ par suite pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ on a

$$\lambda_u(\pi(a,b)) = \pi(0,k) \centerdot \pi(a,b) = \pi(kb, ka),$$

   ainsi l'égalité $\lambda_u(\pi(a,b)) = \lambda_u(\pi(x,y))$ entraîne $\pi(kb,ka) = \pi(ky,kx)$. La définition de la relation d'équivalence montre alors

$$\lambda_u(\pi(a,b)) = \lambda_u(\pi(x,y)) \Rightarrow k(b+x) = k(y+a) \ .$$

   Ainsi, puisqu $k \neq 0$, on obtient

$$\lambda_u(\pi(a,b)) = \lambda_u(\pi(x,y)) \Rightarrow (a+y) = (x+b) \Rightarrow \pi(a,b) = \pi(x,y) \ .$$

2. Ensuite on montre que λ_u est décroissante :

$$(v, v') \in \mathbb{O} \Rightarrow (\lambda_u(v'), \lambda_u(v)) \in \mathbb{O} \ .$$

Si $(v, v') \in \mathbb{O}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v' = v \oplus i(n)$, par suite $v' \oplus \pi(0, n) = v$ et

$$u \,\centerdot\, v = \pi(0, k) \,\centerdot\, (v' \oplus \pi(0, n)) = (\pi(0, k) \,\centerdot\, v') \oplus (\pi(0, k) \,\centerdot\, \pi(0, n))$$

l'égalité $\pi(0, k) \,\centerdot\, \pi(0, n) = \pi(0 \times 0 + n \times k, 0 \times k + 0 \times n) = i(nk)$ montre alors que

$$\lambda_u(v) = \lambda_u(v') \oplus i(nk)$$

et $(\lambda_u(v'), \lambda_u(v)) \in \mathbb{O}$

(ix)

Un calcul direct montre que pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^2$

$$\pi(x, y) \,\centerdot\, \pi(0, 0) = \pi(0, 0) \ .$$

D'autre part, si $u \neq \pi(0, 0)$ alors (vii) et $(viii)$ montre que l'application $v \mapsto u \,\centerdot\, v$ est injective ainsi, si $u \neq \pi(0, 0)$, l'égalité $u \,\centerdot\, v = \pi(0, 0) = u \,\centerdot\, \pi(0, 0)$ entraîne $v = \pi(0, 0)$.

(x)

Si $u \in \mathbb{Z}_+^*$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u = i(k)$. Soit $v \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$

1. Si $v \in \mathbb{Z}_-$ alors $(v, i(0) \,\centerdot\, u) \in \mathbb{O}$ ainsi $n = 0$ convient
2. si $v \in \mathbb{Z}_+^*$ alors il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $v = i(l)$
   (a) si $l < k$ alors $n = 1$ convient puisque $i(1) \,\centerdot\, i(k) = i(k)$ et par construction i est croissante,
   (b) si $l \geq k$ alors le lemme [5.4] page 98 montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nk \geq l$, pour un tel n le lemme [5.2] page 87 permet d'affirmer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $nk = l + p$, ainsi

$$i(n) \,\centerdot\, i(k) = i(nk) = i(l + p) = i(l) \oplus i(p)$$

   et $(i(l), i(n) \,\centerdot\, i(k)) \in \mathbb{O}$.

■

Les lemmes [8.23] page 270 et [8.24] page 273 permettent d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 8.7 *Pour tout ensemble d'entiers naturels* $(\mathbb{N}, O)$ *il existe un quadruplet* $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus, \,\centerdot\,, \mathbb{O})$ *où*

— $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *est un ensemble*
— $\oplus : \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \mapsto \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *est une loi sur* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$
— $\centerdot : \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \mapsto \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *est une loi sur* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$
— $\mathbb{O} \subset \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *est un ordre* ***total*** *sur* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$.

Ce quadruplet vérifiant

1. ***Propriétés algébriques***
   (a) $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ *est un* ***groupe commutatif*** *appelé groupe additif de* $\mathcal{Z}$
   (b) $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \,\centerdot\,)$ *est un monoïde commutatif appelé monoïde multiplicatif de* $\mathcal{Z}$
   (c) La multiplication $\centerdot$ *est distributive par rapport à l'addition* $\oplus$ *:*

$$(x, y) \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \times \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \text{ et } z \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) \Rightarrow (x \oplus y) \,\centerdot\, z = x \,\centerdot\, z \oplus y \,\centerdot\, z \ .$$

2. ***Propriétés analytiques***
On note 0 *l'élément neutre de* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \oplus)$ *et* 1 *l'élément neutre de* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \centerdot)$*, de plus on note*

$$\mathbb{Z}_+ = [0, \rightarrow [= \{x \in \mathbb{Z}(\mathbb{N}) / \ (0, x) \in \mathbb{O}\}$$

alors

(a) *pour tout* $a \in \mathbb{Z}_+$ *vérifiant* $a \neq 0$ *l'application* π_a *de* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *dans* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *définie par*

$$\pi_a(x) = a \centerdot x$$

est strictement croissante de $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$ *dans* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$

(b) *pour tout* $a \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *l'application* t_a *de* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *dans* $\mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *définie par*

$$t_a(x) = a \oplus x$$

est strictement croissante de $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$ *dans* $(\mathbb{Z}(\mathbb{N}), \mathbb{O})$

(c) *si* $\mathbb{O}_r$ *est la restriction de* $\mathbb{O}$ *à* $\mathbb{Z}_+$ *alors* $(\mathbb{Z}_+, \mathbb{O}_r)$ *est un ensemble d'entiers naturels de successsion*

$$s(x) = x \oplus 1$$

(d) *si* $u \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *il existe* $(x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ *tel que*

$$u = x - y$$

(e) *pour tout* $x \in \mathbb{Z}_+$ *vérifiant* $x \neq 0$ *et tout* $y \in \mathbb{Z}(\mathbb{N})$ *il existe* $n \in \mathbb{Z}_+$ *tel que* ([4])

$$n \centerdot x \geq y$$

8.4.3 *Définition des entiers relatifs et isomorphismes entre les ensembles d'entiers relatifs*

Le théorème [8.7] page 279 montre qu'il existe un objet vérifiant la définition suivante.

Définition 8.25 *On appelle* ***ensemble d'entiers relatifs*** *un quadruplet* $(\mathbb{Z}, +, \ \centerdot\ , O)$ *où*

— $\mathbb{Z}$ *est un ensemble*
— $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ *est une loi sur* $\mathbb{Z}$
— $\centerdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ *est une loi sur* $\mathbb{Z}$
— $O \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *est un ordre* ***total*** *sur* $\mathbb{Z}$.

Ce quadruplet vérifiant

1. ***Propriétés algébriques***

(a) $(\mathbb{Z}, +)$ *est un* ***groupe commutatif*** *appelé groupe additif de* $\mathbb{Z}$

(b) $(\mathbb{Z}, \ \centerdot)$ *est un monoïde commutatif appelé monoïde multiplicatif de* $\mathbb{Z}$

(c) *La multiplication* $\centerdot$ *est distributive par rapport à l'addition* $+$ *:*

$$(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ et } z \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x + y) \centerdot z = x \centerdot z + y \centerdot z \ .$$

2. ***Propriétés analytiques***
On note 0 *l'élément neutre de* $(\mathbb{Z}, +)$ *et* 1 *l'élément neutre de* $(\mathbb{Z}, \ \centerdot\ )$*, de plus on note*

$$\mathbb{Z}_+ = [0, \rightarrow [= \{x \in \mathbb{Z} / \ (0, x) \in O\}$$

alors

4. c'est à dire $(y, n \centerdot x) \in \mathbb{O}$

(a) *pour tout* $a \in \mathbb{Z}_+$ *vérifiant* $a > 0$ *l'application* π_a *de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Z}$ *définie par*

$$\pi_a(x) = a \centerdot x$$

est strictement croissante de $(\mathbb{Z}, O)$ *dans* $(\mathbb{Z}, O)$

(b) *pour tout* $a \in \mathbb{Z}$ *l'application* t_a *de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Z}$ *définie par*

$$t_a(x) = a + x$$

est strictement croissante de $(\mathbb{Z}, O)$ *dans* $(\mathbb{Z}, O)$

(c) *si* O_r *est la restriction de* O *à* $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ *alors* $(\mathbb{Z}_+, O_r)$ *est un ensemble d'entiers naturels de successsion*

$$s(x) = x + 1$$

Le théorème suivant montre que deux ensembles d'entiers relatifs sont isomorphes.

Théorème 8.8 *On note* $(\mathbb{Z}, +, \centerdot, O)$ *et* $(\mathbb{Z}', +', *, O')$ *deux ensembles d'entiers relatifs.*

(i) Il existe une unique bijection g *de* $\mathbb{Z}_+$ *dans* $\mathbb{Z}'_+$ *qui vérifie*

1. g *est strictement croissante de* $(\mathbb{Z}_+, O)$ *dans* $(\mathbb{Z}'_+, O')$
2. *pour tout* $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$
$$g(n + m) = g(n) +' g(m)$$
3. *pour tout* $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$
$$g(n \centerdot m) = g(n) * g(m)$$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ *il existe* $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ *tel que*

$$x = m - n\ .$$

(iii) Si $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ *et* $(p, q) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$*, pour que* $(m - n, p - q) \in O$ *il faut et il suffit que* $(m + q, n + p) \in O$*, en d'autres termes*

$$m - n \leq p - q \Leftrightarrow m + q \leq n + p\ .$$

(iv) Il existe une bijection $\hat{g}$ *de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Z}'$ *qui vérifie*

1. $\hat{g}$ *est strictement croissante de* $(\mathbb{Z}, O)$ *dans* $(\mathbb{Z}', O')$
2. *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$$\hat{g}(x + y) = \hat{g}(x) +' \hat{g}(y)$$
3. *pour tout* $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$$\hat{g}(x \centerdot y) = \hat{g}(x) * \hat{g}(y)$$

(v) $\mathbb{Z}$ *est archimédien : pour tout* $(x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$ *tel que* $x \neq 0$ *il existe* $n \in \mathbb{Z}_+$ *tel que*

$$n \centerdot x \geq y$$

(vi) Si $b \in \mathbb{Z}_+$ *et* $b \neq 0$ *l'application* φ_b *de* $\mathbb{Z}_+ \times [0, b[$ *dans* $\mathbb{Z}_+$ *définie par*

$$\varphi_b(q, r) = b \centerdot q + r$$

est bijective.

(vii) Si $b \in \mathbb{Z}_+$ *et* $b \neq 0$ *l'application* θ_b *de* $\mathbb{Z} \times [0, b[$ *dans* $\mathbb{Z}$ *définie par*

$$\theta_b(q, r) = b \centerdot q + r$$

est bijective.

(viii) Si $a \in \mathbb{Z}$ et $a \neq 0$ l'équation

$$a \centerdot x = 0$$

n'a qu'une solution $x = 0$

(ix) Si $a \in \mathbb{Z}$ et $a \notin \{-1, +1\}$ les équations

$$a \centerdot x = 1 \quad \text{et} \quad a \centerdot x = -1$$

n'ont pas de solution.

(x) $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Preuve On note 0 l'élément neutre de $(\mathbb{Z}, +)$, $0'$ l'élément neutre de $(\mathbb{Z}', +')$. Si $x \in \mathbb{Z}$ on note $-x$ l'inverse de x dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ et si $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ on note

$$x - y = x + (-y) \ .$$

Enfin 1 l'élément neutre de $(\mathbb{Z}, \centerdot)$ et $1'$ l'élément neutre de $(\mathbb{Z}', *)$.

(i)

Preuve de l'existence

Puisque $(\mathbb{Z}_+, O)$ est un ensemble d'entiers naturels, on peut appliquer le théorème d'induction (théorème [4.3] page 80) en prenant $X = \mathbb{Z}'_+$ et $f = s' : \mathbb{Z}'_+ \mapsto \mathbb{Z}'_+$ définie par $s'(n') = n' +' 1'$. Ce théorème permet d'affirmer que si s est la succession de $(\mathbb{Z}_+, O)$ il existe une unique application g de $\mathbb{Z}_+$ dans $\mathbb{Z}'_+$ vérifiant

$$g(0) = 0' \quad \text{et} \quad g(s(n)) = g(n) +' 1' \ .$$

Or, par définition d'un ensemble d'entiers relatifs $s(n) = n + 1$ par suite il existe une unique application g de $\mathbb{Z}_+$ dans $\mathbb{Z}'_+$ vérifiant

$$g(0) = 0' \quad \text{et} \quad g(n+1) = g(n) +' 1' \ . \tag{8.58}$$

On montre que cette application vérifie les propriétés énoncées en (i).

1. g est une bijection strictement croissante. Il suffit de montrer que g est strictement croissante et $\mathrm{im}(g) = \mathbb{Z}'_+$.
   (a) g est strictement croissante. En effet, par définition d'un ensemble d'entiers relatifs $s' : n' \mapsto n' +' 1'$ est la succession de $(\mathbb{Z}'_+, O')$, ainsi (8.58) montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$ on a $g(n+1) \in]g(n), \rightarrow [$
   (b) $\mathrm{im}(g) = \mathbb{Z}'_+$, puisque $(\mathbb{Z}'_+, O')$ est un ensemble d'entiers naturels il suffit de montrer que $\mathrm{im}(g)$ est héréditaire.
      i. D'abord $0' \in \mathrm{im}(g)$ puisque $g(0) = 0'$
      ii. Ensuite on montre $[n' \in \mathrm{im}(g) \Rightarrow s'(n') \in \mathrm{im}(g)]$. Supposons que $n' \in \mathrm{im}(g)$, alors il existe $p \in \mathbb{Z}_+$ tel que $n' = g(p)$ ainsi (8.58) montre que

$$g(p+1) = g(p) +' 1' = n' +' 1' = s'(n')$$

   Ainsi $\mathrm{im}(g) = \mathbb{Z}'_+$ et g est surjective et comme application strictement croissante elle est injective.
2. On montre que pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$

$$g(m+n) = g(m) +' g(n) \ .$$

   Puisque par hypothèse $(\mathbb{Z}_+, O)$ est un ensemble d'entiers naturels de succession $s(n) = n + 1$ il suffit de montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}_+$ l'ensemble H_m défini par

$$H_m = \{n \in \mathbb{Z}_+ / g(m+n) = g(m) +' g(n)\}$$

   vérifie

(a) $0 \in H_m$

(b) $[n \in H_m \Rightarrow n+1 \in H_m]$.

(a) Puisque $g(0) = 0'$ l'assertion $0 \in H_m$ est claire,

(b) Si $n \in H_m$ alors $g(m+n) = g(m) +' g(n)$ ainsi (8.58) permet d'affirmer que

$$g(m+n+1) = g(m+n) +' 1' = g(m) +' (g(n) +' 1') = g(m) +' g(n+1)$$

ainsi $n+1 \in H_m$.

3. On montre que pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$

$$g(m \centerdot n) = g(m) * g(n) \ .$$

Puisque par hypothèse $(\mathbb{Z}_+, O)$ est un ensemble d'entiers naturels de succession $s(n) = n+1$ il suffit de montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}_+$ l'ensemble H défini par

$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / g(m \centerdot n) = g(m) * g(n)\}$$

vérifie

(a) $0 \in H$

(b) $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$.

(a) Pour montrer que $0 \in H$ on montre que pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on a

$$m \centerdot 0 = 0. \tag{8.59}$$

En effet, par distrubitivité

$$m \centerdot m = m(0+m) = m \centerdot 0 + m \centerdot m$$

ainsi si $-m \centerdot m$ désigne l'inverse de $m \centerdot m$ dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ on obtient, en utilisant l'associativité

$$m \centerdot 0 = m \centerdot 0 + [m \centerdot m + (-m \centerdot m)] = m \centerdot m + (-m \centerdot m) = 0$$

de même pour tout $m' \in \mathbb{Z}'$ on a $m' * 0' = 0'$. Ceci permet de montrer que $0 \in H$ puisque

$$g(m \centerdot 0) = g(0) = 0' = g(m) * 0' = g(m) * g(0) \ .$$

(b) On montre maintenant $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. En effet, si $n \in H$ alors
— par distributivité

$$g(m \centerdot (n+1)) = g((m \centerdot n) + m)$$

— d'après *(i) 2.*

$$g((m \centerdot n) + m) = g(m \centerdot n) +' g(m)$$

— puisque $n \in H$

$$g(m \centerdot n) = g(m) * g(n)$$

ainsi la distributivité sur $\mathbb{Z}'$ et (8.58) permettent d'affirmer que

$$g(m \centerdot (n+1)) = g(m) * g(n) +' g(m) = g(m) * (g(n) +' 1') = g(m) * g(n+1)$$

Par suite $H = \mathbb{Z}_+$ et

$$(m,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \Rightarrow g(m \centerdot n) = g(m) * g(n) \ .$$

Preuve de l'unicité

Le théorème [5.1] page 90 permet d'affirmer qu'il n'existe qu'une bijection strictement croissante de $(\mathbb{Z}_+, O)$ dans $(\mathbb{Z}'_+, O')$

(ii)

Remarquons que

$$\{a \in \mathbb{Z}/a > 0\} = \{a \in \mathbb{Z}/-a < 0\} \tag{8.60}$$

en effet, si $a > 0$, puisque l'application $x \mapsto (-a) + x$ est strictement croissante (par définition d'un ensemble d'entiers relatifs) on a

$$(-a) + 0 < (-a) + a$$

ainsi $-a < 0$ inversement, si $-a < 0$ alors puisque l'application $x \mapsto a + x$ est strictement croissante on obtient

$$a + (-a) < a + 0$$

ainsi $a > 0$. On obtient de même

$$\{a \in \mathbb{Z}/a < 0\} = \{a \in \mathbb{Z}/-a > 0\} \tag{8.61}$$

Considérons les applications $m : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_+$ et $n : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_+$ définies par

$$m(a) = \max\{a, 0\} = \begin{cases} 0 & si \quad a \leq 0 \\ a & si \quad a > 0 \end{cases}$$

et

$$n(a) = \max\{-a, 0\} = \begin{cases} -a & si \quad a < 0 \\ 0 & si \quad a \geq 0 \end{cases}$$

alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$ on a

$$a = m(a) - n(a)$$

(iii)

Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ et $(p, q) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$

1. On montre $(m-n, p-q) \in O \Rightarrow (m+q, p+n) \in O$. Par définition d'un ensemble d'entiers relatifs, l'application $x \mapsto x + (n + q)$ est strictement croissante, par suite

$$(m-n, p-q) \in O \Rightarrow (m-n+(n+q), p-q+(n+q)) \in O \Rightarrow (m+q, p+n) \in O$$

2. On montre $(m+q, p+n) \in O \Rightarrow (m-n, p-q) \in O$. Par définition d'un ensemble d'entiers relatifs, l'application $x \mapsto x - (n + q)$ est strictement croissante, par suite

$$(m+q, p+n) \in O \Rightarrow (m+q-(n+q), p+n-(n+q)) \in O \Rightarrow (m-n, p-q) \in O$$

(iv)

On utilise les notations suivantes :

— pour tout $n' \in \mathbb{Z}'$ $\ominus n'$ sera l'inverse de n' dans le groupe $(\mathbb{Z}', +')$

— pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on pose

$$\Delta(x) = \{(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+/x = m - n\}$$

— enfin g désigne l'unique bijection strictement croissante de $(\mathbb{Z}_+, O)$ dans $(\mathbb{Z}'_+, O')$ construite en (i).

On considère la relation $\hat{g}$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}'$ définie par

$$\hat{g} = \{(x, u) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'/\exists\ (m, n) \in \Delta(x) : u = g(m) \ominus g(n)\}$$

et on montre que $\hat{g}$ est une application.

1. D'abord on montre dom$(\hat{g}) = \mathbb{Z}$. D'après (ii) pour tout $x \in \mathbb{Z}$ il existe $(m,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ tel que $x = m - n$ par suite
$$(x, g(m) \ominus g(n)) \in \hat{g} \ .$$
2. ensuite on montre que $\hat{g}$ est une fonction :
$$[(x,u) \in \hat{g} \quad \text{et} \quad (x,v) \in \hat{g}] \Rightarrow u = v \ .$$
Mais si $(x,u) \in \hat{g}$ et $(x,v) \in \hat{g}$ il existe $(m,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ et $(r,s) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ qui vérifient
$$x = m - n = r - s \quad \text{et} \quad u = g(m) \ominus g(n),\ v = g(r) \ominus g(s)$$
l'égalité $m + s = n + r$ entraîne, d'après (i)
$$g(m+s) = g(m) +' g(s) = g(n+r) = g(n) +' g(r)$$
en particulier $g(m) \ominus g(n) = g(r) \ominus g(s)$ et $u = v$.

On montre que cette application vérifie les propriétés énoncées en (iv).

1. $\hat{g}$ est une bijection strictement croissante.
   (a) D'abord $\hat{g}$ est injective. En effet si $\hat{g}(x) = \hat{g}(y)$ il existe $(m,n) \in \Delta(x)$ et $(p,q) \in \Delta(y)$ tels que
   $$\hat{g}(x) = g(m) \ominus g(n) = g(p) \ominus g(q) = \hat{g}(y)$$
   par suite
   $$g(m) +' g(q) = g(p) +' g(n)$$
   ainsi les égalités $g(m+q) = g(m) +' g(q)$ et $g(p+n) = g(p) +' g(n)$ (qui sont établies en (i)) montre que
   $$g(m+q) = g(p+n)$$
   l'injectivité de g entraîne $m + q = p + n$ par suite
   $$x = m - n = p - q = y \ .$$
   (b) $\hat{g}$ est croissante. Il suffit de montrer que si $(m,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ et $(p,q) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ vérifient $(m-n, p-q) \in O$ alors
   $$(g(m) \ominus g(n), g(p) \ominus g(q)) \in O' \ .$$
   mais d'après (iii) on a
   $$(m-n, p-q) \in O \Leftrightarrow (m+q, p+n) \in O$$
   g étant croissante on obtient $(g(m+q), g(p+n)) \in O'$, ainsi
   $$(g(m) +' g(q), g(p) +' g(n)) \in O'$$
   l'application $x' \mapsto x' \ominus (g(q) +' g(n))$ étant strictement croissante sur $(\mathbb{Z}', O')$ on obtient
   $$(g(m) +' g(q) \ominus (g(q) +' g(n)), g(p) +' g(n) \ominus (g(q) +' g(n))) \in O'$$
   c'est à dire, puisque $g(m) +' g(q) \ominus (g(q) +' g(n) = g(m) \ominus g(n)$ et $g(p) +' g(n) \ominus (g(q) +' g(n)) = g(p) \ominus g(q)$
   $$(g(m) \ominus g(n), g(p) \ominus g(q)) \in O'$$
   (c) $\hat{g}$ est surjective. En effet, si $x' \in \mathbb{Z}'$ il existe d'après (ii) un couple $(m', n') \in \mathbb{Z}'_+ \times \mathbb{Z}'_+$ vérifiant $x' = m' \ominus n'$ on a alors
   $$\hat{g}(g^{-1}(m') - g^{-1}(n')) = m' \ominus n' = x' \ .$$

2. On montre $\forall\ (x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\quad \hat{g}(x+y)=\hat{g}(x)+'\hat{g}(y)$. Si $(m,n)\in\Delta(x)$ et $(p,q)\in\Delta(y)$ l'égalité
$$m+p-(n+q)=m-n+p-q=x+y$$
montre que $(m+p,n+q)\in\Delta(x+y)$ ainsi, puique $g(m+p)=g(m)+'g(p)$ et $g(n+q)=g(n)+'g(q)$
$$\hat{g}(x+y)=g(m+p)\ominus g(n+q)=(g(m)\ominus g(n))+'(g(p)\ominus g(q))=\hat{g}(x)+'\hat{g}(y)\ .$$
3. On montre $\forall\ (x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\quad \hat{g}(x.y)=\hat{g}(x)*\hat{g}(y)$. Si $(m,n)\in\Delta(x)$ et $(p,q)\in\Delta(y)$ l'égalité
$$(m-n)\centerdot(p-q)=m\centerdot p+n\centerdot q-(n\centerdot p+m\centerdot q)$$
montre que $(m\centerdot p+n\centerdot q,n\centerdot p+m\centerdot q)\in\Delta(x.y)$ ainsi,
$$\hat{g}(x\centerdot y)=g(m\centerdot p+n\centerdot q)\ominus g(n\centerdot p+m\centerdot q)$$
puique pour tout $(m,p)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ $g(m\centerdot p)=g(m)*g(p)$ on obtient, en utilisant la distributivité,
$$\hat{g}(x\centerdot y)=g(m)*(g(p)\ominus g(q))\ominus g(n)*(g(p)-g(q))=\hat{g}(x)*\hat{g}(y)\ .$$

(v)

— Si $y\leq 0$ alors $n=0$ convient puisque d'après (8.59) on a $0\centerdot x=0$.
— Si $y>0$ alors puisque $x\neq 0$ alors $x\geq 1$ (puisque 1 est le successeur de 0) ainsi la croissance stricte de $a\mapsto y\centerdot a$ montre que
$$y\centerdot x\geq y\centerdot 1\ .$$
ainsi $n=y$ convient .

(vi)

1. D'abord on montre que φ_b est surjective. Puisque $(\mathbb{Z}_+,O)$ est un ensemble d'entiers naturels de succession $s(n)=n+1$, il suffit, pour montrer que $\mathrm{im}(\varphi_b)=\mathbb{Z}_+$, de vérifier
   (a) $0\in\mathrm{im}(\varphi_b)$
   (b) $[n\in\mathrm{im}(\varphi_b)\Rightarrow n+1\in\mathrm{im}(\varphi_b)]$
   (a) D'abord $0\in\mathrm{im}(\varphi_b)$ puisque d'après (8.59) page 283 on a
   $$\varphi_b(0,0)=b\centerdot 0+0=0$$
   (b) On montre $[n\in\mathrm{im}(\varphi_b)\Rightarrow n+1\in\mathrm{im}(\varphi_b)]$. Si $n\in\mathrm{im}(\varphi_b)$ alors il existe $(q,r)\in\mathbb{Z}_+\times[0,b[$ tel que $n=b\centerdot q+r$
   — si $r+1=b$ alors $n+1=b\centerdot q+r+1=b\centerdot(q+1)=\varphi_b(q+1,0)$
   — si $r+1<b$ alors $n+1=\varphi_b(q,r+1)$
2. Ensuite on montre que φ_b est injective. On montre d'abord
$$q\neq q'\Rightarrow\forall\ (r,r')\in[0,b[\times[0,b[\quad bq+r\neq bq'+r' \tag{8.62}$$
En effet,
— si $q'>q$ alors $q'\geq q+1$ puisque $q+1$ est le successeur de q, Ainsi la croissance de $x\mapsto b\centerdot x$ montre que $b\centerdot q'\geq b\centerdot q+b$, et la croissance stricte de $x\mapsto b\centerdot q+x$ montre que pour tout $r\in[0,b[$ $b\centerdot q+b>b\centerdot q+r$. Ainsi on obtient
$$q'>q\Rightarrow\forall\ (r,r')\in[0,b[\times[0,b[\quad bq'+r'>bq+r$$
— si $q>q'$ le même argument montre
$$q>q'\Rightarrow\forall\ (r,r')\in[0,b[\times[0,b[\quad bq+r>bq'+r'$$

On montre ensuite

$$r \neq r' \Rightarrow b \centerdot q + r \neq b \centerdot q + r' \tag{8.63}$$

mais cela est une conséquence de la croissance stricte de l'application $x \mapsto b \centerdot q + x$. Ceci permet de montrer

$$(q, r) \neq (q', r') \Rightarrow \varphi_b(q, r) \neq \varphi_b(q', r') \ .$$

En effet l'assertion $(q, r) \neq (q', r')$ est équivalente à l'assertion

$$[q \neq q'] \quad \text{ou} \quad [q = q' \quad \text{et} \quad r \neq r']$$

— si $q \neq q'$ (8.62) montre que $\varphi_b(q, r) \neq \varphi_b(q', r')$
— si $q = q'$ et $r \neq r'$ (8.63) montre que $\varphi_b(q, r) \neq \varphi_b(q', r')$

(vii)

1. D'abord on montre que θ est surjective.
   Si $n \in \mathbb{Z}_+$ d'après (vi) il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}_+ \times [0, b[$ tel que

   $$n = bq + r = \theta(q, r)$$

   par suite $\mathbb{Z}_+ \subset \mathrm{im}(\theta)$
   Si $n < 0$ alors d'après (8.60) page 284 on a $-n > 0$ par suite d'après (vi) il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}_+ \times [0, b[$ tel que

   $$-n = bq + r$$

   cela entraîne
   — si $r = 0$ alors $n = \theta(-q, 0)$.
   — si $r \neq 0$ alors $n = b(-q - 1) + b - r$ et puisque $0 < b - r < b$ on a $n = \theta(-q - 1, b - r)$
   Ainsi $\mathrm{im}(\theta) = \mathbb{Z}$.
2. ensuite on montre que θ est injective.
   Si $(q, r) \neq (q', r')$ alors
   — si $q > q'$ alors $bq + r \geq bq' + b + r > bq' + r'$
   — si $q' > q$ alors $bq' + r' \geq bq + b + r' > bq + r$
   — si $q = q'$ et $r > r'$ alors $bq + r > bq' + r'$
   — si $q = q'$ et $r' > r$ alors $bq' + r' > bq + r$

(viii)

1. Si $a > 0$ la stricte croissance de $x \mapsto a \centerdot x$ montre l'injectivité de cette application par suite, puisque d'après (8.59) page 283 $a \centerdot 0 = 0$,

   $$a \centerdot x = 0 = a \centerdot 0 \Rightarrow x = 0$$

2. Lorsque $a < 0$ la conclusion provient de l'égalité

   $$-\, a \centerdot x = (-a) \centerdot x = a \centerdot (-x) \ . \tag{8.64}$$

   En effet, par distributivité on obtient

   $$a \centerdot x + (-a) \centerdot x = (a + (-a)) \centerdot x = 0 \centerdot x = 0 \ .$$

   et

   $$a \centerdot x + a \centerdot (-x) = a \centerdot (x + (-x)) = a \centerdot 0 = 0$$

   D'autre part puisque d'après (8.61) page 284 on a $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$, on obtient

   $$a \centerdot x = 0 \Rightarrow (-a) \centerdot x = 0 \Rightarrow x = 0 \ .$$

(ix)

1. Si $a \geq 0$ alors $a = 0$ ou $a > 1$ puisque $a \neq 1$.
   (a) si $a = 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a $0 \centerdot x = 0$, par suite $0 \centerdot x \neq 1$ et $0 \centerdot x \neq -1$
   (b) si $a > 1$ alors la croissance stricte de $x \mapsto a \centerdot x$ montre que
      — si $x \leq 0$ alors $a \centerdot x \leq a \centerdot 0 < 1$
      — si $x > 0$ alors $x \geq 1$ par suite $a \centerdot x > a \centerdot 1 > 1$

   .

   Ainsi pour tout $a \geq 0$ l'équation $a \centerdot x = 1$ n'a pas de solution. Puisque l'équation $a \centerdot x = -1$ est, d'après (8.64) équivalente à l'équation

   $$a \centerdot (-x) = 1$$

   cette équation n'a pas plus de solution.
2. si $a < 0$ alors l'équation $a \centerdot x = 1$ est équivalente à l'équation $(-a) \centerdot x = -1$ et puisque $-a > 0$ cette équation n'a pas de solution, et l'équation

   $$a \centerdot x = -1$$

   est équivalente à l' équation $(-a) \centerdot x = 1$

(x)

Puisque $(\mathbb{Z}_+ \ , \ O \cap (\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+))$ est un ensemble d'entiers naturels, $\mathbb{Z}_+$ est dénombrable par définition (définition [6.3] page 151) ainsi le théorème [6.4] page 151 montre que $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ est dénombrable. D'après (ii) l'application δ de $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ dans $\mathbb{Z}$ définie part

$$\delta(m, n) = m - n$$

est surjective. Le théorème [6.4] permet alors d'affirmer que $\mathbb{Z}$ est fini ou dénombrable, mais $\mathbb{Z}$ n'est pas fini puisque $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}$. ■

L'existence d'ensembles d'entiers relatifs permet d'énoncer certaines propriétés relatives à la structure de groupe.

8.5 *Sous-groupes, sous-groupes normaux et groupes quotients.*

8.5.1 *Sous-groupes*

Les sous-groupes d'un groupe sont définis par [8.23] page 264 . Le but de ce paragraphe est de décrire un peu les groupes engendrés par des ensembles, le lemme suivant permet de les définir.

Lemme 8.25 *On note $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e où la loi $*$ est notée multiplicativement, $* : (x, y) \mapsto xy$, et $\mathcal{G}$ une famille non vide de sous-groupes de $(G, *)$.*
(i) L'ensemble

$$N = \bigcap_{H \in \mathcal{G}} H$$

est un sous-groupe de G
(ii) Si A est un sous-ensemble de G il existe un unique sous-groupe H de G vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. *$A \subset H$*
2. *Si X est un sous-groupe de G vérifiant $A \subset X$ alors*

   $$H \subset X.$$

(iii) Si $\mathcal{G}$ vérifie la propriété suivante : pour tout $(H,K) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ il existe $L \in \mathcal{G}$ tel que

$$H \cup K \subset L$$

alors

$$U = \bigcup_{H \in \mathcal{G}} H$$

est un sous-groupe de G

Preuve

(i)

Le lemme [8.7] page 219 permet d'affirmer que N est un sous-monoïde de G, il suffit donc d'établir

$$x \in N \Rightarrow x^{-1} \in N \ .$$

Or, si $x \in N$ alors pour tout $H \in \mathcal{G}$ on a $x \in H$, ainsi pour tout $H \in \mathcal{G}$ on a $x^{-1} \in H$ par suite $x^{-1} \in N$

(ii)

Preuve de l'existence

Si $\mathcal{G}(G)$ est l'ensemble des sous-groupes de G on note

$$\Gamma(A) = \{H \in \mathcal{G}(G) / A \subset H\}$$

alors $\Gamma(A)$ est une famille de groupes et $G \in \Gamma(A)$, on montre que le groupe

$$N = \bigcap_{H \in \Gamma(A)} H$$

vérifie *1.* et *2.*,

1. par définition pour tout $H \in \Gamma(A)$ on a $A \subset H$ par suite $A \subset N$,
2. Si X est un sous-groupe de G vérifiant $A \subset X$ alors $X \in \Gamma(A)$ par suite $N \subset X$.

Preuve de l'unicité

Si les sous-groupes N et N' vérifient *1.* et *2.* alors
— puisque $A \subset N'$ et N vérifie *2.* on a $N \subset N'$
— puisque $A \subset N$ et N' vérifie *2.* on a $N' \subset N$
ainsi $N = N'$.

(iii)

1. $e \in U$ puisque pour tout $H \in \mathcal{G}$ on a $e \in H$
2. si $x \in U$ il existe $H \in \mathcal{G}$ tel que $x \in H$, ainsi $x^{-1} \in H$ et $x^{-1} \in U$.
3. si $(x,y) \in U \times U$, il existe $H \in \mathcal{G}$ et $K \in \mathcal{G}$ tels que $x \in H$ et $y \in K$, si $L \in \mathcal{G}$ vérifie $H \cup K \subset L$ on a $xy \in L$ par suite $xy \in U$.

■

Si G est un groupe et $A \subset G$ un sous-ensemble de G, le groupe engendré par A est le plus petit (pour l'inclusion) sous-groupe de G contenant A

Définition 8.26 *On note $(G,*)$ un groupe et A un sous-ensemble de G, on appelle **sous-groupe engendré** par A le sous-groupe $\mathbf{gr}(A)$ de G vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. $A \subset \mathbf{gr}(A)$

2. Si X est un sous-groupe de G vérifiant $A \subset X$ alors

$$\mathbf{gr}(A) \subset X.$$

Si $(G, *)$ est un groupe et $A \subset G$ le lemme qui suit fixe le formalisme permettant de décrire le groupe $\mathbf{gr}(A)$ engendré par A. On utilise dans ce lemme les résultats et notations des lemmes [8.1] page 192 et [8.3] page 196

Lemme 8.26 *$(\mathbb{Z}, +, \centerdot, O)$ désigne un ensemble d'entiers relatifs et on notera $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z}/n \geq 0\} = \mathbb{Z}_+$. On note $(G, *)$ un groupe où la loi $*$ est notée multiplicativement $* : (x, y) \mapsto xy$ et $A \subset G$ un sous-ensemble de G*

Partie 1

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in G$

$$(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$$

*(ii) Il existe une unique application $x \mapsto \kappa_G(x)$ de G dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}, G)$ qui vérifie, Pour tout $x \in G$, les propriétés **a**, **b**, **c**, **d**, **e** et **f** suivantes :*

a

$$\forall\ \nu \in \mathbb{N} \quad \kappa_G(x)(\nu) = x^\nu$$

b *si $\mathbb{Z}_- = \{n \in \mathbb{Z}/n \leq 0\}$*

$$\forall\ \nu \in \mathbb{Z}_- \quad \kappa_G(x)(\nu) = (x^{-1})^{-\nu}$$

c *Pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*

$$\kappa_G(x)(\mu + \nu) = \kappa_G(\mu)\kappa_G(\nu)$$

d *Si $(H, \centerdot)$ est un groupe et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G, H)$ est un morphisme de groupes alors*

$$\forall\ (\nu, x) \in \mathbb{Z} \times G \qquad \kappa_H(f(x))(\nu) = f(\kappa_G(x)(\nu))$$

e *Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$*

$$\kappa_G(x)(-\nu) = \kappa_G(x^{-1})(\nu) = (\kappa_G(x)(\nu))^{-1}$$

f *Si H est un sous-groupe de G et $x \in H$ alors :*

$$\forall\ \nu \in \mathbb{Z} \quad \text{on a} \quad \kappa_G(x)(\nu) \in H$$

on note $\kappa_G(x)(\nu) = x^\nu$ on a donc

1. *Pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*

$$x^{\mu+\nu} = x^\mu x^\nu \quad \text{et} \quad x^{-\nu} = (x^{-1})^\nu$$

2. *Si $(H, \centerdot)$ est un groupe et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G, H)$ est un morphisme de groupes alors*

$$\forall\ (\nu, x) \in \mathbb{Z} \times G \qquad (f(x))^\nu = f(x^\nu)$$

Partie 2

(iii) Pour tout sous-ensemble A de G il existe une unique application

$$\mathbf{p}_A : (\nu, x) \mapsto \mathbf{p}_A(\nu, x)$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. *pour tout $(\nu, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$*

$$\mathbf{p}_A(\nu, x)(0) = x_0^{\nu_0}$$

2. pour tout $(\nu, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{p}_A(\nu, x)(n+1) = \mathbf{p}_A(\nu, x)(n)\ x_{n+1}^{\nu_{n+1}}$$

(iv) Si $\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ *vérifie : pour tout* $k > p$ $\nu_k = 0$ *alors pour tout* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $n \geq p$

$$\mathbf{p}_A(\nu, x)(n) = \mathbf{p}_A(\nu, x)(p).$$

(v) Si $(\nu, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $(\mu, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *vérifient*

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n \quad \mu_k = \nu_k \text{ et } x_k = y_k$$

alors

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n \quad \mathbf{p}_A(\mu, x)(k) = \mathbf{p}_A(\nu, y)(k).$$

(vi) La relation $p_{f,A}$ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$ *dans* G *définie par*

$$p_{f,A} = \{((\nu, x, n), g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N} \times G / g = \mathbf{p}_A(\nu, x)(n)\}$$

est une application et $\mathrm{im}(p_{f,A})$ *est un sous-groupe de* G*.*

(vii) $\mathrm{im}(p_{f,A})$ *est le sous-groupe engendré par* A *:*

$$\mathrm{im}(p_{f,A}) = \mathbf{gr}(A)$$

(viii) Si $A = \{x\}$ *alors*

$$\mathbf{gr}(A) = \mathbf{gr}(x) = \mathrm{im}(\kappa_G(x)) = \{g \in G / \exists\ \nu \in \mathbb{Z} : g = x^\nu\}$$

Preuve

Partie 1

(i)

Remarquons d'abord que puisque par définition d'un ensemble d'entiers relatifs $(\mathbb{N}, O) = (\mathbb{Z}_+, O)$ est un ensemble d'entiers naturels les applications de $\mathbb{N}$ dans G

$$n \mapsto x^n \quad \text{et} \quad n \mapsto (x^{-1})^n$$

sont définies par le lemme [8.1] page 192, d'autre part, puisque x et x^{-1} commutent le même lemme permet d'affirmer

$$x^n (x^{-1})^n = (x x^{-1})^n = e^n = e = (x^{-1})^n x^n\ .$$

(ii)

Il s'agit de prolonger l'application $n \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$

Preuve de l'existence

Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ on considère l'ensemble

$$\Delta(\nu) = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \nu = m - n\}\ ,$$

et l'application κ_G de G dans $\mathfrak{P}(\mathbb{Z} \times G)$ définie par

$$\kappa_G(x) = \{(\nu, y) \in \mathbb{Z} \times G / \exists\ (m, n) \in \Delta(\nu) : y = x^m (x^{-1})^n\}$$

et on montre que pour tout $x \in G$ on a $\kappa_G(x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}, G)$

1. D'abord on montre que pour tout $x \in G$ on a $\mathrm{dom}(\kappa_G(x)) = \mathbb{Z}$. d'après le théorème [8.8] page 281, si $\nu \in \mathbb{Z}$ alors $\Delta(\nu) \neq \varnothing$ ainsi, si $(m, n) \in \Delta(\nu)$ alors

$$(\nu, x^m (x^{-1})^n) \in \kappa_G(x)$$

et $\nu \in \mathrm{dom}(\kappa_G(x))$

2. Ensuite on montre que $\kappa_G(x)$ est une fonction :

$$(\nu, y) \in \kappa_G(x) \quad \text{et} \quad (\nu, y') \in \kappa_G(x) \Rightarrow y = y'$$

si $(\nu, y) \in \kappa_G(x)$ et $(\nu, y') \in \kappa_G(x)$ alors il existe des couples $(m, n) \in \Delta(\nu)$ et $(p, q) \in \Delta(\nu)$ tel que

$$y = x^m (x^{-1})^n \quad \text{et} \quad y' = x^p (x^{-1})^q$$

l'égalité $\nu = m - n = p - q$ entraîne $m + q = p + n$, ainsi $x^{m+q} = x^{p+n}$ et

$$x^m x^q = x^p x^n \ . \tag{8.65}$$

D'autre part puisque x et x^{-1} commutent le lemme [8.1] (p. 192) permet d'affirmer que pour tout $(t, s) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ $x^t (x^{-1})^s = (x^{-1})^s x^t$, l'égalité (8.65) et (i) montre alors que

$$x^m x^q (x^{-1})^n = y x^q = x^p x^n (x^n)^{-1} = x^p$$

par suite

$$y' = x^p (x^{-1})^q = x^p (x^q)^{-1} = y.$$

Ceci montre que κ_G est à valeurs dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}, G)$. On vérifie les points **a**, **b**, **c**, **d**, **e** et **f**

a Si $\nu \in \mathbb{N}$ alors $(\nu, 0) \in \Delta(\nu)$, par suite

$$\kappa_G(x)(\nu) = x^\nu (x^{-1})^0 = x^\nu$$

b Si $\nu \in \mathbb{Z}_-$ alors $(0, -\nu) \in \Delta(\nu)$, par suite

$$\kappa_G(x)(\nu) = x^0 (x^{-1})^{-\nu} = (x^{-1})^{-\nu}$$

c Si $(m, n) \in \Delta(\mu)$ et $(p, q) \in \Delta(\nu)$ alors $(m + p, n + q) \in \Delta(\mu + \nu)$ ainsi

$$\kappa_G(x)(\mu + \nu) = x^{m+p} (x^{-1})^{n+q} = x^m x^p (x^{-1})^n (x^{-1})^q$$

puisque x et x^{-1} commutent le lemme [8.1] (p. 192) permet d'affirmer que x^p et $(x^{-1})^n$ commutent par suite

$$\kappa_G(x)(\mu + \nu) = x^m x^p (x^{-1})^n (x^{-1})^q = x^m (x^{-1})^n x^p (x^{-1})^q = \kappa_G(\mu) \kappa_G(\nu)$$

d Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G, H)$ et $(m, n) \in \Delta(\nu)$ on a

$$f(\kappa_G(x)(\nu)) = f(x^m (x^{-1})^n) = f(x^m) f((x^{-1})^n)$$

mais l'application $\varphi : \mathbb{Z}_+ \mapsto H$ défini par

$$\varphi(n) = f(x^n)$$

vérifie, si e' est l'élément neutre de H

1. $\varphi(0) = f(e) = e'$
2. $\varphi(n + 1) = f(x^n x) = \varphi(n) f(x)$

par suite $\varphi(n) = (f(x))^n$ et

$$f(\kappa_G(x)(\nu)) = f(x^m(x^{-1})^n) = f(x^m)f((x^{-1})^n) = (f(x))^m f((x^{-1})^n)$$

puisque $f((x^{-1})^n) = ((f(x))^{-1})^n$ on obtient

$$f(\kappa_G(x)(\nu)) = f(x^m)((f(x))^{-1})^n = \kappa_H(f(x))(\nu)\ .$$

e 1. Si $(m,n) \in \Delta(\nu)$ alors $(n,m) \in \Delta(-\nu)$ par suite

$$\kappa_G(x)(-\nu) = x^n(x^{-1})^m$$

puisque x et x^{-1} commutent le lemme [8.1] (p. 192) permet d'affirmer que x^n et $(x^{-1})^m$ commutent par suite

$$\kappa_G(x^{-1})(\nu) = (x^{-1})^m((x^{-1})^{-1})^n = (x^{-1})^m x^n = x^n(x^{-1})^m = \kappa_G(-\nu)$$

2. D'après **c** on a

$$\kappa_G(x)(\nu)\kappa_G(-\nu) = \kappa_G(x)(\nu + (-\nu)) = \kappa_G(x)(0) = e$$

et

$$\kappa_G(x)(-\nu)\kappa_G(x)(\nu) = \kappa_G(x)((-\nu) + \nu) = \kappa_G(x)(0) = e$$

f On montre que si $x \in H$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x^n \in H$ et $(x^{-1})^n \in H$. On pose

$$L = \{n \in \mathbb{N}/x^n \in H \quad \text{et} \quad (x^{-1})^n \in H\}$$

alors

1. $0 \in L$ puisque $x^0 = (x^{-1})^0 = e$,
2. si $n \in L$ alors
   — puisque $x^{n+1} = x^n x$, x^{n+1} est le produit de deux éléments de H, par suite $x^{n+1} \in H$,
   — puisque $(x^{-1})^{n+1} = (x^{-1})^n(x^{-1})$, $(x^{-1})^{n+1}$ est le produit de deux éléments de H, par suite $(x^{-1})^{n+1} \in H$,

Ainsi L est héréditaire et $L = \mathbb{N}$. En particulier si $\nu \in \mathbb{Z}$ et $x \in H$ puisque

$$\forall\ (m,n) \in \Delta(\nu) \qquad \kappa_G(x)(\nu) = x^m(x^{-1})^n$$

$\kappa_G(\nu)$ est le produit de deux éléments de H.

Preuve de l'unicité

Si $x \mapsto f(x)$ est une application de G dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}, G)$ qui vérifie **c** alors pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ et $(m,n) \in \Delta(\nu)$ on a

$$f(x)(\nu) = f(x)(m-n) = f(x)(m)f(x)(-n)$$

D'autre part

— Par **a** on a

$$f(x)(m) = x^m$$

— Par **b** on a

$$f(x)(-n) = (x^{-1})^n$$

ainsi pour tout $x \in G$, $\nu \in \mathbb{Z}$ et $(m,n) \in \Delta(\nu)$

$$f(x)(\nu) = x^m(x^{-1})^n = \kappa_G(x)(\nu)\ .$$

(iii)

Preuve de l'existence

On considère l'application φ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)$ définie par

$$\varphi(\nu,x)(k) = x_k^{\nu_k},$$

si π^d est l'application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)$ définie par le lemme [8.3] page 196 on montre que l'application $\mathbf{p}_A = \pi^d \circ \varphi$ vérifie les propriétés énoncées . or par définition de π^d on a (voir (8.2) page 196)

1.
$$\mathbf{p}_A(\nu,x)(0) = \pi^d(\varphi(\nu,x))(0) = \varphi(\nu,x)(0) = x_0^{\nu_0}$$

2.
$$\mathbf{p}_A(\nu,x)(n+1) = \pi^d(\varphi(\nu,x))(n+1) = \pi^d(\varphi(\nu,x))(n)\varphi(\nu,x)(n+1)$$

or

$$\pi^d(\varphi(\nu,x))(n)\varphi(\nu,x)(n+1) = \mathbf{p}_A(\nu,x)(n)\ x_{n+1}^{\nu_{n+1}}$$

Preuve de l'unicité

Si p et p' sont des applications de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)$ qui vérifient les propriétés *1.* et *2.* on montre que $p = p'$ en vérifiant que pour tout $(\nu,x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ l'ensemble

$$H_{(\nu,x)} = \{n \in \mathbb{N} / p(\nu,x)(n) = p'(\nu,x)(n)\}$$

est héréditaire. Or :

1. $0 \in H_{(\nu,x)}$ puisque *1.* permet d'affirmer que
$$p(\nu,x)(0) = x_0^{\nu_0} = p'(\nu,x)(0)$$

2. Si $n \in H_{(\nu,x)}$ alors d'après *2.*
$$p(\nu,x)(n+1) = p(\nu,x)(n)x_{n+1}^{\nu_{n+1}} = p'(\nu,x)(n)x_{n+1}^{\nu_{n+1}} = p'(\nu,x)(n+1)$$

(iv)

Si $\nu_k = 0$ pour tout $k > p$ alors pour tout $k > p$ et $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$

$$\varphi(\nu,x)(k) = x_k^{\nu_k} = x_k^0 = e$$

ainsi (8.4) page 197 permet d'affirmer que pour tout $n \geq p$

$$\pi^d(\varphi(\nu,x))(n) = \pi^d(\varphi(\nu,x))(p)$$

mais par (iii) on a

$$\mathbf{p}_A(\nu,x)(n) = \pi^d(\varphi(\nu,x))(n).$$

(v)

Si $\nu_k = \mu_k$ *et* $x_k = y_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}_n$

$$\varphi(\nu,x)(k) = x_k^{\nu_k} = y_k^{\mu_k} = \varphi(\mu,y)(k)$$

ainsi le (iii) du lemme [8.3] page 196 permet d'affirmer que pour tout $k \in [0,n]$

$$\pi^d(\varphi(\nu,x))(k) = \pi^d(\varphi(\mu,y))(k)$$

mais par (iii) on a

$$\mathbf{p}_A(\mu,x)(k) = \pi^d(\varphi(\mu,x))(k).$$

par suite

$$\mathbf{p}_A(\mu,x)(k) = \pi^d(\varphi(\mu,x))(k) = \pi^d(\varphi(\nu,y))(k) = \mathbf{p}_A(\nu,y)(k).$$

(vi)

1. D'abord puisque $\mathrm{dom}(\mathbf{p}_A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ et pour tout $(\nu,x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ on a $\mathrm{dom}(\mathbf{p}_A(\nu,x)) = \mathbb{N}$ on obtient
$$\mathrm{dom}(p_{f,A}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A) \times \mathbb{N}.$$
2. Ensuite $p_{f,A}$ est une fonction puisque si
$$((\nu,x,n),y) \in p_{f,A} \ et \ ((\nu,x,n),y') \in p_{f,A}$$
alors
$$(n,y) \in \mathbf{p}_A(\nu,x) \ et \ (n,y') \in \mathbf{p}_A(\nu,x).$$
ainsi l'égalité $y = y'$ suit du fait que $\mathbf{p}_A(\nu,x)$ est une fonction.

On montre que
$$\mathrm{im}(p_{f,A}) \text{ est un sous-groupe de } (G,*).$$

1. D'abord on montre $e \in \mathrm{im}(p_{f,A})$. en effet, si $\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ vérifie $\nu_0 = 0$ alors pour tout $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ on a
$$p_{f,A}(\nu,x,0) = x_0^{\nu_0} = x_0^0 = e.$$
2. Ensuite on montre $[(\alpha,\beta) \in \mathrm{im}(p_{f,A}) \times \mathrm{im}(p_{f,A}) \Rightarrow \alpha\beta \in \mathrm{im}(p_{f,A})]$.
En effet si $\alpha \in \mathrm{im}(p_{f,A})$ et $\beta \in \mathrm{im}(p_{f,A})$ alors il existe
— $(\mu,\nu) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})$,
— $(x,y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$
— $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
tels que
$$\alpha = p_{f,A}(\mu,x,n) \ et \ \beta = p_{f,A}(\nu,y,p).$$
On pose
$$H = \{k \in \mathbb{N} / p_{f,A}(\mu,x,n)p_{f,A}(\nu,y,k) \in \mathrm{im}(p_{f,A})\},$$
H est donc l'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe
$$(\xi,t,q) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A) \times \mathbb{N}$$
vérifiant
$$p_{f,A}(\xi,t,q) = p_{f,A}(\mu,x,n)p_{f,A}(\nu,y,k)$$
et on montre que H est héréditaire.
   (a) D'abord on montre que $0 \in H$. On considère le couple
$$(\rho,z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$$
défini par
$$\rho_k = \begin{cases} \mu_k & si \quad k \leq n \\ \nu_{k-(n+1)} & si \quad k \geq n+1 \end{cases}$$
et
$$z_k = \begin{cases} x_k & si \quad k \leq n \\ y_{k-(n+1)} & si \quad k \geq n+1 \end{cases} .$$
On montre que
$$p_{f,A}(\rho,z,n+1) = p_{f,A}(x,\mu,n)p_{f,A}(y,\nu,0).$$
Par définition on a
$$p_{f,A}(\rho,z,n+1) = \mathbf{p}_A(\rho,z)(n+1) = \mathbf{p}_A(\rho,z)(n)\ z_{n+1}^{\rho_{n+1}}$$
or :

— puisque $\rho_{n+1} = \nu_0$ et $z_{n+1} = y_0$ on obtient

$$p_{f,A}(\rho, z, n+1) = \mathbf{p}_A(m, z)(n)\ y_0^{v_0}$$

— puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ $\rho_k = \mu_k$ et $z_k = x_k$ on obtient par (v)

$$\mathbf{p}_A(\rho, z)(n) = \mathbf{p}_A(\mu, x)(n) = p_{f,A}(\mu, x, n)$$

par suite, puisque $p_{f,A}(\nu, y, 0) = y_0^{\nu_0}$, on obtient

$$p_{f,A}(\rho, z, n+1) = p_{f,A}(\mu, x, n)\ y_0^{\nu_0} = p_{f,A}(\mu, x, n) p_{f,A}(\nu, y, 0)$$

c'est à dire $0 \in H$

(b) Ensuite on montre $[k \in H \Rightarrow k+1 \in H]$. En effet par définition on a

$$p_{f,A}(\mu, x, n) p_{f,A}(\nu, y, k+1) = p_{f,A}(\mu, x, n) p_{f,A}(\nu, y, k)\ y_{k+1}^{\nu_{k+1}} \tag{8.66}$$

or l'assertion $k \in H$ entraîne l'existence d'un triplet

$$(\xi, t, q) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$$

tel que

$$p_{f,A}(\mu, x, n) p_{f,A}(\nu, y, k) = p_{f,A}(\xi, t, q)$$

par suite, pour un tel triplet, l'égalité (8.66) s'écrit

$$p_{f,A}(\mu, x, n) p_{f,A}(\nu, y, k+1) = p_{f,A}(\xi, t, q)\ y_{k+1}^{v_{k+1}} \tag{8.67}$$

il suffit donc de recopier (a) pour obtenir $k+1 \in H$. On considère le couple

$$(\rho, z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$$

défini par

$$\rho_j = \begin{cases} \xi_j & si \quad j \leq q \\ \nu_{k+1} & si \quad j \geq q+1 \end{cases}$$

et

$$z_j = \begin{cases} t_j & si \quad j \leq q \\ y_{k+1} & si \quad j \geq q+1 \end{cases} .$$

On montre que

$$p_{f,A}(\rho, z, q+1) = p_{f,A}(\xi, t, q)\ y_{k+1}^{v_{k+1}}.$$

Par définition on a

$$p_{f,A}(\rho, z, q+1) = \mathbf{p}_A(\rho, z)(q+1) = \mathbf{p}_A(\rho, z)(q)\ z_{q+1}^{rho_{q+1}}$$

or :

— puisque $\rho_{q+1} = \nu_{k+1}$ et $z_{q+1} = y_{k+1}$ on obtient

$$p_{f,A}(\rho, z, q+1) = \mathbf{p}_A(\rho, z)(q)\ y_{k+1}^{\nu_{k+1}}$$

— puisque pour tout $j \in \mathbb{N}_q$ $\rho_j = \xi_j$ et $z_j = t_j$ on obtient par (v)

$$\mathbf{p}_A(\rho, z)(q) = \mathbf{p}_A(\xi, t)(q) = p_{f,A}(\xi, t, q)$$

par suite

$$p_{f,A}(\rho, z, q+1) = p_{f,A}(\xi, t, q)\ y_{k+1}^{\nu_{k+1}}$$

et (8.66) montre alors que

$$p_{f,A}(\rho, z, q+1) = p_{f,A}(\xi, t, q)\ y_{k+1}^{v_{k+1}} = p_{f,A}(\mu, x, n) p_{f,A}(\nu, y, k+1).$$

Ainsi H est héréditaire et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$p_{f,A}(\mu, x, n)p_{f,A}(\nu, y, k) \in \mathrm{im}(p_{f,A}).$$

en particulier

$$\alpha\beta = p_{f,A}(\mu, x, n)p_{f,A}(\nu, y, p) \in \mathrm{im}(p_{f,A}).$$

1. et 2. montre que $\mathrm{im}(p_{f,A})$ est un sous-monoïde de M.

3. Enfin on montre $\alpha \in \mathrm{im}(p_{f,A}) \Rightarrow \alpha^{-1} \in \mathrm{im}(p_{f,A})$.Il suffit de voir que pour tout $(\nu, x, n) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$ on a

$$(p_{f,A}(\nu, x, n))^{-1} \in \mathrm{im}(p_{f,A}) \ .$$

Si $(\nu, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N}/(p_{f,A}(\nu, x, n))^{-1} \in \mathrm{im}(p_{f,A})\}$$

et on montre que $H = \mathbb{N}$ en vérifiant

(a) $0 \in H$

(b) $n \in H \Rightarrow k + 1 \in U$.

(a) D'abord $0 \in H$ puisque

$$p_{f,A}(\nu, x, 0) = x_0^{\nu_0}$$

et d'après (ii) $x_0^{-\nu_0}$ est l'inverse de $x_0^{\nu_0}$, par suite pour toute suite $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ telle que $\mu_0 = -\nu_0$

$$(p_{f,A}(\nu, x, 0))^{-1} = p_{f,A}(\mu, x, 0)$$

(b) Ensuite on montre $n \in H \Rightarrow n + 1 \in H$. En effet par définition on a

$$p_{f,A}(\nu, x, n + 1) = p_{f,A}(\nu, x, n)x_{n+1}^{\nu_{n+1}}$$

mais l'assertion $n \in H$ entraîne l'existence d'un triplet

$$(\mu, y, p) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$$

tel que $(p_{f,A}(\nu, x, n))^{-1} = p_{f,A}(\mu, y, p)$ par suite

$$(p_{f,A}(\nu, x, n + 1))^{-1} = (x_{n+1}^{\nu_{n+1}})^{-1}p_{f,A}(\mu, y, p) = x_{n+1}^{-\nu_{n+1}}p_{f,A}(\mu, y, p)$$

Ainsi $(p_{f,A}(\nu, x, n + 1))^{-1}$ est le produit de deux éléments de $\mathrm{im}(p_{f,A})$ et 2. montre alors que $(p_{f,A}(\nu, x, n + 1))^{-1} \in \mathrm{im}(p_{f,A})$.

(vii)

1. D'abord on montre $\mathbf{gr}(A) \subset \mathrm{im}(p_{f,A})$. Puisque $\mathrm{im}(p_{f,A})$ est un sous-groupe de $(G, *)$ par définition de $\mathbf{gr}(A)$ (voir définition [8.26] page 289) il suffit de montrer $A \subset \mathrm{im}(p_{f,A})$. Or si $x \in A$ et

$$(\nu, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$$

vérifie $\nu_0 = 1$ et $x_0 = x$ alors

$$p_{f,A}(\nu, x, 0) = x_0^{\nu_0} = x$$

ainsi $x \in \mathrm{im}(p_{f,A})$.

2. Ensuite on montre $\mathrm{im}(p_{f,A}) \subset \mathbf{gr}(A)$. Il suffit de montrer que si
$$(\nu, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$$
alors $\forall\ n \in \mathbb{N}$
$$p_{f,A}(\nu, x, n) \in \mathbf{gr}(A).$$
On pose
$$H = \{n \in \mathbb{N} / p_{f,A}(\nu, x, n) \in \mathbf{gr}(A)\}$$
et on montre que H est héréditaire.
   (a) D'abord on montre $0 \in H$. En effet par définition
$$p_{f,A}(\nu, x, 0) = x_0^{\nu_0}$$
   Or $x_0 \in A$ par suite $x_0 \in \mathbf{gr}(A)$ et (ii) montre alors que $x_0^{\nu_0} \in \mathbf{gr}(A)$.
   (b) Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. Par définition on a
$$p_{f,A}(\nu, x, n+1) = p_{f,A}(\nu, x, n)\ x_{n+1}^{\nu_{n+1}}$$
   or
   — puisque $n \in H$ on a $p_{f,A}(\nu, x, n) \in \mathbf{gr}(A)$
   — puisque $x_{n+1} \in A$ on a aussi $x_{n+1}^{\nu_{n+1}} \in \mathbf{gr}(A)$
   ainsi $p_{f,A}(\nu, x, n+1)$ est le produit de deux éléments de $\mathbf{gr}(A)$.

(viii)

1. D'après (ii) pour tout $x \in G$ $\kappa_G(x)$ est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, *)$ par suite $\mathrm{im}(\kappa_G(x))$ est un sous-groupe de G contenant $x = \kappa_G(x)(1)$ ainsi
$$\mathbf{gr}(x) \subset \mathrm{im}(\kappa_G(x))$$
2. D'après (ii) pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ $\kappa_G(x)(\nu) \in \mathbf{gr}(x)$ par suite
$$\mathrm{im}(\kappa_G(x)) \subset \mathbf{gr}(x)$$

■

Il est facile de voir que si G est un groupe et R est une relation d'équivalence compatible avec la loi de G le monoïde quotient G/R (voir théorème [8.4] page 238) est un groupe, on parle alors de groupe quotient.

8.5.2 *Sous-groupes normaux*

On utilise les notations (et résultats) donnés dans le cadre des monoïdes quotients

Lemme 8.27 *On note $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e ou la loi $*$ est notée multiplicativement $* : (x, y) \mapsto xy$.*

(i) Si $R \in \mathrm{Eq}[G, *]$ est une relation d'équivalence compatible avec $*$ le monoïde quotient G/R est un groupe.

(ii) Si $X \subset G \times G$ est un sous-ensemble de $G \times G$ il existe une unique relation d'équivalence $\rho_*(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. *$\rho_*(X)$ est une relation d'équivalence compatible avec la loi $*$*
2. *$X \subset \rho_*(X)$*
3. *Si $R \in \mathrm{Eq}[G, *]$ vérifie $X \subset R$ alors*
$$\rho_*(X) \subset R$$

(iii) On note $(K\ ,\times)$ un groupe, $R\subset G\times G$ une relation d'équivalence compatible avec la loi de G, et $\pi : G\mapsto G/R$ le morphisme canononique. Si $g\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G,K)$ est un morphisme de groupes, pour qu'il existe un morphisme g_* du groupe quotient G/R dans le groupe K vérifiant

$$g = g_*\circ\pi$$

il faut et il suffit que

$$R\subset\{(x,y)\in G\times G/g(x)=g(y)\}\ .$$

(iv) On note $(K\ ,\times)$ un groupe, si $g\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G,K)$ est un morphisme de groupes alors la relation

$$R_g=\{(x,y)\in G\times G/g(x)=g(y)\}$$

est une relation d'équivalence compatible avec la loi de G.

(v) On note $(K\ ,\times)$ un groupe, $X\subset G{\times}G$ un sous-ensemble de $G{\times}G$, et $\pi_* : G\mapsto G/\rho_*(X)$ le morphisme canononique. Si $g\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G,K)$ est un morphisme de groupes, pour qu'il existe un morphisme g^* du groupe quotient $G/\rho_*(X)$ dans le groupe K vérifiant

$$g = g^*\circ\pi_*$$

il faut et il suffit que

$$X\subset\{(x,y)\in G\times G/g(x)=g(y)\}\ .$$

(vi) Si $R\subset G{\times}G$ est une relation d'équivalence compatible avec la loi de G et $\pi : G\mapsto G/R$ le morphisme canonique de G dans le groupe G/R alors l'ensemble

$$H=\{x\in A/(x,e)\in R\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *H est un sous-groupe de $(G,*)$*
2. *pour tout $x\in G$ les ensembles Hx et xH définis par*

   $$Hx=\{y\in G/yx^{-1}\in H\}\quad\text{et}\quad xH=\{y\in G/x^{-1}y\in H\}$$

   vérifient $Hx=\{y\in G/(x,y)\in R\}=xH$.

(vii) Si $H\subset G$ est un sous-groupe de $(G,*)$ les relations $R_0(H)\subset G\times G$ et $R_1(H)\subset G\times G$ définies par

$$R_0(H)=\{(x,y)\in G\times G/x^{-1}y\in H\}\quad\text{et}\quad R_1(H)=\{(x,y)\in G\times G/yx^{-1}\in H\}$$

vérifient les propriétés suivantes

1. *$R_0(H)$ et $R_1(H)$ sont des relations d'équivalences sur G*
2. *pour tout $x\in G$ la classe d'équivalence de x pour $R_0(H)$ est l'ensemble*

   $$\{y\in G/(x,y)\in R_0(H)\}=xH=\{y\in G/\exists\ h\in H: y=xh\}$$

3. *pour tout $x\in G$ la classe d'équivalence de x pour $R_1(H)$ est l'ensemble*

   $$\{y\in G/(x,y)\in R_1(H)\}=Hx=\{y\in G/\exists\ h\in H: y=hx\}$$

4. *pour que $R_0(H)$ soit compatible avec la loi de G il faut et il suffit que*

   $$\forall\ x\in G\quad Hx=xH\ .$$

   on a alors $R_0(H)=R_1(H)$

Preuve

(i)

Par définition d'un monoïde quotient (théorème [8.4] page 238) l'application canonique $\pi : G \mapsto G/R$ est un morphisme de monoïde, par suite

$$\pi(x) \centerdot \pi(x^{-1}) = \pi(xx^{-1}) = \pi(e) = \pi(x^{-1}x) = \pi(x^{-1}) \centerdot \pi(x)$$

ainsi $(\pi(x))^{-1} = \pi(x^{-1})$

(ii)

Voir lemme [8.14] page 238

(iii)

Voir lemme [8.14] page 238

(iv)

Voir lemme [8.14] page 238

(v)

Voir lemme [8.14] page 238

(vi)

1. H est un sous-groupe.
   (a) puisque R est réflexive $(e, e) \in R$ par suite $e \in H$
   (b) puisque R est compatible avec $*$

   $$(x, e) \in R \quad \text{et} \quad (y, e) \in R \Rightarrow (xy, ee) \in R$$

   par suite $(x, y) \in H \times H \Rightarrow xy \in H$
   (c) puisque R est réflexive, pour tout $x \in G$ on a $(x^{-1}, x^{-1}) \in R$, R étant compatible avec $*$ on obtient

   $$(x, e) \in R \Rightarrow (xx^{-1}, ex^{-1}) \in R$$

   par suite $(e, x^{-1}) \in R$. La symétrie de R montre alors que

   $$(x^{-1}, e) \in R$$

   ainsi $x^{-1} \in H$.
2. (a) $\underline{Hx \subset \{y \in G/(x, y) \in R\}}$.
   En effet, si $y \in Hx$ alors $yx^{-1} \in H$ ainsi par définition $(yx^{-1}, e) \in R$. Puisque R est réflexive, pour tout $x \in G$ on a $(x, x) \in R$, R étant compatible avec $*$ on obtient

   $$(yx^{-1}, e) \in R \Rightarrow (yx^{-1}x, ex) \in R$$

   par suite $y \in Hx \Rightarrow (y, x) \in R$. La symétrie de R montre alors que

   $$(x, y) \in R$$

   (b) $\underline{\{y \in G/(x, y) \in R\} \subset Hx}$.
   Si $(x, y) \in R$ alors
   — par réflexivité $(x^{-1}, x^{-1}) \in R$
   — par compatibilité

   $$(e, yx^{-1}) = (xx^{-1}, yx^{-1}) \in R$$

   — par symétrie

   $$(yx^{-1}, e) \in R$$

   ainsi $yx^{-1} \in H$.

(c) $\underline{xH \subset \{y \in G/(x,y) \in R\}.}$
En effet, si $y \in xH$ alors $x^{-1}y \in H$ ainsi par définition $(x^{-1}y, e) \in R$. Puisque R est réflexive, pour tout $x \in G$ on a $(x,x) \in R$, R étant compatible avec $*$ on obtient

$$(x^{-1}y, e) \in R \Rightarrow (xx^{-1}y, xe) \in R$$

par suite $y \in xH \Rightarrow (y,x) \in R$. La symétrie de R montre alors que

$$(x,y) \in R$$

(d) $\underline{\{y \in G/(x,y) \in R\} \subset xH.}$
Si $(x,y) \in R$ alors
— par réflexivité $(x^{-1}, x^{-1}) \in R$
— par compatibilité

$$(e, x^{-1}y) = (x^{-1}x, x^{-1}y) \in R$$

— par symétrie

$$(x^{-1}y, e) \in R$$

ainsi $x^{-1}y \in H$.

(vii)

1. $R_0(H)$ et $R_1(H)$ sont des relations d'équivalence.
   (a) <u>réflexivité</u>
   puisque $e \in H$, pour tout $x \in G$ on a $x^{-1}x \in H$ et $xx^{-1} \in H$, ainsi

$$(x,x) \in R_0(H) \quad \text{et} \quad (x,x) \in R_1(H)$$

   (b) <u>symétrie</u>

   — si $(x,y) \in R_0(H)$ alors $x^{-1}y \in H$ ainsi $(x^{-1}y)^{-1} \in H$ et l'égalité $(x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x$ montre que $(y,x) \in R_0(H)$.
   — si $(x,y) \in R_1(H)$ alors $yx^{-1} \in H$ ainsi $(yx^{-1})^{-1} \in H$ et l'égalité $(yx^{-1})^{-1} = xy^{-1}$ montre que $(y,x) \in R_1(H)$.

   (c) <u>transitivité</u>

   — si $(x,y) \in R_0(H)$ et $(y,z) \in R_0(H)$ alors $x^{-1}y \in H$ et $y^{-1}z \in H$ l'égalité

$$x^{-1}z = (x^{-1}y)(y^{-1}z)$$

   montre alors que $(x,z) \in R_0(H)$
   — si $(x,y) \in R_1(H)$ et $(y,z) \in R_1(H)$ alors $yx^{-1} \in H$ et $zy^{-1} \in H$ l'égalité

$$zx^{-1} = (zy^{-1})(yx^{-1})$$

   montre alors que $(x,z) \in R_1(H)$.

2. il suffit de voir

$$x^{-1}y = h \Leftrightarrow y = xh$$

3. il suffit de voir

$$yx^{-1} = h \Leftrightarrow y = hx$$

4. On montre $R_0(H) \in \mathrm{Eq}[G,*] \Leftrightarrow \forall\, x \in G \quad xH = Hx$
   (a) $\underline{R_0(H) \in \mathrm{Eq}[G,*] \Rightarrow \forall\, x \in G \quad xH = Hx}$
   Puisque $H = \{x \in G/x^{-1} \in H\} = \{x \in G/(x,e) \in R_0(H)\}$, l'implication en question provient de (vi).

(b) $\underline{\forall\ x \in G \quad xH = Hx \Rightarrow R_0(H) \in \mathrm{Eq}[G, *]}$
Il s'agit de montrer

$$(x, y) \in R_0(H) \quad \text{et} \quad (a, b) \in R_0(H) \Rightarrow (xa, yb) \in R_0(H)$$

ce qui s'écrit

$$y \in xH \quad \text{et} \quad b \in aH \Rightarrow yb \in xaH.$$

Si $h_0 \in H$ vérifie $y = xh_0$ et $h_1 \in H$ vérifie $b = ah_1$ alors

$$yb = x(h_0 a)h_1$$

puisque $Ha = aH$ il existe $g \in H$ tel que $h_0 a = ag$ par suite

$$yb = (xa)gh_1$$

ainsi $yb \in xaH$.

Ceci entraîne que $R_0(H) = R_1(H)$ puisque

$$(x, y) \in R_0(H) \Leftrightarrow y \in xH \Leftrightarrow y \in Hx \Leftrightarrow (x, y) \in R_1(H)$$

■

si G est un groupe, les sous-groupes vérifiant la propriété que la relation $R_0(H)$ est compatible avec la loi du groupe s'appellent les sous-groupes normaux.

Définition 8.27 *On note $(G, *)$ un groupe, un sous-groupe H de G est dit **normal** si*

$$\forall\ x \in G \quad xH = Hx$$

On note $\mathcal{N}(G)$ l'ensemble des sous-groupe normaux de G

Notation 8.11 *Si $(G, *)$ est un groupe la notation*

$$H \lhd G$$

exprime que H est un sous-groupe normal de G

Le lemme qui suit est une application directe des définitions.

Lemme 8.28 *On note $(G, *)$ un proupe où $* : (x, y) \mapsto xy$ est notée multiplicativement.*

(i) Pour qu'un sous-groupe H de G soit normal il faut et il suffit que pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$ $ghg^{-1} \in H$:

$$H \lhd G \Leftrightarrow \forall\ (g, h) \in G \times H \quad ghg^{-1} \in H$$

(ii)Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}(G)$ est une famille non vide de sous-groupes normaux de G l'ensemble

$$N = \bigcap_{F \in \mathcal{N}} F$$

est un sous-groupe normal de G

(iii) Si A est un sous-ensemble de G il existe un unique sous-groupe normal N de G vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. *$A \subset N$*
2. *Si H est un sous-groupe normal de G vérifiant $A \subset H$ alors*

$$N \subset H.$$

(iv) Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}(G)$ est une famille non vide de sous-groupes normaux de G vérifiant la propriété que pour tout $H \in \mathcal{N}$ et $K \in \mathcal{N}$ il existe $L \in \mathcal{N}$ tel que $H \cup K \subset L$ alors

$$U = \bigcup_{H \in \mathcal{N}} H$$

est un sous-groupe normal de G

Preuve

(i)

1. On montre $H \lhd G \Rightarrow \forall\ (g,h) \in G \times H \quad ghg^{-1} \in H$. En effet, si $H \lhd G$ alors pour tout $g \in H$ on a $gH = Hg$, en particulier, pour tout $g \in G$ et $h \in H$ le produit gh vérifie $gh \in Hg$ ainsi il existe $h' \in H$ tel que $gh = h'g$, ce qui montre que $ghg^{-1} \in H$.
2. On montre $\forall\ (g,h) \in G \times H \quad ghg^{-1} \in H \Rightarrow H \lhd G$. Soit $g \in G$
   — l'égalité $gh = (ghg^{-1})g$ montre, puisque $ghg^{-1} \in H$, que $gH \subset Hg$
   — l'égalité $hg = g(g^{-1}hg)$ montre, puisque $g^{-1}hg \in H$, que $Hg \subset gH$

(ii)

D'après le lemme [8.25] page 288 N est un sous-groupe de G. D'autre part, si $(g,h) \in G \times N$ alors pour tout $F \in \mathcal{N}$ on a $h \in F$, F étant normal on obtient

$$\forall\ F \in \mathcal{N} \quad ghg^{-1} \in F$$

par suite $ghg^{-1} \in N$ et N est normal.

(iii)

On pose

$$\Upsilon(A) = \{H \in \mathcal{N}(G) / A \subset H\}$$

ainsi $\Upsilon(A)$ est l'ensemble des sous-groupe normaux de G qui contiennent A. Puisque $G \in \Upsilon(A)$ on a $\Upsilon(A) \neq \varnothing$, d'après (ii) l'ensemble

$$N = \bigcap_{H \in \Upsilon(A)} H$$

est un sous-groupe normal on montre qu'il vérifie *1* et *2*,

1. par définition pour tout $H \in \Upsilon(A)$ on a $A \subset H$ par suite $A \subset N$,
2. Si X est un sous-groupe normal de G vérifiant $A \subset X$ alors $X \in \Upsilon(A)$ par suite $N \subset X$.

Preuve de l'unicité

Si les sous-groupes normaux N et N' vérifient *1* et *2* alors
— puisque $A \subset N'$ et N vérifie *2* on a $N \subset N'$
— puisque $A \subset N$ et N' vérifie *2* on a $N' \subset N$
ainsi $N = N'$.

(iv)

D'après le lemme [8.25] page 288 U est un sous-groupe de G, d'autre part si $x \in U$ il existe $H \in \mathcal{N}$ tel que $x \in H$, puisque $H \lhd G$ pour tout $g \in G$ on a $gxg^{-1} \in H$ ainsi pour tout $g \in G$ on a $gxg^{-1} \in U$. ■

Comme d'habitude ce lemme permet de donner la définition d'un groupe normal engendré

Définition 8.28 *On note $(G,*)$ un groupe et A un sous-ensemble de G, on appelle* ***sous-groupe normal engendré*** *par A le sous-groupe normal* $\mathbf{grn}(A)$ *de G vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. *$A \subset \mathbf{grn}(A)$*

2. *Si H est un sous-groupe normal de G vérifiant $A \subset H$ alors*

$$\mathbf{grn}(A) \subset H.$$

L'ensemble $\mathcal{N}(G)$ des sous-groupes normaux de G peut être muni d'une structure de monoïde *commutatif*.

Lemme 8.29 *On note $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e où la loi $*$ est notée multiplicativement $* : (x, y) \mapsto xy$. L'application $\Phi : \mathcal{N}(G) \times \mathcal{N}(G) \mapsto \mathcal{P}(G)$ définie par*

$$\Phi(H, K) = \{x \in G / \exists\ (h, k) \in H \times K : x = hk\}$$

vérifie les propriétés suivantes

1. $$\forall\ (H, K) \in \mathcal{N}(G) \times \mathcal{N}(G) \quad \Phi(H, K) = \Phi(K, H)$$
2. $$\forall\ (H, K) \in \mathcal{N}(G) \times \mathcal{N}(G) \quad \Phi(H, K) \in \mathcal{N}(G)$$
3. *Si $(H, K) \in \mathcal{N}(G) \times \mathcal{N}(G)$ et $L \in \mathcal{N}(G)$ alors*
$$\Phi(H, \Phi(K, L)) = \Phi(\Phi(H, K), L)$$
4. *Si $(H, K) \in \mathcal{N}(G) \times \mathcal{N}(G)$ et $H \cap K = \{e\}$ l'application φ de $H \times K$ dans $\Phi(H, K)$ définie par*
$$\varphi(h, k) = hk$$
est bijective.
5. *Si $(H, K) \in \mathcal{N}(G) \times \mathcal{N}(G)$ alors*
$$H \cup K \subset \Phi(H, K)$$
6. *$(H, K) \in \mathcal{N}(G) \times \mathcal{N}(G)$ alors*
$$\mathbf{grn}(H \cup K) = \Phi(H, K)\ .$$
7. *Pour tout $H \in \mathcal{N}(G)$ et tout $K \in \mathcal{N}(G)$ vérifiant $K \subset H$*
$$\Phi(H, \{e\}) = H = \Phi(H, K)$$

Preuve Il s'agit de montrer que $(\mathcal{N}(G), \Phi)$ est un monoïde commutatif.

1. On montre $\Phi(H, K) = \Phi(K, H)$
   (a) $\underline{\Phi(H, K) \subset \Phi(K, H)}$. Si $x \in \Phi(H, K)$ alors il existe $(h, k) \in H \times K$ tel que $x = hk$ ainsi $x \in hK$. K étant normal on a $hkh^{-1} \in K$, par suite $x = hk = (hkh^{-1})h \in \Phi(K, H)$
   (b) $\underline{\Phi(K, H) \subset \Phi(H, K)}$. Si $x \in \Phi(K, H)$ alors il existe $(k, h) \in K \times H$ tel que $x = kh$ ainsi $x \in kH$. H étant normal on a $khk^{-1} \in H$, par suite $x = kh = (khk^{-1})k \in \Phi(H, K)$
2. On montre que $\Phi(H, K)$ est un sous-groupe normal de G.
   (a) $\underline{\Phi(H, K) \text{ est un monoïde}}$
   Puisque $e = ee$ on a $e \in \Phi(H, K)$. Si $x \in \Phi(H, K)$ et $y \in \Phi(H, K)$ il existe $(h, k) \in H \times K$ et $(a, b) \in H \times K$ tels que $x = hk$ et $y = ab$, ainsi
   $$xy = h(ka)b = h(kak^{-1})kb = (hkak^{-1})(kb)$$
   puisque $H \lhd G$ on a $kak^{-1} \in H$, ainsi si $h' = h(kak^{-1})$ et $k' = kb$ alors $(h', k') \in H \times K$ et
   $$xy = h'k'$$
   par suite $xy \in \Phi(H, K)$.

(b) $\underline{x \in \Phi(H,K) \Rightarrow x^{-1} \in \Phi(H,K)}$.
Si $x \in \Phi(H,K)$ alors il existe $(h,k) \in H \times K$ tel que $x = hk$ ainsi $x^{-1} = k^{-1}h^{-1}$ est un élément de $\Phi(K,H)$, donc de $\Phi(H,K)$ d'après *1.*

(c) $\underline{\Phi(H,K) \lhd G}$.
Si $x \in \Phi(H,K)$ il existe $(h,k) \in H \times K$ tel que $x = hk$ ainsi pour tout $g \in G$

$$gxg^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1})$$

— puisque $H \lhd G$ on a $ghg^{-1} \in H$
— puisque $K \lhd G$ on a $gkg^{-1} \in K$
ainsi pour tout $x \in \Phi(H,K)$ et $g \in G$ on a $gxg^{-1} \in \Phi(H,K)$.

3. On montre que si $(H,K) \in \mathcal{N}(G) \times \mathcal{N}(G)$ et $L \in \mathcal{N}(G)$

$$\Phi(H, \Phi(K,L)) = \Phi(\Phi(H,K), L)$$

— si $x \in \Phi(H, \Phi(K,L))$ alors il existe $h \in H$ et $(k,l) \in K \times L$ tel que

$$x = h(kl) = (hk)l$$

puisque $hk \in \Phi(H,K)$ et $l \in L$ on a $x \in \Phi((\Phi(H,K), L)$
— si $x \in \Phi(\Phi(H,K), L)$ alors il existe $(h,k) \in H \times K$ et $l \in L$ tel que

$$x = (hk)l = h(kl)$$

puisque $kl \in \Phi(K,L)$ et $h \in H$ on a $x \in \Phi(H, \Phi(K,L))$

4. Si $H \cap K = \{e\}$ alors $\varphi : (h,k) \mapsto hk$ est bijective de $H \times K$ dans $\Phi(H,K)$.
— par définition de $\Phi(H,K)$ on a $\mathrm{im}(\varphi) = \Phi(H,K)$
— si $\varphi(h,k) = \varphi(a,b)$ alors $a^{-1}h = bk^{-1}$ par suite $a^{-1}h \in H \cap K$ et $a = h$, de même $bk^{-1} \in H \cap K$ et $b = k$.

5. Si $x \in H$ alors $x = xe$ et puisque $e \in K$ on a $x \in \Phi(H,K)$, par suite $H \subset \Phi(H,K)$. De même $K \subset \Phi(H,K)$ ainsi on obtient

$$H \cup K \subset \Phi(H,K)$$

6. $\mathbf{grn}(H \cup K) = \Phi(H,K)$
(a) D'abord, puisque $\Phi(H,K)$ est un sous-groupe normal de G contenant $H \cup K$ on a $\mathbf{grn}(H \cup K) \subset \Phi(H,K)$
(b) ensuite puisque $H \subset \mathbf{grn}(H \cup K)$ et $K \subset \mathbf{grn}(H \cup K)$ pour tout $(h,k) \in H \times K$ on a $hk \in \mathbf{grn}(H \cup K)$ par suite

$$\Phi(H,K) \subset \mathbf{grn}(H \cup K)$$

7. $\Phi(H, \{e\}) = H = \Phi(H,H)$.
— si $x \in \Phi(H, \{e\})$ il existe $h \in H$ tel que $x = he = h$ par suite $x \in H$, si $x \in H$ alors $x = xe \in \Phi(H, \{e\})$.
— plus généralement si $x \in \Phi(H,K)$ avec $K \subset H$ il existe $(h,k) \in H \times K$ tel que $x = hk$ par suite, puisque $k \in H$ on a $x \in H$, si $x \in H$ alors $x = xe \in \Phi(H,K)$.

$\blacksquare$

Ainsi $\mathcal{N}(G)$ est un monoïde commutatif lorsqu'il est muni de la loi

$$(H,K) \mapsto H + K = \{x \in G / \exists\ (h,k) \in H \times K : x = hk\}$$

Définition 8.29 *On note $(G,*)$ un groupe où la loi $*$ est notée multiplicativement, si $H \lhd G$ et $K \lhd G$ on appelle **produit** de H et K le sous-groupe normal de G défini par*

$$H + K = \{x \in G / \exists\ (h,k) \in H \times K : x = hk\}\ .$$

Puisque $(\mathcal{N}(G),+)$ est un monoïde commutatif, on peut commencer à le décrire avec le formalisme développé au lemme [8.3] page 196 au théorème [8.1] page 211

Lemme 8.30 *On note $(\mathbb{N},O)$ un ensemble d'entiers naturels et $(G,*)$ un groupe où la loi $*$ est notée multiplicativement.*

(i) Si $H \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathcal{N}(G))$ alors

1. *Pour tout $n \geq 1$*

$$\mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k) = \mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n-1} H_k) + H_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} H_k = \mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k)$$

2. *Pour que x soit un élément de $\sum_{k=0}^{n} H_k$ il faut et il suffit qu'il existe une application $h \in \prod_{k=0}^{n} H_k$ vérifiant ([5]) $x = \pi^d(h)(n)$.*

3. *Pour que x soit un élément de $\sum_{k=0}^{n} H_k$ il faut et il suffit qu'il existe $p \in \mathbb{N}_n$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_p, \bigcup_{k=0}^{n} H_k)$ vérifiant les propriétés (**1**) et (**2**) suivantes :*
   1 *h est **injective***
   2 *$x = \pi^d(h)(p)$*

4. *Si $h \in \prod_{k=0}^{n} H_k$ pour toute bijection σ de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$ il existe une application $g \in \prod_{k=0}^{n} H_{\sigma(k)}$ tel que*

$$\pi^d(h)(n) = \pi^d(g)(n)\ .$$

(ii) Si $\mathcal{N}_f$ est une partie finie de $\mathcal{N}(G)$ alors

$$\mathbf{grn}\left(\bigcup_{H \in \mathcal{N}_f} N\right) = \sum_{H \in \mathcal{N}_f} H$$

(iii) Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}(G)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{N}(G)$ et $\mathrm{F}(\mathcal{N})$ la famille des sous-ensembles finis de $\mathcal{N}$ alors

$$\mathbf{grn}\left(\bigcup_{H \in \mathcal{N}} H\right) = \bigcup_{F \in \mathrm{F}(\mathcal{N})} \left(\sum_{H \in F} H\right)$$

En d'autres termes, pour que $x \in \mathbf{grn}\left(\bigcup_{H \in \mathcal{N}} H\right)$ il faut et il suffit qu'il existe $F \in \mathrm{F}(\mathcal{N})$ tel que

$$x \in \sum_{H \in F} H\ .$$

Preuve

(i)

1. (a) Soit $n \geq 1$

5. l'application π^d est définie par le lemme [8.3] page 196

— Puisque $\mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k)$ est un groupe normal contenant $\bigcup_{k=0}^{n-1} H_k$ on a

$$\mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n-1} H_k) \subset \mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k)$$

— puisque

$$H_n \subset \bigcup_{k=0}^{n} H_k \subset \mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k)$$

On obtient, pour tout $(h,k) \in \mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n-1} H_k) \times H_n$ le produit hk appartient à $\mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k)$ par suite, puisque

$$\mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n-1} H_k) + H_n = \{x \in G / \exists\ (h,k) \in \mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n-1} H_k) \times H_n : x = hk\}\ ,$$

on a

$$\mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n-1} H_k) + H_n \subset \mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k)$$

Enfin, puisque $\mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n-1} H_k) + H_n$ est un sous-groupe normal de G qui contient $\bigcup_{k=0}^{n} H_k$ on a

$$\mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k) \subset \mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n-1} H_k) + H_n$$

(b) On pose

$$U = \{n \in \mathbb{N} / \mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k) = \sum_{k=0}^{n} H_k\}$$

et on montre que U est héréditaire.

— l'assertion $0 \in U$ s'écrit $\mathbf{grn}(H_0) = H_0$ et provient de $H_0 \lhd G$,

— si $n \in U$ alors $\mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k) = \sum_{k=0}^{n} H_k$ par suite, l'égalité

$$\mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n+1} H_k) = \mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k) + H_{n+1}$$

montre que

$$\mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n+1} H_k) = \sum_{k=0}^{n} H_k + H_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} H_k$$

2. (a) D'abord on montre que

$$\forall\ h \in \prod_{k=0}^{n} H_k \quad \pi^d(h)(n) \in \sum_{k=0}^{n} H_k$$

On pose

$$U = \{n \in \mathbb{N} / \forall\ h \in \prod_{k=0}^{n} H_k \quad \pi^d(h)(n) \in \sum_{k=0}^{n} H_k\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}$ en vérifiant

i. $0 \in U$

ii. $n \in U \Rightarrow n+1 \in U$.

i. l'assertion $0 \in H$ provient de $\prod_{k=0}^{0} H_k = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\{0\}, H_0)$ et $\sum_{k=0}^{0} H_k = H_0$

ii. on montre $[n \in U \Rightarrow n+1 \in U]$, si $n \in U$ et $h \in \prod_{k=0}^{n+1} H_k$ alors

— par définition de π^d

$$\pi^d(h)(n+1) = \pi^d(h)(n)h_{n+1}$$

— puisque $n \in U$ on a $\pi^d(h)(n) \in \sum_{k=0}^{n} H_k$, ainsi $\pi^d(h)(n+1)$ est le produit d'un élément de $\sum_{k=0}^{n} H_k$ et d'un élément de H_{n+1} ce qui montre que

$$\pi^d(h)(n+1) \in \sum_{k=0}^{n} H_k + H_{n+1} (= \sum_{k=0}^{n+1} H_k)$$

(b) Ensuite on montre que pour tout $x \in \sum_{k=0}^{n} H_k$ il existe $h \in \prod_{k=0}^{n} H_k$ tel que $x = \pi^d(h)(n)$.

On pose

$$V = \{n \in \mathbb{N} / \forall\, x \in \sum_{k=0}^{n} H_k \ \exists\, h \in \prod_{k=0}^{n} H_k : x = \pi^d(h)(n)\}$$

ainsi V est l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels tout élément de $\sum_{k=0}^{n} H_k$ s'écrit de la manière espérée. On montre que $V = \mathbb{N}$ en vérifiant

i. $0 \in V$

ii. $n \in V \Rightarrow n+1 \in V$.

i. L'assertion $0 \in H$ provient du fait que $\prod_{k=0}^{0} H_k = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\{0\}, H_0)$ et $\sum_{k=0}^{0} H_k = H_0$

ii. On montre $n \in V \Rightarrow n+1 \in V$. Si $x \in \sum_{k=0}^{n+1} H_k$ alors, puisque par définition $\sum_{k=0}^{n+1} H_k = \sum_{k=0}^{n} H_k + H_{n+1}$, il existe

$$(y, z) \in \sum_{k=0}^{n} H_k \times H_{n+1}$$

tel que $x = yz$. L'hypothèse $n \in V$ entraîne l'existence d'une application $h \in \prod_{k=0}^{n} H_k$ telle que $y = \pi^d(h)(n)$. Si h^* est l'application de $\mathbb{N}_{n+1}$ dans G définie par

$$h_k^* = \begin{cases} h_k & si \quad k \in \mathbb{N}_n \\ z & si \quad k = n+1 \end{cases}$$

alors $h^* \in \prod_{k=0}^{n+1} H_k$ et (voir lemme [8.3] page 196)

$$\pi^d(h^*)(n+1) = \pi^d(h)(n)h^*_{n+1} = yz = x$$

ce qui montre que $n+1 \in V$.

3. D'après *2.* il suffit de montrer l'existence. On introduit quelques notations. On pose

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} H_k \ ,$$

$$\Delta_{p,n} = \mathrm{Inj}[\mathbb{N}_p, \bigcup_{k=0}^{n} H_k]$$

l'ensemble des applications injectives de $\mathbb{N}_p$ dans $\bigcup_{k=0}^{n} H_k$ enfin, si pour tout $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, G)$ $h^{(p)}$ designe la restriction de h à $\mathbb{N}_p$, on note

$$\Gamma_n = \{(p,h) \in \mathbb{N}_n \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, G)/h^{(p)} \in \Delta_{p,n}\} \ .$$

l'ensemble des couples $(p,h) \in \mathbb{N}_n \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, G)$ tels que la restriction de h à $\mathbb{N}_p$ est injective et vérifie $h(\mathbb{N}_p) \subset \bigcup_{k=0}^{n} H_k$. On pose

$$A = \{n \in \mathbb{N}/\forall\ x \in L_n\ \exists (p,h) \in \Gamma_n : x = \pi^d(h)(p)\}$$

et on montre que $A = \mathbb{N}$ en vérifiant

(a) $0 \in A$

(b) $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

(a) L'assertion $0 \in A$ provient des égalités

$$\Delta_{0,0} = \Gamma_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\{0\}, H_0) \quad \text{et} \quad L_0 = H_0$$

(b) On montre $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$. Si $x \in L_{n+1}$ alors l'égalité

$$L_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} H_k + H_{n+1}$$

montre qu'il existe $(y,z) \in \left(\sum_{k=0}^{n} H_k\right) \times H_{n+1}$ tel que $x = yz$. On examine l'alternative suivante

i. $z \in H_{n+1} \cap \sum_{k=0}^{n} H_k$

ii. $z \in H_{n+1} \cap \left(\sum_{k=0}^{n} H_k\right)^c$

i. Si $z \in H_{n+1} \cap \sum_{k=0}^{n} H_k$ alors x est le produit de deux élément de $\sum_{k=0}^{n} H_k$ par suite $x \in L_n$ et l'hypothèse $n \in A$ montre qu'il $p \in \mathbb{N}_n$ et $h \in \Delta_{p,n}$ tel que $x = \pi^d(h)(p)$

ii. si $z \in H_{n+1} \cap \left(\sum_{k=0}^{n} H_k\right)^c$ alors puisque $y \in L_n$ et $n \in A$ il existe $p \in \mathbb{N}_n$ et $h \in \Delta_{p,n}$ tel que $y = \pi^d(h)(p)$. On remarque que pour tout $j \in \mathbb{N}_p$ on a $z \neq h_j$, En effet, s'il existe $j \in \mathbb{N}_p$ tel que $z = h_j$ alors, puisque $h_j \in \bigcup_{k=0}^{n} H_k$, $z \in \sum_{k=0}^{n} H_k$ et ceci est contraire à l'hypothèse. Ainsi si h^* est l'application de $\mathbb{N}_{p+1}$ dans G définie par

$$h_k^* = \begin{cases} h_k & si \quad k \in \mathbb{N}_p \\ z & si \quad k = p+1 \end{cases}$$

alors $h^* \in \Delta_{p+1,n+1}$ et (voir lemme [8.3] page 196)

$$\pi^d(h^*)(p+1) = \pi^d(h)(p)h_{p+1}^* = yz = x$$

Par suite $A = \mathbb{N}$ et *3.* est prouvé.

4. D'après *2.* si $h \in \prod_{k=0}^{n} H_k$ alors $\pi^d(h)(n) \in \sum_{k=0}^{n} H_k$. Le lemme [8.4] page 202 la commutativité de $(\mathcal{N}(G), +)$ montre que pour tout $\sigma \in \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n]$

$$\sum_{k=0}^{n} H_k = \sum_{k=0}^{n} H_{\sigma(k)} \ .$$

Ainsi $\pi^d(h)(n) \in \sum_{k=0}^{n} H_{\sigma(k)}$ et *2.* montre alors qu'il existe $g \in \prod_{k=0}^{n} H_{\sigma(k)}$ tel que

$$\pi^d(h)(n) = \pi^d(g)(n) \ .$$

(*ii*)

Si $\mathrm{Card}(\mathcal{N}_f) = n+1$, par définition (voir lemme [8.5] page 209) pour toute bijection $k \mapsto H_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathcal{N}_f$ on a

$$\sum_{H \in \mathcal{N}_f} H = \sum_{k=0}^{n} H_k$$

ainsi, d'après (*i*)

$$\mathbf{grn}(\bigcup_{H \in \mathcal{N}_f} H) = \mathbf{grn}(\bigcup_{k=0}^{n} H_k) = \sum_{k=0}^{n} H_k = \sum_{H \in \mathcal{N}_f} H$$

(*iii*)

Posons, pour $F \in \mathrm{F}(\mathcal{N})$

$$K_F = \mathbf{grn}(\bigcup_{H \in F} H) = \sum_{H \in F} H$$

puisque pour tout $(F_0, F_1) \in \mathrm{F}(\mathcal{N}) \times \mathrm{F}(\mathcal{N})$,l'ensemble $F_0 \cup F_1$ est un sous-ensemble fini de $\mathcal{N}$ et $K_{F_0} \cup K_{F_1} \subset K_{F_0 \cup F_1}$ le lemme [8.28] page 302 permet d'affirmer que

$$\bigcup_{F \in \mathrm{F}(\mathcal{N})} K_F$$

est un sous-groupe normal de G. D'autre part on a

$$\bigcup_{H \in \mathcal{N}} H \subset \bigcup_{F \in \mathrm{F}(\mathcal{N})} K_F$$

puisque si $x \in \bigcup_{H\in\mathcal{N}} H$ il existe $H_x \in \mathcal{N}$ tel que $x \in H_x$, ainsi si $F = \{H_x\}$ alors $F \in \mathrm{F}(\mathcal{N})$ et $x \in K_F$. Par suite $\bigcup_{F\in\mathrm{F}(\mathcal{N})} \sum_{H\in F} H$ est un groupe normal contenant $\bigcup_{H\in\mathcal{N}} H$ et

$$\mathbf{grn}(\bigcup_{H\in\mathcal{N}} H) \subset \bigcup_{F\in\mathrm{F}(\mathcal{N})} \sum_{H\in F} H$$

Enfin il est clair que pour tout $F \in \mathrm{F}(\mathcal{N})$

$$\sum_{H\in F} H \subset \mathbf{grn}(\bigcup_{H\in\mathcal{N}} H)$$

ainsi

$$\bigcup_{F\in\mathrm{F}(\mathcal{N})} \sum_{H\in F} H \subset \mathbf{grn}(\bigcup_{H\in\mathcal{N}} H)$$

■

On décrit maintenant les éléments de $\mathbf{grn}(X)$ lorsque X est un sous-ensemble d'un groupe G. On pose systématiquement $\mathbf{grn}(\varnothing) = \mathbf{gr}(\varnothing) = \{e\}$

Lemme 8.31 $(\mathbb{Z}, +, \centerdot, O)$ *désigne un ensemble d'entiers relatifs et on notera* $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z}/n \geq 0\}$. *On note* $(G, *)$ *un groupe où* $*$ *est notée multiplicativement* $* : (x, y) \mapsto xy$ *et* $A \subset G$ *un sous-ensemble de* G

(i) Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ *et tout* $(g, x) \in G \times G$

$$(gxg^{-1})^{\nu} = gx^{\nu}g^{-1}$$

(ii) Il existe une unique application

$$\mathbf{pn}_A : (\nu, g, x) \mapsto \mathbf{pn}_A(\nu, g, x)$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *pour tout* $(\nu, g, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$

$$\mathbf{pn}_A(\nu, g, x)(0) = g_0 x_0^{\nu_0} g_0^{-1}$$

2. *pour tout* $(\nu, g, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{pn}_A(\nu, g, x)(n+1) = \mathbf{pn}_A(\nu, g, x)(n)\ g_{n+1} x_{n+1}^{\nu_{n+1}} g_{n+1}^{-1}$$

(iii) Si $\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ *vérifie : pour tout* $k > p$ $\nu_k = 0$ *alors pour tout* $(g, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $n \geq p$

$$\mathbf{pn}_A(\nu, g, x)(n) = \mathbf{p}_A(\nu, g, x)(p).$$

(iv) Si les triplets $(\nu, g, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $(\mu, h, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *vérifient*

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n \quad \mu_k = \nu_k \text{ et } g_k x_k g_k^{-1} = h_k y_k h_k^{-1}$$

alors

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n \quad \mathbf{pn}_A(\nu, g, x)(k) = \mathbf{pn}_A(\mu, h, y)(k).$$

(v) Posons $\Delta = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$ *, la relation* κ_A *de* Δ *dans* G *définie par*

$$\kappa_A = \{((\nu, g, x, n), y) \in \Delta \times G/y = \mathbf{pn}_A(\nu, g, x)(n)\}$$

est une application et $\mathrm{im}(\kappa_A)$ *est un sous-groupe normal de* G.

(vi) $\mathrm{im}(\kappa_A)$ *est le sous-groupe normal engendré par* A :

$$\mathrm{im}(\kappa_A) = \mathbf{grn}(A)$$

(vii) Si $\Gamma(A) = \Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on pose*

$$\Gamma_n(A) = \Gamma_n = \{(\nu, g, x) \in \Gamma / \forall\ k \geq n+1 \quad x_k^{\nu_k} = e\}\ ,$$

$$\mathbf{pn}_A(\Gamma_n) = \{u \in G / \exists\ (\nu, g, x) \in \Gamma_n : u = \mathbf{pn}_A(\nu, g, x)(n)\}$$

et

$$\Gamma_n^*(A) = \Gamma_n^* = \{(\nu, g, x) \in \Gamma_n / \forall\ k \leq n \quad x_k^{\nu_k} \neq e\}$$
$$\mathbf{pn}_A(\Gamma_n^*) = \{u \in G / \exists\ (\nu, g, x) \in \Gamma_n^* : u = \mathbf{pn}_A(\nu, g, x)(n)\}$$

alors

1. $\mathbf{grn}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{pn}_A(\Gamma_n)$
2. *Si* $(\mathbf{grn}(A))^* = \{x \in \mathbf{grn}(A))/x \neq e\}$ *alors*

$$(\mathbf{grn}(A))^* \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{pn}_A(\Gamma_n^*)$$

en d'autre termes, pour que $x \in \mathbf{grn}(A))$ *et* $x \neq e$ *il faut qu'il existe un quadruplet* $(\nu, g, x, n) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$ *vérifiant :*

I_0 *pour tout* $k \in \mathbb{N}_n$ *on a* $x_k^{\nu_k} \neq e$

I_1 $x = \kappa_A(\nu, g, x, n)$

(viii) Si

$$\bigcup_{g \in G} gAg^{-1} = \{x \in G / \exists\ (a, g) \in A \times G : x = gag^{-1}\}$$

alors

$$\mathbf{grn}(A) = \mathbf{gr}\left(\bigcup_{g \in G} gAg^{-1}\right)$$

En particulier si

$$\bigcup_{g \in G} gAg^{-1} \subset \mathbf{gr}(A)$$

alors $\mathbf{gr}(A)$ *est un sous-groupe normal de* G.

(ix)Si A *et* B *sont des sous-ensembles de* G *alors*

1. $$\mathbf{grn}(A \cup B) = \mathbf{grn}(A) + \mathbf{grn}(B)\ .$$
2. *si* A *est fini alors*
$$\mathbf{grn}(A) = \sum_{x \in A} \mathbf{grn}(x)$$

(x) Pour tout sous-ensemble fini $F \neq \{e\}$ *de* G *il existe un sous-ensemble* L *de* F *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\mathbf{grn}(F) = \mathbf{grn}(L)$
2. $e \notin L$ *et pour tout* $x \in L$, x *n'appartient pas à* $\mathbf{grn}(L \cap \{x\}^c)$

(xi) Si $\mathrm{F}(A)$ *est la famille des sous-ensembles finis de* A

$$\mathbf{grn}(A) = \bigcup_{F\in\mathrm{F}(A)} \sum_{x\in F} \mathbf{grn}(x) = \bigcup_{F\in\mathrm{F}(A)} \mathbf{grn}(F)$$

Preuve

(i)

On montre d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(gxg^{-1})^n = gx^n g^{-1} \ .$$

On pose

$$U = \{n \in \mathbb{N}/(gxg^{-1})^n = gx^n g^{-1}\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}$ en vérifiant

1. $0 \in U$
2. $n \in U \Rightarrow n+1 \in U$.

1. L'assertion $0 \in U$ provient des égaltités

$$e = (gxg^{-1})^0 = gg^{-1} = geg^{-1} = gx^0 g^{-1}$$

2. Si $n \in U$ alors

$$(gxg^{-1})^{n+1} = (gxg^{-1})^n (gxg^{-1}) = (gx^n g^{-1})(gxg^{-1})$$

ainsi

$$(gxg^{-1})^{n+1} = gx^n (g^{-1}g)xg^{-1} = gx^{n+1}g^{-1} \ .$$

Ainsi $U = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(gxg^{-1})^n = gx^{n+1}g^{-1}$. En particulier on obtient pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$(gxg^{-1})^m((gxg^{-1})^{-1})^n = (gxg^{-1})^m (gx^{-1}g^{-1})^n) = (gx^m g^{-1})(g(x^{-1})^n g^{-1})$$

d'où

$$(gxg^{-1})^m((gxg^{-1})^{-1})^n = gx^m (x^{-1})^m g^{-1} \tag{8.68}$$

mais par définition (voir lemme [8.26]) page 290) si $\nu = m - n$

$$(gxg^{-1})^m((gxg^{-1})^{-1})^n = (gxg^{-1})^\nu \quad \text{et} \quad x^m(x^{-1})^n = x^\nu$$

ainsi l'égalité (8.68) s'écrit

$$(xxg^{-1})^\nu = gx^\nu g^{-1}$$

(ii)

Preuve de l'existence

On considère l'application φ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)$ définie par

$$\varphi(\nu,g,x)(k) = g_k x_k^{\nu_k} g_k^{-1},$$

si π^d est l'application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)$ définie par le lemme [8.3] page 196 on montre que l'application $\mathbf{pn}_A = \pi^d \circ \varphi$ vérifie les propriétés énoncées . or par définition de π^d on a (voir (8.2) page 196)

1. $$\mathbf{pn}_A(\nu,g,x)(0) = \pi^d(\varphi(\nu,g,x))(0) = \varphi(\nu,g,x)(0) = g_0 x_0^{\nu_0} g_0^{-1}$$

2.
$$\mathbf{pn}_A(\nu,g,x)(n+1)=\pi^d(\varphi(\nu,g,x))(n+1)=\pi^d(\varphi(\nu,g,x))(n)\varphi(\nu,g,x)(n+1)$$

or
$$\pi^d(\varphi(\nu,g,x))(n)\varphi(\nu,g,x)(n+1)=\mathbf{pn}_A(\nu,g,x)(n)\ g_{n+1}x_{n+1}^{\nu_{n+1}}g_{n+1}^{-1}$$

Preuve de l'unicité

Si p et p' sont des applications de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)$ qui vérifient les propriétés *1.* et *2.* on montre que $p=p'$ en vérifiant que pour tout $(\nu,g,x)\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ l'ensemble

$$H_{(\nu,g,x)}=\{n\in\mathbb{N}/p(\nu,g,x)(n)=p'(\nu,g,x)(n)\}$$

est héréditaire. Or :

1. $0\in H_{(\nu,g,x)}$ puisque *1.* permet d'affirmer que
$$p(\nu,g,x)(0)=g_0x_0^{\nu_0}g_0^{-1}=p'(\nu,g,x)(0)$$
2. Si $n\in H_{(\nu,g,x)}$ alors d'après *2.*
$$p(\nu,g,x)(n+1)=p(\nu,g,x)(n)g_{n+1}x_{n+1}^{\nu_{n+1}}g_{n+1}^{-1}$$
et l'égalité $p(\nu,g,x)(n)=p'(\nu,g,x)(n)$ entraîne
$$p(\nu,g,x)(n+1)=p'(\nu,g,x)(n)g_{n+1}x_{n+1}^{\nu_{n+1}}g_{n+1}^{-1}=p'(\nu,g,x)(n+1)$$

(iii)

Si $\nu_k=0$ pour tout $k>p$ alors pour $k>p$

$$\varphi(\nu,g,x)(k)=g_kx_k^{\nu_k}g_k^{-1}=g_kg_k^{-1}=e$$

ainsi le lemme [8.3] page 196 permet d'affirmer que

$$\mathbf{pn}_A(\nu,g,x)(k)=\pi^d(\varphi(\nu,g,x))(k)=\pi^d(\varphi(\nu,g,x))(p)=\mathbf{pn}_A(\nu,g,x)(p)$$

(iv)

Si
$$\forall\ k\in\mathbb{N}_n\quad\mu_k=\nu_k\quad\text{et}\quad g_kx_k^{\nu_k}g_k^{-1}=h_ky_k^{\mu_k}h_k^{-1}$$
alors
$$\forall\ k\in\mathbb{N}_n\quad\varphi(\nu,g,x)(k)=\varphi(\mu,h,y)(k)$$
ainsi le lemme [8.3] page 196 permet d'affirmer que

$$\mathbf{pn}_A(\nu,g,x)(k)=\pi^d(\varphi(\nu,g,x))(k)=\pi^d(\varphi(\mu,h,y))(k)=\mathbf{pn}_A(\mu,h,y)(k)$$

(v)

1. D'abord puisque $\mathrm{dom}(\mathbf{pn}_A)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ et pour tout $(\nu,g,x)\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ on a $\mathrm{dom}(\mathbf{p}_A(\nu,g,x))=\mathbb{N}$ on obtient
$$\mathrm{dom}(\kappa_A)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)\times\mathbb{N}.$$

2. Ensuite κ_A est une fonction puisque si

$$((\nu, g, x, n), y) \in \kappa_A \ et \ ((\nu, g, x, n), y') \in \kappa_A$$

alors

$$(n, y) \in \mathbf{pn}_A(\nu, x) \ et \ (n, y') \in \mathbf{pn}_A(\nu, x).$$

ainsi l'égalité $y = y'$ suit du fait que $\mathbf{pn}_A(\nu, x)$ est une fonction.

On montre que

$$\mathrm{im}(\kappa_A) \text{ est un sous-groupe normal de } (G, *).$$

1. on montre $e \in \mathrm{im}(\kappa_A)$.
   En effet, si

   $$(\nu, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G)$$

   vérifie $\nu_0 = 0$ et $g_0 = e$ alors pour tout $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ on a

   $$\kappa_A(\nu, g, x, 0) = e x_0^{\nu_0} e^{-1} = x_0^0 = e.$$

2. on montre $[(\alpha, \beta) \in \mathrm{im}(\kappa_A) \times \mathrm{im}(\kappa_A) \Rightarrow \alpha\beta \in \mathrm{im}(\kappa_A)]$
   En effet si $\alpha \in \mathrm{im}(\kappa_A)$ et $\beta \in \mathrm{im}(\kappa_A)$ alors il existe
   — $(\mu, \nu) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$,
   — $(x, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$
   — $(g, h) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G)$
   — $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
   tels que

   $$\alpha = \kappa_A(\mu, h, x, n) \ et \ \beta = \kappa_A(\nu, g, y, p).$$

   On pose

   $$H = \{k \in \mathbb{N} / \kappa_A(\mu, h, x, n)\kappa_A(\nu, g, y, k) \in \mathrm{im}(\kappa_A)\},$$

   H est donc l'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe

   $$(\xi, f, t, q) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$$

   vérifiant

   $$\kappa_A(\xi, f, t, q) = \kappa_A(\mu, h, x, n)\kappa_A(\nu, g, y, k) \ ,$$

   on montre que H est héréditaire.
   (a) D'abord on montre que $0 \in H$. On considère le triplet

   $$(\rho, f, z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$$

   défini par

   $$\rho_k = \begin{cases} \mu_k & si \quad k \leq n \\ \nu_{k-(n+1)} & si \quad k \geq n+1 \end{cases}$$

   $$f_k = \begin{cases} h_k & si \quad k \leq n \\ g_{k-(n+1)} & si \quad k \geq n+1 \end{cases} .$$

   et

   $$z_k = \begin{cases} x_k & si \quad k \leq n \\ y_{k-(n+1)} & si \quad k \geq n+1 \end{cases} .$$

   On montre que

   $$\kappa_A(\rho, f, z, n+1) = \kappa_A(x, \mu, n)\kappa_{f,A}(\nu, g, y, 0).$$

   Par définition on a

   $$\kappa_A(\rho, z, n+1) = \mathbf{pn}_A(\rho, f, z)(n+1) = \mathbf{pn}_A(\rho, f, z)(n) \ f_{n+1} z_{n+1}^{\rho_{n+1}} f_{n+1}^{-1}$$

   or :

— puisque $\rho_{n+1} = \nu_0$ et $z_{n+1} = y_0$ et $f_{n+1} = g_0$ on obtient

$$\kappa_A(\rho, f, z, n+1) = \mathbf{pn}_A(\rho, f, z)(n)\ g_0 y_0^{v_0} g_0^{-1}$$

— puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ $\rho_k = \mu_k$, $z_k = x_k$ et $f_k = h_k$ on obtient par (iv)

$$\mathbf{pn}_A(\rho, f, z)(n) = \mathbf{pn}_A(\mu, h, x)(n) = \kappa_A(\mu, h, x, n)$$

par suite, puisque $\kappa_A(\nu, g, y, 0) = g_0 y_0^{\nu_0} g_0^{-1}$, on obtient

$$\kappa_A(\rho, f, z, n+1) = \kappa_A(\mu, h, x, n)\ g_0 y_0^{\nu_0} g_0^{-1} = \kappa_A(\mu, h, x, n)\kappa_A(\nu, g, y, 0)$$

c'est à dire $0 \in H$

(b) Ensuite on montre $[k \in H \Rightarrow k+1 \in H]$. En effet par définition on a

$$\kappa_A(\mu, h, x, n)\kappa_A(\nu, g, y, k+1) = \kappa_A(\mu, h, x, n)\kappa_A(\nu, g, y, k)\ g_{k+1} y_{k+1}^{\nu_{k+1}} g_{k+1}^{-1} \tag{8.69}$$

or l'assertion $k \in H$ entraîne l'existence d'un quadruplet

$$(\xi, f, t, q) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$$

tel que

$$\kappa_A(\mu, h, x, n)\kappa_A(\nu, y, k) = \kappa_A(\xi, f, t, q)$$

par suite, pour un tel quadruplet, l'égalité (8.69) s'écrit

$$\kappa_A(\mu, h, x, n)\kappa_A(\nu, g, y, k+1) = \kappa_A(\xi, f, t, q)\ g_{k+1} y_{k+1}^{v_{k+1}} g_{k+1}^{-1} \tag{8.70}$$

il suffit donc de recopier (a) pour obtenir $k+1 \in H$. On considère le triplet

$$(\rho, d, z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$$

défini par

$$\rho_j = \begin{cases} \xi_j & si \quad j \leq q \\ \nu_{k+1} & si \quad j \geq q+1 \end{cases}$$

$$d_j = \begin{cases} f_j & si \quad j \leq q \\ g_{k+1} & si \quad j \geq q+1 \end{cases} .$$

et

$$z_j = \begin{cases} t_j & si \quad j \leq q \\ y_{k+1} & si \quad j \geq q+1 \end{cases} .$$

On montre que

$$\kappa_A(\rho, d, z, q+1) = \kappa_A(\xi, t, q)\ y_{k+1}^{v_{k+1}}.$$

Par définition on a

$$\kappa_A(\rho, d, z, q+1) = \mathbf{pn}_A(\rho, d, z)(q+1) = \mathbf{pn}_A(\rho, d, z)(q)\ d_{q+1} z_{q+1}^{\rho_{q+1}} d_{q+1}^{-1}$$

or :

— puisque $\rho_{q+1} = \nu_{k+1}$, $d_{q+1} = g_{k+1}$ et $z_{q+1} = y_{k+1}$ on obtient

$$\kappa_A(\rho, d, z, q+1) = \mathbf{pn}_A(\rho, d, z)(q)\ g_{k+1} y_{k+1}^{\nu_{k+1}} g_{k+1}^{-1}$$

— puisque pour tout $j \in \mathbb{N}_q$ $\rho_j = \xi_j$, $d_j = f_j$ et $z_j = t_j$ on obtient par (v)

$$\mathbf{pn}_A(\rho, d, z)(q) = \mathbf{pn}_A(\xi, f, t)(q) = \kappa_A(\xi, f, t, q)$$

par suite
$$\kappa_A(\rho,d,z,q+1)=\kappa_A(\xi,f,t,q)\ g_{k+1}y_{k+1}^{\nu_{k+1}}g_{k+1}^{-1}$$
et (8.70) montre alors que
$$\kappa_A(\rho,d,z,q+1)=\kappa_A(\xi,f,t,q)\ g_{k+1}y_{k+1}^{v_{k+1}}g_{k+1}^{-1}=\kappa_A(\mu,h,x,n)\kappa_A(\nu,g,y,k+1).$$

Ainsi H est héréditaire et pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a
$$\kappa_A(\mu,h,x,n)\kappa_A(\nu,g,y,k)\in \mathrm{im}(\kappa_A).$$
en particulier
$$\alpha\beta=\kappa_A(\mu,h,x,n)\kappa_A(\nu,g,y,p)\in \mathrm{im}(\kappa_A).$$
1. et 2. montre que $\mathrm{im}(\kappa_A)$ est un sous-monoïde de G.

3. On montre $\alpha\in\mathrm{im}(\kappa_A)\Rightarrow\alpha^{-1}\in\mathrm{im}(\kappa_A)$.
Il suffit de voir que pour tout
$$(\nu,g,x,n)\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)\times\mathbb{N}$$
on a
$$(\kappa_A(\nu,g,x,n))^{-1}\in\mathrm{im}(\kappa_A)\ .$$
Si $(\nu,g,x)\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ on pose
$$H=\{n\in\mathbb{N}/(\kappa_A(\nu,x,n))^{-1}\in\mathrm{im}(\kappa_A)\}$$
et on montre que $H=\mathbb{N}$ en vérifiant
(a) $0\in H$
(b) $n\in H\Rightarrow k+1\in U$.

(a) D'abord $0\in H$ puisque
$$\kappa_A(\nu,g,x,0)=g_0x_0^{\nu_0}g_0^{-1}$$
par suite pour toute suite $\mu\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ telle que $\mu_0=-\nu_0$
$$(\kappa_A(\nu,g,x,0))^{-1}=\kappa_A(\mu,g,x,0)=g_0x_0^{-\nu_0}g_0^{-1}$$

(b) Ensuite on montre $n\in H\Rightarrow n+1\in H$. En effet par définition on a
$$\kappa_A(\nu,g,x,n+1)=\kappa_A(\nu,g,x,n)g_{n+1}x_{n+1}^{\nu_{n+1}}g_{n+1}^{-1}$$
mais l'assertion $n\in H$ entraîne l'existence d'un quadruplet
$$(\mu,h,y,p)\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Z})\times\mathbb{Z})\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},G)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)\times\mathbb{N}$$
tel que $(\kappa_A(\nu,g,x,n))^{-1}=\kappa_A(\mu,h,y,p)$ par suite
$$(\kappa_A(\nu,g,x,n+1))^{-1}=g_{n+1}(x_{n+1}^{\nu_{n+1}})^{-1}g_{n+1}^{-1}\kappa_A(\mu,h,y,p)$$
Ainsi $(\kappa_A(\nu,x,n+1))^{-1}$ est le produit de deux éléments de $\mathrm{im}(\kappa_A)$ et 2. montre alors que $(\kappa_A(\nu,x,n+1))^{-1}\in\mathrm{im}(\kappa_A)$.

4. Enfin on montre $\alpha \in \mathrm{im}(\kappa_A) \Rightarrow \forall\ u \in G\ u\alpha u^{-1} \in \mathrm{im}(\kappa_A)$.
Il suffit de voir que pour tout

$$(\nu, g, x, n) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$$

on a

$$u\kappa_A(\nu, g, x, n)u^{-1} \in \mathrm{im}(\kappa_A)\ . \tag{8.71}$$

Si $\Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ on pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \forall\ ((\nu, g, x), u) \in \Gamma \times G : u\kappa_A(\nu, g, x, n)u^{-1} \in \mathrm{im}(\kappa_A)\}$$

et on montre que H est héréditaire.

(a) D'abord on montre $0 \in H$.
Si $(\nu, g, x) \in \Gamma$ alors puisque $\kappa_A(\nu, g, x, 0) = g_0 x_0^{\nu_0} g_0^{-1}$ on a

$$u\kappa_A(\nu, g, x, 0)u^{-1} = (ug_0)x_0^{\nu_0}(ug_0)^{-1}$$

Ainsi pour tout $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G)$ vérifiant $h_0 = ug_0$ on a

$$u\kappa_A(\nu, g, x)(0)u^{-1} = \kappa_A(\nu, h, x, 0)$$

(b) Ensuite on montre $n \in H \Rightarrow n + 1 \in H$.
Si $(\nu, g, x) \in \Gamma$ alors pour tout $u \in G$

$$u\kappa_A(\nu, g, x, n+1)u^{-1} = u\kappa_A(\nu, g, x, n)g_{n+1}x_{n+1}^{\nu_{n+1}}g_{n+1}^{-1}u^{-1}$$

ainsi

$$u\kappa_A(\nu, g, x, n+1)u^{-1} = (u\kappa_A(\nu, g, x, n)u^{-1})((ug_{n+1})x_{n+1}^{\nu_{n+1}}(ug_{n+1})^{-1})$$

— puisque $n \in H$ on a $u\kappa_A(\nu, g, x)(n)u^{-1} \in \mathrm{im}(\kappa_A)$
— d'après (a), $(ug_{n+1})x_{n+1}^{\nu_{n+1}}(ug_{n+1})^{-1} \in \mathrm{im}(\kappa_A)$
par suite $u\kappa_A(\nu, g, x)(n+1)u^{-1}$ est le produit de deux éléments de $\mathrm{im}(\kappa_A)$ et (par 2.)

$$u\kappa_A(\nu, g, x)(n+1)u^{-1} \in \mathrm{im}(\kappa_A)$$

(vi)

1. D'abord on montre $\mathbf{grn}(A) \subset \mathrm{im}(\kappa_A)$.
Puisque $\mathrm{im}(\kappa_A)$ 'est un sous-groupe normal de G il suffit de montrer l'inclusion $A \subset \mathrm{im}(\kappa_A)$. Or si $a \in A$ pour tout triplet

$$(\nu, g, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$$

vérifiant $g_0 = e$, $\nu_0 = 1$ et $x_0 = a$ on obtient

$$a = \kappa_A(\nu, g, x, 0)$$

2. Ensuite on montre $\mathrm{im}(\kappa_A) \subset \mathbf{grn}(A)$.
Il s'agit de montrer que pour tout

$$(\nu, g, x, n) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$$

on a $\kappa_A(\nu, g, x, n) \in \mathbf{grn}(A)$. Si

$$(\nu, g, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$$

on pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \kappa_A(\nu, g, x, n) \in \mathbf{grn}(A)\}$$

et on montre que H est héréditaire.

(a) D'abord on montre $0 \in H$.
Par définition $\kappa_A(\nu, g, x, 0) = g_0 x_0^{\nu_0} g_0^{-1}$
— puisque $x_0 \in A$ et $\mathbf{grn}(A)$ est un sous-groupe de G, on obtient $x_0^{\nu_0} \in \mathbf{grn}(A)$
— puisque $\mathbf{grn}(A)$ est un sous-groupe normal de G, on obtient

$$g_0 x_0^{\nu_0} g_0^{-1} \in \mathbf{grn}(A)$$

(b) Ensuite on montre $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$.
Par définition $\kappa_A(\nu, g, x, n+1) = \kappa_A(\nu, g, x, n) g_{n+1} x_{n+1}^{\nu_{n+1}} g_{n+1}^{-1}$
— puisque $n \in H$ $\kappa_A(\nu, g, x, n) \in \mathbf{grn}(A)$
— puisque $\mathbf{grn}(A)$ est un sous-groupe normal de G, on a

$$g_{n+1} x_{n+1}^{\nu_{n+1}} g_{n+1}^{-1} \in \mathbf{grn}(A)$$

Ainsi $\kappa_A(\nu, g, x, n+1)$ est le produit de deux éléments de $\mathbf{grn}(A)$ et $n+1 \in H$.

(vii)

1. On montre $\mathbf{grn}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{pn}_A(\Gamma_n)$

a D'abord on montre $\mathbf{grn}(A) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{pn}_A(\Gamma_n)$.

D'après (vi) on a $\mathbf{grn}(A) = \mathrm{im}(\kappa_A)$ si $u \in \mathbf{grn}(A)$ il existe un quadruplet $(\mu, g, x, n) \in \Delta$ tel que

$$u = \kappa_A(\mu, g, x, n) = \mathbf{pn}_A(\mu, g, x)(n)$$

Si $\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ 'est définie par

$$\nu_k = \begin{cases} \mu_k & si \quad k \in \mathbb{N}_n \\ 0 & si \quad k \geq n+1 \end{cases}$$

alors $(\nu, g, x) \in \Gamma_n$ et d'après (iv)

$$\mathbf{pn}_A(\mu, g, x)(n) = \mathbf{pn}_A(\nu, g, x)(n) = u\ .$$

par suite $u \in \mathbf{pn}_A(\Gamma_n)$.

b Ensuite on montre $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{pn}_A(\Gamma_n) \subset \mathbf{grn}(A))$.

Si $u \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{pn}_A(\Gamma_n)$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(\nu, g, x) \in \Gamma_n$ tel que

$$u = \mathbf{pn}_A(\nu, g, x)(n) = \kappa_A(\nu, g, x, n)$$

ainsi $u \in \mathrm{im}(\kappa_A)$ et (vi) montre que $u \in \mathbf{grn}(A)$

2. On montre $\mathbf{grn}(A)^* \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{pn}_A(\Gamma_n^*)$

Posons $(\mathbf{pn}_A(\Gamma_n))^* = \{u \in \mathbf{pn}_A(\Gamma_n) / u \neq e\}$. D'après *1.* on a

$$(\mathbf{grn}(A))^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbf{pn}_A(\Gamma_n))^*$$

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \in (\mathbf{pn}_A(\Gamma_n))^*$ il existe $p \in \mathbb{N}_n$ tel que $u \in \mathbf{pn}_A(\Gamma_p^*)$. On pose

$$U = \{n \in \mathbb{N} / (\mathbf{pn}_A(\Gamma_n))^* \subset \bigcup_{p \in \mathbb{N}_n} \mathbf{pn}_A(\Gamma_p^*)\}$$

en d'autre termes on a

$$U = \{n \in \mathbb{N} / \forall\ u \in (\mathbf{pn}_A(\Gamma_n))^* \quad \exists\ p \in \mathbb{N}_n : u \in \mathbf{pn}_A(\Gamma_p^*)\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}$ en vérifiant

1. $0 \in U$
2. $n \in U \Rightarrow n+1 \in U$.

1. On montre $0 \in U$.
   Puisque $\mathbf{pn}_A(\Gamma_0) = \{u \in G / \exists(\nu, g, x) \in \Gamma_0 : u = g_0 x_0^{\nu_0} g_0^{-1}\}$ on a

$$u = e \Leftrightarrow g_0 x_0^{\nu_0} g_0^{-1} = e \Leftrightarrow x_0^{\nu_0} = e$$

   ainsi

$$(\mathbf{pn}_A(\Gamma_0))^* = \mathbf{pn}_A(\Gamma_0^*)$$

2. On montre $n \in U \Rightarrow n+1 \in U$.
   Si $u \in \mathbf{pn}_A(\Gamma_{n+1})$ il existe $(\theta, g, x) \in \Gamma_{n+1}$ tel que

$$u = \mathbf{pn}_A(\theta, g, x)(n+1) = \mathbf{pn}_A(\theta, g, x)(n) g_{n+1} x_{n+1}^{\theta_{n+1}} g_{n+1}^{-1} \tag{8.72}$$

   Posons $v = \mathbf{pn}_A(\theta, g, x)(n)$ alors $v \in \mathbf{pn}_A(\Gamma_n)$ puisque si μ est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$\mu_k = \begin{cases} \theta_k & si \quad k \in \mathbb{N}_n \\ 0 & si \quad k \geq n+1 \end{cases}$$

   alors $(\mu, g, x) \in \Gamma_n$ et (d'après (iv)) $v = \mathbf{pn}_A(\mu, g, x)(n)$.
   Si $v = e$ alors $u = g_{n+1} x_{n+1}^{\theta_{n+1}} g_{n+1}^{-1}$ par suite $x_{n+1}^{\theta_{n+1}} \neq e$ et le triplet(ν, h, y) défini par

$$\nu_k = \begin{cases} \theta_{n+1} & si \quad k = 0 \\ 0 & si \quad k \geq 1 \end{cases}$$

$$h_k = \begin{cases} g_{n+1} & si \quad k = 0 \\ e & si \quad k \geq 1 \end{cases}$$

   et $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad y_k = x_{n+1}$ vérifie $(\nu, h, y) \in \Gamma_0^*$ et $u = \mathbf{pn}_A(\nu, h, y)(0)$ par suite $u \in \mathbf{pn}_A(\Gamma_0^*)$.
   Si $v \neq e$ alors $v \in (\mathbf{pn}_A(\Gamma_n))^*$ et puisque $n \in U$ il existe $p \in \mathbb{N}_n$ tel que $v \in \mathbf{pn}_A(\Gamma_p^*)$, ainsi il existe $(\zeta, f, y) \in \Gamma_p^*$ tel que

$$\mathbf{pn}_A(\zeta, f, y)(p) = v$$

   l'égalité (8.72) s'écrit donc

$$u = \mathbf{pn}_A(\zeta, f, y)(p)\ g_{n+1} x_{n+1}^{\theta_{n+1}} g_{n+1}^{-1}$$

   (a) si $x_{n+1}^{\theta_{n+1}} = e$ alors $g_{n+1} x_{n+1}^{\theta_{n+1}} g_{n+1}^{-1} = e$ par suite

$$u = \mathbf{pn}_A(\zeta, f, y)(p)$$

   et $u \in \mathbf{pn}_A(\Gamma_p^*)$

   (b) si $x_{n+1}^{\theta_{n+1}} \neq e$ alors $g_{n+1} x_{n+1}^{\theta_{n+1}} g_{n+1}^{-1} \neq e$ et on montre que $u \in \mathbf{pn}_A(\Gamma_{p+1}^*)$ en considérant les applcations (ν, h, z) définies par

$$\nu_k = \begin{cases} \zeta_k & si \quad k \in \mathbb{N}_p \\ \theta_{n+1} & si \quad k = p+1 \\ 0 & si \quad k \geq p+2 \end{cases}$$

$$h_k = \begin{cases} f_k & si \quad k \in \mathbb{N}_p \\ g_{n+1} & si \quad k = p+1 \\ e & si \quad k \geq p+2 \end{cases}$$

   et

$$z_k = \begin{cases} y_k & si \quad k \in \mathbb{N}_p \\ x_{n+1} & si \quad k \geq p+1 \end{cases}$$

Puisque pour tout $k \geq p+2$ on a $z_k^{\nu_k} = z_k^0 = e$ et pour $k \leq p+1$ on a $z_k^{\nu_k} = y_k^{\zeta_k} \neq e$ si $k \leq p$ et $z_{p+1}^{\nu_{p+1}} = x_{n+1}^{\theta_{n+1}}$ on a $(\nu, h, z) \in \Gamma_{p+1}^*$. D'autre part

$$\mathbf{pn}_A(\nu, h, z)(p+1) = \mathbf{pn}_A(\nu, h, z)(p) h_{p+1} z_{p+1}^{\nu_{p+1}} h_{p+1}^{-1}$$

— Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_p$, $\nu_k = \zeta_k$, $h_k = f_k$ et $z_k = y_k$ on a

$$\mathbf{pn}_A(\nu, h, z)(p) = \mathbf{pn}_A(\zeta, f, y)(p) = v$$

par suite

$$\mathbf{pn}_A(\nu, h, z)(p+1) = v h_{p+1} z_{p+1}^{\nu_{p+1}} h_{p+1}^{-1}$$

— puisque $h_{p+1} = g_{n+1}$, $z_{p+1} = x_{n+1}$ et $\nu_{p+1} = \theta_{n+1}$ on obtient

$$\mathbf{pn}_A(\nu, h, z)(p+1) = v g_{n+1} x_{n+1}^{\theta_{n+1}} g_{n+1}^{-1} = u$$

par suite on a $u \in \mathbf{pn}_A(\Gamma_{p+1}^*)$ et $n+1 \in U$.

Ainsi $U = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(\mathbf{pn}_A(\Gamma_n))^* \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}_n} \mathbf{pn}_A(\Gamma_k^*) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{pn}_A(\Gamma_n^*) \ .$$

En particulier

$$(\mathbf{grn}(A))^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbf{pn}_A(\Gamma_n))^* \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{pn}_A(\Gamma_n^*)$$

(viii)

1. Puisque $\mathbf{grn}(A)$ est un sous-groupe normal, pour tout $a \in A$ et $g \in G$ on a $gag^{-1} \in \mathbf{grn}(A)$ par suite $\bigcup_{g \in G} gAg^{-1} \subset \mathbf{grn}(A)$ et

$$\mathbf{gr}(\bigcup_{g \in G} gAg^{-1}) \subset \mathbf{grn}(A)$$

2. Si $u \in \mathbf{grn}(A)$ alors d'après (vi) il existe un quadruplet

$$(\nu, g, x, p) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{N}$$

tel que $u = \kappa_A(\nu, g, x, p)$ on pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \kappa_A(\nu, g, x, n) \in \mathbf{gr}(\bigcup_{g \in G} gAg^{-1}))\}$$

et on montre que H est héréditaire.

(a) D'abord on montre $0 \in H$.
Par définition $\kappa_A(\nu, g, x, 0) = g_0 x_0^{\nu_0} g_0^{-1}$, or $g_0 x_0 g_0^{-1} \in \bigcup_{g \in G} gAg^{-1}$ par suite $(g_0 x_0 g_0^{-1})^{\nu_0} \in \mathbf{gr}(\bigcup_{g \in G} gAg^{-1})$ et (i) montre que

$$(g_0 x g_0^{-1})^{\nu_0} = g_0 x^{\nu_0} g_0^{-1} = \kappa_A(\nu, g, x, 0)$$

(b) Ensuite on montre $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$.
Par définition $\kappa_A(\nu, g, x, n+1) = \kappa_A(\nu, g, x, n) g_{n+1} x_{n+1}^{\nu_{n+1}} g_{n+1}^{-1}$
— puisque $n \in H$ $\kappa_A(\nu, g, x, n) \in \mathbf{gr}(\bigcup_{g \in G} gAg^{-1})$

— d'après (a)

$$g_{n+1}x_{n+1}^{\nu_{n+1}}g_{n+1}^{-1} \in \mathbf{gr}(\bigcup_{g\in G} gAg^{-1})$$

Ainsi $\kappa_A(\nu, g, x, n+1)$ est le produit de deux éléments de $\mathbf{gr}(\bigcup_{g\in G} gAg^{-1})$ et $n+1 \in H$.

En particulier, si

$$\bigcup_{g\in G} gAg^{-1} \subset \mathbf{gr}(A)$$

alors

$$\mathbf{gr}(\bigcup_{g\in G} gAg^{-1}) \subset \mathbf{gr}(A)$$

par suite $\mathbf{grn}(A) = \mathbf{gr}(A)$ et $\mathbf{gr}(A)$ est normal.

(ix)

1. On montre $\mathbf{grn}(A\cup B) = \mathbf{grn}(A) + \mathbf{grn}(B)$.

   Le lemme [8.30] page 306 permet d'affirmer que

   $$\mathbf{grn}(A) + \mathbf{grn}(B) = \mathbf{grn}(\mathbf{grn}(A)\cup\mathbf{grn}(B))$$

   il suffit donc de montrer

   $$\mathbf{grn}(A\cup B) = \mathbf{grn}(\mathbf{grn}(A)\cup\mathbf{grn}(B))$$

   (a) D'abord, puisque $A\cup B \subset \mathbf{grn}(A)\cup\mathbf{grn}(B)$ on a

   $$\mathbf{grn}(A\cup B) \subset \mathbf{grn}(\mathbf{grn}(A)\cup\mathbf{grn}(B)))$$

   (b) Ensuite :

      i. puisque $A \subset A\cup B$ on a $\mathbf{grn}(A) \subset \mathbf{grn}(A\cup B)$

      ii. puisque $B \subset A\cup B$ on a $\mathbf{grn}(B) \subset \mathbf{grn}(A\cup B)$

      par suite

      $$\mathbf{grn}(A)\cup\mathbf{grn}(B) \subset \mathbf{grn}(A\cup B)$$

      et

      $$\mathbf{grn}(\mathbf{grn}(A)\cup\mathbf{grn}(B)) \subset \mathbf{grn}(A\cup B)$$

2. Puisque

   $$\sum_{x\in A}\mathbf{grn}(x) = \mathbf{grn}(\bigcup_{x\in A}\mathbf{grn}(x))$$

   On montre de même :

   $$\mathbf{grn}(A) = \mathbf{grn}(\bigcup_{x\in A}\mathbf{grn}(x))$$

   (a) Pour tout $x\in A$ on a $\mathbf{grn}(x) \subset \mathbf{grn}(A)$ par suite

   $$\bigcup_{x\in A}\mathbf{grn}(x) \subset \mathbf{grn}(A)$$

   et

   $$\sum_{x\in A}\mathbf{grn}(x) \subset \mathbf{grn}(A)$$

(b) puisque $A \subset \bigcup\limits_{x \in A} \mathbf{grn}(x)$ on a

$$\mathbf{grn}(A) \subset \sum_{x \in A} \mathbf{grn}(x)$$

(x)

Posons

$$\Gamma = \{J \in \mathfrak{P}(F)/\mathbf{grn}(J) = \sum_{x \in J} \mathbf{grn}(x) = \sum_{x \in F} \mathbf{grn}(x) = \mathbf{grn}(F)\}$$

alors $\Gamma \neq \varnothing$ puisque $F \in \Gamma$. Si φ est l'application de Γ dans $\mathbb{N}_{p+1}$ définie par $\varphi(J) = \mathrm{Card}(J)$ on pose

$$m = \min\{k : k \in \varphi(\Gamma)\} = \min\{k : \exists\ J \in \Gamma, \mathrm{Card}(J) = k\}$$

par définition d'un minimum $m \in \varphi(\Gamma)$ ainsi il existe $L \in \Gamma$ vérifiant l'égalité $m = \mathrm{Card}(L)$. Puisque $L \in \Gamma$ on a $\mathbf{grn}(L) = \mathbf{grn}(F)$. D'autre part la définition d'un minimum montre

$$J \in \Gamma \Rightarrow \mathrm{Card}(J) \geq \mathrm{Card}(L) \tag{8.73}$$

1. On montre $e \notin L$. En effet si $e \in L$ alors $\mathrm{Card}(L \cap \{e\}^c) < \mathrm{Card}(L)$ mais $(viii)$ et le lemme [8.29] page 304 montre que

$$\mathbf{grn}(L) = \mathbf{grn}(L \cap \{e\}^c) + \mathbf{grn}(\{e\}) = \mathbf{grn}(L \cap \{e\}^c)$$

   ceci contredit (8.72).
2. On montre

$$x \in L \Rightarrow x \notin \mathbf{grn}(L \cap \{x\}^c)\ .$$

   en effet, si $x \in L$ et $x \in \mathbf{grn}(L \cap \{x\}^c)$ alors $\mathbf{grn}(x) \subset \mathbf{grn}(L \cap \{x\}^c)$ ainsi $(viii)$ et le lemme [8.29] page 304 montre que

$$\mathbf{grn}(L) = \mathbf{grn}(L \cap \{x\}^c) + \mathbf{grn}(x) = \mathbf{grn}(L \cap \{x\}^c)$$

   ainsi $L \cap \{x\}^c$ est un ensemble de cardinal $m - 1$ qui vérifie

$$\mathbf{grn}(L \cap \{x\}^c) = \mathbf{grn}(L) = \sum_{x \in L} \mathbf{grn}(x) = \sum_{x \in F} \mathbf{grn}(x)$$

   par suite $L \cap \{x\}^c \in \Gamma$ et ceci contredit la minimalité de m.

(xi)

(a) On montre que

$$U = \bigcup_{F \in \mathrm{F}(A)} \mathbf{grn}(F)$$

est un sous-groupe normal de G

i. $e \in U$ puisque pour tout $F \in \mathrm{F}(A)$ on a $e \in \mathbf{grn}(F)$
ii. si $x \in U$ alors il existe $F \in \mathrm{F}(A)$ tel que $x \in \mathbf{grn}(F)$, ainsi $x^{-1} \in \mathbf{grn}(F)$ et $x^{-1} \in U$.
iii. si $(x, y) \in U \times U$, il existe $F_x \in \mathrm{F}(A)$ et $F_y \in \mathrm{F}(A)$ tels que $x \in \mathbf{grn}(F_x)$ et $y \in \mathbf{grn}(F_y)$, par suite

$$(x, y) \in \mathbf{grn}(F_x \cup F_y) \times \mathbf{grn}(F_x \cup Fy))$$

   et $xy \in \mathbf{grn}(F_x \cup F_y)$ ainsi $xy \in U$.

iv. Si $(g,x) \in G \times U$ il existe $F \in \mathrm{F}(A)$ tel que $x \in \mathbf{grn}(F)$ par suite

$$gxg^{-1} \in \mathbf{grn}(F)$$

et $gxg^{-1} \in U$

Ainsi, puisque pour tout $x \in A$ on a $x \in \mathbf{grn}(\{x\})$ on obtient $A \subset U$ et $\mathbf{grn}(A) \subset U$. Enfin ,puisque $F \in \mathrm{F}(A) \Rightarrow F \subset A$ on a

$$F \in \mathrm{F}(A) \Rightarrow \mathbf{grn}(F) \subset \mathbf{grn}(A)$$

par suite

$$U \subset \mathbf{grn}(A)$$

■

Le (x) du lemme [8.31] page 311 montre que pour tout sous-ensemble fini F de G il existe une partie $L \subset F$ vérifiant $\mathbf{grn}(F) = \mathbf{grn}(L)$ et

$$\forall\, x \in L \quad x \notin \mathbf{grn}(L \cap \{x\}^c)$$

On notera $L \setminus \{x\} = L \cap \{x\}^c = \{g \in L / g \neq x\}$

Définition 8.30 *On note $(G,*)$ un groupe, un sous-ensemble L de G est dit **normalement libre** (ou n-libre) si*

$$x \in L \Rightarrow x \notin \mathbf{grn}(L \setminus \{x\})\ .$$

On note $\mathcal{L}$ la famille des sous-ensembles bormalement libres de G et

$$\mathcal{L}(A) = \{L \in \mathcal{L} / L \subset A\}$$

Si L est n-libre alors $e \notin L$ puisque $e \in \mathbf{grn}(L \setminus \{e\})$. D'autre part le lemme [8.31] page 311 montre que si F est un sous-ensemble fini de G alors il existe $L \in \mathcal{L}(F)$ tel que $\mathbf{grn}(L) = \mathbf{grn}(F)$

Lemme 8.32 *On note $(G,*)$ un groupe .*

(i) Si L est n-libre tout sous-ensemble de L est n-libre.

(ii) Pour que L soit n-libre il faut et il suffit que tout sous-ensemble fini de L soit n-libre.

(iii) Si $\mathcal{A}$ est une famille de sous-ensemble de G vérifiant la propriété :

$$(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \Rightarrow\ \exists\, C \in \mathcal{A} : A \cup B \subset C$$

alors pour tout sous-ensemble fini F de $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $F \subset A$.

(iv) Si $\mathcal{A}$ est une famille totalement ordonnée de sous-ensembles n-libre de G l'ensemble

$$L = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

est n-libre

(v) Si L_0 est un ensemble n-libre de G, l'ensemble $\mathfrak{L}(L_0) = \{L \in \mathcal{L} / L_0 \subset L\}$ est inductif pour l'inclusion.([6])

(vi) Si $H \lhd G$ est un sous-groupe normal de G l'ensemble

$$\Gamma = \{L \in \mathcal{L} / \mathbf{grn}(L) \cap H = \{e\}\}$$

est inductif.

6. Voir définition [2.14] page 44

Preuve

(i)

Si $I \subset L$ est un sous-ensemble non libre de L il existe un élément $x \in I$ vérifiant $x \in \mathbf{grn}(I \setminus \{x\})$, puisque $I \setminus \{x\} \subset L \setminus \{x\}$ on a

$$x \in L \quad \text{et} \quad x \in \mathbf{grn}(L \setminus \{x\})$$

ainsi L n'est pas libre.

(ii)

D'après (i) la condition est nécéssaire . On montre que si L n'est pas libre il contient un sous-ensemble fini non libre. Si L n'est pas libre il existe $u \in L$ tel que $u \in \mathbf{grn}(L \setminus \{u\})$, D'après le lemme [8.31] page 311 si $u \in \mathbf{grn}(L \setminus \{u\})$ alors, puisque $\mathbf{grn}(L \setminus \{u\}) = \bigcup_{F \in \mathrm{F}(L \setminus \{u\})} \mathbf{grn}(F)$, il existe un sous-ensemble fini $F \subset L \setminus \{u\}$ tel que $u \in \mathbf{grn}(F)$. On montre que l'ensemble $F \cup \{u\}$ est un sous-ensemble non libre de L.

— puisque $F \subset L \setminus \{u\}$ on a $F \cup \{u\} \subset L$

— puisque $u \notin F$ on a $(F \cup \{u\}) \setminus \{u\} = F$

— puisque $u \in \mathbf{grn}(F)$ on a $u \in \mathbf{grn}((F \cup \{u\}) \setminus \{u\})$.

(iii)

Si $(\mathbb{N}, O)$ et un ensemble d'entiers naturels et

$$F \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

est un sous-ensemble de $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ de cardinal $n+1$ on montre qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $F \subset A$. On note $x \in \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, F]$ une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans F et

$$U = \{k \in \mathbb{N}_n / \exists\ A \in \mathcal{A} : x(\mathbb{N}_k) \subset A\} = \{k \in \mathbb{N}_n / \exists\ A \in \mathcal{A} : \{x_0, \cdots, x_k\} \subset A\}$$

On montre que $U = \mathbb{N}_n$ en vérifiant (voir lemme [5.10] page 111)

1. $0 \in U$
2. $k \in U \quad \text{et} \quad k < n \Rightarrow k+1 \in U$.

1. Puisque $x_0 \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $x_0 \in A$ ainsi $0 \in U$.
2. Si $k < n$ et $k \in U$ alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $x(\mathbb{N}_k) \subset A$, l'égalité $x(\mathbb{N}_{k+1}) = x(\mathbb{N}_k) \cup \{x_{k+1}\}$ montre alors que $x(\mathbb{N}_{k+1}) \subset A \cup \{x_{k+1}\}$ .Puisque $x_{k+1} \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ il existe $A_{k+1} \in \mathcal{A}$ tel que $x_{k+1} \in A_{k+1}$. La propriété de $\mathcal{A}$ montre qu'il existe $A' \in \mathcal{A}$ tel que $A \cup A_{k+1} \subset A'$ ainsi $x(\mathbb{N}_{k+1}) \subset A \cup A_{k+1} \subset A'$ par suite $k+1 \in U$.

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et en particulier, puisque $F = x(\mathbb{N}_n)$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $F \subset A$

(iv)

Pour montrer que L est libre on montre, en suivant (ii), que tout sous-ensemble fini de L est libre. Si

$$F \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

est un sous-ensemble fini de L alors puisque $\mathcal{A}$ est totalement ordonnée on a

$$(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B = A \quad \text{ou} \quad A \cup B = B$$

ainsi (iii) permet d'affirmer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $F \subset A$, par suite F est libre comme sous-ensemble d'un ensemble libre..

(v)

Il s'agit de montrer que toute sous-famille de $\mathfrak{L}(L_0)$ *totalement ordonnée* pour l'inclusion possède un majorant. Soit $\mathcal{A} \subset \mathfrak{L}(L_0)$ une famille totalement ordonnée de $\mathfrak{L}(L_0)$, on montre que

$$L = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

est un élément de $\mathfrak{L}(L_0)$.

1. Puisque pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a $L_0 \subset A$ on obtient $L_0 \subset L$
2. L est libre d'après (iv).

(vi)

Si $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble totalement ordonné de Γ on montre que

$$L = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

est un élément de Γ.

1. D'après (iv) L est n-libre
2. On montre
$$h \in \mathbf{grn}(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) \cap H \Rightarrow h = e \ .$$
D'après le lemme [8.31] page 311 on a $\mathbf{grn}(L) = \bigcup_{F \in \mathrm{F}(L)} \mathbf{grn}(F)$ par suite si
$$h \in \mathbf{grn}(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)$$
il existe un sous-ensemble fini F de $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ tel que $h \in \mathbf{grn}(F)$, F étant fini et $\mathcal{A}$ totalement ordonné, (iii) permet d'affirmer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $F \subset A$ ainsi $h \in \mathbf{grn}(A) \cap H$ et puisque $A \in \Gamma$ on a $\mathbf{grn}(A) \cap H = \{e\}$ par suite $h = e$.

■

Si G est un groupe le lemme [8.27] page 298 établit une bijection entre l'ensemble $\mathrm{Eq}[G, *]$ des relations compatibles avec la loi du groupe et l'ensemble $\mathcal{N}(G)$ des sous-groupes normaux de G, cette application est définie par

$$\varphi(R) = \{x \in G/(x, e) \in R\}$$

son inverse étant

$$\varphi^{-1}(H) = \{(x, y) \in G \times G/x^{-1}y \in H\} \ .$$

Enfin ce même lemme permet d'affirmer que le monoïde quotient G/R est un groupe. Par tradition les énoncés sur les monoïdes du type G/R sont donnés en termes de groupe normaux.

8.5.3 *Groupes quotients*

Définition 8.31 *On note $(G,*)$ un groupe où la loi $*$ est notée multiplicativement, $H \lhd G$ un sous-groupe normal de G, on appelle* ***groupe quotient*** *de G par H le monoïde quotient G/R où*

$$R = \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in H\} \ .$$

On note G/H ce groupe et $\pi : G \mapsto G/H$ l'application canonique.

Ainsi , d'après le lemme [8.27] page 298 , la normalité de H et la définition d'un quotient donnent

$$\pi(x) = xH = \{y \in G / \exists\ h \in H : y = xh\} = \{y \in G / x^{-1}y \in H\} = Hx$$

où

$$Hx = \{y \in G / \exists\ h \in H : y = hx\} = \{y \in G / yx^{-1} \in H\}$$

En termes de sous-groupe normaux les lemmes [8.14] page 238 et [8.27] page 298 s'énoncent de la manière suivante :

Lemme 8.33 *On note $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e où la loi $*$ est notée multiplicativement et F l'application de $\mathcal{P}(G \times G)$ dans $\mathcal{P}(G)$ définie par*

$$F(R) = \{x \in G / (x,e) \in R\}$$

(i) Si φ est la restriction de F à l'ensemble $\mathrm{Eq}[G,*]$ des relations d'équivalences compatibles avec $*$, alors φ est une bijection de $\mathrm{Eq}(G,*)$ dans l'ensemble $\mathcal{N}(G)$ des sous-groupe normaux de G dont l'inverse est

$$\varphi^{-1}(H) = \{(x,y) \in G \times G /\ x^{-1}y \in H\}$$

(ii) Si X est un ensemble, $H \lhd G$ un sous-groupe normal de G et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(G,X)$ est une application de G dans X les conditions suivantes sont équivalentes

1. *Il existe une application $f^* : G/H \mapsto X$ telle que $f = f^* \circ \pi$*
2. $$\{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in H\} \subset \{(x,y) \in G \times G / f(x) = f(y)\}$$

(iii) Si $(K,\centerdot)$ est un groupe d' élément neutre e', $H \lhd G$ un sous-groupe normal de G et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G,K)$ est un morphisme de G dans K les conditions suivantes sont équivalentes

a *Il existe un morphisme $f^* : G/H \mapsto X$ telle que $f = f^* \circ \pi$*

b
$$H \subset \{x \in G / f(x) = e'\}$$

(iv) Si U est un sous-ensemble de G, et $A = \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in U\}$ alors

$$\rho_*(A) = \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in \mathbf{grn}(U)\}$$

est la relation d'équivalence compatible avec $*$ engendrée par A

(v) On note U est un sous-ensemble de G, $\pi_u : G \mapsto G/\mathbf{grn}(U)$ l'application canonique, X un ensemble et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(G,X)$ est une application de G dans X. Pour qu'il existe une application $f^* : G/\mathbf{grn}(U) \mapsto X$ telle que $f = f^* \circ \pi_u$ il suffit que la relation d'équivalence

$$R_f = \{(x,y) \in G \times G / f(x) = f(y)\}$$

soit compatible avec la loi $*$ et

$$\{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in U\} \subset \{(x,y) \in G \times G / f(x) = f(y)\}$$

(vi) Si $(K,\centerdot)$ est un groupe , $U \subset G$ un sous-ensemble de G, $\pi_u : G \mapsto G/\mathbf{grn}(U)$ l'application canonique et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G,K)$ est un morphisme de G dans K les conditions suivantes sont équivalentes

c *Il existe un morphisme* $f^* : G/\mathbf{grn}(U) \mapsto K$ *telle que* $f = f^* \circ \pi_u$

d

$$\{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in U\} \subset \{(x,y) \in G \times G / f(x) = f(y)\}$$

Preuve

(i)

1. On montre $R \in \mathrm{Eq}[G;*] \Rightarrow F(R) \lhd G$

1. par reflexivité on a $(e,e) \in R$ par suite $e \in F(R)$
2. si $(x,e) \in R$ et $(y,e) \in R$ par compatibilité on a $(xy, ee) \in R$ par suite $xy \in F(R)$
3. si $(x,e) \in R$ alors
   — par reflexivité $(x^{-1}, x^{-1}) \in R$
   — par compatibilité $(xx^{-1}, ex^{-1}) \in R$ par suite $(e, x^{-1}) \in R$
   — par symmétrie $(x^{-1}, e) \in R$
   ainsi $x^{-1} \in F(R)$
4. si $(g,x) \in G \times F(R)$ alors $(x,e) \in R$, $(g,g) \in R$ et $(g^{-1}, g^{-1}) \in R$
   — par compatibilité $(gx, ge) \in R$ ainsi $(gx, g) \in R$
   — par compatibilité $(gxg^{-1}, gg^{-1}) \in R$ ainsi $(gxg^{-1}, e) \in R$
   par suite $gxg^{-1} \in F(R)$ et $F(R) \lhd G$.

2. On montre $H \in \mathcal{N}(G) \Rightarrow \varphi^{-1}(H) \in \mathrm{Eq}[G,*]$

1. reflexivité pour tout $x \in G$ $x^{-1}x = e$ par suite $x^{-1}x \in H$ et $(x,x) \in \varphi^{-1}(H)$.
2. symmétrie si $x^{-1}y \in H$ alors $(x^{-1}y)^{-1} \in H$ et l'égalité $(x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x$ entraîne $(y,x) \in \varphi^{-1}(H)$
3. transitivité si $x^{-1}y \in H$ et $y^{-1}z \in H$ alors $(x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H$ et l'égalité $(x^{-1}y)(y^{-1}z) = x^{-1}z$ entraîne $(x,z) \in \varphi^{-1}(H)$
4. compatibilité Il s'agit de montrer

$$x^{-1}y \in H \quad \text{et} \quad a^{-1}b \in H \Rightarrow (xa)^{-1}(yb) \in H$$

   or

$$(xa)^{-1}(yb) = [a^{-1}(x^{-1}y)a]a^{-1}b$$

   H étant normal l'assertion $x^{-1}y \in H$ implique $a^{-1}(x^{-1}y)a \in H$ par suite si $x^{-1}y \in H$ et $a^{-1}b \in H$ alors $(xa)^{-1}(yb)$ est le produit de deux éléments de H.

3 . On montre $\forall\ H \in \mathcal{N}(G) \quad H = \varphi(\varphi^{-1}(H))$

1. D'abord on vérifie $H \subset \varphi(\varphi^{-1}(H))$.
   Si $x \in H$ alors $x^{-1}e \in H$ par suite $(x,e) \in \varphi^{-1}(H)$ et $x \in \varphi(\varphi^{-1}(H))$
2. Ensuite on vérifie $\varphi(\varphi^{-1}(H)) \subset H$.
   Si $x \in \varphi(\varphi^{-1}(H))$ alors $(x,e) \in \varphi^{-1}(H)$ par suite $x^{-1}e \in H$ et $x \in H$

4 . On montre $\forall\ R \in \mathrm{Eq}[G,*] \quad R = \varphi^{-1}(\varphi(R))$

1. D'abord on vérifie $R \subset \varphi^{-1}(\varphi(R))$.
   Si $(x,y) \in R$ alors
   — par reflexivité $(x^{-1}, x^{-1}) \in R$
   — par compatibilité $(x^{-1}x, x^{-1}y) \in R$ ainsi $(e, x^{-1}y) \in R$
   — par symmétrie $(x^{-1}y, e) \in R$, c'est à dire $x^{-1}y \in \varphi(R)$.
   ainsi $(x,y) \in \varphi^{-1}(\varphi(R))$

2. Ensuite on vérifie $\varphi^{-1}(\varphi(R)) \subset R$.
   Si $(x,y) \in \varphi^{-1}(\varphi(R))$ alors $x^{-1}y \in \varphi(R)$ et $(x^{-1}y, e) \in R$
   — par reflexivité $(x,x) \in R$
   — par compatibilité $(xx^{-1}y, xe) \in R$ ainsi $(y,x) \in R$
   — par symmétrie $(x,y) \in R$,

(ii)

1 . On montre *1.⇒ 2.*

Par définition du groupe quotient G/H on a $x^{-1}y \in H \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$ par suite

$$f(x) = f^*(\pi(x)) = f^*(\pi(y)) = f(y)\ .$$

2. On montre *2. ⇒ 1.*

Notons h_G une fonction de choix pour G (voir axiome [2.1] page 48). On dispose donc d'un diagramme

$$\mathfrak{P}^*(G) \xrightarrow{h_G} G \xrightarrow{f} X$$

puisque $G/H \subset \mathfrak{P}^*(G)$ la restriction f^* de $f \circ h_G$ à G/H est une application, on montre que

$$f = f^* \circ \pi.$$

En effet, par définition de f^*, on a $f^*(\pi(x)) = f(h_G(\pi(x)))$, mais par définition d'une fonction de choix, $h_G(\pi(x)) \in \pi(x)$, ainsi on obtient $x^{-1}h_G(\pi(x)) \in H$ et l'hypothèse *2.* permet donc d'affirmer que pour tout $x \in G$

$$f(x) = f(h_G(\pi(x))) = f^*(\pi(x)).$$

(iii)

1 . On montre **a⇒ b**

Puisque pour tout $x \in H$ $\pi(x) = \pi(e)$ on obtient

$$f(x) = f^*(\pi(x)) = f^*(\pi(e)) = f(e) = e'$$

2 . On montre **b⇒ a**

D'après (ii) il suffit de montrer que si **b** est vérifiée alors

$$\{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in H\} \subset \{(x,y) \in G \times G / f(x) = f(y)\}$$

mais puisque f est un morphisme on a

$$f(x^{-1}y) = f(x)^{-1}f(y)$$

ainsi **b** entraîne

$$x^{-1}y \in H \Rightarrow f(x)^{-1}f(y) = e' \Rightarrow f(x) = f(y)\ .$$

(iv)

On pose $A = \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in U\}$ et on montre que la relation d'équivalence compatible avec $*$ engendrée par A est

$$\rho_*(A) = \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in \mathbf{grn}(U)\}$$

1. D'abord on montre $\rho_*(A) \subset \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in \mathbf{grn}(U)\}$.
   Puisque $\mathbf{grn}(U)$ est un sous-groupe normal de G la relation

$$R = \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in \mathbf{grn}(U)\}$$

   est compatible avec la loi $*$ il suffit donc de montrer que

$$A \subset \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in \mathbf{grn}(U)\}$$

   mais si $(x,y) \in A$ alors $x^{-1}y \in U$ par suite $x^{-1}y \in \mathbf{grn}(U)$.
2. Ensuite on montre $\{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in \mathbf{grn}(U)\} \subset \rho_*(A)$.
   puisque $\rho_*(A)$ est compatible avec $*$ l'ensemble

$$\varphi(\rho_*(A)) = \{x \in G / (x,e) \in \rho_*(A)\}$$

   est un sous-groupe normal de G, d'autre part, si $x^{-1} \in U$ alors $(x,e) \in A$ par suite $(x,e) \in \rho_*(A)$ ainsi $x \in \varphi(\rho_*(A))$ et $x^{-1} \in \varphi(\rho_*(A))$ en particulier

$$x \in U \Rightarrow (x^{-1})^{-1} \in U \Rightarrow (x^{-1})^{-1} \in \varphi(\rho_*(A)) \Rightarrow x \in \varphi(\rho_*(A)) \ .$$

   Ainsi $\varphi(\rho_*(A))$ est un sous-groupe normal contenant U et

$$\mathbf{grn}(U) \subset \varphi(\rho_*(A)) \ .$$

   (i) montre alors que

$$\varphi^{-1}(\mathbf{grn}(U)) \subset \varphi^{-1}(\varphi(\rho_*(A))) \subset \rho_*(A)$$

   c'est à dire

$$\{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in \mathbf{grn}(U)\} \subset \rho_*(A) \ .$$

(v)

On pose $A = \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in U\}$. Les hypothèses montre que

$$A \subset R_f$$

et puisque R_f est une relation d'équivalence compatible avec la loi $*$ on obtient

$$\rho_*(A) \subset R_f$$

mais d'après (iv) on a

$$\rho_*(A) = \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in \mathbf{grn}(U)\}$$

par suite (ii) permet d'affirmer qu'il existe une application $f^* : G/\mathbf{grn}(U) \mapsto X$ telle que $f = f^* \circ \pi_u$.

(vi)

1. On montre $\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{d}$

Si $x^{-1}y \in U$ alors $x^{-1}y \in \mathbf{grn}(U)$ par suite $\pi_u(x) = \pi_u(y)$ et

$$f(x) = f^*(\pi_u(x)) = f^*(\pi_u(y)) = f(y) \ .$$

2. On montre $\mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{c}$

Puisque f est un morphisme, si $R_f = \{(x,y) \in G \times G / f(x) = f(y)\}$ alors R_f est compatible avec $*$. En effet si $f(x) = f(y)$ et $f(a) = f(b)$ alors

$$f(xa) = f(x) \centerdot f(a) = f(y) \centerdot f(b) = f(ab)$$

ainsi $(xa, yb) \in R_f$. Le point (v) permet alors d'affirmer que si

$$\{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in U\} \subset R_f$$

il existe $f^* : G/\mathbf{grn}(U) \mapsto K$ telle que

$$f = f^* \circ \pi_u$$

■

On donne les théorèmes d'isomorphismes. Dans la suite si G et G' sont des groupe l'assertion

$$G \cong G'$$

dénote l'existence d'un morphisme bijectif de G dans G'.

Lemme 8.34 *On note $(G,*)$ un groupe où la loi $*$ est notée multiplicativement.*

(i) Si $(K, \centerdot)$ est un groupe d'élément neutre e' et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G,K)$ un morphisme de groupes alors

1. *L'ensemble $\mathrm{Ker}(f)$ défini par*
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G / f(x) = e'\}$$
est un sous-groupe normal de G
2. *Si $\pi : G \mapsto G/\mathrm{Ker}(f)$ est l'application canonique il existe un unique morphisme $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G/\mathrm{Ker}(f)\ , K)$ vérifiant*
$$f = f^* \circ \pi$$
de plus
   (a) *f^* est injectif*
   (b) *$\mathrm{im}(f^*) = \mathrm{im}(f)$*

(ii) Si $(G', \centerdot)$ est un groupe, $H \lhd G$, $\pi : G \mapsto G/H$ l'application canonique, $H' \lhd G'$, $\pi' : G' \mapsto G'/H'$ l'application canonique et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G, G')$ vérifie $f(H) \subset H'$. Il existe un unique morphisme $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G/H\ , G'/H')$ tel que

$$f^* \circ \pi = \pi' \circ f\ .$$

(iii) Si $K \lhd G$ et L est un sous-groupe de G alors

1. *L'ensemble*
$$KL = \{x \in G / \exists\ (k,l) \in K \times L : x = kl\}$$
vérifie
   (a) *$KL = LK = \{x \in G / \exists\ (l,k) \in L \times K : x = lk\}$*
   (b) *KL est un sous-groupe de G*
2. *$K \cap L$ est un sous-groupe normal de L*

De plus on a

$$L/L \cap K \cong KL/K$$

En particulier, si $L \cap K = \{e\}$ alors

$$L \cong KL/K$$

(iv) Si $H \lhd G$, $K \lhd G$ et $H \subset K$ et $\pi : G \mapsto G/H$ est l'application canonique alors $\pi(K) \lhd G/H$ et si on note $K/H = \pi(K)$ alors

$$G/K \cong (G/H)/(K/H)$$

Preuve

(i)

1. Ker(f) est un sous-groupe normal
   (a) Par définition d'un morphisme $f(e) = e'$ ainsi $e \in \mathrm{Ker}(f)$
   (b) Si $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(xy) = f(x)f(y) = e' \centerdot e' = e'$ ainsi $xy \in \mathrm{Ker}(f)$
   (c) Si $x \in \mathrm{Ker}(f)$ alors, puisque f est un morphisme,
   $$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} = e'^{-1} = e'$$
   ainsi $x^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$
   (d) si $(g, x) \in G \times \mathrm{Ker}(f)$
   $$f(gxg^{-1}) = f(g) \centerdot f(x) \centerdot f(g^{-1}) = f(g) \centerdot e' \centerdot f(g^{-1}) = f(g) \centerdot f(g^{-1}) = e'$$
   ainsi $gxg^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$.
2. Existence de f^*
   D'après le (iii) du lemme [8.33] page 327 si $H \subset \mathrm{Ker}(f)$ alors il existe un morphisme $f^* : G/H \mapsto K$ vérifiant $f = f^* \circ \pi$ il suffit de prendre $H = \mathrm{Ker}(f)$ pour en déduire l'existence de f^*.
   (a) f^* est injective.
   $$f^*(\pi(x)) = f^*(\pi(y)) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(x^{-1}y) = e'$$
   par suite
   $$f^*(\pi(x)) = f^*(\pi(y)) \Rightarrow x^{-1}y \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)\ .$$
   (b) $\mathrm{im}(f^*) = \mathrm{im}(f)$
   — si $y \in \mathrm{im}(f)$ alors il existe $x \in G$ tel que $y = f(x)$ par suite $y = f^*(\pi(x))$ et
   $$\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(f^*)$$
   — si $y \in \mathrm{im}(f^*)$ alors il existe $u \in G/\mathrm{Ker}(f)$ tel que $f^*(u) = y$. puisque $u \in G/\mathrm{Ker}(f)$ il existe $x \in G$ tel que $u = \pi(x)$, par suite $y = f^*(\pi(x)) = f(x)$ et
   $$\mathrm{im}(f^*) \subset \mathrm{im}(f)$$
3. Unicité
   Si φ vérifie $\varphi \circ \pi = f$ alors pour tout $u \in G/\mathrm{Ker}(f)$ et $x \in \pi^{-1}(u)$
   $$\varphi(u) = \varphi(\pi(x)) = f(x) = f^*(\pi(x)) = f^*(u)\ .$$

(ii)

Posons $g = \pi' \circ f$ alors g est un morphisme comme composée de morphismes d'autre part, puisque pour tout $h \in H$ on a $f(h) \in H'$ on obtient

$$h \in H \Rightarrow g(h) = \pi'(f(h)) = \pi'(e')$$

c'est à dire

$$H \subset \{x \in G/g(x) = \pi'(e')\}$$

puisque $\pi'(e')$ est l'élément neutre de G'/H' le lemme [8.33] page 327 montre qu'il existe un morphisme f^* de G/H dans G'/H' tel que

$$f^* \circ \pi = g$$

en d'autre termes :

$$f^* \circ \pi = \pi' \circ f\ .$$

(iii)

1. Etude de KL

   (a) On montre $KL = LK$.

   — On montre $KL \subset LK$.
   Si $x \in KL$ il existe $(k,l) \in K \times L$ tel que $x = kl$, puisque $K \lhd G$ pour tout $(k,l) \in K \times L$ on a $l^{-1}kl \in K$ ainsi l'égalité $kl = l(l^{-1}kl)$ montre que $x \in LK$.

   — On montre $LK \subset KL$.
   Si $x \in LK$ il existe $(l,k) \in L \times K$ tel que $x = lk$, puisque $K \lhd G$ pour tout $(k,l) \in K \times L$ on a $lkl^{-1} \in K$ ainsi l'égalité $lk = (lkl^{-1})l$ montre que $x \in KL$.

   (b) KL est un sous-groupe de G.

   — puisque $e = ee$ on a $e \in KL$

   — on vérifie $(x,y) \in KL \times KL \Rightarrow xy \in KL$: si $x \in KL$ et $y \in KL$ alors il existe $(k,l) \in K \times L$ et $(a,b) \in K \times L$ tels que $x = kl$ et $y = ab$ ainsi

   $$xy = klab = k(lal^{-1})lb$$

   puisque $K \lhd G$ $lal^{-1} \in K$ et $k(lal^{-1}) \in K$ ainsi xy est le produit d'un élément de K et d'un élément de L, par suite $xy \in KL$

   — on vérifie $x \in KL \Rightarrow x^{-1} \in KL$: si $x \in KL$ alors il existe un couple $(k,l) \in K \times L$ tel que $x = kl$ ainsi $x^{-1} = l^{-1}k^{-1} \in LK$ et (a) permet d'affirmer que $x^{-1} \in KL$.

2. On montre $K \cap L \lhd L$.
   Si $(l,x) \in L \times K \cap L$ alors
   — puisque $x \in K$ et $K \lhd G$ on a $l^{-1}xl \in K$
   — puisque L est un sous-groupe $lxl^{-1} \in L$
   Ainsi on obtient
   $$(l,x) \in L \times K \cap L \Rightarrow lxl^{-1} \in K \cap L\ .$$

Pour prouver que
$$L/K \cap L \cong KL/K$$
on applique (ii) en posant
$$G = L,\ H = K \cap L,\ G' = KL,\ H' = K$$
et $f : L \mapsto KL$ définie par $f(l) = el = l$. On a donc
$$f(K \cap L) = K \cap L \subset K$$
c'est à dire $f(H) \subset H'$. Par suite si $\pi : L \mapsto L/K \cap L$ et $\pi' : KL \mapsto KL/K$ sont les applications canoniques il existe un morphisme
$$f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(L/K \cap L\ ,\ KL/K)$$
tel que $f^* \circ \pi = \pi' \circ f$. Ainsi pour tout $x \in L$ on a $f^*(\pi(x)) = \pi'(x)$.

1. f^* est injective.
   Si $(x,y) \in L \times L$ vérifie $f^*(\pi(x)) = f^*(\pi(y))$ alors $\pi'(x) = \pi'(y)$ par suite $x^{-1}y \in K$, comme de plus $x^{-1}y \in L$ on obtient $x^{-1}y \in K \cap L$ par suite $\pi(x) = \pi(y)$.

2. f^* est surjective.
   Si $u \in KL/K$ il existe $(k,l) \in K \times L$ tel que $u = \pi'(kl)$. Puisque $K \lhd G$ $l^{-1}kl \in K$ par suite $\pi'(l^{-1}kl) = \pi'(e)$ et, puisque $kl = l(l^{-1}kl)$ on obtient $\pi'(kl) = \pi'(l)\pi'(l^{-1}kl) = \pi'(l)$. Ce qui montre que pour tout $u \in KL/K$ il existe $l \in L$ tel que $u = \pi'(l)$, on a alors
   $$f^*(\pi(l)) = \pi'(l) = u\ .$$

(iv)

1. On montre $K/H \lhd G/H$.
   Si $(u,v) \in G/H \times K/H$ alors il existe $(g,k) \in G \times K$ tel que
   $$u = \pi(g) \quad \text{et} \quad v = \pi(k) \ ,$$
   π étant un morphisme on obtient
   $$u^{-1}vu = \pi(g)^{-1}\pi(k)\pi(g) = \pi(g^{-1})\pi(k)\pi(g) = \pi(g^{-1}kg)$$
   puisque $K \lhd G$, $g^{-1}kg \in K$ par suite $u^{-1}vu = \pi(g^{-1}kg) \in \pi(K)$.
2. On montre
   $$G/K \cong G/H/K/H$$
   En appliquant (ii) avec $f = id_G$, puisque $id_G(H) \subset id_G(K)$, si
   $$\pi : G \mapsto G/H \quad \text{et} \quad \pi' : G \mapsto G/K$$
   sont les applications canoniques il existe un morphisme $\imath : G/H \mapsto G/K$ $(\imath = id_G^*)$ vérifiant
   $$\imath \circ \pi = \pi' \ .$$
   On montre
   (a) $\mathrm{Ker}(\imath) = K/H$
   (b) $\mathrm{im}(\imath) = G/K$
   (a) Si $\pi(g) \in \mathrm{Ker}(\imath)$ alors $\imath(\pi(g)) = \pi'(g) = \pi'(e)$ par suite $g \in K$ et $\pi(g) \in K/H$.
   (b) Si $v \in G/K$ il existe $g \in G$ tel que $\pi'(g) = u$ par suite
   $$\imath(\pi(g)) = \pi'(g) = u$$
   et $u \in \mathrm{im}(\imath)$.

   Mais (i) permet d'affirmer qu'il existe un morphisme bijectif $\imath^*$ du groupe $(G/H)/\mathrm{Ker}(\imath)$ dans $\mathrm{im}(\imath)$, c'est donc un morphisme bijectif de
   $$G/H/K/H \mapsto G/K \ .$$

■

Le calcul multilinéaire nécessite un peu de familiarité avec les constructions usuelles de la catégorie des groupes.

8.6 *La catégorie des groupes*

La notion de catégorie est définie par [7.6] page 176

Définition 8.32 *La catégorie* **gr** *des groupes est la catégorie définie par*

1. *Les objets de* **gr** *sont les groupes* $(G,*)$ *au sens de la définition* [8.22] *page 263,*
2. *Les morphismes de l'objet* $(G_0, *_0)$ *dans l'objet* $(G_1, *_1)$ *sont les morphismes de monoïdes définis par* [8.14] *page 240*
3. *La loi de composition est la composition des applications.*

8.6.1 *Produit et limite projective d'une famille de groupes*

Une famille de groupes est une famille de monoïdes (voir définition [8.16] page 244) dans laquelle chaque monoïde est un groupe.

Définition 8.33 *On note I et $\mathbb{U}$ des ensembles, une* ***famille de groupes*** *indexée par I à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ est un triplet $(G, \circledast, e)$ où*

1. *$G \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathcal{P}(\mathbb{U}))$ est une application de I dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$,*
2. *$\circledast \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(G_i \times G_i, G_i)$*
3. *$e \in \prod_{i \in I} G_i$,*
4. *pour tout $i \in I$ le couple $(G_i, \circledast_i)$ est un groupe d'élément neutre e_i*

On rappelle la définition d'un produit dans la catégorie des groupes

Définition 8.34 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles et $(G, \circledast, e)$ une famille de groupes indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, On appelle* ***produit*** *de la famille $(G, \circledast, e)$ dans la catégorie* **gr** *un couple $((\Pi, *), p)$ où $(\Pi, *)$ est un groupe et $p \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(\Pi, G_i)$ vérifie la propriété suivante : pour tout groupe $(Y, \diamond)$ et pour tout $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(Y, G_i)$ il existe un unique morphisme de groupe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(Y, \Pi)$ qui vérifie*

$$\forall i \in I \;\; g_i = p_i \circ h.$$

En d'autre termes, pour tout groupe $(Y, \diamond)$ l'application $\varphi : h \mapsto \varphi(h)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(Y, \Pi)$ dans $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(Y, M_i)$ définie par

$$\varphi(h)(i) = p_i \circ h$$

est bijective.

Remarque 8.1 *D'après le lemme* [8.16] *page 244 Le produit cartésien $\prod_{i \in I} G_i$ est un produit de la catégorie* **mon** *lorsqu'il est muni de la loi*

$$(x * y)_i = x_i \circledast_i y_i.$$

et de l'application $p \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(\prod_{i \in I} G_i, G_i)$ définie par

$$\forall \; i \in I \quad p_i(x) = x_i$$

puisque les morphismes de groupes sont les morphismes de monoïdes il suffit, pour montrer que $\left((\prod_{i \in I} G_i, *), p\right)$ est un produit de la catégorie **gr**, *de voir que tout $x \in \prod_{i \in I} G_i$ possède un inverse pour la loi $*$, et il est clair que pour tout $x \in \prod_{i \in I} G_i$ l'application $x^{-1} \in \prod_{i \in I} G_i$ définie par*

$$(x^{-1})_i = x_i^{-1}$$

est un inverse de x dans $(\prod_{i \in I} G_i, \; *)$. Ainsi $\left((\prod_{i \in I} G_i, *), p\right)$ est un produit dans **gr**.

L'existence de limites projective dans la catégorie des groupes est aussi un copier-coller du résultat similaire dans la catégorie des monoïdes.

Définition 8.35 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, $(X, \circledast, e)$ une famille de groupes indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, on appelle famille de* ***transitions*** *de $(X, \circledast, e)$ un couple (R, f) où :*

1. *R est une relation de I dans I qui vérifie les propriétés suivantes :*
   (a) *R est réflexive : $\forall\ i \in I\ (i,i) \in R$*
   (b) *R est transitive : $[(i,j) \in R$ et $(j,k) \in R \Rightarrow (i,k) \in R]$.*
2. *$f = (f_{i,j})_{(i,j)\in R}$ est un élément de $\displaystyle\prod_{(i,j)\in R} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_j, X_i)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*
   (a) *Pour tout $i \in I$ $f_{i,i} = id_{X_i}$*
   (b) *Si $(i,j) \in R$ et $(j,k) \in R$ alors*
   $$f_{i,k} = f_{i,j} \circ f_{j,k}$$

On rappelle les définitions.

Définition 8.36 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, $(X, \circledast, e)$ une famille de groupes indexée par I à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, et (R, f) est une famille de transitions de $(X, \circledast, e)$.*

limite projective *On appelle limite projective de (R, f) un couple $((G, \star), p)$ où $(G, \star)$ est un groupe et $p \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G, X_i)$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $(i,j) \in R$*
   $$p_i = f_{i,j} \circ p_j$$
2. *pour tout groupe $(H, \diamond)$ et pour tout $g \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H, X_i)$ vérifiant*
   $$(i,j) \in R \Rightarrow g_i = f_{i,j} \circ g_j$$
   il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H, G)$ vérifiant
   $$g_i = p_i \circ h$$

limite inductive *On appelle limite inductive de (R, f) un couple $((G^0, \Diamond), h)$ où $(G^0, \Diamond)$ est un groupe et $h \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, G^0)$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $(i,j) \in R$*
   $$h_j = h_i \circ f_{i,j}$$
2. *pour toutgroupe $(K, \diamond)$ et pour tout $g \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, K)$ vérifiant*
   $$g_j = g_i \circ f_{i,j}$$
   il existe un unique morphisme $g^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G^0, K)$ vérifiant
   $$g_i = g^0 \circ h_i$$

On rappelle la construction des limites projectives

Lemme 8.35 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, $(X, \circledast, e)$ une famille de groupes indexée par I à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, et (R, f) est une famille de transitions de $(X, \circledast, e)$.*
Si $((P, *), p)$ est un produit (dans la catégorie **gr***) de $(X, \circledast, e)$ alors le sous-ensemble G de P défini par*

$$G = \{x \in P / \forall\ (i,j) \in R \quad p_i(x) = f_{i,j}(p_j(x))\}$$

possède les propriétés suivantes

1. G est un sous-groupe de $(P, *)$

2. si $t \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G, X_i)$ est défini par

$$t_i = p_i \cap (G \times X_i)$$

(t_i est la restriction de p_i à G) alors $((G, *), t)$ est une limite projective (dans la catégorie **gr***) de (R, f)*

Preuve La preuve est celle du lemme [8.21] page 260

1. G est un sous-groupe de P

 (a) si e est l'élément neutre de P alors $e \in G$. En effet

 — puisque pour tout $i \in I$ $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P, X_i)$ on a, si $(i, j) \in I \times I$

$$p_i(e) = e_i \qquad \text{et} \qquad p_j(e) = e_j$$

 — puisque pour tout $(i, j) \in R$ $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_j, X_i)$ on a

$$f_{i,j}(e_j) = e_i$$

 par suite

$$p_i(e) = e_i = f_{i,j}(e_j) = f_{i,j}(p_j(e)).$$

 (b) si $(x, y) \in G \times G$ alors $x * y \in G$. En effet

 — puisque pour tout $i \in I$ $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P, X_i)$ on a, si $(i, j) \in I \times I$ et $(x, y) \in G \times G$

$$p_i(x * y) = p_i(x) \circledast_i p_i(y) \qquad \text{et} \qquad p_j(x * y) = p_j(x) \circledast_j p_j(y)$$

 — puisque pour tout $(i, j) \in R$ $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_j, X_i)$ on a

$$f_{i,j}(p_j(x) \circledast_j p_j(y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \circledast_i f_{i,j}(p_j(y))$$

 Ainsi

$$f_{i,j}(p_j(x * y)) = f_{i,j}(p_j(x) \circledast_j p_j(y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \circledast_i f_{i,j}(p_j(y)))$$

 mais puisque $(x, y) \in G \times G$ on a $f_{i,j}(p_j(x)) = p_i(x)$ et $f_{i,j}(p_j(y)) = p_i(y)$, par suite

$$f_{i,j}(p_j(x * y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \circledast_i f_{i,j}(p_j(y))) = p_i(x) \circledast_i p_i(y) = p_i(x * y)$$

 et $x * y \in G$.

 (c) si $x \in G$ alors $x^{-1} \in G$. Puisque $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_j, X_i)$ et $p_i(x)^{-1} = (p_i(x))^{-1}$ on a

$$f_{i,j}((p_j(x^{-1})) = f_{i,j}(p_j(x)^{-1}) = (f_{i,j}(p_j(x)))^{-1} = (p_i(x))^{-1}$$

2. $((G, *), t)$ est une limite projective de (R, f). D'abord il est clair que pour tout $(i, j) \in R$ on a $t_i = f_{i,j} \circ t_j$ puisque si $x \in G$

$$t_i(x) = p_i(x) = f_{i,j}(p_j(x)) = f_{i,j} \circ t_j(x)$$

 il suffit donc de montrer que si $(H, \diamond)$ est un groupe et $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H, X_i)$ vérifie

$$(i, j) \in R \Rightarrow g_i = f_{i,j} \circ g_j \tag{8.74}$$

 il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H, G)$ vérifiant

$$g_i = t_i \circ h \ .$$

Puisque $((P,*),p)$ est un produit dans **gr** il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H,P)$ vérifiant

$$g_i = p_i \circ h \ .$$

mais les égalités (8.74) montre que $\forall\ y \in H$ on a $h(y) \in G$: en effet, si $(i,j) \in R$

$$f_{i,j}(p_j(h(y)) = f_{i,j}(p_j \circ h(y)) = f_{i,j}(g_j(y)) = g_i(y) = p_i(h(y))$$

ainsi $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y,G)$ et

$$g_i = p_i \circ h = t_i \circ h.$$

■

L'existence de coproduit provient, comme dans le cas des monoïdes, de l'existence de groupe libre au-dessus des ensembles.

8.6.2 *Groupe libre*

Groupe libre On définit un groupe libre en changeant monoïde par groupe dans la définition d'un monoïde libre (voir définition [8.18] page 246)

Définition 8.37 *On note X un ensemble, on appelle **groupe libre** au-dessus de X un couple $((G,*),i)$ où*

1. *$(G,*)$ est un groupe*
2. *i est une application de X dans G qui vérifie la propriété suivante : pour tout groupe $(H,\centerdot\,)$ et toute application f de X dans H il existe un unique morphisme de groupes $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G,H)$ vérifiant*

$$f = \hat{f} \circ i.$$

En d'autre termes, $((G,*),i)$ est un groupe libre au-dessus de X si pour tout groupe $(H,\centerdot)$ l'application φ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((G,*),(H,\centerdot))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,H)$ définie par

$$\varphi(\hat{f}) = \hat{f} \circ i$$

est bijective.

Une preuve similaire à celle du lemme [8.17] page 247 montre que si $(G,*)$ et $(H,\bullet)$ sont des groupes libres au-dessus de X ils sont isomorphes.

Lemme 8.36 *On note X un ensemble, si $((G,*),i)$ et $((H,\bullet),j)$ sont des groupes libres au-dessus de X alors il existe $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((G,*),(H,\bullet))$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((H,\bullet),(G,*))$ tels que*

$$f \circ g = id_H \qquad \text{et} \qquad g \circ f = id_G$$

Preuve

— Puisque $((G,*),i)$ est libre au-dessus de X il existe $\hat{j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((G,*),(H,\bullet))$ tel que

$$j = \hat{j} \circ i$$

— Puisque $((H,\bullet),j)$ est libre au-dessus de X il existe $\hat{i} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((H,\bullet),(G,*))$ tel que

$$i = \hat{i} \circ j$$

En particulier $\hat{j} \circ \hat{i}$ est un morphisme de $(H, \bullet)$ dans $(H, \bullet)$ qui vérifie

$$j = \hat{j} \circ \hat{i} \circ j. \tag{8.75}$$

Mais, par définition d'un groupe libre, le seul morphisme f de $(H, \bullet)$ dans $(H, \bullet)$ vérifiant $j = f \circ j$ est l'identité par suite (8.74) entraîne $\hat{j} \circ \hat{i} = id_H$. De même l'égalité

$$i = \hat{i} \circ \hat{j} \circ i$$

montre que $\hat{i} \circ \hat{j} = id_G$ ■

Pour montrer l'existence de groupes libres on utilise des notations similaires à celles utlisées pour montrer l'existence de monoïdes libres.

Notation 8.12 *Il s'agit de définir des mots sur un alphabet du type $X \times \{-1, +1\}$*

1. *Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels et X est un ensemble, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note :*

$$M_n(X) = \{u \in \mathrm{F}(\mathbb{N}, X)/\mathrm{dom}(u) = \mathbb{N}_{n-1}\}$$

l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans X dont le domaine est $\mathbb{N}_{n-1}$ et

$$M(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} M_n(X) = \{u \in \mathrm{F}(\mathbb{N}, X)/\exists n \in \mathbb{N}^* : \mathrm{dom}(u) = \mathbb{N}_{n-1}\}$$

. Un élément de $M_n(X)$ est appelé un mot de longueur n.

2. *Si $(\mathbb{Z}, +, \centerdot, O)$ est un ensemble d'entiers relatifs, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$ et $T = \{-1, +1\}$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ on note :*

$$M_n(T) = \{\varepsilon \in \mathrm{F}(\mathbb{N}, T)/\mathrm{dom}(\varepsilon) = \mathbb{N}_{n-1}\} \ .$$

L'ensemble $G_n(X, T)$ est défini par

$$G_n(X, T) = M_n(X) \times M_n(T) \ ,$$

3. *On considère l'application $(u, \varepsilon) \mapsto (u, \varepsilon)^{-1}$ de $G_n(X, T)$ dans $G_n(X, T)$ où $(u, \varepsilon)^{-1}$ est le couple (v, ζ) de $G_n(X, T)$ défini par*

$$\forall \ k \in \mathbb{N}_{n-1} \quad v_k = u_{n-1-k} \quad \text{et} \quad \zeta_k = -\varepsilon_{n-1-k} \ .$$

Ainsi, si on a l'idée saugrenue de noter le mot (u, ε) sous la forme

$$(u, \varepsilon) = u_0^{\varepsilon_0} \cdots u_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$$

le mot $(u, \varepsilon)^{-1}$ se notera

$$(u, \varepsilon)^{-1} = u_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \cdots u_0^{-\varepsilon_0}$$

4. *Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ on note $\star_{p,q}$ l'application de*

$$G_p(X, T) \times G_q(X, T) \mapsto G_{p+q}(X, T)$$

$$((u, \varepsilon), (v, \zeta)) \mapsto (w, \theta) = (u, \varepsilon) \star_{p,q} (v, \zeta)$$

où le couple (w, θ) est composé des applications $w : \mathbb{N}_{p+q-1} \mapsto X$ et $\theta : \mathbb{N}_{p+q-1} \mapsto T$ définies par

$$w_k = \begin{cases} u_k & si \quad k \in \mathbb{N}_{p-1} \\ v_{k-p} & si \quad k \in [p, p+q-1] \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta_k = \begin{cases} \varepsilon_k & si \quad k \in \mathbb{N}_{p-1} \\ \zeta_{k-p} & si \quad k \in [p, p+q-1] \end{cases}$$

5. On note

$$G(X,T) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} G_n(X,T)$$

6. L'application $\imath_X$ de X dans $G_1(X,T)$ est définie par

$$\imath_X(x) = (x,1)$$

Ces notations sont utilisées dans le lemme suivant.

Lemme 8.37 *On note $(\mathbb{Z},+,\centerdot,O)$ un ensemble d'entiers relatifs, $\mathbb{N}=\mathbb{Z}_+$, X un ensemble .*

(i) Il existe un unique loi associative sur $G(X,T)$ telle que pour tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ la restriction de $\star$ à $G_p(X,T)\times G_q(X,T)$ est $\star_{p,q}$.

(ii) Pour tout groupe $(G,\centerdot)$ d'élément neutre e et toute application $f\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ de X dans G il existe une application $f_0\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(G(X,T),G)$ qui vérifie les propriétés suivantes

1. Pour tout $x\in X$

$$f(x) = f_0\circ\imath_X(x)$$

2. Pour tout $(u,\varepsilon)\in G(X,T)$ et $(v,\zeta)\in G(X,T)$

$$f_0((u,\varepsilon)\star(v,\zeta)) = f_0(u,\varepsilon)\centerdot f_0(v,\zeta)$$

3. Pour tout $(u,\varepsilon)\in G(X,T)$

$$f_0((u,\varepsilon)\star(u,\varepsilon)^{-1}) = e = f_0((u,\varepsilon)^{-1}\star(u,\varepsilon))$$

Toute application vérifiant 1. et 2. et 3. est égale à f_0.

(iii) Si $\underline{e}$ est un point externe à $G(X,T)$ il existe un prolongement de $\star$ à $(G(X,T)\cup\{\underline{e}\})\times(G(X,T)\cup\{\underline{e}\})$, noté $\overline{\star}$ tel que $(G(X,T)\cup\{\underline{e}\},\overline{\star})$ est un monoïde d'élément neutre $\underline{e}$.

(iv) Le monoïde $(G(X,T)\cup\{\underline{e}\},\overline{\star})$ possède la propriété suivante : Pour tout groupe $(G,\centerdot)$ d'élément neutre e et toute application $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ il existe un unique morphisme $f_m\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(X,T)\cup\{\underline{e}\},G)$ qui vérifie les propriétés suivantes

a *Pour tout $x\in X$*

$$f(x) = f_m\circ\imath_X(x)$$

b *Pour tout $(u,\varepsilon)\in G(X,T)$ et $(v,\zeta)\in G(X,T)$*

$$f_m[(u,\varepsilon)\overline{\star}(v,\zeta)] = f_m(u,\varepsilon)\centerdot f_m(v,\zeta)$$

c *Pour tout $(u,\varepsilon)\in G(X,T)$*

$$f_m((u,\varepsilon)\overline{\star}(u,\varepsilon)^{-1}) = e = f_m((u,\varepsilon)^{-1}\overline{\star}(u,\varepsilon)) \tag{8.76}$$

Preuve

(i)

On pose

$$\star = \bigcup_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}\star_{p,q}$$

et on montre que $\star$ est une loi associative sur $G(X,T)$.

1. D'abord on montre que dom($\star$) $= G(X,T) \times G(X,T)$, en effet,

$$\mathrm{dom}(\star) = \bigcup_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \mathrm{dom}(\star_{p,q}) = \bigcup_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} G_p(X,T) \times G_q(X,T)$$

et

$$\bigcup_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} G_p(X,T) \times G_q(X,T) = G(X,T) \times G(X,T)$$

2. Ensuite on montre que $\star$ est une fonction :

$$[((u,\varepsilon),(v,\zeta)),(w,\theta)) \in \star \quad \text{et} \quad (((u,\varepsilon),(v,\zeta)),(t,\lambda)) \in \star] \Rightarrow (w,\theta) = (t,\lambda)$$

Si $((u,\varepsilon),(v,\zeta)),(w,\theta)) \in \star$ et $((u,\varepsilon),(v,\zeta),(t,\lambda)) \in \star$ alors, par définition d'une réunion, il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $(p',q') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ qui vérifient $((u,\varepsilon),(v,\zeta),(w,\theta)) \in \star_{p,q}$ et $((u,\varepsilon),(v,\zeta)),(t,\lambda)) \in \star_{p',q'}$, ainsi

$$((u,\varepsilon),(v,\zeta)) \in G_p(X,T) \times G_q(X,T), \qquad (w,\theta) = (u,\varepsilon) \star_{p,q} (v,\zeta)$$

et

$$((u,\varepsilon),(v,\zeta)) \in G_{p'}(X,T) \times G_{q'}(X,T), \qquad (t,\lambda) = (u,\varepsilon) \star_{p',q'} (v,\zeta)\ .$$

En particulier,

$$((u,\varepsilon),(v,\zeta)) \in (G_p(X,T) \times G_q(X,T)) \cap (G_{p'}(X,T) \times G_{q'}(X,T)))$$

par suite $G_p(X,T) \cap G_{p'}(X,T) \neq \varnothing$ et $G_q(X,T) \cap G_{q'}(X,T) \neq \varnothing$. Mais l'inégalité $G_p(X,T) \cap G_{p'}(X,T) \neq \varnothing$ entraîne $p = p'$, de même l'inégalité $G_q(X,T) \cap G_{q'}(X,T) \neq \varnothing$ entraîne $q = q'$ par suite

$$(w,\theta) = (u,\varepsilon) \star_{p,q} (v,\zeta) = (u,\varepsilon) \star_{p',q'} (v,\zeta) = (t,\lambda).$$

3. Il reste à voir l'associativité de $\star$. Mais si $((u,\varepsilon),(v,\zeta)) \in G_p(X,T) \times G_q(X,T)$ et $(w,\theta) \in G_r(X,T)$ alors $[(u,\varepsilon) \star (v,\zeta)] \star (w,\theta)$ est le couple (t,λ) de longueur $p+q+r$ défini par

$$t_i = \begin{cases} u_i & si \quad i \in \mathbb{N}_{p-1} \\ v_{i-p} & si \quad i \in [p, p+q-1] \\ w_{i-(p+q)} & si \quad i \in [p+q, p+q+r-1] \end{cases}$$

et

$$\lambda_i = \begin{cases} \varepsilon_i & si \quad i \in \mathbb{N}_{p-1} \\ \zeta_{i-p} & si \quad i \in [p, p+q-1] \\ \theta_{i-(p+q)} & si \quad i \in [p+q, p+q+r-1] \end{cases} \quad .$$

Ainsi, puisque pour tout $i \in [p, p+q+r-1]$ le couple $(v,\zeta) \star (w,\theta) = (r,\mu)$ vérifie

$$r_{i-p} = \begin{cases} v_{i-p} & si \quad i \in [p, p+q-1] \\ w_{i-(p+q)} & si \quad i \in [p+q, p+q+r-1] \end{cases}$$

et

$$\mu_{i-p} = \begin{cases} \zeta_{i-p} & si \quad i \in [p, p+q-1] \\ \theta_{i-(p+q)} & si \quad i \in [p+q, p+q+r-1] \end{cases}$$

on obtient

$$[(u,\varepsilon) \star (v,\zeta)] \star w = u \star [(v,\varepsilon) \star (w,\theta)]$$

(ii)

Preuve de l'existence

0n introduit et on rappelle quelques notations.

1. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ on considère l'application φ_f^n de $G_n(X, T)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G)$ définie par

$$\varphi_f^n(u, \varepsilon)(k) = \begin{cases} f(u_k)^{\varepsilon_k} & si \quad k \leq n-1 \\ e & si \quad k \geq n \end{cases}$$

2. π_G^d est l'unique application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, G)$ vérifiant (voir lemme [8.3] page 196)

$$\pi_G^d(u)(0) = u_0 \quad \text{et} \quad \pi_G^d(u)(k+1) = \pi_Y^d(u)(k) \centerdot u_{k+1}$$

3. On note $f_{0,n}$ l'application de $G_n(X, T)$ dans G définie par

$$f_{0,n}(u, \varepsilon) = \pi_G^d(\varphi_f^n(u, \varepsilon)))(n-1).$$

Lorsque $(G, \centerdot)$ est commutatif et $\centerdot : (u, v) \mapsto uv$ est notée multiplicativement, on peut, en accord avec les notations [8.2] page 200, écrire

$$f_{0,n}(x, \varepsilon) = \prod_{k=0}^{n-1} f(x_k)^{\varepsilon_k}.$$

Enfin on considère la relation $f_0 \subset G(X, T) \times G$ définie par

$$f_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} f_{0,n}$$

et on montre que f_0 est une application de $G(X, T)$ dans G et que c'est l'unique application vérifiant *1*, *2* et *3* page 338 .

1. D'abord $\mathrm{dom}(f_0) = G(X, T)$ puisque

$$\mathrm{dom}(f_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{dom}(f_{0,n}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} G_n(X, T) = G(X, T).$$

2. Ensuite on montre que f_0 est une fonction :

$$[((u, \varepsilon), y) \in f_0 \quad \text{et} \quad ((u, \varepsilon), z) \in f_0] \Rightarrow y = z.$$

Si $((u, \varepsilon), y) \in f_0$ et $((u, \varepsilon), z)) \in f_0$, alors, par définition d'une réunion, il existe $(n, n') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $((u, \varepsilon), y) \in f_{0,n}$ et $((u, \varepsilon), z) \in f_{0,n'}$ ainsi

$$(u, \varepsilon) \in G_n(X, T),\ y = f_{0,n}(u, \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad (u, \varepsilon) \in G_{n'}(X, T),\ z = f_{0,n'}(u, \varepsilon).$$

En particulier $G_n(X, T) \cap G_{n'}(X, T) \neq \varnothing$, mais cette inégalité entraîne $n = n'$, par suite

$$y = f_{0,n}(u, \varepsilon) = f_{0,n'}(u, \varepsilon) = z.$$

3. On montre maintenant que pour tout $((u, \varepsilon), (v, \zeta)) \in G(X, T) \times G(X, T)$ on a

$$f_0((u, \varepsilon) \star (v, \zeta)) = f_0(u, \varepsilon) \centerdot f_0(v, \zeta).$$

Puisque $(u, \varepsilon) \in G_n(X) \Rightarrow f_0(u, \varepsilon) = f_{0,n}(x)$ il suffit de montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour tout $((u, \varepsilon), (v, \zeta)) \in G_p(X) \times G_q(X)$

$$f_{0,p+q}((u, \varepsilon) \star (v, \zeta)) = f_{0,p}(u, \varepsilon) \centerdot f_{0,q}(v, \zeta).$$

En d'autres termes il s'agit de montrer

$$\pi_G^d(\varphi_f^{p+q}[(u, \varepsilon) \star (v, \zeta)](p+q-1) = \pi_G^d(\varphi_f^p(u, \varepsilon))(p-1) \centerdot \pi_G^d(\varphi_f^q(v, \zeta))(q-1).$$

on pose

$$U = \{k \in \mathbb{N}_{q-1} / \pi_G^d(\varphi_f^{p+q}[(u, \varepsilon) \star (v, \zeta)])(p+k) = \pi_G^d(\varphi_f^p(u, \varepsilon))(p-1) \centerdot \pi_G^d(\varphi_f^q(v, \zeta))(k)\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_{q-1}$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer

(a) $0 \in U$

(b) $[k \in U \; et \; k < q-1] \Rightarrow k+1 \in U$.

(a) D'abord on montre $0 \in U$. En effet, par définition de π_G^d on a

$$\pi_G^d(\varphi_f^{p+q}[(u,\varepsilon)\star(v,\zeta)])(p) = \pi_G^d(\varphi_f^{p+q}((u,\varepsilon)\star(v,\zeta)))(p-1) \centerdot (\varphi_f^{p+q}((u,\varepsilon)\star(v,\zeta)))(p),$$

or :

i. pour tout $k \in \mathbb{N}_{p-1}$ (puisque la restriction de $(u,\varepsilon)\star(v,\zeta$ á $\mathbb{N}_{p-1}$ est (u,ε))

$$\varphi_f^{p+q}((u,\varepsilon)\star(v,\zeta))(k) = \varphi_f^p(u,\varepsilon)(k)$$

ainsi le lemme [8.3] page 196 permet d'affirmer que

$$\pi_G^d(\varphi_f^{p+q}((u,\varepsilon)\star(v,\zeta))(p-1) = \pi_G^d(\varphi_f^p(u,\varepsilon))(p-1)$$

ii. puisque $(u,\varepsilon)\star(v,\zeta)(p) = (v_0,\zeta_0)$

$$\varphi_f^{p+q}((u,\varepsilon)\star(v,\zeta))(p) = f(v_0)^{\zeta_0} = \pi_G(\varphi_f^q(v,\zeta))(0)$$

(b) Ensuite on montre $[k \in U \; et \; k < q-1 \Rightarrow k+1 \in U]$. En effet, par définition de π_G^d on a, si $g_0 = \varphi_f^{p+q}[(u,\varepsilon)\star(v,\zeta)](p+k+1)$

$$\pi_G^d(\varphi_f^{p+q}[(u,\varepsilon)\star(v,\zeta)](p+k+1) = \pi_G^d(\varphi_f^{p+q}[(u,\varepsilon)\star(v,\zeta)](p+k) \centerdot g_0$$

or

i. Puisque $k \in U$ on a

$$\pi_G^d(\varphi_f^{p+q}[(u,\varepsilon)\star(v,\zeta)](p+k) = \pi_G^d(\varphi_f^p(u,\varepsilon))(p-1) \centerdot \pi_G^d(\varphi_f^q(v,\zeta))(k)$$

Ainsi l'associativité de la loi $\centerdot$ montre que,

$$\pi_G^d(\varphi_f^{p+q}[(u,\varepsilon)\star(v,\zeta)](p+k+1) = \pi_G^d(\varphi_f^p(u,\varepsilon))(p-1) \centerdot [\pi_G^d(\varphi_f^q(v,\zeta)))(k) \centerdot g_0]$$

mais par définition

$$\varphi_f^{p+q}[(u,\varepsilon)\star(v,\zeta)](p+k+1) = f([(u,\varepsilon)\star(v,\zeta]_{p+k+1}) = f(v_{k+1})^{\zeta_{k+1}} = \varphi_f^q(v,\zeta)(k+1)$$

par suite on obtient

$$\pi_G^d(\varphi_f^{p+q}[(u,\varepsilon)\star(v,\zeta)])(p+k+1) = \pi_G^d(\varphi_f^p(u,\varepsilon))(p-1) \centerdot [\pi_G^d(\varphi_f^q(v,\zeta))(k) \centerdot \varphi_f^q(v,\zeta)(k+1))]$$

ii. Enfin la définition de π_G^d montre que

$$\pi_G^d(\varphi_f^q(v,\zeta))(k) \centerdot \varphi_f^q(v,\zeta)(k+1)) = \pi_G^d(\varphi_f^q(v,\zeta))(k+1)$$

d' où

$$\pi_G^d(\varphi_f^{p+q}[(u,\varepsilon)\star(v,\zeta)])(p+k+1) = \pi_Y^d(\varphi_f^p(u))(p-1) \centerdot (\pi_Y^d(\varphi_f^q(v))(k+1))$$

et $k+1 \in U$.

Ainsi $U = \mathbb{N}_{q-1}$, en particulier $q-1 \in U$ et

$$\pi_G^d(\varphi_f^{p+q}[(u,\varepsilon)\star(v,\zeta)])(p+q-1) = \pi_G^d(\varphi_f^p(u,\varepsilon))(p-1) \centerdot (\pi_G^d(\varphi_f^q(v,\zeta))(q-1))$$

ce qui s'écrit

$$f_0((u,\varepsilon)\star(v,\zeta)) = f_0(u,\varepsilon) \centerdot f_0(v,\zeta) \; .$$

on conclut ainsi la preuve de *2.* page 338 et on passe à la preuve de *3.*

4. On montre que pour tout $(u,\varepsilon) \in G(X,T)$

$$f_0([(u,\varepsilon) \star (u,\varepsilon)^{-1}]) = e$$

Il s'agit de montrer que si $(u,\varepsilon) \in G_n(X,T)$

$$\pi_G^d(\varphi_f^n(u,\varepsilon)^{-1})(n-1) = [\pi_G^d(\varphi_f^n(u,\varepsilon)(n-1)]^{-1}$$

On remarque que si $(u,\varepsilon) \in G_n(X,T)$ alors $(u,\varepsilon) \star (u,\varepsilon)^{-1}$ est le couple (w,θ) d'applications définies sur $\mathbb{N}_{2n-1}$ par

$$w_k = \begin{cases} u_k & si \quad k \in \mathbb{N}_{n-1} \\ u_{2n-1-k} & si \quad k \in [n, 2n-1] \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta_k = \begin{cases} \varepsilon_k & si \quad k \in \mathbb{N}_{n-1} \\ -\varepsilon_{2n-1-k} & si \quad k \in [n, 2n-1] \end{cases}$$

Pour $q \in \mathbb{N}^* \cap \mathbb{N}_{n-1}$ on note $p_{q,n}$ la projection de $G_n(X,T)$ dans $G_q(X,T)$. Ainsi, pour $(u,\varepsilon) \in G_n(X,T)$ $p_{q,n}(u,\varepsilon)$ est le couple d'applications $(u^{(q)},\varepsilon^{(q)})$ définies sur $\mathbb{N}_{q-1}$ par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_{q-1} \quad u_k^{(q)} = u_k \quad \text{et} \quad \varepsilon_k^{(q)} = \varepsilon_k$$

On va montrer que pour tout $n \geq 2$ et $(u,\varepsilon) \in G_n(X,T)$

$$f_0[(u,\varepsilon) \star (u,\varepsilon)^{-1}] = f_0[(u^{(n-1)},\varepsilon^{(n-1)}) \star (u^{(n-1)},\varepsilon^{(n-1)})^{-1}] \tag{8.77}$$

Pour cela on considère le mot $(v,\zeta) \in G_{n+1}(X,T)$ défini par

$$v_k = \begin{cases} u_k & si \quad k \in \mathbb{N}_{n-1} \\ u_{n-1} & si \quad k = n \end{cases} \quad \text{et} \quad \zeta_k = \begin{cases} \varepsilon_k & si \quad k \in \mathbb{N}_{n-1} \\ -\varepsilon_{n-1} & si \quad k = n \end{cases}$$

et on montre

(a) $(u,\varepsilon) \star (u,\varepsilon)^{-1} = (v,\zeta) \star (u^{(n-1)},\varepsilon^{(n-1)})^{-1}$

(b) $f_0(v,\zeta) = f_0(u^{(n-1)},\varepsilon^{(n-1)})$

(a) Si $(w',\theta') = (v,\zeta) \star (u^{(n-1)},\varepsilon^{(n-1)})^{-1}$ alors par définition

$$w'_k = \begin{cases} u_k & si \quad k \in \mathbb{N}_{n-1} \\ u_{n-1} & si \quad k = n \\ u_{2n-1-k} & si \quad k \in [n+1, 2n-1] \end{cases} \quad \text{et } \theta'_k = \begin{cases} \varepsilon_k & si \quad k \in \mathbb{N}_{n-1} \\ -\varepsilon_{n-1} & si \quad k = n \\ -\varepsilon_{2n-1-k} & si \quad k \in [n+1, 2n-1] \end{cases}$$

il suffit donc de comparer ces expressions à celles données pour le mot $(u,\varepsilon) \star (u,\varepsilon)^{-1}$ pour voir l'égalité.

(b) Par définition

$$f_0(v,\zeta) = \pi_G(\varphi_f^n(v,\zeta))(n) = \pi_G(\varphi_f^n(v,\zeta))(n-1) \centerdot f(v_n)^{\zeta_n}$$

ainsi pour $n \geq 2$

$$\pi_G(\varphi_f^n(v,\zeta))(n) = \pi_G(\varphi_f^n(v,\zeta))(n-2) \centerdot f(v_{n-1})^{\zeta_{n-1}} \centerdot f(v_n)^{\zeta_n}$$

— Puisque $v_n = v_{n-1} = u_{n-1}$ et $\zeta_{n-1} = \varepsilon_{n-1}$, $\zeta_n = -\varepsilon_{n-1}$ on obtient

$$f(v_{n-1})^{\zeta_{n-1}} \centerdot f(v_n)^{\zeta_n} = f(u_{n-1})^{\varepsilon_{n-1}} \centerdot f(u_{n-1})^{-\varepsilon_{n-1}} = e$$

ceci montre déjà que

$$f_0(v,\zeta) = \pi_G(\varphi_f^n(v,\zeta))(n-2)$$

— Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-2}$ on a

$$\varphi_f^n(v,\zeta)(k) = f(v_k)^{\zeta_k} = f(u_k)^{\varepsilon_k} = \varphi_f^n(u^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)})(k)$$

le lemme [8.3] page 196 permet d'affirmer que

$$f_0(v,\zeta) = \pi_G(\varphi_f^n(v,\zeta))(n-2) = \pi_G(\varphi_f^n(u^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}))(n-2) = f_0(u^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)})$$

Ceci permet de montrer (8.76), en effet d'après (a)

$$f_0[(u,\varepsilon) \star (u,\varepsilon)^{-1}] = f_0[(v,\zeta) \star (u^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)})^{-1}]$$

et *2* permet d'affirmer que

$$f_0[(v,\zeta) \star (u^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)})^{-1}] = f_0(v,\zeta) \centerdot f_0[(u^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)})^{-1}]$$

par suite d'après (b)

$$f_0[(u,\varepsilon) \star (u,\varepsilon)^{-1}] = f_0(u^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}) \centerdot f_0[(u^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)})^{-1}]$$

c'est à dire

$$f_0[(u,\varepsilon) \star (u,\varepsilon)^{-1}] = f_0[(u^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}) \star (u^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)})^{-1}]$$

De l'égalité (8.77) page 344 on déduit que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $(u,\varepsilon) \in G_n(X,T)$ on a

$$f_0[(u,\varepsilon) \star (u,\varepsilon)^{-1}] = f_0[(u^{(1)}, \varepsilon^{(1)} \star (u^{(1)}, \varepsilon^{(1)})^{-1}]$$

Mais $(u^{(1)}, \varepsilon^{(1)} \star (u^{(1)}, \varepsilon^{(1)})^{-1}$ est l'élément $(w,\theta) \in G_2(X,T)$ défini par

$$w_0 = w_1 = u_0 \quad \text{et} \quad \theta_0 = \varepsilon_0 \ , \theta_1 = -\varepsilon_0$$

par suite

$$\varphi_f^2[(u^{(1)}, \varepsilon^{(1)} \star (u^{(1)}, \varepsilon^{(1)})^{-1}](0) = f(u_0)^{\varepsilon_0}$$

et

$$\varphi_f^2[u^{(1)}, \varepsilon^{(1)} \star (u^{(1)}, \varepsilon^{(1)})^{-1}](1) = f(u_0)^{-\varepsilon_0}$$

ainsi

$$f_0[(u,\varepsilon) \star (u,\varepsilon)^{-1}] = f_0[(u^{(1)}, \varepsilon^{(1)} \star (u^{(1)}, \varepsilon^{(1)})^{-1}] = f(u_0)^{\varepsilon_0} \centerdot f(u_0)^{-\varepsilon_0} = e\ .$$

Enfin l'égalité

$$f_0[(u,\varepsilon)^{-1} \star (u,\varepsilon)] = e$$

provient de $((u,\varepsilon)^{-1})^{-1} = (u,\varepsilon)$

Preuve de l'unicité

On montre maintenant que f_0 est l'unique application vérifiant *1, 2, 3* . Soit g une application de $G(X,T)$ dans G vérifiant ces propriétés. On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \forall\ (u,\varepsilon) \in G_{n+1}(X,T)\ f_0(u,\varepsilon) = g(u,\varepsilon)\},$$

et on montre que $H = \mathbb{N}$ en montrant

1. $0 \in H$
2. $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$.

1. D'abord on montre $0 \in H$. En effet si $(u,\varepsilon) \in G_1(X)$ alors

— si $\varepsilon_0 = 1$ alors $(u, \varepsilon) = i_X(u_0)$ par suite

$$g(u, \varepsilon) = g(i_X(u_0)) = f(u_0) = f_0(u, \varepsilon)$$

— si $\varepsilon_0 = -1$ alors $(u, \varepsilon) = (i_X(u_0))^{-1}$ et *3* montre que

$$g[(i_X(u_0) \star (i_X(u_0)^{-1}] = e$$

ainsi d'après *2* on obtient

$$g(u, \varepsilon) = (g(i_X(u_0))^{-1} = (f(u_0))^{-1} = f_0(u, \varepsilon)$$

2. Ensuite on montre $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$. On note p_n l'application de $G_{n+2}(X, T)$ dans $G_{n+1}(X, T)$ qui à $(u, \varepsilon) \in G_{n+2}(X, T)$ fait correspondre sa restriction à $G_{n+1}(X, T)$, ainsi $p_n(u, \varepsilon)$ est le couple (w, θ) d'applications définies sur $\mathbb{N}_n$ par

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n \quad w_k = u_k \quad \text{et} \quad \theta_k = \varepsilon_k$$

par définition de $\star$ on a

— si $\varepsilon_{n+1} = 1$ alors

$$(u, \varepsilon) = p_n(u, \varepsilon) \star i_X(u_{n+1})$$

ainsi *2.* montre que

$$g(u, \varepsilon) = g(p_n(u, \varepsilon)) \centerdot g(i_X(u_{n+1})) = g(p_n(u, \varepsilon)) \centerdot g((i_X(u_{n+1})) = g(p_n(u, \varepsilon)) \centerdot f(u_{n+1})$$

et l'assertion $n \in H$ entraîne $g(p_n(u, \varepsilon)) = f_0(p_n(u, \varepsilon))$ par suite,

$$g(u, \varepsilon) = g(p_n(u, \varepsilon)) \centerdot f(u_{n+1}) = f_0(p_n(u, \varepsilon)) \centerdot f(u_{n+1}) = f_0(u, \varepsilon)$$

— si $\varepsilon_{n+1} = -1$ alors

$$(u, \varepsilon) = p_n(u, \varepsilon) \star (i_X(u_{n+1}))^{-1}$$

ainsi *2.* montre que

$$g(u, \varepsilon) = g(p_n(u, \varepsilon)) \centerdot g((i_X(u_{n+1})^{-1}) = g(p_n(u, \varepsilon))f(u_{n+1})^{-1}$$

et l'assertion $n \in H$ entraîne $g(p_n(u, \varepsilon)) = f_0(p_n(u, \varepsilon))$ par suite,

$$g(u, \varepsilon) = g(p_n(u, \varepsilon)) \centerdot f(u_{n+1})^{-1} = f_0(p_n(u, \varepsilon)) \centerdot f(u_{n+1})^{-1} = f_0(u, \varepsilon)$$

et $n + 1 \in H$

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et $g = f_0$

(iii)

Puisque $\underline{e}$ est un point externe à $G(X, T)$ il suffit de poser

$$\alpha \bar{\star} \beta = \begin{cases} \alpha \star \beta & si \quad (\alpha, \beta) \in G(X, T) \times G(X, T) \\ \alpha & si \quad \alpha \in G(X, T) \text{ et } \beta = \underline{e} \\ \beta & si \quad \alpha = \underline{e} \text{ et } \beta \in G(X, T) \\ \underline{e} & si \quad \alpha = \beta = \underline{e} \end{cases}$$

(iv)

Puisque $\underline{e}$ est un point externe à $G(X, T)$ il suffit de poser

$$f_m(\alpha) = \begin{cases} f_0(\alpha) & si \quad \alpha \in G(X, T) \\ e & si \quad \alpha = \underline{e} \end{cases}$$

alors

— **a** provient de *1* et de $\imath_X(x) \in G(X,T)$
— **b** provient de *2*
— **c** provient de *3*

■

Le théorème qui suit utilise les résultats et notations des lemmes [8.14] page 238 et [8.36] page 338.

Théorème 8.9 ***Existence des groupes libres.***
Pour tout ensemble X il existe un couple $(G(X), \varpi_X)$ où
— *$G(X)$ est un groupe*
— *$\varpi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G(X))$ est une application de X dans $G(X)$*
ce couple possède la propriété suivante : pour tout groupe G et pour toute application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ il existe unique morphisme $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(X), G)$ vérifiant

$$f = f^* \circ \varpi_X \ .$$

Preuve

1. Preuve de l'existence

On considère le monoïde $(M, \overline{\star}) = (G(X,T) \cup \{\underline{e}\}, \overline{\star})$ défini par le lemme [8.37] (p. 340) et le sous-ensemble A de $(G(X,T) \cup \{\underline{e}\}) \times (G(X,T) \cup \{\underline{e}\})$ défini par

$$A = \{(\alpha, \beta) \in M \times M / \alpha = \underline{e} \text{ et } \exists\ (u, \varepsilon) \in G(X,T) : \beta = (u,\varepsilon)\overline{\star}(u,\varepsilon)^{-1}\} \ .$$

Enfin on note $\rho_*(A)$ la relation d'équivalence compatible avec la loi $\overline{\star}$ et engendrée par A (voir lemme [8.14] p . 238) et on considère le monoïde quotient

$$G(X) = M/\rho_*(A) = [G(X,T) \cup \{\underline{e}\}]/\rho_*(A) \ .$$

de plus

$$\pi : G(X,T) \cup \{\underline{e}\} \mapsto G(X)$$

sera l'application canonique et $\times$ sera la loi quotient.
On montre les points suivants :

1. $G(X)$, muni de la structure de monoïde quotient, est un groupe
2. Si $\pi : G(X,T) \cup \{\underline{e}\} \mapsto G(X)$ est l'application canonique et ϖ_X est l'application de X dans $G(X)$ définie par

$$\varpi_X = \pi \circ \imath_X$$

alors pour tout groupe $(G, \centerdot)$ et pour toute application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ il existe un unique morphisme $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(X), G)$ vérifiant

$$f = f^* \circ \varpi_X \ .$$

1. <u>$G(X)$ est un groupe</u>
Il suffit de montrer que tout élément de $G(X)$ est inversible , autrement dit il faut vérifier que si $\alpha \in G(X,T) \cup \{\underline{e}\}$ alors $\pi(\alpha)$ est inversible
— si $\alpha = \underline{e}$, $\pi(\alpha)$ est l'élément neutre de $G(X)$, par suite il est inversible
— si $\alpha \in G(X,T)$ alors $\alpha = (u, \varepsilon)$ et par définition de A

$$(\underline{e}, (u,\varepsilon)\overline{\star}(u,\varepsilon)^{-1}) \in A$$

en particulier

$$(\underline{e}, (u,\varepsilon)\overline{\star}(u,\varepsilon)^{-1}) \in \rho_*(A)$$

par suite $\pi(\underline{e}) = \pi[(u,\varepsilon)\overline{\star}(u,\varepsilon)^{-1}]$ et puisque π est un morphisme

$$\pi(\underline{e}) = \pi[(u,\varepsilon)\overline{\star}(u,\varepsilon)^{-1}] = \pi(u,\varepsilon) \times \pi[(u,\varepsilon)^{-1}]$$

ainsi $\pi(u,\varepsilon)$ est inversible et

$$(\pi(u,\varepsilon))^{-1} = \pi[(u,\varepsilon)^{-1}]$$

2. Existence de f^*
Si $(G, \centerdot)$ est un groupe et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ une application de X dans G alors le lemme [8.37] page 340 permet d'affirmer qu'il existe un unique morphisme $f_m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(X,T) \cup \{\underline{e}\}, G)$ vérifiant les propriétés **a**, **b** et **c** page 340. On montre qu'il existe un morphisme $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(X), G)$ vérifiant
$$f_m = f^* \circ \pi \ . \tag{8.78}$$
D'après le lemme [8.14] (p. 238) pour montrer (8.78) il suffit de vérifier
$$A \subset \{(\alpha, \beta) \in M \times M / f_m(\alpha) = f_m(\beta)\} \ .$$
Mais si $(\alpha, \beta) \in A$ alors $\alpha = \underline{e}$ et il existe $(u, \varepsilon) \in G(X,T)$ tel que
$$\beta = (u, \varepsilon)\overline{\star}(u, \varepsilon)^{-1}$$
— puisque f_m est un morphisme
$$f_m(\underline{e}) = e$$
— d'après (8.76) page 340 on a pour tout $(u, \varepsilon) \in G(X,T)$
$$f_m((u, \varepsilon)\overline{\star}(u, \varepsilon)^{-1}) = e$$
ainsi
$$f_m(\alpha) = e = f_m((u, \varepsilon)\overline{\star}(u, \varepsilon)^{-1}) = f_m(\beta)$$

Ceci montre l'existence d'un morphisme f^* vérifiant (8.78) . On vérifie qu'un tel morphisme satisfait l'égalité
$$f = f^* \circ \varpi_X \ , \tag{8.79}$$
or par définition de ϖ_X on a
$$f^* \circ \varpi_X = f^* \circ (\pi \circ \imath_X) = (f^* \circ \pi) \circ \imath_X = f_m \circ \imath_X$$
et par définition de f_m on a $f_m \circ \imath_X = f$. Ce qui donne $f = f^* \circ \varpi_X$.

2. Preuve de l'unicité

Si f_0 et f_1 sont des morphismes vérifiant (8.78) alors $f_0 \circ \pi$ et $f_1 \circ \pi$ vérifient les propriétés **a**, **b** et **c** de la page 340 ainsi, par l'unicité de f_m, on obtient
$$f_m = f_0 \circ \pi = f_1 \circ \pi$$
π étant surjective cela entraîne $f_0 = f_1$. ■

On passe au coproduit et à la limite inductive.

8.6.3 *Coproduit et limite inductive d'une famille de groupes*

1 *Coproduit d'une famille de groupe*

On est maintenant familier avec la notion de coproduit dans une catégorie :

Définition 8.38 *On note I et $\mathbb{U}$ des ensembles et $(X, \circledast, e)$ une famille de groupes indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$.*
*On appelle **coproduit** de la famille $(X, \circledast, e)$ un couple $((P^0, *), f)$ où $(P^0, *)$ est un groupe et $f \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, P^0)$*

vérifie la propriété suivante : pour tout groupe $(H, \diamond)$ et pour tout $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, H)$ *il existe un unique morphisme de groupe* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0, H)$ *vérifiant*

$$g_i = h \circ f_i.$$

En d'autres termes, $((P^0, *), f)$ *est un coproduit de* $(X, \circledast, e)$ *si pour tout groupe* $(H, \diamond)$ *l'application* φ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0, H)$ *dans* $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, H)$ *définie par*

$$\varphi(h)(i) = h \circ f_i$$

est bijective .

On montre l'existence du coproduit d'une famille de groupes. Le lemme qui suit utilise l'existence de coproduit dans la catégorie des ensembles (voir lemme [7.10] page 183), de groupe libre au-dessus des ensembles (voir théorème [8.9] page 347), et les résultats du lemme [8.14] page 238.

Lemme 8.38 *On note* I *et* $\mathbb{U}$ *des ensembles,* $(X, \circledast, e)$ *une famille de groupes indexée par* I *et à valeurs dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$*, enfin* (ϕ^0, f) *est un coproduit dans* **ens** *de la famille* $i \mapsto X_i$ *et* $((G(\phi^0), \star), \varpi)$ *est un groupe libre au-dessus de* ϕ^0*.*

(i) Il existe une relation d'équivalence $E(f)$ *sur* $G(\phi^0)$ *qui vérifie les propriétés suivantes*

1. $E(f)$ *est compatible avec la loi* $*$*.*
2. *Si* $\big(G(\phi^0)/E(f)\ , \bullet\big)$ *est le groupe quotient de* $G(\phi^0)$ *par* $E(f)$ *et* π *le morphisme canonique de* $(G(\phi^0), *)$ *dans* $\big(G(\phi^0)/E(f), \bullet\big)$ *alors, pour tout* $i \in I$ *l'application* h_i *de* X_i *dans* $G(\phi^0)/E(f)$ *définie par*
$$h_i = \pi \circ \varpi \circ f_i$$
est un morphisme de groupes de $(X_i, \circledast_i)$ *dans* $\big(G(\phi^0)/E(f), \bullet\big)$ *ainsi* $h : i \mapsto h_i$ *est un élément de* $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}\left(X_i, G(\phi^0)/E(f)\right)$

(ii)$\big(\big(G(\phi^0)/E(f), \bullet\big), h\big)$ *est un coproduit dans la catégorie* **gr** *de* $(X, \circledast, e)$*.*

Preuve

(i)

e sera l'élément neutre de $(G(\phi^0), \star)$, de plus on note

— $\alpha_i : X_i \times X_i \mapsto G(\phi^0) \times G(\phi^0)$ l'application définie par

$$\alpha_i(x, y) = \begin{cases} (\varpi(f_i(x \circledast_i y))\ , \varpi(f_i(x)) \star \varpi(f_i(y)) & si \quad x \neq e_i \text{ et } y \neq e_i \\ (\varpi(f_i(e_i)), e) & si \quad x = e_i \\ (e, \varpi(f_i(e_i))) & si \quad y = e_i \end{cases}$$

—
$$A = \bigcup_{i \in I} \mathrm{im}(\alpha_i)\ ,$$

— $E(f)$ la relation d'équivalence compatible avec la loi de $G(\phi^0)$ engendrée par A (voir définition [8.13] page 240)

Le lemme [8.14] page 238 permet d'affirmer que l'ensemble quotient $G(\phi^0)/E(f)$ peut-être muni d'une structure de monoïde pour laquelle l'application canonique π est un morphisme.On montre que pour tout $i \in I$ h_i est un morphisme de $(X_i, \circledast_i)$ dans $(G(\phi^0)/E(f), \bullet)$

1. D'abord, puisque pour tout $i \in I$ $(\varpi(f_i(e_i)), e) \in A$ on a
$$h_i(e_i) = \pi(\varpi(f_i(e_i)) = \pi(e).$$

2. Ensuite si $i \in I$ et $(x, y) \in X_i \times X_i$ alors

$$(\varpi(f_i(x \circledast_i y)) \ , \varpi(f_i(x)) \star \varpi(f_i(y))) \in A$$

par suite

$$h_i(x \circledast_i y) = \pi(\varpi(f_i(x \circledast_i y))) = \pi(\varpi(f_i(x))) \star (\varpi(f_i(y)) \ ,$$

π étant un morphisme on a

$$\pi\,(\varpi(f_i(x))) \star (\varpi(f_i(y)) = \pi\,(\varpi(f_i(x)) \bullet \pi((\varpi(f_i(y)))$$

ainsi

$$h_i(x \circledast_i y) = \pi(\varpi(f_i(x)) \bullet \pi(\varpi(f_i(y))) = h_i(x) \bullet h_i(y).$$

(ii)

Il s'agit de montrer que pour tout groupe $(H, , \diamond)$ et pour tout

$$g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, H)$$

il existe un unique $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(\phi^0)/E(f), H)$ vérifiant :

$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g^* \circ h_i$$

Preuve de l'existence

Soit $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, H)$, alors

— par définition d'un coproduit dans **ens** il existe $g_e \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\phi^0, H)$ vérifiant :

$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g_e \circ f_i$$

— par définition d'un groupe libre il existe $g_m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(\phi^0), H)$ vérifiant :

$$g_e = g_m \circ \varpi$$

ainsi on obtient

$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g_m \circ \varpi \circ f_i \tag{8.80}$$

— on veut maintenant montrer qu'il existe $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(\phi^0)/E(f), H)$ vérifiant :

$$g_m = g^* \circ \pi.$$

D'après le lemme [8.14] page 238 il suffit de montrer :

$$(u, v) \in A \Rightarrow g_m(u) = g_m(v)$$

et cela provient du fait que pour tout $i \in I$ g_i est un morphisme. En effet, si $(u, v) \in A$ il existe $i \in I$ tel que $(u, v) \in \mathrm{im}(\alpha_i)$, par suite il existe $i \in I$ et $(x, y) \in X_i \times X_i$ tel que

$$\alpha_i(x, y) = (u, v)$$

1. Si $x \neq e_i$ et $y \neq e_i$ alors $u = \varpi(f_i(x \circledast_i y))$ et $v = \varpi(f_i(x)) \star \varpi(f_i(y))$ ainsi, puisque $g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, H)$,

$$g_m(u) = g_m \circ \varpi \circ f_i(x \circledast_i y) = g_i(x \circledast_i y) = g_i(x) \diamond g_i(y)$$

et

$$g_m(v) = g_m(\varpi(f_i(x) \star \varpi(f_i(y))$$

et par construction g_m est un morphisme de $(G(\phi^0)), \star)$ dans $(H, \diamond)$ par suite

$$g_m(\varpi(f_i(x) \star \varpi(f_i(y)) = g_m(\varpi(f_i(x)) \diamond g_m(\varpi(f_i(y)) = g_i(x) \diamond g_i(y)$$

ce qui montre que

$$g_m(u) = g_m(v).$$

2. Si $x = e_i$ alors $u = \varpi(f_i(e_i))$ et $v = e$ ainsi

$$g_m(u) = g_m \circ \varpi \circ f_i(e_i) = g_i(e_i)$$

puisque $g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, H)$, on obtient, si ε est l'élément neutre de $(H, \diamond)$, $g_m(u) = g_i(e_i) = \varepsilon$. De même, puisque $g_m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(\phi^0), H)$ on obtient $g_m(v) = g_m(e) = \varepsilon$ par suite on a encore

$$g_m(u) = g_m(v).$$

3. Le cas $y = e_i$ est similaire au cas $x = e_i$ et permet aussi de conclure

$$g_m(u) = g_m(v).$$

Ainsi il existe un morphisme $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(\phi^0)/E(f), H)$ vérifiant

$$g_m = g^* \circ \pi$$

et (8.80) s'écrit

$$\forall\ i \in I\ g_i = g_m \circ \varpi \circ f_i = g^* \circ \pi \circ \varpi \circ f_i = g^* \circ h_i.$$

Preuve de l'unicité

Si $(u, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(\phi^0)/E(f), H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(\phi^0)/E(f), H)$ vérifient

$$g_i = u \circ h_i = u \circ \pi \circ \varpi \circ f_i = v \circ h_i = v \circ \pi \circ \varpi \circ f_i$$

alors les applications

$$g_{e,u} = u \circ \pi \circ \varpi \qquad \text{et} \qquad g_{e,v} = v \circ \pi \circ \varpi$$

sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\phi^0, H)$ qui vérifient

$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g_{e,u} \circ f_i = g_{e,v} \circ f_i$$

ainsi, par définition d'un coproduit $g_{e,u} = g_{e,v}$. Enfin les morphisme $g_{m,u}$ et $g_{m,v}$ définis par

$$g_{m,u} = u \circ \pi \qquad \text{et} \qquad g_{m,v} = v \circ \pi$$

sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(\phi^0), H)$ qui vérifient

$$g_{m,u} \circ \varpi = g_{m,v} \circ \varpi$$

ainsi, par définition d'un groupe libre $g_{m,u} = g_{m,v}$ d'où

$$u \circ \pi = v \circ \pi$$

π étant surjective cela entraîne $u = v$. ■

Comme dans la catégorie des monoïdes l'existence de coproduit dans la catégorie des groupes montre en plus l'existence de limite inductive.

2 *Limite inductive d'une famille de groupe*

Lemme 8.39 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, $(X, \circledast, e)$ une famille de groupes indexée par I à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, et (R, f) est une famille de transitions de $(X, \circledast, e)$.*
Si $((P^0, \star), h)$ est un coproduit (dans la catégorie **gr***) de $(X, \circledast, e)$ alors l'application A de R dans l'ensemble $\mathcal{P}(P^0 \times P^0)$ définie par*

$$A_{(i,j)} = \{(u, v) \in P^0 \times P^0 / \exists\ (x, y) \in X_i \times X_j : u = h_i(x)\ v = h_j(y)\ x = f_{i,j}(y)\}$$

possède les propriétés suivantes

1. $(i,j) \in R \Rightarrow (h_i(e_i), h_j(e_j)) \in A_{(i,j)}$

2. Si on note

(a)

$$A = \bigcup_{(i,j)\in R} A_{(i,j)}$$

(b) $\rho_*(A)$ *la relation d'équivalence compatible avec la loi de* P^0 *et engendrée par A,*([7])

(c) $(P^0/\rho_*(A), \bullet)$ *le groupe quotient de* P^0 *par* $\rho_*(A)$

(d) π *le morphisme canonique de* $(P^0, \star)$ *dans* $(P^0/\rho_*(A), \bullet)$

(e) $g \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, P^0/\rho_*(A))$ *l'application définie par*

$$g_i = \pi \circ h_i$$

Alors $((P^0/\rho_*(A), \bullet), g)$ *est une limite inductive (dans la catégorie* **gr***) de* (R, f)

Preuve Il suffit de reprendre la démonstration du lemme [8.21] page 260

1. Si $(i,j) \in R$ alors $(h_i(e_i), h_j(e_j)) \in A$. En effet, si $(i,j) \in R$ alors, puisque $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_j, X_i)$ on a $f_{i,j}(e_j) = e_i$.
2. D'abord $\pi \circ h_i$ est un candidat puisque

$$\pi \circ h_i \circ f_{i,j} = \pi \circ h_j \ .$$

En effet, par définition de A, pour tout $y \in X_j$ si $x = f_{i,j}(y)$ alors

$$(h_i(x), h_j(y)) \in A$$

par suite, puisque par construction $A \subset \rho_*(A)$, on obtient

$$\pi(h_i(f_{i,j}(y))) = \pi(h_j(y)) \ .$$

Il reste á montrer que si $(H, \diamond)$ est un groupe et $a \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, H)$ vérifie

$$(i,j) \in R \Rightarrow a_j = a_i \circ f_{i,j} \tag{8.81}$$

il existe un unique morphisme $a^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A), H)$ tel que pour tout $i \in I$

$$a_i = a^0 \circ g_i \ .$$

Preuve de l'existence

Puisque $((P^0, \star), h)$ est un coproduit dans **gr** il existe un unique morphisme $a^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0, H)$ vérifiant :

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^* \circ h_i$$

on va montrer qu'il existe $a^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A), Y)$ tel que

$$a^* = a^0 \circ \pi \ .$$

D'après le lemme [8.14] page 238 il suffit de montrer :

$$(u,v) \in A \Rightarrow a^*(u) = a^*(v)$$

7. voir lemme [8.14] page 238

Mais si $(u,v) \in A$ il existe $(i,j) \in R$, $(x,y) \in X_i \times X_j$ tels que $u = h_i(x)$ $v = h_j(y)$ et $x = f_{i,j}(y)$ ainsi la définition de a^* et (8.81) entraîne

$$a^*(u) = a^*(h_i(x)) = a_i(x) = a_i(f_{i,j}(y)) = a_j(y) = a^*(h_j(y)) = a^*(v) \ .$$

Par suite il existe $a^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A), H)$ tel que $a^* = a^0 \circ \pi$ et

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^* \circ h_i = a^0 \circ \pi \circ h_i = a^0 \circ g_i$$

Preuve de l'unicité

Si $(a^0, b^0) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A), H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A), H)$ vérifient

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^0 \circ g_i \qquad \text{et} \qquad a_i = b^0 \circ g_i$$

alors $a^* = a^0 \circ \pi$ et $b^* = b^0 \circ \pi$ sont des morphismes de P^0 dans $P^0/\rho_*(A)$ qui vérifient

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^* \circ h_i \qquad \text{et} \qquad a_i = b^* \circ h_i$$

$((P^0, \star), h)$ étant un coproduit de $(X, \circledast, e)$ ces égalités entraînent $a^* = b^*$, ainsi $a^0 \circ \pi = b^0 \circ \pi$, π étant surjective on obtient $a^0 = b^0$. ■

On examine maintenant le formalisme lié à l'étude des groupes finis.

8.7 *Groupes finis*

8.7.1 *Généralités*

Un groupe est dit fini si c'est un ensemble fini. On a vu au lemme [8.27] page 298 que pour un groupe G et un sous-groupe H de G les relations

$$R_0(H) = \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in H\} \quad \text{et} \quad R_1(H) = \{(x,y) \in G \times G / yx^{-1} \in H\}$$

sont des relations d'équivalences sur G. Si $\mathrm{Card}(G) = n$ alors puisque (voir le lemme [6.3] page 140) $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(G)) = 2^n$ les ensembles quotients $G/R_0(H)$ et $G/R_1(H)$ sont finis. Le théorème de Lagrange établi que pour tout sous-groupe H de G

$$\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(G/R_0(H))\mathrm{Card}(H)$$

c'est la formule de base permettant l'étude des groupes finis.

Lemme 8.40 *On note $(G, *)$ un groupe où la loi $*$ est notée multiplicativement, H un sous-groupe de G, $R_0(H)$ et $R_1(H)$ sont les relations d'équivalences définies par*

$$R_0(H) = \{(x,y) \in G \times G / x^{-1}y \in H\} \quad \text{et} \quad R_1(H) = \{(x,y) \in G \times G / yx^{-1} \in H\}$$

et $\pi_0 : G \mapsto G/R_0(H)$, $\pi_1 : G \mapsto G/R_1(H)$ les applications canoniques.

(i) Pour tout $x \in G$ les application $\varphi_x : H \mapsto \pi_0(x)$ et $\lambda_x : H \mapsto \pi_1(x)$ définies par

$$\varphi_x(h) = xh \quad \text{et} \quad \lambda_x(h) = hx$$

sont bijectives .

(ii) La relation Φ de $G/R_0(H)$ dans $G/R_1(H)$ définie par

$$\Phi = \{(A,B) \in (G/R_0(H)) \times (G/R_1(H)) / \exists x \in G : A = \pi_0(x)\ , B = \pi_1(x^{-1})\}$$

est une bijection.

Preuve

(i)

1. D'abord on montre $\mathrm{im}(\varphi_x) = \pi_0(x)$ et $\mathrm{im}(\lambda_x) = \pi_1(x)$
   — si $y \in \pi_0(x)$ alors $x^{-1}y \in H$ et $y = x(x^{-1}y) = \varphi_x(x^{-1}y))$ par suite $\pi_0(x) \subset \mathrm{im}(\varphi_x)$
   — si $y \in \mathrm{im}(\varphi_x)$ alors il existe $h \in H$ tel que $y = xh$ par suite $x^{-1}y \in H$ et $y \in \pi_0(x)$ ainsi $\mathrm{im}(\varphi_x) \subset \pi_0(x)$

   De même
   — si $y \in \pi_1(x)$ alors $yx^{-1} \in H$ et $y = (yx^{-1})x = \lambda_x(yx^{-1})$ par suite $\pi_1(x) \subset \mathrm{im}(\lambda_x)$
   — si $y \in \mathrm{im}(\lambda_x)$ alors il existe $h \in H$ tel que $y = hx$ par suite $yx^{-1} \in H$ et $y \in \pi_1(x)$ ainsi $\mathrm{im}(\lambda_x) \subset \pi_1(x)$
2. Par définition d'un groupe φ_x et λ_x sont injectives.

(ii)

1. D'abord $\mathrm{dom}(\Phi) = G/R_0(H)$, en effet, puisque π_0 est surjective, pour tout $A \in G/R_0(H)$ il existe $x \in G$ tel que $A = \pi_0(x)$, ainsi $(A, \pi_1(x^{-1})) \in \Phi$.
2. Ensuite Φ est une fonction :

$$(A, B) \in \Phi \text{ et } (A, B') \in \Phi \Rightarrow B = B' \ .$$

   Si $(A, B) \in \Phi$ et $(A, B') \in \Phi$ alors il existe $(u, v) \in G \times G$ tel que

$$A = \pi_0(u) = \pi_0(v) \ , \quad B = \pi_1(u^{-1}) \ B' = \pi_1(v^{-1})$$

   — On montre $B \subset B'$
   En effet, $y \in \pi_1(u^{-1}) \Rightarrow yu \in H$, et puisque $\pi_0(u) = \pi_0(v)$ on a $u^{-1}v \in H$ l'égalité $yv = (yu)(u^{-1}v)$ montre que $yv \in H$ par suite $y \in \pi_1(v^{-1})$
   — On montre $B' \subset B$
   En effet, $y \in \pi_1(v^{-1}) \Rightarrow yv \in H$, et puisque $\pi_0(u) = \pi_0(v)$ on obtient $v^{-1}u \in H$ l'égalité $yu = (yv)(v^{-1}u)$ montre que $yu \in H$ par suite $y \in \pi_1(u^{-1})$
3. Φ est surjective, en effet, si $B \in G/R_1(H)$ alors il existe $x \in G$ tel que $\pi_1(x) = B$, ainsi $B = \Phi(\pi_0(x^{-1}))$
4. Φ est injective, en effet, si $\pi_1(u^{-1}) = \pi_1(v^{-1})$ alors $u^{-1}v \in H$ par suite $v \in \pi_0(u)$ et $\pi_0(v) = \pi_0(u)$.

■

En particulier, lorsque G est fini on obtient, pour un ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}, O)$,

$$\mathrm{Card}(G/R_0(H)) = \mathrm{Card}(G/R_1(H))$$

et pour tout $x \in G$

$$\mathrm{Card}(\pi_0(x)) = \mathrm{Card}(H) = \mathrm{Card}(\pi_1(x)) \ .$$

Définition 8.39 *On note $(G, *)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G. Pour un ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}, O)$ on appelle*

1. ***Ordre** de G l'entier* $\mathrm{Card}(G)$
2. ***Indice** de H dans G l'entier*

$$[G : H] = \mathrm{Card}(G/R_0(H)) = \mathrm{Card}(G/R_1(H))$$

Le théorème de Lagrange s'énonce

Théorème 8.10 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* G *un groupe fini, pour tout sous-groupe* H *de* G

$$\mathrm{Card}(G) = [G : H]\mathrm{Card}(H)$$

en particulier, l'ordre de tout sous-groupe de G *divise l'ordre de* G.

Preuve Si $p = [G : H] = \mathrm{Card}(G/R_0(H))$ et $k \mapsto C_k$ est une bijection de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $G/R_0(H)$ alors, puisque $x \in C_k \Leftrightarrow \pi_0(x) = C_k$ on a :

$$G = \bigcup_{k=0}^{p-1} C_k$$

et

$$i \neq j \Rightarrow C_i \cap C_j = \varnothing \ .$$

ainsi le (6.4) du lemme [6.2] page 136 montre que

$$\mathrm{Card}(G) = \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{Card}(C_k)$$

d'autre part, d'après le lemme [8.40] page 353 pour tout $k \in \mathbb{N}_{p-1}$ et $x \in C_k$ l'application $\varphi_x : H \mapsto C_k$ définie par $\varphi_x(h) = xh$ est une bijection on obtient

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_{p-1} \quad \mathrm{Card}(C_k) = \mathrm{Card}(H)$$

par suite

$$\mathrm{Card}(G) = \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{Card}(H) = p\mathrm{Card}(H) = [G : H]\mathrm{Card}(H) \ .$$

■

En fait, tout groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous-groupe du groupe S_n des permutations de $\mathbb{N}_{n-1}$.

Lemme 8.41 ***Théorème de Cayley.***
On note $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* $(G, *)$ *un groupe fini de cardinal* n *où la loi* $*$ *est notée multiplicativement,* $(\mathrm{B}[G, G], \circ)$ *est le groupe des applications bijectives de* G *dans* G *muni de la composition des applications.*

(i) Pour toute bijection γ *de* G *dans* $\mathbb{N}_{n-1}$ *l'application* φ *de* $\mathrm{B}[G, G]$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{n-1})$ *définie par*

$$\varphi(f) = \gamma \circ f \circ \gamma^{-1}$$

est un isomorphisme du groupe $(\mathrm{B}[G, G], \circ)$ *dans* $(S_n, \circ)$

(ii) L'application $\imath$ *de* G *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(G, G)$ *définie par*

$$\imath(g) : x \mapsto gx$$

est un morphisme injectif de $(G, *)$ *dans* $(\mathrm{B}[G, G], \circ)$

(iii) $(G, *)$ *est isomorphe à un sous-groupe de* $(S_n, \circ)$

Preuve

(i)

1. Comme composée de bijections $\varphi(f)$ est bijective ainsi $\varphi(f) \in S_n$

2. Si $(f,h) \in \mathrm{B}[G,G] \times \mathrm{B}[G,G]$ alors
$$\varphi(f \circ h) = \gamma \circ (f \circ h) \circ \gamma^{-1} = (\gamma \circ f \circ \gamma^{-1}) \circ (\gamma \circ h \circ \gamma^{-1})$$
ainsi
$$\varphi(f \circ h) = \varphi(f) \circ \varphi(h)$$
et φ est un morphisme
3. L'application φ^{-1} de S_n dans $\mathrm{B}[G,G]$ définie par
$$\varphi^{-1}(\sigma) = \gamma^{-1} \circ \sigma \circ \gamma$$
est l'inverse de φ.

(ii)

1. Pour tout $g \in G$ $\imath(g)$ est bijective d'inverse $(\imath(g))^{-1} = \imath(g^{-1})$ par suite $\imath(g) \in \mathrm{B}[G,G]$.
2. Si $(g_0, g_1) \in G \times G$ alors pour tout $x \in G$
$$[\imath(g_0) \circ \imath(g_1)](x) = \imath(g_0)(g_1 x) = g_0(g_1 x) = (g_0 g_1)x = \imath(g_0 g_1)(x)$$
ainsi $\imath$ est un morphisme.
3. Si $\imath(g) = \imath(g')$ alors
$$g = \imath(g)(e) = \imath(g')(e) = g'$$
par suite $\imath$ est injective.

(iii)

L'application $\varphi \circ \imath$ qui envoie tout élément g de G sur la bijection σ de $\mathbb{N}_{n-1}$ dans $\mathbb{N}_{n-1}$ définie par
$$\sigma(k) = \gamma(g\gamma^{-1}(k))$$
est d'après (i) et (ii) le composé de deux morphismes injectif ainsi $\mathrm{im}(\varphi \circ \imath)$ est un sous-groupe de S_n isomorphe à G. ■

On aura besoin d'un peu de familiarité avec le groupe symétrique S_n.

8.7.2 *Résultats utiles sur les permutations*

Si $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels le groupe symétrique S_n est le groupe des bijections de $\mathbb{N}_{n-1}$ dans $\mathbb{N}_{n-1}$ dont la loi est la composition des applications. Un élément de S_n est appelé une permutation.

Signature d'une permutation

Pour $\sigma \in S_n$ on pose
$$I(\sigma) = \{\{i,j\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_{n-1}) / \sigma(\max\{i,j\}) < \sigma(\min\{i,j\})\}$$
Un élément de $I(\sigma)$ est donc un sous-ensemble à deux éléments de $\mathbb{N}_{n-1}$ sur lequel σ est décroissante. Un élément de $I(\sigma)$ est appelé une inversion de σ et l'entiers naturel N_σ défini par
$$N_\sigma = \begin{cases} 0 & si \quad I(\sigma) = \varnothing \\ \mathrm{Card}(I(\sigma)) & si \quad I(\sigma) \neq \varnothing \end{cases}$$
est appelé le nombre d'inversions. Il est aisé de montrer que pour tout couple $(\sigma, \pi) \in S_n \times S_n$ l'entier
$$N_\sigma + N_\pi - N_{\pi \circ \sigma}$$
est pair. Une façon pratique de dire la même chose est de dire que l'application ε de S_n dans $\{-1, +1\}$ définie par
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N_\sigma}$$
vérifie $\varepsilon(\pi \circ \sigma) = \varepsilon(\pi)\varepsilon(\sigma)$. Dans le lemme qui suit $\mathcal{F}_2(\mathbb{N}_{n-1})$ désigne les sous-ensembles à deux éléments de $\mathbb{N}_{n-1}$.

Lemme 8.42 *Le groupe symétrique S_n vérifie les propriétés suivantes .*

(i) Si $\sigma \in S_n$, pour que $I(\sigma) = \varnothing$ il faut et il suffit que

$$\sigma = e = id_{\mathbb{N}_{n-1}}$$

(ii) Pour tout $\sigma \in S_n$ l'application f_σ de $\mathcal{F}_2(\mathbb{N}_{n-1})$ dans $\mathcal{F}_2(\mathbb{N}_{n-1})$ définie par

$$f_\sigma(\{i, j\}) = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$$

est une bijection (d'inverse $f_{\sigma^{-1}}$) qui vérifie les propriétés suivantes

1. $$f_\sigma(I(\sigma)) = I(\sigma^{-1})$$

   en particulier $N_\sigma = N_{\sigma^{-1}}$

2. *Pour tout $(\sigma, \pi) \in S_n \times S_n$*

$$I(\pi \circ \sigma) = [(I(\sigma))^c \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))] \cup [(f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c) \cap I(\sigma)]$$

3. *l'application $g : S_n \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{F}_2(\mathbb{N}_{n-1}))$ définie par*

$$g(\sigma) = \begin{cases} \varnothing & si \quad \sigma = id_{\mathbb{N}_{n-1}} = e \\ I(\sigma) & si \quad \sigma \neq e \end{cases}$$

   est injective.

(iii) Pour tout $(\sigma, \pi) \in S_n \times S_n$

$$N_\sigma + N_\pi - N_{\pi\circ\sigma}$$

est pair.

(iv) L'application $\varepsilon : S_n \mapsto \{-1, +1\}$ définie par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N_\sigma}$$

vérifie

$$\forall \ (\sigma, \pi) \in S_n \times S_n \quad \varepsilon(\pi \circ \sigma) = \varepsilon(\pi)\varepsilon(\sigma) \ .$$

(v) Si $(i, j) \in \mathbb{N}_{n-1} \times \mathbb{N}_{n-1}$ la permutation $\tau_{i,j}$ de S_n définie par

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} i & si \quad k = j \\ j & si \quad k = i \\ k & si \quad k \notin \{i, j\} \end{cases}$$

vérifie $\varepsilon(\tau_{i,j}) = -1$

Preuve

$$(i)$$

Il est clair que si $\sigma = e$ alors $I(\sigma) = \varnothing$. Inversement, supposons que $I(\sigma) = \varnothing$ et posons

$$U = \{k \in \mathbb{N}_{n-1} / \ \forall \ j \in \mathbb{N}_k \ \sigma(j) = j\}$$

On montre que $U \neq \varnothing$ en vérifiant $0 \in U$. En effet, si $\sigma(0) \neq 0$ alors $\sigma(0) > 0$ et $\sigma^{-1}(0) > 0$ par suite

$$\sigma(\max\{0, \sigma^{-1}(0)\}) = \sigma(\sigma^{-1}(0)) = 0 < \sigma(0) = \sigma(\min\{0, \sigma^{-1}(0)\})$$

ainsi $\{0, \sigma^{-1}(0)\}$ est une inversion de σ et $I(\sigma) \neq \varnothing$. Ceci montre que

$$I(\sigma) = \varnothing \Rightarrow \sigma(0) = 0 \ ,$$

par suite $0 \in U$. Ainsi U est un sous-ensemble non vide majoré de $\mathbb{N}$, le lemme [4.3] page 78 permet d'affirmer que U possède un plus grand élément qu'on note m. On montre que l'assertion $m < n-1$ implique $I(\sigma) \neq \varnothing$. Pour cela on remarque que

$$\sigma^{-1}(m+1) > m+1 \quad \text{et} \quad \sigma(m+1) > m+1 \ . \tag{8.82}$$

En effet, puisque $m \in U$, pour tout $j \leq m$ on a $\sigma(j) = j$, par suite si

$$\sigma^{-1}(m+1) \leq m$$

alors

$$m+1 = \sigma(\sigma^{-1}(m+1)) = \sigma^{-1}(m+1) \leq m$$

ce qui montre que $\sigma^{-1}(m+1) \geq m+1$, mais puisque $m+1 \notin U$ on a aussi $\sigma^{-1}(m+1) \neq m+1$.
De même si $\sigma(m+1) \leq m$ alors $\sigma(\sigma(m+1)) = \sigma(m+1)$, σ étant bijective cela entraîne $\sigma(m+1) = m+1$ et contredit la maximalité de m, par suite $\sigma(m+1) > m+1$. Mais (8.82) entraîne que $\{m+1, \sigma^{-1}(m+1)\}$ est une inversion de σ puisque

$$\sigma(\max\{m+1, \sigma^{-1}(m+1)\}) = m+1 < \sigma(m+1) = \sigma(\min\{m+1, \sigma^{-1}(m+1)\})$$

par suite $m = n-1$ et pour tout $j \leq n-1$ on a $\sigma(j) = j$, ainsi $\sigma = e$.

(ii)

Un calcul direct montre que

$$f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}}(\{i,j\}) = f_\sigma(\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)\}) = \{i,j\} = f_{\sigma^{-1}} \circ f_\sigma(\{i,j\})$$

par suite f_σ est une bijection d'inverse $f_{\sigma^{-1}}$

1. <u>On montre $f_\sigma(I(\sigma)) = I(\sigma^{-1})$</u>
   (a) D'abord on montre $f_\sigma(I(\sigma)) \subset I(\sigma^{-1})$.
   Soit $\{i,j\} \in I(\sigma)$, sans perdre de généralité on peut supposer $i < j$, il résulte alors du fait que $\{i,j\} \in I(\sigma)$ que $\sigma(j) < \sigma(i)$ par suite

   $$\sigma^{-1}(\max\{\sigma(i), \sigma(j)\}) = i < \sigma^{-1}(\min\{\sigma(i), \sigma(j)\}) = j$$

   et $f_\sigma(\{i,j\}) = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ est une inversion de σ^{-1}
   (b) Ensuite on montre $I(\sigma^{-1}) \subset f_\sigma(I(\sigma))$.
   Soit $\{i,j\} \in I(\sigma^{-1})$, sans perdre de généralité on peut supposer $i < j$, il résulte alors du fait que $\{i,j\} \in I(\sigma^{-1})$ que $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$ par suite

   $$\sigma(\max\{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)\}) = i < \sigma(\min\{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)\}) = j$$

   ainsi $\{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)\}$ est une inversion de σ et

   $$\{i,j\} = f_\sigma(\{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)\}) \in f_\sigma(I(\sigma)) \ .$$

   Ainsi f_σ est une bijection de $I(\sigma)$ sur $I(\sigma^{-1})$ et le lemme [6.2] page 136 montre alors que

   $$N_\sigma = \mathrm{Card}(I(\sigma)) = \mathrm{Card}(f_\sigma(I(\sigma))) = \mathrm{Card}(I(\sigma^{-1})) = N_{\sigma^{-1}}$$

2. <u>On montre $I(\pi \circ \sigma) = [(I(\sigma))^c \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))] \cup [(f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c) \cap I(\sigma)]$</u>
   Notons que cette égalité signifie seulement que pour que $\{i,j\}$ soit une inversion de $\pi \circ \sigma$ il faut et il suffit que

— soit $\{i,j\}$ n'est pas une inversion de σ et $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ est une inversion de π, ce qui s'écrit $\{i,j\} \in I(\sigma)^c \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))$

— soit $\{i,j\}$ est une inversion de σ et $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ n'est pas une inversion de π ce qui s'écrit $\{i,j\} \in (f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c) \cap I(\sigma)$

Pour montrer l'égalité on remarque d'abord que si $\pi = \sigma^{-1}$ alors (i) et *1* montre que les termes de cette égalité sont l'ensemble vide. On peut donc supposer que $\pi \neq \sigma^{-1}$. Puisque

$$I(\pi\circ\sigma) = (I(\pi\circ\sigma)\cap I(\sigma)) \cup (I(\pi\circ\sigma)\cap(I(\sigma))^c))$$

il suffit de montrer

$$I(\pi\circ\sigma)\cap I(\sigma) = I(\sigma)\cap(f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c) \tag{8.83}$$

et

$$I(\pi\circ\sigma)\cap(I(\sigma))^c = (I(\sigma))^c\cap(f_\sigma^{-1}(I(\pi))) \tag{8.84}$$

(a) $I(\pi\circ\sigma)\cap I(\sigma) \subset I(\sigma)\cap(f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c)$.
Soit $\{i,j\} \in I(\pi\circ\sigma)\cap I(\sigma)$, sans perdre de généralité on peut supposer $i<j$,
— puisque $\{i,j\}\in I(\sigma)$ on a $\sigma(j)<\sigma(i)$
— puisque $\{i,j\}\in I(\pi\circ\sigma)$ on a $\pi(\sigma(j))<\pi(\sigma(i))$
ainsi $\{\sigma(i),\sigma(j)\}\notin I(\pi)$ et $\{i,j\}\in f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c$

(b) $I(\sigma)\cap(f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c) \subset I(\pi\circ\sigma)\cap I(\sigma)$.
Soit $\{i,j\}\in I(\sigma)\cap(f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c)$, sans perdre de généralité on peut supposer $i<j$,
— puisque $\{i,j\}\in I(\sigma)$ on a $\sigma(j)<\sigma(i)$
— puisque $\{i,j\}\in f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c$ on a $\pi(\sigma(j))<\pi(\sigma(i))$
ainsi $\{i,j\}\in I(\pi\circ\sigma)$ et $\{i,j\}\in I(\pi\circ\sigma)\cap I(\sigma)$.

(c) $I(\pi\circ\sigma)\cap(I(\sigma))^c \subset (I(\sigma))^c\cap(f_\sigma^{-1}(I(\pi)))$.
Soit $\{i,j\}\in I(\pi\circ\sigma)\cap(I(\sigma))^c$, sans perdre de généralité on peut supposer $i<j$,
— puisque $\{i,j\}\notin I(\sigma)$ on a $\sigma(i)<\sigma(j)$
— puisque $\{i,j\}\in I(\pi\circ\sigma)$ on a $\pi(\sigma(j))<\pi(\sigma(i))$
ainsi $\{\sigma(i),\sigma(j)\}\in I(\pi)$ et $\{i,j\}\in f_\sigma^{-1}(I(\pi))$

(d) $(I(\sigma))^c\cap(f_\sigma^{-1}(I(\pi))) \subset I(\pi\circ\sigma)\cap(I(\sigma))^c$.
Soit $\{i,j\}\in(I(\sigma))^c\cap(f_\sigma^{-1}(I(\pi)))$, sans perdre de généralité on peut supposer $i<j$,
— puisque $\{i,j\}\notin I(\sigma)$ on a $\sigma(i)<\sigma(j)$
— puisque $\{i,j\}\in f_\sigma^{-1}(I(\pi))$ on a $\pi(\sigma(j))<\pi(\sigma(i))$
ainsi $\{i,j\}\in I(\pi\circ\sigma)$ et $\{i,j\}\in I(\pi\circ\sigma)\cap(I(\sigma))^c$.

(a) et (b) montre (8.83) et (c) et (d) montre (8.84)

3. On montre $g(\sigma)=g(\pi)\Rightarrow\sigma=\pi$.
Si $\sigma=e$ ou $\pi=e$ alors (i) montre que $\pi=\sigma=e$ Il suffit donc d'examiner le cas $\sigma\neq e$ et $\pi\neq e$, D'après *2* on a

$$I(\pi\circ\sigma^{-1}) = [(I(\sigma^{-1}))^c\cap f_{\sigma^{-1}}^{-1}(I(\pi))]\cup[I(\sigma^{-1})\cap(f_{\sigma^{-1}}^{-1}(I(\pi)))^c]$$

il résulte alors de l'égalité $f_{\sigma^{-1}}^{-1}=f_\sigma$ que

$$I(\pi\circ\sigma^{-1}) = [(I(\sigma^{-1}))^c\cap f_\sigma(I(\pi))]\cup[I(\sigma^{-1})\cap(f_\sigma(I(\pi)))^c]$$

ainsi l'égalité $I(\sigma)=I(\pi)$ entraîne

$$I(\pi\circ\sigma^{-1}) = [(I(\sigma^{-1}))^c\cap f_\sigma(I(\sigma))]\cup[I(\sigma^{-1})\cap(f_\sigma(I(\sigma)))^c] \tag{8.85}$$

or d'après *1* on a $f_\sigma(I(\sigma))=I(\sigma^{-1})$ ainsi (8.85) montre

$$I(\pi\circ\sigma^{-1})=\varnothing$$

et (i) permet d'affirmer $\pi\circ\sigma^{-1}=e$,c'est à dire $\pi=\sigma$.

(iii)

D'après le lemme [6.2] page 136 et (ii) *2.* on a

$$\mathrm{Card}(I(\pi \circ \sigma)) = \mathrm{Card}[I(\sigma) \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c] + \mathrm{Card}[(I(\sigma))^c \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))]$$

par suite $\mathrm{Card}(I(\pi \circ \sigma)) + 2\mathrm{Card}[I(\sigma) \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))]$ est la somme des deux termes suivants :

$$\mathrm{Card}[(I(\sigma))^c \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))] + \mathrm{Card}[I(\sigma) \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))]$$

et

$$\mathrm{Card}[I(\sigma) \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c] + \mathrm{Card}[I(\sigma) \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))] \ .$$

Le lemme [6.2] montre que

$$\mathrm{Card}[(I(\sigma))^c \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))] + \mathrm{Card}[I(\sigma) \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))] = \mathrm{Card}(f_\sigma^{-1}(I(\pi)))$$

et

$$\mathrm{Card}[I(\sigma) \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))^c] + \mathrm{Card}[I(\sigma) \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))] = \mathrm{Card}(I(\sigma))$$

cela montre déjà que

$$N_{\pi\circ\sigma} + 2\mathrm{Card}[I(\sigma) \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))] = N_\sigma + \mathrm{Card}(f_\sigma^{-1}(I(\pi))) \ .$$

Mais puisque f_σ est bijective on a $\mathrm{Card}(f_\sigma^{-1}(I(\pi))) = \mathrm{Card}(I(\pi)) = N_\pi$ d'où

$$N_\sigma + N_\pi - N_{\pi\circ\sigma} = 2\mathrm{Card}[I(\sigma) \cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))] \ . \tag{8.86}$$

(iv)

Par (8.86) on a

$$\varepsilon(\pi)\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N_\pi + N_\sigma} = (-1)^{N_{\pi\circ\sigma} + 2\mathrm{Card}[I(\sigma)\cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))]}$$

ainsi

$$\varepsilon(\pi)\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N_{\pi\circ\sigma} + 2\mathrm{Card}[I(\sigma)\cap f_\sigma^{-1}(I(\pi))]} = (-1)^{N_{\pi\circ\sigma}} = \varepsilon(\pi \circ \sigma)$$

(v)

Considérons l'application σ de $\mathbb{N}_{n-1}$ dans $\mathbb{N}_{n-1}$ définie par

$$\sigma(k) = \begin{cases} n-2 & si \quad k = i \\ n-1 & si \quad k = j \\ k & si \quad k \notin \{i, j\} \end{cases}$$

alors σ est une bijection d'inverse σ^{-1} définie par

$$\sigma^{-1}(k) = \begin{cases} i & si \quad k = n-2 \\ j & si \quad k = n-1 \\ k & si \quad k \notin \{n-2, n-1\} \end{cases}$$

Un calcul direct montre que

$$\tau_{i,j} \circ \sigma^{-1}(k) = \begin{cases} j & si \quad k = n-2 \\ i & si \quad k = n-1 \\ k & si \quad k \notin \{n-2, n-1\} \end{cases}$$

et

$$\sigma \circ \tau_{i,j} \circ \sigma^{-1}(k) = \begin{cases} n-1 & si \quad k = n-2 \\ n-2 & si \quad k = n-1 \\ k & si \quad k \notin \{n-2, n-1\} \end{cases}$$

autrement dit on a $\sigma \circ \tau_{i,j} \circ \sigma^{-1} = \tau_{n-2,n-1}$. (iv) permet donc d'affirmer que

$$\varepsilon(\tau_{n-2,n-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau_{i,j})\varepsilon(\sigma^{-1})$$

d'après (ii) on a $N_\sigma = N_{\sigma^{-1}}$ par suite $\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}) = (\varepsilon(\sigma))^2 = 1$ et

$$\varepsilon(\tau_{i,j}) = \varepsilon(\tau_{n-2,n-1})$$

On montre que la seule inversion de $\tau_{n-2,n-1}$ est $\{n-2, n-1\}$. En effet, si $\{l,m\} \in \mathcal{F}_2(\mathbb{N}_{n-1})$ et $l < m$ alors

1. si $m \leq n-2$ alors $l < n-2$ par suite $\tau_{n-2,n-1}(l) = l < m$ d'aitre part $\tau_{n-2,n-1}(m) \in \{m, n-1\}$ ainsi $\{l,m\}$ n'est pas une inversion de $\tau_{n-2,n-1}$
2. si $m = n-1$ et $l < n-2$ alors $\tau_{n-2,n-1}(l) = l < n-2 = \tau_{n-2,n-1}(m)$ par suite $\{l,m\}$ n'est pas une inversion de $\tau_{n-2,n-1}$. Enfin si $l = n-2$ il est clair que $\{n-2, n-1\}$ est une inversion de $\tau_{n-2,n-1}$

Ceci montre que

$$\varepsilon(\tau_{i,j}) = \varepsilon(\tau_{n-2,n-1}) = -1$$

■

Une façon suggestive de noter les permutations est de les écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \cdots & \sigma(n-1) \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a

Permutation de S_2

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_{1,0} = \tau_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De même

Permutations de S_3

$$\begin{array}{ccc} e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & , & \tau_{1,2} = \tau_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \tau_{0,1} = \tau_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & , & \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \tau_{0,2} = \tau_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & , & \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Avec ces notations on peut facilement lire les égalités

$$\tau_{2,1} \circ \tau_{1,0} = \pi \quad \tau_{2,0} \circ \tau_{0,1} = \sigma$$

La lecture se faisant par le diagramme

$$\tau_{2,1} \circ \tau_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \downharpoonleft & \downharpoonleft & \downharpoonleft \\ 1 & 0 & 2 \\ \downharpoonleft & \downharpoonleft & \downharpoonleft \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_{2,0} \circ \tau_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \downharpoonleft & \downharpoonleft & \downharpoonleft \\ 1 & 0 & 2 \\ \downharpoonleft & \downharpoonleft & \downharpoonleft \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi lire :

$$I(\sigma) = \{\{1,2\},\{0,2\}\} \quad \text{et} \quad I(\pi) = \{\{0,1\},\{0,2\}\}$$

Une autre manière de noter des permutations du type σ et π est :

$$\sigma : \begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ 1 & \rightarrow & 2 \end{array} \qquad \text{et} \quad \pi : \begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ 2 & \rightarrow & 1 \end{array}$$

Les permutations de ce type s'appellent des cycles.

Décomposition des permutations

On suppose maintenant $n \geq 3$ et on veut décomposer chaque permutation en un produit de permutations plus accessibles. On introduit quelques définitions.

Définition 8.40 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* n *et* m *des entiers tel que* $n \geq 3$ *et* $2 \leq m \leq n-1$. *Une permutation* $\sigma \in S_n$ *est appelée un* ***cycle*** *de longueur* m *s'il existe une application injective* x *de* $\mathbb{N}_{m-1}$ *dans* $\mathbb{N}_{n-1}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $j \in \mathbb{N}_{m-2}$, $\sigma(x_j) = x_{j+1}$
2. $\sigma(x_{m-1}) = x_0$
3. *Pour tout* $k \notin x(\mathbb{N}_{m-1})$ $\sigma(k) = k$.

On appelle ***transposition*** *un cycle de longueur 2.*

Ainsi, outre l'identité, S_3 est composé de trois tanspositions et deux cycles d'ordre 3 .

Définition 8.41 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* $n \in \mathbb{N}^*$, *Si* $\sigma \in S_n$ *on appelle* ***support*** *de* σ *l'ensemble*

$$\text{support}(\sigma) = \{k \in \mathbb{N}_{n-1} / \sigma(k) \neq k\}$$

Ainsi, si σ est un cycle de longueur m et $x \in \text{Inj}(\mathbb{N}_{m-1}, \mathbb{N}_{n-1})$ est l'injection vérifiant

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_{m-2} \quad \sigma(x_k) = x_{k+1} \quad \text{et} \quad \sigma(x_{m-1}) = x_0$$

alors

$$\text{support}(\sigma) = x(\mathbb{N}_{m-1}) = \{x_0, \cdots, x_{m-1}\}$$

Définition 8.42 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* $\sigma \in S_n$ *une famille* $\mathcal{P}$ *de sous-ensembles de* $\mathbb{N}_{n-1}$ *est appelée une* ***partition subordonnée*** *à* σ *si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $\varnothing \notin \mathcal{P}$
2. *Si* $(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ *et* $A \neq B$ *alors* $A \cap B = \varnothing$
3. $$\mathbb{N}_{n-1} = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A$$
4. $$\forall\ A \in \mathcal{P} \quad \sigma(A) = A$$

Le lemme suivant permet de décomposer les permutations en produit de cycles. On note dans ce lemme π^d l'unique application de $\text{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \text{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{n-1}))$ dans $\text{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \text{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{n-1}))$ vérifiant

$$\pi^d(\varrho)(0) = \varrho_0 \quad \text{et} \quad \pi^d(\varrho)(n+1) = \pi^d(\varrho)(n) \circ \varrho_{n+1}$$

Cette application est définie par le lemme [8.3] page 196

Lemme 8.43 *On note* $(\mathbb{Z}, +, \centerdot, O)$ *un ensemble d'entiers relatifs,* $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\sigma \in S_n$.

(i) La relation $R_\sigma \subset \mathbb{N}_{n-1} \times \mathbb{N}_{n-1}$ *définie par*

$$R_\sigma = \{(i, j) \in \mathbb{N}_{n-1} \times \mathbb{N}_{n-1} / \exists\ s \in \mathbb{Z} : j = \sigma^s(i)\}$$

est une relation d'équivalence. On note $\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma$ *l'ensemble quotient de* $\mathbb{N}_{n-1}$ *par* R_σ *et*

$$(\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma)^* = \{C \in (\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma) / \text{Card}(C) > 1\}$$

l'ensemble des classes d'équivalences à plus d'un élément.

(ii) Pour que $(\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma)^* \neq \varnothing$ *il faut et il suffit que* $\sigma \neq e$

(iii) L'ensemble $(\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma)$ *est une partition subordonnée à* σ.

(iv) Si $\sigma \neq e$, *on note* $q = \mathrm{Card}(\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma)$ *et* $k \mapsto C_k$ *une bijection de* $\mathbb{N}_{q-1}$ *dans* $\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma$, *alors l'application* $k \mapsto \varrho_k$ *de* $\mathbb{N}_{q-1}$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{n-1})$ *définie par*

$$\varrho_k(i) = \begin{cases} i & si \quad i \notin C_k \\ \sigma(i) & si \quad i \in C_k \end{cases} \tag{8.87}$$

possède les propriétés suivantes :

1. $\forall\ k \in \mathbb{N}_{q-1}\ \varrho_k \in S_n$
2. *pour tout* $(k,p) \in \mathbb{N}_{q-1} \times \mathbb{N}_{q-1}$
$$\varrho_p \circ \varrho_k = \varrho_k \circ \varrho_p$$
3. *pour tout* $k \in \mathbb{N}_{q-1}$
$$\mathrm{support}[\pi^d(\varrho)(k)] \subset \bigcup_{p=0}^{k} C_p$$
4. $$\sigma = \pi^d(\varrho)(q-1)$$
5. *pour tout* $k \in \mathbb{N}_{q-1}$ *tel que* $C_k \in (\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma)^*$ ϱ_k *est un cycle de longueur* $\mathrm{Card}(C_k)$.

(v) Pour qu'un sous-ensemble Λ *de* S_n *soit égal à* S_n *il faut et il suffit qu'il vérifie les propriétés* **a**, **b** *et* **c** *suivantes :*

a $e \in \Lambda$

b Λ *contient l'ensemble* $C(S_n)$ *des cycles de* S_n *:*

$$C(S_n) \subset \Lambda\ ,$$

c *si* $(\sigma, \pi) \in \Lambda \times \Lambda$ *alors* $\pi \circ \sigma \in \Lambda$

En particulier

$$S_n = \mathbf{gr}(C(S_n))$$

Preuve

(i)

L'application $s \mapsto \sigma^s$ de $\mathbb{Z}$ dans S_n est définie par le lemme [8.26] page 290.

1. Réflexivité.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $i = \sigma^0(i)$
2. Symétrie.
Si $j = \sigma^s(i)$ alors $i = \sigma^{-s}(j)$
3. Transitivité
Si $j = \sigma^s(i)$ et $k = \sigma^t(j)$ alors $k = \sigma^{s+t}(i)$

(ii)

On note $p : \mathbb{N}_{n-1} \mapsto \mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma$ l'application canonique

1. Si $\sigma = e$ alors pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ la classe d'équivalence de i est $p(i) = \{i\}$.
2. Si $(\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma)^* \neq \varnothing$ alors il existe une classe d'équivalence contenant au moins deux éléments i et j, ainsi $(i,j) \in R_\sigma$ et $i \neq j$, par suite il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que $j = \sigma^s(i)$ on a $\sigma(i) \neq i$ puisque dans le cas contraire $j = \sigma^s(i) = i$

(iii)

1. Si $A \in \mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma$ alors il existe $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que
$$A = \{j \in \mathbb{N}_{n-1}/(i,j) \in R_\sigma\}$$
ainsi $i \in A$ et $A \neq \varnothing$.
2. Si $(A,B) \in (\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma) \times (\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma)$ et $i \in A \cap B$ alors
$$A = \{j \in \mathbb{N}_{n-1}/(i,j) \in R_\sigma\} = B$$
par suite $A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$
3. Si $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ l'ensemble $A = \{j \in \mathbb{N}_{n-1}/(i,j) \in R_\sigma\}$ est un élément de $\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma$ tel que $i \in A$ par suite
$$\mathbb{N}_{n-1} = \bigcup_{A \in (\mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma)} A$$
4. On montre $A \in \mathbb{N}_{n-1}/R_\sigma \Rightarrow \sigma(A) = A$.
   (a) D'abord on montre $\sigma(A) \subset A$.
   Si $A = p(i_0) = \{j \in \mathbb{N}_{n-1}/(i_0,j) \in R_\sigma\} = \{j \in \mathbb{N}_{n-1}/(j,i_0) \in R_\sigma\}$, l'assertion $k \in \sigma(A)$ entraîne l'existence de $j \in A$ tel que $k = \sigma(j)$. Ainsi $(k,j) \in R_\sigma$ et $(j,i_0) \in R_\sigma$ et par transitivité on a $(k,i_0) \in R_\sigma$ et $k \in A$
   (b) Ensuite on montre $\sigma^{-1}(A) \subset A$.
   Si $A = p(i_0) = \{j \in \mathbb{N}_{n-1}/(i_0,j) \in R_\sigma\} = \{j \in \mathbb{N}_{n-1}/(j,i_0) \in R_\sigma\}$, l'assertion $k \in \sigma^{-1}(A)$ entraîne l'existence de $j \in A$ qui vérifie l'égalité $k = \sigma^{-1}(j)$. Ainsi $(k,j) \in R_\sigma$ et $(j,i_0) \in R_\sigma$ et par transitivité on obtient $(k,i_0) \in R_\sigma$ et $k \in A$

(iv)

1. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de montrer que ϱ_k est surjective. Si $j \in \mathbb{N}_{n-1}$ alors
   — si $j \notin C_k$ $\varrho_k(j) = j$ par suite $j \in \mathrm{im}(\varrho_k)$
   — si $j \in C_k$, puisque d'après *(iii)* on a $\sigma(C_k) = C_k$ on obtient $\sigma^{-1}(j) \in C_k$ par suite $\varrho_k(\sigma^{-1}(j)) = \sigma(\sigma^{-1}(j)) = j$ et $j \in \mathrm{im}(\varrho_k)$.

   Ainsi $\mathrm{im}(\varrho_k) = \mathbb{N}_{n-1}$ et ϱ_k est surjective.
2. Il suffit d'examiner le cas $k \neq p$ et dans ce cas $C_k \cap C_p = \varnothing$. Soit $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ alors
   — si $i \notin C_k \cup C_p$
   $$\varrho_k \circ \varrho_p(i) = \varrho_k(i) = i = \varrho_p(i) = \varrho_p \circ \varrho_k(i)$$
   — si $i \in C_k$ alors $i \notin C_p$ et
   $$\varrho_k \circ \varrho_p(i) = \varrho_k(i) = \sigma(i)$$
   de plus
   $$\varrho_p \circ \varrho_k(i) = \varrho_p(\sigma(i))$$
   et d'après *(iii)* $\sigma(i) \in C_k$ par suite
   $$\varrho_p \circ \varrho_k(i) = \varrho_p(\sigma(i)) = \sigma(i) = \varrho_k \circ \varrho_p(i)$$
   — si $i \in C_p$ alors $i \notin C_k$ et
   $$\varrho_p \circ \varrho_k(i) = \varrho_p(i) = \sigma(i)$$
   de plus
   $$\varrho_k \circ \varrho_p(i) = \varrho_k(\sigma(i))$$
   et d'après *(iii)* $\sigma(i) \in C_p$ par suite
   $$\varrho_k \circ \varrho_p(i) = \varrho_k(\sigma(i)) = \sigma(i) = \varrho_p \circ \varrho_k(i)$$

3. On pose
$$U = \{k \in \mathbb{N}_{q-1} / \text{support}[\pi^d(\varrho))(k)] \subset \bigcup_{j=0}^{k} C_j\}$$
et on montre que $U = \mathbb{N}_{q-1}$ en vérifiant
(a) $0 \in U$
(b) $k \in U \quad \text{et} \quad k < q-1 \Rightarrow k+1 \in U$.
(a) Puisque par définition $\pi^d(\varrho)(0) = \varrho_0$ on a
$$i \notin C_0 \Rightarrow \pi^d(\varrho)(0)(i) = \varrho_0(i) = i$$
(b) Si $k \in U$ et $k < q-1$ alors puisque par définition
$$\pi^d(\varrho)(k+1) = \pi^d(\varrho)(k) \circ \varrho_{k+1} \ ,$$
pour $i \notin \bigcup_{j=0}^{k+1} C_j$ on a
— puisque $i \notin C_{k+1}$ $\varrho_{k+1}(i) = i$
— puisque $k \in U$ et $i \notin \bigcup_{j=0}^{k} C_j$
$$\pi^d(\varrho)(k)(i) = i$$
par suite
$$\pi^d(\varrho)(k+1)(i) = \pi^d(\varrho)(k) \circ \varrho_{k+1}(i) = i \ .$$
et $i \notin \text{support}(\pi^d(\varrho)(k+1))$
4. On pose
$$U = \{k \in \mathbb{N}_{q-1} / \forall\ i \in \bigcup_{j=0}^{k} C_j \quad \pi^d(\varrho)(k)(i) = \sigma(i)\} \ .$$
Ainsi U est l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{N}_{q-1}$ tels que la restriction de $\pi^d(\varrho)(k)$ à $\bigcup_{j=0}^{k} C_j$ coïncide avec σ. En suivant le lemme [5.10] page 111 on montre $U = \mathbb{N}_{q-1}$ en vérifiant
(a) $0 \in U$
(b) $k \in U$ et $k < q-1 \Rightarrow k+1 \in U$
(a) Par définition de π^d on a $\pi^d(\varrho)(0) = \varrho_0$ par suite pour tout $i \in C_0$ on a $\pi^d(\varrho)(0)(i) = \sigma(i)$.
(b) Si $k \in U$, $k < q-1$ et $i \in \bigcup_{j=0}^{k+1} C_j$ alors
— si $i \in \bigcup_{j=0}^{k} C_j$ alors $i \notin C_{k+1}$ par suite $\varrho_{k+1}(i) = i$ et
$$\pi^d(\varrho)(k+1) = \pi^d(\varrho)(k)(\varrho_{k+1}(i)) = \pi^d(\varrho)(k)(i)$$
et l'hypothèse $k \in U$ entraîne $\pi^d(\varrho)(k)(i) = \sigma(i)$

— si $i \in C_{k+1}$ alors $i \notin \bigcup_{j=0}^{k} C_j$ et

$$\pi^d(\varrho)(k+1)(i) = \pi^d(\varrho)(k)(\varrho_{k+1}(i)) = \pi^d(\varrho)(k)(\sigma(i))$$

mais d'après (iii) $i \in C_{k+1} \Rightarrow \sigma(i) \in C_{k+1}$, et *2.* permet d'affirmer que

$$\text{support}(\pi^d(\varrho)(k)) \subset \bigcup_{j=0}^{k} C_j$$

par suite on obtient $i \in C_{k+1} \Rightarrow \sigma(i) \notin \text{support}(\pi^d(\varrho)(k))$ et

$$\pi^d(\varrho)(k+1)(i) = \sigma(i) \ .$$

Ainsi $k+1 \in U$ et $U = \mathbb{N}_{q-1}$.

En particulier $q-1 \in U$ et pour tout $i \in \bigcup_{j=0}^{q-1} C_j$ on a $\pi^d(\varrho)(q-1)(i) = \sigma(i)$, l'égalité $\bigcup_{j=0}^{q-1} C_j = \mathbb{N}_{n-1}$ donne donc

$$\sigma = \pi^d(\varrho)(q-1)$$

5. Posons $\nu_k = \text{Card}(C_k)$, on montre que pour tout $i \in C_k$ on a

$$\sigma^{\nu_k}(i) = i \quad \text{et} \quad C_k = \{i, \sigma(i), \cdots, \sigma^{\nu_k - 1}(i)\} \ .$$

(a) On montre que pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^m(i) = i$. Considérons l'application $f_i : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}_{n-1}$ définie par

$$f_i(k) = \sigma^k(i)$$

Puisque $f_i(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}_{n-1}$, l'ensemble $f_i(\mathbb{N})$ est fini comme sous-ensemble d'un ensemble fini (voir théorème [6.3] page 128), ainsi f_i n'est pas injective,sinon $\mathbb{N}$ serait fini comme étant en bijection avec un ensemble fini. Par suite il existe $(k,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant

$$k \neq p \quad \text{et} \quad \sigma^k(i) = f_i(k) = f_i(p) = \sigma^p(i)$$

Si $k > p$ alors $\sigma^{k-p}(i) = i$ et si $k < p$ $\sigma^{p-k}(i) = i$.

(b) Si ν est l'application de $\mathbb{N}_{n-1}$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\nu(i) = \min\{k \in \mathbb{N}^* / \sigma^k(i) = i\}$$

alors

$$\forall\ (q,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \sigma^{q\nu(i)+r}(i) = \sigma^r(i)$$

Si $r \in \mathbb{N}$ on pose

$$H = \{q \in \mathbb{N} / \sigma^{q\nu(i)+r}(i) = \sigma^r(i)\}$$

alors
— il est clair que $0 \in H$
— si $q \in H$ alors

$$\sigma^{(q+1)\nu(i)+r} = \sigma^{\nu(i)}(\sigma^{q\nu(i)+r}(i)) = \sigma^{\nu(i)+r}(i) = \sigma^r(\sigma^{\nu(i)}i) = \sigma^r(i) \ .$$

Ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$.

(c) On montre que pour tout $i \in C_k$

$$C_k = \{i, \sigma(i), \cdots, \sigma^{\nu(i)-1}(i)\}$$

puisque $i \in C_k$ par définition d'une classe d'équivalence on a

$$C_k = \{j \in \mathbb{N}_{n-1} / (i,j) \in R_\sigma\} = \{j \in \mathbb{N}_{n-1} / \exists\ s \in \mathbb{Z} : j = \sigma^s(i)\}$$

ainsi si $j \in C_k$ il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que $j = \sigma^s(i)$.

I Si $s > \nu(i)$ alors la division de s par $\nu(i)$ montre (voir lemme [5.4] page 98) qu'il existe $(q,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\nu(i)-1}$ tel que $s = q\nu(i) + r$, par suite, puisque d'après (b)

$$j = \sigma^{r+q\nu(i)}(i) = \sigma^r(\sigma^{q\nu(i)}(i)) = \sigma^r(i)\ .$$

II Si $s < 0$ alors d'après le lemme [8.24] page 273 il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k\nu(i) > -s$, si $s' = k\nu(i) + s$ alors $s' > 0$ et

$$\sigma^{s'}(i) = \sigma^{s+k\nu(i)}(i) = \sigma^s(i) = j$$

I montre alors qu'il existe $r \leq \nu(i) - 1$ tel que $j = \sigma^r(i)$.

Ceci montre que pour tout $i \in C_k$

$$C_k \subset \{i, \sigma(i), \cdots, \sigma^{\nu(i)-1}(i)\}$$

et l'inclusion inverse :

$$\{i, \sigma(i), \cdots, \sigma^{\nu(i)-1}(i)\} \subset C_k$$

provient du fait que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $(i, \sigma^p(i)) \in R_\sigma$.

(d) On montre que pour tout $i \in C_k$ l'application $x : \mathbb{N}_{\nu(i)-1} \mapsto C_k$ définie par

$$x_j = \sigma^j(i)$$

est bijective.

— D'après (c) x est surjective

— Si $(j,l) \in \mathbb{N}_{\nu(i)-1} \times \mathbb{N}_{\nu(i)-1}$ vérifient $x_j = x_l$ alors si $l > j$ on a $\sigma^{l-j}(i) = i$ avec $0 \leq l - j \leq l < \nu(i)$, ce qui contredit la minimalité de $\nu(i)$, si $j > l$ on a $\sigma^{j-l}(i) = i$ avec $0 \leq j - l \leq j < \nu(i)$, ce qui contredit la minimalité de $\nu(i)$, ainsi $j = l$ et x est injective.

en particulier pour tout $i \in C_k$ on a $\nu(i) = \mathrm{Card}(C_k) = \nu_k$ par suite, d'après (c),

$$C_k = \{i, \sigma(i), \cdots, \sigma^{\nu_k - 1}(i)\} \quad \sigma^{\nu_k}(i) = i$$

Enfin on montre que si $\mathrm{Card}(C_k) > 1$ alors ϱ_k est un cycle. si $i \in C_k$ et x est l'application de $\mathbb{N}_{\nu_k-1}$ dans $\mathbb{N}_{n-1}$ définie par

$$x_j = \sigma^j(i)$$

alors d'après (d) x est injective , $x(\mathbb{N}_{\nu_k-1}) = C_k$ et $\sigma(x_{\nu_k-1}) = i = x_0$, ainsi

— puisque pour tout $j \in \mathbb{N}_{\nu_k-1}$ $x_j \in C_k$ on obtient pour $j \in \mathbb{N}_{\nu_k-1}$

$$j \leq \nu_k - 2 \Rightarrow \varrho_k(x_j) = \sigma(x_j) = \sigma(\sigma^j(i)) = \sigma^{j+1}(i) = x_{j+1}$$

et

$$j = \nu_k - 1 \Rightarrow \varrho_k(x_j) = \sigma^{\nu_k}(i) = i = x_0$$

— si $j \notin x(\mathbb{N}_{\nu_k-1})$ alors $j \notin C_k$ par suite $\varrho_k(j) = j$

ce qui montre que ϱ_k est un cycle de longueur $\mathrm{Card}(C_k)$.

(v)

Il est clair que S_n vérifie **a**, **b** et **c**, on montre la réciproque. Si $\sigma \in S_n$ et $q = \text{Card}(N_{n-1}/R_\sigma)$ alors d'après (iv) on a

$$\sigma = \pi^d(\varrho)(q-1)$$

où $k \mapsto \varrho_k$ est définie par (8.87) page 363. On montre que pour tout $j \in \mathbb{N}_{q-1}$ on a $\pi^d(\varrho)(j) \in A$. On pose

$$U_\sigma = \{j \in \mathbb{N}_{q-1} / \pi^d(\varrho)(j) \in A\}$$

et on montre que $U_\sigma = \mathbb{N}_{q-1}$ en vérifiant :

1. $0 \in U_\sigma$
2. $j \in U_\sigma \quad \text{et} \quad j < q-1 \Rightarrow j+1 \in U$

1. On montre que pour tout $j \in \mathbb{N}_{q-1}$ $\varrho_j \in A$, en effet,
   — Si $C_j = \{i\}$ est de cardinal 1 alors $\sigma(i) = i$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ $\varrho_j(k) = k$ ainsi $\varrho_j = e \in A$
   — si $\text{Card}(C_j) > 1$ alors d'après (iv) *5.* ϱ_j est un cycle et par hypothèse A contient les cycles.
   Ceci permet d'affirmer que $0 \in U$ puisque par définition

$$\pi^d(\varrho)(0) = \varrho_0$$

2. si $j \in U_\sigma$ et $j < q-1$ alors puisque

$$\pi^d(\varrho)(j+1) = \pi^d(\varrho)(i) \circ \varrho_{j+1}$$

   alors $\pi^d(\varrho)(j+1)$ est le produit de deux éléments de A et par hypothèse A est stable par $\circ$.

Ainsi $U_\sigma = \mathbb{N}_{q-1}$ et $\sigma = \pi^d(\varrho)(q-1) \in A$. Enfin il est clair que le groupe $\mathbf{gr}(C(S_n))$ engendré par les cycles vérifie **a**, **b** et **c**. ■

Il est facile de montrer que le groupe engendré par les transpositions contient les cycles le lemme précédent montre alors que S_n est engendré par les transpositions.

Théorème 8.11 *On note $(\mathbb{Z}, +\ ,\ \boldsymbol{.}\ , O)$ un ensemble d'entiers relatifs, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$, S_n le groupe des permutations de $\mathbb{N}_{n-1}$ et $\tau(S_n)$ l'ensemble des transpositions de S_n. Pour qu'un sous-ensemble A de S_n soit égal à S_n il faut et il suffit qu'il possède les propriétés* **d** *et* **e** *suivantes :*

d

$$\tau(S_n) \subset A$$

e $(\sigma, \pi) \in A \times A \Rightarrow \pi \circ \sigma \in A.$

En particulier

$$\mathbf{gr}(\tau(S_n)) = S_n$$

Preuve On rappelle que les transpositions sont les permutations du type

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} j & si \quad k = i \\ i & si \quad k = j \\ k & si \quad k \notin \{i,j\} \end{cases} .$$

On montre que si A vérifie **d** et **e** alors A vérifie les points **a**, **b** et **c** de la partie (v) du lemme [8.43] page 362.

Vérification de $e \in A$

Puisque $\tau(S_n) \subset A$ et A est stable par $\circ$, pour tout $\tau \in \tau(S_n)$ on a $e = \tau \circ \tau \in A$

Vérification de $C(S_n) \subset A$

Si $\sigma \in C(S_n)$ est un cycle de longueur $m > 2$ (si $m = 2$ alors σ est une transposition) et $x \in \mathrm{Inj}[\mathbb{N}_{m-1}, \mathbb{N}_{n-1}]$ est l'application injective vérifiant

$$i \in \mathbb{N}_{m-2} \Rightarrow \sigma(x_i) = x_{i+1} \text{ et } \sigma(x_{m-1}) = x_0$$

on considère l'application $p \mapsto \varrho_p$ de $\mathbb{N}_{m-2}$ dans $\tau(S_n)$ définie par

$$\varrho_p(k) = \tau_{x_0, x_{m-1-p}}(k) = \begin{cases} x_{m-1-p} & si \quad k = x_0 \\ x_0 & si \quad k = x_{m-1-p} \\ k & si \quad k \notin \{x_0, x_{m-1-p}\} \end{cases}.$$

et si π^d est l'unique application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{n-1}))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, \mathbb{N}_{n-1}))$ vérifiant

$$\pi^d(\varrho)(0) = \varrho_0 \quad \text{et} \quad \pi^d(\varrho)(n+1) = \pi^d(\varrho)(n) \circ \varrho_{n+1}$$

on montre

$$\pi^d(\varrho)(m-2) \in A \quad \text{et} \quad \sigma = \pi^d(\varrho)(m-2)$$

I D'abord on montre $\pi^d(\varrho)(m-2) \in A$

On pose

$$U = \{k \in \mathbb{N}_{m-2} / \pi^d(\varrho)(k) \in A\}$$

1. $0 \in U$ puisque $\pi^d(\varrho)(0) = \varrho_0 \in \tau(S_n)$ et $\tau(S_n) \subset A$.
2. si $p < m-2$ et $p \in U$ puisque par définition

$$\pi^d(\varrho)(p+1) = \pi^d(\varrho)(p) \circ \varrho_{p+1}$$

$\pi^d(\varrho)(p+1)$ est la composée de deux éléments de A qui est stable par la loi $\circ$, par suite $p+1 \in U$.

Ainsi $U = \mathbb{N}_{m-2}$ et en particulier $\pi^d(\varrho)(m-2) \in A$.

II Ensuite on montre $\pi^d(\varrho)(m-2) = \sigma$.

On montre que pour tout $p_0 \in \mathbb{N}_{m-2}$ la permutation $\pi^d(\varrho)(p_0)$ est le cycle

$$x_0 \to x_{m-1-p_0} \to x_{m-p_0} \to \cdots \to x_{m-1} \to x_0$$

Cela montrera que si $p_0 = m-2$ la permutation $\pi^d(\varrho)(m-2)$ est le cycle

$$x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{m-1} \to x_0$$

c'est à dire σ. Il s'agit donc de prouver les points suivants :

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}_{m-2}$

$$\pi^d(\varrho)(p)(x_0) = x_{m-1-p} \quad \text{et} \quad \pi^d(\varrho)(p)(x_{m-1}) = x_0$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}_{m-2}$ et $k \in \mathbb{N}_{p-2}$

$$\pi^d(\varrho)(p)(x_{m-1-p+k}) = x_{m-p+k}$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}_{m-2}$ et $i \notin \{x_0, x_{m-1-p}, \cdots, x_{m-1}\}$ on a

$$\pi^d(\varrho)(p)(i) = i$$

Notons donc c_p la permutation vérifiant *1.*, *2.* et *3.* et

$$U = \{p \in \mathbb{N}_{m-2} / \pi^d(\varrho)(p) = c_p\}$$

1. Puisque $\pi^d(\varrho)(0) = \varrho_0 = \tau_{x_0, x_{m-1}}$ on a $0 \in U$.

2. Si $0 < p < m-2$ et $p \in U$ alors

$$\pi^d(\varrho)(p+1) = \pi^d(\varrho)(p) \circ \varrho_{p+1} = c_p \circ \varrho_{p+1}$$

ainsi, puisque $\varrho_{p+1}(x_0) = x_{m-2-p}$

$$\pi^d(\varrho)(p+1)(x_0) = c_p(x_{m-2-p})$$

puisque $p < m-2$ on a $x_{m-2-p} \notin \text{support}(c_p)$ par suite

$$\pi^d(\varrho)(p+1)(x_0) = x_{m-2-p}$$

de même

$$\pi^d(\varrho)(p+1)(x_{m-1}) = c_p(\tau_{x_0,x_{m-2-p}}(x_{m-1})) = c_p(x_{m-1}) = x_0$$

enfin

$$\pi^d(\varrho)(p+1)(x_{m-2-p+k}) = c_p(\tau_{x_0,x_{m-2-p}}(x_{m-2-p+k}))$$

par suite
— si $k = 0$

$$\pi^d(\varrho)(p+1)(x_{m-2-p}) = c_p(x_0) = x_{m-1-p}$$

— si $0 < k < p$

$$\pi^d(\varrho)(p+1)(x_{m-2-p+k}) = c_p(x_{m-2-p+k}) = x_{m-1-p+k}$$

Ainsi $U = \mathbb{N}_{m-2}$ et $\pi^d(\varrho)(m-2) = c_{m-2} = \sigma$.

Cela montre que tout sous-ensemble A de S_n vérifiant **d** et **e** contient l'identité, les cycles et est stable par la loi $\circ$ le lemme [8.43] page 362 permet donc d'affirmer que $A = S_n$. ∎

On pourrait penser que l'étude des groupes commutatifs est un corrollaire de l'étude des groupes, mais cette impression disparaît rapidement lorsqu'on remarque que le groupe libre au dessus d'un ensemble (construit par exemple dans le théorème [8.9] page 347) est rarement commutatif.

8.8 *Les groupes commutatifs*

8.8.1 *Introduction*

La catégorie des groupes commutatifs est définie par :

Définition 8.43 *La catégorie* **grc** *des groupes commutatifs est la catégorie définie par*

1. *Les objets de* **grc** *sont les groupes commutatifs* $(G,*)$ *au sens de la définition* [8.22] *page 263,*
2. *Les morphismes de l'objet* $(G_0,*_0)$ *dans l'objet* $(G_1,*_1)$ *sont les morphismes de monoïdes définis par* [8.14] *page 240*
3. *La loi de composition est la composition des applications.*

Lorsque $(G,*)$ est un groupe commutatif la loi $*$ sera souvent notée additivement $* : (x,y) \mapsto x+y$ et l'élément neutre sera souvent noté 0, enfin pour tout $x \in G$ on notera $-x$ l'inverse de x.
On définit une famille de groupes commutatifs en changeant groupe par groupe commutatif dans la définition d'une famille de groupes.

Définition 8.44 *On note* I *et* $\mathbb{U}$ *des ensembles, une* ***famille de groupes commutatifs*** *indexée par* I *à valeurs dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ *est un triplet* $(G,\oplus,0)$ *où*

1. $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I,\mathcal{P}(\mathbb{U}))$ *est une application de* I *dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$*,*
2. $\oplus \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(G_i \times G_i, G_i)$

3. $0 \in \prod_{i \in I} G_i$,

4. *pour tout $i \in I$ le couple $(G_i, \oplus_i)$ est un groupe commutatif d'élément neutre 0_i*

Si $(G, \oplus, 0)$ est une famille de groupes commutatifs indexée par I à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ on peut munir le produit cartésien

$$P = \prod_{i \in I} G_i$$

de la loi

$$(x + y)_i = x_i \oplus_i y_i$$

et il est clair que $(P, +)$ est un produit dans la catégorie des groupes commutatifs au sens suivant :

Définition 8.45 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles et $(G, \oplus, 0)$ une famille de groupes commutatif indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, On appelle **produit** de la famille $(G, \oplus, 0)$ dans la catégorie* **grc** *un couple $((P, +), p)$ où $(P, +)$ est un groupe commutatif et $p \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(P, G_i)$ vérifie la propriété suivante : pour tout groupe commutatif $(Y, \diamond)$ et pour tout $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(Y, G_i)$ il existe un unique morphisme de groupe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(Y, P)$ qui vérifie*

$$\forall i \in I \ g_i = p_i \circ h.$$

En d'autre termes, pour tout groupe commutatif $(Y, \diamond)$ l'application $\varphi : h \mapsto \varphi(h)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(Y, P)$ dans $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{gr}}(Y, M_i)$ définie par

$$\varphi(h)(i) = p_i \circ h$$

est bijective.

Enfin l'existence de limites projectives dans la catégorie **grc** s'établit en montrant que la limite projective dans la catégorie **gr** d'un système de transitions d'une famille de groupes commutatifs est un groupe commutatif. L'existence de limites inductive dans la catégorie **grc** peut s'établir à partir de l'existence d'un ≪ 'groupe commutatif libre ≫ au sens de la définition suivante où on définit un groupe commutatif libre en changeant groupe par groupe commutatif dans la définition d'un groupe libre (voir définition [8.37] page 338)

Définition 8.46 *On note X un ensemble, on appelle **groupe commutatif libre** au-dessus de X un couple $((G, *), i)$ où*

1. *$(G, *)$ est un groupe commutatif*
2. *i est une application de X dans G qui vérifie la propriété suivante : pour tout groupe commutatif $(H, \centerdot\,)$ et toute application f de X dans H il existe un unique morphisme de groupe $f_c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G, H)$ vérifiant*

$$f = f_c \circ i.$$

En d'autre termes, $((G, *), i)$ est un groupe commutatif libre au-dessus de X si pour tout groupe commutatif $(H, \centerdot)$ l'application φ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{grc}}((G, *), (H, \centerdot))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, H)$ définie par

$$\varphi(f_c) = f_c \circ i$$

est bijective.

Une preuve similaire à celle du lemme [8.36] page 338 montre que si $(G, *)$ et $(H, \bullet)$ sont des groupes libres au-dessus de X il sont isomorphes.

Lemme 8.44 *On note X un ensemble, si $((G,*),i)$ et $((H,\bullet),j)$ sont des groupes commutatifs libres au-dessus de X alors il existe $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{grc}}((G,*),(H,\bullet))$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{grc}}((H,\bullet),(G,*))$ tels que*

$$f \circ g = id_H \qquad \text{et} \qquad g \circ f = id_G$$

Preuve

— Puisque $((G,*),i)$ est commutatif libre au-dessus de X et H est commutatif il existe $\hat{j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{grc}}((G,*),(H,\bullet))$ tel que

$$j = \hat{j} \circ i$$

— Puisque $((H,\bullet),j)$ est commutatif libre au-dessus de X et G est commutatif il existe $\hat{i} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((N,\bullet),(M,*))$ tel que

$$i = \hat{i} \circ j$$

En particulier $\hat{j} \circ \hat{i}$ est un morphisme de $(H,\bullet)$ dans $(h,\bullet)$ qui vérifie

$$j = \hat{j} \circ \hat{i} \circ j. \tag{8.88}$$

Mais, par définition d'un groupe libre, le seul morphisme f de $(H,\bullet)$ dans $(H,\bullet)$ vérifiant $j = f \circ j$ est l'identité par suite (8.88) entraîne $\hat{j} \circ \tilde{i} = id_H$. De même l'égalité

$$i = \hat{i} \circ \hat{j} \circ i$$

montre que $\hat{i} \circ \hat{j} = id_G$ ■

La preuve de l'existence de groupes commutatifs libre au-dessus d'un ensemble permet de fixer quelques formalismes.

8.8.2 *Groupe commutatif libre et commutateurs*

Commutateurs et groupe dérivé

On utilise la définition [8.26] page 289 et la notation associée.

Définition 8.47 *On note $(G,*)$ un groupe où la loi $*$ est notée multiplicativement $* : (x,y) \mapsto xy$.*

1. *L'application* C *de l'ensemble $\mathcal{G}(G)$ des sous-groupes de G dans la famille $\mathcal{P}(G)$ des sous-ensembles de G est définie par*

$$\mathrm{C}(H) = \{h \in G / \exists\ (a,b) \in H \times H : h = (ab)(a^{-1}b^{-1})\}$$

2. *L'application* D *de $\mathcal{G}(G)$ dans $\mathcal{G}(G)$ est définie par*

$$\mathrm{D}(H) = \mathbf{gr}(\mathrm{C}(H))$$

Pour tout sous-groupe H de G

— *un élément de $\mathrm{C}(H)$ est appelé un **commutateur** de H et $\mathrm{C}(H)$ est appelé l'ensemble des commutateurs de H*

— *$\mathrm{D}(H)$ est appelé le **groupe dérivé** de H.*

Ainsi $\mathrm{D}(H)$ est le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des commutateurs.

Notation 8.13 *Si $(G,*)$ est un groupe où la loi $*$ est notée multiplicativement $* : (x,y) \mapsto xy$ et $(a,b) \in G \times G$ on note*

$$[a,b] = (ab)(a^{-1}b^{-1})$$

Le lemme qui suit est une application directe des définitions.

Lemme 8.45 *On note* $(G,*)$ *un groupe où la loi* $*$ *est notée multiplicativement* $* : (x,y) \mapsto xy$.

(i) Pour tout sous-groupe H *de* G

$$\mathrm{C}(H) \subset H \quad \text{et} \quad \mathrm{D}(H) \subset H$$

(ii) Pour tout sous-groupe H *de* G *le groupe* $\mathrm{D}(H)$ *est un sous-groupe normal de* H *:*

$$\mathrm{D}(H) \lhd H \ .$$

(iii) Si H *est un sous-groupe de* G *le groupe quotient* $H/\mathrm{D}(H)$ *est commutatif.*

(iv) Si H *est un sous-groupe de* G *et* $K \lhd H$ *est un sous-groupe normal de* H*, pour que* H/K *soit commutatif il faut et il suffit que* $\mathrm{D}(H) \subset K$.

(v) Si $(\mathbb{N}, O)$ *est un ensemble d'entiers naturels pour tout sous-groupe* H *de* G *il existe une application* $n \mapsto H_n$ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathcal{G}(G)$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $H_0 = H$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $H_{n+1} = \mathrm{D}(H_n)$
2. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $H_{n+1} \lhd H_n$ *et le groupe quotient* H_n/H_{n+1} *est commutatif .*

(vi) On note $(K \ , \ \boldsymbol{.})$ *un groupe* ***commutatif*** *et*

$$\pi : G \mapsto G/\mathrm{D}(G)$$

le morphisme canonique, pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G,K)$ *il existe un unique morphisme* $f_c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(\ G/\mathrm{D}(G) \ ,K)$ *vérifiant*

$$f = f_c \circ \pi$$

Preuve La preuve utilise les notations et résultats des lemmes [8.27] page 298, [8.33] page 327 et [8.34] page 331. On notera e l'élément neutre de G.

(i)

Si $x \in \mathrm{C}(H)$ il existe $(a,b) \in H \times H$ tel que $x = (ab)(a^{-1}b^{-1})$ ainsi $x \in H$ comme produit d'éléments de H. Mais par définition de $\mathrm{D}(H)$ tout groupe contenant $\mathrm{C}(H)$ contient $\mathrm{D}(H)$.

(ii)

On doit montrer que pour tout $(h,x) \in H \times \mathrm{D}(H)$ on a

$$hxh^{-1} \in \mathrm{D}(H) \ .$$

Pour $h \in H$ on pose

$$K_h = \{x \in H / hxh^{-1} \in \mathrm{D}(H)\}$$

et on montre que pour tout $h \in H$

1. K_h est un sous-groupe de G
2. $\mathrm{C}(H) \subset K_h$.

1. <u>K_h est un sous-groupe de G</u>
   (a) Il est clair que $e \in K_h$ puisque $heh^{-1} = e \in \mathrm{D}(H)$
   (b) Si $x \in K_h$ alors $hxh^{-1} \in \mathrm{D}(H)$, par suite $(hxh^{-1})^{-1} \in \mathrm{D}(H)$, et l'égalité $(hxh^{-1})^{-1} = hx^{-1}h^{-1}$ montre que $x^{-1} \in K_h$
   (c) Si $(x,y) \in K_h \times K_h$ alors l'égalité

$$h(xy)h^{-1} = (hxh^{-1})(hyh^{-1})$$

   montre que $h(xy)h^{-1}$ est le produit d'éléments de $\mathrm{D}(H)$, par suite $xy \in K_h$.

Ainsi pour tout $h \in H$ K_h est un sous-groupe de H

2. $\underline{\mathrm{C}(H) \subset K_h}$
Si $g \in \mathrm{C}(H)$ il existe $(a, b) \in H \times H$ tel que $g = (ab)(a^{-1}b^{-1})$ l'égalité

$$hgh^{-1} = (hah^{-1})(hbh^{-1})(hah^{-1})^{-1}(hbh^{-1})^{-1}$$

montre que $hgh^{-1} \in \mathrm{C}(H)$, mais par définition $\mathrm{C}(H) \subset \mathrm{D}(H)$ par suite $g \in K_h$.

Puisque tout sous-groupe de G contenant $\mathrm{C}(H)$ contient $\mathrm{D}(H)$ on a

$$\forall\ h \in H \qquad \mathrm{D}(H) \subset K_h$$

par suite

$$x \in \mathrm{D}(H) \Rightarrow x \in K_h \Rightarrow hxh^{-1} \in \mathrm{D}(H)$$

ce qui montre que $\mathrm{D}(H) \lhd H$.

(iii)

Si $(x, y) \in H \times H$ alors, puisque $(xy)(yx)^{-1}$ est un commutateur de H on a

$$(xy)(yx)^{-1} \in \mathrm{D}(H)$$

par suite

$$\mathrm{D}(H)xy = \mathrm{D}(H)yx$$

ainsi la classe d'équivalence de xy est la classe d'équivalence de yx. En particulier, puisque $\mathrm{D}(H) \lhd H$, on obtient

$$\mathrm{D}(H)x \centerdot \mathrm{D}(H)y = \mathrm{D}(H)xy = \mathrm{D}(H)yx = \mathrm{D}(H)y \centerdot \mathrm{D}(H)x$$

et $H/\mathrm{D}(H)$ est commutatif.

(iv)

1. <u>On montre "il faut"</u>
Si $K \lhd H$ et H/K est commutatif alors pour tout $(x, y) \in H \times H$ on a

$$Kxy = Kx \centerdot Ky = Ky \centerdot Kx = Kyx$$

et l'égalité $Kxy = Kyx$ est l'assertion $(xy)(yx)^{-1} \in K$, autrement dit, pour tout $(x, y) \in H \times H$

$$xyx^{-1}y^{-1} \in K\ ,$$

ainsi K est un sous-groupe de G contenant les commutateurs de H et $\mathrm{D}(H) \subset K$.

2. <u>On montre "il suffit"</u>
Si $K \lhd H$ et $\mathrm{D}(H) \subset K$ alors $\mathrm{C}(H) \subset K$ ainsi pour tout $(x, y) \in H \times H$ on a

$$(xy)(yx)^{-1} \in K$$

par suite

$$Kxy = Kyx$$

et

$$Kx \centerdot Ky = Kxy = Kyx = Ky \centerdot Kx\ ,$$

ainsi H/K est commutatif.

(v)

Puisque D est une application de $\mathcal{G}(G)$ dans $\mathcal{G}(G)$ le théorème d'induction (théorème [4.3] page 80)) permet d'affirmer que pour tout $H \in \mathcal{G}(G)$ il existe une application $n \mapsto H_n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{G}(G)$ vérifiant

$$H_0 = H \qquad \text{et} \qquad H_{n+1} = \mathrm{D}(H_n)\ .$$

1. par (ii) on a $H_{n+1} \lhd H_n$
2. par (iii) H_n/H_{n+1} est commutatif.

(vi)

1 Preuve de l'existence.

On note e' l'élément neutre de $(K, \centerdot)$. D'après le (iii) du lemme [8.33] page 327 l'existence de f_c est équivalente à l'inclusion

$$\mathrm{D}(G) \subset \{x \in G / f(x) = e'\} \tag{8.89}$$

1. D'abord on montre $\mathrm{C}(G) \subset \{x \in G / f(x) = e'\}$
   En effet,
   (a) si $x \in \mathrm{C}(G)$ il existe $(a, b) \in G \times G$ tel que $x = (ab)(a^{-1}b^{-1})$,
   (b) puisque f est un morphisme de G dans K on a
   $$f(x) = (f(a) \centerdot f(b)) \centerdot ((f(a))^{-1} \centerdot (f(b))^{-1}) \ ,$$
   (c) puisque $(K, \centerdot)$ est commutatif on obtient
   $$(f(a) \centerdot f(b)) \centerdot ((f(a))^{-1} \centerdot (f(b))^{-1}) = (f(a) \centerdot f(a)^{-1}) \centerdot (f(b) \centerdot f(b)^{-1}) = e'$$
   ainsi pour tout $x \in \mathrm{C}(G)$ on a $f(x) = e'$
2. Ensuite on montre $\mathrm{D}(G) \subset \{x \in G / f(x) = e'\}$
   En effet, D'après le lemme [8.34] page 331 l'ensemble
   $$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G / f(x) = e'\}$$
   est un sous-groupe de G, de plus 1 montre que $\mathrm{C}(G) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Puisque tout sous-groupe de G contenant $\mathrm{C}(G)$ contient $\mathrm{D}(G)$ on obtient
   $$\mathrm{D}(G) \subset \mathrm{Ker}(f)$$
   et l'inclusion (8.89) est vérifiée.

2. Preuve de l'unicité.

Si u et v sont des morphismes de $G/\mathrm{D}(G)$ dans K tels que

$$f = u \circ \pi \qquad \text{et} \qquad f = v \circ \pi$$

alors pour tout $x \in G$ on a

$$u(\pi(x)) = v(\pi(x)) = f(x)$$

π étant surjective on obtient $u = v$. ■

Le point (vi) du lemme [8.45] page 373 permet d'établir l'existence de groupe commutatif libre au-dessus des ensembles . Si X est un ensemble le théorème [8.9] page 347 établit l'existence d'un groupe libre $(G(X), \varpi_X)$ au-dessus de X, le théorème qui suit montre que si

$$G_c(X) = G(X)/\mathrm{D}(G(X))$$

est le groupe quotient de $G(X)$ par son groupe dérivé et

$$i_X = \pi \circ \varpi_X$$

où $\pi : G(X) \mapsto G(X)/\mathrm{D}(G(X))$ est le morphisme canonique alors le couple $(G_c(X), i_X)$ est un groupe commutatif libre au-dessus de X.

Théorème 8.12 ***Existence des groupes commutatifs libres.***
Pour tout ensemble X il existe un couple $(G_c(X), i_X)$ où

— $G_c(X)$ *est un groupe commutatif*

— $i_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G_c(X))$ *est une application de X dans $G_c(X)$*

ce couple possède la propriété suivante :
pour tout groupe ***commutatif*** G *et pour toute application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ il existe unique morphisme de groupes $f_c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_c(X), G)$ vérifiant*

$$f = f_c \circ i_X \ .$$

Preuve On introduit quelques notations

1. $(G(X), \varpi_X)$ est le groupe libre au-dessus de X (voir théorème [8.9] page 347)
2. $\mathrm{D}(G(X))$ est le groupe dérivé de $G(X)$ (voir définition [8.47] page 372)
3. Le lemme [8.45] page 373 montre que $\mathrm{D}(G(X)) \lhd G(X)$, l'ensemble
$$G_c(X) = G(X)/\mathrm{D}(G(X))$$
sera muni de sa loi quotient notée **.**.
4. $$\pi : G(X) \mapsto G_c(X)$$
est le morphisme canonique.
5. L'application i_X de X dans $G_c(X)$ est définie par
$$i_X = \pi \circ \varpi_X$$

On montre que le couple $(G_c(X), i_X)$ est un groupe commutatif libre au-dessus de X. D'abord d'après le lemme [8.45] page 373 $G_c(X)$ est commutatif, il reste donc à vérifier que si G est un groupe commutatif et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ est une application de X dans G il existe un unique morphisme $f_c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_c(X), G)$ vérifiant

$$f = f_c \circ i_X \tag{8.90}$$

1 Preuve de l'existence

Puisque $(G(X), \varpi_X)$ est un groupe libre au-dessus de X il existe un unique morphisme $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(X), G)$ (voir théorème [8.9] page 347) vérifiant

$$f = f^* \circ \varpi_X$$

G étant commutatif le point (vi) du lemme [8.45] page 373 permet d'affirmer qu'il existe un unique morphisme $f_c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_c(X), G)$ vérifiant

$$f^* = f_c \circ \pi$$

ainsi on obtient

$$f = f^* \circ \varpi_X = (f_c \circ \pi) \circ \varpi_X = f_c \circ (\pi \circ \varpi_X) = f_c \circ i_X$$

2 Preuve de l'unicité

Si u et v sont des morphismes de $G_c(X)$ dans G vérifiant

$$f = u \circ i_X \qquad \text{et} \qquad f = v \circ i_X$$

alors les applications $g_u = u \circ \pi$ et $g_v = v \circ \pi$ sont des morphismes de $G(X)$ dans G vérifiant

$$f = g_u \circ \varpi_X \qquad \text{et} \qquad f = g_v \circ \varpi_X$$

l'unicité dans le théorème [8.9] page 347 montre alors que $u \circ \pi = v \circ \pi$, puisque π est surjective on obtient $u = v$. ■

On peut aussi construire un groupe commutatif libre au-dessus d'un ensemble X au moyen du formalisme des sommes finies.

8.8.3 *Groupe commutatif libre et sommes finies*

Dans ce paragraphe, toutes les lois de groupes commutatifs sont notées additivement et tous les éléments neutres sont notés 0, ainsi on laisse au lecteur le soin d'identifier le groupe dans lequel on somme, de plus l'inverse d'un élément x d'un groupe commutatif est noté $-x$. Enfin si $(G,+)$ est un groupe commutatif et $(x,y) \in G \times G$ on note

$$x - y = x + (-y)$$

On commence par énoncer la première partie du lemme [8.26] page 290 dans le formalisme additif.

Lemme 8.46 *$(\mathbb{Z}, +, \,\centerdot, O)$ désigne un ensemble d'entiers relatifs et on notera $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z}/n \geq 0\} = \mathbb{Z}_+$. On note $(G,*)$ un groupe commutatif où la loi $*$ est notée additivement $* : (x,y) \mapsto x+y$ et l'élément neutre est noté 0 .*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in G$

$$n(-x) = -nx$$

(ii) Il existe une unique application $x \mapsto \varrho_G(x)$ de G dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}, G)$ qui vérifie les propriétés **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g** *et* **h** *suivantes :*

a *pour tout $x \in G$*

$$\forall\ \nu \in \mathbb{N} \quad \varrho_G(x)(\nu) = \nu x$$

b *si $\mathbb{Z}_- = \{n \in \mathbb{Z}/n \leq 0\}$ pour tout $x \in G$*

$$\forall\ \nu \in \mathbb{Z}_- \quad \varrho_G(x)(\nu) = (-\nu)(-x)$$

c *Pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in G$*

$$\varrho_G(x)(\mu + \nu) = \varrho_G(x)(\mu) + \varrho_G(x)(\nu)$$

d *Si $(H, \centerdot)$ est un groupe commutatif et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G,H)$ est un morphisme de groupes alors*

$$\forall\ (\nu, x) \in \mathbb{Z} \times G \qquad \varrho_H(f(x))(\nu) = f(\varrho_G(x)(\nu))$$

e *Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in G$*

$$\varrho_G(x)(-\nu) = \varrho_G(-x)(\nu) = -\varrho_G(x)(\nu)$$

f *Si H est un sous-groupe de G et $x \in H$ alors :*

$$\forall\ \nu \in \mathbb{Z} \quad \text{on a} \quad \varrho_G(x)(\nu) \in H$$

g *La relation ψ de $\mathbb{Z} \times G$ dans G définie par*

$$\psi = \{((\nu, x), g)/(g, \nu) \in \varrho_G(x)\}$$

est une application.

h *pour tout $(x,y) \in G \times G$ et $\nu \in \mathbb{Z}$*

$$\varrho_G(x+y)(\nu) = \varrho_G(x)(\nu) + \varrho_G(y)(\nu)$$

on note** $\psi(\nu, x) = \varrho_G(x)(\nu) = \nu x$ **on a donc

1. *Pour tout $(\mu, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $x \in G$*

$$\psi(\mu + \nu, x) = (\mu + \nu)x = \mu x + \nu x \quad \text{et} \quad -\nu x = \nu(-x) = (-\nu)x \tag{8.91}$$

2. Si $(x, y) \in G \times G$ *et* $\nu \in \mathbb{Z}$
$$\nu(x + y) = \nu x + \nu y \tag{8.92}$$
3. Si $(H, \boldsymbol{.})$ *est un groupe commutatif et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G, H)$ *est un morphisme de groupes alors*
$$\forall\ (\nu, x) \in \mathbb{Z} \times G \qquad f(\nu x) = \nu f(x) \tag{8.93}$$

Preuve

(i)

Remarquons d'abord que puisque par définition d'un ensemble d'entiers relatifs $(\mathbb{N}, O) = (\mathbb{Z}_+, O)$ est un ensemble d'entiers naturels les applications de $\mathbb{N}$ dans G
$$n \mapsto nx \quad \text{et} \quad n \mapsto n(-x)$$
sont définies par le lemme [8.2] page 195, d'autre part le même lemme permet d'affirmer
$$nx + n(-x) = n(x + (-x)) = n0 = 0\ .$$
ainsi $n(-x) = -nx$

(ii)

Il s'agit de prolonger l'application $n \mapsto nx$ définie sur $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$

Preuve de l'existence

Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ on considère l'ensemble
$$\Delta(\nu) = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \nu = m - n\}\ ,$$
et l'application ϱ_G de G dans $\mathfrak{P}(\mathbb{Z} \times G)$ définie par
$$\varrho_G(x) = \{(\nu, y) \in \mathbb{Z} \times G / \exists\ (m, n) \in \Delta(\nu) : y = mx - nx\}$$
et on montre que pour tout $x \in G$ on a $\varrho_G(x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}, G)$

1. D'abord on montre que pour tout $x \in G$ on a $\mathrm{dom}(\varrho_G(x)) = \mathbb{Z}$. d'après le théorème [8.8] page 281, si $\nu \in \mathbb{Z}$ alors $\Delta(\nu) \neq \varnothing$ ainsi, si $(m, n) \in \Delta(\nu)$ alors
$$(\nu, mx - nx) \in \varrho_G(x)$$
et $\nu \in \mathrm{dom}(\varrho_G(x))$
2. Ensuite on montre que $\varrho_G(x)$ est une fonction :
$$(\nu, y) \in \varrho_G(x) \quad \text{et} \quad (\nu, y') \in \varrho_G(x) \Rightarrow y = y'$$
si $(\nu, y) \in \varrho_G(x)$ et $(\nu, y') \in \varrho_G(x)$ alors il existe des couples $(m, n) \in \Delta(\nu)$ et $(p, q) \in \Delta(\nu)$ tel que
$$y = mx - nx \quad \text{et} \quad y' = px - qx$$
l'égalité $\nu = m - n = p - q$ entraîne $m + q = p + n$, ainsi $(m + q)x = (p + n)x$ et
$$mx + qx = px + nx\ .$$
par suite
$$y' = px - qx = mx - nx = y.$$

Ceci montre que ϱ_G est à valeurs dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}, G)$. On vérifie les points **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g** et **h**

a Si $\nu \in \mathbb{N}$ alors $(\nu, 0) \in \Delta(\nu)$, par suite

$$\varrho_G(x)(\nu) = \nu x - 0x = \nu x$$

b Si $\nu \in \mathbb{Z}_-$ alors $(0, -\nu) \in \Delta(\nu)$, par suite

$$\varrho_G(x)(\nu) = 0x - (-\nu)x = (-\nu)(-x)$$

c Si $(m, n) \in \Delta(\mu)$ et $(p, q) \in \Delta(\nu)$ alors $(m + p, n + q) \in \Delta(\mu + \nu)$ ainsi

$$\varrho_G(x)(\mu + \nu) = (m + p)x - (n + q)x = (mx - nx) + (px - qx)$$

par suite

$$\varrho_G(x)(\mu + \nu) = \varrho_G(x)(\mu) + \varrho_G(x)(\nu)$$

d Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G, H)$ et $(m, n) \in \Delta(\nu)$ on a

$$f(\varrho_G(x)(\nu)) = f(mx - nx) = f(mx) - f(nx)$$

mais l'application $\varphi : \mathbb{Z}_+ \mapsto H$ défini par

$$\varphi(n) = f(nx)$$

vérifie, si on note 0 l'élément neutre de H,

1. $\varphi(0) = f(0) = 0$
2. $\varphi(n + 1) = f(nx + x) = \varphi(n) + f(x)$

par suite $\varphi(n) = nf(x)$ et

$$f(\varrho_G(x)(\nu)) = f(mx - nx) = f(mx) - f((nx) = mf(x) - nf(x)$$

et par définition

$$\varrho_H(f(x))(\nu) = mf(x) - nf(x)$$

e
1. Si $(m, n) \in \Delta(\nu)$ alors $(n, m) \in \Delta(-\nu)$ par suite

$$\varrho_G(x)(-\nu) = nx - mx$$

d'autre part puisque $-n(-x) = n(-(-x)) = nx$ on obtient

$$\varrho_G(-x)(\nu) = m(-x) - n(-x) = nx - mx = \varrho_G(x)(-\nu)$$

2. D'après **c** on a

$$\varrho_G(x)(\nu) + \varrho_G(x)(-\nu) = \varrho_G(x)(\nu + (-\nu)) = \varrho_G(x)(0) = 0$$

f On montre que si $x \in H$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $nx \in H$ et $-nx \in H$. On pose

$$L = \{n \in \mathbb{N}/nx \in H \quad \text{et} \quad -nx \in H\}$$

alors

1. $0 \in L$ puisque $0x = 0(-x) = 0$,
2. si $n \in L$ alors
   — puisque $(n + 1)x = nx + x$, $(n + 1)x$ est la somme de deux éléments de H, par suite $(n + 1)x \in H$,
   — puisque $(n + 1)(-x) = n(-x) + (-x)$, $(n + 1)(-x)$ est la somme de deux éléments de H, par suite $(n + 1)(-x) \in H$,

Ainsi L est héréditaire et $L = \mathbb{N}$. En particulier si $\nu \in \mathbb{Z}$ et $x \in H$ puisque

$$\forall\ (m,n) \in \Delta(\nu) \qquad \varrho_G(x)(\nu) = mx - nx = mx + n(-x)$$

$\varrho_G(\nu)$ est la somme de deux éléments de H.

g 1. D'abord on montre $\mathrm{dom}(\psi) = \mathbb{Z} \times G$.
Si $(\nu, x) \in \mathbb{Z} \times G$ alors, puisque $\varrho_G(x)$ est une application on a $\nu \in \mathrm{dom}(\varrho_G(x))$ ainsi $((\nu, x), \varrho_G(x)(\nu)) \in \psi$.

2. Ensuite on montre que ψ est une fonction :

$$[((\nu,x),g) \in \psi \qquad \text{et} \qquad ((\nu,x),g') \in \psi\ ] \Rightarrow g = g'$$

mais si $((\nu,x),g) \in \psi$ et $((\nu,x),g') \in \psi$ alors $(\nu,g) \in \varrho_G(x)$ et $(\nu,g') \in \varrho_G(x)$, $\varrho_G(x)$ étant une fonction on obtient $g = g'$.

h Puisque G est commutatif le lemme [8.2] page 195 permet d'affirmer que $\forall\ (x,y) \in G \times G$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n(x+y) = nx + ny$$

par suite si $\nu \in \mathbb{Z}$ pour tout $(m,n) \in \Delta(\nu)$ et $(x,y) \in G \times G$

$$\varrho_G(x+y)(\nu) = m(x+y) - n(x+y)$$

les égalités

$$m(x+y) - n(x+y) = (mx - nx) + (my - ny) = \varrho_G(x)(\nu) + \varrho_G(y)(\nu)$$

montrent alors que

$$\varrho_G(x+y)(\nu) = \varrho_G(x)(\nu) + \varrho_G(y)(\nu)$$

Preuve de l'unicité

Si $x \mapsto f(x)$ est une application de G dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}, G)$ qui vérifie **c** alors pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ et $(m,n) \in \Delta(\nu)$ on a

$$f(x)(\nu) = f(x)(m-n) = f(x)(m) + f(x)(-n)$$

D'autre part

— Par **a** on a

$$f(x)(m) = mx$$

— Par **b** on a

$$f(x)(-n) = n(-x) = -nx$$

ainsi pour tout $x \in G$, $\nu \in \mathbb{Z}$ et $(m,n) \in \Delta(\nu)$

$$f(x)(\nu) = mx - nx = \varrho_G(x)(\nu)\ .$$

■

Le lemme qui suit utilise le lemme [8.5] page 209, les notations [8.7] page 208, les notations [8.8] page 210 et le théorème [8.1] page 211.

Lemme 8.47 $(\mathbb{Z}, +\ ,\ \boldsymbol{.}\ ,\ O)$ *designe un ensemble d'entiers relatifs et on note* $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{\nu \in \mathbb{Z} / \nu \geq 0\}$. *On note X un ensemble, $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des parties finies de X, $(G,*)$ un groupe commutatif où la loi* $* : (x,y) \mapsto x + y$ *est notée additivement et l'élément neutre est noté* 0

(i) L'application u de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *définie par*

$$u(f,g)(x) = f(x) + g(x)$$

munit l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *d'une structure de groupe commutatif. La loi u est notée additivement :*

$$u(f,g) = f + g\ .$$

1. L'élément neutre de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *est l'application de* X *dans* G *définie par*

$$\forall\ x \in X \qquad f(x) = 0$$

cette application est appelée l'application (identiquement) nulle et est notée 0*. Ainsi on note de la même manière l'élément neutre de* G *et l'élément neutre de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$*.*

2. L'inverse de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *est l'application* $-f$ *de* X *dans* G *définie par*

$$(-f)(x) = -f(x)$$

(ii) L'application μ *de* $\mathcal{F}(X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *dans* G *définie par*

$$\mu(A,g) = \sum_{x\in A} g(x)$$

vérifie les propriétés suivantes

1. Pour tout $(x,g) \in X \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$

$$\mu(\{x\},g) = g(x)$$

2. Pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$

$$\mu(\varnothing,f) = 0$$

3. Pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *et pour tout* $(A,B) \in \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)$ *vérifiant* $A \cap B = \varnothing$

$$\mu(A \cup B, f) = \mu(A,f) + \mu(B,f)\ .$$

4. Pour tout $A \in \mathcal{F}(X)$ *et tout* $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$

$$\mu(A,f+g) = \mu(A,f) + \mu(A,g) \tag{8.94}$$

Ainsi pour tout groupe commutatif G *et pour tout* $A \in \mathcal{F}(X)$ *l'application*

$$f \mapsto \mu(A,f)$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *dans* G *est un morphisme de groupe.*

5. Pour tout $A \in \mathcal{F}(X)$

$$\mu(A,0) = 0$$

6. Pour tout $A \in \mathcal{F}(X)$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$

$$\mu(A,-f) = -\mu(A,f)$$

7. Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$

$$\mu(A,\nu f) = \nu\mu(A,f)$$

8. Si K *est un sous-groupe de* G *et* $(A,f) \in \mathcal{F}(X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *vérifie*

$$f(A) \subset K$$

alors $\mu(A,f) \in K$*. En d'autres termes toute somme fini d'éléments de* K *est un élément de* K*.*

(iii) l'application v *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *définie par*

$$v(\rho,f)(x) = \psi(\rho(x),f(x)) = \rho(x)f(x)$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *Pour tout* $(\rho,\nu) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{Z})$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$

$$v(\rho+\nu,f) = v(\rho,f) + v(\nu,f)$$

en d'autres termes :

$$\forall\ x \in X \quad (\rho(x)+\nu(x))f(x) = \rho(x)f(x) + \nu(x)f(x) \tag{8.95}$$

2. *Pour tout* $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ *et* $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{Z})$

$$v(\rho,f+g) = v(\rho,f) + v(\rho,g)$$

en d'autres termes :

$$\forall\ x \in X \quad \rho(x)(f(x)+g(x)) = \rho(x)f(x) + \rho(x)g(x) \tag{8.96}$$

Preuve

(i)

1. On montre que u est associative.
Si $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ alors pour tout $x \in X$

$$u(u(f,g),h)(x) = u(f,g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x)$$

l'associativité de G entraîne

$$(f(x)+g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x)+h(x))$$

par suite pour tout $x \in X$

$$u(u(f,g),h)(x) = f(x) + (g(x)+h(x)) = f(x) + u(g,h)(x) = u(f,u(g,h)))(x)$$

ainsi

$$u(u(f,g),h) = u(f,u(g,h))$$

2. u est commutative.
Si $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ alors la commutativité de G entraîne que pour tout $x \in X$

$$u(f,g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = u(g,f)(x)$$

ainsi $u(f,g) = u(g,f)$

3. On montre que l'application nulle est l'élément neutre de $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)),u)$. Si pour tout $x \in X$ $f(x) = 0$ alors pour tout $x \in X$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$

$$u(f,g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + g(x) = g(x)$$

ainsi $u(f,g) = g$

4. On montre que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,G)$ l'application $-f$ est l'inverse de f. Pour tout $x \in X$ on a

$$u(f,-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$$

ainsi $u(f,-f)$ est l'application nulle.

(ii)

1. C'est l'égalité

$$\sum_{\lambda \in \{x\}} g(\lambda) = g(x)$$

2. C'est l'égalité

$$\sum_{\lambda \in \varnothing} g(\lambda) = 0$$

3. C'est l'égalité (8.14) page 211
4. C'est l'égalité (8.23) page 212
5. D'après l'égalité (8.94) page 381 on a, pour tout $A \in \mathcal{F}(X)$,

$$\mu(A, 0) = \mu(A, 0 + 0) = \mu(A, 0) + \mu(A, 0)$$

par suite

$$0 = \mu(A, 0) - \mu(A, 0) = \mu(A, 0)$$

6. D'après l'égalité (8.94) page 381 on a, pour tout $A \in \mathcal{F}(X)$ et toute application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$,

$$0 = \mu(A, 0) = \mu(A, f - f) = \mu(A, f) + \mu(A, -f)$$

par suite

$$\mu(A, -f) = -\mu(A, f)$$

7. D'après l'égalité (8.94) page 381 , pour tout $A \in \mathcal{F}(X)$, l'application

$$f \mapsto \mu(A, f)$$

est un morphisme du groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ dans le groupe G, ainsi l'égalité (8.93) page 378 donne :

$$\forall\ (\nu, f) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G) \qquad \mu(A, \nu f) = \nu \mu(A, f)$$

8. Si $A = \varnothing$ l'assertion provient de $0 \in K$, Si $\mathrm{Card}(A) = n + 1$ alors pour toute bijection $k \mapsto \lambda_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans A

$$\sum_{x \in A} f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\lambda_k)$$

On pose

$$U = \{p \in \mathbb{N}_n / \sum_{k=0}^{p} f(\lambda_k) \in K\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$. En suivant le lemme [5.10] page 111 il suffit de vérifier

(a) $0 \in U$

(b) $p < n \quad \text{et} \quad p \in U \Rightarrow p + 1 \in U$

(a) L'assertion $0 \in U$ provient de $f(\lambda_0) \in K$

(b) Si $p \in U$ et $p < n$ alors l'égalité

$$\sum_{k=0}^{p+1} f(\lambda_k) = \sum_{k=0}^{p} f(\lambda_k) + f(\lambda_{p+1})$$

montre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} f(\lambda_k)$ est la somme de deux éléments de K, par suite $p + 1 \in U$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ par suite $n \in U$ et

$$\sum_{x \in A} f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\lambda_k) \in K\ .$$

(iii)

1. D'après l'égalité (8.91) page 377 on a

$$\forall\, x \in G \qquad (\rho(x) + \nu(x))f(x) = \rho(x)f(x) + \nu(x)f(x)\ .$$

2. D'après l'égalité (8.92) page 378 on a

$$\forall\, x \in X \qquad \rho(x)(f(x) + g(x)) = \rho(x)f(x) + \rho(x)g(x)\ .$$

■

Si X est un ensemble on peut construire un groupe commutatif libre au-dessus de X comme le sous-groupe des applications de X dans $\mathbb{Z}$ ≪ à support fini ≫.

Définition 8.48 *On note X un ensemble et $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ est une application de X dans G on appelle **support** de l'application f le sous-ensemble de X défini par*

$$\mathrm{s}(f) = \{x \in X / f(x) \neq e\}\ .$$

La notation suivante est d'usage courant :

Notation 8.14 *On note X un ensemble, $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des parties finies de X et $(G, *)$ un groupe, Le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ défini par*

$$A_c[X, G] = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G) / \mathrm{s}(f) \in \mathcal{F}(X)\}$$

est appelé l'ensemble des applications à support fini.

le lemme qui suit est une application directe des définitions.

Lemme 8.48 $(\mathbb{Z}, +, \centerdot\,, O)$ *désigne un ensemble d'entiers relatifs et on notera $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z}/n \geq 0\} = \mathbb{Z}_+$. On note X un ensemble et $(G, *)$ un groupe commutatif où la loi $*$ est notée additivement $* : (x, y) \mapsto x+y$ et l'élément neutre est noté 0. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ est muni de la loi de groupe définie par le lemme* [8.47] *page* 380

(i) Pour tout $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$

$$\mathrm{s}(f + g) \subset \mathrm{s}(f) \cup \mathrm{s}(g)$$

(ii) Pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$

$$\mathrm{s}(-f) = \mathrm{s}(f)$$

et pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{s}(\nu f) \subset \mathrm{s}(f)\ .$$

(iii) $A_c[X, G]$ est un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$

(iv) Pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ et tout sous-ensemble fini A de X

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in A \cap \mathrm{s}(f)} f(\lambda)\ . \tag{8.97}$$

En particulier,

1. si $\mathrm{s}(f) \subset \{x\}$ alors pour tout $A \in \mathcal{F}(X)$

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & x \notin A \\ f(x) & si & x \in A \end{array} \right. \tag{8.98}$$

2. pour tout $A \in \mathcal{F}(X)$ vérifiant $\mathrm{s}(f) \subset A$

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(f)} f(\lambda) \tag{8.99}$$

3. pour tout $A \in \mathfrak{F}(X)$ vérifiant $A \subset (\mathrm{s}(f))^c$

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = 0 \tag{8.100}$$

4. pour tout $A \in \mathcal{F}(X)$ et tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ vérifiant

$$A \subset \{x \in X / f(x) = g(x)\}$$

$$\sum_{\lambda \in A} g(\lambda) = \sum_{\lambda \in A} f(\lambda) \tag{8.101}$$

(v) Si v est l'application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ définie par

$$v(\rho, f)(\lambda) = \rho(\lambda) f(\lambda)$$

alors

1. pour tout $(\rho, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$

$$\mathrm{s}(v(\rho, f)) \subset \mathrm{s}(\rho) \cap \mathrm{s}(f) \ .$$

2. Si $\mathrm{s}(\rho) \subset \{x\}$ alors pour tout $A \in \mathfrak{F}(X)$ tel que $x \in A$

$$\sum_{\lambda \in A} v(\rho, f)(\lambda) = \rho(x) f(x) = v(\rho, f)(x) \tag{8.102}$$

Preuve

(i)

On montre

$$(\mathrm{s}(f))^c \cap (\mathrm{s}(g))^c \subset (\mathrm{s}(f+g))^c \ .$$

En effet,

$$\lambda \in (\mathrm{s}(f))^c \cap (\mathrm{s}(g))^c \Rightarrow f(\lambda) = g(\lambda) = 0 \Rightarrow f(\lambda) + g(\lambda) = 0$$

ainsi le passage au complémentaire donne

$$\mathrm{s}(f+g) \subset \mathrm{s}(f) \cup \mathrm{s}(g) \ .$$

(ii)

1. D'abord on montre $\mathrm{s}(-f) \subset \mathrm{s}(f)$.

$$x \in \mathrm{s}(-f) \Rightarrow -f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in \mathrm{s}(f)$$

2. Ensuite on montre $\mathrm{s}(f) \subset \mathrm{s}(-f)$.

$$x \in \mathrm{s}(f) \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow -f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in \mathrm{s}(-f)$$

Enfin on a

$$x \in \mathrm{s}(\nu f) \Rightarrow \nu f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in \mathrm{s}(f) \ .$$

Remarquons que même si $\nu \neq 0$ l'inclusion peut-être stricte puisqu'on peut avoir $f(x) \neq 0$ et $\nu f(x) = 0$.

(iii)

1. Si $(f,g)\in A_c[X,G]\times A_c[X,G]$ alors par (i)
$$\mathrm{s}(f+g)\subset \mathrm{s}(f)\cup \mathrm{s}(g)$$
ainsi $f+g$ est à support fini.
2. Si $f\in A_c[X,G]$ alors, puisque
$$\mathrm{s}(-f)=\mathrm{s}(f)$$
et on obtient $-f\in A_c[X,G]$
3. Si f est l'application nulle alors $\mathrm{s}(f)=\varnothing$ par suite $f\in A_c[X,G]$.

(iv)

1 On montre $\displaystyle\sum_{\lambda\in A} f(\lambda)=\sum_{\lambda\in A\cap\ \mathrm{s}(f)} f(\lambda)$

D'après (8.15) page 211 et les égalités
$$(A\cap\ \mathrm{s}(f))\cap(A\cap(\mathrm{s}(f))^c)=\varnothing\quad (A\cap\ \mathrm{s}(f))\cup(A\cap(\mathrm{s}(f))^c)=A$$
on a
$$\sum_{\lambda\in A} f(\lambda)=\sum_{\lambda\in A\cap\ \mathrm{s}(f)} f(\lambda)+\sum_{\lambda\in A\cap(\mathrm{s}(f))^c} f(\lambda)$$
il suffit donc de montrer que
$$\sum_{\lambda\in A\cap(\mathrm{s}(f))^c} f(\lambda)=0$$

— Si $A\cap(\mathrm{s}(f))^c=\varnothing$ alors
$$\sum_{\lambda\in A\cap(\mathrm{s}(f))^c} f(\lambda)=\sum_{\lambda\in\varnothing} f(\lambda)=0$$
— Si $\mathrm{Card}(A\cap(\mathrm{s}(f))^c)=n+1$, Alors par définition, pour toute bijection $k\mapsto\lambda_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans $A\cap(\mathrm{s}(f))^c$, on a
$$\sum_{\lambda\in A\cap(\mathrm{s}(f))^c} f(\lambda)=\sum_{k=0}^{n} f(\lambda_k)$$
On pose
$$U=\{p\in\mathbb{N}_n/\sum_{k=0}^{p} f(\lambda_k)=0\}$$
et on montre que $U=\mathbb{N}_n$ en montrant
$$0\in U\quad\text{et}\quad [p<n \text{ et } p\in U\Rightarrow p+1\in U]$$
— $0\in U$ puisque
$$\sum_{k=0}^{0} f(\lambda_k)=f(\lambda_0)$$
et $\lambda_0\in(\mathrm{s}(f))^c\Rightarrow f(\lambda_0)=0$

— Si $p\in U$ et $p<n$, alors
$$\sum_{k=0}^{p+1} f(\lambda_k)=\sum_{k=0}^{p} f(\lambda_k)+f(\lambda_{p+1})=f(\lambda_{p+1})$$
et $\lambda_{p+1}\in(\mathrm{s}(f))^c\Rightarrow f(\lambda_{p+1})=0$, par suite $p+1\in U$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et

$$\sum_{\lambda \in A \cap (\mathrm{s}(f))^c} f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} f(\lambda_k) = 0\ .$$

2 On montre (8.98) page 384

1. Si $\mathrm{s}(f) = \varnothing$ alors f est l'application nulle par suite

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = 0 = f(x)$$

2. Si $\mathrm{s}(f) = \{x\}$ alors puisque

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in A \cap\ \mathrm{s}(f)} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in A \cap \{x\}} f(\lambda)$$

Ainsi on obtient
— si $x \in A$ alors $A \cap \{x\} = \{x\}$ et

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \{x\}} f(\lambda) = f(x)$$

— si $x \notin A$ alors $A \cap \{x\} = \varnothing$ et

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \varnothing} f(\lambda) = 0$$

3 On montre (8.99) page 385

Si $\mathrm{s}(f) \subset A$ alors $A \cap \mathrm{s}(f) = \mathrm{s}(f)$ ainsi (8.97) page 384 donne

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in A \cap \mathrm{s}(f)} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(f)} f(\lambda)$$

4 On montre (8.100) page 385

Si $A \subset (\mathrm{s}(f))^c$ alors $A \cap \mathrm{s}(f) = \varnothing$ ainsi (8.97) page 384 donne

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \varnothing} f(\lambda) = 0$$

5 On montre (8.101) page 385

Si $A \subset \{x \in X / f(x) = g(x)\}$ alors $A \subset (\mathrm{s}(f-g))^c$ ainsi (8.100) donne

$$\sum_{\lambda \in A} (f-g)(\lambda) = \sum_{\lambda \in A} (f(\lambda) - g(\lambda)) = 0$$

mais le lemme [8.47] page 380 permet d'affirmer que

$$\sum_{\lambda \in A} (f(\lambda) - g(\lambda)) = \sum_{\lambda \in A} f(\lambda) - \sum_{\lambda \in A} g(\lambda)$$

ainsi

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) - \sum_{\lambda \in A} g(\lambda) = 0$$

et

$$\sum_{\lambda \in A} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in A} g(\lambda)$$

(v)

1. L'assertion $\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap \mathrm{s}(f)$ est l'assertion $[\rho(\lambda) \neq 0$ et $f(\lambda) \neq 0]$ or :

$$\lambda \in \mathrm{s}(v(\rho, f)) \Rightarrow \rho(\lambda) f(\lambda) \neq 0 \Rightarrow [\rho(\lambda) \neq 0 \text{ et } f(\lambda) \neq 0]$$

2. (a) Si $\rho(x) f(x) \neq 0$ alors $\mathrm{s}(v(\rho, f)) = \{x\}$ et (8.98) page 384 montre que

$$\sum_{\lambda \in A} v(\rho, f)(\lambda) = v(\rho, f)(x) = \rho(x) f(x)$$

   (b) Si $\rho(x) f(x) = 0$ alors $\mathrm{s}(v(\rho, f)) = \varnothing$ et

$$0 = \sum_{\lambda \in A} v(\rho, f)(\lambda) = v(\rho, f)(x) = \rho(x) f(x)$$

(vi)

α On a

$$\mathrm{s}(i(x)) = \{\lambda \in X / i(x)(\lambda) \neq 0\} = \{x\} \ .$$

β 1. Si $x \in \mathrm{s}(f)$ alors $\{x\} = \mathrm{s}(v(i(x), f))$ et

$$\sum_{\lambda \in \{x\}} v(i(x), f)(\lambda) = i(x)(x) f(x) = f(x)$$

2. Si $x \notin \mathrm{s}(f)$ alors $f(x) = 0$ et $\mathrm{s}(v(i(x), f)) = \varnothing$ par suite

$$f(x) = 0 = \sum_{\lambda \in \varnothing} v(i(x), f)(\lambda)$$

■

On montre que pour tout ensemble X le groupe $A_c[X, \mathbb{Z}]$ est un groupe commutatif libre au-dessus de X (voir aussi le théorème [8.12] page 376).

Théorème 8.13 $(\mathbb{Z}, +\ ,\ \centerdot, O)$ *designe un ensemble d'entiers relatifs et on note* $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{\nu \in \mathbb{Z} / \nu \geq 0\}$. *$X$ est un ensemble, et $(A_c[X, \mathbb{Z}], +)$ est le groupe des applications à support finis de X dans $\mathbb{Z}$, enfin $i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, A_c[X, \mathbb{Z}])$ est l'application de X dans $A_c[X, \mathbb{Z}]$ définie par*

$$i(x)(\lambda) = \begin{cases} 0 & si \quad \lambda \neq x \\ 1 & si \quad \lambda = x \end{cases}$$

Le couple $((A_c[X, \mathbb{Z}], +), i)$ est un groupe commutatif libre au-dessus de X.

Plus précisément pour tout groupe commutatif G et pour toute application f de X dans G l'application f_c de $A_c[X, \mathbb{Z}]$ dans G définie par

$$f_c(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho)} \rho(\lambda) f(\lambda)$$

est un morphisme de groupe et c'est l'unique morphisme de $A_c[X, \mathbb{Z}]$ dans G vérifiant

$$f = f_c \circ i$$

Preuve D'après le lemme [8.48] page 384 $(A_c[X, \mathbb{Z}]], +)$ est un groupe commutatif il suffit donc de vérifier (voir définition [8.46] page 371) que pour tout groupe commutatif G et pour toute application de X dans G il existe un unique morphisme $f_c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(A_c[X, \mathbb{Z}], G)$ vérifiant

$$f = f_c \circ i \ . \tag{8.103}$$

1 Preuve de l'existence

Pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, G)$ on considère l'application f_c de $A_c[X, \mathbb{Z}]$ dans G définie par

$$f_c(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho)} \rho(\lambda) f(\lambda)$$

Et on montre que f_c est un morphisme vérifiant (8.103).

1. D'abord on montre que f_c est un morphisme.

   Si $(\rho, \nu) \in A_c[X, \mathbb{Z}] \times A_c[X, \mathbb{Z}]$ alors

$$f_c(\rho + \nu) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho+\nu)} (\rho(\lambda) + \nu(\lambda)) f(\lambda)$$

   Si $v(\rho + \nu, f)$ est l'application de X dans G définie par

$$v(\rho + \nu, f)(\lambda) = (\rho(\lambda) + \nu(\lambda)) f(\lambda)$$

   alors

$$\mathrm{s}(v(\rho + \nu, f)) \subset \mathrm{s}(\rho + \nu) \subset \mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)$$

   ainsi l'égalité (8.99) page 385 montre que

$$f_c(\rho + \nu) = \sum_{\lambda \in (\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu))} (\rho(\lambda) + \nu(\lambda)) f(\lambda)$$

   de plus l'égalité (8.17) page 211 montre que $f_c(\rho+\nu)$ est la somme des termes S_0, S_1 et S_2 définis par

$$S_0 = \sum_{\lambda \in [\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)] \cap (\mathrm{s}(\rho))^c} (\rho(\lambda) + \nu(\lambda)) f(\lambda)$$

$$S_1 = \sum_{\lambda \in [\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)] \cap (\mathrm{s}(\nu))^c} (\rho(\lambda) + \nu(\lambda)) f(\lambda)$$

$$S_2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap \mathrm{s}(\nu)} (\rho(\lambda) + \nu(\lambda)) f(\lambda)$$

   A On montre $S_0 = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\nu) \cap (\mathrm{s}(\rho))^c} \nu(\lambda)) f(\lambda)$

   Puisque pour tout $\lambda \in [\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)] \cap (\mathrm{s}(\rho))^c$ on a

$$(\rho(\lambda) + \nu(\lambda)) f(\lambda) = \nu(\lambda) f(\lambda)$$

   l'égalité (8.101) page 385 montre que

$$\sum_{\lambda \in [\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)] \cap (\mathrm{s}(\rho))^c} (\rho(\lambda) + \nu(\lambda)) f(\lambda) = \sum_{\lambda \in [\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)] \cap (\mathrm{s}(\rho))^c} \nu(\lambda) f(\lambda)$$

   or $[\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)] \cap (\mathrm{s}(\rho))^c = \mathrm{s}(\nu) \cap (\mathrm{s}(\rho))^c$
   Une preuve similaire et la substitution $\rho \leftrightarrow \nu$ permet d'établir

$$S_1 = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu))^c} \rho(\lambda)) f(\lambda)$$

   B On montre $S_2 = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\nu) \cap (\mathrm{s}(\rho))} \rho(\lambda)) f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\nu) \cap (\mathrm{s}(\rho))} \nu(\lambda)) f(\lambda)$

D'après l'égalité (8.95) page 382

$$\forall\ \lambda \in X \quad (\rho(\lambda) + \nu(\lambda))f(\lambda) = \rho(\lambda)f(\lambda) + \nu(\lambda)f(\lambda)$$

ainsi l'égalité (8.23) page 212 montre que

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\nu) \cap (\mathrm{s}(\rho))} (\rho(\lambda) + \nu(\lambda))f(\lambda)) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\nu) \cap (\mathrm{s}(\rho))} \rho(\lambda)f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\nu) \cap (\mathrm{s}(\rho))} \nu(\lambda)f(\lambda)$$

C On montre $S_1 + S_2 = f_c(\rho) + \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu)} \nu(\lambda)f(\lambda)$

En effet les égalités

$$(\mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu))^c) \cap (\mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu)) = \varnothing \quad \text{et} \quad (\mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu))) \cup (\mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu))^c) = \mathrm{s}(\rho)$$

et l'égalité (8.15) page 211 montrent que

$$f_c(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu))^c} \rho(\lambda)f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap \mathrm{s}(\nu)} \rho(\lambda)f(\lambda) = S_1 + \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu))} \rho(\lambda)f(\lambda)$$

ainsi

$$f_c(\rho) = S_1 + \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu))} \rho(\lambda)f(\lambda)$$

et

$$f_c(\rho) + \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu))} \nu(\lambda)f(\lambda) = S_1 + S_2$$

D On montre $f_c(\rho + \nu) = f_c(\rho) + f_c(\nu)$

On a

$$S_1 + S_2 + S_0 = f_c(\rho) + \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu))} \nu(\lambda)f(\lambda) + \sum_{\lambda \in (\mathrm{s}(\rho))^c \cap (\mathrm{s}(\nu))} \nu(\lambda)f(\lambda)$$

et l'égalité (8.15) page 211 montre que

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu))} \nu(\lambda)f(\lambda) + \sum_{\lambda \in (\mathrm{s}(\rho))^c \cap (\mathrm{s}(\nu))} \nu(\lambda)f(\lambda) = f_c(\nu)$$

ainsi

$$f_c(\rho + \nu) = S_0 + S_1 + S_2 = f_c(\rho) + f_c(\nu) \ .$$

2. On vérifie $f = f_c \circ i$
   Mais puisque $\mathrm{s}(i(x)) = \{x\}$ on a

$$f_c(i(x)) = \sum_{\lambda \in \{x\}} i(x)(\lambda)f(\lambda) = i(x)(x)f(x) = f(x) \ .$$

2 Preuve de l'unicité

On montre que si u est un morphisme de $A_c[X, \mathbb{Z}]$ dans G vérifiant

$$\forall\ x \in X \quad u(i(x)) = f(x)$$

alors

$$\forall\ \rho \in A_c[X, \mathbb{Z}] \quad u(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho)} \rho(\lambda)f(\lambda) \ . \tag{8.104}$$

Soit $\rho \in A_c[X,\mathbb{Z}]$, si $\mathrm{s}(\rho) = \varnothing$ alors $\rho = 0$ et (8.104) est vérifiée . On peut donc supposer $\mathrm{s}(\rho) \neq \varnothing$. Si $\mathrm{Card}(\mathrm{s}(\rho)) = n+1$ on considère une bijection $k \mapsto x_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathrm{s}(\rho)$ et l'application $k \mapsto \rho_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans $A_c[X,\mathbb{Z}]$ définie par

$$\rho_k(\lambda) = \begin{cases} \rho(\lambda) & si \quad \lambda \in x(\mathbb{N}_k) \\ 0 & si \quad \lambda \notin x(\mathbb{N}_k) \end{cases}$$

et on montre

1. $\rho_0 = \rho(x_0)i(x_0)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$
$$\rho_{k+1} = \rho_k + \rho(x_{k+1})i(x_{k+1})$$
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$
$$u(\rho_k) = \sum_{j=0}^{k} \rho(x_j)f(x_j) \ .$$

Notons que l'assertion 1 est l'assertion

$$\rho_k = \sum_{j=0}^{k} \rho(x_j)i(x_j)$$

la somme étant prise dans le groupe $A_c[X,\mathbb{Z}]$.

1. On a
$$\rho(x_0)i(x_0)(\lambda) = \begin{cases} \rho(x_0) & si \quad \lambda = x_0 \\ 0 & si \quad \lambda \neq x_0 \end{cases}$$
puisque $x(\mathbb{N}_0) = \{x_0\}$ cela montre que $\rho_0 = \rho(x_0)i(x_0)$.
De même on vérifie que
$$\rho_k(\lambda) + \rho(x_{k+1})i(x_{k+1})(\lambda) = \begin{cases} \rho(x) & si \quad \lambda \in x(\mathbb{N}_k) \\ \rho(x_{k+1}) & si \quad \lambda = x_{k+1} \\ 0 & si \quad \lambda \notin x(\mathbb{N}_{k+1}) \end{cases}$$
et puisque $x(\mathbb{N}_{k+1}) = x(\mathbb{N}_k) \cup \{x_{k+1}\}$ on obtient
$$\rho_{k+1} = \rho_k + \rho(x_{k+1})i(x_{k+1})$$
2. On pose
$$U = \{k \in \mathbb{N}_n / u(\rho_k) = \sum_{j=0}^{k} \rho(x_j)f(x_j)\}$$
en suivant le lemme [5.10] page 111 on montre que $U = \mathbb{N}_n$ en vérifiant
— $0 \in U$
— $k \in U$ et $k < n \Rightarrow k+1 \in U$.
— Puisque $\rho_0 = \rho(x_0)i(x_0)$ et u est un morphisme l'égalité (8.93) page 378 montre que
$$u(\rho_0) = \rho(x_0)u(i(x_0))$$
et par hypothèse $u(i(x_0)) = f(x_0)$, par suite $0 \in U$
— Si $k \in U$ et $k < n$ alors puisque u est un morphisme et
$$\rho_{k+1} = \rho_k + \rho(x_{k+1})i(x_{k+1})$$
on obtient
$$u(\rho_{k+1}) = u(\rho_k) + \rho(x_{k+1})u(i(x_{k+1}))$$

ainsi, puisque $k \in U$ et $u(i(x_{k+1})) = f(x_{k+1})$

$$u(\rho_{k+1}) = \sum_{j=0}^{k} \rho(x_j)f(x_j) + \rho(x_{k+1})f(x_{k+1}) = \sum_{j=0}^{k+1} \rho(x_j)f(x_j)$$

c'est à dire $k+1 \in U$.

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et en particulier $n \in U$, par suite

$$u(\rho_n) = \sum_{j=0}^{n} \rho(x_j)f(x_j)$$

mais par définition $\rho_n = \rho$ d'où

$$u(\rho) = \sum_{j=0}^{n} \rho(x_j)f(x_j)$$

x étant une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathrm{s}(\rho)$ on obtient

$$u(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho)} \rho(\lambda)f(\lambda) = f_c(\rho)$$

■

En adaptant bêtement le lemme [8.38] page 349 on montre que toute famille de groupes commutatifs possède un coproduit.

8.8.4 *Coproduit d'une famille de groupes commutatif et groupe commutatif libre*

On est maintenant familier avec la notion de coproduit dans une catégorie :

Définition 8.49 *On note I et $\mathbb{U}$ des ensembles et $(X, \oplus, 0)$ une famille de groupes commutatifs indexés par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$.*
On appelle ***coproduit*** *de la famille $(X, \oplus, 0)$ dans la catégorie* [**grc**] *un couple $((P^0, *), f)$ où $(P^0, *)$ est un groupe commutatif et $f \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, P^0)$ vérifie la propriété suivante : pour tout groupe commutatif $(H, \diamond)$ et pour tout $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, H)$ il existe un unique morphisme de groupe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0, H)$ vérifiant*

$$g_i = h \circ f_i.$$

En d'autres termes, $((P^0, *), f)$ est un coproduit de $(X, \oplus, 0)$ si pour tout groupe commutatif $(H, \diamond)$ l'application φ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0, H)$ dans $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, H)$ définie par

$$\varphi(h)(i) = h \circ f_i$$

est bijective .

L'existence d'un coproduit d'une famille de groupes commutatifs est assurée par le lemme suivant.

Lemme 8.49 *On note I et $\mathbb{U}$ des ensembles, $(X, \oplus, 0)$ une famille de groupes commutatifs indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, enfin (Λ^0, f) est un coproduit dans* **ens** *de la famille $i \mapsto X_i$ et $((G_c(\Lambda^0), +), \kappa)$ est un groupe commutatif libre au-dessus de Λ^0.*

(i) Il existe une relation d'équivalence $L(f)$ sur $G_c(\Lambda^0)$ qui vérifie les propriétés suivantes

1. *$L(f)$ est compatible avec l'addition de $G_c(\Lambda^0)$.*
2. *Si $\big(G_c(\Lambda^0)/L(f)\ ,*\big)$ est le groupe quotient de $G_c(\Lambda^0)$ par $L(f)$ et π le morphisme canonique de $(G_c(\Lambda^0),+)$ dans $\big(G_c(\Lambda^0)/L(f),*\big)$ alors, pour tout $i\in I$ l'application h_i de X_i dans $G_c(\Lambda^0)/E(f)$ définie par*
$$h_i=\pi\circ\kappa\circ f_i$$
est un morphisme de groupes de $(X_i,\oplus_i)$ dans $\big(G_c(\Lambda^0)/L(f),*\big)$ ainsi $h:i\mapsto h_i$ est un élément de $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}\big(X_i,G_c(\Lambda^0)/L(f)\big)$

(ii)$\Big(\big(G_c(\Lambda^0)/L(f),*\big)\ ,h\Big)$ est un coproduit dans la catégorie **grc** *de $(X,\oplus,0)$.*

Preuve

(i)

0 sera l'élément neutre de $(G_c(\Lambda^0),+)$, de plus on note
- $\alpha_i:X_i\times X_i\mapsto G_c(\Lambda^0)\times G_c(\Lambda^0)$ l'application définie par
$$\alpha_i(x,y)=\begin{cases}(\kappa(f_i(x\oplus_i y))\ ,\kappa(f_i(x))+\kappa(f_i(y)) & si\quad x\neq 0_i \text{ et } y\neq 0_i\\ (\kappa(f_i(0_i)),0) & si\quad x=0_i\\ (0,\kappa(f_i(0_i))) & si\quad y=0_i\end{cases}$$
- $$A=\bigcup_{i\in I}\mathrm{im}(\alpha_i)\ ,$$
- $L(f)$ la relation d'équivalence compatible avec la loi de $G_c(\Lambda^0)$ engendrée par A (voir définition [8.13] page 240)

Le lemme [8.27] page 298 permet d'affirmer que l'ensemble quotient $G_c(\Lambda^0)/L(f)$ peut-être muni d'une structure de groupe commutatif pour laquelle l'application canonique π est un morphisme.On montre que pour tout $i\in I$ h_i est un morphisme de $(X_i,\oplus_i)$ dans $(G_c(\Lambda^0)/E(f),*)$.
Si $i\in I$ et $(x,y)\in X_i\times X_i$ alors
$$(\kappa(f_i(x\oplus_i y))\ ,\kappa(f_i(x))+\kappa(f_i(y)))\in A$$
par suite
$$h_i(x\oplus_i y)=\pi(\kappa(f_i(x\oplus_i y)))=\pi[\kappa(f_i(x))+\kappa(f_i(y)]\ ,$$
π étant un morphisme on a
$$\pi[\kappa(f_i(x))+\kappa(f_i(y))]=\pi\,(\kappa(f_i(x))*\pi(\kappa(f_i(y)))$$
ainsi
$$h_i(x\oplus_i y)=\pi(\kappa(f_i(x))*\pi(\kappa(f_i(y)))=h_i(x)*h_i(y).$$

(ii)

Il s'agit de montrer que pour tout groupe commutatif $(H,,\diamond)$ et pour tout
$$g\in\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i,H)$$
il existe un unique $g^*\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_c(\Lambda^0)/L(f),H)$ vérifiant :
$$\forall\ i\in I\qquad g_i=g^*\circ h_i$$

Preuve de l'existence

Soit $g\in\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i,H)$, alors

— par définition d'un coproduit dans **ens** il existe $g_e \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda^0, H)$ vérifiant :

$$\forall\, i \in I \qquad g_i = g_e \circ f_i$$

— par définition d'un groupe libre il existe $g_c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_c(\Lambda^0), H)$ vérifiant :

$$g_e = g_c \circ \kappa$$

ainsi on obtient

$$\forall\, i \in I \qquad g_i = g_c \circ \kappa \circ f_i \tag{8.105}$$

— on veut maintenant montrer qu'il existe $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_c(\Lambda^0)/L(f), H)$ vérifiant :

$$g_c = g^* \circ \pi.$$

D'après le lemme [8.14] page 238 il suffit de montrer :

$$(u, v) \in A \Rightarrow g_c(u) = g_c(v)$$

et cela provient du fait que pour tout $i \in I$ g_i est un morphisme. En effet, si $(u, v) \in A$ il existe $i \in I$ tel que $(u, v) \in \mathrm{im}(\alpha_i)$, par suite il existe $i \in I$ et $(x, y) \in X_i \times X_i$ tel que

$$\alpha_i(x, y) = (u, v)$$

1. Si $x \neq 0_i$ et $y \neq 0_i$ alors $u = \kappa(f_i(x \oplus_i y))$ et $v = \kappa(f_i(x)) + \kappa(f_i(y))$ ainsi,

   $$g_c(u) = g_c(\kappa(f_i(x \oplus_i y)) = g_c \circ \kappa \circ f_i(x \oplus_i y)$$

   et par (8.105) on a

   $$g_c \circ \kappa \circ f_i = g_i$$

   puisque $g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, H)$,

   $$g_c(u) = g_e \circ \kappa \circ f_i(x \oplus_i y) = g_i(x \oplus_i y) = g_i(x) \diamond g_i(y)$$

   et

   $$g_c(v) = g_c(\kappa(f_i(x) + \kappa(f_i(y))$$

   et par construction g_c est un morphisme de $(G_c(\Lambda^0), +)$ dans $(H, \diamond)$ par suite

   $$g_c(\kappa(f_i(x) + \kappa(f_i(y)) = g_c(\kappa(f_i(x)) \diamond g_c(\kappa(f_i(y)) = g_i(x) \diamond g_i(y)$$

   ce qui montre que

   $$g_c(u) = g_c(v).$$

2. Si $x = 0_i$ alors $u = \kappa(f_i(0_i))$ et $v = 0$ ainsi

   $$g_c(u) = g_e \circ \kappa \circ f_i(0_i) = g_i(0_i)$$

   puisque $g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(X_i, H)$, on obtient, si ε est l'élément neutre de $(H, \diamond)$, $g_c(u) = g_i(0_i) = \varepsilon$. De même, puisque $g_c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G(\Lambda^0), H)$ on obtient $g_c(v) = g_c(0) = \varepsilon$ par suite on a encore

   $$g_c(u) = g_c(v).$$

3. Le cas $y = 0_i$ est similaire au cas $x = 0_i$ et permet aussi de conclure

   $$g_c(u) = g_c(v).$$

Ainsi il existe un morphisme $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_c(\Lambda^0)/L(f), H)$ vérifiant

$$g_c = g^* \circ \pi$$

et (8.105) s'écrit

$$\forall\ i \in I\ g_i = g_c \circ \kappa \circ f_i = g^* \circ \pi \circ \kappa \circ f_i = g^* \circ h_i.$$

Preuve de l'unicité

Si $(u, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_c(\Lambda^0)/L(f), H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_c(\Lambda^0)/L(f), H)$ vérifient

$$g_i = u \circ h_i = u \circ \pi \circ \kappa \circ f_i = v \circ h_i = v \circ \pi \circ \kappa \circ f_i$$

alors les applications

$$g_{e,u} = u \circ \pi \circ \kappa \qquad \text{et} \qquad g_{e,v} = v \circ \pi \circ \kappa$$

sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda^0, H)$ qui vérifient

$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g_{e,u} \circ f_i = g_{e,v} \circ f_i$$

ainsi, par définition d'un coproduit d'une famille d'ensembles $g_{e,u} = g_{e,v}$. Enfin les morphismes $g_{c,u}$ et $g_{c,v}$ définis par

$$g_{c,u} = u \circ \pi \qquad \text{et} \qquad g_{c,v} = v \circ \pi$$

sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_c(\Lambda^0), H)$ qui vérifient

$$g_{c,u} \circ \kappa = g_{e,u} = g_{e,v} = g_{c,v} \circ \kappa$$

ainsi, par définition d'un groupe libre $g_{c,u} = g_{c,v}$ d'où

$$u \circ \pi = v \circ \pi$$

π étant surjective cela entraîne $u = v$. ■

Comme dans le cas des groupes commutatifs libre on a une version un peu plus constructive des coproduits dans **grc** en utilisant le formalisme des sommes finies.

8.8.5 *Coproduit d'une famille de groupes commutatifs et sommes finies*

Si I et $\mathbb{U}$ sont des ensembles et $(G, \oplus, 0)$ est une famille de groupes commutatifs indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ on peut définir le coproduit de $(G, \oplus, 0)$ à partir du support des éléments du produit cartésien $\prod_{i \in I} G_i$.

Définition 8.50 *On note I et $\mathbb{U}$ des ensembles et $(G, \circledast, e)$ est une famille de groupes indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$*

1. *Si $\rho \in \prod_{i \in I} G_i$ on appelle **support** de l'application ρ le sous-ensemble de I défini par*

$$\mathrm{s}(\rho) = \{i \in I / \rho_i \neq e_i\}$$

2. *L'ensemble*

$$K_c[I, (G, \circledast, e)] = \{\rho \in \prod_{i \in I} G_i /\ \mathrm{s}(\rho) \in \mathcal{F}(I)\}$$

est appelé l'ensemble des applications à support fini de la famille $(G, \circledast, e)$

Notons que, lorsque la famille est composée d'un seul groupe G :

$$i \in I \Rightarrow G_i = G$$

alors $\prod_{i \in I} G_i = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, G)$ ainsi cette définition est compatible avec la définition [8.48] page 384.

Dans ce paragraphe, si $(G, \oplus, 0)$ est une famille de groupes commutatifs on munit systématiquement le produit cartésien $\prod_{i \in I} G_i$ de la loi de groupe (voir remarque [8.1] page 335)

$$(\rho + \tau)_i = \rho_i \oplus_i \tau_i$$

Dans le théorème qui suit on a plus ou moins besoin de distinguer les groupes dans lesquels on somme. Ainsi si $(G, \oplus\ , 0)$ est une famille de groupes commutatifs on notera $\sum$ la somme sur le groupe $\prod_{i \in I} G_i$ et $\sum^{G_i}$ la somme sur le groupe G_i.

Théorème 8.14 *On note I et $\mathbb{U}$ des ensembles, $(\mathbb{Z}, +, \boldsymbol{.}\ , O)$ un ensemble d'entiers relatifs, de plus on note $\mathbb{N} = \{\nu \in \mathbb{Z} / \nu \geq 0\}$. $(G, \oplus, 0)$ est une famille de groupes commutatifs indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$.*

(i) Si X est un ensemble, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, \prod_{i \in I} G_i)$ et tout sous-ensemble fini A de X

$$\left(\sum_{x \in A} f(x) \right)(j) = \sum_{x \in A}^{G_j} f(x)(j) \tag{8.106}$$

(ii) l'ensemble $K_c[I, (G, \oplus, 0)]$ des applications à support fini de $(G, \oplus, 0)$ est un sous-groupe de $\prod_{i \in I} G_i$.

(iii) Si $f \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(G_i, \prod_{i \in I} G_i)$ est définie par

$$f_i(x)(j) = \begin{cases} x & si \quad i = j \\ 0_j & si \quad j \neq i \end{cases}$$

alors f possède les propriétés suivantes :

1. *Pour tout $i \in I$ $\mathrm{im}(f_i) \subset K_c[I, (G, \oplus\ , 0)]$*
2. *Pour tout $i \in I$ f_i est un morphisme du groupe G_i dans le groupe $K_c[I, (G, \oplus\ , 0)]$ c'est à dire :*

$$f \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_i, K_c[I, (G, \oplus, 0)])$$

3. *Pour tout $\rho \in K_c[I, (G, \oplus\ , 0)]$ et tout $j \in I$*

$$\rho_j = \sum_{i \in \mathrm{s}(\rho)}^{G_j} f_i(\rho_i)(j)$$

Ainsi

$$\rho = \sum_{i \in \mathrm{s}(\rho)} f_i(\rho_i) \tag{8.107}$$

(iv) $((K_c|I, (G, \oplus\ , 0)], +), f)$ est un coproduit de $(G, \oplus\ , 0)$

Preuve

(i)

Si $A = \varnothing$ on a
$$\sum_{x \in A} h(x) = 0$$
et
$$\sum_{x \in A}^{G_j} h(x)(j) = 0_j$$
Si $\mathrm{Card}(A) = n + 1$ alors par définition (voir lemme [8.5] page 209) pour toute bijection $k \mapsto x_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans A
$$\sum_{x \in A} h(x) = \sum_{k=0}^{n} h(x_k) \quad \text{et} \quad \sum_{x \in A}^{G_j} h(x)(j) = \sum_{k \in \mathbb{N}_n}^{G_j} h(x_k)(j)$$
On pose
$$U = \{p \in \mathbb{N}_n / \forall\ j \in I \quad \left(\sum_{k=0}^{p} h(x_k)\right)(j) = \sum_{k \in \mathbb{N}_p}^{G_j} h(x_k)(j)\}$$
en suivant le lemme [5.10] page 111 on montre que $U = \mathbb{N}_n$ en montrant

1. $0 \in U$
2. $[p \in U \quad \text{et} \quad p < n] \Rightarrow p + 1 \in U$

L'assertion $0 \in U$ provient des égalités
$$\sum_{k=0}^{0} h(x_k) = h(x_0) \quad \text{et} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}_0}^{G_j} h(x_k)(j) = h(x_0)(j)$$
Si $p \in U$ et $p < n$ alors, par définition de l'addition sur $\prod_{i \in I} G_i$
$$\left(\sum_{k=0}^{p+1} h(x_k)\right)(j) = \left(\sum_{k=0}^{p} h(x_k)) + h(x_{p+1})\right)(j) = \left(\sum_{k=0}^{p} h(x_k)\right)(j) \oplus_j h(x_{p+1})(j)$$
puisque $p \in U$ on obtient
$$\left(\sum_{k=0}^{p+1} h(x_k)\right)(j) = \sum_{k \in \mathbb{N}_p}^{G_j} h(x_k)(j) \oplus_j h(x_{p+1})(j)$$
et puisque
$$\sum_{k \in \mathbb{N}_p}^{G_j} h(x_k)(j) \oplus_j h(x_{p+1})(j) = \sum_{k \in \mathbb{N}_{p+1}}^{G_j} h(x_k)(j)$$
on obtient
$$\left(\sum_{k=0}^{p+1} h(x_k)\right)(j) = \sum_{k \in \mathbb{N}_{p+1}}^{G_j} h(x_k)(j)$$
ainsi $p + 1 \in U$ et $U = \mathbb{N}_n$.

(ii)

1. $\underline{(\rho,\nu) \in K_c[I,(G,\oplus\ ,0) \times K_c[I,(G,\oplus\ ,0)]] \Rightarrow \rho+\nu \in K_c[I,(G,\oplus\ ,0)]}$

   On montre que si $(\rho,\nu) \in K_c[I,(G,\oplus\ ,0)] \times K_c[I,(G,\oplus\ ,0)]$ alors
$$\mathrm{s}(\rho+\nu) \subset \mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)$$
   $\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)$ étant fini comme réunion de deux ensembles finis, cela montre que $\mathrm{s}(\rho+\nu)$ est fini comme sous-ensemble d'un ensemble fini. Or on a
$$i \in (\mathrm{s}(\rho))^c \cap (\mathrm{s}(\nu))^c \Rightarrow \rho_i = \nu_i = 0_i \Rightarrow \rho_i + \nu_i = 0_i \Rightarrow i \in (\mathrm{s}(\rho+\nu))^c$$
   ainsi le passage aux complémentaires donne
$$\mathrm{s}(\rho+\nu) \subset \mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)\ .$$
2. $\underline{\rho \in K_c[I,(G,\oplus\ ,0)] \Rightarrow -\rho \in K_c[I,(G,\oplus\ ,0)]}$

   On a
$$i \in \mathrm{s}(\rho) \Leftrightarrow \rho_i \neq 0_i \Leftrightarrow -\rho_i \neq 0_i$$
   par suite $\mathrm{s}(\rho) = \mathrm{s}(-\rho)$
3. On a $\mathrm{s}(0) = \varnothing$ par suite $0 \in K_c[I,(G,\oplus\ ,0)]$.

(iii)

1. Si $\rho \in \mathrm{im}(f_i)$ alors il existe $x \in G_i$ tel que $\rho = f_i(x)$ par suite
$$\rho_j = f_i(x)(j) = \begin{cases} x & si \quad i=j \\ 0_j & si \quad j \neq i \end{cases}$$
   et $\mathrm{s}(\rho) \subset \{i\}$ (remarquer que si $x = 0_i$ on a $\mathrm{s}(\rho) = \varnothing$)
2. Par définition de l'addition sur $\prod_{i\in I} G_i$ on a, pour tout $(x,y) \in G_i \times G_i$
$$[f_i(x)+f_i(y)](j) = f_i(x)(j) \oplus_j f_i(y)(j) = \begin{cases} x \oplus_i y & si \quad i=j \\ 0_j & si \quad j \neq i \end{cases}$$
   et par définition de f_i on a
$$f_i(x \oplus_i y)(j) = \begin{cases} x \oplus_i y & si \quad i=j \\ 0_j & si \quad j \neq i \end{cases}$$
   ce qui montre que $f_i(x \oplus_i y) = f_i(x) + f_i(y)$. Enfin la définition de f_i montre que $f_i(0_i) = 0$.
3. Pour tout $j \in I$ l'application $i \mapsto v_i$ de I dans G_j définie par
$$v_i = f_i(\rho_i)(j)$$
   vérifie $\mathrm{s}(v) \subset \{j\}$ ainsi l'égalité (8.98) page 384 montre que
$$\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)}^{G_j} v_i = \begin{cases} f_j(\rho_j)(j) & si \quad j \in \mathrm{s}(\rho) \\ 0 & si \quad j \notin \mathrm{s}(\rho) \end{cases} = \begin{cases} \rho_j & si \quad j \in \mathrm{s}(\rho) \\ 0 & si \quad j \notin \mathrm{s}(\rho) \end{cases}$$
   puisque $\rho_j = 0$ si $j \notin \mathrm{s}(\rho)$ on obtient
$$\forall\ j \in I \quad \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)}^{G_j} f_i(\rho_i)(j) = \rho_j$$

Enfin d'après (8.106) page 396 on a

$$\forall\ j \in I \qquad \left(\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)} f_i(\rho_i)\right)(j) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)}^{G_j} f_i(\rho_i)(j)$$

par suite puisque

$$\forall\ j \in I \qquad \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)}^{G_j} f_i(\rho_i)(j) = \rho_j$$

on obtient

$$\forall\ j \in I \qquad \left(\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)} f_i(\rho_i)\right)(j) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)}^{G_j} f_i(\rho_i)(j) = \rho_j$$

ainsi

$$\rho = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)} f_i(\rho_i)$$

(iv)

D'abord d'après (ii) $K_c[I,(G,\oplus\ ,0)]$ est un sous groupe du groupe commutatif $\prod_{i\in I} G_i$, Il suffit donc de vérifier que pour tout groupe commutatif $(H,+')$ et pour tout $g \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_i, H)$ il existe un unique morphisme

$$h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(K_c[I,(G,\oplus,\ 0)], H)$$

vérifiant

$$\forall\ i \in I \quad g_i = h \circ f_i\ . \tag{8.108}$$

1 Preuve de l'existence

Si $g \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(G_i, H)$ on considère l'application h de $K_c[I,(G,\oplus\ ,0)]$ dans H définie par

$$h(\rho) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)}^{H} g_i(\rho_i)$$

et on montre que h est un morphisme vérifiant (8.108)

1. <u>D'abord on montre que h est un morphisme .</u>

   Si $(\rho,\nu) \in K_c[I,(G,\oplus,\ 0)] \times K_c[I,(G,\oplus,\ 0)]$ alors

   $$h(\rho+\nu) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho+\nu)}^{H} g_i(\rho_i \oplus_i \nu_i)$$

   Si $i \mapsto v_i$ est l'application de I dans H définie par $v_i = g_i(\rho_i \oplus_i \nu_i)$ alors, puisque pour tout $i \in I$ on a $g_i(0_i) = 0'$ (on note $0'$ l'élément neutre de H),

   $$\mathrm{s}(v) \subset \mathrm{s}(\rho+\nu) \subset \mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)$$

   l'égalité (8.99) page 385 montre que

   $$\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho+\nu)}^{H} v_i = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cup \mathrm{s}(\nu)}^{H} v_i$$

l'égalité (8.17) page 211 entraîne donc

$$\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho+\nu)}^{H} v_i = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{H} v_i +' \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} v_i +' \sum_{i\in(\mathrm{s}(\rho))^c\cup \mathrm{s}(\nu)}^{H} v_i$$

A On montre $\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{H} v_i = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{H} g_i(\rho_i)$

Puisque pour tout $i \in \mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu)^c)$ on a

$$v_i = g_i(\rho_i \oplus_i \nu_i) = g_i(\rho_i)$$

on obtient d'après l'égalité (8.101) page 385

$$\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{H} v_i = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{H} g_i(\rho_i)$$

de même on obtient

$$\sum_{i\in(\mathrm{s}(\rho))^c\cup \mathrm{s}(\nu)}^{H} v_i = \sum_{i\in(\mathrm{s}(\rho))^c\cup \mathrm{s}(\nu)}^{H} g_i(\nu_i)$$

et

$$h(\rho+\nu) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{H} g_i(\rho_i) +' \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} v_i +' \sum_{i\in(\mathrm{s}(\rho))^c\cup \mathrm{s}(\nu)}^{H} g_i(\nu_i) \tag{8.109}$$

B On montre $\displaystyle\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} v_i = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} g_i(\rho_i) +' \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} g_i(\nu_i)$

g_i étant un morphisme de G_i dans $(H, +')$ on a

$$\forall\ i \in I \quad g_i(\rho_i \oplus_i \nu_i) = g_i(\rho_i) +' g_i(\nu_i)$$

ainsi par (8.101) page 385 on obtient

$$\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} g_i(\rho_i \oplus_i \nu_i) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} (g_i(\rho_i) +' g_i(\nu_i))$$

et par (8.23) page 212

$$\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} g_i(\rho_i \oplus_i \nu_i) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} g_i(\rho_i) +' \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} g_i(\nu_i)$$

Ainsi un regroupement des termes de (8.109) et **B** montre que $h(\rho+\nu)$ est la somme des termes S_0 et S_1 définis par

$$S_0 = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{H} g_i(\rho_i) +' \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} g_i(\rho_i)$$

et

$$S_1 = \sum_{i\in \mathrm{s}(\nu)\cap((\mathrm{s}(\rho))^c}^{H} g_i(\nu_i) +' \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} g_i(\nu_i)$$

et (8.15) page 211 montre que

$$S_0 = h(\rho) \quad \text{et} \quad S_1 = h(\nu)\ .$$

d'où

$$h(\rho+\nu) = S_0 + S_1 = h(\rho) +' h(\nu)\ .$$

2. <u>Ensuite on montre $\forall\ i \in I \quad g_i = h \circ f_i$</u>

   Il s'agit de montrer que pour tout $i \in I$ et $x \in G_i$

$$h(f_i(x)) = \sum_{k\in \mathrm{s}(f_i(x))}^{H} g_k(f_i(x)(k)) = g_i(x)$$

   mais l'application $k \mapsto v_k$ de I dans H définie par

$$v_k = g_k(f_i(x)(k))$$

   vérifie $\mathrm{s}(v) \subset \{i\}$, en effet puisque g_k est un morphisme de G_k dans H on a

$$k \neq i \Rightarrow f_i(x)(k) = 0_k \Rightarrow g_k(f_i(x)(k)) = g_k(0_k) = 0_h$$

   plus précisément on a $x \in \mathrm{Ker}(g_i) \Rightarrow \mathrm{s}(v) = \varnothing$ et $x \notin \mathrm{Ker}(g_i) \Rightarrow \mathrm{s}(v) = \{i\}$ d'où
   — Si $x \in \mathrm{Ker}(g_i)$ alors

$$h(f_i(x)) = \sum_{k\in\varnothing}^{H} g_k(f_i(x)(k)) = 0_h = g_i(x)$$

   — si $x \notin \mathrm{Ker}(g_i)$ alors

$$h(f_i(x)) = \sum_{k\in\{i\}}^{H} g_k(f_i(x)(k)) = g_i(f_i(x)(i)) = g_i(x)\ .$$

2 Preuve de l'unicité

On montre l'unicité en montrant que tout morphisme u de $K_c[I, (G, \oplus, 0)]$ dans le groupe H vérifie

$$\forall\ \rho \in K_c[I, (G, \oplus, 0)] \qquad u(\rho) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)}^{H} u(f_i(\rho_i)) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)}^{H} u \circ f_i(\rho_i) \tag{8.110}$$

En effet, si $\rho = 0$ l'égalité (8.110) s'écrit $u(0) = 0_h$ qui provient du fait que u est un morphisme. On peut donc supposer $\mathrm{s}(\rho) \neq \varnothing$, d'après (8.107) page 396 on a

$$\rho = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)} f_i(\rho_i)$$

ainsi, si $\mathrm{Card}(\mathrm{s}(\rho)) = n + 1$ pour toute bijection $k \mapsto i_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathrm{s}(\rho)$ on a

$$\rho = \sum_{k=0}^{n} f_{i_k}(\rho_{i_k})$$

On pose

$$U = \left\{ p \in \mathbb{N}_n / u(\sum_{k=0}^{p} f_{i_k}(\rho_{i_k})) = \sum_{k\in\mathbb{N}_p}^{H} u(f_{i_k}(\rho_{i_k})) \right\}$$

et en suivant le lemme [5.10] page 111 on montre que $U = \mathbb{N}_n$ en vérifiant

1. $0 \in U$
2. $[p \in U \quad \text{et} \quad p < n] \Rightarrow p + 1 \in U$

L'assertion $0 \in U$ étant claire $[u(f_{i_0}(\rho_{i_0})) = u(f_{i_0}(\rho_{i_0}))]$ on montre

$$[p \in U \quad \text{et} \quad p < n] \Rightarrow p+1 \in U \ .$$

Si $p < n$ alors

— par définition de $\sum$

$$u[\sum_{k=0}^{p+1} f_{i_k}(\rho_{i_k})] = u[\sum_{k=0}^{p} f_{i_k}(\rho_{i_k}) + f_{i_{p+1}}(\rho_{i_{p+1}})]$$

— puisque u est un morphisme

$$u[\sum_{k=0}^{p+1} f_{i_k}(\rho_{i_k}] = u[\sum_{k=0}^{p} f_{i_k}(\rho_{i_k})] +' u(f_{i_{p+1}}(\rho_{i_{p+1}}))$$

— puisque $p \in U$

$$u(\sum_{k=0}^{p} f_{i_k}(\rho_{i_k})) = \sum_{k\in\mathbb{N}_p}^{H} u(f_{i_k}(\rho_{i_k}))$$

ainsi

$$u(\sum_{k=0}^{p+1} f_{i_k}(\rho_{i_k})) = \sum_{k\in\mathbb{N}_p}^{H} u(f_{i_k}(\rho_{i_k})) +' u(f_{i_{p+1}}(\rho_{i_{p+1}}))$$

— par définition de $\sum^{H}$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_p}^{H} u(f_{i_k}(\rho_{i_k})) +' u(f_{i_{p+1}}(\rho_{i_{p+1}})) = \sum_{k\in\mathbb{N}_{p+1}}^{H} u(f_{i_k}(\rho_{i_k}))$$

par suite

$$u(\sum_{k=0}^{p+1} f_{i_k}(\rho_{i_k})) = \sum_{k\in\mathbb{N}_{p+1}}^{H} u(f_{i_k}(\rho_{i_k}))$$

et $p+1 \in U$.

En particulier $n \in U$ et

$$u(\rho) = u(\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)} f_i(\rho_i)) = u(\sum_{k=0}^{n} f_{i_k}(\rho_{i_k})) = \sum_{k\in\mathbb{N}_n}^{H} u(f_{i_k}(\rho_{i_k}))$$

Enfin, puisque $k \mapsto i_k$ est un bijection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathrm{s}(\rho)$ on obtient

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_n}^{H} u(f_{i_k}(\rho_{i_k})) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)}^{H} u(f_i(\rho_i))$$

L'égalité (8.110) montre que le seul morphisme vérifiant $u \circ f_i = g_i$ est le morphisme

$$h(\rho) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)}^{H} g_i(\rho_i) \ .$$

■

En particulier, lorsque I est fini, puisque $K_c[I, (G, \oplus,\ 0)] = \prod_{i\in I} G_i$ le groupe produit $\prod_{i\in I} G_i$ est à la fois un produit et un coproduit de la famille $(G, \oplus, 0)$. Si $(G, \oplus\ ,\ 0)$ est une famille de groupes commutatifs alors l'égalité (8.107) page 396 montre que

$$K_c[I, (G,\ \oplus\ ,\ 0)] = \mathbf{gr}\left(\bigcup_{i\in I} f_i(G_i)\right)$$

ainsi, dans le formalisme développé par lemme [8.29] page 304 on obtient

$$K_c[I, (G,\ \oplus\ ,\ 0)] = \left(\bigcup_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} f_i(G_i)\right)$$

de plus il est facile de vérifier

$$i \neq j \Rightarrow f_i(G_i) \cap \mathbf{gr}\left(\bigcup_{i\neq j} f_i(G_i)\right) = \{0\}$$

lorsque G est un groupe commutatif et $i \mapsto H_i$ est une famille de sous-groupes de G possédant ce genre de propriétés on peut identifier un coproduit de la famille H comme un sous-groupe de G.

8.8.6 *Coproduit d'une famille de sous-groupes d'un groupe commutatif et somme de sous-groupes*

Si $(G, +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre 0, I un ensemble et $i \mapsto H_i$ une application de l'ensemble I dans l'ensemble $\mathcal{G}(G)$ des sous-groupe de G la famille $(H, \oplus, 0)$ est définie par

$$\forall\ i \in I \quad \oplus_i = + \cap [(H_i \times H_i) \times G]$$

et

$$\forall\ i \in I \quad 0_i = 0$$

ainsi $\oplus_i$ est la restriction de la loi de G à $H_i \times H_i$, on notera encore $\oplus_i = +$, par suite $+$ est à la fois la loi du groupe $\prod_{i\in I} G_i$ et celle de G et 0 est à la fois l'élément neutre du groupe $\prod_{i\in I} G_i$ et celui de G.Le lemme qui suit utilise les résultats et notations du théorème [8.14] page 396. et des lemmes [8.29] page 304 et [8.30] page 306

Lemme 8.50 *On note I un ensemble et $(G, +)$ un groupe commutatif, $i \mapsto H_i$ une famille de sous-groupe de G indexée par I, $K_c[I, (H, \oplus,\ 0)]$ le sous-groupe de $\prod_{i\in I} H_i$ des applications à support fini.*

(i) Si $J \subset I$ est un sous-ensemble de I pour que

$$x \in \mathbf{gr}(\bigcup_{j\in J} H_j)$$

il faut et il suffit qu'il existe un sous-ensemble fini F de J et une application $\lambda \in \prod_{j\in F} H_i$ telle que

$$x = \sum_{j\in F} \lambda_j$$

(ii) Le coproduit $(K_c[I, (H, \oplus,\ 0)], f)$ possède les propriétés suivantes :

a

$$K_c[I,(H,\oplus,\ 0)] = \mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} f_i(H_i))$$

b *pour tout* $i \in I$

$$f_i(H_i) \cap \mathbf{gr}(\bigcup_{\{j\in I/j\neq i\}} f_j(H_j)) = \{0\}$$

(iii) L'application u *de* $K_c[I,(H,\oplus,\ 0)]$ *dans* G *définie par*

$$u(\rho) = \sum_{i\in s(\rho)}^{G} \rho_i$$

vérifie les propriétés suivantes

1. u *est un morphisme de* $K_c[I,(H,\ \oplus,\ 0)]$ *dans* G
2. u *est l'unique morphisme de* $K_c[I,(H,\ \oplus,\ 0)]$ *dans* G *vérifiant :*

$$\forall\ i \in I \quad u \circ f_i = id_{H_i}$$

3.

$$\operatorname{im}(u) = \mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i)$$

4. *Si* $q \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H_i, \mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i))$ *est définie par*

$$q_i(x) = id_{H_i}(x) = x$$

pour que $(\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i), q)$ *soit un coproduit de* $(H,\oplus,\ 0)$ *il faut et il suffit que*

$$\forall\ i \in I \quad H_i \cap \mathbf{gr}(\bigcup_{\{j\in I/j\neq i\}} H_j) = \{0\} \tag{8.111}$$

Preuve

(i)

D'après le lemme [8.30] page 306 on a

$$\mathbf{gr}(\bigcup_{j\in J} H_j) = \bigcup_{F\in\mathcal{F}(J)} \mathbf{gr}(\bigcup_{j\in F} H_j)$$

Ainsi, si $x \in \mathbf{gr}(\bigcup_{j\in J} H_j)$ il existe un sous-ensemble fini F de J (dépendant de x) tel que $x \in \mathbf{gr}(\bigcup_{j\in F} H_j)$.
On montre que l'application φ du groupe $\prod_{j\in F} H_j$ dans G définie par

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j\in F}^{G} \lambda_j$$

possède les propriétés suivantes

— φ est un morphisme, en effet, il est clair que $\varphi(0) = 0$ et l'égalité (8.23) page 212 montre que

$$\varphi(\lambda + \mu) = \sum_{i \in F}^{G} (\lambda_i + \mu_i) = \sum_{i \in F}^{G} \lambda_i + \sum_{i \in F}^{G} + \mu_i = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu)$$

par suite $\text{im}(\varphi)$ est un sous-groupe de G

— Pour tout $j \in F$ $H_j \subset \text{im}(\varphi)$. En effet si $x \in H_j$ et $\lambda \in \prod_{j \in F} H_j$ est définie par

$$\lambda_k = \begin{cases} x & si \quad k = j \\ 0 & si \quad k \neq j \end{cases}$$

alors $\varphi(\lambda) = x$ en particulier

$$\mathbf{gr}(\bigcup_{j \in F} H_j) \subset \text{im}(\varphi)$$

— Si K est un sous-groupe de G vérifiant $\bigcup_{j \in F} H_j \subset K$ alors

$$\text{im}(\varphi) \subset K$$

en effet, si $x \in \text{im}(\varphi)$ alors il existe $\lambda \in \prod_{j \in F} H_j$ tel que

$$x = \sum_{j \in F}^{G} \lambda_j$$

mais par hypothèse K est un sous-groupe de G vérifiant $\forall\ j \in F \quad \lambda_j \in K$, ainsi x est un élément de K comme somme fini d'éléments de K (voir lemme [8.47] page 380)

ceci montre que $\text{im}(\varphi) = \mathbf{gr}(\bigcup_{j \in F} H_j)$, en d'autres termes

$$\mathbf{gr}(\bigcup_{j \in F} H_j) = \{x \in G / \exists \lambda \in \prod_{j \in F} H_j : x = \sum_{j \in F}^{G} \lambda_j\}$$

(ii)

On rappelle que f est l'élément de $\prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbf{mon}}(H_i, K_c[I, (H, \oplus,\ 0)])$ défini par

$$f_i(x)(j) = \begin{cases} x & si \quad i = j \\ 0 & si \quad j \neq i \end{cases}$$

a D'abord d'après le théorème [8.14] page 396 $K_c[I, (H,\ \oplus,\ 0)]$ est un sous-groupe qui vérifie

$$\forall\ i \in I \quad f_i(H_i) \subset K_c[I, (H,\ \oplus,\ 0)]$$

par suite $\mathbf{gr}(\bigcup_{i \in I} f_i(H_i)) \subset K_c[I, (H,\ \oplus,\ 0)]$.

Ensuite on montre que tout sous-groupe K de $\prod_{i \in I} H_i$ vérifiant

$$\bigcup_{i \in I} f_i(H_i) \subset K$$

vérifie $K_c[I,(H,\oplus,\ 0)] \subset K$. Mais d'après l'égalité (8.107) page 396 Pour tout $\rho \in K_c[I,(H,\oplus,\ 0)]$,

$$\rho = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)} f_i(\rho_i)$$

et par hypothèse $i \in I \Rightarrow f_i(\rho_i) \in K$, ainsi tout élément de $K_c[I,(H,\oplus,\ 0)]$ est un élément de K comme somme fini d'éléments de K (voir lemme [8.47] page 380)

b On pose $\{i\}^c = \{j \in I/j \neq i\}$ si

$$\rho \in f_i(H_i) \cap \mathbf{gr}(\bigcup_{j\in\{i\}^c} f_j(H_j))$$

alors

1. L'assertion $\rho \in f_i(H_i)$ signifie qu'il existe $x \in H_i$ tel que $\rho = f_i(x)$ par suite $\mathrm{s}(\rho) \subset \{i\}$
2. d'après (i) l'assertion

   $$\rho \in \mathbf{gr}(\bigcup_{j\in\{i\}^c} f_j(H_j))$$

   entraîne qu'il existe un sous-ensemble fini A de $\{i\}^c$ et une application $x \in \prod_{j\in A} H_j$ vérifiant

   $$\rho = \sum_{j\in A} f_j(x_j)$$

   ainsi l'égalité (8.106) page 396 montre que

   $$\rho_i = \sum_{j\in A}^{H_i} f_j(x_j)(i)$$

   mais pour tout $j \in A$ on a $j \neq i$ par suite $f_j(x_j)(i) = 0_i = 0$, ainsi

   $$\rho_i = 0$$

   d'autre part si $j \neq i$ on a $\rho_j = f_i(x)(j) = 0_j = 0$

ainsi $\rho = 0$

(iii)

1. On montre que u est un morphisme

   Si $(\rho,\nu) \in K_c[I,(H,\oplus,\ 0)] \times K_c[I,(H,\oplus,\ 0)]$ alors

   $$u(\rho+\nu) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho+\nu)}^{G} (\rho_i + \nu_i)$$

   Si $i \mapsto v_i$ est l'application de I dans G définie par $v_i = \rho_i + \nu_i$ alors, puisque

   $$\mathrm{s}(v) = \mathrm{s}(\rho+\nu) \subset \mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\nu)$$

   l'égalité (8.99) page 385 montre que

   $$\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho+\nu)}^{G} v_i = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cup \mathrm{s}(\nu)}^{G} v_i$$

   l'égalité (8.17) page 211 entraîne donc

   $$\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho+\nu)}^{G} v_i = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{G} v_i + \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{G} v_i + \sum_{i\in (\mathrm{s}(\rho))^c\cup \mathrm{s}(\nu)}^{G} v_i$$

$$\mathbf{A} \text{ On montre } \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{G} v_i = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{G} \rho_i$$

Puisque pour tout $i \in \mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\nu)^c)$ on a

$$v_i = \rho_i + \nu_i = \rho_i$$

on obtient d'après l'égalité (8.101) page 385

$$\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{G} v_i = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{G} \rho_i$$

de même on obtient

$$\sum_{i\in (\mathrm{s}(\rho))^c\cup \mathrm{s}(\nu)}^{G} v_i = \sum_{i\in (\mathrm{s}(\rho))^c\cup \mathrm{s}(\nu)}^{G} \nu_i$$

et

$$u(\rho+\nu) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{G} \rho_i + \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{G} v_i + \sum_{i\in (\mathrm{s}(\rho))^c\cup \mathrm{s}(\nu)}^{G} \nu_i \tag{8.112}$$

$$\mathbf{B} \text{ On montre } \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{G} v_i = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{G} \rho_i + \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{G} \nu_i$$

c'est l'égalité (8.23) page 212 qui s'écrit

$$\sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{G} (\rho_i+\nu_i) = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{G} \rho_i + \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{G} \nu_i$$

Ainsi un regroupement des termes de (8.112) et **B** montre que $u(\rho+\nu)$ est la somme des termes S_0 et S_1 définis par

$$S_0 = \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\nu))^c}^{G} \rho_i + \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{H} \rho_i$$

et

$$S_1 = \sum_{i\in \mathrm{s}(\nu)\cap((\mathrm{s}(\rho))^c}^{G} \nu_i + \sum_{i\in \mathrm{s}(\rho)\cap \mathrm{s}(\nu)}^{G} \nu_i$$

et (8.15) page 211 montre que

$$S_0 = u(\rho) \quad \text{et} \quad S_1 = u(\nu)\ .$$

d'où

$$u(\rho+\nu) = S_0 + S_1 = u(\rho) + u(\nu)\ .$$

2. On montre $u \circ f_i = id_{H_i}$
   (a) Si $x \neq 0$ alors $\mathrm{s}(f_i(x)) = \{i\}$ par suite

   $$u(f_i(x)) = \sum_{j\in\{i\}}^{G} f_i(x)(j) = f_i(x)(i) = x$$

   (b) si $x = 0$ alors $f_i(x) = 0$ et $u(f_i(x)) = 0 = x$

   Enfin l'unicité provient du fait que $(K_c[I,(H,\oplus,\ 0)], f)$ est un coproduit de $(H,\oplus,\ 0)$

3. On montre $\mathrm{im}(u) = \mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i)$.
   (a) D'abord puisque u est un morphisme $\mathrm{im}(u)$ est un sous-groupe de G et *2.* montre

$$x \in H_i \Rightarrow x = u(f_i(x))$$

   par suite

$$\bigcup_{i\in I} H_i \subset \mathrm{im}(u)$$

   et

$$\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i) \subset \mathrm{im}(u)$$

   (b) Ensuite on montre que si K est un sous-groupe de G vérifiant $\bigcup_{i\in I} H_i \subset K$ alors $\mathrm{im}(u) \subset K$. Mais si $x \in \mathrm{im}(u)$ il existe $\rho \in K_c[I, (H, \oplus,\ 0)]$ tel que

$$x = \sum_{i\in s(\rho)} \rho_i$$

   et par hypothèse, puisque pour tout $i \in I$ on a $\rho_i \in H_i$,

$$i \in I \Rightarrow \rho_i \in K$$

   ainsi x est somme fini d'éléments de K, par suite $x \in K$.

4. (a) <u>D'abord on montre la partie « il suffit »</u>

   On montre que si $(H, \oplus,\ 0)$ vérifie l'égalité (8.111) page 404 alors u est un isomorphisme de $K_c[I, (H, \oplus,\ 0)]$ dans $\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i)$, D'après *3.* il reste à voir que u est injective. Mais si ρ est un élément non nul de $\mathrm{Ker}(u)$ tel $\rho_j \neq 0$ alors

$$\sum_{i\in s(\rho)}^{G} \rho_i = 0$$

   ainsi

$$\sum_{i\in s(\rho)\cap\{j\}^c}^{G} \rho_i = -\rho_j$$

   par suite

$$\rho_j \in H_j \cap \mathbf{gr}(\bigcup_{i\in\{j\}^c} H_i)$$

   et ceci contredit l'égalité (8.111). Ainsi $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ et u est injective. cela permet de montrer que $(\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i), q)$ est un coproduit de la catégorie **grc**. En effet, si $(K, +')$ est un groupe commutatif et

$$g \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H_i, K)$$

   alors il résulte du fait que $(K_c[I, (H, \oplus,\ 0)], f)$ est un coproduit qu'il existe un unique morphisme $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(K_c[I, (H, \oplus,\ 0)], K)$ vérifiant

$$g_i = g^* \circ f_i$$

ainsi $g^* \circ u^{-1}$ est un morphisme de $\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i)$ dans K qui vérifie

$$g_i = (g^* \circ u^{-1}) \circ (u \circ f_i)$$

et par *2.* on a $u \circ f_i = q_i$. Cela montre la première propriété du coproduit : pour tout $g \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H_i, K)$ il existe un morphisme $\hat{g}$ de $\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i)$ dans K vérifiant

$$g_i = \hat{g} \circ q_i$$

il reste à voir l'unicité. Mais si v et w sont des morphismes de $\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i)$ dans K vérifiant

$$g_i = v \circ q_i \quad \text{et} \quad g_i = w \circ q_i$$

alors $v \circ u$ et $w \circ u$ sont des morphismes de $K_c[I, (H, \oplus,\ 0)]$ dans K qui vérifient, puisque d'aprés *2.* $f_i = u^{-1} \circ q_i$,

$$g_i = (v \circ u) \circ (u^{-1} \circ q_i) = (v \circ u) \circ f_i$$

et

$$g_i = (w \circ u) \circ (u^{-1} \circ q_i) = (w \circ u) \circ f_i$$

$(K_c[I, (H, \oplus,\ 0)], f)$ étant un coproduit de $(H, \oplus,\ 0)$ cela entraîne $v \circ u = w \circ u$, puisque u est surjective on obtient $v = w$.

(b) Ensuite on montre la partie ≪ il faut ≫

On montre que si $(\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i), q)$ est un coproduit alors u est un isomorphisme. Puisque $f \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(H_i, K_c[I, (H, \oplus,\ 0)])$ il existe, par définition d'un coproduit, un unique morphisme v de $\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i)$ dans $K_c[I, (H, \oplus,\ 0)]$ vérifiant

$$\forall\ i \in I \quad f_i = v \circ q_i$$

par suite

$$\forall\ i \in I \quad q_i = u \circ f_i = (u \circ v) \circ q_i$$

Mais si φ est l'identité de $\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i)$ alors (encore la définition d'un coproduit) φ est le seul morphisme de $\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i)$ dans $\mathbf{gr}(\bigcup_{i\in I} H_i)$ vérifiant

$$\forall\ i \in I \quad \varphi \circ q_i = q_i$$

par suite

$$u \circ v = \varphi$$

cela montre que v est injective

$$v(x) = v(y) \Rightarrow x = u(v(x)) = u(v(y)) = y\ .$$

On montre que v est surjective. Mais $\mathrm{im}(v)$ est un sous- groupe de $K_c[I, (H, \oplus,\ 0)]$ tel que

$$\forall\ i \in I \quad f_i(H_i) \subset \mathrm{im}(v)$$

puisque

$$\rho \in f_i(H_i) \Rightarrow \exists x \in H_i : \rho = f_i(x)$$

et l'égalité $f_i = v \circ q_i$ montre que $\rho = f_i(x) = v(q_i(x))$ ainsi $\mathrm{im}(v)$ est un sous groupe de $K_c[I, (H, \oplus,\ 0)]$ vérifiant

$$\bigcup_{i \in I} f_i(H_i) \subset \mathrm{im}(v)$$

et puisque $K_c[I, (H, \oplus,\ 0)] = \mathbf{gr}(\bigcup_{i \in I} f_i(H_i))$ on obtient

$$K_c[I, (H, \oplus,\ 0)] = \mathrm{im}(v)$$

ainsi v est un isomorphisme de $\mathbf{gr}(\bigcup_{i \in I} H_i)$ dans $K_c[I, (H, \oplus,\ 0)]$, l'égalité $u \circ v = \varphi$ montre alors que u est un isomorphisme de $K_c[I, (H, \oplus,\ 0)]$ dans $\mathbf{gr}(\bigcup_{i \in I} H_i)$. Cela entraîne

$$\forall\ i \in I \quad H_i \cap \mathbf{gr}(\bigcup_{j \in \{i\}^c} H_j) = \{0\}$$

En effet, si x est un élément non nul de $H_i \cap \mathbf{gr}(\bigcup_{j \in \{i\}^c} H_j)$ alors d'après (i) il existe un sous-ensemble fini F de $\{i\}^c$ et une application $\lambda \in \prod_{j \in F} H_j$ vérifiant

$$x = \sum_{j \in F}^{G} \lambda_j$$

L'application $\rho \in K_c[I, (H, \oplus,\ 0)]$ définie par

$$\rho_j = \begin{cases} -x & si \quad j = i \\ \lambda_j & si \quad j \in F \\ 0 & si \quad j \notin F \cup \{i\} \end{cases}$$

vérifie puisque $F \cap \{i\} = \varnothing$ et $\mathrm{s}(\rho) \subset F \cup \{i\}$

$$u(\rho) = \sum_{j \in \mathrm{s}(\rho)}^{G} \rho_j = \sum_{j \in F \cup \{\imath\}}^{G} \rho_j = \sum_{j \in F}^{G} \lambda_j + \rho_i = 0$$

ce qui contredit le fait que u est un isomorphisme de $K_c[I, (G, \oplus,\ 0)]$ dans $\mathbf{gr}(\bigcup_{j \in I} H_j)$.

■

Les familles de sous-groupes d'un groupe commutatif vérifiant l'égalité (8.111) page 404 ont droit à une définition.

Définition 8.51 *On note I un ensemble $(G, *)$ un groupe commutatif où la loi $*$ est notée additivement $* : (x, y) \mapsto x + y$, $H : i \mapsto H_i$ une famille de sous-groupes de G. On dit que la famille H est en* ***somme directe*** *si*

$$\forall\ i \in I \quad H_i \cap \mathbf{gr}(\bigcup_{j \in \{j \in I / j \neq i\}} H_j) = \{0\}$$

On note alors

$$\bigoplus_{i \in I} H_i = \mathbf{gr}(\bigcup_{i \in I} H_i)$$

On a vu que l'existence de coproduits de familles dans la catégorie **grc** était une conséquence de l'existence de groupes libres au-dessus d'ensembles (voir lemme [8.49] page 392), une redondance intéréssante est d'exprimer l'ensemble sous-jacent à un groupe commutatif libre comme coproduit d'une famille de sous-groupes d'un groupe libre.

8.8.7 *Partie génératrice, partie libre, base d'un groupe commutatif*

Le théorème [8.13] page 388 montre que si X est un ensemble, $(A_c[X,\mathbb{Z}],+)$ est le groupe des applications à support fini de X dans $\mathbb{Z}$ et i l'application de X dans $A_c[X,\mathbb{Z}]$ définie par

$$i(x)(\lambda) = \begin{cases} 1 & si \quad \lambda = x \\ 0 & si \quad \lambda \neq x \end{cases}$$

alors $((A_c[X,\mathbb{Z}],+),\ i)$ est un groupe commutatif libre au-dessus de X. Le lemme qui suit est quasiment une conséquence du lemme [8.50] page 403

Lemme 8.51 *$(\mathbb{Z},+,\textbf{.},\ O)$ désigne un ensemble d'entiers relatifs et $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{\nu \in \mathbb{Z}/\nu \geq 0\}$. $(G,+_g)$ est un groupe commutatif, X est un sous-ensemble* non vide *de G et $A_c[X,\mathbb{Z}]$ est l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{Z}$ à support fini. Enfin $\jmath$ est l'application de X dans $\mathbf{gr}(X)$ définie par*

$$\jmath(x) = x$$

(i) L'application $x \mapsto \mathbb{Z}.x$ de X dans $\mathcal{P}(G)$ définie par

$$\mathbb{Z}.x = \{y \in G/\exists \nu \in \mathbb{Z} : y = \nu x\}$$

possède les propriétés suivantes :

a *pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathbb{Z}.x$ est un sous-groupe de G*

b *pour tout $x \in X$ $\mathbf{gr}(x) = \mathbb{Z}.x$*

c *pour tout sous-ensemble A de X*

$$\mathbf{gr}(A) = \mathbf{gr}(\bigcup_{x\in A} \mathbb{Z}.x)$$

(ii) L'application $u : A_c[X,\mathbb{Z}] \mapsto G$ définie par

$$u(\rho) = \sum_{x\in \mathrm{s}(\rho)} \rho(x).x$$

vérifie les propriétés suivantes

I *u est un morphisme de groupe et c'est l'unique morphisme vérifiant*

$$u \circ i = \jmath$$

II $\mathrm{im}(u) = \mathbf{gr}(X)$ *et il existe un isomorphisme du groupe quotient $A_c[X,\mathbb{Z}]/\mathrm{Ker}(u)$ sur $\mathbf{gr}(X)$.*

III *Pour que $(\mathbf{gr}(X),\jmath)$ soit un groupe libre au-dessus de X il faut et il suffit que u soit injective.*

Preuve

(i)

a — Puisque $0_g = 0.x$ on a $0_g \in \mathbb{Z}.x$

— Si $(u,v) \in \mathbb{Z}.x \times \mathbb{Z}.x$ alors il existe $(\mu,\nu) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que $u = \mu.x$ et $v = \nu.x$ et le lemme [8.46] page 377 permet d'affirmer que

$$u \ +_g \ v = \mu.x \ +_g \ \nu.x = (\mu+\nu).x$$

par suite $u \ +_g \ v \in \mathbb{Z}.x$

— Si $u \in \mathbb{Z}.x$ alors il existe $\nu \in \mathbb{Z}$ tel que $u = \nu.x$ et et le lemme [8.46] page 377 permet d'affirmer que

$$-u \; = -\nu.x \; = (-\nu).x$$

par suite $-u \in \mathbb{Z}.x$

b — Puisque $x \in \mathbb{Z}.x$ on a $\mathbf{gr}(x) \subset \mathbb{Z}.x$

— Si K est un sous-groupe de G tel que $x \in K$ alors d'après le lemme [8.46] page 377 pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ on a $\nu.x \in K$ par suite

$$\mathbf{gr}(x) = \mathbb{Z}.x$$

c — Puisque $A \subset \bigcup_{x \in A} \mathbb{Z}.x$ on a

$$\mathbf{gr}(A) \subset \mathbf{gr}(\bigcup_{x \in A} \mathbb{Z}.x)$$

— D'après **b** pour tout $x \in G$ $\mathbf{gr}(x) = \mathbb{Z}.x$ par suite pour tout $x \in A$

$$\mathbb{Z}.x \subset \mathbf{gr}(A)$$

et

$$\bigcup_{x \in A} \mathbb{Z}.x \subset \mathbf{gr}(A)$$

d'où

$$\mathbf{gr}(\bigcup_{x \in A} \mathbb{Z}.x) \subset \mathbf{gr}(A)$$

(ii)

I On a

$$u(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho)} \rho(\lambda).\jmath(\lambda)$$

ainsi d'après le théorème [8.13] page 388 u est l'unique morphisme de $A_c[X, \mathbb{Z}]$ dans G vérifiant $u \circ i = \jmath$.

II Puisque u est un morphisme $\mathrm{im}(u)$ est un sous-groupe de G et puisque pour tout $x \in X$ on a $x = \jmath(x) = u(i(x))$ on a $X \subset \mathrm{im}(u)$ par suite

$$\mathbf{gr}(X) \subset \mathrm{im}(u) \; .$$

D'autre part, si $g \in \mathrm{im}(u)$ il existe $\rho \in A_c[X, \mathbb{Z}]$ tel que

$$g = \sum_{x \in \mathrm{s}(\rho)} \rho(x).x$$

mais pour tout $x \in \mathrm{s}(\rho)$ on a $\rho(x).x \in \mathbb{Z}.x$ par suite $\rho(x).x \in \mathbf{gr}(x)$ et $\rho(x).x \in \mathbf{gr}(X)$ ainsi g est somme fini d'éléments de $\mathbf{gr}(X)$ donc un élément de $\mathbf{gr}(X)$ d'après le lemme [8.47] page 380 . Ainsi on obtient

$$\mathbf{gr}(X) \subset \mathrm{im}(u) \subset \mathbf{gr}(X) \; .$$

Enfin, le lemme [8.34] page 331 montre qu'il existe un unique morphisme injectif u^* de $A_c[X, \mathbb{Z}]/\mathrm{Ker}(u)$ dans G vérifiant $u = u^* \circ \pi$ et $\mathrm{im}(u^*) = \mathrm{im}(u) = \mathbf{gr}(X)$.

III 1. D'abord on montre la partie ≪ il suffit ≫

Il s'agit de montrer que si u est injectif alors pour tout groupe commutatif H et toute application f de X dans H il existe un unique morphisme f^* de $\mathbf{gr}(X)$ dans H vérifiant

$$f = f^* \circ j$$

Preuve de l'existence

Puisque $((A_c[X,\mathbb{Z}],+),\ i)$ est un groupe commutatif libre au-dessus de X il existe un morphisme f_c de $A_c[X,\mathbb{Z}]$ dans H vérifiant
$$f = f_c \circ i$$
l'injectivité de u et **II** montre que u est un isomorphisme de $A_c[X,\mathbb{Z}]$ dans $\mathbf{gr}(X)$, ainsi $f_c \circ u^{-1}$ est un morphisme de $\mathbf{gr}(X)$ dans H vérifiant
$$f = (f_c \circ u^{-1}) \circ (u \circ i)$$
mais d'après **I** $u \circ i = j$ par suite
$$f = f_c \circ u^{-1} \circ j$$
et le morphisme $f^* = f_c \circ u^{-1}$ vérifie $f = f^* \circ j$

Preuve de l'unicité

Si v et w sont des morphismes de $\mathbf{gr}(X)$ dans H vérifiant $f = v \circ j$ et $f = w \circ j$ alors $v \circ u$ et $w \circ u$ sont des morphisme de $A_c[X,\mathbb{Z}]$ dans H vérifiant
$$(v \circ u) \circ i = v \circ j = f = w \circ j = (w \circ u) \circ i$$
$((A_c[X,\mathbb{Z}],+), i)$ étant un groupe commutatif libre on obtient $v \circ u = w \circ u$ et, puisque u est un isomorphisme, $v = w$.

2. Ensuite on montre la partie « il faut »

   Si $((\mathbf{gr}(X),+_g),\jmath)$ est un groupe commutatif libre il existe, par définition d'un groupe libre, un unique morphisme v de $\mathbf{gr}(X)$ dans $A_c[X,\mathbb{Z}]$ tel que
   $$i = v \circ \jmath$$
   par suite puisque $\jmath = u \circ i$. On obtient
   $$i = (v \circ u) \circ i$$
   Mais, par définition d'un groupe libre, le seul morphisme h de $A_c[X,\mathbb{Z}]$ dans $A_c[X,\mathbb{Z}]$ vérifiant $i = h \circ i$ est l'identité par suite
   $$v \circ u = id_{A_c[X,\mathbb{Z}]}$$
   ce qui montre que u est injective.

■

On passe à quelques définitions.

Définition 8.52 $(\mathbb{Z},+,\cdot,\ O)$ *désigne un ensemble d'entiers relatifs et* $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{\nu \in \mathbb{Z}/\nu \geq 0\}$. $(G,+_g)$ *est un groupe commutatif,* X *est un sous-ensemble* non vide *de* G *et* $A_c[X,\mathbb{Z}]$ *est l'ensemble des applications de* X *dans* $\mathbb{Z}$ *à support fini. Enfin,* u *est l'application de* $A_c[X,\mathbb{Z}]$ *dans* G *définie par*
$$u(\rho) = \sum_{x \in s(\rho)} \rho(x).x$$
On dit que

1. *X est une* ***partie génératrice*** *de G si u est surjective*
2. *X est une partie $\mathbb{Z}$-**libre** de G si u est injective*
3. *X est une* ***base*** *de G si X est une partie génératrice et $\mathbb{Z}$-libre de G.*

Le lemme qui suit est d'utilisation courante.

Lemme 8.52 *$(G, +_g)$ est un groupe commutatif d'élément neutre 0_g et X est un sous-ensemble* non vide *de G.*

(i) Si X est $\mathbb{Z}$-libre les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *$0_g \notin X$*
2. *Pour tout $x \in X$ l'application φ de $\mathbb{Z}$ dans G définie par*

$$\varphi(\nu) = \nu.x$$

est un morphisme injectif de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, +_g)$. En particulier G est infini.

3. *Tout sous-ensemble de X est $\mathbb{Z}$-libre.*
4. *Si $\jmath$ est l'application de X dans $\mathbf{gr}(X)$ définie par*

$$\jmath(x) = x$$

$(\mathbf{gr}(X), \jmath)$ est un groupe commutatif libre au-dessus de X.

5. *La famille $x \mapsto \mathbb{Z}.x$ est en somme directe :*

$$\mathbf{gr}(X) = \mathbf{gr}(\bigcup_{x \in X} \mathbb{Z}.x) = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}.x$$

et si $q \in \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(\mathbb{Z}.x,\ \mathbf{gr}(X))$ est définie par

$$q_x(h) = h$$

alors $(\mathbf{gr}(X), q)$ est un coproduit de la famille $x \mapsto \mathbb{Z}.x$

(ii) Pour que X soit $\mathbb{Z}$-libre il faut et il suffit que tout sous-ensemble fini de X soit $\mathbb{Z}$-libre.

(iii) Si l'ensemble $\mathcal{L}(G)$ des parties $\mathbb{Z}$-libres de G est non vide il est inductif pour la relation d'inclusion.

Preuve

(i)

1. Si $0_g \in X$ et $\rho \in A_c[X, \mathbb{Z}]$ est définie par

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0_g \\ 0 & si \quad x \neq 0_g \end{cases}$$

alors $\mathrm{s}(\rho) = \{0_g\}$ et $u(\rho) = 1.0_g = 0_g$ par suite u n'est pas injective.

2. D'après le lemme [8.48] page 384 φ est un morphisme, si $\nu_0 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ alors l'application $\rho \in A_c[X, \mathbb{Z}]$ définie par

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \nu_0 & si \quad \lambda = x \\ 0 & si \quad \lambda \neq x \end{cases}$$

vérifie $u(\rho) = \nu_0.x = 0$, u étant injective on obtient $\rho = 0$ par suite $\nu_0 = 0$ et $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$, ainsi φ est injectif.

3. On montre que si $A \subset X$ n'est pas $\mathbb{Z}$-libre alors X n'est pas $\mathbb{Z}$-libre. En effet, si A n'est pas $\mathbb{Z}$-libre il existe une application non nulle $\chi \in A_c[A, \mathbb{Z}]$ tel que

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\chi)} \chi(\lambda).\lambda = 0_g$$

L'application $\rho \in A_c[X, \mathbb{Z}]$ définie par

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \chi(\lambda) & si \quad \lambda \in A \\ 0 & si \quad \lambda \in A^c \end{cases}$$

vérifie d'après l'égalité (8.14) page 211

$$u(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho)} \rho(\lambda).\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap A} \rho(\lambda).\lambda +_g \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap A^c} \rho(\lambda).\lambda$$

— puisque pour tout $\lambda \in A^c$ on a $\rho(\lambda).\lambda = 0_g$ on obtient

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap A^c} \rho(\lambda).\lambda = 0_g \quad \text{et} \quad u(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap A} \rho(\lambda).\lambda$$

— puisque $\mathrm{s}(\rho) \cap A = \mathrm{s}(\chi)$ et pour tout $\lambda \in A$ $\chi(\lambda) = \rho(\lambda)$ on obtient

$$u(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho) \cap A} \rho(\lambda).\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\chi)} \chi(\lambda).\lambda = 0_g$$

ainsi $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$ et X n'est pas $\mathbb{Z}$-libre.

4. Voir lemme [8.51] page 411
5. Il s'agit de montrer que

$$\forall\, x \in X \quad \mathbb{Z}.x \cap \mathbf{gr}(\bigcup_{y \in \{x\}^c} \mathbb{Z}.y) = \{0_g\}$$

mais si $g \in \mathbb{Z}.x \cap \mathbf{gr}(\bigcup_{y \in \{x\}^c} \mathbb{Z}.y)$

— puisque $g \in \mathbf{gr}(\bigcup_{y \in \{x\}^c} \mathbb{Z}.y)$ le lemme [8.50] page 403 permet d'affirmer qu'il existe un sous-ensemble fini F de $\{x\}^c$ et une application $v \in \prod_{y \in F} \mathbb{Z}.y$ vérifiant

$$g = \sum_{y \in F} v_y$$

puisque pour tout $y \in F$ on a $v_y \in \mathbb{Z}.y$ pour tout $y \in F$ l'ensemble

$$\Gamma_y = \{\nu \in \mathbb{Z} / v_y = \nu y\}$$

est non vide . Ainsi si h est une fonction de choix pour $\mathbb{Z}$ l'application χ de F dans $\mathbb{Z}$ définie par $\chi(y) = h(\Gamma_y)$ vérifie $v_y = \chi(y).y$ et

$$g = \sum_{y \in F} \chi(y).y$$

— puisque $g \in \mathbb{Z}.x$ il existe $\nu \in \mathbb{Z}$ tel que $g = \nu.x$ ainsi

$$g = \nu.x = \sum_{\lambda \in F} \chi(\lambda).\lambda$$

si ρ est l'application de X dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} -\nu & si \quad \lambda = x \\ \chi(\lambda) & si \quad \lambda \in F \\ 0 & si \quad \lambda \notin F \cup \{x\} \end{cases}$$

alors

$$u(\rho) = (-\nu).x + \sum_{\lambda \in F} \chi(\lambda).\lambda = 0_g$$

u étant injective on obtient $\rho = 0$ par suite $\nu = 0$ et $g = \nu.x = 0_g$. Le lemme [8.50] page 403 montre alors que $(\mathbf{gr}(\bigcup_{x\in X} \mathbb{Z}.x)\ , q)$ est un coproduit de la famille $x \mapsto \mathbb{Z}.x$. Or le lemme [8.51] page 411 montre que $\mathbf{gr}(\bigcup_{x\in X} \mathbb{Z}.x) = \mathbf{gr}(X)$ ainsi $(\mathbf{gr}(X)\ , q)$ est un coproduit de $x \mapsto \mathbb{Z}.x$.

(ii)

On montre que si X n'est pas $\mathbb{Z}$-libre il contient un sous-ensemble fini qui n'est pas $\mathbb{Z}$-libre. En effet, si X n'est pas $\mathbb{Z}$-libre il existe une application non nulle $\rho \in A_c[X, \mathbb{Z}]$ telle que

$$u(\rho) = 0_g$$

si χ est la restriction de ρ à $\mathrm{s}(\rho)$ alors χ est une application non nulle de $A_c[\mathrm{s}(\rho), \mathbb{Z}]$ et

$$u(\rho) = \sum_{\lambda\in \mathrm{s}(\rho)} \rho(\lambda).\lambda = \sum_{\lambda\in \mathrm{s}(\chi)} \chi(\lambda).\lambda = 0_g$$

ce qui montre que $\mathrm{s}(\rho)$ n'est pas $\mathbb{Z}$-libre.

(iii)

Il s'agit de montrer que si $\mathcal{A}$ est une famille totalement ordonnée (pour l'inclusion) de sous-ensemble $\mathbb{Z}$-libre de G alors $\mathcal{A}$ possède un majorant dans $\mathcal{L}(G)$. Pour cela on montre que l'ensemble

$$L = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$$

est libre. D'après (ii) il suffit de montrer que tout sous-ensemble fini F vérifiant

$$F \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$$

est $\mathbb{Z}$-libre. On montre que si F est un sous-ensemble de $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ de cardinal $n+1$ il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $F \subset A$. On note $x \in \mathrm{B}[\mathbb{N}_n, F]$ une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans F et

$$U = \{k \in \mathbb{N}_n / \exists\ A \in \mathcal{A} : x(\mathbb{N}_k) \subset A\} = \{k \in \mathbb{N}_n / \exists\ A \in \mathcal{A} : \{x_0, \cdots, x_k\} \subset A\}$$

On montre que $U = \mathbb{N}_n$ en vérifiant (voir lemme [5.10] page 111)

1. $0 \in U$
2. $k \in U \quad$ et $\quad k < n \Rightarrow k+1 \in U$.

1. Puisque $x_0 \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $x_0 \in A$ ainsi $0 \in U$.
2. Si $k < n$ et $k \in U$ alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $x(\mathbb{N}_k) \subset A$, l'égalité $x(\mathbb{N}_{k+1}) = x(\mathbb{N}_k) \cup \{x_{k+1}\}$ montre alors que $x(\mathbb{N}_{k+1}) \subset A \cup \{x_{k+1}\}$ .Puisque $x_{k+1} \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ il existe $A_{k+1} \in \mathcal{A}$ tel que $x_{k+1} \in A_{k+1}$. $\mathcal{A}$ étant totalement ordonnée on a $A \subset A_{k+1}$ ou $A_{k+1} \subset A$.
   — Si $A \subset A_{k+1}$ $x(\mathbb{N}_{k+1}) \subset A_{k+1}$ et $k+1 \in U$
   — Si $A_{k+1} \subset A$ $x(\mathbb{N}_{k+1}) \subset A$ et $k+1 \in U$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et en particulier, puisque $F = x(\mathbb{N}_n)$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $F \subset A$, par suite tout sous-ensemble fini F de L est inclu dans un ensemble $\mathbb{Z}$-libre et (i) permet d'affirmer que F est $\mathbb{Z}$-libre, ce qui montre (par (ii)) que L est $\mathbb{Z}$-libre, L étant une borne supérieure de $\mathcal{A}$ pour l'inclusion cela montre que $\mathcal{L}(G)$ est fortement inductif. ■

On a vu que si X est $\mathbb{Z}$-libre alors

$$\mathrm{im}(u) = \mathbf{gr}(X) = \bigoplus_{x\in X} \mathbb{Z}.x$$

lorsque X est « sans torsion » la réciproque est vrai.

Définition 8.53 *On note $(G,+_g)$ un groupe commutatif d'élément neutre 0_g et $X \subset G$ un sous-ensemble de G. On dit que $\mathbb{Z}$ opère* ***sans torsion*** *sur X si*

$$\nu.x = 0_g \Rightarrow \nu = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_g$$

On dira alors que X est sans torsion.

Le lemme suivant est une application directe des définitions

Lemme 8.53 *On note $(G,+_g)$ un groupe commutatif d'élément neutre 0_g*

Si X est un sous-ensemble sans torsion de G les conditions suivantes sont équivalentes

1. *X est $\mathbb{Z}$-libre*
2. *$0_g \notin X$ et la famille $x \mapsto \mathbb{Z}.x$ est en somme directe.*

Preuve L'implication *1⇒ 2* est prouvée au lemme [8.52] page 414. On montre $non(1) \Rightarrow non(2)$. Si $\rho \in A_c[X,\mathbb{Z}]$ est une application non nulle qui vérifie $u(\rho) = 0_g$ et $x \in \mathrm{s}(\rho)$ alors

$$u(\rho) = \sum_{\lambda \in \{x\}} \rho(\lambda).\lambda +_g \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho)\setminus\{x\}} \rho(\lambda).\lambda = 0_g$$

ainsi

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho)\setminus\{x\}} \rho(\lambda).\lambda = -\rho(x).x$$

et

$$\rho(x).x \in \mathbb{Z}.x \cap \mathbf{gr}(\bigcup_{y \in \{x\}^c} \mathbb{Z}.y)$$

or $x \neq 0_g$ puisque $0_g \notin X$ et $\rho(x) \neq 0$ puisque $x \in \mathrm{s}(\rho)$, X étant sans torsion $\rho(x).x$ est un élément non nul de $\mathbb{Z}.x \cap \mathbf{gr}(\bigcup_{y \in \{x\}^c} \mathbb{Z}.y)$ ■

Chapitre 9

Structure d'anneau

9.1 *Introduction et calcul formel sur les anneaux*

9.1.1 *Introduction*

Définition 9.1 *On appelle* ***semi-anneau*** *un triplet* $(A, +, \centerdot)$ *où*

1. *A est un ensemble*
2. *$+ : A \times A \mapsto A$ est une loi sur A appelée l'addition et notée $(x, y) \mapsto x + y$*
3. *$\centerdot : A \times A \mapsto A$ est une loi sur A appelée la multiplication et notée $(x, y) \mapsto x \centerdot y$*

Ce triplet vérifiant les propriétés suivantes :

1. *$(A, +)$ est un* ***groupe commutatif***
2. *La loi $\centerdot$ est associative :*
   pour tout $(x, y) \in A \times A$ et $z \in A$
   $$(x \centerdot y) \centerdot z = x \centerdot (y \centerdot z)$$
3. *La loi $\centerdot$ est distributive par rapport à l'addition :*
   pour tout $(x, y) \in A \times A$ et $z \in A$
   $$(x + y) \centerdot z = x \centerdot z + y \centerdot z \quad \text{et} \quad z \centerdot (x + y) = z \centerdot x + z \centerdot y$$

De plus on dira que le semi-anneau A est commutatif si la loi $\centerdot$ est commutative :

$$\forall\ (x, y) \in A \times A \quad x \centerdot y = y \centerdot x\ .$$

Un semi-anneau $(A, +, \centerdot)$ est appelé un ***anneau*** *si $(A, \centerdot)$ est un monoïde.*

Pour alléger les notations on notera systématiquement $+ : (x, y) \mapsto x + y$ l'addition sur les anneaux, quelque soit l'ensemble sous-jaçent à l'anneau, ainsi on laisse au lecteur le soin de déterminer dans quel anneau on somme. De même la multiplication sera notée $\centerdot : (x, y) \mapsto xy$, 0 sera l'élément neutre du groupe additif de n'importe quel semi-anneau, le plus souvent 1 sera l'élément neutre de la multiplication de n'importe quel anneau, on l'appellera l'unité de $(A, +, \centerdot)$. Enfin, pour tout $a \in A$ on note $-a$ l'inverse de a dans le groupe $(A, +)$, et si $(a, b) \in A \times A$ on note

$$a - b = a + (-b)$$

ainsi $-a$ est l'unique élément c de A tel que $a + c = 0$ et $a - b$ est l'élément c' de A tel que $c' + b = a$. Les premières règles de calculs dans les anneaux sont consignées dans le lemme suivant qui utilise les lemmes [8.1] page 192 , [8.2] page 195 et [8.3] page 196.

Lemme 9.1 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* $(A, +, \centerdot)$ *un anneau .*
(i) Pour tout $a \in A$

$$0 \centerdot a = a \centerdot 0 = 0 \ . \tag{9.1}$$

(ii) Si e *est l'unité de* $(A, +, \centerdot)$ *et si* $e = 0$ *alors* $A = \{0\}$

(iii) Pour tout $a \in A$ *, l'inverse de* $-a$ *dans le groupe* $(A, +)$ *est* a *:* $-(-a) = a$*, de plus si* e *est l'unité de* $(A, +, \centerdot)$ *alors* $(-e) \centerdot a = -a = a \centerdot (-e)$

(iv) Pour tout $(a, b) \in A \times A$

$$(-a) \centerdot b = -(a \centerdot b) = a \centerdot (-b) \quad \text{et} \quad (-a) \centerdot (-b) = a \centerdot b \tag{9.2}$$

(v) Pour tout $a \in A$ *et* $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$

$$a \centerdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right) = \sum_{k=0}^{n} a \centerdot b_k \ .$$

et

$$\left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right) \centerdot a = \sum_{k=0}^{n} b_k \centerdot a$$

(vi)Pour tout $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *,* $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \tag{9.3}$$

(vii) Pour tout $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *on a, pour* $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \centerdot \left(\sum_{k=0}^{p} b_k \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{p} a_k \centerdot b_j \right) \tag{9.4}$$

(viii) Soit I *et* J *des ensembles finis, pour toute application* $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, A)$ *et* $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(J, A)$

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \right) \centerdot \left(\sum_{j \in J} b_j \right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_i \centerdot b_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i \centerdot b_j \tag{9.5}$$

(ix) Si e *est l'unité de* $(A, +, \centerdot)$ *, pour tout* $a \in A$ *il existe une unique application* π_a *de* $\mathbb{N}$ *dans* A *vérifiant*

$$\pi_a(0) = e \quad \text{et} \quad \pi_a(n+1) = \pi_a(n) \centerdot a$$

cette application est notée

$$n \mapsto a^n \ .$$

(x) Pour tout $a \in A$ *il existe une unique application* φ_a *de* $\mathbb{N}$ *dans* A *vérifiant*

$$\varphi_a(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_a(n+1) = \varphi_a(n) + a$$

cette application est notée

$$n \mapsto na \ .$$

(xi) Si 1 *est l'unité de* $(A, +, \centerdot)$ *alors pour tout* $a \in A$

$$(a - 1) \centerdot \sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} - 1 \tag{9.6}$$

Preuve

(i)

Pour tout $a \in A$

$$a \centerdot a = a \centerdot (a + 0) = a \centerdot a + a \centerdot 0$$

par suite

$$0 = a \centerdot a - a \centerdot a = (a \centerdot a - a \centerdot a) + a \centerdot 0 = a \centerdot 0$$

De même

$$a \centerdot a = (a + 0) \centerdot a = a \centerdot a + 0 \centerdot a$$

et

$$0 = a \centerdot a - a \centerdot a = (a \centerdot a - a \centerdot a) + 0 \centerdot a = 0 \centerdot a$$

(ii)

Si $e = 0$ alors pour tout $a \in A$ $a = e \centerdot a = 0 \centerdot a = 0$

(iii)

a est l'unique élément tel que $(-a) + a = 0$, ainsi $-(-a) = a$. De plus

$$a + (-e) \centerdot a = e \centerdot a + (-e) \centerdot a = (e + (-e)) \centerdot a = 0 \centerdot a = 0$$

d'où $(-e) \centerdot a = -a$

$$a + a \centerdot (-e) = a \centerdot e + a \centerdot (-e) = a \centerdot (e + (-e)) = a \centerdot 0 = 0$$

d'où $a \centerdot (-e) = -a$

(iv)

$$a \centerdot b + (-a) \centerdot b = (a + (-a)) \centerdot b = 0 \centerdot b = 0$$

ainsi $(-a) \centerdot b = -a \centerdot b$

$$a \centerdot b + a \centerdot (-b) = a \centerdot (b + (-b)) = 0$$

ainsi $a \centerdot (-b) = -a \centerdot b$. Enfin on obtient

$$(-a) \centerdot (-b) = -(a \centerdot (-b)) = -(-a \centerdot b) = a \centerdot b \ .$$

(v)

On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / a \centerdot \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} a \centerdot b_k\}$$

et on montre que $H = \mathbb{N}$ en vérifiant

1. $0 \in H$
2. $n \in H \Rightarrow n + 1 \in H$

1. L'assertion $0 \in H$ est simplement l'égalité $a \centerdot b_0 = a \centerdot b_0$
2. Si $n \in H$
   — par distributivité

$$a \centerdot \sum_{k=0}^{n+1} b_k = a \centerdot \sum_{k=0}^{n} b_k + a \centerdot b_{n+1}$$

— puisque $n \in H$

$$a \centerdot \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} a \centerdot b_k$$

ainsi

$$a \centerdot \sum_{k=0}^{n+1} b_k = \sum_{k=0}^{n} a \centerdot b_k + a \centerdot b_{n+1}$$

— par définition de $\sum$

$$a \centerdot \sum_{k=0}^{n+1} b_k = \sum_{k=0}^{n} a \centerdot b_k + a \centerdot b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a \centerdot b_k$$

et $n+1 \in H$.

Par suite $H = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a \centerdot \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} a \centerdot b_k \ .$$

l'égalité

$$\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \centerdot a = \sum_{k=0}^{n} b_k \centerdot a$$

se prouve de manière similaire.

(vi)

On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k\}$$

et on montre que $H = \mathbb{N}$ en vérifiant

1. $0 \in H$
2. $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$

1. L'assertion $0 \in H$ est simplement l'égalité $a_0 + b_0 = a_0 + b_0$
2. si $n \in H$
   — par définition de $\sum$

$$\sum_{k=0}^{n+1} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) + a_{n+1} + b_{n+1}$$

— puisque $n \in H$

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

ainsi

$$\sum_{k=0}^{n+1} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k + a_{n+1} + b_{n+1}$$

— par commutativité

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k + a_{n+1} + b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} b_k + b_{n+1}$$

ainsi

$$\sum_{k=0}^{n+1} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} b_k + b_{n+1}$$

— par définition de $\sum$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k + b_{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k + \sum_{k=0}^{n+1} b_k$$

Par suite $H = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \ .$$

(vii)

On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{p} b_j\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_k b_j\}$$

et on montre que $H = \mathbb{N}$ en vérifiant

1. $0 \in H$
2. $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$

1. L'assertion $0 \in H$ est l'assertion

$$a_0 \cdot \sum_{j=0}^{p} b_j = \sum_{j=0}^{p} a_0 \cdot b_j$$

qui est assurée par (v)

2. Si $n \in H$ alors

— par distributivité

$$\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{p} b_j\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{p} b_j\right) + a_{n+1} \cdot \left(\sum_{j=0}^{p} b_j\right)$$

— puisque $n \in H$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{p} b_j\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p} a_k b_j\right)$$

et par (v)

$$a_{n+1} \cdot \left(\sum_{j=0}^{p} b_j\right) = \sum_{j=0}^{p} a_{n+1} \cdot b_j$$

ainsi

$$\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{p} b_j\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p} a_k b_j\right) + \sum_{j=0}^{p} a_{n+1} \cdot b_j$$

par définition de $\sum$ on obtient donc

$$\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{p} b_j\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p} a_k b_j\right) + \sum_{j=0}^{p} a_{n+1} \cdot b_j = \sum_{k=0}^{n+1}\left(\sum_{j=0}^{p} a_k b_j\right)$$

Par suite $H = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \centerdot \left(\sum_{j=0}^{p} b_j\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_k b_j \ .$$

(*viii*)

Si $f : I \times J \mapsto A$ est définie par $f(i,j) = a_i \centerdot b_j$, le théorème [8.1] page 211 permet d'affirmer que

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} f(i,j) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} f(i,j)\right)$$

ainsi

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i \centerdot b_j = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i \centerdot b_j\right)$$

il suffit donc de montrer

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i \centerdot b_j\right) = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

mais si $\mathrm{Card}(I) = n+1$ et $\mathrm{Card}(J) = p+1$ alors, par définition, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}_n$ dans I et toute bijection τ de $\mathbb{N}_p$ dans J on a

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i \centerdot b_j\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{p} a_{\sigma(k)} \centerdot b_{\tau(l)}\right)$$

ainsi (9.4) page 419 permet d'affirmer

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i \centerdot b_j\right) = \left(\sum_{k=0}^{p} a_{\sigma(k)}\right) \centerdot \left(\sum_{l=0}^{p} b_{\tau(l)}\right) = \left(\sum_{i\in I} a_i\right) \centerdot \left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

(*ix*)

C'est le lemme [8.1] page 192 appliqué au monoïde $(A, \centerdot)$. Rappelons que l'existence suit facilement du théorème d'induction appliqué à l'application u_a de A dans A définie par

$$u_a(x) = a \centerdot x$$

(*x*)

C'est le lemme [8.1] page 192 appliqué au monoïde $(A, +)$ (voir aussi lemme[8.2] page 195). Rappelons que l'existence suit facilement du théorème d'induction appliqué à l'application v_a de A dans A définie par

$$v_a(x) = a + x$$

(*xi*)

On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / (a-1) \centerdot \sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} - 1\}$$

et on montre que $H = \mathbb{N}$ en vérifiant

1. $0 \in H$
2. $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$

1. Il est clair que $0 \in H$ puisque $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.
2. si $n \in H$ alors
$$(a-1)\centerdot\sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} - 1$$
par suite
$$(a-1)\centerdot\sum_{k=0}^{n+1} a^k = (a-1)\centerdot\left(\sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1}\right) = a^{n+1} - 1 + (a-1)\centerdot a^{n+1} = a^{n+2} - 1$$
ainsi $n+1 \in H$.

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$(a-1)\centerdot\sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} - 1\ .$$

■

Si $(\mathbb{Z}\ ,+,\centerdot\ ,O)$ est un ensemble d'entiers relatifs, il résulte du fait que $(\mathbb{Z}_+, O)$ est un ensemble d'entiers naturels que pour tout anneau A il existe une application $\varphi : \mathbb{Z} \mapsto A$, C'est ce genre d'application qu'on étudie dans le lemme suivant.

Lemme 9.2 *On note $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,O)$ un ensemble d'entiers relatifs et $(A, +_a,\ \centerdot_a)$ un anneau.*

(i) Il existe une unique application $x \mapsto f_x$ de A dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, A)$ vérifiant :
$$\forall (x,n) \in A \times \mathbb{Z}_+ \quad f_x(0) = 0_a \quad \text{et} \quad f_x(n+1) = f_x(n) + x$$
Cette application vérifie de plus : pour tout $(n,m) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ et $(x,y) \in A \times A$
$$f_x(1) = x\ ,\ f_x(m+n) = f_x(m) +_a f_x(n) \quad \text{et} \quad f_{x+_a y}(n) = f_x(n) +_a f_y(n) \tag{9.7}$$
et
$$z = f_x(n) \Rightarrow \forall\ k \in \mathbb{Z}_+ \quad f_z(k) = f_x(nk) \qquad (9.7')$$
Pour tout $(n,x) \in \mathbb{Z}_+ \times A$ on note $f_x(n) = nx$

(ii) Il existe une unique application de $\mathbb{Z}_+ \times A$ dans A notée $(n,x) \mapsto nx$ qui vérifie :
1. *Pour tout $x \in A$: 1x=x*
2. *Pour tout $(n,m) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ et $x \in A$: $(n+m)x = nx +_a mx$*
3. *Pour tout $(x,y) \in A \times A$ et $n \in \mathbb{Z}_+$: $n(x +_a y) = nx +_a ny$*
4. *Pour tout $(n,m) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ et $x \in A$: $n(mx) = (nm)x$*

(iii) Il existe une unique application $x \mapsto f^*_x$ de A dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}, A)$ vérifiant : pour tout $x \in A$, $n \in \mathbb{Z}_+$ et $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$$f^*_x(n) = f_x(n) \quad \text{et} \quad f^*_x(u+v) = f^*_x(u) + f^*_x(v) \tag{9.8}$$
Cette application vérifie de plus :
1. *pour tout $u \in \mathbb{Z}$ et $(x,y) \in A \times A$*
$$f^*_{x+_a y}(u) = f^*_x(u) +_a f^*_x(u) \quad \text{et} \quad f^*_{0_a}(u) = 0_a$$
2. *pour tout $u \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ et $x \in A$*
$$f^*_{nx}(u) = f^*_x(nu)$$

3. pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $x \in A$

$$z = f_x^*(u) \Rightarrow f_z^*(v) = f_x^*(uv) \ .$$

Pour tout $(u,x) \in \mathbb{Z} \times A$ on note $f_x^*(u) = ux$

(iv) Il existe une unique application de $\mathbb{Z} \times A$ dans A notée $(u,x) \mapsto ux$ qui vérifie :

1. *Pour tout $x \in A$: $1x=x$*
2. *Pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $x \in A$: $(u+v)x = ux +_a vx$*
3. *Pour tout $(x,y) \in A \times A$ et $u \in \mathbb{Z}$: $u(x +_a y) = ux +_a uy$*
4. *Pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $x \in A$: $u(vx) = (uv)x$*

(v) Si $(A, +_a, \bullet_a)$ est un anneau unitaire d'unité 1_a non réduit à un élément ($1_a \neq 0_a$), l'application $g : \mathbb{Z} \mapsto A$ définie par

$$g(u) = u1_a$$

vérifie

1. *pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*
$$g(u+v) = g(u) +_a g(v)$$
2. *pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*
$$g(uv) = g(u) \bullet_a g(v)$$
3. *pour que g soit injective il faut et il suffit que pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$ vérifiant $n \neq 0$ l'inégalité $g(n) \neq 0_a$ soit vérifiée.*

(vi) Pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $(x,y) \in A \times A$

$$(ux) \bullet_a (vy) = (uv)(x \bullet_a y)$$

Preuve

(i)

Preuve de l'existence

On se sert du fait que $(\mathbb{Z}_+, O)$ est un ensemble d'entiers naturels de succession $s(n) = n+1$. On pose

$$\mathrm{diag}(A, \mathbb{Z}_+) = \{(g, \varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A, A) / g \circ s = \varphi \circ g\}$$

et on considère l'application $x \mapsto t_x$ de A dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A,A)$ définie par

$$t_x(y) = x +_a y \ .$$

Enfin on considère la relation f de A dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, A)$ définie par

$$f = \{(x,g) \in A \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, A) / g(0) = 0_a \text{ et } (g, t_x) \in \mathrm{diag}(A, \mathbb{Z}_+)\} \ .$$

On a donc $[(x,g) \in f \Leftrightarrow (g(0) = 0_a \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}\ g(n+1) = g(n) +_a x)]$, on montre que f est une application.

1. D'abord on montre que $\mathrm{dom}(f) = A$. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in A$ il existe $f_x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, A)$ tel que $(x, f_x) \in f$. Par définition d'un ensemble d'entiers relatifs, $(\mathbb{Z}_+, O)$ est un ensemble d'entiers naturels de succession $s(n) = n+1$, ainsi si t_x est l'application de A dans A définie par
$$t_x(y) = y +_a x$$
le théorème d'induction (théorème [4.3] page 80) permet d'affirmer qu'il existe une unique application $f_x : \mathbb{Z}_+ \mapsto A$ vérifiant
$$f_x(0) = 0_a \quad \text{et} \quad f_x(s(n)) = t_x(f_x(n))$$
par définition de $\mathrm{diag}(A, \mathbb{Z}_+)$ cette application vérifie $(x, f_x) \in f$.

2. Ensuite on montre que f est une fonction :

$$[(x,g) \in f \quad \text{et} \quad (x,g') \in f] \Rightarrow g = g' \ .$$

On pose

$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / g(n) = g'(n)\}$$

et on montre que $H = \mathbb{Z}_+$ en vérifiant

(a) $0 \in H$

(b) $[n \in H \Rightarrow n+1 \in H]$.

(a) D'abord il est clair que $0 \in H$ puisque

$$[(x,g) \in f \quad \text{et} \quad (x,g') \in f] \Rightarrow g(0) = g'(0) = 0_a$$

(b) Ensuite on montre $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$. Pour cela on remarque que $(x,g) \in f \Rightarrow g(n+1) = t_x(g(n)) = g(n) +_a x$, par suite

$$n \in H \Rightarrow g(n) = g'(n) \Rightarrow g(n) +_a x = g'(n) +_a x \Rightarrow g(n+1) = g'(n+1) \ .$$

Ainsi $H = \mathbb{Z}_+$ et $g = g'$.

Preuve de l'unicité

Si $x \mapsto h_x$ est une application de A dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, A)$ vérifiant

$$\forall (x,n) \in A \times \mathbb{Z}_+ \quad h_x(0) = 0_a \quad \text{et} \quad h_x(n+1) = h_x(n) + x$$

alors pour tout $x \in A$ $(x, h_x) \in f$, par suite f étant une fonction on en déduit :

$$\forall\ x \in A\ f_x = h_x \ .$$

Preuve de (9.7)

D'abord par définition de f on a

$$f_x(1) = t_x(f_x(0)) = f_x(0) +_a x = x \ .$$

On pose, pour $m \in \mathbb{Z}_+$,

$$H_m = \{n \in \mathbb{Z}_+ / f_x(m+n) = f_x(m) +_a f_x(n)\}$$

et on montre que $H_m = \mathbb{Z}_+$ en vérifiant

1. $0 \in H_m$
2. $n \in H_m \Rightarrow n+1 \in H_m$.

1. D'abord $0 \in H_m$ puisque $f_x(0) = 0_a$
2. Ensuite si $n \in H_m$ alors
   — par définition de f_x
   $$f_x(m+n+1) = f_x(m+n) +_a x$$
   — puisque $n \in H_m$
   $$f_x(m+n) = f_x(m) +_a f_x(n)$$
   ainsi
   $$f_x(m+n+1) = f_x(m) +_a (f_x(n) +_a x)$$

— enfin la définition de f_x montre que $f_x(n+1) = f_x(n) +_a x$, par suite on obtient

$$f_x(m+n+1) = f_x(m) +_a f_x(n+1)$$

et $n+1 \in H_m$.

Ainsi $H_m = \mathbb{Z}_+$ et pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$

$$f_x(m+n) = f_x(m) +_a f_x(n) \ .$$

On montre que pour tout $(x,y) \in A \times A$

$$f_{x+y}(n) = f_x(n) +_a f_y(n)$$

Mais si $g(n) = f_x(n) +_a f_y(n)$ alors $g(0) = 0_a$ et

$$g(n+1) = f_x(n+1) +_a f_y(n+1) = (f_x(n) +_a x) +_a (f_y(n) +_a y) = g(n) +_a (x +_a y)$$

par suite $(x +_a y, g) \in f$ et $g = f_{x+_a y}$.

Enfin on montre que si $z = f_x(n)$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$

$$f_z(k) = f_x(nk)$$

Par unicité il suffit de montrer que l'application g de $\mathbb{Z}_+$ dans A définie par

$$g(k) = f_x(nk)$$

vérifie

$$g(0) = 0_a \quad \text{et} \quad g(n+1) = g(n) +_a z$$

Or $g(0) = f_x(0) = 0_a$ et $g(n+1) = f_x(nk+n)$ et on vient de voir que

$$f_x(nk+n) = f_x(nk) +_a f_x(n) = g(k) +_a z$$

(ii)

Il est clair que $(n,x) \mapsto f_x(n) = nx$ est une application de $\mathbb{Z}_+ \times A$ dans A.

1. L'assertion $1x = x$ provient de $f_x(1) = x$
2. L'assertion $(n+m)x = nx +_a mx$ provient de $f_x(n+m) = f_x(n) +_a f_x(m)$
3. L'assertion $n(x +_a y) = nx +_a ny$ provient de $f_{x+_a y}(n) = f_x(n) +_a f_y(n)$
4. L'assertion $(nm)x = n(mx)$ est l'assertion

$$z = f_x(m) = mx \Rightarrow f_z(n) = f_{mx}(n) = f_x(mn)$$

(iii)

Preuve de l'existence

On pose, pour $u \in \mathbb{Z}$

$$\Delta(u) = \{(m,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ / u = m - n\}$$

si pour $b \in A$, $-b$ désigne l'inverse de b dans le groupe $(A, +_a)$, on considère l'application

$$f^* : A \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times A)$$

qui à tout $x \in A$ fait correspondre la relation f_x^* de $\mathbb{Z}$ dans A définie par [1]

$$f_x^* = \{(u,y) \in \mathbb{Z} \times A / \exists\ (m,n) \in \Delta(u) : y = f_x(m) - f_x(n)\}$$

et on montre que pour tout $x \in A$ f_x^* est une application

1. f_x est définie en (i)

1. D'abord on montre que $\mathrm{dom}(f_x^*) = \mathbb{Z}$. En effet, d'après le *(ii)* du théorème [8.8] page 281 pour tout $u \in \mathbb{Z}$ on a $\Delta(u) \neq \varnothing$, ainsi si $(m, n) \in \Delta(u)$ alors $(u, f_x(m) - f_x(n)) \in f_x^*$.
2. Ensuite on montre que f_x^* est une fonction :

$$[(u, y) \in f_x^* \quad \text{et} \quad (u, y') \in f_x^*] \Rightarrow y = y'$$

mais si $(u, y) \in f_x^*$ et $(u, y') \in f_x^*$ il existe $(m, n) \in \Delta(u)$ et $(p, q) \in \Delta(u)$ tel que $y = f_x(m) - f_x(n)$ et $y' = f_x(p) - f_x(q)$. Puisque $u = m - n = p - q$ on a $m + q = p + n$ ainsi (9.7) page 424 montre que

$$f_x(m) +_a f_x(q) = f_x(m + q) = f_x(p + n) = f_x(p) +_a f_x(n)$$

par suite $f_x(m) - f_x(n) = f_x(p) - f_x(q)$ et

$$y = f_x(m) - f_x(n) = f_x(p) - f_x(q) = y' \ .$$

Ainsi f^* envoie A dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}, A)$. On vérifie (9.8) page 424

1. Puisque pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$ $(n, 0) \in \Delta(n)$ on a

$$f_x^*(n) = f_x(n) - f_x(0) = f_x(n)$$

2. Si $(m, n) \in \Delta(u)$ et $(p, q) \in \Delta(v)$ alors

$$u + v = (m - n) + (p - q) = (m + p) - (n + q)$$

par suite $(m + p, n + q) \in \Delta(u + v)$ et

$$f_x^*(u + v) = f_x(m + p) - f_x(n + q)$$

mais d'après (9.7) on a $f_x(m + p) = f_x(m) +_a f_x(p)$ et $f_x(n + q) = f_x(n) +_a f_x(q)$, ainsi

$$f_x^*(u + v) = (f_x(m) - f_x(n)) +_a (f_x(p) - f_x(q)) = f_x^*(u) +_a f_x(v)$$

Preuve de l'unicité

Il suffit de montrer que si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}, A)$ vérifie : pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$ et pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$h(n) = f_x(n) \quad \text{et} \quad h(u + v) = h(u) +_a h(v)$$

alors $h = f_x^*$. Mais si $u = m - n$ avec $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, alors $m = u + n \in \mathbb{Z}_+$, ainsi

$$f_x(m) = h(m) = h(u + n) = h(u) +_a h(n) = h(u) +_a f_x(n)$$

par suite

$$h(u) = f_x(m) - f_x(n) = f_x^*(u) \ .$$

Preuve de *(iii) 1.,2., 3.*

1. Si $(m, n) \in \Delta(u)$ alors d'après (9.7)

$$f_{x +_a y}^*(u) = f_{x +_a y}(m) - f_{x +_a y}(n) = f_x(m) +_a f_y(m) - (f_x(n) +_a f_y(n))$$

ainsi

$$f_{x +_a y}^*(u) = f_x(m) - f_x(n) +_a (f_y(m) - f_y(n)) = f_x^*(u) +_a f_y^*(u) \ .$$

en particulier pour tout $u \in \mathbb{Z}$ on a

$$f_{0_a}(u) = f_{0_a}(u) +_a f_{0_a}(u)$$

et $f_{0_a}(u) = 0_a$.

2. On pose $g(u) = f_x^*(nu)$, par unicité il suffit de montrer

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \; g(k) = f_{nx}(k) \text{ et } \forall (u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; g(u+v) = g(u) +_a g(v)$$

Or par (9.8) on a $g(k) = f_x^*(nk) = f_x(nk)$ et (9.7) montre que

$$z = f_x(n) = nx \Rightarrow f_x(nk) = f_{nx}(k) \ ,$$

enfin par (9.8) on a $g(u+v) = f_x(nu+nv) = f_x(nu) + f_x(nv) = g(u) + g(v)$.

3. Si $z = f_x^*(u)$ et $(m,n) \in \Delta(u)$ alors par définition de f^* on a

$$z = f_x(m) - f_x(n) = mx - nx$$

par suite d'après *(iii) 1.*

$$f_z^*(v) = f_{mx}^*(v) +_a f_{-nx}^*(v)$$

mais *(iii) 1.* entraîne

$$f_{-nx}^*(v) +_a f_{nx}^*(v) = f_{0_a}^*(v) = 0_a$$

par suite

$$f_{-nx}^*(v) = -f_{nx}^*(v) \quad \text{et} \quad f_z^*(v) = f_{mx}^*(v) - f_{nx}^*(v)$$

ainsi *(iii) 2.* permet d'affirmer que

$$f_z^*(v) = f_x^*(mv) - f_x^*(nv)$$

mais par (9.8) on a, puisque $u = m - n$,

$$f_x^*(uv) +_a f_x^*(nv) = f_x^*((m-n)v + nv) = f_x^*(mv)$$

par suite

$$f_x^*(uv) = f_x^*(mv) - f_x^*(nv) = f_z^*(v) \ .$$

(iv)

Il est clair que $(u,x) \mapsto f_x(u) = ux$ est une application de $\mathbb{Z} \times A$ dans A.

1. L'assertion $1x = x$ provient de $f_x^*(1) = f_x(1) = x$
2. L'assertion $(u+v)x = ux +_a vx$ provient de $f_x^*(u+v) = f_x^*(u) +_a f_x^*(v)$
3. L'assertion $u(x +_a y) = ux +_a uy$ provient de $f_{x+_a y}^*(u) = f_x^*(u) +_a f_y^*(u)$
4. L'assertion $u(vx) = (uv)x$ provient de

$$z = f_x^*(v) = vx \Rightarrow f_z^*(u) = f_x^*(uv) \ .$$

(v)

1. L'assertion $g(u+v) = g(u) + g(v)$ provient de (9.8) page 424
2. On montre d'abord que pour tout $(u,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$

$$g(uk) = g(u) \centerdot_a g(k) \ .$$

On pose

$$H = \{k \in \mathbb{Z}_+ / g(uk) = g(u) \centerdot_a g(k)\}$$

et on montre que $H = \mathbb{Z}_+$ en vérifiant

(a) $0 \in H$

(b) $k \in H \Rightarrow k+1 \in H$.

(a) Par définition $g(0) = 0_a$ par suite $g(0) = g(u) \cdot_a g(0)$.

(b) Si $k \in H$ alors $g(u(k+1)) = g(uk+u)$, ainsi *(iv) 1* permet d'affirmer que $g(u(k+1)) = g(uk) +_a g(u)$

— puisque $k \in H$ on obtient

$$g(u(k+1)) = g(u) \cdot_a g(k) +_a g(u)$$

— par distributivité

$$g(u(k+1)) = g(u) \cdot_a (g(k) + 1_a)$$

— par définition de g on a $g(k+1) = g(k) +_a 1_a$ d'oû

$$g(u(k+1)) = g(u) \cdot_a g(k+1)$$

et $k+1 \in H$.

Ainsi $H = \mathbb{Z}_+$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$

$$g(uk) = g(u) \cdot_a g(k) \ .$$

Enfin si $v = p - q$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ alors, puisque $uv + uq = up$

$$g(uv) + g(uq) = g(uv + uq) = g(up) = g(u) \cdot_a g(p)$$

par suite $g(uv) + g(u) \cdot_a g(q) = g(u) \cdot_a g(p)$ et

$$g(uv) = g(u) \cdot_a (g(p) - g(q)) = g(u) \cdot_a g(v) \ .$$

3. (a) D'abord s'il existe $n \in \mathbb{Z}_+$ vérifiant $n \neq 0$ et $g(n) = 0_a$ alors on a $g(n) = g(0)$ avec $n \neq 0$, par suite g n'est pas injective.

(b) Ensuite si g n'est pas injective alors il existe $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant $u \neq v$ et $g(u) = g(v)$

— si $u - v < 0$ alors $n = v - u$ est un élément non nul de $\mathbb{Z}_+$ vérifiant $g(n) = 0$

— si $u - v > 0$ alors $n = u - v$ est un élément non nul de $\mathbb{Z}_+$ vérifiant $g(n) = 0$

(vi) On montre d'abord que pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$

$$x \cdot_a (ky) = k(x \cdot_a y) \ .$$

Si g est l'application de $\mathbb{Z}_+$ dans A définie par $g(k) = x \cdot_a (ky)$ alors

— $g(0) = x \cdot_a 0_a = 0_a$

— par distributivité

$$g(k+1) = x \cdot_a (k+1)y = x \cdot_a (ky + y) = x \cdot_a (ky) + x \cdot_a y$$

ainsi $g(k+1) = g(k) + x \cdot_a y$

l'unicité (voir (i)) montre alors que $g(k) = f_{x \cdot_a y}(k) = k(x \cdot_a y)$. Ainsi, si h est l'application de $\mathbb{Z}$ dans A définie par $h(v) = x \cdot_a (vy)$ alors

$$\forall\ k \in \mathbb{Z}_+ \quad h(k) = f_{x \cdot_a y}(k) \ .$$

Ainsi, d'après (9.8) page 424, pour montrer que $h(v) = f^*_{x \cdot_a y}(v)$ il suffit de vérifier

$$\forall\ (v,w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad h(v+w) = h(u) +_a h(w) \ .$$

Or , par *(iv) 2* et par distributivité on obtient

$$h(v+w) = x \cdot_a ((v+w)y) = x \cdot_a (vy +_a wy) = x \cdot_a (vy) +_a x \cdot_a (wy) = h(v) +_a h(w)$$

ce qui montre que pour tout $v \in \mathbb{Z}$

$$h(v) = x \centerdot_a (vy) = f^*_{x \centerdot_a y}(v) = v(x \centerdot_a y) \ .$$

Ainsi on voit

$$(ux) \centerdot_a (vy) = v((ux) \centerdot_a y) \ .$$

Une vérification similaire montre que $(ux) \centerdot_a y = u(x \centerdot_a y)$ d'où

$$(ux) \centerdot_a (vy) = v(u(x \centerdot_a y))$$

et *(iv) 4.* donne alors

$$(ux) \centerdot_a (vy) = v(u(x \centerdot_a y)) = (vu)(x \centerdot_a y) = (uv)(x \centerdot_a y) \ .$$

■

Le lemme [9.2] page 424 fait apparaître une condition permettant d'immerger tout ensemble d'entiers relatifs dans un anneau.

Définition 9.2 *On note $(A, +_a, \centerdot_a)$ un anneau d'unité 1_a. On dit que l'anneau A est de* ***caractéristique nulle*** *s'il existe un ensemble d'entiers relatifs $(\mathbb{Z}, + \ , \ \centerdot \ , O)$ tel que*

$$n \in \mathbb{Z}_+ \text{ et } n \neq 0 \Rightarrow n1_a \neq 0_a \ . \tag{9.9}$$

Cette définition permet d'énoncer une tautologie.

Théorème 9.1 *Si $(A, +_a, \centerdot_a)$ est un anneau de caractéristique nulle alors pour tout ensemble d'entiers relatif $(\mathbb{Z}, +, \ \centerdot \ , O)$ il existe une application* ***injective*** *φ de $\mathbb{Z}$ dans A vérifiant :*

$$(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi(u + v) = \varphi(u) +_a \varphi(v) \text{ et } \varphi(uv) = \varphi(u) \centerdot_a \varphi(v) \ . \tag{9.10}$$

Preuve Si $(\mathbb{Z}', +' \ , \ \centerdot' \ , O')$ est un ensemble d'entiers relatifs tel que (9.9) est vérifiée alors le lemme [9.2] page 424 permet d'affirmer que l'application λ de $\mathbb{Z}'$ dans A définie par $u' \mapsto u'1_a$ est injective et vérifie : pour tout $(u', v') \in \mathbb{Z}' \times \mathbb{Z}'$

$$\lambda(u + v') = \lambda(u') +_a \lambda(v') \quad \text{et} \quad \lambda(u'v') = \lambda(u') \centerdot_a \lambda(v') \ .$$

D'autre part, le théorème [8.8] page 281 permet d'affirmer que pour tout ensemble d'entiers relatifs $(\mathbb{Z}, \ + \ , \ \centerdot \ , O)$ il existe une bijection g de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}'$ telle que pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$g(u + v) = g(u) +' g(v) \quad \text{et} \quad g(uv) = g(u)g(v) \ .$$

il est clair que $\varphi = \lambda \circ g$ est une injection vérifiant (9.10) ■

On aura besoin d'un peu de calcul sur les anneaux.

9.1.2 *Calcul formel sur les anneaux*

Si $(A, +, \ \centerdot)$ est un anneau et Λ un ensemble, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, A)$ des applications de Λ dans A hérite d'une structure d'anneau où :

1. L'addition est définie par

$$(f + g)(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$$

   - l'élément neutre additif de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, A)$ est l'application f définie par $\forall \ \lambda \in \Lambda \quad f(\lambda) = 0$
   - l'inverse additif de l'application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, A)$ est l'application $(-f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, A)$ définie par

$$\forall \ \lambda \in \Lambda \quad (-f)(\lambda) = -f(\lambda) \ .$$

2. La multiplication est définie par

$$(f \centerdot g)(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$$

l'élément neutre multiplicatif de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda, A)$ est l'application f définie par $\forall\ \lambda \in \Lambda \quad f(\lambda) = 1_a$

Le calcul formel sur les anneaux est l'outil qui permet de définir des polynômes (non commutatif). Il suffit d'adapter le lemme [8.8] page 220.

Lemme 9.3 *On note* $(\mathbb{Z},\ +\ ,\centerdot\ ,\ O)$ *un ensemble d'entiers relatifs et* $(A, +_a\ ,\ \centerdot_a)$ *un anneau où l'addition* $+_a$ *est notée* $+_a : (x, y) \mapsto x + y$ *et la multiplication* $\centerdot_a$ *est notée multiplicativement,* $\centerdot_a : (x, y) \mapsto xy$. *Enfin* $X \subset A$ *est un sous-ensemble de* A

(i) Il existe une unique application

$$\lambda_X : (m, x) \mapsto \lambda_X(m, x)$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, A)$ *vérifiant les propriétés 1 et 2 suivantes :*

1. *Pour tout* $(m, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$

$$\lambda_X(m, x)(0) = x_0^{m_0}$$

2. *Pour tout* $(m, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ *et* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\lambda_X(m, x)(n + 1) = \lambda_X(m, x)(n)x_{n+1}^{m_{n+1}}$$

Cette application vérifie :

a *Si* $m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+)$ *vérifie : Pour tout* $k > p$ $m_k = 0$ *alors pour tout* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ *et* $n \geq p$

$$\lambda_X(m, x)(n) = \lambda_X(m, x)(p)$$

b *Si* $(m, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ *et* $(p, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ *vérifient*

$$\forall\ k \in \{0, \ldots, n\} \quad m_k = p_k \quad \text{et} \quad x_k = y_k$$

alors

$$\forall\ k \in \{0, ..., n\} \quad \lambda_X(m, x)(k) = \lambda_X(p, y)(k)$$

c *la relation* λ_X^f *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X) \times \mathbb{Z}_+$ *dans* A *définie par*

$$\lambda_X^f = \{((m, x, n), y) \in (\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X) \times \mathbb{Z}_+) \times A / y = \lambda_X(m, x)(n)\}$$

est une application. De plus les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $X \subset \mathrm{im}(\lambda_X^f)$
2. $\mathrm{im}(\lambda_X^f)$ *est un sous monoïde de* $(A, \centerdot_a)$.

(ii) Si Γ *designe l'ensemble*

$$\Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathrm{im}(\lambda_X^f))$$

alors l'ensemble $\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$ *défini par* ([2])

$$\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A] = \{a \in A / \ \exists\ (n, (u, x)) \in \mathbb{Z}_+ \times \Gamma : a = \sum_{k=0}^{n} u_k x_k\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. $X \subset \mathrm{im}(\lambda_X^f) \subset \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$

2. L'application $(u, x) \mapsto ux$ de $\mathbb{Z} \times A$ dans A est définie par le lemme [9.2] page 424

2. $\mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A]$ *est un sous-groupe de* $(A,+_a)$

3. $\mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A]$ *est un sous-monoïde de* $(A,\centerdot_a)$

Preuve

$$(i)$$

Puisque par définition d'un ensemble d'entiers relatifs $(\mathbb{Z}_+,O)$ est un ensemble d'entiers naturels, le (i) suit du lemme [8.8] page 220 .

$$(ii)$$

1. Si $a\in \mathrm{im}(\lambda^f_X)$ on considère $(n,(u,x))\in \mathbb{Z}_+\times\Gamma$ où $n=0$, $u\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+,\mathbb{Z})$ est définie par

$$u_k=\begin{cases}1 & si \quad k=0\\ 0 & si \quad k\neq 0\end{cases}$$

et $x\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+,X)$ est définie par

$$\forall\ k\in\mathbb{Z}_+\quad x_k=a$$

alors il est clair que $a=\sum_{k=0}^{0}u_kx_k$, ce qui montre que

$$\mathrm{im}(\lambda^f_X)\subset \mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A]$$

2. On montre que $\mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A]$ est un sous groupe de $(A,+_a)$
   (a) D'abord $0_a\in\mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A]$ puisque si $u\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+,\mathbb{Z})$ est définie par

   $$\forall\ k\in\mathbb{Z}_+\quad u_k=0$$

   alors pour tout $n\in\mathbb{Z}_+$ et $x\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+,X)$

   $$0_a=\sum_{k=0}^{n}u_kx_k\ .$$

   (b) On montre $a\in\mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A]\Rightarrow -a\in\mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A]$. En effet, si $a\in\mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A]$ il existe $(n,(u,x))\in\mathbb{Z}_+\times\Gamma$ tel que

   $$a=\sum_{k=0}^{n}u_kx_k\ .$$

   On considère l'application $v\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+,\mathbb{Z})$ définie par $v_k=-u_k$ et on montre que

   $$-a=\sum_{k=0}^{n}v_kx_k\ .$$

   D'après le (9.3) du lemme [9.1] page 419

   $$\sum_{k=0}^{n}u_kx_k+\sum_{k=0}^{n}v_kx_k=\sum_{k=0}^{n}(u_kx_k+v_kx_k)$$

   d'après le lemme [9.2] page 424 on a

   $$u_kx_k+v_kx_k=(u_k+v_k)x_k$$

   ainsi puisque par définition $u_k+v_k=0$ on obtient

   $$\sum_{k=0}^{n}u_kx_k+\sum_{k=0}^{n}v_kx_k=\sum_{k=0}^{n}(u_k+v_k)x_k=0_a$$

   ce qui montre que $-a\in\mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A]$

(c) On montre $(a,b) \in \mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A] \times \mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A] \Rightarrow a+b \in \mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A]$.
En effet, si $(a,b) \in \mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A] \times \mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A]$ alors
— il existe $(n,(u,x)) \in \mathbb{Z}_+ \times \Gamma$ vérifiant

$$a = \sum_{k=0}^{n} u_k x_k$$

— il existe $(p,(v,y)) \in \mathbb{Z}_+ \times \Gamma$ vérifiant

$$b = \sum_{k=0}^{p} v_k y_k$$

On pose

$$H = \left\{ q \in \mathbb{Z}_+ / \sum_{k=0}^{n} u_k x_k + \sum_{k=0}^{q} v_k y_k \in \mathcal{P}[X,\mathbb{Z},A] \right\}$$

et on montre que $H = \mathbb{Z}_+$ en vérifiant

i. $0 \in H$

ii. $q \in H \Rightarrow q+1 \in H$.

i. Pour montrer que $0 \in H$ on considère l'application $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathrm{im}(\lambda_X^f))$ définie par

$$z_k = \begin{cases} x_k & si \quad k \leq n \\ y_{k-(n+1)} & si \quad k \geq n+1 \end{cases}$$

et l'application $w \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z})$

$$w_k = \begin{cases} u_k & si \quad k \leq n \\ v_{k-(n+1)} & si \quad k \geq n+1 \end{cases}$$

l'égalité $w_{n+1} z_{n+1} = v_0 y_0$ entraîne

$$\sum_{k=0}^{n+1} w_k z_k = \sum_{k=0}^{n} w_k z_k + v_0 y_0 = \sum_{k=0}^{n} u_k x_k + v_0 y_0$$

ainsi $0 \in H$.

ii. Si $q \in H$ alors il existe $(m,(w,z)) \in \mathbb{Z}_+ \times \Gamma$ vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n} u_k x_k + \sum_{k=0}^{q} v_k y_k = \sum_{k=0}^{m} w_k z_k$$

on considère l'application $t \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathrm{im}(\lambda_X^f))$ définie par

$$t_k = \begin{cases} z_k & si \quad k \leq m \\ y_{q+1} & si \quad k \geq q+1 \end{cases}$$

et l'application $s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z})$

$$s_k = \begin{cases} w_k & si \quad k \leq m \\ v_{q+1} & si \quad k \geq m+1 \end{cases}$$

Les égalités $s_{m+1} t_{m+1} = v_{q+1} y_{q+1}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k x_k + \sum_{k=0}^{q+1} v_k y_k = \sum_{k=0}^{n} u_k x_k + \sum_{k=0}^{q} v_k y_k + v_{q+1} y_{q+1} = \sum_{k=0}^{m} w_k z_k + v_{q+1} y_{q+1}$$

et

$$\sum_{k=0}^{m+1} s_k t_k = \sum_{k=0}^{m} w_k z_k + v_{q+1} y_{q+1}$$

entraînent

$$\sum_{k=0}^{n} u_k x_k + \sum_{k=0}^{q+1} v_k y_k = \sum_{k=0}^{m+1} s_k t_k$$

et montrent que $q+1 \in H$.

Ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{Z}_+$. En particulier on obtient

$$a + b = \sum_{k=0}^{n} u_k x_k + \sum_{k=0}^{p} v_k y_k \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$$

Les points (a), (b), (c) montre que $\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$ est un sous-groupe de $(A, +_a)$.

3. On montre que $\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$ est un sous-monoïde de $(A, \centerdot_a)$.
   (a) Puisque $1_a \in \mathrm{im}(\lambda_X^f)$ il est clair que $1_a \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$
   (b) On montre $(a, b) \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A] \times \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A] \Rightarrow ab \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$.
   En effet, si $(a, b) \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A] \times \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$ alors
   — il existe $(n, (u, x)) \in \mathbb{Z}_+ \times \Gamma$ vérifiant

$$a = \sum_{k=0}^{n} u_k x_k$$

   — il existe $(p, (v, y)) \in \mathbb{Z}_+ \times \Gamma$ vérifiant

$$b = \sum_{k=0}^{p} v_k y_k$$

   On pose

$$H = \left\{ q \in \mathbb{Z}_+ / \left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k \right) \left(\sum_{k=0}^{q} v_k y_k \right) \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A] \right\}$$

   et on montre que $H = \mathbb{Z}_+$ en vérifiant
   i. $0 \in H$
   ii. $q \in H \Rightarrow q+1 \in H$.

   i. Pour montrer que $0 \in H$ on montre :

$$\forall\ (v, y) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{im}(\lambda_X^f) \quad \left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k \right) vy \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A] \tag{9.11}$$

   En effet, d'après le lemme [9.1] page 419 on a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k \right) vy = \sum_{k=0}^{n} (u_k x_k)(vy)$$

   et d'après le lemme [9.2] page 424 $(u_k x_k)(vy) = (u_k v) x_k y$, ainsi, si $w \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z})$ et $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathrm{im}(\lambda_X^f))$ sont définies par

$$w_k = u_k v \quad \text{et} \quad z_k = x_k y$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} w_k z_k = \sum_{k=0}^{n} (u_k v)(x_k y) = \sum_{k=0}^{n} (u_k x_k)(vy) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k\right) vy$$

Ce qui montre que $0 \in H$

ii. Si $q \in H$ alors

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{q} v_k y_k\right) \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$$

mais par définition

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{q+1} v_k y_k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{q} v_k y_k + v_{q+1} y_{q+1}\right)$$

ainsi, par distributivité

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{q+1} v_k y_k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{q} v_k y_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k\right) v_{q+1} y_{q+1}.$$

Or

— Par (9.11)

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k\right) v_{q+1} y_{q+1} \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$$

— Puisque $q \in H$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{q} v_k y_k\right) \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$$

Ceci montre que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{q+1} v_k y_k\right)$$

est somme de deux éléments de $\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$, et on vient de voir que $\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$ est un groupe additif, par suite $q + 1 \in H$.

Ainsi $H = \mathbb{Z}_+$ et en particulier

$$ab = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{p} v_k y_k\right) \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A] \ .$$

■

Les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$ ont droit à une définition .

Définition 9.3 *On note $(\mathbb{Z}, +, \boldsymbol{.})$ un ensemble d'entiers relatifs, $(A, +_a, \boldsymbol{.}_a)$ un anneau et $X \subset A$ un sous-ensemble de A, l'ensemble $\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$ défini par le lemme* [9.3] *page* 432 *est appelé l'ensemble des* ***combinaisons polynômiales*** *d'éléments de X à coefficient dans $\mathbb{Z}$.*

On aura besoin de construire et d'étudier, en analyse, des anneaux ordonnés.

9.1.3 *Anneaux ordonnés*

Définition 9.4 *On note $(A,+,\centerdot)$ un anneau, O un ordre sur A, on dit que l'ordre sur A est* ***compatible*** *avec l'addition et la multiplication si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout $a \in A$ l'application t_a de A dans A définie par*
$$t_a(x) = a + x$$
est croissante.
2. *Pour tout $a > 0_a$ les application μ_a^d et μ_a^g de A dans A définies par*
$$\mu_a^d(x) = ax \quad \text{et} \quad \mu_a^g(x) = xa$$
sont strictement croissantes.

Un anneau ordonné est un anneau muni d'un ordre total compatible avec l'addition et la multiplication.

Définition 9.5 *Un* ***anneau ordonné*** *est un quadruplet $(A,+,\centerdot,O)$ qui vérifie les propriétés suivantes*

1. *$(A,+,\centerdot)$ est un anneau*
2. *O est un ordre* ***total*** *sur A*
3. *O est compatible avec l'addition et la multiplication.*

Par définition tout ensemble d'entiers relatifs est un anneau ordonné (voir définition [8.25] page 280). Les propriétés des anneaux s'énoncent simplement lorsqu'on utilise les notations suivantes

Notation 9.1 *(notations standards sur les anneaux)*

1. *Soit $(A,+,\centerdot,O)$ est un anneau ordonné dont l'élément neutre additif est noté 0_a. On note*
   — $A_+ = \{x \in A / x \geq 0_a\}$
   — $A_+^* = \{x \in A_+ / x \neq 0_a\}$
   — $A_- = \{x \in A / x \leq 0_a\}$
   — $A_-^* = \{x \in A_- / x \neq 0_a\}$
2. *Si $(A,+_a,\centerdot_a)$ est un anneau où l'addition $+_a$ est notée $[+_a : (x,y) \mapsto x+y]$ et la multiplication $\centerdot_a$ est notée $[\centerdot_a : (x,y) \mapsto xy]$, si C et D sont des sous-ensembles de A on note*
   (a)
   $$C + D = \{x \in A / \exists\ (c,d) \in C \times D : x = c + d\}$$
   (b)
   $$C - D = \{x \in A / \exists\ (c,d) \in C \times D : x = c - d\}$$
   (c)
   $$CD = \{x \in A / \exists\ (c,d) \in C \times D : x = cd\}$$
   (d)
   $$a + D = \{a\} + D = \{x \in A / \exists\ d \in D : x = a + d\}$$
   (e)
   $$aD = \{a\}D = \{x \in A / \exists\ d \in D : x = ad\}$$

Le lemme suivant donne les premières règles de calculs dans les anneaux ordonnés.

Lemme 9.4 *On note $(A,+,\centerdot,O)$ un anneau ordonné.*
(i) Si $(a,b) \in A \times A$ alors

1. *Si $(x,y) \in A \times A$ vérifie*
$$x \leq a \quad \text{et} \quad y \leq b$$
alors
$$x + y \leq a + b$$

2. $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0_a \Leftrightarrow -a \leq -b$
3. *Pour que* $a > 0_a$ *il faut et il suffit que* $-a < 0_a$
4. *Pour que* $a < 0_a$ *il faut et il suffit que* $-a > 0_a$
5. $A_- = \{x \in A / -x \in A_+\}$ *et* $A_+ = \{x \in A / -x \in A_-\}$
6. $A = A_+ - A_+$
7. $A_+ + A_+ \subset A_+$
8. $A_- + A_- \subset A_-$
9. $A_+ A_+ \subset A_+$
10. $A_- A_- \subset A_+$
11. $A_+ A_- \subset A_-$ *et* $A_- A_+ \subset A_-$

(ii) *A est **intègre**, c'est à dire :*

$$ax = 0_a \iff [a = 0_a \quad \text{ou} \quad x = 0_a]$$

(iii) *Pour tout ensemble d'entiers relatifs* $(\mathbb{Z}, +, \centerdot, O_e)$ *et pour tout* $a \in A_+^*$ *l'application* φ_a *de* $\mathbb{Z}_+$ *dans* A *définie par*

$$\varphi_a(n) = na$$

est strictement croissante.

(iv) *Si* $(A, +_a, \centerdot_a, O)$ *est un anneau ordonné d'unité* 1_a *telle que* $1_a \neq 0_a$ *alors* $1_a > 0_a$.

(v) *Si* $(A, +_a, \centerdot_a, O)$ *est un anneau ordonné d'unité* 1_a *telle que* $1_a \neq 0_a$ *et* $(\mathbb{Z}, +, \centerdot, O_e)$ *est un ensemble d'entiers relatifs, l'application* λ *de* $\mathbb{Z}$ *dans* A *définie par* ([3])

$$\lambda(u) = u1_a$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *Pour tout* $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\lambda(u + v) = \lambda(u) + \lambda(v), \quad \lambda(-u) = -\lambda(u) \quad \text{et} \quad \lambda(uv) = \lambda(u)\lambda(v) .$$

2. λ *est strictement croissante et en particulier injective.*
3. *L'ensemble* $\mathbb{Z}' = \mathrm{im}(\lambda) = \{x \in A / \exists\ u \in \mathbb{Z} : x = \lambda(u)\}$ *possède les propriétés suivantes :*
   (a) *Si* $+'$ *et* $\centerdot'$ *sont les restrictions de* $+_a$ *et* $\centerdot_a$ *à* $\mathbb{Z}' \times \mathbb{Z}'$ *alors* $(\mathbb{Z}', +', \centerdot')$ *est un anneau commutatif et*
   — *l'élément neutre de* $(\mathbb{Z}', +')$ *est* 0_a
   — *l'unité de* $(\mathbb{Z}', \centerdot')$ *est* 1_a.
   (b) *Si* $O'_e = O \cap (\mathbb{Z}' \times \mathbb{Z}')$ *et* $\mathbb{Z}'_+ = A_+ \cap \mathbb{Z}'$ *alors*
      i. $\mathbb{Z}'_+ = \lambda(\mathbb{Z}_+)$
      ii. $(\mathbb{Z}'_+, O'_e)$ *est bien ordonné de succession*

$$s(x) = x +' 1_a = x + 1_a$$

      iii. $(\mathbb{Z}', +', \centerdot', O'_e)$ *est un ensemble d'entiers relatifs.*

(vi) *Pour que* $(A, +, \centerdot, O)$ *soit un ensemble d'entiers relatifs il faut et il suffit que* $1_a \neq 0_a$ *et* (A_+, O) *soit bien ordonné.*

(vii) *Posons, pour tout* $a \in A$ ([4])

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0_a \\ -a & si \quad a \leq 0_a \end{cases}$$

alors pour tout $(x, y) \in A \times A$

3. Voir lemme [9.2] page 424
4. On rappelle qu'un anneau ordonné est totalement ordonné par définition

1. $|x| = |-x|$

2. $|x| \geq 0_a$ *et* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0_a$

3. $|xy| = |x||y|$

4. $|x+y| \leq |x| + |y|$

5. *Si* $\varepsilon \in A_+$ *alors*

$$|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$$

et

$$|x-y| \leq \varepsilon \Leftrightarrow y-\varepsilon \leq x \leq y+\varepsilon$$

(viii) Si $(\mathbb{Z}, +, \centerdot, O)$ *est un ensemble d'entiers relatifs, alors :*

1. pour tout couple d'applications $(x, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, A)$ *vérifiant*

$$\forall\ k \in \mathbb{Z}_+ \quad x_k \leq y_k$$

on a

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad \sum_{k=0}^{n} x_k \leq \sum_{k=0}^{n} y_k\ . \tag{9.12}$$

2. pour toute application $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, A)$ *on a*

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad |\sum_{k=0}^{n} x_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |x_k| \tag{9.13}$$

Preuve

(i)

1. La croissance de l'application $t \mapsto x + t$ montre que

$$x + y \leq x + b$$

et La croissance de l'application $t \mapsto t + b$ montre que

$$x + b \leq a + b$$

ainsi

$$x + y \leq x + b \leq a + b\ .$$

2. (a) On montre $a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0_a$. Puisque l'application $t_{-b} : A \mapsto A$ défini par

$$t_{-b}(x) = x - b$$

est croissante on a, puisque $t_{-b}(a) = a - b$ et $t_{-b}(b) = 0_a$

$$a \geq b \Rightarrow t_{-b}(a) \geq t_{-b}(b) \Rightarrow a - b \geq 0_a$$

(b) On montre $a - b \geq 0_a \Rightarrow -b \geq -a$. Puisque l'application $t_{-a} : A \mapsto A$ défini par

$$t_{-a}(x) = x - a$$

est croissante on a, puisque $t_{-a}(a-b) = -b$ et $t_{-a}(0_a) = -a$

$$a - b \geq 0_a \Rightarrow t_{-a}(a-b) \geq t_{-a}(0_a) \Rightarrow -b \geq -a$$

(c) On montre $-b \geq -a \Rightarrow a - b \geq 0_a$. Puisque l'application $t_a : A \mapsto A$ défini par

$$t_a(x) = x + a$$

est croissante on a, puisque $t_a(-b) = a - b$ et $t_a(-a) = 0_a$

$$-b \geq -a \Rightarrow t_a(-b) \geq t_a(-a) \Rightarrow a - b \geq 0_a$$

(d) On montre $a - b \geq 0_a \Rightarrow a \geq b$. Puisque l'application $t_b : A \mapsto A$ défini par

$$t_b(x) = x + b$$

est croissante on a, puisque $t_b(a - b) = a$ et $t_b(0_a) = b$

$$a - b \geq 0_a \Rightarrow t_b(a - b) \geq t_b(0_a) \Rightarrow a \geq b$$

3. (a) D'abord on a $a \neq 0_a \Leftrightarrow -a \neq 0_a$ puisque d'après le lemme [9.1] page 419 on a

$$-a = 0_a \Leftrightarrow a = -(-a) = -0_a = 0_a$$

(b) Ensuite d'après *2* on a

$$a \geq 0_a \Leftrightarrow -a \leq -0_a \Leftrightarrow -a \leq 0_a\ .$$

4. (a) D'abord on a $a \neq 0_a \Leftrightarrow -a \neq 0_a$ puisque d'après le lemme [9.1] page 419 on a

$$-a = 0_a \Leftrightarrow a = -(-a) = -0_a = 0_a$$

(b) Ensuite d'après *2* on a

$$a \leq 0_a \Leftrightarrow -a \geq -0_a \Leftrightarrow -a \geq 0_a\ .$$

5. C'est la traduction de *3* et *4*
6. Si $x \in A$ on pose

$$x^+ = \max\{x, 0_a\} = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0_a \\ 0_a & si \quad x \leq 0_a \end{cases}$$

et

$$x^- = \max\{-x, 0_a\} = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0_a \\ 0_a & si \quad x \geq 0_a \end{cases}$$

alors $(x^+, x^-) \in A_+ \times A_+$ et, puisque A est totalement ordonné,

$$x = x^+ - x^-$$

ainsi

$$A \subset A_+ - A_+ \subset A$$

7. il s'agit de montrer

$$(a, b) \in A_+ \times A_+ \Rightarrow a + b \in A_+\ .$$

Si $(a, b) \in A_+ \times A_+$ alors la croissance de l'application $t_b : A \mapsto A$ définie par

$$t_b(x) = x + b$$

montre que, puisque $t_b(a) = a + b$ et $t_b(0_a) = b$,

$$a \geq 0_a \Rightarrow t_b(a) \geq t_b(0_a) \Rightarrow a + b \geq b \geq 0_a\ ,$$

par suite $A_+ + A_+ \subset A_+$

8. il s'agit de montrer
$$(a,b) \in A_- \times A_- \Rightarrow a+b \in A_- \ .$$
Si $(a,b) \in A_- \times A_-$ alors la croissance de l'application $t_b : A \mapsto A$ définie par
$$t_b(x) = x + b$$
montre que, puisque $t_b(a) = a+b$ et $t_b(0_a) = b$,
$$a \leq 0_a \Rightarrow t_b(a) \leq t_b(0_a) \Rightarrow a+b \leq b \leq 0_a \ ,$$
par suite $A_- + A_- \subset A_-$
9. il s'agit de montrer
$$(a,b) \in A_+ \times A_+ \Rightarrow ab \in A_+ \ .$$
— si $a = 0_a$ alors $ab = 0_a \in A_+$
— Si $a > 0_a$ et $(a,b) \in A_+ \times A_+$ alors la croissance de l'application $\mu_a : A \mapsto A$ définie par
$$\mu_a(x) = ax$$
montre que, puisque $\mu_a(b) = ab$ et $\mu_a(0_a) = 0_a$,
$$b \geq 0_a \Rightarrow \mu_a(b) \geq \mu_a(0_a) \Rightarrow ab \geq 0_a \ ,$$
par suite $A_+A_+ \subset A_+$
10. il s'agit de montrer
$$(a,b) \in A_- \times A_- \Rightarrow ab \in A_+ \ .$$
Mais d'après le lemme [9.1] page 419 on a
$$ab = (-a)(-b)$$
ainsi d'après *5* on obtient $ab \in A_+A_+$ et *9* montre que $ab \in A_+$.
11. (a) D'abord on montre $A_+A_- \subset A_-$. Il s'agit de montrer
$$(a,b) \in A_+ \times A_- \Rightarrow ab \in A_- \ .$$
Mais d'après le lemme [9.1] page 419 on a
$$-ab = a(-b)$$
ainsi d'après *5* on obtient $-ab \in A_+A_+$ et *9* montre que $-ab \in A_+$, par suite $ab \in A_-$.
(b) Ensuite on montre $A_+A_- \subset A_-$. Il s'agit de montrer
$$(a,b) \in A_- \times A_+ \Rightarrow ab \in A_- \ .$$
Mais d'après le lemme [9.1] page 419 on a
$$-ab = (-a)b$$
ainsi d'après *5* on obtient $-ab \in A_+A_+$ et *9* montre que $-ab \in A_+$, par suite $ab \in A_-$.

(ii)

On montre
$$[a \neq 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0] \Rightarrow ax \neq 0 \ .$$

1. On montre $[a > 0_a$ et $x \neq 0_a \Rightarrow ax \neq 0_a]$. En effet la stricte croissance de l'application $\mu_a^d : A \mapsto A$ définie par
$$\mu_a^d(x) = ax$$
montre
— si $x > 0_a$ alors $\mu_a^d(x) > \mu_a^d(0_a)$, ainsi l'égalité $\mu_a^d(0_a) = 0_a$ donne $ax > 0_a$
— si $x < 0_a$ alors $\mu_a^d(x) < \mu_a^d(0_a)$, ainsi l'égalité $\mu_a^d(0_a) = 0_a$ donne $ax < 0_a$
2. On montre $[a < 0_a$ et $x \neq 0_a \Rightarrow ax \neq 0_a]$. En effet si $ax = 0_a$ alors $-ax = 0_a$ et d'après le lemme [9.1] page 419 on a $-ax = (-a)x$, par suite, puisque $-a > 0_a$,ce qu'on vient de voir en 1 permet d'affirmer :
$$ax = 0_a \Rightarrow (-a)x = 0_a \Rightarrow x = 0_a$$

(iii)

Remarquons que si $a > 0_a$ alors
$$\forall\, x \in A \quad x + a > x$$
En effet, si $t_x : A \mapsto A$ est l'application définie par
$$t_x(a) = a + x\ .$$
la stricte croissance de t_x montre que
$$a > 0_a \Rightarrow t_x(a) > t_x(0_a) \Rightarrow x + a > x\ .$$
Mais par définition (voir lemme [9.2] page 424)
$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_+ \quad \varphi_a(n+1) = \varphi_a(n) + a$$
ainsi, puisque $a > 0_a$,
$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_+ \quad \varphi_a(n+1) > \varphi_a(n)$$
ce qui montre que φ_a est srictement croissante de $(\mathbb{Z}_+, O_e)$ dans (A, O).

(iv)

On montre $1_a \leq 0_a \Rightarrow 1_a = 0_a$. En effet, si $1_a \leq 0_a$ alors d'après (i) on a $-1_a \geq 0_a$, par suite $(-1_a)(-1_a) = 1_a \geq 0_a$ et
$$0_a \leq 1_a \leq 0_a\ .$$

(v)

1. Les égalités
$$\lambda(u+v) = \lambda(u) + \lambda(v) \quad \text{et} \quad \lambda(uv) = \lambda(u)\lambda(v)$$
sont montrées au lemme [9.2] (p 424). Il reste à montrer que
$$\lambda(-u) = -\lambda(u)\ .$$
Mais en posant $v = -u$ dans l'égalité $\lambda(u+v) = \lambda(u) + \lambda(v)$ on obtient
$$0_a = \lambda(0) = \lambda(u + (-u)) = \lambda(u) + \lambda(-u)\ .$$
2. (a) D'abord on montre que
$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_+^* \quad \lambda(n) > 0_a\ .$$
On pose
$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / \lambda(n+1) > 0_a\}$$
et on montre que $H = \mathbb{Z}_+$ en vérifiant

i. $0 \in H$

ii. $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$.

i. $0 \in H$ puisque par définition $\lambda(1) = 1_a$ et d'après (iv) on a $1_a > 0_a$.

ii. Si $n \in H$ on a $\lambda(n+1) > 0_a$ ainsi

$$\lambda(n+1) + 1_a \geq 1_a > 0_a$$

or par définition $\lambda((n+1)+1) = \lambda(n+1) + 1_a$, ce qui montre que $n+1 \in H$

(b) On montre $u > v \Rightarrow \lambda(u) > \lambda(v)$. En effet, si $u > v$ alors $u - v \in \mathbb{Z}_+^*$ et, puisque $\lambda(u-v) = \lambda(u) - \lambda(v)$, (a) permet d'affirmer que

$$\lambda(u) - \lambda(v) > 0_a$$

par suite $\lambda(u) > \lambda(v)$.

3. (a) Puisque $\lambda(0) = 01_a = 0_a$ et

$$\lambda(u+v) = \lambda(u) + \lambda(v)$$

on a $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[(\mathbb{Z},+),(A,+_a)]$ ainsi le lemme [8.15] page 241 montre que $\mathrm{im}(\lambda)$ est un sous-monoïde de $(A,+_a)$. D'autre part, pour tout $u \in \mathbb{Z}$, l'égalité

$$\lambda(u) + \lambda(-u) = \lambda(u-u) = \lambda(0) = 0_a$$

montre que $\lambda(-u) = -\lambda(u)$ par suite $\mathrm{im}(\lambda)$ est un sous-groupe de $(A,+_a)$.
Puisque $\lambda(1) = 11_a = 1_a$ et

$$\lambda(uv) = \lambda(u)\lambda(v)$$

on a $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[(\mathbb{Z},\centerdot),(A,\centerdot_a)]$ ainsi le lemme [8.15] page 241 montre que $\mathrm{im}(\lambda)$ est un sous-monoïde de $(A,\centerdot_a)$

(b) i. (α) D'abord on montre $\lambda(\mathbb{Z}_+) \subset A_+$. En effet, puisque λ est strictement croissante

$$n \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \lambda(n) \geq \lambda(0) \geq 0_a\ ,$$

(β) Ensuite on montre $A_+ \cap \mathbb{Z}' \subset \lambda(\mathbb{Z}_+)$. Si $x \in A_+ \cap \mathbb{Z}'$ alors il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = u1_a \geq 0\ .$$

la croissance stricte de λ montre

$$u < 0 \Rightarrow u1_a < 0_a$$

par suite

$$u1_a \geq 0_a \Rightarrow u \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow x = u1_a \in \lambda(\mathbb{Z}_+)\ .$$

ii. (γ) D'abord on montre que tout sous-ensemble non vide de $(\lambda(\mathbb{Z}_+), O'_e)$ possède un minimum. Si X est un sous-ensemble non vide de $\lambda(\mathbb{Z}_+)$ on pose

$$E = \lambda^{-1}(X) = \{k \in \mathbb{Z}_+ / \lambda(k) \in X\}\ .$$

Puisque $(\mathbb{Z}_+, O_e)$ est bien ordonné E possède un minimum :

$$n_0 = \min_{O_e}\{k : k \in E\}$$

on montre que

$$\lambda(n_0) = \min_{O'_e}\{x : x \in X\}\ .$$

— Puisque $n_0 \in E$ on a $\lambda(n_0) \in X$
— Si $x \in X$ il existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tel que $x = \lambda(k)$ ainsi $\lambda(k) \in X$ et $k \in E$, par suite

$$n_0 \leq k$$

la croissance de λ montre alors que $\lambda(n_0) \leq \lambda(k)$ par suite

$$\forall\ x \in X \quad \lambda(n_0) \leq x\ .$$

(δ) On montre que la succession de $(\lambda(\mathbb{Z}_+), O'_e)$ est

$$s(x) = \min_{O'_e}\{y : y \in]x, \rightarrow [\} = x + 1_a\ .$$

Puisque pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$ on a $\lambda(k+1) = \lambda(k) + 1_a$ il suffit de montrer que

$$\forall\ k \in \mathbb{Z}_+ \quad s(\lambda(k)) = \min_{O'_e}\{y : y \in]\lambda(k), \rightarrow [\} = \lambda(k+1)$$

Puisque $\lambda(k+1) > \lambda(k)$ on a $s(\lambda(k)) \leq \lambda(k+1)$. Il reste à montrer

$$[(\lambda(k), y) \in O'_e \quad \text{et} \quad y \neq \lambda(k)] \Rightarrow (\lambda(k+1), y) \in O'_e\ .$$

Mais si $(\lambda(k), y) \in O'_e$ alors, puisque $O'_e \subset \lambda(\mathbb{Z}) \times \lambda(\mathbb{Z})$, $y \in \lambda(\mathbb{Z})$ ainsi il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $y = \lambda(u)$.
— Puisque $y > \lambda(k)$ on a $u > k$, en effet, si $u \leq k$ alors $y = \lambda(u) \leq \lambda(k) < y$.
— Puisque $u > k$ on a $k + 1 \leq u$ par suite $\lambda(k+1) \leq \lambda(u)$ et $(\lambda(k+1), y) \in O'_e$.

iii. Pour montrer que $(\mathbb{Z}', +', \cdot', O'_e)$ est un ensemble d'entiers relatifs il reste à voir que $(\lambda(\mathbb{Z}_+), O'_e)$ est sans élément maximal et que le seul ensemble héréditaire de $(\lambda(\mathbb{Z}_+), O'_e)$ est $\lambda(\mathbb{Z}_+)$, mais si $x \in \lambda(\mathbb{Z}_+)$ alors $x + 1_a \in \lambda(\mathbb{Z}_+)$ et $x + 1_a > x$, par suite x n'est pas maximal.Enfin, si H' est un sous-ensemble héréditaire de $(\lambda(\mathbb{Z}_+), O'_e)$ on montre que l'ensemble

$$H = \lambda^{-1}(H') = \{k \in \mathbb{Z}_+ / \lambda(k) \in H\}$$

est héréditaire dans $(\mathbb{Z}_+, O_e)$.
— D'abord $0 \in H$ puisque $\lambda(0) = 0_a$ et 0_a est le plus petit élément de $\lambda(\mathbb{Z}_+)$(et appartient donc à H') .
— Ensuite, si $n \in H$ alors $\lambda(n) \in H'$, H' étant héréditaire on a $s(\lambda(n)) \in H'$ mais la succession de $(\lambda(\mathbb{Z}_+), O'_e)$ vérifie $s(\lambda(n)) = \lambda(n+1)$ par suite

$$n \in H \Rightarrow \lambda(n+1) \in H' \Rightarrow n + 1 \in H$$

Ainsi $H = \mathbb{Z}_+$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$ on a $\lambda(k) \in H'$ d'où

$$\lambda(\mathbb{Z}_+) \subset H' \subset \lambda(\mathbb{Z}_+)\ .$$

(vi)

On note $(\mathbb{Z}, +, \cdot,\ O_e)$ un ensemble d'entiers relatifs, d'après (v) l'application λ de $\mathbb{Z}$ dans A définie par

$$\lambda(u) = u1_a$$

est strictement croissante, on montre que si (A_+, O) est bien ordonné alors $\lambda(\mathbb{Z}) = A$.

1 D'abord on montre $\lambda(\mathbb{Z}_+) = A_+$.

La croissance de λ et l'égalité $\lambda(0) = 0_a$ montre que $\lambda(\mathbb{Z}_+) \subset A_+$. L'assertion $\lambda(\mathbb{Z}_+) \neq A_+$ est donc équivalente à $A_+ \cap (\lambda(\mathbb{Z}_+))^c \neq \varnothing$. Puisque (A_+, O) est bien ordonné, si $A_+ \cap (\lambda(\mathbb{Z}_+))^c \neq \varnothing$ cet ensemble possède un minimum. On pose $\alpha = \min_O\{x : x \in A_+ \cap (\lambda(\mathbb{Z}_+)^c\}$

— Puisque $\alpha \in A_+$ on a $\alpha \geq 0_a$
— puisque $\alpha \notin \lambda(\mathbb{Z}_+)$ on a $\alpha \neq 0_a$
par suite $\alpha > 0_a$.
Puisque $\alpha - 1_a < \alpha$ on a, en remarquant $x \in A_+ \cap (\lambda(\mathbb{Z}_+)^c \Rightarrow x \geq \alpha$,

$$\alpha - 1_a \in (A_+ \cap (\lambda(\mathbb{Z}_+)^c)^c$$

ainsi l'égalité

$$(A_+ \cap (\lambda(\mathbb{Z}_+)^c)^c = A_+^c \cup \lambda(\mathbb{Z}_+)$$

montre que

$$\alpha - 1_a \in A_+^c \quad \text{ou} \quad \alpha - 1_a \in \lambda(\mathbb{Z}_+) \ .$$

mais l'assertion $\alpha - 1_a \in \lambda(\mathbb{Z}_+)$ est fausse puisque si $\alpha - 1_a \in \lambda(\mathbb{Z}_+)$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tel que $\alpha = \lambda(k) + 1_a = \lambda(k+1)$, ce qui est impossible puisque $\alpha \notin \lambda(\mathbb{Z}_+)$. On a donc $\alpha - 1_a \in A_+^c$ et $0_a < \alpha < 1_a$. La compatibilité de l'ordre et de la multiplication montre alors que

$$0_a < \alpha^2 < \alpha < 1_a$$

puisque $x < \alpha \Rightarrow x \in A_+^c \cup \lambda(\mathbb{Z}_+)$ et $0_a < \alpha^2$ on obtient

$$\alpha^2 \in \lambda(\mathbb{Z}_+) \ .$$

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}_+$ tel que $\alpha^2 = \lambda(k)$ par suite

$$0_a < \lambda(k) < 1_a \quad \text{et} \quad \lambda(0) < \lambda(k) < \lambda(1)$$

la croissance stricte de λ montre alors que $0 < k < 1$ ce qui est impossible puisque 1 est le successeur de 0 dans $(\mathbb{Z}_+, O_e)$. Ainsi l'assertion

$$A_+ \cap (\lambda(\mathbb{Z}_+)^c \neq \varnothing$$

entraîne une assertion fausse, par suite

$$A_+ \cap (\lambda(\mathbb{Z}_+))^c = \varnothing \quad \text{et} \quad A_+ = \lambda(\mathbb{Z}_+) \ .$$

2 Ensuite on montre $\mathrm{im}(\lambda) = A$

Puisque

$$A = A_+ - A_+ = \lambda(\mathbb{Z}_+) - \lambda(\mathbb{Z}_+)$$

pour tout $x \in A$ il existe $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ tel que

$$x = \lambda(m) - \lambda(n) \ ,$$

ainsi l'égalité $\lambda(m-n) = \lambda(m) - \lambda(n)$ montre que

$$x = \lambda(m-n) \in \mathrm{im}(\lambda) \ .$$

D'après (v) $(\mathrm{im}(\lambda), +', \cdot', O'_e)$ est un ensemble d'entiers relatifs, de plus l'égalité $\mathrm{im}(\lambda) = A$ entraîne $+' = +_a$, $\cdot' = \cdot_a$ et $O'_e = O \cap (\mathrm{im}(\lambda) \times \mathrm{im}(\lambda)) = O$, ainsi $(A, +, \cdot, O)$ est un ensemble d'entiers relatifs.

(vii)

1. $|-x| = \max\{-x, -(-x)\} = \max\{-x, x\} = |x|$
2. — Si $x \geq 0_a$ alors $|x| = x \geq 0_a$ et si $x \leq 0_a$ alors $|x| = -x \geq 0_a$
   — si $x = 0_a$ alors $|x| = \max\{0_a, -0_a\} = 0_a$

— on montre

$$x \neq 0_a \Rightarrow |x| \neq 0_a \ .$$

En effet, si $x \neq 0_a$ alors
— si $x > 0_a$ $|x| = x \neq 0_a$
— si $x < 0_a$ $|x| = -x \neq 0_a$

3. (a) Si $(x, y) \in A_+ \times A_+$ alors $xy \in A_+$ par suite

$$|xy| = xy = |x||y|$$

(b) Si $(x, y) \in A_- \times A_+$ alors $xy \in A_-$ par suite

$$|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$$

(c) Si $(x, y) \in A_+ \times A_-$ alors $xy \in A_-$ par suite

$$|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$$

(d) Si $(x, y) \in A_- \times A_-$ alors $xy \in A_+$ par suite

$$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$$

4. (a) Si $x + y \leq 0_a$ alors

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$$

(b) Si $x + y \geq 0_a$ alors

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

5. (a) Si $|x| \leq \varepsilon$ alors

$$x \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad -x \leq \varepsilon$$

ainsi

$$x \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad x \geq -\varepsilon$$

(b) Si $x \leq \varepsilon$ et $x \geq -\varepsilon$ alors

$$x \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad -x \leq \varepsilon$$

ainsi

$$|x| = \max\{x, -x\} \leq \varepsilon$$

(c)

$$|x - y| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x - y \leq \varepsilon$$

ainsi

$$|x - y| \leq \varepsilon \Leftrightarrow y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \ .$$

(viii)

si

1. On pose

$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / \sum_{k=0}^{n} x_k \leq \sum_{k=0}^{n} y_k\}$$

et on montre que $H = \mathbb{Z}_+$ en vérifiant :

(a) $0 \in H$

(b) $n \in H \Rightarrow n + 1 \in H$

(a) D'abord $0 \in H$ puisque $x_0 \leq y_0$

(b) Si $n \in H$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \leq \sum_{k=0}^{n} y_k$$

et puisque $x_{n+1} \leq y_{n+1}$ d'après (i) 1. on a

$$\sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} y_k + y_{n+1}$$

par suite

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k \leq \sum_{k=0}^{n+1} y_k$$

et $n+1 \in H$.

2. On pose

$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / |\sum_{k=0}^{n} x_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |x_k|\}$$

et on montre que $H = \mathbb{Z}_+$ en vérifiant :

(a) $0 \in H$

(b) $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$

(a) D'abord $0 \in H$ puisque $|x_0| = |x_0|$

(b) Si $n \in H$ alors

$$|\sum_{k=0}^{n} x_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |x_k|$$

ainsi d'après (vii) *4*.

$$|\sum_{k=0}^{n+1} x_k| \leq |\sum_{k=0}^{n} x_k| + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=0}^{n} |x_k| + |x_{n+1}|$$

par suite

$$|\sum_{k=0}^{n+1} x_k| \leq \sum_{k=0}^{n+1} |x_k|$$

et $n+1 \in H$.

■

Ainsi tout anneau ordonné $(A, +, ., O)$ contient un ensemble d'entiers relatifs et pour que cet anneau soit un ensemble d'entiers relatifs il faut et il suffit que (A_+, O) soit bien ordonné. La proposition suivante permet de définir un anneau archimèdien.

Proposition et définition 9.1 *On note $(A, +, ., O)$ un anneau ordonné d'unité 1_a, d'élément neutre additif 0_a telle que $1_a \neq 0_a$ et $(\mathbb{N}', O')$ un ensemble d'entiers naturels.*

(i) L'application φ de $\mathbb{N}'$ dans A_+ définie par

$$\varphi(n) = n1_a$$

est strictement croissante et si $O_0 = O \cap (\mathrm{im}(\varphi) \times \mathrm{im}(\varphi))$ alors

$$(\mathrm{im}(\varphi), O_0)$$

est un ensemble d'entiers naturels d'élément minimum 0_a et de succession $s(k) = k + 1_a$.

(ii) Il existe un unique sous-ensemble $\mathbb{N}$ de A vérifiant les propriétés suivantes :

a $0_a \in \mathbb{N}$ *et* $0_a = \min_O\{k : k \in \mathbb{N}\}$

b $(\mathbb{N}, O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ *est un ensemble d'entiers naturels de succession*

$$s(n) = n + 1_a$$

(iii) Si $\mathbb{N}$ *est l'ensemble vérifiant les propriétés* **a** *et* **b** *du (ii) alors :*

c $(\mathbb{N}, +)$ *est un monoïde d'élément neutre* 0_a

d $(\mathbb{N}, .)$ *est un monoïde d'élément neutre* 1_a

(iv)

1. *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *vérifiant les propriétés* **a** *et* **b** *du (ii) est appelé l'ensemble des* ***entiers naturels*** *de* $(A, +, . \, , \, O)$
2. *On dit que* A *est* ***Archimédien*** *si pour tout* $a \in A_+^*$ *et* $b \in A$ *il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $ka > b$

Preuve

(i)

Puisque d'après le lemme [9.4] page 437 $1_a > 0_a$ et que par définition

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + 1_a$$

on a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

1. D'abord on montre que tout sous-ensemble non vide de $(\mathrm{im}(\varphi), O_0)$ possède un minimum. Si X est un sous-ensemble non vide de $\mathrm{im}(\varphi)$ on pose

$$E = \varphi^{-1}(X) = \{k \in \mathbb{N}' / \varphi(k) \in X\} \ .$$

Puisque $(\mathbb{N}', O')$ est bien ordonné E possède un minimum :

$$n_0 = \min_{O'}\{k : k \in E\}$$

on montre que

$$\varphi(n_0) = \min_{O_0}\{x : x \in X\} \ .$$

— Puisque $n_0 \in E$ on a $\varphi(n_0) \in X$

— Si $x \in X$ il existe $k \in \mathbb{N}'$ tel que $x = \varphi(k)$ ainsi $\varphi(k) \in X$ et $k \in E$, par suite

$$n_0 \leq k$$

la croissance de φ montre alors que $\varphi(n_0) \leq \varphi(k)$ par suite

$$\forall \; x \in X \quad \varphi(n_0) \leq x \ .$$

2. On montre que la succession de $(\mathrm{im}(\varphi), O_0)$ est

$$s(x) = \min_{O_0}\{y : y \in]x, \to [\} = x + 1_a \ .$$

Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}'$ on a $\varphi(k+1) = \varphi(k) + 1_a$ il suffit de montrer que

$$\forall \; k \in \mathbb{N}' \quad s(\varphi(k)) = \min_{O_0}\{y : y \in]\varphi(k), \to [\} = \varphi(k+1)$$

Puisque $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ on a $s(\varphi(k)) \leq \varphi(k+1)$. Il reste à montrer

$$[(\varphi(k), y) \in O_0 \quad \text{et} \quad y \neq \varphi(k)] \Rightarrow (\varphi(k+1), y) \in O_0 \ .$$

Mais si $(\varphi(k), y) \in O_0$ alors, puisque $O_0 \subset \varphi(\mathbb{N}') \times \varphi(\mathbb{N}')$, $y \in \varphi(\mathbb{N}')$ ainsi il existe $u \in \mathbb{N}'$ tel que $y = \varphi(u)$.

— Puisque $y > \varphi(k)$ on a $u > k$, en effet, si $u \leq k$ alors $y = \varphi(u) \leq \varphi(k) < y$.
— Puisque $u > k$ on a $k+1 \leq u$ par suite $\varphi(k+1) \leq \varphi(u)$ et $(\varphi(k+1), y) \in O_0$.

3. Pour montrer que $(\mathrm{im}(\varphi), O_0)$ est un ensemble d'entiers naturels il reste à voir que $(\mathrm{im}(\varphi), O_0)$ est sans élément maximal et que le seul ensemble héréditaire de $(\mathrm{im}(\varphi), O_0)$ est $\mathrm{im}(\varphi)$, mais si $x \in \mathrm{im}(\varphi)$ alors $x + 1_a \in \mathrm{im}(\varphi)$ et $x + 1_a > x$, par suite x n'est pas maximal. Enfin, si H' est un sous-ensemble héréditaire de $(\mathrm{im}(\varphi), O_0)$ on montre que l'ensemble

$$H = \varphi^{-1}(H') = \{k \in \mathbb{N}'/\varphi(k) \in H\}$$

est héréditaire dans $(\mathbb{N}', O')$.
— D'abord $0 \in H$ puisque par construction $\varphi(0) = 0_a$ et et la croissance de φ montre que 0_a est le plus petit élément de $\mathrm{im}(\varphi)$(et appartient donc à H').
— Ensuite, si $n \in H$ alors $\varphi(n) \in H'$, H' étant héréditaire on a $s(\varphi(n)) \in H'$ mais la succession de $(\mathrm{im}(\varphi), O_0)$ vérifie $s(\varphi(n)) = \varphi(n+1)$ par suite

$$n \in H \Rightarrow \varphi(n+1) \in H' \Rightarrow n+1 \in H$$

Ainsi $H = \mathbb{N}'$ et pour tout $k \in \mathbb{N}'$ on a $\varphi(k) \in H'$ d'où

$$\mathrm{im}(\varphi) \subset H' \subset \mathrm{im}(\varphi) \ .$$

(ii)

L'existence est assurée par (i), on montre l'unicité. Si $\mathbb{N}_0$ et $\mathbb{N}_1$ sont des sous-ensembles de A vérifiant **a** et **b** on montre que l'ensemble $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{N}_1$ est un sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}_0, O \cap (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0))$. Il est clair que 0_a est le minimum de $\mathbb{N}_0$ pour l'ordre $O \cap (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$, d'autre part

i L' hypothèse **a** donne $0_a \in \mathbb{N}_0 \cap \mathbb{N}_1$

ii L'hypothèse **b** donne

$$k \in \mathbb{N}_0 \cap \mathbb{N}_1 \Rightarrow s(k) = k + 1_a \in \mathbb{N}_0 \cap \mathbb{N}_1$$

Ainsi $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{N}_1 = \mathbb{N}_0$ et on montre de même que $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{N}_1 = \mathbb{N}_1$ par suite

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0 \cap \mathbb{N}_1 = \mathbb{N}_1$$

(iii)

c Puisque par définition $0_a \in \mathbb{N}$ il suffit de montrer

$$(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow n + k \in \mathbb{N} \ .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$H = \{k \in \mathbb{N}/n + k \in \mathbb{N}\}$$

et on montre que H est un sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O \cap \mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

1. D'abord $0_a = \min_O\{p : p \in \mathbb{N}\} \in H$ puisque $n \in \mathbb{N}$
2. Si $k \in H$ alors $n + k \in \mathbb{N}$ par suite $s(n+k) \in \mathbb{N}$ et par définition de la succession de $\mathbb{N}$ on a $s(n+k) = n + k + 1_a$ par suite $s(k) = k + 1_a \in H$

Ainsi $H = \mathbb{N}$.

d On a $1_a = s(0)$ ainsi $1_a \in \mathbb{N}$, il suffit donc de montrer

$$(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow n.k \in \mathbb{N} \ .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$H = \{k \in \mathbb{N}/n.k \in \mathbb{N}\}$$

et on montre que H est un sous-ensemble héréditaire de $(\mathbb{N}, O \cap \mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

1. D'abord $0_a = \min_O\{p : p \in \mathbb{N}\} \in H$ puisque $n.0_a = 0_a \in \mathbb{N}$
2. Si $k \in H$ alors $n.k \in \mathbb{N}$ et par définition de la succession de $\mathbb{N}$ on a $s(k) = k + 1_a$, par suite $n.s(k) = n.k + n$ est la somme de deux éléments de $\mathbb{N}$, et **c** montre alors que $n.s(k) \in \mathbb{N}$ comme somme d'éléments de $\mathbb{N}$.

■

On passe à l'étude des sous-anneaux.

9.2 *Sous-anneaux et anneaux quotients*

9.2.1 *Sous-anneaux*

Définition 9.6 *On note $(A, +, \centerdot)$ un anneau, un sous-ensemble B de A est appelé un* ***sous-anneau*** *de A si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *$(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$, c'est à dire :*
   (a) $x \in B \Rightarrow -x \in B$
   (b) $(x, y) \in B \times B \Rightarrow x + y \in B$
2. *$(B, \centerdot)$ est un sous-monoïde de $(A, \centerdot)$*

On note $\mathcal{A}(A)$ la famille des sous-anneaux de $(A, +, \centerdot)$

Une définition similaire tient pour les semi-anneaux.

Définition 9.7 *On note $(A, +, \centerdot)$ un semi-anneau, un sous-ensemble B de A est appelé un* ***sous-semi-anneau*** *de A si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *$(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$, c'est à dire :*
   (a) $x \in B \Rightarrow -x \in B$
   (b) $(x, y) \in B \times B \Rightarrow x + y \in B$
2. *La loi $\centerdot$ est interne sur B :*
$$(x, y) \in B \times B \Rightarrow x \centerdot y \in B\ .$$

On note $\mathcal{S}(A)$ la famille des sous-semi-anneaux de $(A, +, \centerdot)$

Si A est un anneau $B = \{0\}$ est un sous-semi-anneau de A et $B = A$ est un sous-anneau de A, si $X \subset A$ est un sous-ensemble de A l'ensemble $\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$ des combinaisons polynômiales construit sur X à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (voir définition [9.3] page 436) est un sous-anneau de A, c'est d'ailleurs le sous-anneau engendré par X qu'on définit maintenant.

Lemme 9.5 *On note $(A, +, \centerdot)$ un anneau et $\mathcal{A}$ une famille de sous-anneaux de A*

(i) L'ensemble
$$B = \bigcap_{F \in \mathcal{A}} F$$
est un sous-anneau de A.

(ii) Si $X \subset A$ est un sous-ensemble non vide de A il existe un unique sous-anneau B de A vérifiant les deux propriétés 1 et 2 suivantes :

1. *$X \subset B$*
2. *Si Λ est un sous-anneau de A vérifiant $X \subset \Lambda$ alors*
$$B \subset \Lambda$$

Preuve

(i)

1. D'abord on montre que $(B,+)$ est un sous-groupe :
   (a) Si $x \in B$ alors pour tout $F \in \mathcal{A}$ $x \in F$, par suite pour tout $F \in \mathcal{A}$ $-x \in F$ ainsi
   $$-x \in \bigcap_{F\in\mathcal{A}} F \ .$$
   (b) Si $(x,y) \in B \times B$ alors pour tout $F \in \mathcal{A}$ $(x,y) \in F \times F$, par suite pour tout $F \in \mathcal{A}$ on a $x+y \in F$ ainsi
   $$x+y \in \bigcap_{F\in\mathcal{A}} F \ .$$
2. Ensuite on montre que $(B,\boldsymbol{.})$ est un sous-monoïde de $(A,\boldsymbol{.})$
   (a) D'abord la loi $\boldsymbol{.}$ est interne sur B. Si $(x,y) \in B \times B$ alors pour tout $F \in \mathcal{A}$ on a $(x,y) \in F \times F$, par suite pour tout $F \in \mathcal{A}$ on obtient $x \boldsymbol{.} y \in F$ ainsi
   $$x \boldsymbol{.} y \in \bigcap_{F\in\mathcal{A}} F \ .$$
   (b) Ensuite on montre que $1_a \in B$. Pour tout $F \in \mathcal{A}$ on a $1_a \in F$, par suite
   $$1_a \in \bigcap_{F\in\mathcal{A}} F \ .$$

(ii)

Preuve de l'existence

On note
$$\mathcal{A}(X) = \{F \in \mathcal{A}(A)/X \subset F\}$$
alors $\mathcal{A}(X)$ est une famille d'anneaux et $A \in \mathcal{A}(X)$, on montre que
$$B = \bigcap_{F\in\mathcal{A}(X)} F$$
vérifie *(ii) 1* et *(ii) 2*, d'après (i) B est un sous-anneau de A, d'autre part :

1. puisque pour tout $F \in \mathcal{A}(X)$ on a $X \subset F$ on obtient
   $$X \subset \bigcap_{F\in\mathcal{A}(X)} F \ .$$
2. Si Λ est un sous-anneau de A et $X \subset \Lambda$ alors $\Lambda \in \mathcal{A}(X)$ par suite
   $$\bigcap_{F\in\mathcal{A}(X)} F \subset \Lambda \ .$$

Preuve de l'unicité

Si B et B' sont des sous-anneaux de A vérifiant *(ii) 1.* et *(ii) 2.* alors
— puisque $X \subset B'$ et B vérifie *(ii) 2.* on a
$$B \subset B'$$

— puisque $X \subset B$ et B' vérifie *(ii) 2.* on a

$$B' \subset B$$

■

Le lemme [9.5] page 450 permet de donner une définition.

Définition 9.8 *On note* $(A, +, \boldsymbol{.})$ *Un anneau et* $X \subset A$ *un sous-ensemble de* A*, on appelle* ***anneau engendré*** *par* X *le sous-anneau de* A *noté* $\mathbf{ann}(X)$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $X \subset \mathbf{ann}(X)$
2. *Si* B *est un sous-anneau de* A *vérifiant* $X \subset B$ *alors*

$$\mathbf{ann}(X) \subset B \ .$$

On a défini les combinaisons polynômiales sur un anneau (voir définition [9.3] page 436).

Théorème 9.2 *On note* $(\mathbb{Z}, +, \boldsymbol{.})$ *un ensemble d'entiers relatifs,* $(A, +_a, \star_a)$ *un anneau, et* X *un sous-ensemble de* A*. L'anneau engendré par* X *est l'ensemble* $\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$ *des combinaisons polynômiales d'éléments de* X *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$*.*

Preuve Dans toute la preuve 0_a est l'élément neutre du groupe $(A, +_a)$, 1_a est l'élément neutre du monoïde $(A, \star_a)$ et la loi $\star_a$ est notée multiplicativement ,

$$\star_a : (x, y) \mapsto xy \ .$$

1. D'abord d'après le lemme [9.3] page 432 $\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$ est un sous-anneau de A contenant X, par suite
$$\mathbf{ann}(X) \subset \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A] \ .$$
2. Il reste à montrer que si B est un sous-anneau de A vérifiant $X \subset B$ alors
$$\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A] \subset B$$
Pour cela on montre successivement (les notations sont celles du lemme [9.3])
   (a) Pour tout $(y, x, m) \in B \times X \times \mathbb{Z}_+$
   $$yx^m \in B \ .$$
   (b)
   $$\mathrm{im}(\lambda_X^f) \subset B$$
   (c) Pour tout $u \in \mathbb{Z}$ et $y \in B$
   $$uy \in B$$
   (d) $\mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A] \subset B$.

   Preuve de (a)... (d)

   (a) On pose
   $$H = \{m \in \mathbb{Z}_+ / yx^m \in B\}$$
   et on montre que $H = \mathbb{Z}_+$ en vérifiant
      i. $0 \in H$
      ii. $[m \in H \Rightarrow m + 1 \in H]$.

      i. puisque $x^0 = 1_a$ et $y \in B$ on a $0 \in H$.
      ii. si $m \in H$ alors $yx^m \in B$
      — puisque $X \subset B$ et $x \in X$ on a $x \in B$

— puisque B est stable pour la multiplication

$$yx^{m+1} = (yx^m)x \in B$$

ainsi $m + 1 \in H$.

(b) Il s'agit de montrer que pour tout $(m, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ et $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\lambda_X(m, x)(n) \in B$$

On pose

$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / \lambda_X(m, x)(n) \in B\}$$

et on montre que $H = \mathbb{Z}_+$ en vérifiant

i. $0 \in H$

ii. $[n \in H \Rightarrow n + 1 \in H]$.

i. puisque $\lambda_X(m, x)(0) = x_0^{m_0}$ et $1_a \in B$ (a) permet d'affirmer que $0 \in H$.

ii. si $n \in H$ alors $\lambda_X(m, x)(n) \in B$ puisque par définition

$$\lambda_X(m, x)(n + 1) = \lambda_X(m, x)(n)x_{n+1}^{m_{n+1}}$$

(a) permet d'affirmer que $n + 1 \in H$.

(c) si $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ vérifie $u = m - n$ les égalités (voir lemme [9.2] page 424)

$$my = ((m - n) + n)y = (m - n)y + ny$$

montre que

$$uy = my - ny \ ,$$

$(B, +_a)$ étant un groupe il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$ $ny \in B$ mais on vérifie aisément que l'ensemble

$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / ny \in B\}$$

est héréditaire dans $(\mathbb{Z}_+, O)$.

(d) si $b \in \mathcal{P}[X, \mathbb{Z}, A]$ alors il existe

$$(u, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathrm{im}(\lambda_X^f))$$

et $n \in \mathbb{Z}_+$ tel que

$$b = \sum_{k=0}^{n} u_k x_k \ .$$

On vérifie que pour tout $(u, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathrm{im}(\lambda_X^f))$ et $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k x_k \in B$$

On pose

$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / \sum_{k=0}^{n} u_k x_k \in B\}$$

et on montre que $H = \mathbb{Z}_+$ en vérifiant

i. $0 \in H$

ii. $[n \in H \Rightarrow n + 1 \in H]$.

i. puisque d'après (b) $\mathrm{im}(\lambda_X^f) \subset B$, (c) permet d'affirmer que $u_0 x_0 \in B$, ainsi $0 \in H$

ii. si $n \in H$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k x_k \in B$, or

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k x_k = \sum_{k=0}^{n} u_k x_k + u_{n+1} x_{n+1}$$

— d'après (b) et (c) $u_{n+1} x_{n+1} \in B$
— puisque $(B, +_a)$ est un sous groupe de $(A, +_a)$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k x_k + u_{n+1} x_{n+1} \in B$$

ainsi $n + 1 \in H$

et $H = \mathbb{Z}_+$

■

Si $(A, +_a, \star_a)$ et $(B, +_b, \star_b)$ sont des anneaux et

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[(A, +_a), (B, +_b)] \cap \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[(A, \star_a), (B, \star_b)]$$

il est facile de voir que l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in A / f(x) = 0_b\}$$

est un sous-semi-anneau de A et l'ensemble

$$\mathrm{im}(f) = \{b \in B / \exists\ x \in A : f(x) = b\}$$

est un sous-anneau de B.

Définition 9.9 *On note $(A, +_a, \star_a)$ et $(B, +_b, \star_b)$ des anneaux, une applcation $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A, B)$ est appelée un morphisme d'anneaux si*

1. *f est additive : $\forall\ (x, y) \in A \times A$*

$$f(x +_a y) = f(x) +_b f(y)$$

2. *f conserve les unités : $f(1_a) = 1_b$*
3. *f est multiplicative : $\forall\ (x, y) \in A \times A$*

$$f(x \star_a y) = f(x) \star_b f(y)$$

On note $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}[(A, +_a, \star_a), (B, +_b, \star_b)]$ l'ensemble des morphismes d'anneaux. Lorqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les lois cet ensemble est noté $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A, B)$

Une définition similaire tient pour les semi-anneaux.

Définition 9.10 *On note $(A, +_a, \star_a)$ et $(B, +_b, \star_b)$ des semi-anneaux, une applcation $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A, B)$ est appelée un morphisme de semi-anneaux si*

1. *f est additive : $\forall\ (x, y) \in A \times A$*

$$f(x +_a y) = f(x) +_b f(y)$$

2. f est multiplicative : $\forall\ (x,y) \in A \times A$

$$f(x \centerdot_a y) = f(x) \star_b f(y)$$

On note $\mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}[(A, +_a, \star_a), (B, +_b, \star_b)]$ *l'ensemble des morphismes de semi-anneaux. Lorqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les lois cet ensemble est noté* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A, B)$

Si A et B sont des anneaux il est clair que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ann}}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A, B)$ et qu'un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A, B)$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A, B)$ si $f(1_a) = 1_b$. Le lemme qui suit est une application directe des définitions.

Lemme 9.6 *On note* $(A_0, +_0, \star_0)$, $(A_1, +_1, \star_1)$ *et* $(A_2, +_2, \star_2)$ *des anneaux.*

(i)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A, A_1) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[(A, +_0), (A_1, +_1)] \cap \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[(A, \star_0), (A_1, \star_1)]$$

(ii) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}[(A, +_0, \star_0), (A_1, +_1, \star_1)]$ *et* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}[(A_1, +_1, \star_1), (A_2, +_2, \star_2)]$ *alors*

$$g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}[(A, +_0, \star_0), (A_2, +_2, \star_2)]$$

(iii) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}[(A, +_0, \star_0), (A_1, +_1, \star_1)]$ *et* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}[(A_1, +_1, \star_1), (A_2, +_2, \star_2)]$ *alors*

$$g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}[(A, +_0, \star_0), (A_2, +_2, \star_2)]$$

(iv) $id_{A_0} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}[(A_0, +_0, \star_0), (A_0, +_0, \star_0)]$

(v) Si $(\mathbb{Z}, +, \centerdot, O)$ *est un ensemble d'entiers relatifs et* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A_0, A_1)$ *est un morphisme d'anneaux alors*

1. *Pour tout* $(x, y) \in A_0 \times A_0$
$$g(x - y) = g(x) - g(y)$$
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}_+$
$$g(x^n) = (g(x))^n$$
3. *Pour tout* $u \in \mathbb{Z}$
$$g(ux) = ug(x)$$
4. *Pour tout* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, A_0)$ *et* $n \in \mathbb{Z}_+$
$$g(\sum_{k=0}^{n} x_k) = \sum_{k=0}^{n} g(x_k)$$
5. *Si* $X \subset A_0$ *est un sous-ensemble de* A_0*,l'image par* g *de toute combinaison polynômiale d'éléments de* X *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *est une combinaison polynômiale d'éléments de* $g(X)$ *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *et inversement. Autrement dit l'égalité*
$$g(\mathcal{P}(X, \mathbb{Z}, A_0)) = \mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$$
est vérifiée.

(vi) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}[(A_0, +_0, \star_0), (A_1, +_1, \star_1)]$ *est un morphisme de semi-anneaux alors*

1. *L'ensemble*
$$\mathrm{im}(f) = \{y \in A_1 / \exists\ x \in A_0 : y = f(x)\}$$
est un sous-semi-anneau de A_1*. De plus pour que* $\mathrm{im}(f)$ *soit un sous-anneau il suffit que* f *soit un morphisme d'anneaux.*

2. Si 0_1 *est l'élément neutre du groupe* $(A_1, +_1)$ *l'ensemble*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in A_0 / f(x) = 0_1\}$$

vérifie les propriétés (a) et (b) suivantes :

(a) $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-semi-anneau de* A_0

(b)

$$(a, x) \in A_0 \times \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow a \star_0 x \in \mathrm{Ker}(f) \text{ et } x \star_0 a \in \mathrm{Ker}(f) \ .$$

(vii) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}[(A, +_0, \star_0), (A_1, +_1, \star_1)]$ *est un morphisme de semi-anneaux alors la relation* R *de* A_0 *dans* A_0 *définie par*

$$R = \{(x, y) \in A_0 \times A_0 / f(x) = f(y)\}$$

est une relation d'équivalence qui vérifie

$$[(x, y) \in R \quad \text{et} \quad (a, b) \in R] \Rightarrow [(x +_0 a, y +_0 b) \in R \quad \text{et} \quad (x \star_0 a, y \star_0 b) \in R]$$

Preuve

(i)

Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}[(A, +_0, \star_0), (A_1, +_1, \star_1)]$ alors l'égalité

$$f(x +_0 y) = f(x) +_1 f(y)$$

montre que $f(0_0 + 0_0) = f(0_0) +_1 f(0_0) = f(0_0)$ par suite $f(0_0) = 0_1$ ainsi f est un morphisme du monoïde $(A_0, +_0)$ dans le monoïde $(A_1, +_1)$. D'autre part l'hypothèse entraîne que f est un morphisme du monoïde $(A_0, \star_0)$ dans le monoïde $(A_1, \star_1)$. Ceci montre que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A_0, A_1) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[[(A_0, +_0), (A_1, +_1)] \cap \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}[(A_0, \star_0), (A_1, \star_1)],$$

l'inclusion inverse étant claire.

(ii)

Si $(x, y) \in A_0 \times A_0$ alors

$$g \circ f(x +_0 y) = g(f(x) +_1 f(y)) = g(f(x)) +_2 g(f(y)) = g \circ f(x) +_2 g \circ f(y)$$

et

$$g \circ f(x \star_0 y) = g(f(x) \star_1 f(y)) = g(f(x)) \star_2 g(f(y)) = g \circ f(x) \star_2 g \circ f(y)$$

(iii)

Par (ii) il sufit de vérifier $g \circ f(1_0) = 1_2$ or

$$g \circ f(1_0) = g(f(1_0)) = g(1_1) = 1_2 \ .$$

(iv)

Puisque $\forall\ x \in A_0\ id_{A_0}(x) = x$ la vérification est triviale.

(v)

1. L'égalité

$$g(x) = g((x - y) + y) = g(x - y) + g(y)$$

montre que $g(x - y) = g(x) - g(y)$.

2. On pose

$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / g(x^n) = (g(x))^n\}$$

et on montre l'hérédité de H.

(a) D'abord, puisque pour tout morphisme d'anneaux $g(1_0) = 1_1$ on a $0 \in H$.

(b) Ensuite si $n \in H$ alors $g(x^n) = (g(x))^n$ par suite, puisque g est multiplicative :

$$g(x^{n+1}) = g(x^n x) = g(x^n)g(x) = (g(x))^n g(x) = (g(x))^{n+1}$$

par suite $H = \mathbb{Z}_+$.

3. Si $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ vérifie $u = m - n$, par définition $ux = mx - nx$ ainsi

$$g(ux) = g(mx) - g(nx) \ .$$

On montre :

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+\ g(nx) = ng(x) \ .$$

Si

$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / g(nx) = ng(x)\}$$

on montre l'hérédité de H.

(a) D'abord, puisque pour tout morphisme d'anneaux $g(0_0) = 0_1$ on a $0 \in H$.

(b) Ensuite si $n \in H$ alors $g(nx) = ng(x)$ par suite, puisque g est additive :

$$g((n+1)x) = g(nx) +_1 g(x) = ng(x) +_1 g(x) = (n+1)g(x)$$

Ainsi $H = \mathbb{Z}_+$ et

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+\ g(nx) = ng(x)$$

d'où, si $u = m - n$ avec $(m, n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$

$$g(ux) = g(mx) - g(nx) = mg(x) - ng(x) = ug(x)$$

4. On pose

$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / g(\sum_{k=0}^{n} x_k) = \sum_{k=0}^{n} g(x_k)\}$$

et on montre l'hérédité de H.

(a) Il est clair que $0 \in H$

(b) Si $n \in H$ alors $g(\sum_{k=0}^{n} x_k) = \sum_{k=0}^{n} g(x_k)$ l'égalité

$$g(\sum_{k=0}^{n+1} x_k) = g(\sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1})$$

entraîne alors, puisque g est additive,

$$g(\sum_{k=0}^{n+1} x_k) = g(\sum_{k=0}^{n} x_k) + g(x_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} g(x_k) + g(x_{n+1})$$

ainsi

$$g(\sum_{k=0}^{n+1} x_k) = \sum_{k=0}^{n+1} g(x_k)$$

et $n + 1 \in H$.

5. On considère l'application $x \mapsto \varphi_x$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, g(X))$ définie par

$$\varphi_x(n) = g(x_n)$$

et on montre successivement (les notations étant celles du lemme [9.3] page 432)

(a) Pour tout $(m, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ et $n \in \mathbb{Z}_+$

$$g(\lambda_X(m, x)(n)) = \lambda_{g(X)}(m, \varphi_x)(n) \tag{9.14}$$

et

$$g(\mathrm{im}(\lambda_X^f)) \subset \mathrm{im}(\lambda_{g(X)}^f)$$

(b)

$$g(\mathcal{P}(X, \mathbb{Z}, A_0)) \subset \mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$$

(c) L'application $x \mapsto \varphi_x$ est surjective : pour tout $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, g(X))$ il existe $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ tel que

$$\forall\ k \in \mathbb{Z}_+ \quad y_k = \varphi_x(k)\ .$$

(d)

$$\mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1) \subset g(\mathcal{P}(X, \mathbb{Z}, A_0))\ .$$

Preuve de (a)...(d)

(a) Si $(m, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ on pose

$$H = \{n \in \mathbb{Z}_+ / g(\lambda_X(m, x)(n)) = \lambda_{g(X)}(m, \varphi_x)(n)\}$$

et on vérifie l'hérédité de H.

i. Puisque $\lambda_X(m, x)(0) = x_0^{m_0}$ on a

$$g(\lambda_X(m, x)(0)) = g(x_0^{m_0})$$

d'autre part on a

$$\lambda_{g(X)}(m, \varphi_x)(0) = (\varphi_x(0))^{m_0} = (g(x_0))^{m_0}$$

mais *2* permet d'affirmer que $g(x_0^{m_0}) = (g(x_0))^{m_0}$, par suite $g(\lambda_X(m, x)(0)) = \lambda_{g(X)}(m, \varphi_x)(0)$ et $0 \in H$.

ii. si $n \in H$ alors $g(\lambda_X(m, x)(n)) = \lambda_{g(X)}(m, \varphi_x)(n)$, et par définition

$$\lambda_X(m, x)(n+1) = \lambda_X(m, x)(n) x_{n+1}^{m_{n+1}}$$

ainsi

— puisque g est multiplicative

$$g(\lambda_X(m, x)(n+1)) = g(\lambda_X(m, x)(n)) g(x_{n+1}^{m_{n+1}}) = \lambda_{g(X)}(m, \varphi_x)(n)(g(x_{n+1}))^{m_{n+1}}$$

— l'égalité $(g(x_{n+1})^{m_{n+1}} = (\varphi_x(n+1))^{m_{n+1}}$ montre alors que

$$g(\lambda_X(m, x)(n+1)) = \lambda_{g(X)}(m, \varphi_x)(n)(\varphi_x(n+1))^{m_{n+1}} = \lambda_{g(X)}(m, \varphi_x)(n+1)$$

ce qui montre $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$.

Ainsi $H = \mathbb{Z}_+$ et (9.14) est vérifiée. .

On montre ensuite

$$g(\mathrm{im}(\lambda_X^f)) \subset \mathrm{im}(\lambda_{g(X)}^f)$$

Si $a \in \mathrm{im}(\lambda_X^f)$ il existe $(m, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ et $n \in \mathbb{Z}_+$ vérifiant

$$a = \lambda_X(m, x)(n)$$

ainsi d'après (9.14) $g(a) = \lambda_{g(X)}(m, \varphi_x)(n) \in \mathrm{im}(\lambda_{g(X)}^f)$.

(b) si $a \in \mathcal{P}(X, \mathbb{Z}, A_0)$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}_+$, $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z})$ et $(m, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathrm{im}(\lambda_X^f))$ vérifiant

$$a = \sum_{k=0}^{n} u_k x_k$$

Il s'agit de montrer que $g(a) \in \mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$. on pose

$$H = \{p \in \mathbb{Z}_+ / g(\sum_{k=0}^{p} u_k x_k) \in \mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)\}$$

et on vérifie l'hérédité de H.

i. Pour montrer que $0 \in H$ on montre que si $(u_0, x_0) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{im}(\lambda_X^f)$ alors $g(u_0 x_0) \in \mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$. Or d'après *3* on a $g(u_0 x_0) = u_0 g(x_0)$, $\mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$ étant un anneau il suffit de montrer que $g(x_0) \in \mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$ mais
— (a) permet d'affirmer que $g(x_0) \in \mathrm{im}(\lambda_{g(X)}^f)$
— le lemme [9.3] page 432 permet d'affirmer que

$$\mathrm{im}(\lambda_{g(X)}^f) \subset \mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1) .$$

en particulier

$$g(x_0) \in \mathrm{im}(\lambda_{g(X)}^f) \Rightarrow g(x_0) \in \mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$$

ii. Si $p \in H$ alors $g(\sum_{k=0}^{p} u_k x_k) \in \mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$, et d'après i.

$$g(u_{p+1} x_{p+1}) \in \mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$$

par suite

$$g(\sum_{k=0}^{p+1} u_k x_k) = g(\sum_{k=0}^{p} u_k x_k) + g(u_{p+1} x_{p+1})$$

est un élément de $\mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$.

(c) Si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, g(X))$, pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$ l'ensemble

$$g^{-1}(y_k) = \{x \in X / y_k = g(x)\}$$

est non vide, ainsi si h_X est une fonction de choix pour X (voir axiome [2.1] page 48) l'élément $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ défini par

$$x_k = h_X(g^{-1}(y_k))$$

vérifie $[\forall\ k \in \mathbb{Z}_+ \quad x_k \in g^{-1}(y_k)]$, par suite

$$\varphi_x(k) = g(x_k) = y_k$$

(d) Si $b \in \mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}_+$, $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z})$ et

$$(m, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, g(X))$$

vérifiant

$$b = \sum_{k=0}^{n} u_k \lambda_{g(X)}(m, y)(k)$$

si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{Z}_+, X)$ vérifie $\varphi_x = y$ alors

$$\forall\ k \in \mathbb{Z}_+ \quad \lambda_{g(X)}(m, y)(k) = \lambda_{g(X)}(m, \varphi_x)(k)$$

ainsi (9.14) page 458 permet d'affirmer

$$\forall\ k \in \mathbb{Z}_+ \quad \lambda_{g(X)}(m,y)(k) = g(\lambda_X(m,x)(k))$$

par suite

$$b = \sum_{k=0}^{n} u_k g(\lambda_X(m,x)(k))$$

et *3.* donne

$$b = \sum_{k=0}^{n} g(u_k \lambda_X(m,x)(k))$$

4. montre alors que

$$b = g(\sum_{k=0}^{n} u_k \lambda_X(m,x)(k))$$

ce qui montre que tout élément de $\mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1)$ est l'image par g d'un élément de $\mathcal{P}(X, \mathbb{Z}, A_0)$ d'où

$$\mathcal{P}(g(X), \mathbb{Z}, A_1) \subset g(\mathcal{P}(X, \mathbb{Z}, A_0)).$$

(vi)

1. $(\mathrm{im}(f), +_1, \star_1)$ est un sous-semi-anneau de $(A_1, +_1, \star_1)$
   (a) D'abord on montre que $(\mathrm{im}(f), +_1)$ est un sous-groupe de $(A_1, +_1)$.
   — Puisque $f(0_0) = 0_1$ on a $0_1 \in \mathrm{im}(f)$.
   — Si $y \in \mathrm{im}(f)$ il existe $x \in A_0$ tel que $y = f(x)$, f étant additive

   $$0_1 = f(0_0) = f(x +_0 (-x)) = f(x) +_1 f(-x) = y + f(-x)$$

   par suite $-y = f(-x)$ et $-y \in \mathrm{im}(f)$.
   — Si $(y_0, y_1) \in \mathrm{im}(f) \times \mathrm{im}(f)$ il existe $(x_0, x_1) \in A_0 \times A_0$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et $y_1 = f(x_1)$, f étant additive

   $$y_0 +_1 y_1 = f(x_0) +_1 f(x_1) = f(x_0 +_0 x_1)$$

   ainsi $y_0 +_1 y_1 \in \mathrm{im}(f)$
   (b) Ensuite on montre que $\mathrm{im}(f)$ est stable par $\star_1$.
   Si $(y_0, y_1) \in \mathrm{im}(f) \times \mathrm{im}(f)$ il existe un couple $(x_0, x_1) \in A_0 \times A_0$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et $y_1 = f(x_1)$, f étant multiplicative

   $$y_0 \star_1 y_1 = f(x_0) \star_1 f(x_1) = f(x_0 \star_0 x_1)$$

   ainsi $y_0 \star_1 y_1 \in \mathrm{im}(f)$

   Enfin, si f est un morphisme d'anneaux alors $f(1_0) = 1_1$ par suite

   $$1_1 \in \mathrm{im}(f)$$

   et $(\mathrm{im}(f), +_1, \star_1)$ est un anneau.
2. $(\mathrm{Ker}(f), +_0, \star_0)$ est un sous-semi-anneau de $(A_0, +_0, \star_0)$
   (a) D'abord on montre que $(\mathrm{Ker}(f), +_0)$ est un sous-groupe de $(A_0, +_0)$.
   — Puisque $f(0_0) = 0_1$ on a $0_0 \in \mathrm{Ker}(f)$.
   — Si $x \in \mathrm{Ker}(f)$ $f(x) = 0_1$, f étant additive

   $$0_1 = f(0_0) = f(x +_0 (-x)) = f(x) +_1 f(-x) = f(-x)$$

   par suite $f(-x) = 0_1$ et $-x \in \mathrm{Ker}(f)$.

— Si $(x_0, x_1) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(x_0) = 0_1$ et $f(x_1) = 0_1$, f étant additive

$$0_1 = f(x_0) +_1 f(x_1) = f(x_0 +_0 x_1)$$

ainsi $x_0 +_0 x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$

(b) Ensuite on montre que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par $\star_1$.
Si $(x_0, x_1) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(x_0) = 0_1$ et $f(x_1) = 0_1$, f étant multiplicative

$$0_1 = f(x_0) \star_1 f(x_1) = f(x_0 \star_0 x_1)$$

ainsi $x_0 \star_0 x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$

(c) Enfin on montre

$$(a, x) \in A_0 \times \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow a \star_0 x \in \mathrm{Ker}(f) \text{ et } x \star_0 a \in \mathrm{Ker}(f)\ .$$

Si $(a, x) \in A_0 \times \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(x) = 0_1$, f étant multiplicative

$$f(a \star_0 x) = f(a) \star_1 f(x) = f(a) \star_1 0_1 = 0_1$$

et

$$f(x \star_0 a) = f(x) \star_1 f(a) = 0_1 \star_1 f(a) = 0_1\ .$$

(vii)

Il est clair que R est une relation d'équivalence (voir exemple [7.1] page 185). Si $(x, y) \in R$ et $(a, b) \in R$ alors $f(x) = f(y)$ et $f(a) = f(b)$ par suite

1.
$$f(x) +_1 f(a) = f(y) +_1 f(b)\ .$$
f étant additive on obtient
$$f(x +_0 a) = f(x) +_1 f(a) = f(y) +_1 f(b) = f(y +_0 b)$$
et $(x +_0 a, y +_0 b) \in R$.

2.
$$f(x) \star_1 f(a) = f(y) \star_1 f(b)\ .$$
f étant multiplicative on obtient
$$f(x \star_0 a) = f(x) \star_1 f(a) = f(y) \star_1 f(b) = f(y \star_0 b)$$
et $(x \star_0 a, y \star_0 b) \in R$.

■

Pour construire les entiers rationnels il nous faut comprendre comment quotienter un ensemble d'entiers relatifs.

9.2.2 *Anneaux quotients*

Définition des anneaux quotients

Si A est un ensemble et R est une relation d'équivalence (voir définition [7.12] page 185) on veut donner des conditions nécessaires et suffisantes pour munir l'ensemble quotient A/R d'une structure de semi-anneau ou d'anneau.

Lemme 9.7 *On note A un ensemble et $R \subset A \times A$ une relation d'équivalence sur A et $\pi : A \mapsto A/R$ l'application canonique. S'il existe une structure de semi-anneau sur l'ensemble quotient A/R où l'addition est notée $+$ et la multiplication est notée $\centerdot$ il existe une application*

$$f : A \times A \mapsto A$$

et une application

$$g : A \times A \mapsto A$$

vérifiant

$$\forall\ (x, y) \in A \times A \quad \pi(x) + \pi(y) = \pi(f(x, y)) \quad \text{et} \quad \pi(x) \centerdot \pi(y) = \pi(g(x, y))$$

f et g vérifient les propriétés ***gac*** *et* ***m*** *suivantes :*

***Propriétés* gac**

gac 1

$$(x, a) \in R \text{ et } (y, b) \in R \Rightarrow (f(x, y), f(a, b)) \in R$$

gac 2 *pour tout $(x, y) \in A \times A$*

$$(f(x, y), f(y, x)) \in R$$

gac 3 *pour tout $(x, y) \in A \times A$ et $z \in A$*

$$(f(f(x, y), z), f(x, f(y, z)) \in R$$

gac 4 *Il existe $e_0 \in A$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $x \in A$*

$$(f(x, e_0), x) \in R \quad \text{et} \quad (f(e_0, x), x) \in R$$

2. *Il existe une application $\imath : A \mapsto A$ vérifiant*

$$\forall\ x \in A \quad (f(x, \imath(x)), e_0) \in R \quad \text{et} \quad (f(\imath(x), x), e_0) \in R$$

***Propriétés* m**

m 1

$$(x, a) \in R \text{ et } (y, b) \in R \Rightarrow (g(x, y), g(a, b)) \in R$$

m 2 *pour tout $(x, y) \in A \times A$ et $z \in A$*

$$(g(g(x, y), z), g(x, g(y, z)) \in R$$

m 3 *pour tout $(x, y) \in A \times A$ et $z \in A$*

$$(g(x, f(y, z)), f(g(x, y), g(x, z)) \in R$$

et

$$(g(f(x, y), z), f(g(x, z), g(y, z))) \in R$$

Preuve On note $\pi : A \mapsto A/R$ l'application canonique, $+ : A/R \times A/R \mapsto A/R$ la loi du groupe additif du semi-anneau :

$$(\pi(x), \pi(y)) \mapsto \pi(x) + \pi(y)$$

et $\centerdot : A/R \times A/R \mapsto A/R$ la multiplication du semi-anneau :

$$(\pi(x), \pi(y)) \mapsto \pi(x) \centerdot \pi(y)\ .$$

Définition de f et g

On considère l'application $S : A \times A \mapsto \mathcal{P}(A)$ définie par

$$S(x,y) = \{z \in A/\pi(x) + \pi(y) = \pi(z)\} \ .$$

Par définition d'une loi pour tout $(x,y) \in A \times A$ $\pi(x) + \pi(y) \in A/R$ ainsi il existe $z \in A$ tel que $\pi(x) + \pi(y) = \pi(z)$, et :

$$\forall \ (x,y) \in A \times A \ S(x,y) \neq \varnothing \ .$$

Si h est une fonction de choix pour A (voir axiome [2.1] page 48) on définit l'application $f : A \times A \mapsto A$ par

$$f(x,y) = h(S(x,y)) \ .$$

par définition d'une fonction de choix,

$$\forall \ (x,y) \in A \times A \ f(x,y) \in S(x,y)$$

autrement dit

$$\forall \ (x,y) \in A \times A \quad \pi(x) + \pi(y) = \pi(f(x,y)) \tag{9.15}$$

La considération de l'application $P : A \times A \mapsto \mathcal{P}(A)$ définie par

$$P(x,y) = \{z \in A/\pi(x) \centerdot \pi(y) = \pi(z)\} \ .$$

montre de même qu'il existe une application $g : A \times A \mapsto A$ vérifiant

$$\forall \ (x,y) \in A \times A \quad \pi(x) \centerdot \pi(y) = \pi(g(x,y)) \ . \tag{9.16}$$

Il est facile de montrer que les égalités (9.15) et (9.16) entraînent les propriétés énoncées dans le lemme.

gac 1 Si $(x,a) \in R$ et $(y,b) \in R$ alors $\pi(x) = \pi(a)$ et $\pi(y) = \pi(b)$ par suite d'après (9.15)

$$\pi(f(x,y)) = \pi(x) + \pi(y) = \pi(a) + \pi(b) = \pi(f(a,b))$$

et l'égalité $\pi(f(x,y))) = \pi(f(a,b))$ est l'assertion

$$(f(x,y), f(a,b)) \in R \ .$$

gac 2 Par définition d'un semi-anneau la loi $+$ est commutative par suite

$$\pi(f(x,y)) = \pi(x) + \pi(y) = \pi(y) + \pi(x) = \pi(f(x,y))$$

et l'égalité $\pi(f(x,y))) = \pi(f(y,x))$ est l'assertion

$$(f(x,y), f(y,x)) \in R \ .$$

gac 3 Par définition d'un semi-anneau la loi $+$ est associative par suite

$$(\pi(x) + \pi(y)) + \pi(z) = \pi(x) + (\pi(y) + \pi(z))$$

ainsi

$$\pi(f(x,y)) + \pi(z) = \pi(x) + \pi(f(y,z))$$

et

$$\pi(f(f(x,y)),z)) = \pi(f(x, f(y,z)))$$

et l'égalité $\pi(f(f(x,y)),z)) = \pi(f(x, f(y,z)))$ est l'assertion

$$(f(f(x,y)),z), f(x, f(y,z)) \in R \ .$$

gac 4 Par définition d'un semi-anneau la loi + possède un élément neutre, ainsi il existe $e_0 \in A$ tel que $\pi(e_0)$ est l'élément neutre de l'addition.

1. pour tout $x \in A$
$$\pi(x) + \pi(e_0) = \pi(x) = \pi(e_0) + \pi(x)$$
ainsi $\pi(f(x, e_0)) = \pi(x) = \pi(f(e_0, x))$ par suite
$$(f(x, e_0), x) \in R \quad \text{et} \quad (f(e_0, x), x) \in R$$

2. puisque $(A/R, +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $\pi(e_0)$ pour tout $x \in A$ l'ensemble
$$L_x = \{y \in A / \pi(x) + \pi(y) = \pi(y) + \pi(x) = \pi(e_0)\}$$
est non vide . Si h est une fonction de choix pour A (voir axiome [2.1] page 48) on définit l'application $\imath : A \mapsto A$ par
$$\imath(x) = h(L_x)\ .$$
par définition d'une fonction de choix,
$$\forall\ x \in A\ \imath(x) \in L_x$$
par suite
$$\pi(f(x, \imath(x))) = \pi(x) + \pi(\imath(x)) = \pi(e_0) = \pi(\imath(x)) + \pi(x) = \pi(f(\imath(x), x))$$
et les égalités $\pi(f(x, \imath(x))) = \pi(e_0) = \pi(f(\imath(x), x))$ sont l'assertion
$$(f(x, \imath(x)), e_0) \in R \quad \text{et} \quad (f(\imath(x), x), e_0) \in R$$

m 1 Si $(x, a) \in R$ et $(y, b) \in R$ alors $\pi(x) = \pi(a)$ et $\pi(y) = \pi(b)$ par suite d'après (9.16)
$$\pi(g(x, y)) = \pi(x) \centerdot \pi(y) = \pi(a) \centerdot \pi(b) = \pi(g(a, b))$$
et l'égalité $\pi(g(x, y))) = \pi(g(a, b))$ est l'assertion
$$(g(x, y), g(a, b)) \in R\ .$$

m 2 Par définition d'un semi-anneau la multiplication $\centerdot$ est associative par suite
$$(\pi(x) \centerdot \pi(y)) \centerdot \pi(z) = \pi(x) \centerdot (\pi(y) \centerdot \pi(z))$$
ainsi
$$\pi(g(x, y)) \centerdot \pi(z) = \pi(x) \centerdot \pi(g(y, z))$$
et
$$\pi(g(g(x, y)), z)) = \pi(g(x, g(y, z)))$$
et l'égalité $\pi(g(g(x, y)), z)) = \pi(g(x, g(y, z)))$ est l'assertion
$$(g(g(x, y)), z), g(x, g(y, z)) \in R\ .$$

m 3 Par définition d'un semi-anneau la multiplication $\centerdot$ est distributive par rapport à l'addition + par suite
$$\pi(x) \centerdot (\pi(y)) + \pi(z)) = \pi(x) \centerdot \pi(y) + \pi(x) \centerdot \pi(z)$$
ainsi
$$\pi(x) \centerdot \pi(f((y, z)) = \pi(g(x, y)) + \pi(g(x, z)) = \pi(f(g(x, y), g(x, z))$$

et

$$\pi(g(x, f(y, z)) = \pi(f(g(x, y), g(x, z))$$

et l'égalité $\pi(g(x, f(y, z)) = \pi(f(g(x, y), g(x, z))$ est l'assertion

$$(g(x, f(y, z)), f(g(x, y), g(x, z)) \in R \ .$$

de même l'égalité

$$(\pi(x) + \pi(y)) \centerdot \pi(z) = \pi(x) \centerdot \pi(z) + \pi(y) \centerdot \pi(z)$$

montre

$$(g(f(x, y), z), f(g(x, z), g(y, z))) \in R$$

■

Ainsi, pour qu'un ensemble quotient possède une structure de semi-anneau il est **nécessaire** qu'il existe un couple (f, g) d'applications de $A \times A \mapsto A$ vérifiant les propriétés **gac** et **m** du lemme [9.7] (p. 462). On montre que ces conditions sont **suffisantes**. Un couple $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A \times A, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A \times A, A)$ vérifiant les propriétés **gac** et **m** est dit admissible pour la stucture de semi-anneau.

Définition 9.11 *On note A un ensemble $R \subset A \times A$ une relation d'équivalence sur A, on dit qu'un couple*

$$(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A \times A, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A \times A, A)$$

d'applications de $A \times A$ dans A est **R-san-admissible** *ou admissible pour une structure de semi-anneau sur A/R si (f, g) vérifie les propriétés* **gac** *et* **m** *du lemme* [9.7] *(p. 462)*

Il s'agit de montrer que si (f, g) est R-**san**-admissible alors il existe une unique structure de semi-anneau sur A/R où l'addition et la multiplication vérifient

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(f(x, y)) \quad \text{et} \quad \pi(x) \centerdot \pi(y) = \pi(g(x, y))$$

Lemme 9.8 *On note A un ensemble $R \subset A \times A$ une relation d'équivalence sur A et*

$$\pi : A \mapsto A/R$$

l'application canonique. Pour toute application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A \times A, A)$ de $A \times A$ dans A, on note φ_f l'application de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(A)$ définie par

$$\varphi_f(X, Y) = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} \pi(f(x, y)) = \{a \in A / \exists\ (x, y) \in X \times Y : (a, f(x, y)) \in R\}$$

(i) si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A \times A, A)$ vérifie les propriétés (9.17) *et* (9.18) *suivantes*

$$(x, a) \in R \quad \text{et} \quad (y, b) \in R \Rightarrow (f(x, y), f(a, b)) \in R \tag{9.17}$$

et

$$(x, y) \in A \times A \ z \in A \Rightarrow (f(f(x, y), z), f(x, f(y, z)) \in R \tag{9.18}$$

alors

1. *Pour tout $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ et $Z \in \mathcal{P}(A)$*

$$\varphi_f(\varphi_f(X, Y), Z) = \varphi_f(X, \varphi_f(Y, Z))$$

2. *pour tout $(x, y) \in A \times A$*

$$\varphi_f(\pi(x), \pi(y)) = \pi(f(x, y))$$

(ii) si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A \times A, A)$ *vérifie les propriétés* (9.17) *et* (9.18) *et la propriété suivante : il existe* $e_0 \in A$ *tel que*

$$\forall\, x \in A \quad (f(x, e_0), x) \in R \quad \text{et} \quad (f(e_0, x), x) \in R \tag{9.19}$$

alors la restriction $\varphi_{f,r}$ *de* φ_f *à* $A/R \times A/R$ *est une loi de monoïde sur* A/R.

(iii) Si f *vérifie les propriétés* **gac** *du lemme* [9.7] *(p.* 462*) alors* $(A/R\ , \varphi_{f,r})$ *est un groupe commutatif.*

(iv) Si (f, g) *est un couple* R-**san**-*admissible alors* $(A/R\ , \varphi_{f,r}, \varphi_{g,r})$ *est un semi-anneau.*

(v) Si de plus g *vérifie la propriété suivante : il existe* $e_1 \in A$ *tel que*

$$\forall\, x \in A \quad (g(x, e_1), x) \in R \quad \text{et} \quad (g(e_1, x), x) \in R$$

$(A/R\ , \varphi_{f,r}, \varphi_{g,r})$ *est un anneau.*

Preuve

(i)

1. Si $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ et $Z \in \mathcal{P}(A)$ on pose

$$\Phi_{X,Y,Z} = \{a \in A / \exists\ ((x, y), z) \in (X \times Y) \times Z : (f(f(x, y), z), a) \in R\}$$

   et on montre

$$\varphi_f(\varphi_f(X, Y), Z) = \Phi_{X,Y,Z} = \varphi_f(X, \varphi_f(Y, Z))$$

   (a) On montre $\varphi_f(\varphi_f(X, Y), Z) \subset \Phi_{X,Y,Z}$.
   En effet, si $a_0 \in \varphi_f(\varphi_f(X, Y), Z)$ alors il existe $(\alpha, z) \in \varphi_f(X, Y) \times Z$ tel que $(f(\alpha, z), a_0) \in R$,
   — puisque $\alpha \in \varphi_f(X, Y)$ il existe un couple $(x, y) \in X \times Y$ tel que $(f(x, y), \alpha) \in R$ en particulier $(f(x, y), \alpha) \in R$ et $(z, z) \in R$
   — la propriété (9.17) montre alors que

$$(f(f(x, y), z), f(\alpha, z)) \in R$$

   la transitivité de R entraîne donc

$$(f(f(x, y), z), a_0) \in R,$$

   par suite $a_0 \in \Phi_{X,Y,Z}$.

   (b) on montre $\Phi_{X,Y,Z} \subset \varphi_f(\varphi_f(X, Y), Z)$.
   En effet, si $a_0 \in \Phi_{X,Y,Z}$ il existe $(x, y) \in X \times Y$ et $z \in Z$ tel que

$$(f(f(x, y), z), a_0) \in R$$

   ainsi si $\alpha = f(x, y)$ on obtient $(f(\alpha, z), a_0) \in R$ or il est clair que $\alpha \in \varphi_f(X, Y)$ par suite $a_0 \in \varphi_f(\varphi_f(X, Y), Z)$

   (c) On montre $\varphi_f(X, \varphi_f(Y, Z)) \subset \Phi_{X,Y,Z}$.
   si $a_0 \in \varphi_f(X, \varphi_f(Y, Z))$ alors il existe $(x, \beta) \in X \times \varphi_f(Y, Z)$ tel que $(f(x, \beta), a_0) \in R$,
   — puisque $\beta \in \varphi_f(Y, Z)$ il existe $(y, z) \in Y \times Z$ tel que $(f(y, z), \beta) \in R$ en particulier $(x, x) \in R$ et $(f(y, z), \beta) \in R$
   — la propriété (9.17) montre alors que

$$(f(x, f(y, z)), f(x, \beta)) \in R$$

   la transitivité de R entraîne donc

$$(f(x, f(y, z)), a_0) \in R,$$

   or la propriété (9.18) permet d'affirmer que

$$(f(f(x, y), z), f(x, f(y, z))) \in R$$

   ainsi la transitivité de R montre que $(f(f(x, y), z), a_0) \in R$ et on obtient $a_0 \in \Phi_{X,Y,Z}$.

(d) on montre $\Phi_{X,Y,Z} \subset \varphi_f(X, \varphi_f(Y,Z))$.
En effet, si $a_0 \in \Phi_{X,Y,Z}$ il existe $(x,y) \in X \times Y$ et $z \in Z$ tel que

$$(f(f(x,y),z), a_0) \in R$$

or la propriété (9.18) montre que $(f(x, f(y,z)), f(f(x,y),z))) \in R$ la transitivité de R montre alors que $(f(x, f(y,z)), a_0) \in R$ ainsi si on pose $\beta = f(y,z)$ on obtient $(f(x,\beta), a_0) \in R$ or il est clair que $\beta \in \varphi_f(Y,Z)$ par suite $a_0 \in \varphi_f(X, \varphi_f(Y,Z))$

Ceci montre que φ_f est une loi associative sur $\mathfrak{P}(A)$.

2. (a) D'abord on montre $\forall\ (x,y) \in A \times A \quad \varphi_f(\pi(x), \pi(y)) \subset \pi(f(x,y))$.
Si $a_0 \in \varphi_f(\pi(x), \pi(y))$ alors il existe $(a,b) \in \pi(x) \times \pi(y)$ tel que

$$(f(a,b), a_0) \in R$$

— puisque $a \in \pi(x)$ et $b \in \pi(y)$ on a

$$(x,a) \in R \quad \text{et} \quad (y,b) \in R$$

ainsi (9.17) permet d'affirmer que

$$(f(x,y), f(a,b)) \in R$$

la transitivité de R entraîne alors $(f(x,y), a_0) \in R$ et $a_0 \in \pi(f(x,y))$.

(b) Ensuite l'inclusion $\pi(f(x,y)) \subset \varphi_f(\pi(x), \pi(y))$ provient du fait que $(x,y) \in \pi(x) \times \pi(y)$ qui entraîne, par définition de la rénion,

$$\pi(f(x,y)) \subset \bigcup_{(a,b)\in\pi(x)\times\pi(y)} \pi(f(a,b))$$

(ii)

D'après *(i)* φ_f est associative sur $\mathfrak{P}(A)$ et A/R est stable par φ_f puisque

$$\forall\ (x,y) \in A \times A \quad \varphi_f(\pi(x), \pi(y)) = \pi(f(x,y))$$

Si e_0 est l'élément défini en (9.19) alors pour tout $x \in A$

$$\varphi_f(\pi(x), \pi(e_0)) = \pi(f(x,e_0)) = \pi(x) = \pi(f(e_0,x)) = \varphi_f(\pi(e_0), \pi(x))$$

ainsi $\pi(e_0)$ est l'élément neutre de $(A/R, \varphi_{f,r})$

(iii)

Si f vérifie les propriétés **gac** du lemme [9.3] alors
— par gac 1 (9.17) est vérifié,
— par gac 3 (9.18) est vérifié
— par gac 4 (9.19) est vérifié

Ainsi $(A/R, \varphi_{f,r})$ est un monoïde d'élément neutre $\pi(e_0)$, d'autre part gac 2 permet d'affirmer que pour tout $(x,y) \in A \times A$

$$(f(x,y), f(y,x)) \in R$$

par suite

$$\varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(y)) = \pi(f(x,y)) = \pi(f(y,x)) = \varphi_{f,r}(\pi(y), \pi(x))$$

ainsi la loi $\varphi_{f,r}$ est commutative. Enfin d'après gac 4 il existe une application $i : A \mapsto A$ vérifiant

$$\forall\ x \in A \quad (f(x, i(x)), e_0) \in R \quad \text{et} \quad (e_0, f(i(x), x)) \in R$$

par suite

$$\varphi_{f,r}(\pi(x), \pi(i(x))) = \pi(f(x, i(x))) = \pi(e_0) = \pi(f(i(x), x))$$

et $\pi(i(x))$ est l'inverse de $\pi(x)$. Ce qui montre que $(A/R, \varphi_{f,r})$ est un groupe commutatif.

(iv)

Puisque g vérifie **m**

— par m 1 (9.17) est vérifié,

— par m 2 (9.18) est vérifié,

Ainsi (i) permet d'affirmer que φ_g est associative et

$$\forall\ (x, y) \in A \times A \quad \varphi_g(\pi(x), \pi(y)) = \pi(g(x, y))$$

En particulier φ_g est interne sur A/R. Il reste la vérification de la distributivité de la multipkication φ_g par rapport à l'addition φ_f , qui s'écrit : pour tout $(x, y) \in A \times A$ et $z \in A$

$$\varphi_g(\pi(x), \varphi_f(\pi(y), \pi(z)) = \varphi_f(\varphi_g(\pi(x), \pi(y)), \varphi_g(\pi(x)), \pi(z)))$$

et

$$\varphi_g(\varphi_f(\pi(x), \pi(y)), \pi(z)) = \varphi_f(\varphi_g(\pi(x), \pi(z)), \varphi_g(\pi(y), \pi(z))) \ .$$

Mais m 3 permet d'affirmer que pour tout $(x, y) \in A \times A$ et $z \in A$

$$(g(x, f(y, z)), f(g(x, y), g(x, z)) \in R$$

ainsi $\pi(g(x, f(y, z))) = \pi(f(g(x, y), g(x, z)))$, mais

$$\varphi_g(\pi(x)), \varphi_f(\pi(y), \pi(z))) = \varphi_g(\pi(x), \pi(f(x, y))) = \pi(g(x, f(x, y))$$

et

$$\varphi_f(\varphi_g(\pi(x), \pi(y)), \varphi_g(\pi(x), \pi(z))) = \varphi_f(\pi(g(x, y)), \pi(g(x, z))$$

ainsi les égalités

$$\varphi_f(\pi(g(x, y)), \pi(g(x, z)) = \pi(f(g(x, y), g(x, z))) = \pi(g(x, f(y, z)))$$

montre la distributivité à gauche de φ_g par rapport à φ_f. De même, l'égalité

$$\pi(g(f(x, y), z))) = \pi(f(g(x, z), g(y, z)))$$

montre la distributivité à droite de φ_g par rapport à φ_f.

Ainsi par (iii) $(A/R\ , \varphi_{f,r})$ est un groupe commutatif et par (iv) $\varphi_{g,r}$ est une loi sur A/R qui est associative et distributive par rapport à $\varphi_{f,r}$ ce qui montre que $(A/R\ , \varphi_{f,r},\ \varphi_{g,r})$ est un semi-anneau.

(v)

Si $e_1 \in A$ vérifie les conditions de (v) alors

$$\varphi_g(\pi(x), \pi(e_1)) = \pi(g(x, e_1)) = \pi(x) = \pi(g(e_1, x)) = \varphi_g(\pi(e_1), \pi(x))$$

ainsi $\pi(e_1)$ est lélément neutre de la muliplication $\varphi_{g,r}$ par suite $(A/R\ , \varphi_{f,r},\ \varphi_{g,r})$ est un anneau. ■

Lorsque $(A, +, \textbf{.})$ est un semi-anneau et $R \subset A \times A$ est une relation d'équivalence sur A, pour que le couple (f, g) d'applications de $A \times A$ dans A définies par

$$f(x, y) = x + y \quad \text{et} \quad g(x, y) = xy$$

soit R-**san**-admissible il faut et il suffit que la relation R soit *compatible* avec les lois de A au sens de la définition suivante.

Définition 9.12 *On note $(A, +, \centerdot)$ un semi-anneau et $R \subset A \times A$ une relation d'équivalence sur A, on dit que R est* ***compatible*** *avec les lois de A si la propriété suivante est vérifiée*

$$(x, y) \in R \quad \text{et} \quad (a, b) \in R \Rightarrow (x + a, y + b) \in R \quad \text{et} \quad (xa, yb) \in R$$

On note $\mathrm{Eq}[A, +, \centerdot]$ *l'ensemble des relations d'équivalences sur A compatibles avec les lois de A*

Le lemme suivant est une application directe des définitions et du lemme [9.8] page 465.

Lemme 9.9 *On note $(A, +, \times)$ un semi-anneau et $R \subset A \times A$ une relation d'équivalence sur A compatible avec les lois de A. L'application π est l'application canonique de A dans A/R.*

(i) Le couple (f, g) d'applications de $A \times A$ dans A définies par

$$f(x, y) = x + y \quad \text{et} \quad g(x, y) = x \times y$$

*est R-***san***-admissible*

(ii) Il existe un unique structure de semi-anneau sur A/R notée $(A/R\ , +', \centerdot)$ telle que l'application canonique π soit un morphisme de semi-anneaux : pour tout $(x, y) \in A \times A$

$$\pi(x + y) = \pi(x) +' \pi(y) \quad \text{et} \quad \pi(x \times y) = \pi(x) \centerdot \pi(y)$$

(iii) Si $(A, +, \times)$ est un anneau alors $(A/R\ , +', \centerdot)$ est un anneau.

Preuve

(i)

IL s'agit de vérifier les conditions **gac** et **m** du lemme [9.7] page 462 pour les application $f(x, y) = x + y$ et $g(x, y) = x \times y$.

Propriétés gac

gac 1 C'est la compatibilité de l'addition et de R

gac 2 puisque l'addition d'un semi-anneau est commutative $x + y = y + x$, R étant reflexive on obtient $(x + y, y + x) \in R$

gac 3 puisque l'addition d'un semi-anneau est associative $(x + y) + z = x + (y + z)$, R étant reflexive on obtient $((x + y) + z, x + (y + z)) \in R$

gac 4 Si 0 est l'élément neutre de $(A, +)$ alors

1. pour tout $x \in A$
$$(x + 0, x) \in R \quad \text{et} \quad (x, x + 0) \in R$$
2. si $\imath(x) = -x$ alors $x + \imath(x) = 0$ et
$$\forall\ x \in A \quad (x + \imath(x), 0) \in R \quad \text{et} \quad (0, x + \imath(x)) \in R\ .$$

Propriétés m

m 1 C'est la compatibilité de la multiplication et de R

m 2 puisque la multiplication d'un semi-anneau est associative

$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)\ ,$$

R étant reflexive on obtient $((x \times y) \times z, x \times (y \times z)) \in R$

m 3 puisque la multiplication d'un semi-anneau est distibutive par rapport à l'addition

$$(x \times (y + z), x \times y + x \times z) \in R$$

et

$$((x + y) \times z, x \times z + y \times z) \in R\ .$$

(ii)

Le lemme [9.8] page 465 montre que les applications φ et μ de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(A)$ définies par

$$\varphi(X, Y) = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} \pi(x + y)$$

et

$$\mu(X, Y) = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} \pi(x \times y)$$

sont des lois associatives sur $\mathcal{P}(A)$ qui vérifient :

1. $\forall\ (x, y) \in A \times A$

$$\varphi(\pi(x), \pi(y)) = \pi(x + y) \quad \text{et} \quad \mu(\pi(x), \pi(y)) = \pi(x \times y)$$

2. si φ_r et μ_r sont les restrictions de φ et μ à $A/R\ \times A/R$ alors (A, φ_r, μ_r) est un semi-anneau

Ainsi si $+' : A/R \times A/R \mapsto A/R$ est définie par

$$\pi(x) +' \pi(y) = \varphi_r(\pi(x), \pi(y)) = \{c \in A / \exists\ (a, b) \in \pi(x) \times \pi(y) : (a + b, c) \in R\}$$

et $\centerdot : A/R \times A/R \mapsto A/R$ est définie par

$$\pi(x) \centerdot \pi(y) = \mu_r(\pi(x), \pi(y)) = \{c \in A / \exists\ (a, b) \in \pi(x) \times \pi(y) : (a \times b, c) \in R\}$$

alors $(A/R, +'\ ,\ \centerdot\ )$ est un semi-anneau vérifiant

$$\pi(x) +' \pi(y) = \varphi(\pi(x), \pi(y)) = \pi(x + y)$$

et

$$\pi(x) \centerdot \pi(y) = \mu(\pi(x), \pi(y)) = \pi(x \times y)$$

(iii)

Si $(A, +, \times)$ est un anneau d'unité 1 alors pour tout $x \in A$

$$\pi(x) \centerdot \pi(1) = \pi(x \times 1) = \pi(x) = \pi(1 \times x) = \pi(1) \centerdot \pi(x)$$

et $\pi(1)$ est l'unité de $(A/R\ ,\ +'\ ,\ \centerdot\ )$ ■

Définition 9.13 *On note $(A, +, \times)$ un semi-anneau (respectivement un anneau) et R une relation d'équivalence compatible avec les lois de A, le semi-anneau $(A/R\ ,\ +'\ \centerdot\ )$ défini par le lemme* [9.9] *est appelé le semi-anneau (respectivement l'anneau)* ***quotient*** *de A par R.*

La plupart des espaces numériques se construisent comme quotient d'anneaux.

Lemme 9.10 *On note $(A, +, \times)$ un semi-anneau.*

(i) Si $X \subset A \times A$ est un sous-ensemble de $A \times A$ il existe une unique relation d'équivalence $\varpi_*(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. *$\varpi_*(X)$ est une relation d'équivalence compatible avec les lois de A*
2. *$X \subset \varpi_*(X)$*
3. *Si $R \in \mathrm{Eq}[A, +, \times]$ vérifie $X \subset R$ alors*

$$\varpi_*(X) \subset R$$

(ii) On note $(B, +_b, \times_b)$ un semi-anneau , $R \subset A \times A$ une relation d'équivalence compatible avec les lois de A, et $\pi : A \mapsto A/R$ le morphisme canononique. Si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A, B)$ est un morphisme de semi-anneaux, pour qu'il existe un morphisme g_* du semi-anneau A/R dans dans le semi-anneau B vérifiant

$$g = g_* \circ \pi$$

il faut et il suffit que

$$R \subset \{(x, y) \in A \times A/g(x) = g(y)\} \ .$$

(iii) On note $(B, +_b, \times_b)$ un semi-anneau, si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A, B)$ est un morphisme de semi-anneaux alors la relation

$$R_g = \{(x, y) \in A \times A/g(x) = g(y)\}$$

est une relation d'équivalence compatible avec les lois de A.

(iv) On note $(B, +_b, \times_b)$ un semi-anneau , $X \subset A \times A$ un sous-ensemble de A, et $\pi_* : A \mapsto A/\varpi_*(X)$ le morphisme canononique. Si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A, B)$ est un morphisme de semi-anneaux, pour qu'il existe un morphisme g^* du semi-anneau $A/\varpi_*(X)$ dans dans le semi-anneau B vérifiant

$$g = g^* \circ \pi_*$$

il faut et il suffit que

$$X \subset \{(x, y) \in A \times A/g(x) = g(y)\} \ .$$

(v) Si $R \subset A \times A$ est une relation d'équivalence compatible avec les lois de A et $\pi : A \mapsto A/R$ le morphisme canonique de A dans le semi-anneau A/R alors l'ensemble

$$\mathfrak{a} = \{x \in A/(x, 0) \in R\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *$(\mathfrak{a}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$*
2. *pour tout $a \in A$ et $x \in \mathfrak{a}$*
$$a \times x \in \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad x \times a \in \mathfrak{a} \ .$$
3. *Pour tout $x \in A$*
$$\pi(x) = x + \mathfrak{a} = \{y \in A/y - x \in \mathfrak{a}\}$$

(vi) Si $\mathfrak{a} \subset A$ est un sous-ensemble de A vérifiant les propriétés suivantes

1. *$(\mathfrak{a}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$*
2. *pour tout $a \in A$ et $x \in \mathfrak{a}$*
$$a \times x \in \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad x \times a \in \mathfrak{a} \ .$$

alors

1. *la relation R de A dans A définie par*
$$R = \{(x, y) \in A \times A/x - y \in \mathfrak{a}\}$$
est une relation d'équivalence compatible avec les lois de A.

2.
$$\mathfrak{a} = \{x \in A/(x,0) \in R\}$$

Preuve

(i)

1) *Preuve de l'existence*

On note
$$\Pi(X) = \{R \in \mathrm{Eq}[A,+,\times]/X \subset R\}$$
puisque la relation $R = A \times A$ est un élément de $\Pi(X)$ on a $\Pi(X) \neq \varnothing$, on montre que la relation
$$\varpi_*(X) = \bigcap_{R \in \Pi(X)} R = \{(x,y) \in A \times A/\forall\ R \in \Pi(X) : (x,y) \in R\}$$
vérifie les propriétés de (i).

1. On montre que $\varpi_*(X)$ est une relation d'équivalence et est compatible avec les lois de A
   (a) Pour tout $x \in A$ et $R \in \Pi(X)$ on a $(x,x) \in R$ par suite
   $$(x,x) \in \varpi_*(X)$$
   (b) Si $(x,y) \in \varpi_*(X)$ alors pour tout $R \in \Pi(X)$ on a $(x,y) \in R$ par suite, pour tout $R \in \Pi(X)$, $(y,x) \in R$ et $(y,x) \in \varpi_*(X)$.
   (c) Si $(x,y) \in \varpi_*(X)$ et $(y,z) \in \varpi_*(X)$ alors pour tout $R \in \Pi(X)$ on a $(x,y) \in R$ et $(y,z) \in R$ par suite pour tout $R \in \Pi(X)$ on a $(x,z) \in R$ et $(x,z) \in \varpi_*(X)$
   (d) si $(x,y) \in \varpi_*(X)$ et $(a,b) \in \varpi_*(X)$ alors pour tout $R \in \Pi(X)$ on a $(x,y) \in R$ et $(a,b) \in R$, la compatibilité de ces relations avec les lois montre : pour tout $R \in \Pi(X)$
   $$(x+a, y+b) \in R \quad \text{et} \quad (x \times a, y \times b) \in R$$
   par suite
   $$(x+a, y+b) \in \varpi_*(X) \quad \text{et} \quad (x \times a, y \times b) \in \varpi_*(X)$$
   Ainsi $\varpi_*(X)$ est une relation d'équivalence compatible avec les lois de A
2. Puisque pour tout $R \in \Pi(X)$ on a $X \subset R$ on obtient $X \subset \varpi_*(X)$.
3. Si $R_0 \in \mathrm{Eq}[A,+,\times]$ et $X \subset R_0$ alors $R_0 \in \Pi(X)$ par suite $\varpi_*(X) \subset R_0$.

2) *Preuve de l'unicité*

Si R' vérifie *1*, *2*, *3* alors
— Puisque $X \subset \varpi_*(X)$ et R' vérifie *3* on obtient $R' \subset \varpi_*(X)$
— Puisque $X \subset R'$ et $R' \in \mathrm{Eq}[A,+,\times]$ on obtient $\varpi_*(X) \subset R'$.
ce qui montre $R' = \varpi_*(X)$.

(ii)

D'après le lemme [7.12] page 186 l'existence d'une application g_* de A/R dans B vérifiant
$$g = g_* \circ \pi$$
est assurée par l'inclusion
$$R \subset \{(x,y) \in A \times A/\ g(x) = g(y)\}$$

On montre que si g est un morphisme de semi-anneaux alors g_* est aussi un morphisme de semi-anneaux. En effet, par définition de la structure quotient $(A/R\ ,\ +'\ ,\ \centerdot\ )$, l'application canonique π est un morphisme de semi-anneaux ainsi :

$$g_*(\pi(x) +' \pi(y)) = g_*(\pi(x+y)) = g_* \circ \pi(x+y) = g(x+y) = g(x) +_b g(y)$$

et l'égalité $g(x) +_b g(y) = g_*(\pi(x)) +_b g_*(\pi(y))$ montre que

$$g_*(\pi(x) +' \pi(y)) = g_*(\pi(x)) +_b g_*(\pi(y))\ .$$

De même on a

$$g_*(\pi(x) \centerdot \pi(y)) = g_*(\pi(x \times y)) = g_* \circ \pi(x \times y) = g(x \times y) = g(x) \times_b g(y)$$

et l'égalité $g(x) \times_b g(y) = g_*(\pi(x)) \times_b g_*(\pi(y))$ montre que

$$g_*(\pi(x) \centerdot \pi(y)) = g_*(\pi(x)) \times_b g_*(\pi(y))\ .$$

(iii)

Il est clair que R_g est une relation d'équivalence (voir exemple [7.1] page 185), on montre qu'elle est compatible avec les lois de A.
Si $(x, y) \in R_g$ et $(a, b) \in R_g$ alors $g(x) = g(y)$ et $g(a) = g(b)$

— puisque g est additive

$$g(x + a) = g(x) + g(a) = g(y) + g(b) = g(y + b)$$

par suite $(x + a, y + b) \in R_g$.

— puisque g est multiplicative

$$g(x \times a) = g(x) \times_b g(a) = g(y) \times_b g(b) = g(y \times b)$$

par suite $(x \times a, y \times b) \in R_g$.

(iv)

D'après (ii) il suffit de montrer que

$$\varpi_*(X) \subset \{(x, y) \in A \times A/g(x) = g(y)\}$$

mais :

1. par hypothèse
$$X \subset \{(x, y) \in A \times A/g(x) = g(y)\}$$
2. d'après (iii) la relation
$$R_g = \{(x, y) \in A \times A/g(x) = g(y)\}$$
est une relation d'équivalence compatible avec les lois de A.

Ainsi la définition de $\varpi_*(X)$ (voir (i)) montre que $\varpi_*(X) \subset R_g$.

(v)

1. On montre que $(\mathfrak{a}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$
   (a) $x \in \mathfrak{a} \Rightarrow -x \in \mathfrak{a}$. En effet, si $(x, 0) \in R$ alors
   — la reflexivité de R montre que $(-x, -x) \in R$
   — la compatibilité de R et de l'addition montre

$$(x, 0) \in R \text{ et } (-x, -x) \in R \Rightarrow (x - x, -x) \in R \Rightarrow (0, -x) \in R$$

— la symmétrie de R montre que $(-x, 0) \in R$

(b) On montre $(x, y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \Rightarrow x + y \in \mathfrak{a}$. Si $(x, 0) \in R$ et $(y, 0) \in R$ la compatibilité de R et de l'addition montre

$$(x, 0) \in R \quad \text{et} \quad (y, 0) \in R \Rightarrow (x + y, 0) \in R$$

2. On montre

$$(a, x) \in A \times \mathfrak{a} \Rightarrow a \times x \in \mathfrak{a} \text{ et } x \times a \in \mathfrak{a}$$

Si $a \in A$ et $(x, 0) \in R$ alors
— la reflexivité de R montre que $(a, a) \in R$
— la compatibilité de R et de la multiplication montre

$$(x, 0) \in R \text{ et } (a, a) \in R \Rightarrow (x \times a, 0 \times a) \in R \Rightarrow (x \times a, 0) \in R$$

et $(a \times x, a \times 0) \in R$

3. On montre que pour tout $x \in A$ on a $\pi(x) = x + \mathfrak{a}$

(a) D'abord on montre $\pi(x) \subset x + \mathfrak{a}$. En effet, si $y \in \pi(x)$ alors $(x, y) \in R$
— la reflexivité de R montre que $(-y, -y) \in R$
— la compatibilité de R et de l'addition montre

$$(x, y) \in R \text{ et } (-y, -y) \in R \Rightarrow (x - y, y - y) \in R \Rightarrow (x - y, 0) \in R$$

ainsi on obtient $(x, y) \in R \Rightarrow x - y \in \mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a}, +)$ étant un groupe commutatif on obtient $y - x = -(x - y) \in \mathfrak{a}$ et $y \in x + \mathfrak{a}$.

(b) Ensuite on montre $x + \mathfrak{a} \subset \pi(x)$ Si $y - x \in \mathfrak{a}$ alors $(y - x, 0) \in R$ par suite,
— la reflexivité de R montre que $(x, x) \in R$
— la compatibilité de R et de l'addition montre

$$(y - x, 0) \in R \text{ et } (x, x) \in R \Rightarrow ((y - x) + x, 0 + x) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

ainsi $(y, x) \in R$ et $y \in \pi(x)$.

(vi)

1. On montre que R est une relation d'équivalence compatible avec les lois de A

(a) (reflexivité) puisque $0 \in \mathfrak{a}$, pour tout $x \in A$ on a $(x, x) \in A$

(b) (symmétrie) puisque $(\mathfrak{a}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$, si $x - y \in \mathfrak{a}$ alors $y - x = -(x - y) \in \mathfrak{a}$, ainsi

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$$

(c) (transitivité) puisque $(\mathfrak{a}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$, si $x - y \in \mathfrak{a}$ et $y - z \in \mathfrak{a}$ alors $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathfrak{a}$, ainsi

$$(x, y) \in R \text{ et } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

(d) (compatibilité avec l'addition) puisque $(\mathfrak{a}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$, si $x - y \in \mathfrak{a}$ et $a - b \in \mathfrak{a}$ alors $x + a - (y + b) = (x - y) + (a - b) \in \mathfrak{a}$, ainsi

$$(x, y) \in R \text{ et } (a, b) \in R \Rightarrow (x + a, y + b) \in R$$

(e) (compatibilité avec la multiplication) puisque $(\mathfrak{a}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ et vérifie $(a, x) \in A \times \mathfrak{a} \Rightarrow a \times x \in \mathfrak{a}$ et $x \times a \in \mathfrak{a}$ si

$$(x - y) \in \mathfrak{a} \text{ et } (a - b) \in \mathfrak{a}$$

alors l'égalité

$$x \times a - y \times b = (x - y) \times a + y \times (a - b)$$

montre que $x \times a - y \times b$ est somme de deux éléments de $\mathfrak{a}$ ainsi

$$(x, y) \in R \text{ et } (a, b) \in R \Rightarrow (x \times a, y \times b) \in R\ .$$

2. On montre $\mathfrak{a} = \{x \in A/(x,0) \in R\}$
   (a) si $x \in \mathfrak{a}$ alors $x - 0 \in \mathfrak{a}$ par suite $(x,0) \in R$ et

$$\mathfrak{a} \subset \{x \in A/(x,0) \in R\}$$

   (b) si $(x,0) \in R$ alors $x - 0 \in \mathfrak{a}$ par suite $x \in \mathfrak{a}$ et

$$\{x \in A/(x,0) \in R\} \subset \mathfrak{a}$$

■

Les points (v) et (vi) du lemme [9.10] page 470 permettent de développer un formalisme pour les semi-anneaux quotients qui semble plus adapté à certaines questions que celui lié aux relations d'équivalences.

Idéaux et quotients

Définition 9.14 *On note $(A,+,\times)$ un semi-anneau, un sous-ensemble $\mathfrak{a}$ de A est appelé*

1. *un **idéal** (bilatère) si $(\mathfrak{a},+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$ qui vérifie*

$$(a,x) \in A \times \mathfrak{a} \Rightarrow a \times x \in \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad x \times a \in \mathfrak{a}$$

2. *un **idéal** à gauche si $(\mathfrak{a},+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$ qui vérifie*

$$(a,x) \in A \times \mathfrak{a} \Rightarrow a \times x \in \mathfrak{a}$$

3. *un **idéal** à droite si $(\mathfrak{a},+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$ qui vérifie*

$$(a,x) \in A \times \mathfrak{a} \Rightarrow x \times a \in \mathfrak{a}$$

On note $\mathfrak{I}(A)$ l'ensemble des idéaux de A, $\mathfrak{I}_g(A)$ l'ensemble des idéaux à gauche et $\mathfrak{I}_d(A)$ l'ensemble des idéaux à droite

Sauf mention du contraire, tout idéal est bilatère, de plus
- $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}_g(A) \Rightarrow A\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$
- $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}_d(A) \Rightarrow \mathfrak{a}A \subset \mathfrak{a}$

Il est clair que tout idéal de A est un sous-semi-anneau de A. Les ensembles $\mathfrak{a} = \{0\}$ et $\mathfrak{a} = A$ sont des idéaux.

Lemme 9.11 *On note $(A,+,\times)$ un semi-anneau*

(i) Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux (respectivement des idéaux à gauche ou des idéaux à droite) de A alors : l'ensemble $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ défini par

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \{x \in A/\exists\ (a,b) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} : x = a+b\}$$

est un idéal de A (respectivement un idéal à gauche ou un idéal à droite).

(ii) Si $\mathcal{I} \subset \mathfrak{I}(A)$ est une famille d'idéaux de A (respectivement une famille d'idéaux à gauche ou d'idéaux à droite) alors

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}} \mathfrak{b}$$

est un idéal de A (respectivement un idéal à gauche ou un idéal à droite)

(iii) Si $X \subset A$ est un sous-ensemble de A il existe un unique idéal de A (respectivement un idéal à gauche ou un idéal à droite) noté $\mathfrak{a}(X)$ qui vérifie les propriétés suivantes

1. *$X \subset \mathfrak{a}(X)$*

2. si $\mathfrak{b} \in \mathfrak{I}(A)$(resp $\mathfrak{b} \in \mathfrak{I}_g(A)$ ou $\mathfrak{b} \in \mathfrak{I}_d(A)$) et $X \subset \mathfrak{b}$ alors

$$\mathfrak{a}(X) \subset \mathfrak{b} \ .$$

(iv) Si $\mathcal{I} \subset \mathfrak{I}(A)$ est une famille d'idéaux de A (respectivement une famille d'idéaux à gauche ou d'idéaux à droite) ***totalement ordonnée*** *par l'inclusion alors*

$$\mathfrak{a} = \bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}} \mathfrak{b}$$

est un idéal de A (respectivement un idéal à gauche ou un idéal à droite).

Preuve

(i)

$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est un idéal.

1. D'abord $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est un sous-groupe de $(A, +)$.
   — il est clair que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \neq \varnothing$
   — si $x \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ il existe $(a, b) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ tel que $x = a + b$ par suite $-x = (-a) + (-b)$ est un élément de $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.
   — si $(x, y) \in (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ il existe $(a, b) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ tel que $x = a + b$ et $(c, d) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ tel que $y = c + d$ par suite
   $$x + y = (a + c) + (b + d)$$
   est un élément de $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.
2. Ensuite on montre
   $$(x, y) \in A \times (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \Rightarrow x \times y \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \quad \text{et} \quad y \times x \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$$
   Si $y \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ il existe $(a, b) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ tel que $y = a + b$, ainsi, par distributivité,
   $$x \times y = x \times a + x \times b \quad \text{et} \quad y \times x = a \times x + b \times x$$
   — puisque $\mathfrak{a}$ est un idéal $x \times a \in \mathfrak{a}$ et $a \times x \in \mathfrak{a}$
   — puisque $\mathfrak{b}$ est un idéal $x \times b \in \mathfrak{b}$ et $b \times x \in \mathfrak{b}$
   ainsi $x \times y$ et $y \times x$ sont sommes d'un élément de $\mathfrak{a}$ et d'un élément de $\mathfrak{b}$

(ii)

1. D'abord on montre que $(\mathfrak{a}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$
   — pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}$ on a $0 \in \mathfrak{b}$ par suite $0 \in \mathfrak{a}$
   — si $x \in \mathfrak{a}$ alors pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}$ on a $x \in \mathfrak{b}$ par suite pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}$ on a $-x \in \mathfrak{b}$, ainsi $-x \in \mathfrak{a}$
   — si $(x, y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ alors pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}$ on a $(x, y) \in \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ par suite pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}$ on a $x + y \in \mathfrak{b}$, ainsi $x + y \in \mathfrak{a}$
2. Ensuite on montre
   $$(a, x) \in A \times \mathfrak{a} \Rightarrow a \times x \in \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad x \times a \in \mathfrak{a}$$
   si $x \in \mathfrak{a}$ alors pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}$ on a $x \in \mathfrak{b}$ par suite pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}$ on a $a \times x \in \mathfrak{b}$ et $x \times a \in \mathfrak{b}$, ainsi $a \times x \in \mathfrak{a}$ et $x \times a \in \mathfrak{a}$

(iii)

Preuve de l'existence

On pose
$$\mathcal{I}(X) = \{\mathfrak{b} \in \mathfrak{I}(A) / X \subset \mathfrak{b}\} \ .$$
Puisque A est un idéal contenant X on a $\mathcal{I}(X) \neq \varnothing$ d'après (ii) l'ensemble
$$\mathfrak{a}(X) = \bigcap_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(X)} \mathfrak{b}$$
est un idéal.On montre que $\mathfrak{a}(X)$ vérifie les propriétés *1* et *2* de (iii)

1. puisque pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(X)$ on a $X \subset \mathfrak{b}$ on obtient $X \subset \mathfrak{a}(X)$.
2. si $\mathfrak{b} \in \mathfrak{I}(A)$ vérifie $X \subset \mathfrak{b}$ alors $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(X)$ par suite $\mathfrak{a}(X) \subset \mathfrak{b}$.

Preuve de l'unicité

Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ vérifie (iii) *1* et *2* alors

— puisque $X \subset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ vérifie *2* on a $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$
— puisque $X \subset \mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{a}$ vérifie *2* on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'$

ainsi on obtient
$$\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \ .$$
(iv)

1. D'abord on montre que $(\mathfrak{a}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$
   — il est clair que $\mathfrak{a} \neq \varnothing$
   — si $x \in \mathfrak{a}$ alors il existe $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}$ tel que $x \in \mathfrak{b}$, ainsi $-x \in \mathfrak{b}$ et
$$-x \in \bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}} \mathfrak{b}$$
   — si $(x, y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ alors il existe $\mathfrak{b}_0 \in \mathcal{I}$ tel que $x \in \mathfrak{b}_0$ et $\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{I}$ tel que $y \in \mathfrak{b}_1$, puisque $\mathcal{I}$ est totalement ordonné on a $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1$ ou $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_0$.
      — si $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1$ alors $(x, y) \in \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_1$ par suite $x + y \in \mathfrak{b}_1$ et $x + y \in \mathfrak{a}$
      — si $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_0$ alors $(x, y) \in \mathfrak{b}_0 \times \mathfrak{b}_0$ par suite $x + y \in \mathfrak{b}_0$ et $x + y \in \mathfrak{a}$
2. Ensuite on montre
$$(a, x) \in A \times \mathfrak{a} \Rightarrow a \times x \in \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad x \times a \in \mathfrak{a}$$
   si $x \in \mathfrak{a}$ alors il existe $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}$ tel que $x \in \mathfrak{b}$ par suite $a \times x \in \mathfrak{b}$ et $x \times a \in \mathfrak{b}$, ainsi $a \times x \in \mathfrak{a}$ et $x \times a \in \mathfrak{a}$

■

Si $(A, +, \times)$ est un semi-anneau et $X \subset A$ l'idéal vérifiant les popriétés (iii) *1* et (iii) *2* du lemme [9.11] page 475 s'appelle l'idéal engendré par X.

Définition 9.15 *On note $(A, +, \times)$ un semi-anneau et $X \subset A$ un sous-ensemble de A, on appelle* ***idéal engendré*** *par X l'unique idéal $\mathfrak{a}$ qui vérifie les propriétés suivantes*

1. $X \subset \mathfrak{a}$
2. si $\mathfrak{b} \in \mathfrak{I}(A)$ et $X \subset \mathfrak{b}$ alors
$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \ .$$

On note **idéal**(X) *l'idéal engendré par X*

La description des idéaux du type **idéal**(X) est simple. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal contenant X alors l'ensemble
$$AXA = \{z \in A / \exists \ (a, x, b) \in A \times X \times A : z = (a \times x) \times b\}$$
vérifie $AXA \subset \mathfrak{a}$ ainsi les sommes finies d'éléments de AXA sont des éléments de $\mathfrak{a}$. Or l'ensemble des sommes finies d'éléments de AXA est un idéal, c'est donc le plus « petit » idéal de A contenant AXA, enfin lorsque A est un anneau on a $X \subset AXA$ et l'ensemble des sommes finies d'éléments de AXA est l'idéal engendré par X

Lemme 9.12 *On note* $(A, +, \times)$ *un semi-anneau où la multiplication* $\times$ *est notée* $\times : (x, y) \mapsto xy$ *,* $X \subset A$ *un sous-ensemble de* A *et* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels. Enfin on note* AXA *le sous-ensemble de* A *défini par*

$$AXA = \{z \in A / \exists\ ((a, x), b) \in (A \times X) \times A : z = (ax)b\}\ ,$$

$$\Xi = (\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, X)) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$$

et

$$\Theta = \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, X)\ .$$

(i) L'application τ *de* Ξ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *définie par*

$$\tau((a, x), b)(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k b_k$$

vérifie les propriétés suivantes

1. *si* $(a, a') \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *est définie par*

$$u_k = a_k + a'_k$$

alors pour tout $(x, b) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $n \in \mathbb{N}$

$$\tau((u, x), b)(n) = \tau((a, x), b)(n) + \tau((a', x), b)(n)$$

2. *si* $(b, b') \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *est définie par*

$$v_k = b_k + b'_k$$

alors pour tout $(a, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $n \in \mathbb{N}$

$$\tau((a, x), v)(n) = \tau((a, x), b)(n) + \tau((a, x), b')(n)$$

3. *si* $\lambda \in A$*,* $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $p \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *est définie par*

$$p_k = \lambda a_k$$

alors pour tout $(x, b) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $n \in \mathbb{N}$

$$\tau((p, x), b)(n) = \lambda\tau((a, x), b)(n)$$

4. *si* $\mu \in A$*,* $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *et* $q \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ *est définie par*

$$q_k = b_k \mu$$

alors pour tout $(a, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, X)$ *et* $n \in \mathbb{N}$

$$\tau((a, x), q)(n) = \tau((a, x), b)(n)\mu$$

5. *L'ensemble*

$$\mathfrak{a} = \{y \in A / \exists\ ((a, x), b), n) \in \Xi \times \mathbb{N} : y = \tau((a, x), b)(n)\}$$

est un idéal de A.

(ii) L'idéal engendré par AXA est l'ensemble

$$\textbf{idéal}(AXA) = \{y \in A / \exists\ ((a,x),b),n) \in \Xi \times \mathbb{N} : y = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k b_k\}$$

(iii) Si X est un idéal à gauche, L'idéal engendré par XA est l'ensemble

$$\textbf{idéal}(XA) = \{y \in A / \exists\ ((b,x),n) \in \Theta \times \mathbb{N} : y = \sum_{k=0}^{n} x_k b_k\}$$

(iv) Si X est un idéal à droite , L'idéal engendré par AX est l'ensemble

$$\textbf{idéal}(AX) = \{y \in A / \exists\ ((a,x),n) \in \Theta \times \mathbb{N} : y = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k\}$$

(v) Si $(A,+,\times)$ est un anneau alors l'idéal engendré par X est l'ensemble

$$\textbf{idéal}(X) = \{y \in A / \exists\ ((a,x),b),n) \in \Xi \times \mathbb{N} : y = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k b_k\}$$

De plus, si $X = \{x\}$

1. *l'idéal à gauche engendré par x est l'ensemble*

$$Ax = \{\ y \in A / \exists a \in A : y = ax\}$$

2. *l'idéal à droite engendré par x est l'ensemble*

$$xA = \{\ y \in A / \exists a \in A : y = xa\}$$

(vi) Si $(A,+,\times)$ est un anneau commutatif alors l'idéal engendré par X est l'ensemble

$$\textbf{idéal}(X) = \{y \in A / \exists\ ((a,x),n) \in \Theta \times \mathbb{N} : y = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k\}$$

en particulier si $X = \{x\}$ ne contient qu'un élément alors

$$\textbf{idéal}(\{x\}) = Ax = \{\ y \in A / \exists a \in A : y = ax\}$$

Preuve

(i)

1. On a

$$\tau((a,x),b) + \tau((a',x),b) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k b_k + \sum_{k=0}^{n} a'_k x_k b_k,$$

— d'après le (9.3) du lemme [9.1] page 419

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k b_k + \sum_{k=0}^{n} a'_k x_k b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k x_k b_k + a'_k x_k b_k)$$

— par distributivité

$$a_k x_k b_k + a'_k x_k b_k = (a_k + a'_k) x_k b_k = (u_k x_k) b_k$$

ainsi

$$\sum_{k=0}^{n}(a_kx_kb_k + a'_kx_kb_k) = \sum_{k=0}^{n}(u_kx_k)b_k = \tau((u,x),b)$$

et

$$\tau((a,x),b) + \tau((a',x),b) = \tau((u,x),b)$$

2. La preuve, similaire à celle de *1.* est laissée au soin du lecteur.

3. d'après le lemme [9.1] page 419

$$\lambda\sum_{k=0}^{n}(a_kx_k)b_k = \sum_{k=0}^{n}\lambda((a_kx_k)b_k)$$

par associativité

$$\lambda((a_kx_k)b_k) = (\lambda a_kx_k)b_k = (p_kx_k)b_k$$

ainsi

$$\lambda\tau((a,x),b) = \lambda\sum_{k=0}^{n}(a_kx_k)b_k = \sum_{k=0}^{n}(p_kx_k)b_k = \tau((p,x),b)$$

4. La preuve, similaire à celle de *3.* est laissée au soin du lecteur.

5. D'abord on montre que $(\mathfrak{a},+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$

— Il est clair que $0 \in \mathfrak{a}$ puisque $0 = 0x0$

— si $y \in \mathfrak{a}$ il existe $((a,x),b)$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$y = \tau((a,x),b) = \sum_{k=0}^{n} a_kx_kb_k$$

si $a' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},A)$ est définie par

$$a'_k = -a_k$$

alors d'après *1.* on a, si $u_k = a_k + a'_k$

$$\tau((a,x),b)(n) + \tau((a',x),b)(n) = \tau((u,x),b)(n)$$

mais pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $u_k = a_k + a'_k = 0$, ainsi $\tau((u,x),b)(n) = 0$ et

$$y + \tau((a',x),b)(n) = 0$$

par suite

$$-y = \tau((a',x),b)(n) \quad \text{et} \quad -y \in \mathfrak{a}$$

— si $(y,z) \in \mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ alors il existe $((a,x),b) \in \Xi$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $y = \tau((a,x),b)(n)$, de même il existe $((c,u),d) \in \Xi$ et un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $z = \tau((c,u),d)(p)$ ainsi

$$x + y = \sum_{k=0}^{n} a_kx_kb_k + \sum_{k=0}^{p} c_ku_kd_k\ ,$$

on pose

$$H = \left\{k \in \mathbb{N}/\sum_{j=0}^{n} a_jx_jb_j + \sum_{j=0}^{k} c_ju_jd_j \in \mathfrak{a}\right\}$$

et on montre que H est héréditaire

1. D'abord on montre $0 \in H$. Il s'agit de montrer qu'il existe un triplet $((e,f),g) \in \Xi$ et $l \in \mathbb{N}$ vérifiant
$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j b_j + c_0 u_0 d_0 = \sum_{j=0}^{l} e_j f_j g_j$$
il suffit de poser
$$e_j = \begin{cases} a_j & si \quad j \leq n \\ c_0 & si \quad j \geq n+1 \end{cases}$$
$$f_j = \begin{cases} x_j & si \quad j \leq n \\ u_0 & si \quad j \geq n+1 \end{cases}$$
et
$$g_j = \begin{cases} b_j & si \quad j \leq n \\ d_0 & si \quad j \geq n+1 \end{cases}$$
pour voir que
$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j b_j + c_0 u_0 d_0 = \sum_{j=0}^{n+1} e_j f_j g_j = \tau((e,f),g)(n+1)$$

2. Ensuite on montre $k \in H \Rightarrow k+1 \in H$. Si $k \in H$ alors il existe $((a',x'),b') \in \Xi$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que
$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j b_j + \sum_{j=0}^{k} c_j u_j d_j = \sum_{j=0}^{m} a'_j x'_j b'_j$$
par suite
$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j b_j + \sum_{j=0}^{k+1} c_j u_j d_j = \sum_{j=0}^{m} a'_j x'_j b'_j + c_{k+1} u_{k+1} d_{k+1}$$
il suffit donc encore de poser
$$e_j = \begin{cases} a'_j & si \quad j \leq m \\ c_{k+1} & si \quad j \geq m+1 \end{cases}$$
$$f_j = \begin{cases} x'_j & si \quad j \leq m \\ u_{k+1} & si \quad j \geq m+1 \end{cases}$$
et
$$g_j = \begin{cases} b'_j & si \quad j \leq m \\ d_{k+1} & si \quad j \geq m+1 \end{cases}$$
pour voir que
$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j b_j + \sum_{j=0}^{k+1} c_j u_j d_j = \sum_{j=0}^{m+1} e_j f_j g_j = \tau((e,f),g)(m+1)$$

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j b_j + \sum_{j=0}^{k} c_j u_j d_j \in \mathfrak{a}$$
en particulier
$$x + y = \sum_{j=0}^{n} a_j x_j b_j + \sum_{j=0}^{p} c_j u_j d_j \in \mathfrak{a}\ .$$

Il reste à voir

$$(\lambda, y) \in A \times \mathfrak{a} \Rightarrow \lambda y \in \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad y\lambda \in \mathfrak{a}$$

Si $y \in \mathfrak{a}$ il existe $((a, x), b) \in \Xi$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$y = \tau((a, x), b)(n)$$

par *3.* si $p \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ est définie par

$$p_k = \lambda a_k$$

alors

$$\lambda y = \tau((p, x), b)(n) \in \mathfrak{a}$$

et par *4.* si $q \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ est définie par

$$q_k = b_k \lambda$$

alors

$$y\lambda = \tau((a, x), q)(n) \in \mathfrak{a}$$

(ii)

D'après (i) *5.* l'ensemble

$$\mathfrak{a} = \{y \in A / \exists \ ((a, x), b), n)) \in \Xi \times \mathbb{N} : y = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k b_k\}$$

est un idéal de A il suffit donc de montrer que tout idéal contenant AXA contient $\mathfrak{a}$. Mais si $\mathfrak{b}$ est un idéal contenant AXA alors pour tout $((a, x), b) \in \Xi$ on a $a_k x_x b_k \in \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ étant stable pour l'addition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k b_k \in \mathfrak{b}$$

ce qui montre que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.

(iii)

On montre que si X est un idéal à gauche alors l'ensemble

$$\mathfrak{b} = \{y \in A / \exists \ ((b, x), n) \in \Theta \times \mathbb{N} : y = \sum_{k=0}^{n} x_k b_k\}$$

est un idéal.

1. D'abord $(\mathfrak{b}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$. Il est clair que $0 \in \mathfrak{b}$ et que $x \in \mathfrak{b} \Rightarrow -x \in \mathfrak{b}$. On montre

   $$(x, y) \in \mathfrak{b} \times \mathfrak{b} \Rightarrow x + y \in \mathfrak{b} \ .$$

   si $(x, y) \in \mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ alors il existe $(b, u) \in \Theta$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \sum_{k=0}^{n} u_k b_k$, de même il existe $(a, v) \in \Theta$ et un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $y = \sum_{k=0}^{n} v_k a_k$ ainsi

   $$x + y = \sum_{k=0}^{n} u_k b_k + \sum_{k=0}^{p} v_k a_k \ ,$$

   on pose

   $$H = \left\{ k \in \mathbb{N} / \sum_{j=0}^{n} u_j b_j + \sum_{j=0}^{k} v_j a_j \in \mathfrak{b} \right\}$$

   et on montre que H est héréditaire

(a) D'abord on montre $0 \in H$. Il s'agit de montrer qu'il existe un couple $(c, w) \in \Theta$ et $l \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\sum_{j=0}^{n} u_j b_j + v_0 a_0 = \sum_{j=0}^{l} w_j c_j$$

il suffit de poser $l = n + 1$

$$w_j = \begin{cases} u_j & si \quad j \leq n \\ v_0 & si \quad j \geq n+1 \end{cases}$$

et

$$f_j = \begin{cases} b_j & si \quad j \leq n \\ a_0 & si \quad j \geq n+1 \end{cases}$$

(b) Ensuite on montre $k \in H \Rightarrow k+1 \in H$. Si $k \in H$ alors il existe $(u', b') \in \Theta$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{j=0}^{n} u_j b_j + \sum_{j=0}^{k} v_j a_j = \sum_{j=0}^{m} u'_j b'_j$$

par suite

$$\sum_{j=0}^{n} u_j b_j + \sum_{j=0}^{k+1} v_j a_j = \sum_{j=0}^{m} u'_j b'_j + v_{k+1} a_{k+1}$$

il suffit donc encore de poser

$$e_j = \begin{cases} u'_j & si \quad j \leq m \\ v_{k+1} & si \quad j \geq m+1 \end{cases}$$

et

$$f_j = \begin{cases} b'_j & si \quad j \leq m \\ a_{k+1} & si \quad j \geq m+1 \end{cases}$$

pour voir que

$$\sum_{j=0}^{n} u_j b_j + \sum_{j=0}^{k+1} v_j a_j = \sum_{j=0}^{m+1} e_j f_j$$

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{n} u_j b_j + \sum_{j=0}^{k} v_j a_j \in \mathfrak{b}$$

en particulier,

$$x + y = \sum_{j=0}^{n} u_j b_j + \sum_{j=0}^{p} v_j a_j \in \mathfrak{b} \ .$$

2. Il reste à voir

$$(\lambda, x) \in A \times X \Rightarrow \lambda x \in \mathfrak{b} \quad \text{et} \quad x\lambda \in \mathfrak{b} \ .$$

Si $x \in \mathfrak{b}$ alors il existe $(b, u) \in \Theta$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$x = \sum_{k=0}^{n} u_k b_k$$

le lemme [9.1] page 419 permet d'affirmer

$$\lambda x = \sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k) b_k$$

X étant un idéal à gauche, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $v_k = \lambda u_k \in X$ ainsi $(b, v) \in \Theta$ et

$$\lambda x = \sum_{k=0}^{n} v_k b_k \in \mathfrak{b}$$

de même

$$x\lambda = \sum_{k=0}^{n} u_k (b_k \lambda)$$

ainsi, si $a_k = b_k \lambda$ on a $(a, u) \in \Theta$ et

$$x\lambda = \sum_{k=0}^{n} u_k a_k \in \mathfrak{b} \ .$$

(iv)

La preuve, similaire à celle de (iii) est laissée au soin du lecteur.

(v)

Si $(A, +, \times)$ est un anneau alors pour tout $x \in X$ on a $x = 1x1 \in AXA$ par suite $X \subset AXA$ et $\mathbf{idéal}(X) \subset \mathbf{idéal}(AXA)$, il suffit donc de montrer que tout idéal contenant X contient AXA. Or si $\mathfrak{b} \in \mathfrak{I}(A)$, $X \subset \mathfrak{b}$ et $(a, b) \in A \times A$ alors
— puisque $\mathfrak{b}$ est un idéal $ax \in \mathfrak{b}$
— puisque $ax \in \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}$ est un idéal on a $(ax)b \in \mathfrak{b}$
ainsi $AXA \subset \mathfrak{b}$.
On montre que Ax est un idéal à gauche de A.
— puisque $0 = 0x$ on a $0 \in Ax$
— si $y = ax$ alors $-y = (-a)x \in Ax$
— si $y = ax$ et $y' = a'x$ alors $y + y' = (a + a')x \in Ax$
— si $y = ax$ et $\lambda \in A$ alors $\lambda y = \lambda(ax) = (\lambda a)x \in Ax$.
Enfin si $\mathfrak{b}$ est un idéal à gauche de A tel que $x \in \mathfrak{b}$ alors $Ax \subset A\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$.
Une preuve similaire montre que xA est l'idéal à droite engendré par x.

(vi)

On montre que lorsque $(A, +, \times)$ est commutatif l'ensemble

$$\mathfrak{a} = \{y \in A / \exists \ ((a, x), b), n)) \in \Xi \times \mathbb{N} : y = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k b_k\}$$

est égal à l'ensemble

$$\mathfrak{b} = \{y \in A / \exists \ ((a, x), n) \in \Theta \times \mathbb{N} : y = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k\}$$

Il est clair que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ (prendre $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A)$ définie par : $\forall \ k \in \mathbb{N} \ b_k = 1$). D'autre part, si $y \in \mathfrak{a}$ il existe $((a, x), b) \in \Xi$ tel que

$$y = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k b_k$$

la commutativité de A entraîne

$$y = \sum_{k=0}^{n} (a_k b_k) x_k \in \mathfrak{b} \ .$$

Enfin, si $X = \{x\}$ il est rapide de vérifier que l'ensemble

$$Ax = \{y \in A / \exists \ a \in A : y = ax\}$$

est un idéal de A.

— puisque $0 = 0x$ on a $0 \in Ax$
— si $y = ax$ alors $-y = (-a)x \in Ax$
— si $y = ax$ et $y' = a'x$ alors $y + y' = (a + a')x \in Ax$
— si $y = ax$ et $\lambda \in A$ alors $\lambda y = \lambda(ax) = (\lambda a)x \in Ax$ et par commutativité $y\lambda = (ax)\lambda = (a\lambda)x \in Ax$
enfin il est clair que si $\mathfrak{b} \in \mathfrak{I}(A)$ vérifie $x \in \mathfrak{b}$ alors $Ax \subset \mathfrak{b}$. ■

Le lemme [9.10] page 470 établit une bijection entre l'ensemble $\mathrm{Eq}[A, +, \times]$ des relations de A dans A qui sont compatibles avec les lois de A et l'ensemble $\mathfrak{I}(A)$ des idéaux de A, Cette bijection permet de traduire les propriétés des anneaux quotients en terme d'idéaux. On fixe quelques notations.

Notation 9.2 *On note $(A, +, \times)$ un semi-anneau et $\mathfrak{a}$ un idéal de A.*

1. *L'application $p_{\mathfrak{a}}$ de A dans $\mathcal{P}(A)$ est définie par*

$$p_{\mathfrak{a}}(x) = x + \mathfrak{a} = \{y \in A / y - x \in \mathfrak{a}\}$$

2. *Le sous-ensemble $A/\mathfrak{a}$ de $\mathcal{P}(A)$ est défini par*

$$A/\mathfrak{a} = \mathrm{im}(p_{\mathfrak{a}}) = \{X \in \mathcal{P}(A) / \exists\ x \in A : X = x + \mathfrak{a}\}$$

Le lemme qui suit permet la traduction equivalence $\leftrightarrow$ idéal.

Lemme 9.13 *On note $(A, +, \times)$ un semi-anneau.*

(i) On note κ l'application de $\mathcal{P}(A \times A)$ dans $\mathcal{P}(A)$ définie par

$$\kappa(R) = \{x \in A / (x, 0) \in R\}$$

alors

1. *κ est croissante de $(\mathcal{P}(A \times A), \subset)$ dans $(\mathcal{P}(A), \subset)$*
2. *$\kappa(\mathrm{Eq}[A, +, \times]) = \mathfrak{I}(A)$*
3. *si κ_e est la restriction de κ à $\mathrm{Eq}[A, +, \times]$ alors κ_e est une bijection de $\mathrm{Eq}[A, +, \times]$ dans $\mathfrak{I}(A)$ d'inverse*

$$\kappa_e^{-1}(\mathfrak{a}) = \{(x, y) \in A \times A / x - y \in \mathfrak{a}\}\ ,$$

de plus pour tout $R \in \mathrm{Eq}[A, +, \times]$ et $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(A)$ on a :

(a) si $(x, y) \in A \times A$ alors

$$p_{\mathfrak{a}}(x) = p_{\mathfrak{a}}(y) \Leftrightarrow x - y \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow y - x \in \mathfrak{a}$$

(b) si $\mathfrak{a} = \kappa_e(R)$ et $\pi : A \mapsto A/R$ est l'application canonique, pour tout $x \in A$

$$\pi(x) = p_{\mathfrak{a}}(x)$$

(c)

$$A/\kappa_e(R) = A/R \quad \text{et} \quad A/\mathfrak{a} = A/\kappa_e^{-1}(\mathfrak{a})$$

(ii) Pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(A)$ l'ensemble $A/\mathfrak{a}$ peut-être muni d'une structure de semi-anneau $(A/\mathfrak{a}\ , +',\ \centerdot)$ qui vérifie : $\forall\ (x, y) \in A \times A$

$$p_{\mathfrak{a}}(x + y) = p_{\mathfrak{a}}(x) +' p_{\mathfrak{a}}(y) \quad \text{et} \quad p_{\mathfrak{a}}(x \times y) = p_{\mathfrak{a}}(x) \centerdot p_{\mathfrak{a}}(y)$$

De plus,

1. *l'élément neutre du groupe $(A/\mathfrak{a},\ +')$ est l'ensemble $p_{\mathfrak{a}}(0) = \mathfrak{a}$*
2. *si $(A, +, \times)$ est un anneau d'unité 1 alors $(A/\mathfrak{a}\ , +'\ ,\ \centerdot)$ est un anneau d'unité $p_{\mathfrak{a}}(1) = 1 + \mathfrak{a}$.*

(iii) Si $(B, +_b\ , \times_b)$ est un semi-anneau, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A, B)$ est un morphisme de semi-anneaux, $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(A)$ est un idéal de A et $\mathfrak{b}$ un idéal de B alors

1. $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in A/f(x) = 0\}$ *est un idéal de* A*,*
2. *pour qu'il existe un morphisme d'anneaux* $f_* : A/\mathfrak{a} \mapsto B$ *vérifiant*

$$f = f_* \circ p_{\mathfrak{a}}$$

il faut et il suffit que

$$\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ker}(f)$$

on a alors $\mathrm{im}(f_*) = \mathrm{im}(f)$*.*

3. *si* $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(f)$ *alors* f_* *est injective et* f_* *est un isomorphisme du semi-anneau* $A/\mathrm{Ker}(f)$ *dans le semi-anneau* $\mathrm{im}(f)$
4. *si* $f(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$ *il existe un unique morphisme* $\overline{f}$ *de* $A/\mathfrak{a}$ *dans* $B/\mathfrak{b}$ *vérifiant*

$$p_{\mathfrak{b}} \circ f = \overline{f} \circ p_{\mathfrak{a}}$$

5. *si* $\mathfrak{a}_0$ *est un idéal de* A *vérifiant* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_0$ *alors*
   (a) $p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}$ *est un idéal de* $A/\mathfrak{a}$
   (b) *il existe un unique morphisme* ι *de* $A/\mathfrak{a}$ *dans* $A/\mathfrak{a}_0$ *tel que*

$$p_{\mathfrak{a}_0} = \iota \circ p_{\mathfrak{a}}$$

on a $\mathrm{Ker}(\iota) = \mathfrak{a}_0/\mathfrak{a} = p_{\mathfrak{a}_0}(\mathfrak{a})$ *et* $\mathrm{im}(\iota) = A/\mathfrak{a}_0$ *et le semi-anneau* $(A/\mathfrak{a})/(\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a})$ *est isomorphe à* $A/\mathfrak{a}_0$

Preuve

(i)

1. Si $R \subset R'$ et $x \in \kappa(R)$ alors $(x, 0) \in R$, ainsi $(x, 0) \in R'$ par suite

$$x \in \kappa(R) \Rightarrow x \in \kappa(R') \ .$$

2. Le (v) du lemme [9.10] page 470 montre

$$R \in \mathrm{Eq}[A, +, \times] \Rightarrow \kappa(R) \in \mathfrak{I}(A)$$

par suite $\kappa(\mathrm{Eq}[A, +, \times]) \subset \mathfrak{I}(A)$. Le (vi) du lemme [9.10] montre que si $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(A)$ alors

$$R = \{(x, y) \in A \times A/x - y \in A\}$$

vérifie $R \in \mathrm{Eq}[A, +, \times]$ et $\mathfrak{a} = \{x \in A/(x, 0) \in R\} = \kappa(R)$, par suite $\mathfrak{I}(A) \subset \kappa(\mathrm{Eq}[A, +, \times])$

3. Le (vi) du lemme [9.10] montre

$$\kappa(R) = \mathfrak{a} \Leftrightarrow R = \{(x, y) \in A \times A/y - x \in \mathfrak{a}\} \ .$$

ce qui montre que $\kappa_e^{-1}(\mathfrak{a}) = \{(x, y) \in A \times A/y - x \in \mathfrak{a}\}$.

   (a) — On montre $x + \mathfrak{a} = y + \mathfrak{a} \Rightarrow x - y \in \mathfrak{a}$ et $y - x \in \mathfrak{a}$. En effet, si $x + \mathfrak{a} \subset y + \mathfrak{a}$ alors $x \in y + \mathfrak{a}$ par suite il existe $z \in \mathfrak{a}$ tel que $x = y + z$ ainsi $z = x - y \in \mathfrak{a}$ et $-z = y - x \in \mathfrak{a}$.
   — on montre $x - y \in \mathfrak{a} \Rightarrow x + \mathfrak{a} = y + \mathfrak{a}$. En effet, si $u \in x + \mathfrak{a}$ il existe $z \in \mathfrak{a}$ tel que $u = x + z$, $(\mathfrak{a}, +)$ étant un groupe commutatif l'élément $z' = x - y + z$ est un élément de $\mathfrak{a}$ vérifiant $u = y + z'$ ce qui montre que $x + \mathfrak{a} \subset y + \mathfrak{a}$. On vérifie de même que $y + \mathfrak{a} \subset x + \mathfrak{a}$.

   (b) D'abord on montre $\pi(x) \subset p_{\kappa_e(R)}(x)$. En effet, si $y \in \pi(x)$ alors $(y, x) \in R$ les équivalences

$$(y, x) \in R \Leftrightarrow y - x \in \kappa_e(R) \Leftrightarrow y \in x + \kappa_e(R)$$

montrent que

$$y \in x + \kappa_e(R) = p_{\kappa_e(R)}(x)$$

ainsi $\pi(x) \subset p_{\kappa_e(R)}(x)$

(c) Ensuite on montre $p_{\kappa_e(R)}(x) \subset \pi(x)$. En effet, si $y \in p_{\kappa_e(R)}(x)$ alors $y - x \in \kappa_e(R)$ l'équivalence $(y, x) \in R \Leftrightarrow y - x \in \kappa_e(R)$ montre que

$$y \in \pi(x) \ .$$

4. on a, puisque pour tout $x \in A$ $p_{\kappa_e(R)}(x) = \pi(x)$,

$$X \in A/\kappa_e(R) \Leftrightarrow \exists x \in A : X = p_{\kappa_e(R)}(x) \Leftrightarrow \exists x \in A : X = \pi(x)$$

et

$$\exists x \in A : X = \pi(x) \Leftrightarrow X \in A/R \ .$$

ainsi

$$X \in A/\kappa_e(R) \Leftrightarrow X \in A/R$$

Enfin si $\kappa_e^{-1}(\mathfrak{a}) = R$ on obtient

$$A/\mathfrak{a} = A/\kappa_e(R) = A/R = A/\kappa_e^{-1}(\mathfrak{a})$$

(ii)

Si $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(A)$ et $R = \kappa_e^{-1}(\mathfrak{a}) = \{(x, y) \in A \times A / x - y \in \mathfrak{a}\}$ alors le lemme [9.8] page 465 permet de munir l'ensemble quotient $A/\kappa_e^{-1}(\mathfrak{a})$ d'une structure de semi-anneau $(A/\kappa_e^{-1}(\mathfrak{a})\ ,\ +',\ \centerdot)$ telle que l'application canonique $\pi : A \mapsto A/\kappa_e^{-1}(\mathfrak{a})$ vérifie

$$\pi(x + y) = \pi(x) +' \pi(y) \quad \text{et} \quad \pi(x \times y) = \pi(x) \centerdot \pi(y) \ .$$

Or (i) permet d'affirmer

$$A/\mathfrak{a} = A/\kappa_e^{-1}(\mathfrak{a}) \quad \text{et} \quad \forall x \in A \ \pi(x) = p_{\mathfrak{a}}(x)$$

Ainsi les lois $+'$ et $\centerdot$ confèrent à $A/\mathfrak{a}$ une structure d'anneau vérifiant

$$p_{\mathfrak{a}}(x + y) = p_{\mathfrak{a}}(x) +' p_{\mathfrak{a}}(y) \quad \text{et} \quad p_{\mathfrak{a}}(x \times y) = p_{\mathfrak{a}}(x) \centerdot p_{\mathfrak{a}}(y) \ .$$

(iii)

1. Le fait que $\mathrm{Ker}(f)$ est un idéal a été vu au lemme [9.6] page 455
2. (a) D'abord on montre que la condition $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ker}(f)$ est nécessaire. Si $x \in \mathfrak{a}$ alors $p_{\mathfrak{a}}(x) = p_{\mathfrak{a}}(0)$ ainsi

$$f(x) = f_*(p_{\mathfrak{a}}(x)) = f_*(p_{\mathfrak{a}}(0)) = f(0)$$

f étant un morphisme du groupe $(A, +)$ dans le groupe $(B, +_b)$ on a $f(0) = 0_b$ par suite

$$x \in \mathfrak{a} \Rightarrow f(x) = 0_b \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f) \ .$$

(b) Ensuite on montre que la condition est suffisante. Notons h_A une fonction de choix pour A (voir axiome [2.1] page 48). On dispose donc d'un diagramme

$$\mathcal{P}^*(A) \xrightarrow{h_A} A \xrightarrow{f} B$$

puisque $A/\mathfrak{a} \subset \mathcal{P}^*(A)$ la restriction f_* de $f \circ h_A$ à $A/\mathfrak{a}$ est une application, on montre que

$$f = f_* \circ p_{\mathfrak{a}}.$$

En effet, par définition de f_*, on a $f_*(p_{\mathfrak{a}}(x)) = f(h_A(p_{\mathfrak{a}}(x)))$, mais par définition d'une fonction de choix, $h_A(p_{\mathfrak{a}}(x)) \in p_{\mathfrak{a}}(x)$, ainsi on obtient $h_A(p_{\mathfrak{a}}(x)) - x \in \mathfrak{a}$ et l'hypothèse $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ker}(f)$ permet donc d'affirmer que pour tout $x \in A$

$$f(h_A(p_{\mathfrak{a}}(x)) - f(x) = f(h_A(p_{\mathfrak{a}}(x)) - x) = 0_b$$

par suite

$$\forall\ x \in A \quad f \circ h_A(p_{\mathfrak{a}}(x)) = f(x)$$

et $f_* \circ p_{\mathfrak{a}} = f$

(c) Enfin on montre que $f_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A/\mathfrak{a}\ , B)$. Si $(x, y) \in A \times A$ alors,
— puique $p_{\mathfrak{a}}$ est additive

$$f_*(p_{\mathfrak{a}}(x) +' p_{\mathfrak{a}}(y)) = f_*(p_{\mathfrak{a}}(x + y)) = f_* \circ p_{\mathfrak{a}}(x + y)$$

— puisque $f = f_* \circ p_{\mathfrak{a}}$ on obtient

$$f_*(p_{\mathfrak{a}}(x) +' p_{\mathfrak{a}}(y)) = f(x + y)$$

— puisque f est additive

$$f_*(p_{\mathfrak{a}}(x) +' p_{\mathfrak{a}}(y)) = f(x) +_b f(y) = f_*(p_{\mathfrak{a}}(x)) +_b f_*(p_{\mathfrak{a}}(y))$$

De même Si $(x, y) \in A \times A$ alors,
— puique $p_{\mathfrak{a}}$ est multiplicative

$$f_*(p_{\mathfrak{a}}(x) \centerdot p_{\mathfrak{a}}(y)) = f_*(p_{\mathfrak{a}}(x \times y)) = f_* \circ p_{\mathfrak{a}}(x \times y)$$

— puisque $f = f_* \circ p_{\mathfrak{a}}$ on obtient

$$f_*(p_{\mathfrak{a}}(x) \centerdot p_{\mathfrak{a}}(y)) = f(x \times y)$$

— puisque f est multiplicative

$$f_*(p_{\mathfrak{a}}(x) \centerdot p_{\mathfrak{a}}(y)) = f(x) \times_b f(y) = f_*(p_{\mathfrak{a}}(x)) \times_b f_*(p_{\mathfrak{a}}(y))$$

(d) il reste à voir $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f_*)$
— si $y \in \mathrm{im}(f)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ par suite $y = f_*(p_{\mathfrak{a}}(x)) \in \mathrm{im}(f_*)$ et $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{im}(f_*)$
— si $y \in \mathrm{im}(f_*)$ alors il existe $X \in A/\mathfrak{a}$ tel que $y = f_*(X)$, par définition de $A/\mathfrak{a}$ il existe $x \in A$ tel que $X = p_{\mathfrak{a}}(x)$ par suite $y = f_*(p_{\mathfrak{a}}(x)) = f_* \circ p_{\mathfrak{a}}(x) = f(x)$ et $\mathrm{im}(f_*) \subset \mathrm{im}(f)$

3. Si $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(f)$ alors, puisque $f = f_* \circ p_{\mathfrak{a}}$,

$$f_*(p_{\mathfrak{a}}(x)) = f_*(p_{\mathfrak{a}}(y)) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x - y \in \mathfrak{a} \Rightarrow p_{\mathfrak{a}}(x) = p_{\mathfrak{a}}(y)$$

ainsi $f_* : A/\mathrm{Ker}(f) \mapsto B$ est un morphisme injectif et, d'après *2* on a $\mathrm{im}(f_*) = \mathrm{im}(f)$.

4. Comme composé de morphismes $p_{\mathfrak{b}} \circ f$ est un morphisme de A dans $B/\mathfrak{b}$. On montre que

$$\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ker}(p_{\mathfrak{b}} \circ f)\ .$$

mais si $x \in \mathfrak{a}$ alors par hypothèse $f(x) \in \mathfrak{b}$, ainsi $p_{\mathfrak{b}}(f(x)) = p_{\mathfrak{b}}(0)$ et $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ker}(p_{\mathfrak{b}} \circ f)$. D'après *2* cette condition permet d'affirmer qu'il existe un morphisme $\overline{f} = (p_{\mathfrak{b}} \circ f)_*$ de $A/\mathfrak{a}$ dans $B/\mathfrak{b}$ vérifiant

$$p_{\mathfrak{b}} \circ f = \overline{f} \circ p_{\mathfrak{a}}$$

5. (a) On doit montrer
   i. $(\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}\ , +')$ est un sous-groupe de $(A/\mathfrak{a}\ , +')$
   ii. pour tout $X \in A/\mathfrak{a}$ et $y \in \mathfrak{a}_0$ $X \centerdot p_{\mathfrak{a}}(y) \in \mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}$

   i. puisque $p_{\mathfrak{a}}$ est un morphisme de $(A, +)$ dans $(A/\mathfrak{a}\ , +')$ et $(\mathfrak{a}_0, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ $(p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_0), +')$ est un sous-groupe comme image d'un sous-groupe par un morphisme de groupe.
   ii. si $X \in A/\mathfrak{a}$ il existe $x \in A$ tel que $X = p_{\mathfrak{a}}(x)$ il suffit donc de montrer :

$$\forall\ (x, y) \in A \times \mathfrak{a}_0 \quad p_{\mathfrak{a}}(x) \centerdot p_{\mathfrak{a}}(y) \in p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_0)$$

   Or,

— puisque $p_{\mathfrak{a}}$ est multiplicative

$$p_{\mathfrak{a}}(x) \centerdot p_{\mathfrak{a}}(y) = p_{\mathfrak{a}}(x \times y)$$

— puisque $\mathfrak{a}_0$ est un idéal de A on a $x \times y \in \mathfrak{a}_0$, par suite on a $p_{\mathfrak{a}}(x \times y) \in p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_0)$ et

$$p_{\mathfrak{a}}(x) \centerdot p_{\mathfrak{a}}(y) \in p_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_0)$$

(b) En appliquant *4* avec $f = id_A$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_0$ on voit qu'il existe $\iota = \overline{id_A}$ de $A/\mathfrak{a}$ dans $A/\mathfrak{a}_0$ vérifiant

$$p_{\mathfrak{a}_0} = \iota \circ p_{\mathfrak{a}}$$

— Si $x \in \mathfrak{a}_0$ alors $\iota(p_{\mathfrak{a}}(x)) = p_{\mathfrak{a}_0}(x) = p_{\mathfrak{a}_0}(0)$ par suite $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ker}(\iota)$
— si $p_{\mathfrak{a}}(x) \in \mathrm{Ker}(\iota)$ alors

$$\iota(p_{\mathfrak{a}}(x)) = p_{\mathfrak{a}_0}(0) = p_{\mathfrak{a}_0}(x)$$

par suite $x \in \mathfrak{a}_0$ et $p_{\mathfrak{a}}(x) \in \mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}$.
ceci montre que

$$\mathrm{Ker}(\iota) = \mathfrak{a}_0/\mathfrak{a} \ .$$

Ensuite ι est surjective puisque si $X \in A/\mathfrak{a}_0$ il existe $x \in A$ tel que $X = p_{\mathfrak{a}_0}(x)$ on a alors $\iota(p_{\mathfrak{a}}(x)) = p_{\mathfrak{a}_0}(x) = X$. Ainsi, puisque *3* permet d'affirmer qu'il existe un isomorphisme ι_* de $(A/\mathfrak{a})/\mathrm{Ker}(\iota)$ dans $A/\mathfrak{a}_0 = \mathrm{im}(\iota)$ on obtient

$$(A/\mathfrak{a})/(\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a}) \cong A/\mathfrak{a}_0 \ .$$

■

La notion d'idéal est liée à certaines notions arithmétiques. On rappelle quelques définitions.

Idéaux premiers et maximaux

Définition 9.16 *On note $(A, +, \times)$ un semi-anneau*

1. *Un élément $a \in A$ est dit **inversible à droite** si pour tout $y \in A$ il existe $x \in A$ tel que*

$$a \times x = y \ .$$

2. *Un élément $a \in A$ est dit **inversible à gauche** si pour tout $y \in A$ il existe $x \in A$ tel que*

$$x \times a = y \ .$$

3. *Un élément $a \in A$ est dit **inversible** si pour tout $y \in A$ il existe $x \in A$ tel que*

$$a \times x = x \times a = y \ .$$

4. *Un élément $a \in A$ est dit être un **diviseur de zéro à gauche** si $a \neq 0$ et s'il existe $b \in A$ tel que*

$$b \neq 0 \quad \text{et} \quad a \times b = 0$$

5. *Un élément $a \in A$ est dit être un **diviseur de zéro à droite** si $a \neq 0$ et s'il existe $b \in A$ tel que*

$$b \neq 0 \quad \text{et} \quad b \times a = 0$$

6. *Un élément $a \in A$ est dit **régulier** s'il n'est pas diviseur de zéro.*
7. *Le semi-anneau A est dit **intègre** s'il est sans diviseur de zéro :*

$$x \times a = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad a = 0 \ .$$

Lorsque $(A,+,\times)$ est un anneau un élément $a \in A$ est inversible à droite si et seulement si il existe $x \in A$ tel que $ax = 1$ et inversible à gauche si et seulement si il existe $x \in A$ tel que $xa = 1$. Enfin si de plus A est intègre l'inversibilité à gauche ou à droite entraîne l'inversibilité puisque

$$ax = 1 \Rightarrow axa = a \Rightarrow a(xa-1) = 0 \Rightarrow xa = 1$$

La proposition suivante n'est qu'une traduction de la définition des idéaux.

Proposition 9.1 *On note $(A,+,\times)$ un semi-anneau où la multiplication $\times$ est notée $\times : (x,y) \mapsto xy$ et $\mathfrak{p} \in \mathfrak{I}(A)$ un idéal de A, les conditions suivantes sont équivalentes :*

p1 *si $(a,b) \in A \times A$ vérifie $ab \in \mathfrak{p}$ alors $a \in \mathfrak{p}$* ou *$b \in \mathfrak{p}$*

p2 *L'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$ est intègre*

Preuve

1. Si **p 1** est vraie et $(x,y) \in A \times A$ vérifie

$$p_{\mathfrak{p}}(x) \centerdot p_{\mathfrak{p}}(y) = p_{\mathfrak{p}}(0)$$

alors, puisque $p_{\mathfrak{p}}$ est multiplicative on obtient

$$p_{\mathfrak{p}}(xy) = p_{\mathfrak{p}}(0)$$

par suite $xy \in \mathfrak{p}$ et **p 1** montre alors que $x \in \mathfrak{p}$ ou $y \in \mathfrak{p}$ par suite on obtient $p_{\mathfrak{p}}(x) = p_{\mathfrak{p}}(0)$ ou $p_{\mathfrak{p}}(y) = p_{\mathfrak{p}}(0)$.

2. si **p 2** est vraie et $(a,b) \in A \times A$ vérifie

$$ab \in \mathfrak{p}$$

alors

$$p_{\mathfrak{p}}(ab) = p_{\mathfrak{p}}(a) \centerdot p_{\mathfrak{p}}(b) = p_{\mathfrak{p}}(0)\ ,$$

$A/\mathfrak{p}$ étant intègre on en déduit $p_{\mathfrak{p}}(a) = p_{\mathfrak{p}}(0)$ ou $p_{\mathfrak{p}}(b) = p_{\mathfrak{p}}(0)$ ainsi $a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$.

■

Un idéal vérifiant l'une des propriétés de la proposition [9.1] s'appelle un idéal premier.

Définition 9.17 *On note $(A,+,\times)$ un semi-anneau, un idéal $\mathfrak{p}$ de A est dit **premier** si $\mathfrak{p} \neq A$ et :*

$$ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p} \quad \text{ou} \quad b \in \mathfrak{p}\ .$$

Ainsi pour trouver un idéal premier il suffit de trouver des idéaux tels que $A/\mathfrak{p}$ est intègre, On peut repérer les anneaux et les idéaux pour lesquels l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$ est un corps (donc est intègre).

Définition 9.18 *Un **corps** $(K,+,\times)$ est un anneau dans lequel tout élément non nul possède un inverse multiplicatif. En d'autres termes la propriété suivante est vérifiée :*

$$\forall\ a \in K^* \quad \exists x\ \in K : x \times a = a \times x = 1\ .$$

Dans le cas des corps on note $\dfrac{1}{a}$ l'inverse de $a \in K^*$

Il est clair qu'un corps est un anneau intègre puisque

$$ax = 0 \quad \text{et} \quad a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}(ax) = 0\ .$$

Le lemme qui suit permet de donner une condition pour qu'un anneau quotient $A/\mathfrak{m}$ soit un corps.

Lemme 9.14 *On note $(A, +, \times)$ un anneau tel que $1 \neq 0$.*

(i) Si $\mathfrak{a}_g \in \mathfrak{I}_g(A)$ est un idéal à gauche de A les conditions suivantes sont équivalentes

1. $\mathfrak{a}_g = A$
2. $1 \in \mathfrak{a}_g$
3. *$\mathfrak{a}_g$ contient un élément inversible à gauche.*

(ii) Si $\mathfrak{a}_d \in \mathfrak{I}_d(A)$ est un idéal à droite de A les conditions suivantes sont équivalentes

1. $\mathfrak{a}_d = A$
2. $1 \in \mathfrak{a}_d$
3. *$\mathfrak{a}_d$ contient un élément inversible à droite.*

(iii) Si A n'est pas intègre l'ensemble $\mathfrak{I}_g(A)$ des idéaux à gauche de A contient un idéal à gauche différent de $\{0\}$ et de A :

$$\mathfrak{I}_g(A) \neq \{\{0\}, A\}$$

(iv) Si A n'est pas intègre l'ensemble $\mathfrak{I}_d(A)$ des idéaux à droite de A contient un idéal à droite différent de $\{0\}$ et de A :

$$\mathfrak{I}_d(A) \neq \{\{0\}, A\}$$

(v) Dans un anneau intègre tout élément inversible à droite ou à gauche est inversible.

(vi) Les conditions suivantes sont équivalentes

1. *$(A, +, \times)$ est un corps,*
2. *l'ensemble $\mathfrak{I}_g(A)$ des idéaux à gauche de A ne contient que que les idéaux $\{0\}$ et A :*
$$\mathfrak{I}_g(A) = \{\{0\}, A\}$$
3. *l'ensemble $\mathfrak{I}_d(A)$ des idéaux à droite de A ne contient que que les idéaux $\{0\}$ et A :*
$$\mathfrak{I}_d(A) = \{\{0\}, A\}$$

(vii) Si $\mathfrak{m} \in \mathfrak{I}(A)$ est un idéal de A on note $\mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A) = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}_g(A)/\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}\}$ l'ensemble des idéaux à gauche de A qui contiennent $\mathfrak{m}$, et $\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})$ l'ensemble des idéaux à gauche de $A/\mathfrak{m}$. Si l'application

$$\mathtt{F} : \mathcal{P}(A) \mapsto \mathcal{P}(A/\mathfrak{m})$$

est définie par

$$\mathtt{F}(U) = \{X \in \mathcal{P}(A/\mathfrak{m})/\exists\, x \in U : X = p_{\mathfrak{m}}(x)\}$$

et l'application Φ de $\mathcal{P}(A/\mathfrak{m})$ dans $\mathcal{P}(A)$ est définie par

$$\Phi(V) = \{x \in A/p_{\mathfrak{m}}(x) \in V\}$$

alors

1. *Si f_g est la restriction de $\mathtt{F}$ à l'ensemble $\mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A) = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}_g(A)/\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}\}$ et φ_g est la restriction de Φ à l'ensemble $\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})$ alors f_g et φ_g vérifient les propriétés suivantes :*
   (a) *l'image $\mathrm{im}(f_g)$ de f_g est incluse dans l'ensemble $\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})$ des idéaux à gauche de $A/\mathfrak{m}$.*
   (b) *l'image $\mathrm{im}(\varphi_g)$ de φ_g est incluse dans l'ensemble $\mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A)$ des idéaux à gauche de A qui contiennent $\mathfrak{m}$.*
   (c) $f_g \circ \varphi_g = id_{\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})}$ *et* $\varphi_g \circ f_g = id_{\mathfrak{I}_g(\mathfrak{m},A)}$
   (d) *f_g est une bijection de $\mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A)$ dans $\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})$, φ_g est une bijection de $\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})$ dans $\mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A)$, de plus*
   $$[(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A) \times \mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A) \text{ et } \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}] \Leftrightarrow f_g(\mathfrak{a}) \subset f_g(\mathfrak{b})$$
   et
   $$[(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \in \mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m}) \times \mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m}) \text{ et } \mathcal{I} \subset \mathcal{J}] \Leftrightarrow \varphi_g(\mathcal{I}) \subset \varphi_g(\mathcal{J})$$

2. Si f_d est la restriction de $\mathtt{F}$ *à l'ensemble* $\mathfrak{I}_d(\mathfrak{m}, A) = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}_d(A)/\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}\}$ *des idéaux à droite de A qui contiennent $\mathfrak{m}$ et φ_d est la restriction de Φ à l'ensemble $\mathfrak{I}_d(A/\mathfrak{m})$ des idéaux à droite de $A/\mathfrak{m}$ alors f_d est une bijection de $\mathfrak{I}_d(\mathfrak{m}, A)$ dans $\mathfrak{I}_d(A/\mathfrak{m})$ d'inverse φ_d de plus*

$$[(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{I}_d(\mathfrak{m}, A) \times \mathfrak{I}_d(\mathfrak{m}, A) \text{ et } \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}] \Leftrightarrow f_d(\mathfrak{a}) \subset f_d(\mathfrak{b})$$

et

$$[[(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \in \mathfrak{I}_d(A/\mathfrak{m}) \times \mathfrak{I}_d(A/\mathfrak{m}) \text{ et } \mathcal{I} \subset \mathcal{J}] \Leftrightarrow \varphi_d(\mathcal{I}) \subset \varphi_d(\mathcal{J})$$

3. Si f est la restriction de $\mathtt{F}$ *à l'ensemble* $\mathfrak{I}(\mathfrak{m}, A) = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(A)/\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}\}$ *des idéaux de A qui contiennent $\mathfrak{m}$ et φ est la restriction de Φ à l'ensemble $\mathfrak{I}(A/\mathfrak{m})$ des idéaux de $A/\mathfrak{m}$ alors f est une bijection de $\mathfrak{I}(\mathfrak{m}, A)$ dans $\mathfrak{I}(A/\mathfrak{m})$ d'inverse φ, de plus*

$$[(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{I}(\mathfrak{m}, A) \times \mathfrak{I}(\mathfrak{m}, A) \text{ et } \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}] \Leftrightarrow f(\mathfrak{a}) \subset f(\mathfrak{b})$$

et

$$[(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \in \mathfrak{I}(A/\mathfrak{m}) \times \mathfrak{I}(A/\mathfrak{m}) \text{ et } \mathcal{I} \subset \mathcal{J}] \Leftrightarrow \varphi(\mathcal{I}) \subset \varphi(\mathcal{J})$$

(viii) Si $\mathfrak{m} \in \mathfrak{I}(A)$ est un idéal de A tel que $\mathfrak{m} \neq A$ Les conditions suivantes sont équivalentes

1. $A/\mathfrak{m}$ est un corps

2. Si $\mathfrak{a}_g \in \mathfrak{I}_g(A)$ est un idéal à gauche de A vérifiant

$$\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{a}_g$$

alors $\mathfrak{a}_g = A$

3. Si $\mathfrak{a}_d \in \mathfrak{I}_d(A)$ est un idéal à droite de A vérifiant

$$\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{a}_d$$

alors $\mathfrak{a}_d = A$

Preuve

(i)

Les implication *1* $\Rightarrow$ *2* $\Rightarrow$ *3* sont claires il suffit donc de montrer *3* $\Rightarrow$ *1*. Si $a \in \mathfrak{a}_g$ est inversible à gauche il existe $x \in A$ tel que $xa = 1$, ainsi puisque $\mathfrak{a}_g$ est un idéal à gauche on obtient $1 \in \mathfrak{a}_g$. En particulier, pour tout $\lambda \in A$, $\lambda = \lambda \times 1 \in \mathfrak{a}_g$.

(ii)

La preuve, similaire à celle de (i) est laissée au soin du lecteur.

(iii)

$$A \text{ non intègre} \Rightarrow \mathfrak{I}_g(A) \neq \{\{0\}, A\} .$$

Si A n'est pas intègre il existe $(x_0, y_0) \in A^* \times A^*$ tel que $x_0 y_0 = 0$. On montre que l'ensemble

$$\mathfrak{a}_g(y_0) = \{a \in A/ay_0 = 0\}$$

est un idéal à gauche vérifiant $\mathfrak{a}_g(y_0) \neq \{0\}$ et $\mathfrak{a}_g(y_0) \neq A$.

1. d'abord $(\mathfrak{a}_g(y_0), +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.
   — puisque $0 \times y_0 = 0$ on a $0 \in \mathfrak{a}_g(y_0)$
   — si $a \in \mathfrak{a}_g(y_0)$ alors $(-a)y_0 = -(ay_0) = 0$, ainsi $-a \in \mathfrak{a}_g(y_0)$
   — si $(a, b) \in \mathfrak{a}_g(y_0) \times \mathfrak{a}_g(y_0)$ alors $(a + b)y_0 = ay_0 + by_0 = 0$ par suite $a + b \in \mathfrak{a}_g(y_0)$.

2. ensuite on montre $A\mathfrak{a}_g(y_0) \subset \mathfrak{a}_g(y_0)$. Si $(\lambda, a) \in A \times \mathfrak{a}_g(y_0)$ alors

$$(\lambda a)y_0 = \lambda(ay_0) = \lambda \times 0 = 0$$

ainsi $\lambda a \in \mathfrak{a}_g(y_0)$.

3. enfin puisque $x_0 \in A^* \cap \mathfrak{a}_g(y_0)$ on a $\mathfrak{a}_g(y_0) \neq \{0\}$, et le fait que $y_0 \in A^*$ montre que $1 \notin \mathfrak{a}_g(y_0)$ par suite $\mathfrak{a}_g(y_0) \neq A$.

(iv)

La preuve, similaire à celle de *(iii)* est laissée au soin du lecteur. Il suffit de remarquer que si $(x_0, y_0) \in A^* \times A^*$ est tel que $x_0y_0 = 0$ l'ensemble

$$\mathfrak{a}_d(x_0) = \{a \in A / x_0 a = 0\}$$

est un idéal à droite qui est non nul et différent de A

(v)

Si a est inversible à gauche alors $a \neq 0$ et il existe $x \in A$ tel que $xa = 1$ par suite on obtient $a(xa) = a$ l'associativité montre alors que $(ax)a = a$ et la distributivité entraîne

$$(ax - 1)a = 0$$

a étant non nul l'intégrité de A entraîne $ax = 1$

De même si a est inversible à droite l'égalité $ax = 1$ entraîne

$$(ax)a = a \Rightarrow a(xa) = a \Rightarrow a(xa - 1) = 0 \Rightarrow xa = 1\ .$$

(vi)

1 ⇒ 2

Si A est un corps et $\mathfrak{a}$ est un idéal à gauche non nul de A tout élément non nul de $\mathfrak{a}$ est inversible ainsi *(i)* montre que $\mathfrak{a} = A$.

2 ⇒ 3

Remarquons que d'après *(iii)* l'hypothèse *2* entraîne que A est intègre ainsi d'après *(v)* et *(ii)* pour montrer qu'un idéal à droite est égal à A il suffit de montrer qu'il possède un élément inversible à gauche. Si $\mathfrak{a}_d$ est un idéal à droite non nul de A et $x \in A^* \cap \mathfrak{a}_d$ alors Ax est un idéal à gauche non nul de A, l'hypothèse *2* montre alors que $Ax = A$, ainsi $1 \in Ax$ et x est inversible à gauche (donc inversible d'après l'intégrité de A).

3 ⇒ 1

D'abord d'après *(iv)* l'hypothèse *3* entraîne que A est intègre. Ensuite si $x \in A^*$ alors l'ensemble

$$xA = \{a \in A / \exists\ b \in A : a = xb\}$$

est un idéal à droite qui contient x et est donc non nul, l'hypothèse *3* montre alors que $xA = A$ en particulier $1 \in xA$ et x est inversible à droite donc inversible d'après l'intégrité de A. Ce qui montre que tout élément non nul de A est inversible.

(vii)

1. (a) $\mathrm{im}(f_g) \subset \mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})$. Il s'agit de montrer que pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A)$ l'ensemble $f_g(\mathfrak{a})$ est un idéal à gauche de $A/\mathfrak{m}$

   i. D'abord $(f_g(\mathfrak{a}), +')$ est un sous-groupe de $(A/\mathfrak{m}, +')$.

— puisque $0 \in \mathfrak{a}$ on a $p_m(0) \in f_g(\mathfrak{a})$
— si $X \in f_g(\mathfrak{a})$ il existe $x \in \mathfrak{a}$ tel que $X = p_m(x)$ ainsi $-X = p_\mathfrak{m}(-x) \in f_g(\mathfrak{a})$
— si $(X, Y) \in f_g(\mathfrak{a}) \times f_g(\mathfrak{a})$ il existe $(x, y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ tel que

$$X = p_\mathfrak{m}(x) \quad \text{et} \quad Y = p_\mathfrak{m}(y)$$

par suite $X +' Y = p_\mathfrak{m}(x) +' p_\mathfrak{m}(y)$, mais $p_\mathfrak{m}$ est additive ainsi

$$X +' Y = p_\mathfrak{m}(x + y)$$

ce qui montre que $X +' Y \in f_g(\mathfrak{a})$ puique $x + y \in \mathfrak{a}$.

ii. Ensuite on montre :$(\Lambda, X) \in A/\mathfrak{m} \times f_g(\mathfrak{a}) \Rightarrow \Lambda\,.\,X \in f_g(\mathfrak{a})$. En effet, si $(\Lambda, X) \in A/\mathfrak{m} \times f_g(\mathfrak{a})$ il existe $(\lambda, x) \in A \times \mathfrak{a}$ tel que

$$\Lambda = p_\mathfrak{m}(\lambda) \quad \text{et} \quad X = p_\mathfrak{m}(x)$$

par suite $\Lambda \,.\, X = p_\mathfrak{m}(\lambda) \,.\, p_\mathfrak{m}(x)$, mais $p_\mathfrak{m}$ est multiplicative ainsi

$$\Lambda \,.\, X = p_\mathfrak{m}(\lambda x)$$

$\mathfrak{a}$ étant un idéal à gauche on a $\lambda x \in \mathfrak{a}$ par suite $\Lambda \,.\, X = p_\mathfrak{m}(\lambda x)$ est un élément de $f_g(\mathfrak{a})$.

(b) i. Pour tout idéal à gauche $\mathcal{I}$ de $A/\mathfrak{m}$ on a $\mathfrak{m} \subset \varphi_g(\mathcal{I})$. En effet, si $x \in \mathfrak{m}$ alors $p_\mathfrak{m}(x) = p_\mathfrak{m}(0)$, $\mathcal{I}$ étant un idéal on a $p_m(0) \in \mathcal{I}$

ii. Pour tout idéal à gauche $\mathcal{I}$ de $A/\mathfrak{m}$, $(\varphi_g(\mathcal{I}), +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.
— Puisque $\mathfrak{m} \subset \varphi_g(\mathcal{I})$ on a $\varphi_g(\mathcal{I}) \neq \varnothing$
— Si $x \in \varphi_g(\mathcal{I})$ alors $p_\mathfrak{m}(x) \in \mathcal{I}$, puisque $p_\mathfrak{m}(-x)$ est l'inverse additif de $p_\mathfrak{m}(x)$ dans $A/\mathfrak{m}$ on a $p_\mathfrak{m}(-x) \in \mathcal{I}$ et $-x \in \varphi_g(\mathcal{I})$.
— Si $(x, y) \in \varphi_g(\mathcal{I}) \times \varphi_g(\mathcal{I})$ alors $(p_\mathfrak{m}(x), p_\mathfrak{m}(y)) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ par suite, puisque $(\mathcal{I}, +')$ est un groupe

$$p_\mathfrak{m}(x) +' p_\mathfrak{m}(y) \in \mathcal{I}\ ,$$

puisque $p_\mathfrak{m}$ est additive on a $p_m(x + y) = p_m(x) +' p_\mathfrak{m}(y)$ ainsi

$$p_\mathfrak{m}(x + y) \in \mathcal{I} \quad \text{et} \quad x + y \in \varphi_g(\mathcal{I})$$

iii. Il reste à voir que pour tout idéal à gauche $\mathcal{I}$ de $A/\mathfrak{m}$

$$(\lambda, x) \in A \times \varphi_g(\mathcal{I}) \Rightarrow \lambda x \in \varphi_g(\mathcal{I})$$

Or, si $(\lambda, x) \in A \times \varphi_g(\mathcal{I})$ alors $(p_\mathfrak{m}(\lambda), p_\mathfrak{m}(x)) \in A/\mathfrak{m} \times \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ étant un idéal à gauche de $A/\mathfrak{m}$ on obtient

$$p_\mathfrak{m}(\lambda) \,.\, p_\mathfrak{m}(x) \in \mathcal{I} \tag{9.20}$$

puisque $p_\mathfrak{m}$ est multiplicative l'égalité $p_m(\lambda) \,.\, p_\mathfrak{m}(x) = p_\mathfrak{m}(\lambda x)$ est vérifiée, ainsi (9.20), montre que

$$p_\mathfrak{m}(\lambda x) \in \mathcal{I}$$

par suite $\lambda x \in \varphi_g(\mathcal{I})$

(c) • On montre que Pour tout $\mathcal{I} \in \mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})$ $f_g \circ \varphi_g(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$

1 : Pour tout $\mathcal{I} \in \mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m}) \qquad f_g \circ \varphi_g(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$

En effet, si $p_\mathfrak{m}(x) \in f_g(\varphi_g(\mathcal{I}))$ alors, par définition de f_g, il existe $y \in \varphi_g(\mathcal{I})$ tel que $p_\mathfrak{m}(x) = p_m(y)$. L'assertion $y \in \varphi_g(\mathcal{I})$ entraîne, par définition de φ_g, $p_\mathfrak{m}(y) \in \mathcal{I}$, par suite $p_\mathfrak{m}(x) \in \mathcal{I}$.

2 : Pour tout $\mathcal{I} \in \mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m}) \qquad \mathcal{I} \subset f_g \circ \varphi_g(\mathcal{I})$

Si $p_{\mathfrak{m}}(x) \in \mathcal{I}$ alors $x \in \varphi_g(\mathcal{I})$ ainsi x est un élément de $\varphi_g(\mathcal{I})$ qui vérifie $p_{\mathfrak{m}}(x) = p_{\mathfrak{m}}(x)$ ce qui montre que $p_{\mathfrak{m}}(x) \in f_g(\varphi_g(\mathcal{I}))$. Les inclusions **1** et **2** montrent que

$$f_g \circ \varphi_g = id_{\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})} \tag{9.21}$$

en particulier φ_g est injective et f_g est surjective.

- On montre que pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A)$ $\varphi_g \circ f_g(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$

3 Pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A) \qquad \varphi_g \circ f_g(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$

Si $x \in \varphi_g(f_g(\mathfrak{a}))$ alors $p_{\mathfrak{m}}(x) \in f_g(\mathfrak{a})$, ainsi il existe $y \in \mathfrak{a}$ tel que $p_{\mathfrak{m}}(x) = p_{\mathfrak{m}}(y)$, par suite $x - y \in \mathfrak{m}$. Puisque $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}$ l'égalité

$$x = y + (x - y)$$

montre que x est somme d'éléments de $\mathfrak{a}$, par suite $x \in \mathfrak{a}$.

4 Pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A) \qquad \mathfrak{a} \subset \varphi_g \circ f_g(\mathfrak{a})$

Si $x \in \mathfrak{a}$ alors $p_{\mathfrak{m}}(x) \in f_g(\mathfrak{a})$ ainsi $x \in \varphi_g(f_g(\mathfrak{a}))$. On a donc aussi

$$\varphi_g \circ f_g = id_{\mathfrak{I}_g(\mathfrak{m},A)} \tag{9.22}$$

(d) D'après (c) f_g et φ_g sont des bijections inverse l'une de l'autre, on regarde les relations d'inclusions.

- On montre

$$[(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A) \times \mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A)) \text{ et } \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}] \Rightarrow f_g(\mathfrak{a}) \subset f_g(\mathfrak{b})$$

Si $p_{\mathfrak{m}}(x) \in f_g(\mathfrak{a})$ il existe $y \in \mathfrak{a}$ tel que $p_{\mathfrak{m}}(x) = p_{\mathfrak{m}}(y)$, l'inclusion $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ montre que $y \in \mathfrak{b}$, par suite $p_{\mathfrak{m}}(y) \in f_g(\mathfrak{b})$ et $f_g(\mathfrak{a}) \subset f_g(\mathfrak{b})$.

- On montre

$$[(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \in \mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m}) \times \mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m}) \text{ et } \mathcal{I} \subset \mathcal{J}] \Rightarrow \varphi_g(\mathcal{I}) \subset \varphi_g(\mathcal{J})$$

Si $x \in \varphi(\mathcal{I})$ alors $p_{\mathfrak{m}}(x) \in \mathcal{I}$ par suite, puisque $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ on a $p_{\mathfrak{m}}(x) \in \mathcal{J}$ et $\varphi_g(\mathcal{I}) \subset \varphi_g(\mathcal{J})$.
Enfin l'égalité $\varphi_g(f_g(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$ montre

$$f_g(\mathfrak{a}) \subset f_g(\mathfrak{b}) \Rightarrow \varphi_g(f_g(\mathfrak{a})) \subset \varphi_g(f_g(\mathfrak{b})) \Rightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$$

de même l'égalité $f_g(\varphi_g(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$ montre

$$\varphi_g(\mathcal{I}) \subset \varphi_g(\mathcal{J}) \Rightarrow f_g(\varphi_g(\mathcal{I})) \subset f_g(\varphi_g(\mathcal{J})) \Rightarrow \mathcal{I} \subset \mathcal{J}$$

2. La preuve, similaire à celle de *1*, est laissée au soin du lecteur.
3. La preuve, similaire à celle de *1*, est laissée au soin du lecteur.

$(viii)$

1 $\Leftrightarrow$ *2*

Si $A/\mathfrak{m}$ est un corps alors d'après (vi) $\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m}) = \{\{p_{\mathfrak{m}}(0)\}, A/\mathfrak{m}\}$. Or (vii) montre que l'application φ_g de $\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})$ dans $\mathcal{P}(A)$ définie par

$$\varphi_g(\mathcal{I}) = \{x \in A / p_{\mathfrak{m}}(x) \in \mathcal{I}\}$$

est une bijection de l'ensemble $\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})$ dans l'ensemble $\mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A)$ des idéaux à gauche de A qui contiennent $\mathfrak{m}$. Ainsi

$$\mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A) = \{\varphi_g\{p_{\mathfrak{m}}(0)\}, \varphi_g(A/\mathfrak{m})\}$$

or

$$\varphi_g(\{p_{\mathfrak{m}}(0)\}) = \mathfrak{m} \quad \text{et} \quad \varphi_g(A/\mathfrak{m}) = A$$

par suite les seuls idéaux à gauche de A qui contiennent $\mathfrak{m}$ sont $\mathfrak{m}$ et A.

Inversement si $\mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A) = \{\mathfrak{m}, A\}$, puisque d'après (vii) l'application f_g de $\mathfrak{I}_g(\mathfrak{m}, A)$ dans $\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m})$ définie par

$$f_g(\mathfrak{a}) = \{\mathcal{I} \in \mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m}) / \exists\, x \in \mathfrak{a} : p_{\mathfrak{m}}(x) \in \mathcal{I}\}$$

est une bijection on obtient

$$\mathfrak{I}_g(A/\mathfrak{m}) = \{f_g(\mathfrak{m}), f_g(A)\} = \{\{p_{\mathfrak{m}}(0)\}, A/\mathfrak{m}\}$$

et (vi) permet d'affirmer que $A/\mathfrak{m}$ est un corps.

1 $\Leftrightarrow$ *3*

Il suffit de remplacer "g" par "d" dans la preuve de l'équivalence *1* $\Leftrightarrow$ *2* ■

Le $(viii)$ du lemme [9.14] page 491 peut s'énoncer en disant que $A/\mathfrak{m}$ est un corps si et seulement si $\mathfrak{m}$ est un élément maximal de l'ensemble, ordonné par inclusion, des idéaux à gauche de A distincts de A. Il est facile de voir que l'ensemble $\mathfrak{I}_g^*(A)$ est fortement inductif ainsi le lemme de Zorn (lemme [2.5] page 50) permet d'affirmer que tout idéal à gauche de A est majoré par un élément maximal, lorsque cet élément maximal $\mathfrak{m}$ est un idéal (donc bilatère), $A/\mathfrak{m}$ est un corps, ce qui montre que $\mathfrak{m}$ est premier d'après la proposition [9.1] page 490. Dans le cas commutatif, par exemple, cela permet de montrer que tout idéal est inclus dans un idéal premier.

Lemme 9.15 *On note* $(A, +, \times)$ *un anneau tel que* $1 \neq 0$.
(i) L'ensemble

$$\mathfrak{I}_g^*(A) = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}_g(A) / \mathfrak{a} \neq A\}$$

des idéaux à gauche de A qui sont distincts de A est fortement inductif pour l'inclusion. En particulier tout idéal à gauche de A distinct de A est inclu dans un élément maximal de $(\mathfrak{I}_g^*(A), \subset)$.

(ii) L'ensemble

$$\mathfrak{I}_d^*(A) = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}_d(A) / \mathfrak{a} \neq A\}$$

des idéaux à droite de A qui sont distincts de A est fortement inductif pour l'inclusion. En particulier tout idéal à droite de A distinct de A est inclu dans un élément maximal de $(\mathfrak{I}_d^*(A), \subset)$.

(iii) L'ensemble

$$\mathfrak{I}^*(A) = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(A) / \mathfrak{a} \neq A\}$$

des idéaux de A qui sont distincts de A est fortement inductif pour l'inclusion. En particulier tout idéal de A distinct de A est inclu dans un élément maximal de $(\mathfrak{I}^*(A), \subset)$.

(iv) Si $\mathfrak{m} \in \mathfrak{I}(A)$ *est un idéal tel que* $\mathfrak{m} \neq A$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $A/\mathfrak{m}$ *est un corps*
2. $\mathfrak{m}$ *est maximal dans* $(\mathfrak{I}_g^*(A), \subset)$
3. $\mathfrak{m}$ *est maximal dans* $(\mathfrak{I}_d^*(A), \subset)$

Preuve

(i)

Il s'agit de montrer que toute famille d'idéaux à gauche totalement ordonnée pour l'inclusion possède une borne supérieure (voir définition [2.15] page 44). Soit $\mathcal{I}$ une famille totalement ordonnée d'idéaux à gauche, on montre que

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}} \mathfrak{a}$$

est une borne supérieure de $\mathcal{I}$ dans $(\mathfrak{I}_g^*(A), \subset)$.

1. D'abord $(\mathfrak{m}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$

— Il est clair que $0 \in \mathfrak{m}$
— Si $x \in \mathfrak{m}$ il existe $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}$ tel que $x \in \mathfrak{a}$, ainsi $-x \in \mathfrak{a}$ et $-x \in \mathfrak{m}$.
— Si $(x, y) \in \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ alors il existe $\mathfrak{a}_x \in \mathcal{I}$ et $\mathfrak{a}_y \in \mathcal{I}$ tel que $x \in \mathfrak{a}_x$ et $y \in \mathfrak{a}_y$, $\mathcal{I}$ étant totalement ordonné on a $\mathfrak{a}_x \subset \mathfrak{a}_y$ ou $\mathfrak{a}_y \subset \mathfrak{a}_x$
  — si $\mathfrak{a}_x \subset \mathfrak{a}_y$ alors $(x, y) \in \mathfrak{a}_y \times \mathfrak{a}_y$ par suite $x + y \in \mathfrak{a}_y$ et $x + y \in \mathfrak{m}$,
  — si $\mathfrak{a}_y \subset \mathfrak{a}_x$ alors $(x, y) \in \mathfrak{a}_x \times \mathfrak{a}_x$ par suite $x + y \in \mathfrak{a}_x$ et $x + y \in \mathfrak{m}$,

2. On montre
$$(\lambda, x) \in A \times \mathfrak{m} \Rightarrow \lambda x \in \mathfrak{m},$$
si $x \in \mathfrak{m}$ il existe $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}$ tel que $x \in \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ étant un idéal à gauche on obtient $\lambda x \in \mathfrak{a}$ par suite $\lambda x \in \mathfrak{m}$
3. On montre $\mathfrak{m} \neq A$. En effet, si $\mathfrak{m} = A$ alors $1 \in \mathfrak{m}$ par suite il existe $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}$ tel que $1 \in \mathfrak{a}$, le lemme [9.14] page 491 montre alors que $\mathfrak{a} = A$ et ceci est contradictoire avec l'inclusion $\mathcal{I} \subset \mathfrak{I}_g^*(A)$.
4. enfin , par définition de la réunion $\mathfrak{m}$ est le plus petit majorant de $\mathcal{I}$ pour l'inclusion.

Ceci montre que $\mathfrak{I}_g^*(A)$ est fortement inductif, le lemme de Zorn (lemme [2.5] page 50) permet d'affirmer que tout idéal à gauche de A et distinct de A est inclus dans un élément maximal de $(\mathfrak{I}_g^*(A), \subset)$

(ii)

La preuve, similaire à celle de (i) est laissée au soin du lecteur.

(iii)

La preuve, similaire à celle de (i) est laissée au soin du lecteur. De plus ce résultat est déjà établi au lemme [9.11] page 475

(iv)

C'est le $(viii)$ du lemme [9.14] page 491 énoncé en termes d'éléments maximaux. ■

Lorsque A est un anneau commutatif on a $\mathfrak{I}_g^*(A) = \mathfrak{I}_d^*(A) = \mathfrak{I}^*(A)$, ainsi, si A n'est pas un corps, il existe un idéal $\mathfrak{m}$ maximal et non nul. Le lemme [9.15] permet alors d'affirmer que $A/\mathfrak{m}$ est un corps. Or le fait que $A/\mathfrak{m}$ soit un corps entraîne, par la proposition [9.1] page 490 , que $\mathfrak{m}$ est premier, par suite il existe un idéal premier non nul.

Théorème 9.3 *On note $(A, +, \times)$ un anneau commutatif tel que $1 \neq 0$.*

1. *Si $(A, +, \times)$ est un corps $\{0\}$ est premier et c'est le seul idéal premier.*
2. *Si $(A, +, \times)$ n'est pas un corps, tout idéal de A distinct de A est inclus dans un idéal premier.*

Preuve La preuve est une application directe des lemmes [9.14] page 491 et [9.15] page 496.

1. Si A est un corps alors d'après le lemme [9.14] A ne contient que les idéaux $\{0\}$ et A, puisque A est intègre $\{0\}$ est premier.
2. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A distinct de A le lemme [9.15] permet d'affirmer qu'il est inclu dans un idéal à gauche $\mathfrak{m}$ maximal dans $(\mathfrak{I}_g^*(A), \subset)$, la commutativité de A montre que $\mathfrak{m}$ est un idéal (donc bilatère), le lemme [9.15] permet alors d'affirmer que $A/\mathfrak{m}$ est un corps, en particulier $A/\mathfrak{m}$ est intègre et la proposition [9.1] page 490 permet d'affirmer que $\mathfrak{m}$ est premier.

■

9.3 *La catégorie des anneaux*

Les catégories des anneaux et semi-anneaux sont définies par :

Définition 9.19 *La catégorie* **san** *des semi-anneaux est la catégorie définie par*

1. *Les objets de* **san** *sont les semi-anneaux $(A, +, \times)$ au sens de la définition* [9.1] *page* 418*,*

2. *Les morphismes de l'objet* $(A_0, +_0, \times_0)$ *dans l'objet* $(A_1, +_1, \times_1)$ *sont les morphismes de semi-anneaux définis par* [9.10] *page* 454
3. *La loi de composition est la composition des applications.*

La catégorie **Ann** des anneaux est la sous-catégorie de **san** définie par :

Définition 9.20 *La catégorie* **Ann** *des anneaux est la catégorie définie par*

1. *Les objets de* **Ann** *sont les anneaux* $(A, +, \times)$ *au sens de la définition* [9.1] *page* 418*,*
2. *Les morphismes de l'objet* $(A_0, +_0, \times_0)$ *dans l'objet* $(A_1, +_1, \times_1)$ *sont les morphismes d'anneaux définis par* [9.9] *page* 454
3. *La loi de composition est la composition des applications.*

C'est maintenant une routine de définir les produits, coproduits, limites preojectives et inductives d'une catégorie.

9.3.1 *Produit et limite projective d'une famille d'anneaux*

On donne la définition d'une famille de semi-anneaux

Définition 9.21 *On note* I *et* $\mathbb{U}$ *des ensembles, une* ***famille de semi-anneaux*** *indexée par* I *à valeurs dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$ *est un triplet* $(M, \circledast, \odot)$ *où*

1. $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathcal{P}(\mathbb{U}))$ *est une application de* I *dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$*,*
2. $\oplus \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A_i \times A_i, A_i)$
3. $\odot \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A_i \times A_i, A_i)$
4. *pour tout* $i \in I$ *le triplet* $(A_i, \oplus_i, \odot_i)$ *est un semi-anneau.*

Ainsi une famille de semi-anneaux est une famille d'ensembles dans laquelle chaque ensemble est muni d'une structure de semi-anneau. Un copier-coller de la définition d'un produit de monoïde donne

Définition 9.22 *On note* $\mathbb{U}$ *et* I *des ensembles et* $(A, \oplus, \odot)$ *une famille de semi-anneaux indexée par* I *et à valeurs dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$*, On appelle* ***produit*** *de la famille* $(A, \oplus, \odot)$ *dans la catégorie* **san** *un couple* $((\Pi, +, \times), p)$ *où* $(\Pi, +, \times)$ *est un semi-anneau et* $p \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(\Pi, A_i)$ *vérifie la propriété suivante : pour tout semi-anneau* $(Y, +_y, \times_y)$ *et pour tout* $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, A_i)$ *il existe un unique morphisme de semi-anneaux* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, \Pi)$ *qui vérifie*

$$\forall i \in I \ g_i = p_i \circ h.$$

En d'autre termes, pour tout semi-anneau $(Y, +_y, \times_y)$ *l'application* $\varphi : h \mapsto \varphi(h)$ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, \Pi)$ *dans* $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, A_i)$ *définie par*

$$\varphi(h)(i) = p_i \circ h$$

est bijective.

l'existence d'un produit pour une famille de semi-anneaux est assurée par le lemme suivant.

Lemme 9.16 *On note* $\mathbb{U}$ *et* I *des ensembles et* $(A, \oplus, \odot)$ *une famille de semi-anneaux indexée par* I *et à valeurs dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$*, les applications*

$$+ : \prod_{i \in I} A_i \times \prod_{i \in I} A_i \longmapsto \prod_{i \in I} A_i$$

$$(x,y) \longmapsto x+y$$

où pour tout $(x,y) \in \prod_{i\in I} A_i \times \prod_{i\in I} A_i$ *l'image* $x+y$ *est l'élément de* $\prod_{i\in I} A_i$ *défini par*

$$(x+y)_i = x_i \oplus_i y_i$$

et

$$\centerdot : \prod_{i\in I} A_i \times \prod_{i\in I} A_i \longmapsto \prod_{i\in I} A_i$$
$$(x,y) \longmapsto x \centerdot y$$

où pour tout $(x,y) \in \prod_{i\in I} A_i \times \prod_{i\in I} A_i$ *l'image* $x \centerdot y$ *est l'élément de* $\prod_{i\in I} A_i$ *défini par*

$$(x \centerdot y)_i = x_i \odot_i y_i$$

possèdent les propriétés suivantes :

1. $(\prod_{i\in I} A_i, +, \centerdot)$ *est un semi-anneau*
2. *Si* $p : i \mapsto p_i$ *est l'élément de* $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\prod_{i\in I} A_i, A_i)$ *où* p_i *est définie par*

$$p_i(x) = x_i$$

   alors pour tout $i \in I$, p_i *est un morphisme du semi-anneau* $(\prod_{i\in I} A_i, +, \centerdot)$ *dans le semi-anneau* $(A_i, \oplus_i, \odot_i)$*, ainsi*

$$p \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(\prod_{i\in I} A_i, A_i).$$

3. *Si* $(Y, +_y, \times_y)$ *est un semi-anneau, pour que* h *soit un morphisme de semi-anneaux de* $(Y, +_y, \times_y)$ *dans* $(\prod_{i\in I} A_i, +, \centerdot)$ *il faut et il suffit que pour tout* $i \in I$ *l'application* $p_i \circ h$ *soit un morphisme de semi-anneaux de* $(Y, +_y, \times_y)$ *dans* $(A_i, \oplus_i, \odot_i)$.
4. $(\prod_{i\in I} A_i, +, \centerdot)$ *est un produit de* $(A, \oplus, \odot)$

Preuve

1. (a) On montre que $+$ et $\centerdot$ sont associatives, si $x \in \prod_{i\in I} A_i$, $y \in \prod_{i\in I} A_i$ et $z \in \prod_{i\in I} A_i$ alors par définition de $+$

$$[x+(y+z)]_i = x_i \oplus_i (x+y)_i = x_i \oplus_i (y_i \oplus_i z_i) = (x_i \oplus_i y_i) \oplus_i z_i = [(x+y)+z]_i$$

   et par définition de $\centerdot$

$$[x \centerdot (yz)]_i = x_i \odot_i (y \centerdot z)_i = x_i \odot_i (y_i \odot_i z_i) = (x_i \odot_i y_i) \odot_i z_i = [(x \centerdot y) \centerdot z]_i$$

   (b) Si pour tout $i \in I$, 0_i est le neutre de $(A_i, \oplus_i)$ pour tout $x \in \prod_{i\in I} A_i$

$$(x+0)_i = x_i \oplus_i 0_i = x_i$$

   ainsi l'application $i \mapsto 0_i$ est l'élément neutre de $(\prod_{i\in I} A_i, +)$

(c) Si $x \in \prod_{i\in I} A_i$ l'application $y \in \prod_{i\in I} A_i$ définie par $y_i = -x_i$ vérifie

$$(x + y)_i = x_i \oplus (-x_i) = 0_i$$

ainsi y est l'inverse de x dans $(\prod_{i\in I} A_i, +)$.

Les points (a), (b), (c) montrent que $(\prod_{i\in I} A_i, +, \centerdot)$ est un semi-anneau.

2. Le *2* est seulement l'expression de $p_i(0) = 0_i$ et du fait que pour tout $(x, y) \in \prod_{i\in I} A_i \times \prod_{i\in I} A_i$

$$p_i(x + y) = (x + y)_i = x_i + y_i = p_i(x) + p_i(y)$$

et

$$p_i(x \centerdot y) = (x \centerdot y)_i = x_i \odot_i y_i = p_i(x) \odot_i p_i(y)$$

3. (a) D'abord la condition est nécessaire puisque si h est un morphisme $p_i \circ h$ est un composé de morphismes.

   (b) Ensuite la condition est suffisante, puisque si pour tout $i \in I$ $p_i \circ h$ est un morphisme alors pour tout $(a, b) \in Y \times Y$ les applications $h(a +_y b)$ et $h(a \times_y b)$ vérifient, pour tout $i \in I$

$$h(a +_y b)(i) = p_i \circ h(a +_y b) = p_i \circ h(a) \oplus_i p_i \circ h(b) = (h(a) + h(b))(i)$$

et

$$h(a \times_y b)(i) = p_i \circ h(a \times_y b) = p_i \circ h(a) \odot_i p_i \circ h(b) = (h(a) \centerdot h(b))(i)$$

par suite

$$h(a +_y b) = h(a) + h(b)$$

et

$$h(a \times_y b) = h(a) \centerdot h(b)$$

4. Pour montrer que $(\prod_{i\in I} A_i, +, \centerdot)$ est un produit dans **san** il reste à montrer que pour tout semi-anneau $(Y, +_y \times_y)$ et pour tout $g \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, A_i)$ il existe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, \prod_{i\in I} A_i)$ vérifiant

$$g_i = p_i \circ h.$$

Mais le lemme [7.8] page 179 permet d'affirmer que si $g \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, A_i)$ il existe une unique application $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(Y, \prod_{i\in I} A_i)$ telle que

$$g_i = p_i \circ h.$$

Puisque par hypothèse pour tout $i \in I$ g_i est un morphisme de $(Y, +_y, \times_y)$ dans $(A_i, \oplus_i, \odot_i)$, l'application h vérifie que pour tout $i \in I$ $p_i \circ h$ est un morphisme de $(Y, +_y, \times_y)$ dans $(A_i, \oplus_i, \odot_i)$ ainsi *3* permet d'affirmer que h est un morphisme de $(Y, +_y, \times_y)$ dans $(\prod_{i\in I} A_i, +, \centerdot)$.

■

En suivant le programme « catégorie » on montre que toute transition d'une famille de semi-anneaux possède une limite projective. On rappelle quelques définitions.

Définition 9.23 *On note* $\mathbb{U}$ *et* I *des ensembles,* $(A, \oplus, \odot)$ *une famille de semi-anneaux indexée par* I *et à valeurs dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$*, on appelle famille de* ***transitions*** *de* $(A, \oplus, \odot)$ *un couple* (R, f) *où :*

1. *R est une relation de I dans I qui vérifie les propriétés suivantes :*
   (a) *R est réflexive :* $\forall\ i \in I\ (i, i) \in R$
   (b) *R est transitive :* $[(i, j) \in R$ *et* $(j, k) \in R \Rightarrow (i, k) \in R]$.
2. $f = (f_{i,j})_{(i,j)\in R}$ *est un élément de* $\displaystyle\prod_{(i,j)\in R} \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A_j, A_i)$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*
   (a) *Pour tout* $i \in I\ f_{i,i} = id_{A_i}$
   (b) *Si* $(i, j) \in R$ *et* $(j, k) \in R$ *alors*
   $$f_{i,k} = f_{i,j} \circ f_{j,k}$$

Si (R, f) est une famille de transitions, on définit sa limite projective.

Définition 9.24 *On note* $\mathbb{U}$ *et* I *des ensembles,* $(A, \oplus, \odot)$ *une famille de semi-anneaux indexée par* I *à valeurs dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$*, et* (R, f) *est une famille de transitions de* $(X, \oplus, \odot)$*. On appelle limite projective de* (R, f) *un couple* $((B, +, \times), p)$ *où* $(B, +, \times)$ *est un semi-anneaux et* $p \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(B, A_i)$ *vérifient les propriétés suivantes :*

1. *pour tout* $(i, j) \in R$
   $$p_i = f_{i,j} \circ p_j$$
2. *pour tout semi-anneau* $(Y, +_y, \times_y)$ *et pour tout* $g \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, A_i)$ *vérifiant*
   $$(i, j) \in R \Rightarrow g_i = f_{i,j} \circ g_j$$
   il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, B)$ *vérifiant*
   $$g_i = p_i \circ h$$

Le lemme suivant assure l'existence de limite projective.

Lemme 9.17 *On note* $\mathbb{U}$ *et* I *des ensembles,* $(X, \oplus, \odot)$ *une famille de semi-anneaux indexée par* I *à valeurs dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$*, et* (R, f) *est une famille de transitions de* $(X, \oplus, \odot)$*.*
Si $((P, +, \ .), p)$ *est un produit (dans la catégorie* **san***) de* $(X, \oplus, \odot)$ *alors le sous-ensemble* B *de* P *défini par*
$$B = \{x \in P / \forall\ (i, j) \in R \quad p_i(x) = f_{i,j}(p_j(x))\}$$
possède les propriétés suivantes

1. *B est un sous-semi-anneau de* $(P, +, .)$
2. *si* $t \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(B, A_i)$ *est défini par*
   $$t_i = p_i \cap (B \times A_i)$$
   (t_i est la restriction de p_i à B) alors $((B, +, .), t)$ *est une limite projective (dans la catégorie* **san***) de* (R, f)

Preuve

1. B est un sous-semi-anneau de P
   (a) si e est l'élément neutre additif de P alors $e \in B$. En effet

— puisque pour tout $i \in I$ $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(P, A_i)$ on a, si $(i, j) \in I \times I$

$$p_i(e) = 0_i \qquad \text{et} \qquad p_j(e) = 0_j$$

— puisque pour tout $(i, j) \in R$ $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A_j, A_i)$ on a

$$f_{i,j}(0_j) = 0_i$$

par suite

$$p_i(e) = 0_i = f_{i,j}(0_j) = f_{i,j}(p_j(e)) = f_{i,j}(0_j).$$

(b) si $(x, y) \in B \times B$ alors $x + y \in B$. En effet
— puisque pour tout $i \in I$ $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(P, A_i)$ on a, si $(i, j) \in I \times I$ et $(x, y) \in B \times B$

$$p_i(x + y) = p_i(x) \oplus_i p_i(y) \qquad \text{et} \qquad p_j(x + y) = p_j(x) \oplus_j p_j(y)$$

— puisque pour tout $(i, j) \in R$ $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A_j, A_i)$ on a

$$f_{i,j}(p_j(x) \oplus_j p_j(y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \oplus_i f_{i,j}(p_j(y))$$

Ainsi

$$f_{i,j}(p_j(x + y)) = f_{i,j}(p_j(x) \oplus_j p_j(y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \oplus_i f_{i,j}(p_j(y)))$$

mais puisque $(x, y) \in B \times B$ on a $f_{i,j}(p_j(x)) = p_i(x)$ et $f_{i,j}(p_j(y)) = p_i(y)$, par suite

$$f_{i,j}(p_j(x + y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \oplus_i f_{i,j}(p_j(y))) = p_i(x) \oplus_i p_i(y) = p_i(x + y)$$

et $x + y \in B$.

(c) Si $x \in B$ alors $-x \in B$. En effet, puisque

$$\forall\ i \in I \quad p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(P, A_i)$$

on a

$$p_i(-x) = -p_i(x)$$

et puisque

$$\forall\ (i, j) \in R \quad f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A_j, A_i)$$

on obtient, si $(i, j) \in R$,

$$f_{i,j}(p_j(-x)) = f_{i,j}(-p_j(x)) = -f_{i,j}(p_j(x)) = -p_i(x) = p_i(-x)$$

(d) si $(x, y) \in B \times B$ alors $x.y \in B$. En effet
— puisque pour tout $i \in I$ $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(P, A_i)$ on a, si $(i, j) \in I \times I$ et $(x, y) \in B \times B$

$$p_i(x.y) = p_i(x) \odot_i p_i(y) \qquad \text{et} \qquad p_j(x.y) = p_j(x) \odot_j p_j(y)$$

— puisque pour tout $(i, j) \in R$ $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A_j, A_i)$ on a

$$f_{i,j}(p_j(x) \odot_j p_j(y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \odot_i f_{i,j}(p_j(y))$$

Ainsi

$$f_{i,j}(p_j(x.y)) = f_{i,j}(p_j(x) \odot_j p_j(y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \odot_i f_{i,j}(p_j(y)))$$

mais puisque $(x, y) \in B \times B$ on a $f_{i,j}(p_j(x)) = p_i(x)$ et $f_{i,j}(p_j(y)) = p_i(y)$, par suite

$$f_{i,j}(p_j(x.y)) = f_{i,j}(p_j(x)) \odot_i f_{i,j}(p_j(y))) = p_i(x) \odot_i p_i(y) = p_i(x.y)$$

et $x.y \in B$.

2. $((B, +, .), t)$ est une limite projective de (R, f). D'abord il est clair que pour tout $(i, j) \in R$ on a $t_i = f_{i,j} \circ t_j$ puisque si $x \in B$

$$t_i(x) = p_i(x) = f_{i,j}(p_j(x)) = f_{i,j} \circ t_j(x)$$

il suffit donc de montrer que si $(Y, +_y, \times_y)$ est un semi-anneau et $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, X_i)$ vérifie

$$(i, j) \in R \Rightarrow g_i = f_{i,j} \circ g_j \tag{9.23}$$

il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(Y, M)$ vérifiant

$$g_i = t_i \circ h \ .$$

Puisque $((P, +, .), p)$ est un produit dans **san** il existe un unique morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, P)$ vérifiant

$$g_i = p_i \circ h \ .$$

mais les égalités (9.23) montre que $\forall\ y \in Y$ on a $h(y) \in B$: en effet, si $(i, j) \in R$

$$f_{i,j}(p_j(h(y)) = f_{i,j}(p_j \circ h(y)) = f_{i,j}(g_j(y)) = g_i(y) = p_i(h(y))$$

ainsi $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, B)$ et

$$g_i = p_i \circ h = t_i \circ h.$$

■

C'est maintenant une routine de voir qu'une catégorie possédant des objets quotients et des objets libres au-dessus des ensembles poséde des coproduits. Or on peut construire un semi-anneau libre au-dessus d'un ensemble X comme semi-anneau de convolution au-dessus du semi-monoïde $M(X)$ des mots définis sur X muni de la loi définie au lemme [8.18] page 248.

9.3.2 *Anneau libre*

1 *Définition et propriété universelle du produit de convolution au-dessus des semi-monoïdes*

Si H est un ensemble muni d'une loi associative, l'ensemble $A_c[H, \mathbb{Z}]$ des applications à support fini de H dans $\mathbb{Z}$ (voir définition [8.48] page 384) peut être muni d'une loi $\star$ qui vérifie les propriétés suivantes

1. $(A_c[H, \mathbb{Z}], +, \star)$ est un semi-anneau
2. Si $(A, +, \boldsymbol{.})$ est un semi-anneau et g est une application *multiplicative* de H dans A il existe un unique morphisme g_c de $(A_c[H, \mathbb{Z}], +, \star)$ dans A vérifiant

$$g = g_c \circ i$$

où i est l'application de H dans $A_c[H, \mathbb{Z}]$ définie par

$$i(x)(y) = \begin{cases} 1 & si \quad y = x \\ 0 & si \quad y \neq x \end{cases}$$

Le lemme qui suit permet de définir la loi $\star$. On y utilise les notations et résultats du théorème [8.13] page 388.

Lemme 9.18 *On note $(H, \perp)$ un semi-monoïde ou la loi $\perp$ est notée multiplicativement $\perp$: $(x, y) \mapsto xy$ et $(\mathbb{Z}, +, ., O)$ un ensemble d'entiers relatifs.*

(i) $i(H)$ est une base du groupe commutatif $A_c[H, \mathbb{Z}]$, de plus si $\rho \in A_c[H, \mathbb{Z}]$ on a

$$\rho = \sum_{\lambda \in s(\rho)} \rho(\lambda) i(\lambda)$$

(ii) L'application φ *de* $A_c[H,\mathbb{Z}] \times A_c[H,\mathbb{Z}]$ *dans* $A_c[H,\mathbb{Z}]$ *définie par*

$$\varphi(\rho,\mu) = \sum_{(\lambda,\theta)\in \mathrm{s}(\rho)\times \mathrm{s}(\mu)} \rho(\lambda)\mu(\theta)i(\lambda\theta)$$

est l'unique application vérifiant les propriétés suivantes

1. *Pour tout* $(x,y) \in H \times H$
$$\varphi(i(x),i(y)) = i(xy)$$
2. *pour tout* $(\rho,\mu) \in A_c[H,\mathbb{Z}] \times A_c[H,\mathbb{Z}]$ *et* $\nu \in A_c[H,\mathbb{Z}]$
$$\varphi(\rho+\mu,\nu) = \varphi(\rho,\nu) + \varphi(\mu,\nu) \quad \text{et} \quad \varphi(\rho,\mu+\nu) = \varphi(\rho,\mu) + \varphi(\rho,\nu)$$

(iii) φ *est associative : si* $(\rho,\mu) \in A_c[H,\mathbb{Z}] \times A_c[H,\mathbb{Z}]$ *et* $\nu \in A_c[H,\mathbb{Z}]$ *alors*

$$\varphi(\rho,\varphi(\mu,\nu)) = \varphi(\varphi(\rho,\mu),\nu).$$

(iv) Si $\star$ *est la loi sur* $A_c[H,\mathbb{Z}]$ *définie par*

$$\rho \star \mu = \varphi(\rho,\mu)$$

$(A_c[H,\mathbb{Z}],+,\star)$ *est un semi-anneau.*

(v) ***Propriété universelle de*** $(A_c[H,\mathbb{Z}],+,\star)$

Si $(A,+,\centerdot)$ *est un semi-anneau et* g *est une application multiplicative de* $(H,\perp)$ *dans* $(A,\centerdot)$ *:*

$$g(xy) = g(x) \centerdot g(y)$$

alors il existe un unique morphisme g_c *du semi-anneau* $(A_c[H,\mathbb{Z}],+,\star)$ *dans le semi-anneau* $(A,+,\centerdot)$ *vérifiant*

$$g = g_c \circ i\ .$$

Plus précisément, l'application g_c *de* $A_c[H,\mathbb{Z}]$ *dans* A *définie par*

$$g_c(\rho) = \sum_{\lambda\in \mathrm{s}(\rho)} \rho(\lambda)g(\lambda)$$

est l'unique morphisme du semi-anneau $(A_c[H,\mathbb{Z}],+,\ \star\ )$ *dans le semi-anneau* $(A,+,\ \centerdot\ )$ *vérifiant*

$$g = g_c \circ i\ .$$

(vi) Si $(H,\perp)$ *est un monoïde d'élément neutre* e *alors* $(A_c[H,\mathbb{Z}],+,\star)$ *est un anneau d'unité* $i(e)$ *et si* $(A,+,\centerdot)$ *est un anneau et* g *est un morphisme du monoïde* $(H,\perp)$ *dans le monoïde* $(A,\centerdot)$ *alors il existe un unique morphisme* g_c *de l'anneau* $(A_c[H,\mathbb{Z}],+,\star)$ *dans l'anneau* $(A,+,\centerdot)$ *vérifiant*

$$g = g_c \circ i\ .$$

(vii) Si $(A,+,\ \centerdot\ )$ *est un semi-anneau et* h *est une application de* $A_c[H,\mathbb{Z}]$ *dans* A *vérifiant*

1. $$(\rho,\mu) \in A_c[H,\mathbb{Z}] \times A_c[H,\mathbb{Z}] \Rightarrow h(\rho+\mu) = h(\rho) + h(\mu)$$
2. $$h(i(xy)) = h(i(x)) \centerdot h(i(y))$$

alors h *est un morphisme du semi-anneau* $(A_c[H,\mathbb{Z}],+,\ \star\ )$ *dans le semi-anneau* $(A,+,\ \centerdot\ )$

Preuve

(i)

Il s'agit de montrer que l'application $u : A_c[H,\mathbb{Z}] \mapsto A_c[H,\mathbb{Z}]$ définie par

$$u(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho)} \rho(\lambda) i(\lambda)$$

est bijective, mais d'après le théorème [8.13] page 388, u est l'unique morphisme de $(A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ dans $(A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ vérifiant $u \circ i = i$ par suite u est l'identité de $A_c[H,\mathbb{Z}]$. En particulier pour tout $\rho \in A_c[H,\mathbb{Z}]$

$$\rho = u(\rho) = \sum_{\lambda \in \mathrm{s}(\rho)} \rho(\lambda) i(\lambda) \ .$$

(ii)

1. Puisque $\mathrm{s}(i(x)) = \{x\}$ et $\mathrm{s}(i(y)) = \{y\}$ on a $\mathrm{s}(i(x)) \times \mathrm{s}(i(y)) = \{(x,y)\}$ par suite

$$\varphi(i(x), i(y)) = i(x)(x) i(y)(y) i(xy) = i(xy)$$

2. Par définition

$$\varphi(\rho + \mu, \nu) = \sum_{(\lambda,\theta) \in \mathrm{s}(\rho+\mu) \times \mathrm{s}(\nu)} (\rho+\mu)(\lambda)\nu(\theta) i(\lambda\theta)$$

si v est l'application de $H \times H$ dans $A_c[H,\mathbb{Z}]$ définie par

$$v(\lambda,\theta) = (\rho(\lambda) + \mu(\lambda))\nu(\theta) i(\lambda\theta)$$

alors $\mathrm{s}(v) \subset (\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\mu)) \times \mathrm{s}(\nu)$ ainsi l'égalité (8.99) page 385 montre que

$$\varphi(\rho + \mu, \nu) = \sum_{(\lambda,\theta) \in (\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\mu)) \times \mathrm{s}(\nu)} v(\lambda,\theta)$$

or

$$(\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\mu)) \times \mathrm{s}(\nu) = [(\mathrm{s}(\rho) \cap (\mathrm{s}(\mu))^c) \times \mathrm{s}(\nu)] \cup [(\mathrm{s}(\rho) \cap \mathrm{s}(\mu)) \times \mathrm{s}(\nu)] \cup [(\mathrm{s}(\rho)^c \cap (\mathrm{s}(\mu))) \times \mathrm{s}(\nu)]$$

ainsi l'égalité (8.14) page 211 montre que $\varphi(\rho+\mu,\nu)$ est la somme des termes S_0, S_1 et S_2 suivants :

$$S_0 = \sum_{(\lambda,\theta) \in [\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\mu)) \cap (\mathrm{s}(\rho))^c] \times \mathrm{s}(\nu)} v(\lambda,\theta)$$

$$S_1 = \sum_{(\lambda,\theta) \in [\mathrm{s}(\rho) \cup \mathrm{s}(\mu)) \cap (\mathrm{s}(\mu)^c] \times \mathrm{s}(\nu)} v(\lambda,\theta)$$

et

$$S_2 = \sum_{(\lambda,\theta) \in [\mathrm{s}(\rho) \cap \mathrm{s}(\mu)] \times \mathrm{s}(\nu)} v(\lambda,\theta)$$

et comme d'habitude, puisque

$$(\lambda,\theta) \in [\mathrm{s}(\mu) \cap (\mathrm{s}(\rho))^c] \times \mathrm{s}(\nu) \Rightarrow v(\lambda,\theta) = \mu(\lambda)\nu(\theta) i(\lambda\theta)$$

on a

$$S_0 = \sum_{(\lambda,\theta) \in [\mathrm{s}(\mu) \cap (\mathrm{s}(\rho))^c] \times \mathrm{s}(\nu)} \mu(\lambda)\nu(\theta) i(\lambda\theta) \ ,$$

de même
$$S_1 = \sum_{(\lambda,\theta)\in[\mathrm{s}(\rho)\cap(\mathrm{s}(\mu))^c]\times\mathrm{s}(\nu)} \rho(\lambda)\nu(\theta)i(\lambda\theta) \ ,$$
enfin l'égalité (8.23) page 212 montre que
$$S_2 = \sum_{(\lambda,\theta)\in[\mathrm{s}(\rho)\cap\mathrm{s}(\mu)]\times\mathrm{s}(\nu)} \rho(\lambda)\nu(\theta)i(\lambda\theta) + \sum_{(\lambda,\theta)\in[\mathrm{s}(\rho)\cap\mathrm{s}(\mu)]\times\mathrm{s}(\nu)} \mu(\lambda)\nu(\theta)i(\lambda\theta)$$
par suite
$$S_0 + S_2 = \varphi(\mu,\nu) + \sum_{(\lambda,\theta)\in[\mathrm{s}(\rho)\cap\mathrm{s}(\mu)]\times\mathrm{s}(\nu)} \rho(\lambda)\nu(\theta)i(\lambda\theta)$$
et
$$\varphi(\rho+\mu,\nu) = S_0 + S_1 + S_2 = \varphi(\rho,\nu) + \varphi(\mu,\nu)$$
la preuve de l'égalité
$$\varphi(\rho,\mu+\nu) = \varphi(\rho,\mu) + \varphi(\rho,\nu)$$
est similaire à celle de l'égalité précédente et est laissée au soin du lecteur.

Preuve de l'unicité .

On note $b : A_c[H,\mathbb{Z}] \times A_c[H,\mathbb{Z}] \mapsto A_c[H,\mathbb{Z}]$ une application vérifiant *1* et *2*,

a D'abord on montre $x \in H$ et $\mu \in A_c[H,\mathbb{Z}] \Rightarrow b(i(x),\mu) = \varphi(i(x),\mu)$

Si $x \in H$ on considère l'application f_x de H dans $A_c[H,\mathbb{Z}]$ définie par
$$f_x(y) = i(xy)$$
et les applications v_b et v_φ de $A_c[H,\mathbb{Z}]$ dans $A_c[H,\mathbb{Z}]$ définies par
$$v_b(\mu) = b(i(x),\mu) \quad \text{et} \quad v_\varphi(\mu) = \varphi(i(x),\mu) \ .$$
D'après *2* v_b et v_φ sont des morphismes de $(A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ dans $(A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ et *1* montre que
$$v_b \circ i(y) = v(i(x),i(y)) = i(xy) = f_x(y) = v_\varphi \circ i(y)$$
Mais le théorème [8.13] page 388 permet d'affirmer qu'il n'existe qu'un seul morphisme u de $A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ dans $(A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ vérifiant
$$f_x = u \circ i$$
par suite $v_b = v_\varphi$ et
$$(x,\mu) \in H \times A_c[H,\mathbb{Z}] \Rightarrow b(i(x),\mu) = \varphi(i(x),\mu) \ .$$

b Ensuite on montre $\rho \in A_c[H,\mathbb{Z}]$ et $\mu \in A_c[H,\mathbb{Z}] \Rightarrow b(\rho,\mu) = \varphi(\rho,\mu)$

Si $\mu \in A_c[H,\mathbb{Z}]$ on considère les applications w_b et w_φ de $A_c[H,\mathbb{Z}]$ dans $A_c[H,\mathbb{Z}]$ définies par
$$w_b(\rho) = b(\rho,\mu) \quad \text{et} \quad w_\varphi(\rho) = \varphi(\rho,\mu) \ .$$
D'après *2* w_b et w_φ sont des morphismes de $(A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ dans $(A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ et le point a montre que
$$w_b \circ i(x) = v_b(\mu) = v_\varphi(\mu) = w_\varphi \circ i(x)$$
Mais le théorème [8.13] page 388 permet d'affirmer qu'il n'existe qu'un seul morphisme u de $(A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ dans $(A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ vérifiant
$$w_b = u \circ i$$
par suite $w_b = w_\varphi$ et
$$(\rho,\mu) \in A_c[H,\mathbb{Z}] \times A_c[H,\mathbb{Z}] \Rightarrow b(\rho,\mu) = \varphi(\rho,\mu) \ .$$

(iii)

On montre :

c $\underline{(x,y) \in H \times H \text{ et } z \in H \Rightarrow \varphi(i(x), \varphi(i(y), i(z))) = \varphi(\varphi(i(x), i(y)), i(z))}$

En effet le calcul direct donne

$$\varphi(i(x), \varphi(i(y), i(z))) = \varphi(i(x), i(yz)) = i(xyz)$$

et

$$i(xyz) = \varphi(i(xy), i(z)) = \varphi(\varphi(i(x), i(y)), i(z)))$$

On montre :

d $\underline{(x,y) \in H \times H \text{ et } \nu \in A_c[H, \mathbb{Z}] \Rightarrow \varphi(i(x), \varphi(i(y), \nu)) = \varphi(\varphi(i(x), i(y)), \nu)}$

En effet les applications v_0 et v_1 de $A_c[H, \mathbb{Z}]$ dans $A_c[H, \mathbb{Z}]$ définies par

$$v_0(\nu) = \varphi(\varphi(i(x), i(y)), \nu) \quad \text{et} \quad v_1(\mu) = \varphi(i(x), \varphi(i(y), \nu))$$

sont des morphismes de $(A_c[H, \mathbb{Z}], +)$ dans $(A_c[H, \mathbb{Z}], +)$ qui vérifient d'après **c**

$$v_0 \circ i = v_1 \circ i$$

le théorème [8.13] page 388 montre alors que $v_0 = v_1$

On montre :

e $\underline{x \in H \text{ et } (\mu, \nu) \in A_c[H, \mathbb{Z}] \times A_c[H, \mathbb{Z}] \Rightarrow \varphi(i(x), \varphi(\mu, \nu)) = \varphi(\varphi(i(x), \mu), \nu)}$

En effet les applications w_0 et w_1 de $A_c[H, \mathbb{Z}]$ dans $A_c[H, \mathbb{Z}]$ définies par

$$w_0(\mu) = \varphi(\varphi(i(x), \mu), \nu) \quad \text{et} \quad w_1(\mu) = \varphi(i(x), \varphi(\mu, \nu))$$

sont des morphismes de $(A_c[H, \mathbb{Z}], +)$ dans $(A_c[H, \mathbb{Z}], +)$ qui vérifient, d'après **d**,

$$w_0 \circ i = w_1 \circ i$$

le théorème [8.13] page 388 montre alors que $w_0 = w_1$

Enfin on montre :

f $\underline{(\rho, \mu) \in A_c[H, \mathbb{Z}] \times A_c[H, \mathbb{Z}] \text{ et } \nu \in A_c[H, \mathbb{Z}] \Rightarrow \varphi(\rho, \varphi(\mu, \nu)) = \varphi(\varphi(\rho, \mu), \nu)}$

En effet les applications h_0 et h_1 de $A_c[H, \mathbb{Z}]$ dans $A_c[H, \mathbb{Z}]$ définies par

$$h_0(\rho) = \varphi(\varphi(\rho, \mu), \nu) \quad \text{et} \quad h_1(\rho) = \varphi(\rho, \varphi(\mu, \nu))$$

sont des morphismes de $(A_c[H, \mathbb{Z}], +)$ dans $(A_c[H, \mathbb{Z}], +)$ qui vérifient, d'après e,

$$h_0 \circ i = h_1 \circ i$$

le théorème [8.13] page 388 montre alors que $h_0 = h_1$

(iv)

(iii) assure l'associativité et *2* (ii) assure la distributivité.

(v)

D'après le théorème [8.13] page 388 le seul morphisme g_c du groupe $(A_c[H, \mathbb{Z}], +)$ dans le groupe $(A, +)$ vérifiant

$$g = g_c \circ i$$

est le morphisme

$$g_c(\rho) = \sum_{\lambda \in s(\rho)} \rho(\lambda) g(\lambda),$$

il suffit donc de montrer que lorsque g est *multiplicative* on a

$$(\rho, \mu) \in A_c[H, \mathbb{Z}] \times A_c[H, \mathbb{Z}] \Rightarrow g_c(\rho \star \mu) = g_c(\rho) \centerdot g_c(\mu) \ .$$

g $\underline{\text{On montre } (x, y) \in H \times H \Rightarrow g_c(i(x) \star i(y)) = g_c(i(x)) \centerdot g_c(i(y))}$

— puisque $i(x) \star i(y) = i(xy)$ on a

$$g_c(i(x) \star i(y)) = g_c(i(xy)) = g_c \circ i(xy)$$

— puisque $g_c \circ i = g$ on obtient

$$g_c(i(x) \star i(y)) = g(xy)$$

— puisque g est multiplicative

$$g_c(i(x) \star i(y)) = g(x) \centerdot g(y)$$

— puisque $g_c \circ i = g$ on obtient finalement

$$g_c(i(x) \star i(y)) = g_c(i(x)) \centerdot g_c(i(y))$$

h $\underline{\text{On montre } (x, \mu) \in H \times A_c[H, \mathbb{Z}] \Rightarrow g_c(i(x) \star \mu) = g_c(i(x)) \centerdot g_c(\mu)}$

Les applications v_0 et v_1 de $A_c[H, \mathbb{Z}]$ dans A définies par

$$v_0(\mu) = g_c(i(x) \star \mu) \quad \text{et} \quad v_1(\mu) = g(x) \centerdot g_c(\mu)$$

sont des morphismes de $(A_c[H, \mathbb{Z}], +)$ dans $(A, +)$ qui vérifient, d'après **g**,

$$v_0 \circ i = v_1 \circ i$$

par suite le théorème [8.13] page 388 permet d'affirmer que $v_0 = v_1$

i $\underline{\text{On montre } (\rho, \mu) \in A_c[H, \mathbb{Z}] \times A_c[H, \mathbb{Z}] \Rightarrow g_c(\rho \star \mu) = g_c(\rho) \centerdot g_c(\mu)}$

Les applications w_0 et w_1 de $A_c[H, \mathbb{Z}]$ dans A définies par

$$w_0(\rho) = g_c(\rho \star \mu) \quad \text{et} \quad w_1(\rho) = g_c(\rho) \centerdot g_c(\mu)$$

sont des morphismes de $(A_c[H, \mathbb{Z}], +)$ dans $(A, +)$ qui vérifient, d'après **h**

$$w_0 \circ i = w_1 \circ i$$

par suite le théorème [8.13] page 388 permet d'affirmer que $w_0 = w_1$

Ainsi g_c est un morphisme du semi-anneau $(A_c[H, \mathbb{Z}], +, \star)$ dans $(A, +, \centerdot)$ qui vérifie

$$g = g_c \circ i$$

L'unicité suit du théorème [8.13] page 388 et du fait que tout morphisme de semi-anneau est un morphisme des groupes commutatifs associés.

(vi)

On montre que $i(e) \star \rho = \rho \star i(e) = \rho$. Il est clair que pour tout $x \in H$ on a

$$i(x) \star i(e) = i(xe) = i(x) = i(ex) = i(e) \star i(x)$$

ainsi les applications v_0 et v_1 de $A_c[H,\mathbb{Z}]$ dans $A_c[H,\mathbb{Z}]$ définies par

$$v_0(\rho) = i(e) \star \rho \quad \text{et} \quad v_1(\rho) = \rho \star i(e)$$

sont des morphisme de $(A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ dans $(A_c[H,\mathbb{Z}],+)$ qui vérifient

$$v_0 \circ i = v_1 \circ i = i$$

et il résulte du théorème [8.13] page 388 que le seul morphisme vérifiant cette égalité est l'identité, par suite :

$$\forall\ \rho \in A_c[H,\mathbb{Z}] \quad i(e) \star \rho = \rho \star i(e) = \rho\ .$$

Ainsi $(A_c[H,\mathbb{Z}],+,\star)$ est un anneau et si g_c est l'unique morphisme de $(A_c[H,\mathbb{Z}],+,\star)$ dans $(A,+,\ \centerdot)$ défini en (v) on a, si 1 est l'unité de $(A,+,\ \centerdot)$

$$g_c(i(e)) = g(e) = 1$$

Ainsi g_c est aussi un morphisme d'anneaux. ■

La loi $\star$ définie par le lemme [9.18] page 503 s'appelle le produit de convolution au-dessus de H.

Définition 9.25 *On note $(H,\perp)$ un semi-monoïde le semi-anneau $(A_c[H,\mathbb{Z}],+,\star)$ construit par le lemme* [9.18] *page* 503 *est appelé le* ***semi-anneau de convolution*** *au-dessus de H. Lorsque $(H,\perp)$ est un monoïde on l'appelle l'anneau de convolution.*

On construit maintenant l'objet libre pour le foncteur d'oubli des catégories **san** et **Ann**.

2 *Construction de l'anneau libre au-dessus d'un ensemble*

On définit un semi-anneau libre en changeant groupe par semi-anneau dans la définition d'un groupe libre (voir définition [8.37] page 338)

Définition 9.26 *On note X un ensemble, on appelle :*

1. ***semi-anneau libre*** *au-dessus de X un couple $((A,+,*),i)$ où*
   (a) *$(A,+,*)$ est un semi-anneau*
   (b) *i est une application de X dans A qui vérifie la propriété suivante : pour tout semi-anneau $(B,+,\ \centerdot\ )$ et toute application f de X dans B il existe un unique morphisme de semi-anneaux $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A,B)$ vérifiant*
   $$f = \hat{f} \circ i.$$
2. ***anneau libre*** *au-dessus de X un couple $((A,+,*),i)$ où*
   (a) *$(A,+,*)$ est un anneau*
   (b) *i est une application de X dans A qui vérifie la propriété suivante : pour tout anneau $(B,+,\ \centerdot\ )$ et toute application f de X dans B il existe un unique morphisme d'anneaux $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A,B)$ vérifiant*
   $$f = \hat{f} \circ i.$$

En d'autre termes, $((A,+,*),i)$ est un semi-anneau libre au-dessus de X si pour tout semi-anneau $(B,+,\centerdot\ )$ l'application φ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A,,B)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,B)$ définie par

$$\varphi(\hat{f}) = \hat{f} \circ i$$

est bijective.

Une preuve similaire à celle du lemme [8.36] page 338 montre que si $(A,+,*)$ et $(B,+,\bullet)$ sont des anneaux libres au-dessus de X ils sont isomorphes.

Lemme 9.19 *On note X un ensemble, si $((A,+,*),i)$ et $((B,+,\bullet),j)$ sont des anneaux libres au-dessus de X alors il existe $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A,B)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(B,A)$ tels que*

$$f \circ g = id_B \qquad \text{et} \qquad g \circ f = id_A$$

Preuve

— Puisque $((A,+,*),i)$ est libre au-dessus de X il existe $\hat{\jmath} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A,B)$ tel que

$$j = \hat{\jmath} \circ i$$

— Puisque $((B,+,\bullet),j)$ est libre au-dessus de X il existe $\hat{\imath} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(B,A)$ tel que

$$i = \hat{\imath} \circ j$$

En particulier $\hat{\jmath} \circ \hat{\imath}$ est un morphisme de B dans B qui vérifie

$$j = \hat{\jmath} \circ \hat{\imath} \circ j. \tag{9.24}$$

Mais, par définition d'un groupe libre, le seul morphisme f de B dans B vérifiant $j = f \circ j$ est l'identité par suite (9.24) entraîne $\hat{\jmath} \circ \tilde{\imath} = id_B$. De même l'égalité

$$i = \hat{\imath} \circ \hat{\jmath} \circ i$$

montre que $\hat{\imath} \circ \hat{\jmath} = id_A$ ∎

On montre que le semi-anneau de convolution au-dessus du semi- monoïde des mots construits sur X et l'anneau de convolution au-dessus d'un monoïde libre construit sur X sont des semi-anneau et anneau libre au-dessus de X . Le théorème qui suit utilise les notations et résultats des lemmes [8.18] page 248 et [8.19] page 253

Théorème 9.4 *On note X un ensemble, $M(X)$ l'ensemble des mots sur X, $(M_*(X), i_X)$ un monoïde libre au-dessus de X et $\jmath$ l'application de X dans $M_1(X)$ définie par*

$$\jmath(x)(0) = x$$

1. *Si $\star$ est la loi de convolution sur $A_c[M(X),\mathbb{Z}]$ et i_s est l'application de $M(X)$ dans $A_c[M(X),\mathbb{Z}]$ définie par*
$$i_s(u)(v) = \begin{cases} 1 & si \quad u = v \\ 0 & si \quad u \neq v \end{cases}$$
le couple $\mathbb{Z}_s\langle X\rangle = [(A_c[M(X),\mathbb{Z}],+,\ \star),\ i_s \circ \jmath\ ]$ est un semi-anneau libre au-dessus de X
2. *Si $\star$ est la loi de convolution sur $A_c[M_*(X),\mathbb{Z}]$ et i est l'application de $M_*(X)$ dans $A_c[M_*(X),\mathbb{Z}]$ définie par*
$$i(u)(v) = \begin{cases} 1 & si \quad u = v \\ 0 & si \quad u \neq v \end{cases}$$
le couple $\mathbb{Z}\langle X\rangle = [(A_c[M_*(X),\mathbb{Z}],+,\ \star),\ i \circ i_X\ ]$ est un anneau libre au-dessus de X.

Preuve

1. D'après le lemme [8.18] page 248 le couple $(M(X),\jmath)$ posséde la propriété suivante, $M(X)$ est muni d'une structure de semi-monoïde $\perp$: $(u,v) \mapsto uv$ telle que pour tout semi-monoïde $(A,\ \centerdot)$ et pour toute application f de X dans A il existe une unique application $\hat{f}$ de $M(X)$ dans A vérifiant les propriétés suivantes :
   (a) $\hat{f}$ est multiplicative :
$$\forall\ (u,v) \in M(X) \times M(X) \quad \hat{f}(uv) = \hat{f}(u) \centerdot \hat{f}(v)$$

(b) $f = \hat{f} \circ \jmath$

Cette propriété et la propriété universelle du semi-anneau de convolution $(A_c[M(X), \mathbb{Z}], +, \star)$ permet de montrer que $\mathbb{Z}_s \langle X \rangle$ est un semi-anneau libre au-dessus de X. Il s'agit de montrer que pour tout semi-anneau $(A, +, \centerdot)$ et pour toute application f de X dans A il existe un unique morphisme f_a de $(A_c[M(X), \mathbb{Z}], +, \star)$ dans $(A, +, \centerdot)$ vérifiant

$$f = f_a \circ (i_s \circ \jmath) \ .$$

Preuve de l'existence

En effet si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, A)$ alors d'après la propriété universelle du couple $(M(X), \jmath)$ il existe une unique application multiplicative $\hat{f}$ de $(M(X), \perp)$ dans $(A, \centerdot)$ qui vérifie

$$f = \hat{f} \circ \jmath \ .$$

$\hat{f}$ étant multiplicative la propriété universelle du semi-anneau de convolution $(A_c[M(X), \mathbb{Z}], +, \star)$ (voir lemme [9.18] page 503) permet d'affirmer qu'il existe un morphisme f_a de $(A_c[M(X), \mathbb{Z}], +, \star)$ dans $(A, +, \centerdot)$ vérifiant

$$\hat{f} = f_a \circ i_s$$

par suite

$$f = \hat{f} \circ \jmath = f_a \circ (i_s \circ \jmath)$$

Preuve de l'unicité

Si g est h sont des morphismes de $(A_c[M(X), \mathbb{Z}], +, \star)$ dans $(A, +, \centerdot)$ vérifiant

$$f = g \circ (i_s \circ \jmath) \quad \text{et} \quad f = h \circ (i_s \circ \jmath)$$

alors, puisque par définition du produit de convolution

$$i_s(uv) = i_s(u) \star i_s(v)$$

on a

$$h \circ i_s(uv) = h(i_s(u) \star i_s(v)) = h(i_s(u)) \centerdot h(i_s(v))$$

et

$$g \circ i_s(uv) = g(i_s(u) \star i_s(v)) = g(i_s(u)) \centerdot g(i_s(v))$$

ainsi les application $t_0 = h \circ i_s$ et $t_1 = g \circ i_s$ sont des applications multiplicatives de $(M(X), \perp)$ dans $(A, \centerdot)$ qui vérifient

$$t_0 \circ \jmath = t_1 \circ \jmath$$

ainsi le lemme [8.18] page 248 montre que

$$h \circ i_s = g \circ i_s$$

mais d'après le lemme [9.18] page 503 deux morphismes vérifiant cette égalité sont égaux.

2. Il s'agit de montrer que pour tout anneau $(A, +, \centerdot)$ et pour toute application f de X dans A il existe un unique morphisme f_a de $(A_c[M_*(X), \mathbb{Z}], +, \star)$ dans $(A, +, \centerdot)$ vérifiant

$$f = f_a \circ (i \circ i_X) \ .$$

Preuve de l'existence

En effet si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, A)$ alors par définition d'un monoïde libre il existe un unique morphisme f^* de $(M_*(X), .)$ dans $(A, \centerdot)$ qui vérifie

$$f = f^* \circ i_X.$$

f^* étant un morphisme la propriété universelle de l'anneau de convolution $(A_c[M_*(X), \mathbb{Z}], +, \star)$ (voir lemme [9.18] page 503) permet d'affirmer qu'il existe un morphisme f_a de $(A_c[H, \mathbb{Z}], +, \star)$ dans $(A, +, \centerdot)$ vérifiant

$$f^* = f_a \circ i$$

par suite

$$f = f^* \circ i_X = f_a \circ (i \circ i_X)$$

Preuve de l'unicité

Si g est h sont des morphismes de $(A_c[M_*(X), \mathbb{Z}], +, \star)$ dans $(A, +, \centerdot)$ vérifiant

$$f = g \circ (i \circ i_X) \quad \text{et} \quad f = h \circ (i \circ i_X)$$

alors, puisque par définition du produit de convolution

$$i(uv) = i(u) \star i(v)$$

on a

$$h \circ i(uv) = h(i(u) \star i(v)) = h(i(u)) \centerdot h(i(v))$$

et

$$g \circ i(uv) = g(i(u) \star i(v)) = g(i(u)) \centerdot g(i(v))$$

de plus si e est l'élément neutre du monoïde $M_*(X)$ $i(e)$ est l'unité de $(A_c[M_*(X), \mathbb{Z}], +, \star)$ par suite, si 1 est l'unité de $(A, +, \centerdot)$

$$h \circ i(e) = g \circ i(e) = 1$$

ainsi les application $t_0 = h \circ i$ et $t_1 = g \circ i$ sont des morphisme de $(M_*(X), .)$ dans $(A, \centerdot)$ qui vérifient

$$t_0 \circ i_X = t_1 \circ i_X$$

ainsi d'après la définition d'un monoïde libre

$$h \circ i = g \circ i$$

mais le lemme [9.18] page 503 montre que deux morphismes vérifiant cette égalité sont égaux.

■

On passe maintenant au coproduit et au limite inductive de la catégorie des anneaux

9.3.3 *Coproduit et limite inductive d'une famille d'anneaux*

1 *Coproduit d'une famille d'anneaux*

On rappelle la définition d'un coproduit.

Définition 9.27 *On note I et $\mathbb{U}$ des ensembles et $(X, \oplus, \odot)$ une famille d' anneaux indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$.*
On appelle ***coproduit*** *de la famille $(X, \oplus, \odot)$ un couple $((P^0, +, *), f)$ où $(P^0, +, *)$ est un anneau et $f \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_i, P^0)$ vérifie la propriété suivante : pour tout anneau $(A, +, \centerdot)$ et pour tout*

$$g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_i, A)$$

il existe un unique morphisme d'anneaux $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(P^0, A)$ *vérifiant*

$$g_i = h \circ f_i.$$

En d'autres termes, $((P^0, +, *), f)$ *est un coproduit de* $(X, \oplus, \odot)$ *si pour tout anneau* $(A, +, \,\textbf{.}\,)$ *l'application* φ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(P^0, A)$ *dans* $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_i, A)$ *définie par*

$$\varphi(h)(i) = h \circ f_i$$

est bijective .

La preuve de l'existence de coproduit pour les familles d'anneaux est une conéquence du lemme [8.20] page 256 , du lemme [9.10] page 470] et du lemme [9.18] page 503 .

Lemme 9.20 *On note* $(\mathbb{Z}, +, \,\textbf{.}\,, O)$ *un ensemble d'entiers relatifs,*I *et* $\mathbb{U}$ *des ensembles,* $(X, \oplus, \odot)$ *une famille d'anneaux indexée par* I *et à valeurs dans* $\mathcal{P}(\mathbb{U})$*.* $((P^0, \times), f)$ *sera un coproduit de la famille de monoïdes* $i \mapsto (X_i, \odot_i)$ *et* $(A_c(P^0, \mathbb{Z}), +, \star)$ *est l'anneau de convolution au-dessus de* P^0*. Enfin* κ *est l'application de* P^0 *dans* $A_c(P^0, \mathbb{Z})$ *définie par*

$$\kappa(u)(v) = \begin{cases} 1 & si \quad u = v \\ 0 & si \quad u \neq v \end{cases}$$

Il existe une relation d'équivalence $G(f)$ *sur* $A_c(P^0, \mathbb{Z})$ *telle que*

1. $G(f)$ *est compatible avec les lois de* $A_c(P^0, \mathbb{Z})$
2. *Si* $(A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), +, \bullet)$ *est l'anneaux quotient et*

$$\pi; A_c(P^0, \mathbb{Z}) \mapsto A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f)$$

l'application canonique alors, pour tout $i \in I$ *l'application* h_i *de* X_i *dans* $A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f)$ *définie par*

$$h_i = \pi \circ \kappa \circ f_i$$

est un morphisme de l'anneau $(X_i, \oplus_i, \odot_i)$ *dans l'anneau* $(A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), +, \bullet)$*.*

(ii) $((A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), +, \bullet), h)$ *est un coproduit de la famille* $(X, \oplus, \odot)$

Preuve

(i)

e sera l'élément neutre de $(P^0, \times)$, de plus on note

- $\alpha_i : X_i \times X_i \mapsto A_c(P^0, \mathbb{Z}) \times A_c(P^0, \mathbb{Z})$ l'application définie par

$$\alpha_i(x, y) = \begin{cases} (\kappa(f_i(x \oplus_i y)) \,, \kappa(f_i(x)) + \kappa(f_i(y))) & si \quad x \neq e_i \text{ et } y \neq e_i \\ (\kappa(f_i(e_i)), \kappa(e)) & si \quad x = e_i \\ (\kappa(e), \kappa(f_i(e_i))) & si \quad y = e_i \end{cases}$$

- $$A = \bigcup_{i \in I} \mathrm{im}(\alpha_i) \;,$$
- $G(f)$ la relation d'équivalence compatible avec les lois de $A_c(P^0, \mathbb{Z})$ engendrée par A (voir lemme [9.10] page 470)

Le lemme [9.9] page 469 permet d'affirmer que l'ensemble quotient $A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f)$ peut-être muni d'une structure d'aneau pour laquelle l'application canonique π est un morphisme.On montre que pour tout $i \in I$ h_i est un morphisme de $(X_i, \oplus_i, \odot_i)$ dans $(A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), +, \bullet)$

1. On montre $\forall\ i \in I \quad h_i(x \odot_i y) = h_i(x) \bullet h_i(y)$

— Par définition d'un coproduit, f_i est un morphisme de $(X_i, \odot_i)$ dans $(P^0, \times)$ par suite

$$f_i(x \odot_i y) = f_i(x) \times f_i(y)$$

— par définition du produit de convolution κ est un morphisme de $(P^0, \times)$ dans $(A_c(P^0, \mathbb{Z}), \star)$, ainsi

$$\kappa(f_i(x \odot_i y)) = \kappa(f_i(x) \times f_i(y)) = \kappa(f_i(x)) \star \kappa(f_i(y))$$

— puisque π est un morphisme de $(A_c(X, \mathbb{Z}), \star)$ dans $(A_c(X, \mathbb{Z})/G(f), \bullet)$

$$\pi(\kappa(f_i(x) \star \kappa(f_i(y))) = \pi(\kappa(f_i(x)) \bullet \pi(\kappa(f_i(y))$$

Ainsi on obtient

$$h_i(x \odot_i y) = \pi(\kappa(f_i(x \odot_i y))) = \pi(\kappa(f_i(x))) \bullet \pi(\kappa(f_i(y))) = h_i(x) \bullet h_i(y)$$

2. <u>On montre que h_i est un morphisme de $(X_i, \odot_i)$ dans $(A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), \bullet)$</u>

   il reste à vérifier que $h_i(e_i)$ est l'élément neutre de $(A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), \bullet)$. mais on a $f_i(e_i) = e$ et $h_i(e_i) = \pi(\kappa(e))$ et $\kappa(e)$ est l'élément neutre de $A_c(P^0, \mathbb{Z}), \star)$, par suite $\pi(\kappa(e))$ est l'élément neutre de $(A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), \bullet)$.
3. <u>On montre $h_i(x \oplus_i y) = h_i(x) + h_i(y)$</u>

   si $i \in I$ et $(x, y) \in X_i \times X_i$ alors par définition de A

$$(\kappa(f_i(x \oplus_i y))\ , \kappa(f_i(x)) + \kappa(f_i(y)) \in A$$

   par suite

$$h_i(x \oplus_i y) = \pi(f_i(x \oplus_i y))) = \pi(\kappa(f_i(x)) + \kappa(f_i(y))\ ,$$

   π étant un morphisme on a

$$\pi\left(\kappa(f_i(x)) + \kappa(f_i(y)) = \pi\left(\kappa(f_i(x)) + \pi(\kappa(f_i(y))\right)\right.$$

   ainsi

$$h_i(x \oplus_i y) = \pi(\kappa(f_i(x)) + \pi(\kappa(f_i(y))) = h_i(x) + h_i(y).$$

(ii)

Il s'agit de montrer que pour tout anneaux $(B, +, \ \cdot\ )$ et pour tout

$$g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_i, B)$$

il existe un unique $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), B)$ vérifiant :

$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g^* \circ h_i$$

Preuve de l'existence

Soit $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_i, B)$, alors

— par définition d'un coproduit dans **mon** il existe $g_e \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0, B)$ vérifiant :

$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g_e \circ f_i$$

— Puisque g_e est multiplicative, le lemme [9.18] page 503 permet d'affimer que l'application g_{ec} de $A_c[P^0, \mathbb{Z}]$ dans B définie par

$$g_{ec}(\rho) = \sum_{\lambda \in s(\rho)} \rho(\lambda) g_e(\lambda)$$

est l'unique morphisme de $(A_c(P^0, \mathbb{Z}), +, \star)$ dans $(B, +, \centerdot)$ vérifiant

$$g_e = g_{ec} \circ \kappa$$

ainsi on obtient

$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g_{ec} \circ \kappa \circ f_i \tag{9.25}$$

— on veut maintenant montrer qu'il existe $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), B)$ vérifiant :

$$g_{ec} = g^* \circ \pi.$$

D'après le lemme [9.10] page 470 il suffit de montrer :

$$(u, v) \in A \Rightarrow g_{ec}(u) = g_{ec}(v)$$

et cela provient du fait que pour tout $i \in I$ g_i est un morphisme. En effet, si $(u, v) \in A$ il existe $i \in I$ tel que $(u, v) \in \mathrm{im}(\alpha_i)$, par suite il existe $i \in I$ et $(x, y) \in X_i \times X_i$ tel que

$$u = \kappa(f_i(x \oplus_i y)) \quad v = \kappa(f_i(x)) + \kappa(f_i(y))$$

Ainsi, puisque $g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_i, B)$,

$$g_{ec}(u) = g_{ec} \circ \kappa \circ f_i(x \oplus_i y) = g_i(x \oplus_i y) = g_i(x) + g_i(y)$$

et

$$g_{ec}(v) = g_{ec}[\kappa(f_i(x) + \kappa(f_i(y))]$$

et par construction g_{ec} est un morphisme de $(A_c(P^0, \mathbb{Z}), +, \star)$ dans $(B, +, \centerdot)$ par suite

$$g_{ec}[\kappa(f_i(x) + \kappa(f_i(y))] = g_{ec}(\kappa(f_i(x)) + g_{ec}(\kappa(f_i(y)) = g_i(x) + g_i(y)$$

ce qui montre que

$$g_{ec}(u) = g_{ec}(v).$$

Ainsi il existe un morphisme $g^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), B)$ vérifiant

$$g_{ec} = g^* \circ \pi$$

et (9.25) s'écrit

$$\forall\ i \in I\ g_i = g_{ec} \circ \kappa \circ f_i = g^* \circ \pi \circ \kappa \circ f_i = g^* \circ h_i.$$

Preuve de l'unicité

Si $(u, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), B) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A_c(P^0, \mathbb{Z})/G(f), B)$ vérifient

$$g_i = u \circ h_i = u \circ \pi \circ \kappa \circ f_i = v \circ h_i = v \circ \pi \circ \kappa \circ f_i$$

alors les applications

$$g_{e,u} = u \circ \pi \circ \kappa \qquad \text{et} \qquad g_{e,v} = v \circ \pi \circ \kappa$$

sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}((P^0, \times), (B, \centerdot))$ qui vérifient

$$\forall\ i \in I \qquad g_i = g_{e,u} \circ f_i = g_{e,v} \circ f_i$$

ainsi, par définition d'un coproduit $g_{e,u} = g_{e,v}$. Enfin les morphisme $g_{ec,u}$ et $g_{ec,v}$ définis par

$$g_{ec,u} = u \circ \pi \qquad \text{et} \qquad g_{m,v} = v \circ \pi$$

sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A_c(P^0, \mathbb{Z}), B)$ qui vérifient

$$g_{ec,u} \circ \kappa = g_{ec,v} \circ \kappa$$

ainsi, le lemme [9.9] page 469 permet d'affirmer que $g_{ec,u} = g_{ec,v}$ d'où

$$u \circ \pi = v \circ \pi$$

π étant surjective cela entraîne $u = v$. ■

Le passage coproduit $\mapsto$ limite inductive commence à être horriblement routinier.

2 *Limite inductive d'une famille d'anneaux*

On définit les transitions d'une famille d'anneaux.

Définition 9.28 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, $(X, \oplus, \odot)$ une famille d'anneaux indexée par I et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, on appelle famille de **transitions** de $(X, \oplus, \odot)$ un couple (R, f) où :*

1. *R est une relation de I dans I qui vérifie les propriétés suivantes :*
   - *(a) R est réflexive : $\forall\ i \in I\ (i, i) \in R$*
   - *(b) R est transitive : $[(i, j) \in R$ et $(j, k) \in R \Rightarrow (i, k) \in R]$.*
2. *$f = (f_{i,j})_{(i,j)\in R}$ est un élément de $\displaystyle\prod_{(i,j)\in R} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_j, X_i)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*
   - *(a) Pour tout $i \in I$ $f_{i,i} = id_{X_i}$*
   - *(b) Si $(i, j) \in R$ et $(j, k) \in R$ alors*
   $$f_{i,k} = f_{i,j} \circ f_{j,k}$$

Si (R, f) est une famille de transitions, on définit sa limite inductive.

Définition 9.29 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, $(X, \oplus, \odot)$ une famille d'anneaux indexée par I à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, et (R, f) est une famille de transitions de $(X, \oplus, \odot)$. On appelle limite inductive de (R, f) un couple $((B, +, \times), h)$ où $(B, +, \times)$ est un anneau et $h \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_i, B)$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. *pour tout $(i, j) \in R$*
   $$h_j = h_i \circ f_{i,j}$$
2. *pour tout anneau $(A, +_a, \times_a)$ et pour tout $g \in \displaystyle\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_i, A)$ vérifiant*
   $$(i, j) \in R \Rightarrow g_j = g_i \circ f_{i,j}$$
   il existe un unique morphisme $g^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(B, A)$ vérifiant
   $$g_i = g^0 \circ h_i$$

On rappelle la preuve de l'existence de limites inductives.

Lemme 9.21 *On note $\mathbb{U}$ et I des ensembles, $(X, \oplus, \odot)$ une famille d'anneaux indexée par I à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{U})$, et (R, f) est une famille de transitions de $(X, \oplus, \odot)$.*
Si $((P^0, +, \star), h)$ est un coproduit (dans la catégorie **Ann***) de $(X, \oplus, \odot)$ alors l'application A de R dans $\mathcal{P}(P^0 \times P^0)$ définie par*

$$A_{(i,j)} = \{(u, v) \in P^0 \times P^0 / \exists\ (x, y) \in X_i \times X_j : u = h_i(x)\ v = h_j(y)\ x = f_{i,j}(y)\}$$

possède les propriétés suivantes

1. *$(i, j) \in R \Rightarrow (h_i(e_i), h_j(e_j)) \in A_{(i,j)}$*
2. *Si on note*
   (a)
   $$A = \bigcup_{(i,j)\in R} A_{(i,j)}$$
   (b) *$\rho_*(A)$ la relation d'équivalence compatible avec les lois de P^0 et engendrée par A,([5])*
   (c) *$(P^0/\rho_*(A), +, \bullet)$ l'anneau quotient de P^0 par $\rho_*(A)$*
   (d) *π le morphisme canonique de $(P^0, +, \star)$ dans $(P^0/\rho_*(A), +, \bullet)$*
   (e) *$g \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_i, P^0/\rho_*(A))$ l'application définie par*
   $$g_i = \pi \circ h_i$$

Alors $((P^0/\rho_*(A)\ , +,\ \bullet\ ), g)$ est une limite inductive (dans la catégorie **Ann***) de (R, f)*

Preuve Il suffit de reprendre la démonstration du lemme [8.39] page 351

1. Si $(i, j) \in R$ alors $(h_i(e_i), h_j(e_j)) \in A$. En effet, si $(i, j) \in R$ alors, puisque $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_j, X_i)$ on a $f_{i,j}(e_j) = e_i$.
2. D'abord $\pi \circ h_i$ est un candidat puisque
   $$\pi \circ h_i \circ f_{i,j} = \pi \circ h_j\ .$$
   En effet, par définition de A, pour tout $y \in X_j$ si $x = f_{i,j}(y)$ alors
   $$(h_i(x), h_j(y)) \in A$$
   par suite, puisque par construction $A \subset \rho_*(A)$, on obtient
   $$\pi(h_i(f_{i,j}(y))) = \pi(h_j(y))\ .$$
   Il reste á montrer que si $(H, +,\ .\ )$ est un anneau et $a \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(X_i, H)$ vérifie
   $$a_j = a_i \circ f_{i,j} \tag{9.26}$$
   il existe un unique morphisme $a^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(P^0/\rho_*(A), H)$ tel que pour tout $i \in I$
   $$a_i = a^0 \circ g_i\ .$$

Preuve de l'existence

5. voir lemme [9.10] page 470

Puisque $((P^0, +, \star), h)$ est un coproduit dans **Ann** il existe un unique morphisme $a^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(P^0, H)$ vérifiant :

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^* \circ h_i$$

on va montrer qu'il existe $a^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(P^0/\rho_*(A), H)$ tel que

$$a^* = a^0 \circ \pi\ .$$

D'après le lemme [9.10] page 470 il suffit de montrer :

$$(u, v) \in A \Rightarrow a^*(u) = a^*(v)$$

Mais si $(u, v) \in A$ il existe $(i, j) \in R$, $(x, y) \in X_i \times X_j$ tels que $u = h_i(x)$ $v = h_j(y)$ et $x = f_{i,j}(y)$ ainsi la définition de a^* et (9.26) entraîne

$$a^*(u) = a^*(h_i(x)) = a_i(x) = a_i(f_{i,j}(y)) = a_j(y) = a^*(h_j(y)) = a^*(v)\ .$$

Par suite il existe $a^0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A), H)$ tel que $a^* = a^0 \circ \pi$ et

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^* \circ h_i = a^0 \circ \pi \circ h_i = a^0 \circ g_i$$

Preuve de l'unicité

Si $(a^0, b^0) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A), H) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(P^0/\rho_*(A), H)$ vérifient

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^0 \circ g_i \qquad \text{et} \qquad a_i = b^0 \circ g_i$$

alors $a^* = a^0 \circ \pi$ et $b^* = b^0 \circ \pi$ sont des morphismes de P^0 dans $P^0/\rho_*(A)$ qui vérifient

$$\forall\ i \in I \qquad a_i = a^* \circ h_i \qquad \text{et} \qquad a_i = b^* \circ h_i$$

$((P^0, +, \star), h)$ étant un coproduit de $(X, \oplus, \odot)$ ces égalités entraînent $a^* = b^*$, ainsi $a^0 \circ \pi = b^0 \circ \pi$, π étant surjective on obtient $a^0 = b^0$. ■

Les propriétés de la structure d'anneau des ensembles d'entiers relatifs permettent d'énoncer simplement les résultats arithmétiques de base.

9.4 *Structure d'anneau des ensembles d'entiers relatifs*

Les ensembles d'entiers relatifs sont définis par [8.25] page 280. Dans ce paragraphe on utilise les notations [9.1] page 437.

9.4.1 *Premiers éléments d'arithmétique*

Les idéaux premiers sont définis par [9.17] page 490.

Lemme 9.22 *On note $(\mathbb{Z}, +, \centerdot\ , O\ )$ un ensemble d'entiers relatifs et $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble*

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{\nu \in \mathbb{Z} / \nu \geq 0\}$$

(i) Si G est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ alors pour tout $\nu \in G$ l'ensemble $\nu\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et

$$\nu\mathbb{Z} \subset G$$

(ii) Si G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ il existe un unique entier positif *$n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$G = n\mathbb{Z}$$

(iii) Pour que $\mathfrak{a}$ *soit un idéal de* $(\mathbb{Z}, +, \,\textbf{.}\,)$ *il faut et il suffit qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\mathfrak{a} = n\mathbb{Z} \ .$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ *si* π *est le morphisme canonique de l'anneau* $\mathbb{Z}$ *dans l'anneau quotient* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *la restriction de* π *à* $\mathbb{N}_{n-1}$ *est une bijection de* $\mathbb{N}_{n-1}$ *dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*. En particulier* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est fini de cardinal* n*.*

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *L'idéal* $n\mathbb{Z}$ *est premier*
2. *L'anneau* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est intègre*
3. *L'anneau* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est un corps*
4. $n\mathbb{Z}$ *est maximal dans l'ensemble* $\mathfrak{I}^*(\mathbb{Z})$ *des idéaux de* $(\mathbb{Z}, +, \textbf{.})$ *différent de* $\mathbb{Z}$ *:*

$$[\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}(\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad n\mathbb{Z} \subset \mathfrak{a}] \Rightarrow \mathfrak{a} = n\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{a} = \mathbb{Z} \ .$$

Preuve

(i)

Si $\nu \in \mathbb{Z}$ par distributivité l'application φ_ν de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$\varphi_\nu(k) = \nu k$$

est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$ par suite $\nu\mathbb{Z} = \mathrm{im}(\varphi_\nu)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. On montre que si G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ alors

$$\nu \in G \Rightarrow \nu\mathbb{Z} \subset G \ .$$

D'abord on montre

$$k \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu k \in G \ ,$$

puisque par définition d'un ensemble d'entiers relatifs le couple $(\mathbb{N}, O)$ est un ensemble d'entiers naturels il suffit de montrer que l'ensemble

$$H = \{k \in \mathbb{N} / \nu k \in G\}$$

est héréditaire. Or

— puisque $0 \in G$ on a $0 \in H$

— Si $k \in H$ alors puisque $\nu(k+1) = \nu k + \nu$, $\nu(k+1)$ est somme d'éléments de G, par suite $k+1 \in H$.

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\nu k \in G$. Enfin si $k < 0$ alors $-k \in \mathbb{N}$ par suite $\nu(-k) \in G$ mais puisque νk est l'inverse de $\nu(-k)$ on obtient $\nu k \in G$.

(ii)

Si $G = \{0\}$ $n = 0$ est l'unique entier positif vérifiant $G = n\mathbb{Z}$, on peut donc supposer $G \neq \{0\}$.

Preuve de l'existence

Dans le cas $G \neq \{0\}$ on a $G \cap \mathbb{N}^* \neq \varnothing$, en effet si g est un élément non nul de G alors

— Si $g > 0$, $g \in G \cap \mathbb{N}^*$

— Si $g < 0$, $-g \in G \cap \mathbb{N}^*$

Puisque $(\mathbb{N}, O)$ est bien ordonné $G \cap \mathbb{N}^*$ possède un plus petit élément :

$$n_0 = \min\{k : k \in G \cap \mathbb{N}^*\}$$

on montre

$$G \cap \mathbb{N} \subset n_0\mathbb{Z} \ . \tag{9.27}$$

En effet, si $g \in G \cap \mathbb{N}$ alors en divisant g par n_0 (voir lemme [5.4] page 98) on voit qu'il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{n_0-1}$ tels que

$$g = n_0 q + r \ .$$

D'après (i) on a, puisque $n_0 \in G$, $n_0 q \in G$, par suite $g - n_0 q \in G$, mais $0 \leq g - n_0 q < n_0$ et par définition d'un élément minimal le seul élément de $G \cap \mathbb{N}$ strictement inférieur à n_0 est 0 , par suite $g = n_0 q$ et $g \in n_0\mathbb{Z}$. Enfin on montre que pour tout $g \in G$ il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $g = n_0 q$.
En effet,

— si $g < 0$ alors $-g \in G \cap \mathbb{N}$ et (9.27) montre qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel $-g = n_0 q$, par suite $g = n_0(-q)$ est un élément de $n_0\mathbb{Z}$

— si $g \geq 0$ alors $g \in G \cap \mathbb{N}$ et (9.27) montre qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel $g = n_0 q$, par suite g est un élément de $n_0\mathbb{Z}$

Ainsi $G \subset n_0\mathbb{Z}$ mais (i) montre que $n_0\mathbb{Z} \subset G$ par suite

$$G = n_0\mathbb{Z} \ .$$

Preuve de l'unicité

On montre que si p et q sont des entiers strictement positifs vérifiant $p\mathbb{Z} = q\mathbb{Z}$ alors $p = q$. En effet,

— puisque $p \in q\mathbb{Z}$ et $p > 0,\ q > 0$ il existe $a \in \mathbb{Z}_+$ tel que

$$p = qa$$

— puisque $q \in p\mathbb{Z}$ et $q > 0,\ p > 0$ il existe $b \in \mathbb{Z}_+$ tel que

$$q = pb$$

par suite $p = pba$ et $p(ab - 1) = 0$. Puisque $\mathbb{Z}$ est intègre et $p > 0$ cette égalité entraîne

$$ab = 1$$

Mais d'après le théorème [8.8] page 281 les seules solutions positives de cette égalité sont $a = b = 1$ par suite $p = qa = q$.

(iii)

D'abord si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ alors $\mathfrak{a}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ ainsi (ii) montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathfrak{a} = n\mathbb{Z} \ .$$

Ensuite on montre que si $\mathfrak{a} = n\mathbb{Z}$ alors $\mathfrak{a}$ est un idéal de Z.

— D'après (i) $\mathfrak{a}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$

— si $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathfrak{a}$ et $y = nq$ alors $xy = n(qx) \in \mathfrak{a}$

On montre que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors l'application φ de $\mathbb{N}_{n-1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définie par

$$\varphi(r) = n\mathbb{Z} + r = \{x \in \mathbb{Z}/x - r \in n\mathbb{Z}\}$$

est une bijection de $\mathbb{N}_{n-1}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1. On montre que φ est injective
   Il s'agit de montrer

   $$n\mathbb{Z} + r = n\mathbb{Z} + r' \Rightarrow r = r'$$

   mais si $n\mathbb{Z} + r = n\mathbb{Z} + r'$ alors $r \in n\mathbb{Z} + r'$ ainsi il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $r - r' = nq$ mais par définition d'un ensemble d'entiers relatifs (voir définition [8.25] page 280) l'application $q \mapsto nq$ est strictement croissante par suite
   — si $q \geq 1$ $r - r' \geq n$ mais $r - r' \leq r < n$
   — si $q \leq -1$ $r - r' \leq -n$ mais $r - r' \geq -r' > -n$
   par suite $q = 0$ et $r = r'$

2. On montre que φ est surjective.
   Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$ il existe $r \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $x - r \in n\mathbb{Z}$
   (a) si $x \in \mathbb{N}_{n-1}$ alors $r = x$ convient
   (b) si $x \geq n$ alors la division de x par n (voir lemme [5.4] page 98) montre qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $x = nq + r$ par suite $x - r \in n\mathbb{Z}$
   (c) si $x < 0$ alors d'après (a) et (b) il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $-x = nq + r$ par suite $x = -nq - r = -n(q+1) + n - r$ et
   — Si $r = 0$ alors $x = n(-q) \in n\mathbb{Z}$
   — Si $0 < r < n$, alors $n - r \in \mathbb{N}_{n-1}$ et $x - (n - r) \in n\mathbb{Z}$

ainsi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est en bijection avec $\mathbb{N}_{n-1}$ et

$$\mathrm{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n \ .$$

(iv)

L'assertion $1 \Leftrightarrow 2$ a été établi par la proposition [9.1] page 490. L'assertion $3 \Leftrightarrow 4$ a été établi par le lemme [9.15] page 496 Il reste à voir $2 \Leftrightarrow 3$, Mais l'implication $3 \Rightarrow 2$ provient du fait que tout corps est intègre et l'implication $2 \Rightarrow 3$ provient du fait que tout anneau intègre *fini* est un corps. En effet, si A est intègre et fini alors pour tout $a \in A^*$ l'application f_a de A dans A définie par $f_a(x) = ax$ est injective puisque

$$ax = ay \Rightarrow a(x - y) = 0 \Rightarrow x = y$$

le théorème [6.3] page 128 montre alors que f_a est bijective, par suite $1 \in \mathrm{im}(f_a)$ et a est inversible. ■

On définit un entier premier.

Définition 9.30 *On note* $(\mathbb{Z}, +, \centerdot\,, O\ )$ *un ensemble d'entiers relatifs et* $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble*

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{\nu \in \mathbb{Z}/\nu \geq 0\} \ .$$

Un entier $p \in \mathbb{Z}$ *est dit* ***premier*** *si* $p \neq 0$ *et si l'idéal* $p\mathbb{Z}$ *est premier :*

$$xy \in p\mathbb{Z} \Rightarrow x \in p\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad y \in p\mathbb{Z}$$

On note $\mathbb{P}$ *l'ensemble des entiers premiers et* $\mathbb{P}_+ = \mathbb{P} \cap \mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers premiers positifs.*

Il est clair que p est premier si et seulement si $-p$ est premier.

Définition 9.31 *On note* $(\mathbb{Z}, +, \centerdot\,, O\ )$ *un ensemble d'entiers relatifs et* $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble*

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{\nu \in \mathbb{Z}/\nu \geq 0\} \ .$$

Si $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *on dit que* b ***divise*** a *ou que* b *est un* ***diviseur*** *de* a *si*

$$a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z} \ .$$

On note

$$\mathbb{D}(a) = \{b \in \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}\}$$

l'ensemble des diviseurs de a *et* $\mathbb{D}_+(a) = \mathbb{D}(a) \cap \mathbb{N}$ *l'ensemble des diviseurs positifs de* a

Il est clair que
— b est un diviseur de a si et seulement si $-b$ est un diviseur de a.
— b est un diviseur de a si et seulement si $a \in b\mathbb{Z}$

Dans ce formalisme le lemme [9.22] page 518 possède une traduction simple.

Lemme 9.23 *On note* $(\mathbb{Z}, +, \centerdot, O\ )$ *un ensemble d'entiers relatifs et* $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble*

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{\nu \in \mathbb{Z}/\nu \geq 0\}$$

(i) Si $p \in \mathbb{Z}_+^*$ *les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *p est premier*
2. *Si* $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *et p divise xy alors p divise x ou p divise y*
3. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *est un corps*
4. *les seuls diviseurs positifs de p sont* 1 *et p.*

(ii) Si $x \in \mathbb{Z}^*$ *et* $x \notin \{1, -1\}$ *il existe un entier premier supérieur à* 2 *qui divise x*

(iii) Si $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$ *est une famille de* $n+1$ *entiers relatifs non tous nuls et*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z}/\exists b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z}) : x = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k\}$$

alors il existe un unique entier positif *d tel que*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$$

Cet entiers positif d possède les propriétés suivantes

a *pour tout* $k \in \mathbb{N}_n$ *d divise* a_k *:*

$$d \in \bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k)$$

b *si* $x \in \mathbb{Z}$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}_n$ *x divise* a_k *alors x divise d :*

$$\mathbb{D}(d) = \bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k)$$

c ***(identité de Bezout)*** *il existe* $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$ *tel que*

$$d = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \tag{9.28}$$

Preuve

(i)

1 $\Leftrightarrow$ *2*

L'assertion *2* se traduit en termes d'idéaux par

$$xy \in p\mathbb{Z} \Rightarrow x \in p\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad y \in p\mathbb{Z}$$

et c'est pile la définition d'un nombre premier.

2 $\Leftrightarrow$ *3*

C'est l'assertion *1* $\Leftrightarrow$ *3* du lemme [9.22] page 518

3 $\Leftrightarrow$ *4*

D'après le lemme [9.22] page 518, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si $p\mathbb{Z}$ est maximal dans l'ensemble $\mathfrak{I}^*(\mathbb{Z})$ (ordonné par inclusion) des idéaux de $\mathbb{Z}$ différents de $\mathbb{Z}$. Il suffit donc de montrer

$$p\mathbb{Z} \text{ maximal} \Leftrightarrow \mathbb{D}_+(p) = \{1, p\}$$

1. On montre [$p\mathbb{Z}$ maximal $\Rightarrow \mathbb{D}_+(p) = \{1, p\}$]

   En effet, si a est un diviseur positif de p alors $p\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$, la maximalité de $p\mathbb{Z}$ entraîne donc $a\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ou $a\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, c'est à dire $a = 1$ ou $a = p$.
2. On montre [$\mathbb{D}_+(p) = \{1, p\} \Rightarrow p\mathbb{Z}$ maximal]

   En effet si $\mathfrak{a}$ est un idéal contenant $p\mathbb{Z}$ alors le lemme [9.22] page 518 permet d'affirmer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{a} = n\mathbb{Z}$, puisque $p\mathbb{Z} \subset \mathfrak{a}$ n est un diviseur positif de p par suite $n = 1$ ou $n = p$, ainsi $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}$ ou $\mathfrak{a} = p\mathbb{Z}$.

(ii)

D'après le lemme [9.15] page 496 l'ensemble $\mathfrak{I}^*(\mathbb{Z})$ (ordonné par inclusion) des idéaux de $\mathbb{Z}$ différents de $\mathbb{Z}$ est inductif par suite le lemme de Zorn (voir lemme [2.5] page 50) permet d'affirmer que pour tout $x \in \mathbb{Z}^*$ tel que $x \notin \{-1, 1\}$, l'idéal $x\mathbb{Z}$ est inclus dans un idéal $\mathfrak{a}$ qui est maximal dans $\mathfrak{I}^*(\mathbb{Z})$. Le lemme [9.22] page 518 permet d'affirmer :

— D'abord que l'idéal $\mathfrak{a}$ est de la forme $\mathfrak{a} = n\mathbb{Z}$ pour un unique entier n positif, de plus on a $n \neq 0$ puisque $x\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$ et $n \neq 1$ puisque $n\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$.

— Ensuite que la maximalité de $n\mathbb{Z}$ entraîne que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps

(i) montre alors que n est premier et puisque $x\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$ l'entier premier n est supérieur à 2 et divise x.

(iii)

On montre que $\sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Il est clair que $0 \in \sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z}$

1. On montre $(x, y) \in \sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z} \times \sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z} \Rightarrow x + y \in \sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z}$.

   Si
   $$x = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \quad \text{et} \quad y = \sum_{k=0}^{n} a_k c_k$$
   alors puisque $a_k(b_k + c_k) = a_k c_k + a_k c_k$ l'égalité (9.3) page 419 montre que
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k(b_k + c_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k + a_k c_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k + \sum_{k=0}^{n} a_k c_k = x + y$$
   et l'égalité
   $$x + y = \sum_{k=0}^{n} a_k(b_k + c_k)$$
   montre que $x + y \in \sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z}$
2. On montre $x \in \sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z} \Rightarrow -x \in \sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z}$

   En effet, si $x = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ l'égalité (9.3) page 419 montre que
   $$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k(b_k + (-b_k)) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k + a_k(-b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k + \sum_{k=0}^{n} a_k(-b_k)$$

par suite

$$0 = x + \sum_{k=0}^{n} a_k(-b_k)$$

et

$$-x = \sum_{k=0}^{n} a_k(-b_k)$$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$ et le lemme [9.22] page 518 montre qu'il existe un unique entier positif d vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \ .$$

On montre que d vérifie **a**, **b** et **c**

a Si $j \in \mathbb{N}_n$ et $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$ est définie par

$$b_k = \begin{cases} 1 & si \quad k = j \\ 0 & si \quad k \neq j \end{cases}$$

alors

$$a_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

par suite

$$a_j \in \sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad a_j \in d\mathbb{Z}$$

b Si pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ $a_k\mathbb{Z} \subset x\mathbb{Z}$ on montre que pour tout $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \in x\mathbb{Z}$$

mais puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ $a_k b_k \in x\mathbb{Z}$ lemme [8.47] page 380 permet d'affirmer que $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \in x\mathbb{Z}$ comme somme finie d'éléments de $x\mathbb{Z}$. Mais par définition de d tout élément de $d\mathbb{Z}$ est de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ par suite

$$d\mathbb{Z} \subset x\mathbb{Z}$$

ainsi

$$\bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k) \subset \mathbb{D}(d)$$

D'autre part, si $x \in \mathbb{D}(d)$ alors $d\mathbb{Z} \subset x\mathbb{Z}$, mais d'après **a** pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ on a $a_k\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$ ainsi

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n \quad a_k\mathbb{Z} \subset x\mathbb{Z}$$

par suite $\mathbb{D}(d) \subset \bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k)$

c puisque $d \in \sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z}$ il existe $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$ tel que

$$d = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

■

Le lemme [9.23] permet de définir le plus grand commun diviseur d'une famille d'entiers.

Définition 9.32 *On note $(\mathbb{Z}, +, \centerdot\,, O\ )$ un ensemble d'entiers relatifs et $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs :*

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{\nu \in \mathbb{Z}/\nu \geq 0\}$$

*Si $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$ est une famille fini de $n+1$ entiers, on appelle **plus grand diviseur commun** de la famille a l'unique entier positif d tel que*

$$d\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z}/\exists\ b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z}) : x = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k\}$$

On note $\mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n)$ cet entier positif.
*On dit que les entiers $a_0, \cdots, a_n$ sont **premiers entre eux** si*

$$\mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n) = 1$$

Les conséquences immédiates de l'identité de Bezout (égalité (9.28) page 522) sont consignées dans le lemme suivant.

Lemme 9.24 *On note $(\mathbb{Z}, +, \centerdot\,, O\ )$ un ensemble d'entiers relatifs et $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble*

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{\nu \in \mathbb{Z}/\nu \geq 0\}$$

(i) Si $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$ est une famille de $n+1$ entiers relatifs pour que $\mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n) = 1$ il faut et il suffit qu'il existe $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$ vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = 1\ .$$

On a alors

$$\{-1, +1\} = \bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k) \quad \text{et} \quad \{1\} = \bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}_+(a_k)$$

*(ii) **Lemme de gauss***

Si $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sont des entiers premiers entre eux et $c \in \mathbb{Z}$ est tel que a divise bc alors a divise c.

(iii) Si p est un entier premier positif et $p \neq 1$ alors : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\{d \in \mathbb{N}/d \neq 1 \quad \text{et} \quad p^n\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}\} = \{p, \cdots, p^n\} = \{d \in \mathbb{N}_{p^n}/d \neq 1 \quad \text{et} \quad \mathtt{pgcd}(d, p^n) = d\}$$

Autrement dit les seuls diviseurs positifs de p^n sont les entiers de la forme $d = p^k$ où $k \in \mathbb{N}_n$ et on a alors $\mathtt{pgcd}(d, p^n) = d$. De plus, pour que $d \neq 1$ ne soit pas un diviseur de p^n il faut et il suffit que $\mathtt{pgcd}(d, p^n) = 1$

(iv) Si $(a, p) \in \mathrm{hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \times \mathbb{P}_+$ vérifie

$$\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)\mathbb{Z} \subset p\mathbb{Z}$$

alors il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $a_k\mathbb{Z} \subset p\mathbb{Z}$.
En d'autres termes si un entier premier divise un produit d'entiers il divise au moins l'un d'entre eux.

(v) Si $(p,q) \in \mathbb{P}_+ \times \mathbb{P}_+$ et $p \neq q$ alors pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\mathtt{pgcd}(p^n, q^k) = 1$$

(vi)

Décomposition en facteurs premiers

Si $x \in \mathbb{Z}^*$ et $x \geq 2$ alors

1. *L'ensemble $\mathbb{D}_+^*(x) \cap \mathbb{P}$ des entiers premiers supérieurs à 2 qui divise x est fini non vide .*
2. *Si $\mathbb{P}_+^* = \mathbb{P} \cap [2, \to [$ est l'ensemble des entiers premiers supérieurs à 2 pour tout $p \in \mathbb{P}_+^*$ l'ensemble*

$$V_p(x) = \{n \in \mathbb{N}/x \in p^n\mathbb{Z}\}$$

   est non vide majoré

3. *si ν_x est l'application de $\mathbb{P}_+^*$ dans $\mathbb{N}$ définie par*

$$\nu_x(p) = \max\{n : n \in V_p(x)\}$$

   alors le support de ν_x vérifie

$$\mathrm{s}(\nu_x) = \{p \in \mathbb{P}_+^*/\nu_x(p) \neq 0\} = \mathbb{D}_+^*(x) \cap \mathbb{P}$$

   est fini et

$$x = \prod_{p \in \mathrm{s}(\nu_x)} p^{\nu_x(p)}$$

Preuve

(i)

D'abord s'il existe $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$ tel que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

le lemme [9.1] page 419 montre alors que pour tout $x \in \mathbb{Z}$

$$x = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right) x = \sum_{k=0}^{n} a_k(b_k x)$$

par suite

$$\mathbb{Z} = \sum_{k=0}^{n} a_k\mathbb{Z}$$

et $\mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n) = 1$.
Inversement si $\mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n) = 1$ l'identité de Bezout (voir (9.28) page 522) montre qu'il existe $b \in Hom_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$ vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = 1 \ .$$

D'après le lemme [9.23] page 522 on a

$$\mathbb{D}(\mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n)) = \bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k)$$

puisque les seuls diviseurs de 1 sont -1 et 1 on obtient

$$\bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k) = \{-1, +1\}$$

en particulier

$$\bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}_+(a_k) \subset \bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k) \subset \{-1, +1\}$$

par suite

$$\bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}_+(a_k) = \{1\}$$

(ii)

Puisque a et b sont premiers entre eux l'identité de Bezout montre qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que

$$ax + by = 1$$

par suite

$$c = acx + bcy$$

et puisque a divise bc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $bc = ak$, ainsi

$$c = acx + bcy = a(cx + ky)$$

ce qui montre que a divise c.

(iii)

On pose

$$A_n = \{d \in \mathbb{N}^*/d \neq 1 \quad \text{et} \quad p^{n+1}\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}\} \ , \ B_n = \{p, \cdots, p^{n+1}\} \ ,$$

et

$$C_n = \{d \in \mathbb{N}_{p^{n+1}}/d \geq 1 \quad \text{et} \quad \mathtt{pgcd}(d, p^{n+1}) = d\} \ .$$

Enfin on note

$$H = \{n \in \mathbb{N}/A_n = B_n = C_n\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. D'abord on montre $0 \in H$

   En effet, si $d \in \mathbb{N}$ divise p alors d'après le lemme [9.23] page 522 on a $d = 1$ ou $d = p$ par suite si $d \neq 1$ on a $d = p$ et $\mathtt{pgcd}(d, p) = p = d$. Enfin si $\mathtt{pgcd}(d, p) = d$ alors d divise p, ainsi

   $$A_0 \subset B_0 \subset C_0 \subset A_0 \ .$$

2. On montre $n \in H \Rightarrow n + 1 \in H$.

   Si $d \neq 1$ divise p^{n+2} alors puisque $\mathtt{pgcd}(d, p)$ divise p on a $\mathtt{pgcd}(d, p) = 1$ ou $\mathtt{pgcd}(d, p) = p$

   (a) Si $\mathtt{pgcd}(d, p) = 1$ alors d divise pp^{n+1} et $\mathtt{pgcd}(d, p) = 1$ le lemme de Gauss montre alors que d divise p^{n+1} et puisque $n \in H$ on obtient $d \in \{p, \cdots, p^{n+1}\}$ et $d \in \{p, \cdots, p^{n+2}\}$.

   (b) Si $\mathtt{pgcd}(d, p) = p$ alors p divise d par suite il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $d = pa$, puisque d divise p^{n+2} il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $p^{n+2} = db = p(ab)$ ainsi

   $$p(p^{n+1} - ab) = 0 \ .$$

   Puisque $\mathbb{Z}$ est intègre (voir théorème [8.8] page 281) on obtient

   $$p^{n+1} = ab$$

   ainsi a divise p^{n+1}

— si $a = 1$ alors $d = p$ et $d \in B_{n+1}$
— si $a \neq 1$ alors $a \in A_n$ et puisque $n \in H$ on obtient $a \in \{p, \cdots, p^{n+1}\}$ par suite $d = pa$ est un élément de $\{p^2, \cdots, p^{n+2}\}$ et $d \in B_{n+1}$

Ceci montre

$$n \in H \Rightarrow A_{n+1} \subset B_{n+1}$$

D'autre par l'assertion $B_{n+1} \subset C_{n+1}$ est l'assertion

$$\forall\ k \in \{1, \cdots, n+2\} \quad \mathtt{pgcd}(p^k, p^{n+2}) = p^k$$

et elle est toujours vrai puisque si $k \leq n+2$ on a $p^k\mathbb{Z} + p^{n+2}\mathbb{Z} = p^k\mathbb{Z}$.

Enfin l'assertion $C_{n+1} \subset A_{n+1}$ est toujours vrai puisque si $\mathtt{pgcd}(d, p^{n+1}) = d$ alors d divise p^{n+2}.

Ainsi $H = \mathbb{N}$.

(iv)

Si $p \in \mathbb{P}_+$ on note

$$V_n = \left\{ a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) / \prod_{k=0}^{n} a_k \in p\mathbb{Z} \right\}$$

et

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \forall\ a \in V_n\ \exists\ k \in \mathbb{N}_n : a_k \in p\mathbb{Z}\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. Puisque $V_0 = \{a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) / a_0 \in p\mathbb{Z}\}$ on a $0 \in H$
2. On montre $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$

   Si $a \in V_{n+1}$ alors $\displaystyle\prod_{k=0}^{n+1} a_k \in p\mathbb{Z}$, si on pose $b = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k$ alors p divise ba_{n+1}

   — si p et a_{n+1} sont premier entre eux le lemme de Gauss montre que p divise b par suite $a \in V_n$ et puisque $n \in H$ il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $a_k \in p\mathbb{Z}$
   — si p et a_{n+1} ne sont pas premier entre eux alors (iii) montre que p divise a_{n+1}.

   Ainsi $H = \mathbb{N}$

(v)

1 Le cas $n = 1$

D'abord on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\mathtt{pgcd}(p, q^{k+1}) = 1$. On pose

$$H = \{k \in \mathbb{N} / \mathtt{pgcd}(p, q^{k+1}) = 1\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. <u>D'abord on montre $0 \in H$</u>

   Puisque $\mathtt{pgcd}(p, q)$ est un diviseur positif de p et q et que les seuls diviseurs positifs des entiers premiers p et q sont $\{1, p\}$ et $\{1, q\}$ on a

   $$\mathtt{pgcd}(p, q) \in \{1, p\} \cap \{1, q\} = \{1\}\ .$$

2. <u>Ensuite on montre $k \in H \Rightarrow k+1 \in H$</u>.

   En effet, $d = \mathtt{pgcd}(p, q^{k+2})$ est l'unique entier positif qui vérifie

   $$p\mathbb{Z} + q^{k+2}\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$$

   la maximalité de $p\mathbb{Z}$ montre alors que $d = p$ ou $d = 1$. mais si $d = p$ alors p divise $q^{k+2} = qq^{k+1}$. il résulte de l'assertion $k \in H$ que $\mathtt{pgcd}(p, q^{k+1}) = 1$ ainsi le lemme de Gauss entraîne que p divise q mais on a vu que $\mathtt{pgcd}(p, q) = 1$ par suite $d \neq p$ et $d = 1$.

2 Le cas $n > 1$

On pose

$$H' = \{n \in \mathbb{N} / \mathtt{pgcd}(p^{n+1}, q^{k+1}) = 1\}$$

et on montre que H' est héréditaire.

1. L'assertion $0 \in H'$ correspond au cas $n = 1$.
2. On montre $n \in H' \Rightarrow n + 1 \in H'$

   En effet, $d = \mathtt{pgcd}(p^{n+2}, q^{k+1})$ est l'unique entier positif qui vérifie

   $$p^{n+2}\mathbb{Z} + q^{k+1}\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$$

   puisque $n \in H'$ l'identité de Bezout permet d'affirmer qu'il existe un couple d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que

   $$p^{n+1}x + q^{k+1}y = 1$$

   Ainsi, $p = p^{n+2}x + q^{k+1}py$ est un élément de $p^{n+2}\mathbb{Z} + q^{k+1}\mathbb{Z}$ donc

   $$p \in d\mathbb{Z}$$

   par suite d divise p et q^{k+1} et le cas "$n = 1$" entraîne $d = 1$

(v)

1. D'abord d'après le (ii) du lemme [9.23] page 522 $\mathbb{D}_+^*(x) \cap \mathbb{P} \neq \varnothing$, ensuite on a $\mathbb{D}_+^*(x) \subset [0, x]$ puisque $d > x \Rightarrow \quad \forall k \geq 1 \quad dk > x$, ainsi $\mathbb{D}_+^*(x)$ est fini comme sous-ensemble d'un ensemble fini.
2. D'abord puisque $p^0 = 1$ on a $0 \in V_p(x)$ et $V_p(x) \neq \varnothing$. Pour montrer qu'il est majoré on montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ $p^n > x$. En effet puisque $p \geq 2$ l'application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

   $$\varphi(n) = p^n$$

   est strictement croissante et en particulier injective ainsi $\mathrm{im}(\varphi)$ est dénombrable et à ce titre il ne peut être majoré (voir théorème [6.4] page 151). Par suite pour tout $x \in \mathbb{N}$ il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n_x) > x$ ainsi si $n \geq n_x$ p^n ne peut diviser x puisque $p^n > x$. En particulier on obtient

   $$V_p(x) \subset [0, n_x]$$

3. Par définition de $V_p(x)$ l'entier $p^{\nu_x(p)}$ divise x par suite si $\nu_x(p) \neq 0$ on a $p \in \mathbb{D}_+^*(x) \cap \mathbb{P}$ inversement, si $p \in \mathbb{D}_+^*(x) \cap \mathbb{P}$ alors $x \in p\mathbb{Z}$ par suite $\nu_x(p) \geq 1$.
   On pose

   $$H = \left\{ n \in \mathbb{N} / \forall\, x \in [2, n+2] \quad x = \prod_{p \in \mathrm{s}(\nu_{\mathrm{x}})} p^{\nu_x(p)} \right\}$$

   et on montre que H est héréditaire.

   1 On montre $0 \in H$

   En effet $\mathbb{D}_+^*(2) \cap \mathbb{P} = \{2\}$ et $\nu_2(2) = 1$

   2 On montre $n \in H \Rightarrow n + 1 \in H$

Il s'agit de montrer que si $n \in H$ alors pour tout $x \in [2, n+3]$ on a

$$x = \prod_{p \in \mathrm{s}(\nu_{\mathrm{x}})} p^{\nu_x(p)}$$

Si $x \in [2, n+2]$ l'assertion $n \in H$ entraîne cette égalité il suffit donc de montrer

$$n \in H \Rightarrow n+3 = \prod_{p \in \mathrm{s}(\nu_{n+3})} p^{\nu_{n+3}(p)} \tag{9.29}$$

cette égalité s'établi en plusieurs étapes :
D'abord on montre que si $p \in \mathbb{D}_+^*(n+3) \cap \mathbb{P}$ l'unique $q \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$n+3 = p^{\nu_{n+3}(p)} q$$

possède les propriétés suivantes :

1. $\mathtt{pgcd}(p, q) = 1$
2. si $q \geq 2$ alors

$$\mathbb{D}_+^*(n+3) \cap \mathbb{P} = \{p\} \cup (\mathbb{D}_+^*(q) \cap \mathbb{P}) \quad \text{et} \quad \{p\} \cap (\mathbb{D}_+^*(q) \cap \mathbb{P}) = \varnothing \ .$$

   en d'autres termes
$$\mathrm{s}(\nu_{n+3}) = \{p\} \cup \mathrm{s}(\nu_q) \quad \text{et} \quad \{p\} \cap \mathrm{s}(\nu_q) = \varnothing$$
3. pour tout $r \in \mathbb{D}_+^*(q) \cap \mathbb{P}$
$$\nu_{n+3}(r) = \nu_q(r)$$

1. Puisque p est premier (iii) permet d'affirmer que si $\mathtt{pgcd}(p, q) \neq 1$ p divise q par suite il existe $k \in \mathbb{N}$ tel qu $q = pk$ on a alors
$$x = p^{\nu_x(p)+1} k$$
   et ceci contredit la maximalité de $\nu_x(p)$.
2. — D'abord puisque tout diviseur de q est un diviseur de $n+3$

$$\{p\} \cup (\mathbb{D}_+^*(q) \cap \mathbb{P}) \subset \mathbb{D}_+^*(n+3) \cap \mathbb{P}$$

   — ensuite si $r \in \mathbb{D}_+^*(n+3) \cap \mathbb{P}$ et $r \neq p$ alors (v) permet d'affirmer que $\mathtt{pgcd}(p^{\nu_{n+3}(p)}, r) = 1$ ainsi puisque r divise $n+3 = p^{\nu_{n+3}(p)} q$ le lemme de Gauss montre que r divise q, d'où

$$\mathbb{D}_+^*(n+3) \cap \mathbb{P} \subset \{p\} \cup (\mathbb{D}_+^*(q) \cap \mathbb{P})$$

   — Enfin, puisque $\mathtt{pgcd}(p, q) = 1$ $p \notin \mathbb{D}_+^*(q)$ et

$$\{p\} \cap (\mathbb{D}_+^*(q) \cap \mathbb{P}) = \varnothing \ .$$

3. Si $r \in \mathbb{D}_+^*(q) \cap \mathbb{P}$ alors $r^{\nu_q(r)}$ divise q donc $n+3$ par suite

$$\nu_q(r) \leq \nu_{n+3}(r) \ .$$

   D'autre part $r^{\nu_{n+3}(r)}$ divise $n+3 = p^{\nu_{n+3}(p)} q$, et (v) montre que

$$\mathtt{pgcd}(p^{\nu_{n+3}(p)}, r^{\nu_{n+3}(r)}) = 1$$

   ainsi la propriété de Gauss montre que $r^{\nu_{n+3}(r)}$ divise q par suite

$$\nu_{n+3}(r) \leq \nu_q(r) \ .$$

cela permet de montrer que
$$n \in H \Rightarrow n+3 = \prod_{p \in \mathrm{s}(\nu_{n+3})} p^{\nu_{n+3}(p)}$$

En effet si $p \in \mathbb{D}_+^*(n+3) \cap \mathbb{P}$ et q est l'unique entier positif vérifiant $n+3 = qp^{\nu_{n+3}(p)}$ alors

— si $q=1$ on a $\mathbb{D}_+^*(n+3)\cap\mathbb{P}=\{p\}$ et $n+3=p^{\nu_{n+3}(p)}$ par suite $\mathrm{s}(\nu_{n+3})=\{p\}$ et

$$\prod_{p\in\mathrm{s}(\nu_{n+3})} p^{\nu_{n+3}(p)}=p^{\nu_{n+3}(p)}=n+3$$

— si $q\neq 1$ alors $q\in[2,n+2]$ et l'assertion $n\in H$ montre que

$$q=\prod_{r\in\mathrm{s}(\nu_q)} r^{\nu_q(r)}$$

puisque pour tout $r\in\mathrm{s}(\nu_q)$ on a $\nu_q(r)=\nu_{n+3}(r)$ on obtient

$$n+3=p^{\nu_{n+3}(p)}\prod_{r\in\mathrm{s}(\nu_q)} r^{\nu_{n+3}(r)}$$

d'autre part puisque $\mathrm{s}(\nu_{n+1})=\mathrm{s}(\nu_q)\cup\{p\}$ et $\{p\}\cap\mathrm{s}(\nu_q)=\varnothing$ le théorème [8.2] page 216 montre que

$$\prod_{r\in\mathrm{s}(\nu_{n+1})} r^{\nu_{n+3}(r)}=\prod_{r\in\mathrm{s}(\nu_q)\cup\{p\}} r^{\nu_{n+3}(r)}=p^{\nu_{n+3}(p)}\prod_{r\in\mathrm{s}(\nu_q)} r^{\nu_{n+3}(r)}=n+3$$

Ainsi H est héréditaire et $H=\mathbb{N}$. ■

Il y a toute une botanique sur les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

9.4.2 *Éléments inversibles de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On regarde quelques résultats sur la structure du monoïde multiplicatif de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition 9.33 *On note* $(\mathbb{Z},+,\cdot,O)$ *un ensemble d'entiers relatifs et* $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble*

$$\mathbb{N}=\mathbb{Z}_+=\{\nu\in\mathbb{Z}/\nu\geq 0\}\ .$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ *on note* π_n *le morphisme canonique de l'anneau* $(\mathbb{Z},+,.)$ *dans l'anneau* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\cdot)$. *Un élément* $x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est dit* ***inversible*** *si il existe* $y\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *tel que*

$$x\cdot y=\pi_n(1)\ .$$

L'ensemble

$$U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=\{x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}/\ \exists\ y\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}:x\cdot y=\pi_n(1)\}$$

est appelé l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Puisque $\pi_n(1)\in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ on a $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\neq\varnothing$, d'autre part d'après le lemme [9.22] page 518 pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini de cardinal n.

Définition 9.34 *On note* $(\mathbb{Z},+,\cdot,O)$ *un ensemble d'entiers relatifs et* $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble*

$$\mathbb{N}=\mathbb{Z}_+=\{\nu\in\mathbb{Z}/\nu\geq 0\}\ .$$

On appelle ***fonction d'Euler*** *l'application de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}^*$ *définie par*

$$\varphi(n)=\begin{cases}1 & si\quad n=1\\ \mathrm{Card}(U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) & si\quad n\geq 2\end{cases}$$

Dans le lemme qui suit, si $a\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n,\mathbb{Z})$ est une famille de $n+1$ entiers relatifs on munit systématiquement le produit cartésien $\prod_{k=0}^{n}\mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$ de sa structure d'anneau produit (voir lemme [9.16] page 498) et pour tout $n\in\mathbb{Z}$ π_n est le morphisme canonique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Lemme 9.25 *On note* $(\mathbb{Z}, +, \centerdot, O)$ *un ensemble d'entiers relatifs et* $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble*

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{\nu \in \mathbb{Z}/\nu \geq 0\} \ .$$

Enfin n *sera un entier supérieur à deux et on note* π_n *le morphisme canonique de l'anneau* $(\mathbb{Z}, +, .)$ *dans l'anneau* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \centerdot)$*.*

(i) Si $a \in \mathbb{N}_n$ *pour que* $\pi_n(a)$ *soit inversible il faut et il suffit que* $\mathtt{pgcd}(a, n) = 1$

(ii) $(U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \centerdot)$ *est un groupe d'élément neutre* $\pi_n(1)$*.*

(iii) ***lemme des restes chinois*** *([6]) Si* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *vérifient* $\mathtt{pgcd}(m, n) = 1$ *alors l'application* f *de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *définie par*

$$f(x) = (\pi_n(x), \pi_m(x))$$

est un morphisme surjectif. En d'autres termes, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *il existe* $x \in \mathbb{Z}$ *tel que*

$$\pi_n(x) = \pi_n(a) \quad \text{et} \quad \pi_m(x) = \pi_m(b) \ .$$

De plus

1. $\mathrm{Ker}(f) = nm\mathbb{Z}$
2. *Il existe un morphisme bijectif* f^* *de l'anneau* $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ *dans l'anneau* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *vérifiant*

$$f = f^* \circ \pi_{nm}$$

3. $f^*(U(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})) = U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ *et*

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m) \ . \tag{9.30}$$

(iv) On suppose p *premier et* $p \geq 2$*, alors :*

$$\mathrm{Card}(U(\mathbb{Z}/p^{r+1}\mathbb{Z})) = p\mathrm{Card}(U(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})) \ . \tag{9.31}$$

et

$$\varphi(p^r) = (p-1)p^{r-1} \tag{9.32}$$

(v) Si $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z}^*)$ *est une famille de* $n+1$ *entiers relatifs non nuls qui vérifient*

$$k \neq p \Rightarrow \mathtt{pgcd}(a_k, a_p) = 1$$

alors

$$\mathtt{pgcd}(a_n, \prod_{k=0}^{n-1} a_k) = 1 \ .$$

(vi) Si $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z}^*)$ *est une famille de* $n+1$ *entiers relatifs non nuls qui vérifient*

$$k \neq p \Rightarrow \mathtt{pgcd}(a_k, a_p) = 1$$

alors l'application f *de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$ *définie par*

$$f(x)(k) = \pi_{a_k}(x)$$

est un morphisme surjectif. En d'autres termes, pour tout $c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$ *il existe* $x \in \mathbb{Z}$ *tel que*

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n \ \pi_{a_k}(x) = \pi_{a_k}(c_k).$$

6. On ne sait pas d'où vient le nom

(vii) Si $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z}^*)$ *est une famille de* $n+1$ *entiers relatifs non nuls qui vérifient*

$$k \neq p \Rightarrow \mathtt{pgcd}(a_k, a_p) = 1$$

alors

$$\varphi(\prod_{k=0}^{n} a_k) = \prod_{k=0}^{n} \varphi(a_k) \ . \tag{9.33}$$

Preuve

(i)

1. On montre $\pi_n(a)$ inversible $\Rightarrow \mathtt{pgcd}(a,n) = 1$

   Si $\pi_n(a)$ est inversible alors il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi_n(ab) = \pi_n(1)$, π_n étant un morphisme d'anneaux on obtient $\pi_n(ab-1) = \pi_n(0)$ par suite $ab-1 \in n\mathbb{Z}$ et il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $ab-1 = nq$ par suite $ab + n(-q) = 1$ et le lemme [9.24] page 525 montre que $\mathtt{pgcd}(a,n) = 1$
2. On montre $\mathtt{pgcd}(a,n) = 1 \Rightarrow \pi_n(a)$ inversible.

   D'après le lemme [9.24] si $\mathtt{pgcd}(a,n) = 1$ il existe $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que

   $$au + nv = 1$$

   π_n étant un morphisme d'anneaux on obtient $\pi_n(a) \centerdot \pi_n(u) = \pi_n(1)$.

(ii)

— Il est clair que $\pi_n(1) \in U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$

— Si $(x,y) \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que

$$x \centerdot u = \pi_n(1) \quad \text{et} \quad y \centerdot v = \pi_n(1)$$

ainsi

$$(x \centerdot y) \centerdot (u \centerdot v) = (x \centerdot u) \centerdot (y \centerdot v) = \pi_n(1) \centerdot \pi_n(1) = \pi_n(1)$$

— Enfin par définition tout élément de $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ admet un inverse.

(iii)

Puisque π_n et π_m sont des morphisme d'anneaux, la définition de la structure produit montre que f est un morphisme.
Soit $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, puisque $\mathtt{pgcd}(m,n) = 1$ il existe $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que

$$nu + mv = 1$$

si $x = nub + mva$ alors

$$x - a = nub + (mv-1)a = nu(b-a)$$

et

$$x - b = (nu-1)b + mva = mv(a-b)$$

Ainsi

$$x - a \in n\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x - b \in m\mathbb{Z}$$

ce qui montre que $\pi_n(x) = \pi_n(a)$ et $\pi_m(x) = \pi_m(b)$.

1. On montre $\mathrm{Ker}(f) = nm\mathbb{Z}$

   Il est clair que $nm\mathbb{Z} \subset \mathrm{Ker}(f)$, on montre l'inclusion inverse. Si $x \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ alors il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que

   $$x = np = mq$$

   ainsi, m divise np et puisque $\mathtt{pgcd}(m,n) = 1$ le lemme de gauss (voir lemme [9.24] page 525) montre que m divise p. Mais si $k \in \mathbb{Z}$ vérifie $p = mk$ on obtient

   $$x = np = nmk$$

   ce qui montre que $x \in nm\mathbb{Z}$.

2. Existence de f_*

   Le lemme [9.13] page 485 permet d'affirmer qu'il existe un isomorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}(f)$ dans l'anneau $\mathrm{im}(f) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ vérifiant

$$f = f_* \circ \pi_{nm}$$

   et on vient de voir que $\mathrm{Ker}(f) = nm\mathbb{Z}$.

3. $f_*(U(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})) = U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$

   Si $\pi_{nm}(a)$ est inversible alors il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\pi_{nm}(a) \centerdot \pi_{nm}(b) = \pi_{nm}(ab) = \pi_{nm}(1)$$

   par suite

$$(\pi_n(ab), \pi_m(ab)) = f(ab) = f_*(\pi_{nm}(ab)) = f_*(\pi_{nm}(1)) = f(1) = (\pi_n(1), \pi_m(1))$$

   ce qui montre que $\pi_n(b)$ est l'inverse de $\pi_n(a)$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\pi_m(b)$ est l'inverse de $\pi_m(a)$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ainsi

$$f_*(U(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})) \subset U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \ .$$

   On montre inversement que

$$f_*^{-1}(U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) \subset U(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}) \ .$$

   Si $(\pi_n(a), \pi_m(b)) \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ il existe $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que

$$\pi_n(au) = \pi_n(1) \quad \text{et} \quad \pi_m(bv) = \pi_m(1) \ ,$$

   — puisque f_*^{-1} est multiplicative on a

$$f_*^{-1}[(\pi_a, \pi_m(b)) \times (\pi_n(u), \pi_m(v))] = f_*^{-1}(\pi_n(a), \pi_m(b)) \centerdot f_*^{-1}(\pi_n(u), \pi_m(v))$$

   — par définition de la structure produit

$$f_*^{-1}[(\pi_a, \pi_m(b)) \times (\pi_n(u), \pi_m(v))] = f_*^{-1}(\pi_n(au), \pi_m(bv)) = f_*^{-1}(\pi_n(1), \pi_m(1))$$

   ainsi on obtient

$$f_*^{-1}(\pi_n(a), \pi_m(b)) \centerdot f_*^{-1}(\pi_n(u), \pi_m(v)) = f_*^{-1}(\pi_n(1), \pi_m(1)) = f_*^{-1} \circ f(1) = \pi_{nm}(1) \ .$$

   ce qui montre que $f_*^{-1}(\pi_n(u), \pi_m(v))$ est l'inverse de $f_*^{-1}(\pi_n(a), \pi_m(b))$ dans $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$. f_* étant bijective, le lemme [6.2] page 136 permet d'affirmer

$$\mathrm{Card}(U(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})) = \mathrm{Card}(U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) = \mathrm{Card}(U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))\mathrm{Card}(U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) \ .$$

   C'est à dire

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m) \ .$$

(iv)

Pour $r \geq 1$ on note $\pi_r : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ le morphisme canonique et $G(r) = U(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$. On considère l'application f de $\mathbb{N}_{p-1}$ dans $\mathbb{Z}/p^{r+1}\mathbb{Z}$ définie par

$$f(\rho) = \pi_{r+1}(1 + \rho p^r)$$

. On vérifie :

a $\mathrm{im}(f) \subset G(r+1)$

b f est injective

c

$$\mathrm{im}(f) = \{x \in G(r+1)/\exists\ a \in \mathbb{Z} : x = \pi_{r+1}(a), \pi_r(a) = 1\}$$

d $\mathrm{im}(f)$ est un sous-groupe du groupe $(G(r+1), \centerdot)$

e il existe une bijection du groupe quotient $G(r+1)/\mathrm{im}(f)$ dans $G(r)$

f

$$\mathrm{Card}(G(r+1)) = \mathrm{Card}[G(r+1)/\mathrm{im}(f)]\mathrm{Card}(\mathrm{im}(f)) = p\mathrm{Card}(G(r))$$

Preuve de a

On montre que pour tout $(r, \rho, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}_{p-1} \times \mathbb{N}^*$ on a

$$\mathtt{pgcd}(1 + \rho p^r, p^q) = 1\ .$$

On pose $d = \mathtt{pgcd}(1 + \rho p^r, p^q)$

— puisque d divise p^q il existe d'après le lemme [9.24] page 525 un entier $k \in \mathbb{N}_q$ tel que $d = p^k$, ,il suffit donc de montrer que le seul entier positif de la forme p^k qui divise $1 + \rho p^r$ est 1.

— S'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $1+\rho p^r = ap^k$ alors 1 appartient à l'idéal $p^r\mathbb{Z}+p^k\mathbb{Z}$ par suite $\mathtt{pgcd}(p^k, p^r) = 1$ or si $k \leq r$ on a $\mathtt{pgcd}(p^k, p^r) = p^k$ et si $k \geq r + 1$ alors $\mathtt{pgcd}(p^r, p^k) = p^r$. puisque $p^r \neq 1$ on obtient $\mathtt{pgcd}(p^r, p^k) = p^k = 1$ par suite $k = 0$ et $d = p^k = 1$

En particulier, pour tout $\rho \in \mathbb{N}_{p-1}$ on a $\mathtt{pgcd}(1 + \rho p^r, p^{r+1}) = 1$ et (i) montre alors que pour tout $\rho \in \mathbb{N}_{p-1}$ $\pi_{r+1}(1 + \rho p^r)$ est inversible dans $\mathbb{Z}/p^{r+1}\mathbb{Z}$, par suite

$$f(\rho) \in G(r+1)$$

Preuve de b

Si $\pi_{r+1}(1 + \rho p^r) = \pi_{r+1}(1 + \mu p^r)$ alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que

$$(1 + \rho p^r) - (1 + \mu p^r) = ap^{r+1}$$

par suite

$$p^r(\rho - \nu - ap) = 0$$

$\mathbb{Z}$ étant intègre on obtient $\rho - \mu = pa$, mais cela entraîne $\rho = \mu$ puisque si $a \geq 1$ alors $\rho - \mu \geq p$ or $\rho - \mu \leq \rho \leq p - 1$ et si $a \leq -1$ alors $\rho - \mu \leq -p$ or $\rho - \mu \geq -\mu > -p$ ainsi $a = 0$ et $\rho = \mu$.

Preuve de c

Puisque $\pi_r(1 + \rho p^r) = \pi_r(1)$ on a

$$\mathrm{im}(f) \subset \{x \in G(r+1)/\exists\ a \in \mathbb{Z} : x = \pi_{r+1}(a), \pi_r(a) = 1\}$$

inversement, si $x = \pi_{r+1}(a)$ et $\pi_r(a) = 1$ alors il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $a - 1 = p^r b$. le théorème [8.8] page 281 montre que l'application θ_p de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{p-1}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$\theta_p(q, \rho) = pq + \rho$$

est bijective , mais si $(q, \rho) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{p-1}$ vérifie $b = pq + \rho$ on obtient

$$a - 1 = \rho p^r + p^{r+1}q$$

par suite $x = \pi_{r+1}(a) = \pi_{r+1}(1 + \rho p^r) = f(\rho)$ et

$$\{x \in G(r+1)/\exists\ a \in \mathbb{Z} : x = \pi_{r+1}(a), \pi_r(a) = 1\} \subset \mathrm{im}(f)\ .$$

Preuve de d

Il est clair que $\pi_{r+1}(1) \in \mathrm{im}(f)$

1. On montre $(x, y) \in \mathrm{im}(f) \times \mathrm{im}(f) \Rightarrow x \centerdot y \in \mathrm{im}(f)$

   En effet si $(x, y) \in \mathrm{im}(f) \times \mathrm{im}(f)$ il existe - d'après **c** - un couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $x = \pi_{r+1}(a)$, $y = \pi_{r+1}(b)$ et $\pi_r(a) = \pi_r(b) = \pi_r(1)$. Ainsi $x \centerdot y = \pi_{r+1}(ab)$ et $\pi_r(ab) = \pi_r(a)\pi_r(b) = \pi_r(1)$, et **c** montre alors que $x \centerdot y \in \mathrm{im}(f)$

2. On montre $x \in \mathrm{im}(f) \Rightarrow x^{-1} \in \mathrm{im}(f)$

   En effet si $x = \pi_{r+1}(1 + \rho p^r)$ avec $\rho \neq 0$ l'égalité

   $$(1 + \rho p^r)(1 + (p - \rho)p^r) = 1 + p^{r+1} + \rho(p - \rho)p^{2r}$$

   montre, puisque $2r \geq r + 1$

   $$f(\rho)f(p - \rho) = \pi_{r+1}(1 + p^{r+1} + \rho(p - \rho)p^{2r}) = \pi_{r+1}(1)$$

   ainsi, si $\rho \neq 0$ $f(p - \rho)$ est l'inverse de $f(\rho)$ (et si $\rho = 0$ on a $f(0) = \pi_{r+1}(1)$).

Preuve de e

Rappelons que $G(r + 1)/\mathrm{im}(f)$ est l'ensemble quotient de $G(r + 1)$ par la relation

$$R = \{(x, y) \in G(r + 1) \times G(r + 1)/xy^{-1} \in \mathrm{im}(f)\}$$

il s'agit donc de montrer qu'à tout $x \in G(r)$ correspond une et une seule classe d'équivalence pour cette relation. Avant de le montrer on regarde un peu ce qui se passe. Si $(\pi_{r+1}(a), \pi_{r+1}(b)) \in R$ alors il existe $\rho \in \mathbb{N}_{p-1}$ tel que $\pi_{r+1}(a) = f(\rho)\pi_{r+1}(b) = \pi_{r+1}((1 + \rho p^r)b)$ par suite

$$a - b - \rho b p^r \in p^{r+1}\mathbb{Z}$$

et $\pi_r(a) = \pi_r(b)$. Inversement, $(\pi_r(a), \pi_r(b)) \in G(r) \times G(r)$ et $u \in \mathbb{Z}$ vérifie $\pi_r(u) = \pi_r(a)(\pi_r(b))^{-1}$ alors $\pi_r(a) = \pi_r(ub) = \pi_r(u) \centerdot \pi_r(b)$ en particulier si $\pi_r(a) = \pi_r(b)$ il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi_r(u) = \pi_r(1)$ et $\pi_r(a) = \pi_r(ub)$. Puisque $\pi_r(u) = 1$ **c** permet d'affirmer qu'il existe $\rho \in \mathbb{N}_{p-1}$ tel que $\pi_{r+1}(1 + \rho p^r) = \pi_{r+1}(u)$ par suite $\pi_{r+1}(ub) = f(\rho) \centerdot \pi_{r+1}(b)$. Ainsi, si $(\pi_{r+1}(a), \pi_{r+1}(b)) \in G(r + 1) \times G(r + 1)$ et $u \in \mathbb{Z}$ vérifie $\pi_{r+1}(u) = \pi_{r+1}(a)(\pi_{r+1}(b))^{-1}$ on obtient

$$(\pi_{r+1}(a), \pi_{r+1}(b)) \in R \Leftrightarrow \pi_r(u) = 1 \Leftrightarrow \pi_r(a) = \pi_r(b) \ .$$

Pour prouver ceci il suffit d'appliquer le lemme [8.34] page 331.
On note λ la relation de $G(r + 1)$ dans $G(r)$ définie par

$$\lambda = \{(x, y) \in G(r + 1) \times G(r)/\exists\ a \in \mathbb{Z} : x = \pi_{r+1}(a), y = \pi_r(a)\}$$

1. On montre que λ est une application.

   (a) D'abord on montre que $\mathrm{dom}(\lambda) = G(r + 1)$. En effet, si $x \in G(r + 1)$ il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $x = \pi_{r+1}(a)$ et $ab - 1 \in p^{r+1}\mathbb{Z}$, ainsi $ab - 1 \in p^r\mathbb{Z}$ et $\pi_r(a)$ est inversible dans $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$, par suite $(x, \pi_r(a)) \in \lambda$.

   (b) Ensuite on montre que λ est une fonction : $[(x, y) \in \lambda \quad \text{et} \quad (x, y') \in \lambda] \Rightarrow y = y'$.
   Si $(x, y) \in \lambda$ et $(x, y') \in \lambda$ alors il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que

   $$x = \pi_{r+1}(a) = \pi_{r+1}(b) \quad \text{et} \quad y = \pi_r(a) \quad y' = \pi_r(b)$$

   puisque $a - b \in p^{r+1}\mathbb{Z}$ on a $a - b \in p^r\mathbb{Z}$ et

   $$y = \pi_r(a) = \pi_r(b) = y' \ .$$

2. <u>On montre que λ est un morphisme de $(G(r+1), \centerdot)$ dans $(G(r), \centerdot)$.</u>

   Si $(x, y) \in G(r+1) \times G(r+1)$ alors il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que

$$x = \pi_{r+1}(a) \quad y = \pi_{r+1}(b)$$

   ainsi

$$\lambda(xy) = \lambda(\pi_{r+1}(a) \centerdot \pi_{r+1}(b)) = \lambda(\pi_{r+1}(ab)) = \pi_r(ab) = \pi_r(a) \centerdot \pi_r(b) = \lambda(x) \centerdot \lambda(y)$$

3. <u>On montre $\operatorname{im}(\lambda) = G(r)$.</u>

   Si $x \in G(r)$ alors d'après (i) il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \pi_r(a)$ et $\texttt{pgcd}(a, p^r) = 1$, cela entraîne $\texttt{pgcd}(a, p^{r+1}) = 1$. En effet, si d divise a et p^{r+1} alors d'après le lemme [9.24] page 525 il existe $k \in \mathbb{N}_{r+1}$ tel que $d = p^k$ on a $k = 0$ ou $k = r+1$ puisque si $0 < k < r+1$ alors p^k divise a et p^r et ceci contredit l'égalité $\texttt{pgcd}(a, p^r) = 1$. Enfin, si $k = r+1$ alors p^{r+1} divise a par suite $\texttt{pgcd}(a, p^r) = p^r \neq 1$. Par suite $k = 0$ et $d = p^k = 1$. D'après (i) on a $\texttt{pgcd}(a, p^{r+1}) = 1 \Rightarrow \pi_{r+1}(a) \in G(r+1)$ ainsi

$$x = \pi_r(a) = \lambda(\pi_{r+1}(a))$$

4. <u>On montre $\operatorname{Ker}(\lambda) = \operatorname{im}(f)$.</u> On rappelle que

$$\operatorname{Ker}(f) = \{x \in G(r+1) / \lambda(x) = \pi_r(1)\}$$

   (a) Si $x \in \operatorname{im}(f)$ alors il existe $\rho \in \mathbb{N}_{p-1}$ tel que $x = \pi_{r+1}(1 + \rho p^r)$ par suite

$$\lambda(x) = \pi_r(1 + \rho p^r) = \pi_r(1)$$

   (b) Si $x \in \operatorname{Ker}(f)$ et $x = \pi_{r+1}(a)$ alors $\pi_r(a) = \lambda(\pi_{r+1}(a)) = \lambda(x) = \pi_r(1)$ ainsi **c** montre que $x \in \operatorname{im}(f)$.

Ces points et le lemme [8.34] page 331 entraîne que $G(r+1)/\operatorname{im}(f)$ est isomorphe à $G(r)$. En effet d'après ce lemme il existe un morphisme injectif λ^* de $G(r+1)/\operatorname{Ker}(\lambda)$ dans $G(r)$ qui vérifie $\operatorname{im}(\lambda^*) = \operatorname{im}(\lambda)$. Les égalités

$$\operatorname{im}(\lambda) = G(r) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(\lambda) = \operatorname{im}(f)$$

montre que λ^* est un isomorphisme de $G(r+1)/\operatorname{im}(f)$ dans $G(r)$.

Preuve de f

D'après le théorème [8.10] page 355 on a

$$\operatorname{Card}(G(r+1)) = \operatorname{Card}[G(r+1)/\operatorname{im}(f)]\operatorname{Card}(\operatorname{im}(f))$$

or

— D'après **e** on a $\operatorname{Card}[G(r+1)/\operatorname{im}(f)] = \operatorname{Card}(G(r))$

— D'après **b** on a $\operatorname{Card}(\operatorname{im}(f)) = p$

Ceci montre l'égalité (9.31) page 532. Il reste à voir l'égalité (9.32) page 532.

On pose

$$H = \{r \in \mathbb{N} / \varphi(p^{r+1}) = (p-1)p^r\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. D'abord on montre que $0 \in H$. En effet, d'après le lemme [9.23] page 522 l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, par suite $G(p) = \{\pi_1(a) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} / \pi_1(a) \neq \pi_1(0)\}$, et d'après le lemme [9.22] page 518 on a $\operatorname{Card}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$, puisque tout les éléments non nuls sont inversibles on obtient $\varphi(p) = p - 1$
2. Ensuite on montre $r \in H \Rightarrow r+1 \in H$. En effet si $r \in H$ alors $\varphi(p^{r+1}) = (p-1)p^r$, ainsi l'égalité (9.31) page 532 montre que

$$\varphi(p^{r+2}) = p\varphi(p^{r+1}) = p(p-1)p^r = (p-1)p^{r+1}$$

(v)

On pose

$$U = \{k \in \mathbb{N}_{n-1} / \mathtt{pgcd}(a_n, \prod_{j=0}^{k} a_j) = 1\}$$

En suivant le lemme [5.10] page 111 on montre que $U = \mathbb{N}_{n-1}$ en vérifiant $0 \in U$ et

$$k < n-1 \quad \text{et} \quad k \in U \Rightarrow k+1 \in U$$

— L'assertion $0 \in H$ provient de l'hypothèse $\mathtt{pgcd}(a_n, a_0) = 1$

— Si $k \in U$ et $k+1 \leq n-1$ on montre que tout diviseur commun à a_n et $\prod_{j=0}^{k+1} a_j$ est un diviseur commun à a_n et $\prod_{j=0}^{k} a_j$. En effet, si d divise a_n il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $a_n = d\alpha$, puisque $\mathtt{pgcd}(a_n, a_{k+1}) = 1$ il existe $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que

$$a_n u + a_{k+1} v = 1$$

ainsi

$$d(\alpha u) + a_{k+1} v = 1$$

par suite $\mathtt{pgcd}(d, a_{k+1}) = 1$ le lemme de Gauss montre alors que si d divise $\prod_{j=0}^{k+1} a_j = a_{k+1} \prod_{j=0}^{k} a_j$ alors d divise $\prod_{j=0}^{k} a_j$. Ainsi tout diviseur commun à a_n et $\prod_{j=0}^{k+1} a_j$ est un diviseur commun à a_n et $\prod_{j=0}^{k} a_j$ et l'assertion $k \in U$ entraîne qu'un tel entier est égal à 1 ou à -1.

ainsi $U = \mathbb{N}_{n-1}$ et

$$\mathtt{pgcd}(a_n, \prod_{j=0}^{n-1} a_j) = 1 \ .$$

(vi)

Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ l'application π_{a_k} est un morphisme d'anneaux, la définition de la structure produit montre que f est un morphisme. On montre que f est surjectif . Pour $k \in \mathbb{N}_n$ on note f_k l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\prod_{j=0}^{k} \mathbb{Z}/a_j\mathbb{Z}$ définie par

$$f_k(x)(j) = \pi_{a_j}(x)$$

et on note

$$U = \left\{ k \in \mathbb{N}_n / \mathrm{im}(f_k) = \prod_{j=0}^{k} \mathbb{Z}/a_j\mathbb{Z} \right\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$ en vérifiant

1. $0 \in U$
2. $[k \in U \quad \text{et} \quad k < n] \Rightarrow k+1 \in U$.

1. L'assertion $0 \in U$ résulte de la surjectivité de π_{a_0} de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/a_0\mathbb{Z}$.

2. Si $k \in U$ et $c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{k+1}, \mathbb{Z})$ alors il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que

$$j \leq k \Rightarrow \pi_{a_j}(y) = \pi_{a_j}(c_j)$$

Posons $\rho_k = \prod_{j=0}^{k} a_j$, alors d'après (v) on a

$$\mathtt{pgcd}(a_{k+1}, \rho_k) = 1$$

ainsi (iii) permet d'affirmer qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\pi_{a_k}(x) = c_{k+1} \quad \text{et} \quad \pi_{\rho_k}(x) = \pi_{\rho_k}(y)$$

Cela montre que pour tout $j \in \mathbb{N}_{k+1}$ on a $\pi_{a_j}(x) = \pi_{a_j}(c_j)$ puisque pour tout $j \in \mathbb{N}_k$ l'inclusion $\rho_k\mathbb{Z} \subset a_j\mathbb{Z}$ entraîne

$$x - y \in \rho_k\mathbb{Z} \Rightarrow x - y \in a_j\mathbb{Z} \Rightarrow \pi_{a_j}(x) = \pi_{a_j}(y) = \pi_{a_j}(c_j) \ .$$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f_n) = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z} \ .$$

(vii)

On note $\rho_k = \prod_{j=0}^{k} a_j$ et

$$V = \{k \in \mathbb{N}_n / \varphi(\rho_k) = \prod_{j=0}^{k} \varphi(a_j)\}$$

Il est clair que $0 \in V$ on montre

$$k \in V \quad \text{et} \quad k < n \Rightarrow k + 1 \in V \ .$$

D'après (v) on a $\mathtt{pgcd}(a_{k+1}, \rho_k) = 1$ ainsi l'égalité (9.30) page 532 montre que

$$\varphi(\rho_{k+1}) = \varphi(a_{k+1}\rho_k) = \varphi(a_{k+1})\varphi(\rho_k) = \varphi(a_{k+1})\prod_{j=0}^{k} \varphi(a_j) = \prod_{j=0}^{k+1} \varphi(a_j)$$

Par suite $V = \mathbb{N}_n$, ce qui montre (9.33) page 533 ■

On passe à l'étude des anneaux commutatifs.

9.5 *Anneaux commutatifs*

9.5.1 *Introduction*

Les catégories des anneaux et semi-anneaux commutatifs sont définies par :

Définition 9.35 *La catégorie* **sanc** *des semi-anneaux commutatifs est la catégorie définie par*

1. *Les objets de* **sanc** *sont les semi-anneaux commutatifs* $(A, +, \times)$ *au sens de la définition* [9.1] *page* 418*,*
2. *Les morphismes de l'objet* $(A_0, +_0, \times_0)$ *dans l'objet* $(A_1, +_1, \times_1)$ *sont les morphismes de semi-anneaux définis par* [9.10] *page* 454

3. La loi de composition est la composition des applications.

La catégorie **Anc** des anneaux commutatifs est la sous-catégorie de **sanc** définie par :

Définition 9.36 *La catégorie* **Anc** *des anneaux commutatifs est la catégorie définie par*

1. *Les objets de* **Anc** *sont les anneaux commutatifs* $(A, +, \times)$ *au sens de la définition* [9.1] *page* 418*,*
2. *Les morphismes de l'objet* $(A_0, +_0, \times_0)$ *dans l'objet* $(A_1, +_1, \times_1)$ *sont les morphismes d'anneaux définis par* [9.9] *page* 454
3. *La loi de composition est la composition des applications.*

On donne la définition d'une famille de semi-anneaux commutatifs

Définition 9.37 *On note* I *et* $\mathbb{U}$ *des ensembles, une* ***famille de semi-anneaux commutatifs*** *indexée par* I *à valeurs dans* $\mathfrak{P}(\mathbb{U})$ *est un triplet* $(M, \circledast, \odot)$ *où*

1. $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I, \mathfrak{P}(\mathbb{U}))$ *est une application de* I *dans* $\mathfrak{P}(\mathbb{U})$*,*
2. $\oplus \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A_i \times A_i, A_i)$
3. $\odot \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(A_i \times A_i, A_i)$
4. *pour tout* $i \in I$ *le triplet* $(A_i, \oplus_i, \odot_i)$ *est un semi-anneau commutatif.*

Le lemme [9.16] page 498 montre que toute famille d'anneaux commutatifs possède un produit au sens suivant :

Définition 9.38 *On appelle* ***produit*** *de la famille* $(A, \oplus, \odot)$ *dans la catégorie* **sanc** *un couple* $((\Pi, +, \times), p)$ *où* $(\Pi, +, \times)$ *est un semi-anneau commutatif et* $p \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(\Pi, A_i)$ *vérifie la propriété suivante : pour tout semi-anneau commutatif* $(Y, +_y, \times_y)$ *et pour tout* $g \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, A_i)$ *il existe un unique morphisme de semi-anneaux* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, \Pi)$ *qui vérifie*

$$\forall i \in I \ g_i = p_i \circ h.$$

En d'autre termes, pour tout semi-anneau $(Y, +_y, \times_y)$ *l'application* $\varphi : h \mapsto \varphi(h)$ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, \Pi)$ *dans* $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(Y, A_i)$ *définie par*

$$\varphi(h)(i) = p_i \circ h$$

est bijective.

Enfin le lemme [9.17] page 501 montre que toute famille d'anneaux commutatifs possède une limite projective. On passe à la construction des anneaux commutatifs libre au-dessus d'un ensemble.

9.5.2 *Anneau commutatif libre au-dessus d'un ensemble*

On rappelle la définition :

Définition 9.39 *On note* X *un ensemble, on appelle :*

1. ***semi-anneau commutatif libre*** *au-dessus de* X *un couple* $((A, +, *), i)$ *où*
   (a) $(A, +, *)$ *est un semi-anneau commutatif*
   (b) i *est une application de* X *dans* A *qui vérifie la propriété suivante : pour tout semi-anneau commutatif* $(B, +, \centerdot)$ *et toute application* f *de* X *dans* B *il existe un unique morphisme de semi-anneaux* $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A, B)$ *vérifiant*

$$f = \hat{f} \circ i.$$

2. ***anneau commutatif libre*** *au-dessus de X un couple $((A,+,*),i)$ où*

(a) $(A,+,*)$ *est un anneau commutatif*

(b) *i est une application de X dans A qui vérifie la propriété suivante : pour tout anneau commutatif $(B,+,\ \textbf{.}\ )$ et toute application f de X dans B il existe un unique morphisme d'anneaux $\hat{f} \in$* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{anc}}(A,B)$ *vérifiant*

$$f = \hat{f} \circ i.$$

En d'autre termes, $((A,+,*),i)$ est un semi-anneau commutatif libre au-dessus de X si pour tout semi-anneau commutatif $(B,+,\textbf{.}\ )$ l'application φ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A,,B)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,B)$ *définie par*

$$\varphi(\hat{f}) = \hat{f} \circ i$$

est bijective.

On a construit (voir théorème [9.4] page 510) les semi-anneaux libre au-dessus d'un ensemble X comme semi-anneau de convolution au-dessus du semi-monoïde libre. Pour recopier bêtement ce résultat il suffit de construire un semi-monoïde commutatif libre et de s'apercevoir que les semi-anneaux de convolution au-dessus des semi-monoïdes commutatifs sont commutatifs.

Lemme 9.26 ***Monoïde commutatif libre***

(i) Pour tout semi-monoïde $(M,*)$ il existe un couple $((\kappa(M),\textbf{.}),p)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(\kappa(M),\textbf{.})$ *est un semi-monoïde commutatif et p est une application multiplicative de $(M,*)$ dans $(\kappa(M),\textbf{.})$: $p \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{smo}}(M,\kappa(M))$*

2. ***(Propriété universelle)***
Pour tout semi-monoïde commutatif $(N,.)$ *et toute application multiplicative $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{smo}}(M,N)$ il existe une unique application multiplicative $f_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{smo}}(\kappa(M),N)$ vérifiant*

$$f = f_* \circ p$$

3. Si M est un monoïde d'élément neutre e alors $\kappa(M)$ est un monoïde d'élément neutre $p(e)$ et

(a) p est un morphisme de $(M,*)$ dans $(\kappa(M),\textbf{.})$: $p \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M,\kappa(M))$

(b) ***(Propriété universelle)***
Pour tout monoïde commutatif $(H,.)$ *et tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M,H)$ il existe un unique morphisme $f_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(\kappa(M),H)$ vérifiant*

$$f = f_* \circ p$$

(ii) Si X est un ensemble il existe un semi-monoïde commutatif libre au-dessus de X

(iii) Si X est un ensemble il existe un monoïde commutatif libre au-dessus de X

Preuve

(i)

On note multiplicativement la loi $*$. Si

$$A = \{(a,b) \in M \times M / \exists\ (x,y) \in M \times M : a = xy\ ,\ b = yx\}$$

on note $\varrho_*(A)$ la relation d'équivalence compatible avec la loi $*$ engendrée par A (voir lemme [8.14] page 238) $p : M \mapsto M/\varrho_*(A)$ l'application canonique et $\textbf{.}$ la loi sur $M/\varrho_*(A)$ qui munit $M/\varrho_*(A)$ d'une structure de semi-monoïde pour laquelle p est un morphisme (voir théorème [8.4] page 238). On montre que le semi-monoïde

$$\kappa(M) = M/\varrho_*(A)$$

vérifie les propriétés *1, 2* et *3*

1. <u>On montre que $\kappa(M)$ est commutatif.</u>

   Il s'agit de montrer que pour tout $(x, y) \in M \times M$ on a $p(x) \centerdot p(y) = p(y) \centerdot p(x)$ or :
   — si $(x, y) \in M \times M$ alors $(xy, yx) \in A$ par suite $(xy, yx) \in \varrho_*(A)$ et

   $$p(xy) = p(yx)$$

   — p étant un morphisme de semi-monoïde on obtient

   $$p(x) \centerdot p(y) = p(xy) = p(yx) = p(y) \centerdot p(x) \ .$$

2. <u>Propriété universelle.</u>

   Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{smo}}(M, N)$ le lemme [8.14] page 238 montre qu'il existe un morphisme f_* du semi-monoïde $\kappa(M)$ dans le semi-monoïde N qui vérifie

   $$f = f_* \circ p$$

   si et seulement si

   $$A \subset \{(a, b) \in M \times M / f(a) = f(b)\} \ .$$

   Or, si $(a, b) \in A$ il existe $(x, y) \in M \times M$ tel que $a = xy$ et $b = yx$, N étant commutatif et f étant multiplicative on obtient

   $$f(a) = f(xy) = f(x).f(y) = f(y).f(x) = f(yx) = f(b) \ .$$

   l'unicité de f_* provient de la surjectivité de p.

3. <u>Le cas M monoïde</u>.

   Les seules propriétés supplémentaires à vérifier concernent celles relatives aux éléments neutres . Si M est un monoïde d'élément neutre e alors pour tout $x \in M$

   $$p(x) \centerdot p(e) = p(xe) = p(x)$$

   en particulier, p est un morphisme. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M, H)$ et $f_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{smo}}(M, H)$ est le morphisme de semi-monoïdes défini en *2* alors, si ε est l'élément neutre de H, puisque $f(e) = \varepsilon$, on obtient

   $$f_*(p(e)) = f(e) = \varepsilon$$

   ce qui montre que $f_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M, H)$

(ii)

Il s'agit de montrer que pour tout ensemble X il existe un couple $((M_{sc}(X), *), \lambda)$ où
— $(M_{sc}(X), *)$ est un semi-monoïde commutatif
— $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, M_{sc}(X))$ vérifie la propriété suivante : pour tout semi-monoïde commutatif N et pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, N)$ il existe un unique morphisme $f_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{smo}}(M_{sc}(X), N)$ tel que

$$f = f_* \circ \lambda$$

Le lemme [8.18] page 248 établit l'existence d'un semi-monoïde libre $((M(X), \perp), i_X)$ au-dessus de X, on montre que le couple $[(\kappa(M(X)), *), p \circ i_X]$ est un semi-monoïde commutatif libre au-dessus de X.

1. Existence de f_*

Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, N)$ par définition de $((M(X), \perp), i_X)$ il existe une application multiplicative $\hat{f}$ de $(M(X), \perp)$ dans N telle que

$$f = \hat{f} \circ i_X$$

$\hat{f}$ étant multiplicative et N étant commutatif, la propriété universelle de $[(\kappa(M(X)), *), p]$ montre qu'il existe $f_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{smo}}(\kappa(M(X)), N)$ telle que

$$\hat{f} = f_* \circ p$$

par suite

$$f = \hat{f} \circ i_X = f_* \circ (p \circ i_X)$$

2. Unicité de f_*

Si u et v sont des morphismes de semi-monoïdes vérifiant

$$f = u \circ p \circ i_X = v \circ p \circ i_X$$

alors $h = u \circ p$ et $g = v \circ p$ sont des morphismes vérifiant

$$h \circ i_X = g \circ i_X$$

le lemme [8.18] page 248 montre alors que $h = g$, par suite $u \circ p = v \circ p$ et la surjectivité de p montre que $u = v$.

(iii)

Il suffit de remplacer semi-monoïde par monoïde.
Il s'agit de montrer que pour tout ensemble X il existe un couple $((M_c(X), *), \lambda)$ où

- $(M_c(X), *)$ est un monoïde commutatif
- $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, M_c(X))$ vérifie la propriété suivante : pour tout monoïde commutatif N et pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, N)$ il existe un unique morphisme $f_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{mon}}(M_c(X), N)$ tel que

$$f = f_* \circ \lambda$$

Le lemme [8.19] page 253 établit l'existence d'un monoïde libre $((M_e(X), \circledast), i_X)$ au-dessus de X, on montre que le couple $[(\kappa(M_e(X)), *), p \circ i_X]$ est un monoïde commutatif libre au-dessus de X.

1. Existence de f_*

Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, N)$ par définition de $((M_e(X), \circledast), i_X)$ il existe un morphisme $\hat{f}$ de $(M_e(X), \circledast)$ dans N telle que

$$f = \hat{f} \circ i_X$$

$\hat{f}$ étant un morphisme et N étant commutatif, la propriété universelle de $[(\kappa(M_e(X)), *), p]$ montre qu'il existe $f_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{smo}}(\kappa(M_e(X)), N)$ telle que

$$\hat{f} = f_* \circ p$$

par suite

$$f = \hat{f} \circ i_X = f_* \circ (p \circ i_X)$$

2. Unicité de f_*

Si u et v sont des morphismes de monoïdes vérifiant

$$f = u \circ p \circ i_X = v \circ p \circ i_X$$

alors $h = u \circ p$ et $g = v \circ p$ sont des morphismes vérifiant

$$h \circ i_X = g \circ i_X$$

le lemme [8.19] page 253 montre alors que $h = g$, par suite $u \circ p = v \circ p$ et la surjectivité de p montre que $u = v$. ■

On montre maintenant que l'anneau de convolution (voir définition [9.18] page 503) au-dessus du monoïde commutatif libre construit sur X est un anneau commutatif libre au-dessus de X.

Théorème 9.5 *$(\mathbb{Z},+,.,O)$ désigne un ensemble d'entiers relatifs et on note $\mathbb{N}=\mathbb{Z}_+=\{n\in\mathbb{Z}/n\geq 0\}$.*

(i) Si M est un semi-monoïde commutatif, le semi-anneau de convolution $(A_c[M,\mathbb{Z}],+,\star)$ est commutatif.

(ii) Si X est un ensemble et $(M_{sc}(X),i_X)$ le semi-monoïde commutatif libre au-dessus de X, i_s l'application de $M_{sc}(X)$ dans $A_c[M_{sc}(X),\mathbb{Z}]$ définie par

$$i_s(x)(y)=\begin{cases}1 & si \quad y=x\\ 0 & si \quad y\neq x\end{cases}$$

le couple $((A_c[M_{sc},\mathbb{Z}],+,\star),i_s\circ i_X)$ est un semi-anneau commutatif libre au-dessus de X.

(iii) Si X est un ensemble et $(M_c(X),i_X)$ le monoïde commutatif libre au-dessus de X, i l'application de $M_c(X)$ dans $A_c[M_c(X),\mathbb{Z}]$ définie par

$$i(x)(y)=\begin{cases}1 & si \quad y=x\\ 0 & si \quad y\neq x\end{cases}$$

le couple $((A_c[M_c,\mathbb{Z}],+,\star),i\circ i_X)$ est un anneau commutatif libre au-dessus de X

Preuve

(i)

On note a et b les application de $A_c[M,\mathbb{Z}]\times A_c[M,\mathbb{Z}]$ dans $A_c[M,\mathbb{Z}]$ définies par

$$a(\rho,\mu)=\rho\star\mu \quad \text{et} \quad b(\rho,\mu)=\mu\star\rho$$

alors a et b vérifient, d'après le lemme [9.18] page 503 , pour $(\rho,\mu)\in A_c[M,\mathbb{Z}]\times A_c[M,\mathbb{Z}]$ et $\nu\in A_c[M,\mathbb{Z}]$

$$a(\rho+\mu,\nu)=a(\rho,\nu)+a(\mu,\nu) \quad \text{et} \quad a(\rho,\mu+\nu)=a(\rho,\mu)+a(\rho,\nu) \tag{9.34}$$

et

$$b(\rho+\mu,\nu)=b(\rho,\nu)+b(\mu,\nu) \quad \text{et} \quad b(\rho,\mu+\nu)=b(\rho,\mu)+b(\rho,\nu)$$

d'autre part, puisque M est commutatif on a

$$a(i(x),i(y))=i(xy)=i(yx)=b(i(x),i(y))$$

et le lemme [9.18] permet d'affirmer qu'il n'existe qu'une application de $A_c[M,\mathbb{Z}]\times A_c[M,\mathbb{Z}]$ dans $A_c[M,\mathbb{Z}]$ vérifiant (9.34) et $a(i(x),i(y))=i(xy)$ par suite $a=b$ et la loi $\star$ est commutative.

(ii)

D'après (i) le semi-anneau $(A_c[M_{sc}(X),\mathbb{Z}],+,\star)$ est commutatif. Il suffit donc de montrer que pour tout semi-anneau commutatif $(A,+,.)$ et pour toute application $f\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,A)$ il existe un unique morphisme de semi-anneaux $f^*\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{san}}(A_c[M_{sc}(X),\mathbb{Z}],A)$ vérifiant

$$f=f^*\circ(i\circ i_X)$$

1 Preuve de l'existence

Puisque A est commutatif, par définition d'un semi-monoïde commutatif libre il existe une application multiplicative f_c de $M_{sc}(X)$ dans A vérifiant

$$f=f_c\circ i_X$$

f_c étant multiplicative, la propriété universelle du semi-anneau de convolution (voir lemme [9.18] page 503) montre qu'il existe un morphisme f^* du semi-anneau $(A_c[M_{sc}(X),\mathbb{Z}],+,\star)$ dans $(A,+,.)$ vérifiant

$$f_c=f^*\circ i_s$$

par suite

$$f=f_c\circ i_X=f^*\circ(i_s\circ i_X)$$

2 Preuve de l'unicité.

si les morphismes u et v vérifient

$$f = u \circ (i_s \circ i_X) \quad \text{et} \quad f = v \circ (i_s \circ i_X)$$

alors $h = u \circ i_s$ et $g = v \circ i_s$ sont des morphisme de $M_{sc}(X)$ dans $A_c[M_{sc}(X), \mathbb{Z}]$ vérifiant

$$h \circ i_X = g \circ i_X$$

ainsi, puisque $(M_{sc}(X), i_X)$ est un semi-monoïde libre on obtient $h = g$ d'où

$$u \circ i_s = v \circ i_s$$

et le lemme [9.18] page 503 montre alors que $u = v$.

(iii)

Il suffit d'effacer semi dans la preuve de (ii).D'après (i) l'anneau $(A_c[M_c(X), \mathbb{Z}], +, \star)$ est commutatif. Il suffit donc de montrer que pour tout anneau commutatif $(A, +, .)$ et pour toute application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, A)$ il existe un unique morphisme d'anneaux $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A_c[M_c(X), \mathbb{Z}], A)$ vérifiant

$$f = f^* \circ (i \circ i_X)$$

1 Preuve de l'existence

Puisque A est commutatif, par définition d'un monoïde commutatif libre il existe une application multiplicative f_c de $M_c(X)$ dans A vérifiant

$$f = f_c \circ i_X$$

f_c étant multiplicative, la propriété universelle de l'anneau de convolution (voir lemme [9.18] page 503) montre qu'il existe un morphisme f^* de l'anneau $(A_c[M_c(X), \mathbb{Z}], +, \star)$ dans $(A, +, .)$ vérifiant

$$f_c = f^* \circ i_s$$

par suite

$$f = f_c \circ i_X = f^* \circ (i_s \circ i_X)$$

2 Preuve de l'unicité.

si les morphismes u et v vérifient

$$f = u \circ (i_s \circ i_X) \quad \text{et} \quad f = v \circ (i_s \circ i_X)$$

alors $h = u \circ i_s$ et $g = v \circ i_s$ sont des morphisme de $M_c(X)$ dans $A_c[M_c(X), \mathbb{Z}]$ vérifiant

$$h \circ i_X = g \circ i_X$$

ainsi, puisque $(M_c(X), i_X)$ est un monoïde libre on obtient $h = g$ d'où

$$u \circ i_s = v \circ i_s$$

et le lemme [9.18] page 503 montre alors que $u = v$. ■

On vous laisse le soin d'expliciter les constructions routinières de coproduit et de limites inductives de famille d'anneaux commutatifs à partir de l'anneau commutatif libre.

9.5.3 *Anneaux principaux*

Il existe des anneaux -comme les anneaux de polynômes - qui ont des propriétés tellement proches de celles de $\mathbb{Z}$ qu'on peut y dévellopper une arithmétique similaire.

Définition 9.40 *On note $(A, +, .)$ un anneau, on dit que A est un anneau **principal** si :*

1. *A est **commutatif** et **intègre***
2. *Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A il existe $a \in A$ tel que*

$$\mathfrak{a} = aA = \{x \in A / \exists\ b \in A : x = ab\}$$

Les notations suivantes sont classiques

Notation 9.3 *Si $(A, +, .)$ est un anneau **intègre** d'unité 1*

1. *on note $U(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A :*

$$U(A) = \{x \in A / \exists\ y \in A : xy = yx = 1\}$$

   *Si $x \in U(A)$ on note x^{-1} l'unique élément y vérifiant $xy = yx = 1$. Un élément de $U(A)$ est appelé une **unité** de A.*

2. *xA est l'idéal*

$$xA = \{a \in A / \exists\ b \in A : a = xb\}$$

3.

$$A^* = \{a \in A / a \neq 0\}$$

Il est clair que l'égalité $xA = A$ est vérifiée si et seulement si $x \in U(A)$

Définition 9.41 *On note $(A, +, .)$ un anneau commutatif intègre, un élément $a \in A$ est dit **irréductible** si $a \notin U(A)$ et*

$$a = bc \Rightarrow b \in U(A) \quad \text{ou} \quad c \in U(A)\ .$$

On note $\mathbb{I}$ l'ensemble des éléments irréductibles de A.

Dans $\mathbb{Z}$ 1 et -1 sont premiers et ne sont pas irréductibles.

Définition 9.42 *On note $(A, +, .)$ un anneau commutatif*

*Si $(a, b) \in A \times A$ on dit que b **divise** a ou que b est un **diviseur** de a si*

$$aA \subset bA.$$

On note

$$\mathbb{D}(a) = \{b \in A / aA \subset bA\}$$

l'ensemble des diviseurs de a

Il est clair que

— b est un diviseur de a si et seulement si $\forall\ u \in U(A) \quad ub$ est un diviseur de a.
— b est un diviseur de a si et seulement si $a \in bA$
— tout élément de $U(A)$ divise tout élément de A

Dans ce formalisme on peut recopier bêtement le lemme [9.23] page 522 .

Lemme 9.27 *On note $(A, +, .\ )$ un anneau **principal** d'unité 1 et $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels.*

(i) Si $(a, b) \in A^* \times A^*$, pour que $aA = bA$ il faut et il suffit qu'il existe $u \in U(A)$ tel que

$$a = bu$$

(ii) Si $p \in A^*$ et $p \notin U(A)$ les conditions suivantes sont équivalentes

1. p est irréductible

2. pA est maximal dans l'ensemble $\mathfrak{I}^*(A)$ des idéaux de A différents de A

3. A/pA est un corps

En particulier, si p est irréductible alors pA est un idéal premier.

(iii) Si $x \in A^*$ et $x \notin U(A)$ il existe un élément irréductible qui divise x

(iv) Si $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, A)$ est une famille de $n+1$ éléments de A non tous nuls et

$$\sum_{k=0}^{n} a_k A = \{x \in A / \exists b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, A) : x = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k\}$$

alors il existe un élément d de A tel que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k A = dA \tag{9.35}$$

Tout élément d qui vérifie (9.35) possède les propriétés suivantes

a *pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ d divise a_k :*

$$d \in \bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k)$$

b *si $x \in A$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ x divise a_k alors x divise d :*

$$\mathbb{D}(d) = \bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k)$$

c ***(identité de Bezout)*** *il existe $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, A)$ tel que*

$$d = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \tag{9.36}$$

Preuve

(i)

1. Si $aA = bA$ alors
   — puisque $a \in bA$ il existe $x \in A$ tel que $a = bx$
   — puisque $b \in aA$ il existe $y \in A$ tel que $b = ay$
   par suite $a = ayx$ et $a(1-yx) = 0$, A étant intègre on obtient $xy = 1$ par suite $x \in U(A)$ et $a = bx$
2. si $a = bu$ avec $u \in U(A)$ alors
   — si $x \in aA$ il existe $y \in A$ tel que $x = ay = b(uy)$ par suite $aA \subset bA$
   — si $x \in bA$ il existe $y \in A$ tel que $x = by = a(u^{-1}y)$ par suite $bA \subset aA$

(ii)

On montre *1* $\Rightarrow$ *2*

On remarque que si $p \notin U(A)$ on a $pA \in \mathfrak{I}^*(A)$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal vérifiant $pA \subset \mathfrak{a}$ alors
— puisque A est principal il existe $q \in A$ tel $\mathfrak{a} = qA$
— par suite $pA \subset qA$ et il existe $a \in A$ tel que $p = qa$
— puisque p est irréductible on a $q \in U(A)$ ou $a \in U(A)$
1. si $q \in U(A)$ alors $\mathfrak{a} = qA = A$
2. si $a \in U(A)$ alors d'après (i) $pA = qA = \mathfrak{a}$.

On montre *2.* $\Rightarrow$ *1.*

Si pA est maximal dans $\mathfrak{I}^*(A)$ et $p = xy$ alors $pA \subset xA$ par suite $xA = A$ ou $xA = pA$

1. Si $xA = A$ alors $x \in U(A)$
2. si $xA = pA$ alors $x \in pA$ et il existe $a \in A$ tel que $x = pa$, par suite $p = p(ay)$ et puisque A est intègre on obtient $ay = 1$, par suite $y \in U(A)$.

Enfin l'équivalence *2* $\Leftrightarrow$ *3* est prouvée au lemme [9.15] page 496.

(iii)

Puisque $x \notin U(A)$ on a $xA \in \mathfrak{I}^*(A)$, ainsi le lemme [9.15] page 496 montre que xA est inclu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{I}^*(A)$

— puisque A est principal il existe $p \in A$ tel que $\mathfrak{m} = pA$
— puisque $pA \neq A$ on a $p \notin U(A)$
— puisque $x \neq 0$ et $xA \subset pA$ on a $p \neq 0$
— la maximalité de pA et (ii) montre que p est irréductible

ainsi p est un diviseur irréductible de x.

(iv)

On montre que $\sum_{k=0}^{n} a_k A$ est un idéal de A. D'abord on vérifie que c'est un sous-groupe de $(A, +)$. Il est clair que $0 \in \sum_{k=0}^{n} a_k A$

1. On montre $(x, y) \in \sum_{k=0}^{n} a_k A \times \sum_{k=0}^{n} a_k A \Rightarrow x + y \in \sum_{k=0}^{n} a_k A$.

   Si
   $$x = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \quad \text{et} \quad y = \sum_{k=0}^{n} a_k c_k$$
   alors puisque $a_k(b_k + c_k) = a_k c_k + a_k c_k$ l'égalité (9.3) page 419 montre que
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k(b_k + c_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k + a_k c_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k + \sum_{k=0}^{n} a_k c_k = x + y$$
   et l'égalité
   $$x + y = \sum_{k=0}^{n} a_k(b_k + c_k)$$
   montre que $x + y \in \sum_{k=0}^{n} a_k A$

2. On montre $x \in \sum_{k=0}^{n} a_k A \Rightarrow -x \in \sum_{k=0}^{n} a_k A$

   En effet, si $x = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ l'égalité (9.3) page 419 montre que
   $$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k(b_k + (-b_k)) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k + a_k(-b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k + \sum_{k=0}^{n} a_k(-b_k)$$
   par suite
   $$0 = x + \sum_{k=0}^{n} a_k(-b_k)$$

et

$$-x = \sum_{k=0}^{n} a_k(-b_k)$$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n} a_k A$ est un sous-groupe additif de A. On montre ensuite

$$(\lambda, x) \in A \times \sum_{k=0}^{n} a_k A \Rightarrow \lambda x \in \sum_{k=0}^{n} a_k A$$

or si $x = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ le lemme [9.1] page 419 montre que

$$\lambda x = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda b_k$$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n} a_k A$ est un idéal et puisque A est principal il existe $d \in A$ vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n} a_k A = dA\ .$$

On montre que d vérifie **a**, **b** et **c**

a Si $j \in \mathbb{N}_n$ et $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{Z})$ est définie par

$$b_k = \begin{cases} 1 & si \quad k = j \\ 0 & si \quad k \neq j \end{cases}$$

alors

$$a_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

par suite

$$a_j \in \sum_{k=0}^{n} a_k A \quad \text{et} \quad a_i \in dA$$

b Si pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ $a_k A \subset xA$ on montre que pour tout $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, A)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \in xA$$

mais puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ $a_k b_k \in xA$ lemme [8.47] page 380 permet d'affirmer que $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \in xA$ comme somme finie d'éléments du groupe additif xA. Mais par définition de d tout élément de dA est de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ par suite

$$dA \subset xA$$

ainsi

$$\bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k) \subset \mathbb{D}(d)$$

D'autre part, si $x \in \mathbb{D}(d)$ alors $dA \subset xA$, mais d'après **a** pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ on a $a_k A \subset dA$ ainsi

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n \quad a_k A \subset xA$$

par suite $\mathbb{D}(d) \subset \bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k)$

c puisque $d \in \sum_{k=0}^{n} a_k A$ il existe $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, A)$ tel que

$$d = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

■

Le lemme [9.27] permet de définir l'ensemble des diviseurs communs maximaux d'une famille d'éléments d'un anneau principal.

Définition 9.43 *On note $(A, +, .)$ un anneau principal et $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels . Si $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, A)$ est une famille fini de $n+1$ éléments de A, on appelle* ***ensemble des diviseurs communs maximaux*** *de la famille a l'ensemble $\mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n)$ défini par*

$$\mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n) = \{d \in A / dA = \sum_{k=0}^{n} a_k A\}$$

On dit que les éléments $a_0, \cdots, a_n$ sont ***premiers entre eux*** *si*

$$1 \in \mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n)$$

Les conséquences immédiates de l'identité de Bezout (égalité (9.36) page 547) sont consignées dans le lemme suivant.

Lemme 9.28 *On note $(A, +, .)$ un anneau principal et $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels.*

(i) Si $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, A)$ est une famille de $n+1$ éléments de A, pour que $1 \in \mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n)$ il faut et il suffit qu'il existe $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, A)$ vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = 1\ .$$

On a alors

$$U(A) = \bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k)$$

(ii) ***Lemme de gauss***

Si $(a, b) \in A \times A$ sont des éléments premiers entre eux et $c \in A$ est tel que a divise bc alors a divise c.

(iii) Si p est un éléments irréductible de A alors : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{D}(p^n) \cap (U(A))^c = \{d \in U(A)^c / \exists\ (u, k) \in U(A) \times \mathbb{N}_n : d = up^k\}$$

Autrement dit les seuls diviseurs de p^n sont les éléments de la forme $d = up^k$ où $k \in \mathbb{N}_n$ et $u \in U(A)$.

(iv) Si $(a, p) \in \mathrm{hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) \times \mathbb{I}$ vérifie

$$\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) A \subset pA$$

alors il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $a_k A \subset pA$.
En d'autres termes si un élément irréductible divise un produit fini d'éléments de A il divise au moins l'un d'entre eux.

(v) Si $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{I}(A)$ est une famille d'idéaux de A elle possède un élément maximal : il existe $\mathfrak{m} \in \mathfrak{I}(A)$ tel que

1. $\mathfrak{m} \in \mathfrak{X}$
2. $$[\mathfrak{a} \in \mathfrak{X} \quad \text{et} \quad \mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}] \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{m} \ .$$

(vi)

Décomposition en facteurs irréductibles

1. *Pour tout $x \in A^*$ et $p \in \mathbb{I}$ l'ensemble*
$$V_p(x) = \{n \in \mathbb{N}/x \in p^n A\}$$
est non vide majoré
2. *si $x \in A^*$, on note ν_x l'application de $\mathbb{I}$ dans $\mathbb{N}$ définie par*
$$\nu_x(p) = \max\{n : n \in V_p(x)\}$$
alors
   (a) *Pour tout $p \in \mathbb{I}$ il existe un unique $a \in A^*$ tel que $1 \in \mathtt{pgcd}(a, p)$ et*
   $$x = p^{\nu_x(p)} a$$
   (b) *Pour tout $(x, y) \in A^* \times A^*$ et $p \in \mathbb{I}$*
   $$\nu_{xy}(p) = \nu_x(p) + \nu_y(p)$$
   (c) *Si $(p, q) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, pour que $\nu_q(p) \neq 0$ il faut et il suffit qu'il existe $u \in U(A)$ tel que $p = uq$, on a alors $\nu_q(p) = 1$*
   (d) *Pour tout $u \in U(A)$ et $(x, p) \in A^* \times \mathbb{I}$*
   $$\nu_x(up) = \nu_x(p)$$
3. *Si $x \in A^*$ le support de ν_x défini par*
$$\mathrm{s}(\nu_x) = \{p \in \mathbb{I}/\nu_x(p) \neq 0)\}$$
possède la propriété suivante : Si $x \notin U(A)$ alors $\mathrm{s}(\nu_x) \neq \varnothing$ et il existe un sous-ensemble fini non vide F de $\mathrm{s}(\nu_x)$ et $u \in U(A)$ tel que
$$x = u \prod_{p \in F} p^{\nu_x(p)} \tag{9.37}$$
4. *Si $x \in A^* \cap (U(A))^c$ et F, G sont des sous-ensembles finis de $\mathrm{s}(\nu_x)$ tels qu'il existe un couple $(u, v) \in U(A) \times U(A)$ vérifiant*
$$x = u \prod_{p \in F} p^{\nu_x(p)} = v \prod_{q \in G} q^{\nu_x(q)}$$
alors
   (a) $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(G)$

(b) Pour tout $q \in G$ il existe $(p, u) \in F \times U(A)$ tel que

$$q = up \ .$$

Preuve

(i)

D'abord s'il existe $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, A)$ tel que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

le lemme [9.1] page 419 montre alors que pour tout $x \in A$

$$x = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right) x = \sum_{k=0}^{n} a_k (b_k x)$$

par suite

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k A$$

et $1 \in \mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n)$.
Inversement si $1 \in \mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n)$ l'identité de Bezout (voir (9.36) page 547) montre qu'il existe une application $b \in Hom_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, A)$ vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = 1 \ .$$

Enfin, puisque $1 \in \mathtt{pgcd}(a_0, \cdots, a_n)$ le lemme [9.27] page 546 montre que

$$\bigcap_{k=0}^{n} \mathbb{D}(a_k) = \mathbb{D}(1) = U(A)$$

(ii)

Puisque a et b sont premiers entre eux l'identité de Bezout montre qu'il existe $(x, y) \in A \times A$ tel que

$$ax + by = 1$$

par suite

$$c = acx + bcy$$

et puisque a divise bc il existe $k \in A$ tel que $bc = ak$, ainsi

$$c = acx + bcy = a(cx + ky)$$

ce qui montre que a divise c.

(iii)

On pose

$$A_n = \{d \in A^*/d \notin U(A) \quad \text{et} \quad p^{n+1}A \subset dA\} \ , \ B_n = \{d \in U(A)^c/\exists\ (k, u) \in \mathbb{N}_{n+1} \times U(A) : d = up^k\}$$

Enfin on note

$$H = \{n \in \mathbb{N}/A_n = B_n\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. D'abord on montre $0 \in H$

   En effet, si $d \in U(A)^c$ divise p alors il existe $a \in A$ tel que $p = da$, par définition d'un élément irréductible cela entraîne $a \in U(A)$, ainsi
$$A_0 \subset B_0.$$
   d'autre part, pour tout $u \in U(A)$ up divise $p = u^{-1}(up)$ par suite $A_0 = B_0$
2. On montre $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$.

   Si $d \notin U(A)$ divise p^{n+2} alors
   (a) Si $1 \in \mathtt{pgcd}(d,p)$ alors d divise pp^{n+1} et $1 \in \mathtt{pgcd}(d,p)$ le lemme de Gauss montre alors que d divise p^{n+1} et puisque $n \in H$ on obtient $d \in B_n$ et $d \in B_{n+1}$
   (b) Si $1 \notin \mathtt{pgcd}(d,p)$ l'idéal $pA + dA$ est différent de A et contient pA la maximalité de pA montre alors que $pA + dA = pA$ par suite $dA \subset pA$ et p divise d. Ainsi il existe $a \in A$ tel que $d = pa$, puisque d divise p^{n+2} il existe $b \in A$ tel que $p^{n+2} = db = p(ab)$ ainsi
$$p(p^{n+1} - ab) = 0\ .$$
   Puisque A est intègre on obtient
$$p^{n+1} = ab$$
   ainsi a divise p^{n+1}
   — si $a \in U(A)$ alors $d = pa$ et $d \in B_{n+1}$
   — si $a \notin U(A)$ alors $a \in A_n$ et puisque $n \in H$ on obtient $a \in B_n$ par suite $d = pa$ est un élément de B_{n+1} et $d \in B_{n+1}$

   Ceci montre
$$n \in H \Rightarrow A_{n+1} \subset B_{n+1}$$
   Enfin l'assertion $B_{n+1} \subset A_{n+1}$ est toujours vrai puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_{n+2}$ up^k divise $p^{n+2} = u^{-1}p^{n+2-k}up^k$

Ainsi $H = \mathbb{N}$.

$$(iv)$$

Si $p \in \mathbb{I}$ on note
$$V_n = \left\{ a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) / \prod_{k=0}^{n} a_k \in pA \right\}$$
et
$$H = \{ n \in \mathbb{N} / \forall\ a \in V_n\ \exists\ k \in \mathbb{N}_n : a_k \in pA \}$$
et on montre que H est héréditaire.

1. Puisque $V_0 = \{a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, A) / a_0 \in pA\}$ on a $0 \in H$
2. On montre $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$

   Si $a \in V_{n+1}$ alors $\prod_{k=0}^{n+1} a_k \in pA$, si on pose $b = \prod_{k=0}^{n} a_k$ alors p divise ba_{n+1}
   — Si p et a_{n+1} sont premier entre eux le lemme de Gauss montre que p divise b par suite $a \in V_n$ et puisque $n \in H$ il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $a_k \in pA$
   — Si $1 \notin \mathtt{pgcd}(a_{n+1}, p)$ l'idéal $pA + a_{n+1}A$ est différent de A et contient pA la maximalité de pA montre alors que $pA + a_{n+1}A = pA$ par suite $a_{n+1}A \subset pA$ et p divise a_{n+1}

   Ainsi $H = \mathbb{N}$

$$(v)$$

On montre que toute sous-famille totalement ordonnée (pour l'inclusion) d'éléments de $\mathfrak{X}$ possède un majorant dans $\mathfrak{X}$. Si $\mathfrak{I}$ est totalement ordonnée

— D'après le lemme [9.11] page 475
$$\bigcup_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}} \mathfrak{a}$$
est un idéal.

— Puisque A est principal il existe $a \in A$ tel que
$$aA = \bigcup_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}} \mathfrak{a}$$
en particulier, il existe $\mathfrak{a}_0 \in \mathfrak{I}$ tel que $a \in \mathfrak{a}_0$,

— Puisque $\mathfrak{a}_0$ est un idéal on a $aA \subset \mathfrak{a}_0$ par suite
$$aA \subset \mathfrak{a}_0 \subset \bigcup_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}} \mathfrak{a} \subset aA \subset \mathfrak{a}_0$$
et $\mathfrak{a}_0 = \bigcup_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}} \mathfrak{a}$ est un maximum de $\mathfrak{I}$.

Le lemme de Zorn (Lemme [2.5] page 50) montre alors que $\mathfrak{X}$ possède un élément maximal.

(vi)

Preuve de *1*

Il est clair que pour tout $x \in A^*$ et $p \in \mathbb{I}$ on a $0 \in V_p(x)$, par suite $V_p(x) \neq \varnothing$. On note $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et
$$X = \{x \in A^*/V_p(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\}$$
Et on montre par l'absurde que l'ensemble $X^c \cap A^*$ est vide. Si $X^c \cap A^* \neq \varnothing$ on considère l'application φ de $X^c \cap A^*$ dans $\mathfrak{I}(A)$ définie par
$$\varphi(x) = xA$$
et on pose $\mathfrak{X} = \mathrm{im}(\varphi)$. D'après (v) $\mathfrak{X}$ possède un élément maximal $\mathfrak{m}$. Ainsi il existe $m \in X^c \cap A^*$ tel que $\mathfrak{m} = \varphi(m) = mA$. m n'est pas inversible (sinon $V_p(m) = \{0\}$ et $m \in X$), le lemme [9.27] page 546 montre qu'il existe $q \in \mathbb{I}$ tel que $mA \subset qA$, ainsi il existe $(a, q) \in A^* \times \mathbb{I}$ tel que $m = aq$ on a donc $mA \subset aA$.

— On a $mA \neq aA$ puisque si il existe $u \in U(A)$ tel que $m = ua$ alors $a(q - u) = 0$ ainsi $q \in U(A)$ ce qui contredit l'assertion $q \in \mathbb{I}$.

— $a \in X$, en effet la maximalité de mA dans $\mathfrak{X}$ donne
$$a \in X^c \quad \text{et} \quad mA \subset aA \Rightarrow mA = aA$$

Ainsi $V_p(a)$ est fini. Le théorème [6.3] page 128 montre que $V_p(a)$ est majoré et le théorème [4.5] page 84 montre alors que $V_p(a)$ possède un maximum
$$\nu_p(a) = \max\{k : k \in V_p(a)\}$$
On montre que pour tout $k \geq \nu_a(p) + 2$ p^k ne divise pas m. En effet si p^k divise aq alors

— Si $1 \in \mathtt{pgcd}(p, q)$ alors le lemme de Gauss montre que p^k divise a et ceci contredit la maximalité de $\nu_a(p)$

— Si $1 \notin \mathtt{pgcd}(p, q)$ alors puisque p et q sont irréductible on obtient
$$pA = pA + qA = qA$$
par suite il existe $u \in U(A)$ tel que $q = up$ ainsi p^k divise ap et p^{k-1} divise a et puisque $k-1 > \nu_a(p)$ cela contredit la maximalité de $\nu_a(p)$.

En particulier $V_p(m) \subset [0, \nu_a(p) + 1]$ ce qui est la contradiction cherchée puisque par construction $V_p(m)$ serait infini.

Preuve de *2*

(a) Puisque $x \in p^{\nu_x(p)}A$ il existe $a \in A$ tel que $x = p^{\nu_x(p)}a$. p étant irréductible, si $1 \notin \mathtt{pgcd}(p,a)$ alors $pA + aA \neq A$ et la maximalité de pA donne

$$pA + aA = pA$$

par suite p divise a et il existe $b \in A$ tel que $a = pb$, on obtient alors $x = p^{\nu_x(p)+1}b$ et ceci contredit la maximalité de $\nu_x(p)$.
L'unicité provient de l'intégrité de A puisque

$$p^{\nu_x(p)}a = p^{\nu_x(p)}b \Rightarrow p^{\nu_x(p)}(a-b) = 0 \Rightarrow a = b$$

(b) Il est clair que

$$xy \in p^{\nu_x(p)+\nu_y(p)}A$$

il suffit donc de montrer que pour tout $k > \nu_x(p) + \nu_y(p)$ on a $xy \notin p^k A$. Or si $(a,b) \in A^* \times A^*$ vérifient

$$x = p^{\nu_x(p)}a \quad y = p^{\nu_y(p)}b \quad \text{et} \quad 1 \in \mathtt{pgcd}(p,a) \cap \mathtt{pgcd}(p,b)$$

l'existence de $k > \nu_x(p) + \nu_y(p)$ et de $c \in A^*$ vérifiant $xy = p^k c$ entraîne

$$p^{\nu_x(p)+\nu_y(p)}ab = p^k c$$

l'intégrité de A montre alors que $p^{k-(\nu_x(p)+\nu_y(p))}$ divise ab, en particulier p divise ab et puisque p est irréductible cela contredit l'assertion

$$1 \in \mathtt{pgcd}(p,a) \cap \mathtt{pgcd}(p,b)\ .$$

(c) Si $\nu_q(p) \neq 0$ alors il existe $k > 0$ tel que $q \in p^k A$, en particulier $q \in pA$, puisque q est irréductible qA est maximal (voir lemme [9.27] page 546) par suite $qA = pA$ et il existe $u \in U(A)$ tel que $p = uq$. Cela montre que q ne divise pas p^2 puisque s'il existe $a \in A$ tel que $q = p^2 a$ alors $p = uap^2$ et l'intégrité de A montre que $uap = 1$ et ceci contredit l'irréductibilité de p. On obtient donc

$$1 \leq \nu_q(p) < 2$$

(d) Puisque u^k est inversible on a

$$p^k u^k A = p^k A \quad \text{et} \quad V_{up}(x) = V_p(x)\ .$$

Preuve de *3*

On note $\mathcal{F}$ la famille des parties finies de $\mathbb{I}$. On considère l'application Γ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{P}(A^*)$ définie

$$\Gamma(F) = \left\{ x \in A^* / \exists\ u \in U(A) : x = u \prod_{p \in F} p^{\nu_x(p)} \right\} \cup U(A)\ .$$

On montre par l'absurde que l'ensemble

$$X = A^* \cap \bigcap_{F \in \mathcal{F}} (\Gamma(F))^c$$

est vide. Si $X \neq \varnothing$ on considère l'application φ de X dans $\mathfrak{I}(A)$ définie par

$$\varphi(x) = xA$$

et on pose $\mathfrak{X} = \mathrm{im}(\varphi)$. D'après (v) $\mathfrak{X}$ possède un élément maximal $\mathfrak{m}$. Ainsi il existe $m \in X$ tel que $\mathfrak{m} = \varphi(m) = mA$. m n'est pas inversible (puisque pour $F \in \mathcal{F}$ on a $U(A) \subset \Gamma(F)$), le lemme [9.27] page 546 montre qu'il existe $q \in \mathbb{I}$ tel que $mA \subset qA$, ainsi il existe $(a,q) \in A^* \times \mathbb{I}$ tel que $m = aq$ on a donc $mA \subset aA$.

— On a $mA \neq aA$ puisque si il existe $u \in U(A)$ tel que $m = ua$ alors $a(q-u) = 0$ ainsi $q \in U(A)$ ce qui contredit l'assertion $q \in \mathbb{I}$.

— $a \in X^c$, en effet la maximalité de mA dans $\mathfrak{X}$ donne

$$a \in X \quad \text{et} \quad mA \subset aA \Rightarrow mA = aA$$

Ainsi

$$a \in (A^*)^c \cup \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \Gamma(F)$$

et puisque $a \neq 0$ il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $a \in \Gamma(F)$. Si $a \in U(A)$ alors $m = aq$ et ceci contredit l'assertion $m \in X$ par suite il existe $(u, F) \in U(A) \times \mathcal{F}$ vérifiant

$$a = u \prod_{p \in F} p^{\nu_a(p)} \tag{9.38}$$

alors

$$m = aq = u \prod_{p \in F} p^{\nu_a(p)} q$$

Ainsi, si on montre que pour un certain G de $\mathcal{F}$ et un certain $v \in U(A)$

$$m = aq = v \prod_{p \in G} p^{\nu_{aq}(p)} \tag{9.39}$$

cela contredira l'assertion $X \neq \varnothing$. Pour vérifier (9.39) on montre d'abord que l'ensemble

$$\Lambda_q = \{p \in F / \exists\ w \in U(A) : p = wq\}$$

est vide ou réduit à un élément. En effet, si $(s,t) \in \Lambda_q \times \Lambda_q$ et $s \neq t$ il existe $(x,y) \in U(A) \times U(A)$ tel que

$$s = xq \quad \text{et} \quad t = yq$$

ainsi $t = yx^{-1}s = ws$ où $w \in U(A)$. Si $F' = \{p \in F / p \notin \{s,t\}\}$ alors le théorème [8.2] page 216 montre que

$$a = us^{\nu_a(s)} t^{\nu_a(t)} \prod_{p \in F'} p^{\nu_a(p)} = uw^{\nu_a(t)} s^{(\nu_a(s) + \nu_a(t))} \prod_{p \in F'} p^{\nu_a(p)}$$

Ainsi $a \in s^{(\nu_a(s)+\nu_a(t))}A$ et cela contredit la maximalité de $\nu_a(s)$ puisque par construction $\nu_a(t) \geq 1$. Une représentation du type (9.39) page 556 provient alors des remarques suivantes :

1. Si $\Lambda_q = \varnothing$ alors $\nu_m(q) = 1$ et $\forall\ p \in F$ on a $\nu_m(p) = \nu_a(p)$
   (a) D'abord on montre $\forall\ p \in F$ on a $\nu_m(p) = \nu_a(p)$

   En effet, d'après *2.* on a

   $$\nu_m(p) = \nu_a(p) + \nu_q(p)$$

   et $\nu_q(p) \neq 0 \Leftrightarrow p \in \Lambda_q$.

   (b) Ensuite on montre $\nu_m(q) = 1$

   Il suffit de montrer que $\nu_a(q) = 0$. Or, si q divise a, le point (iv) montre qu'il existe $p \in F$ tel que q divise $p^{\nu_a(p)}$ en particulier, q divise p, par suite $pA \subset qA$ et puisque p est irréductible $pA = qA$, ainsi il existe $u \in U(A)$ tel que $p = uq$ et ceci contredit l'assertion $\Lambda_q = \varnothing$

   Ainsi l'égalité (9.38) page 556 s'écrit

   $$a = u \prod_{p \in F} p^{\nu_m(p)}$$

   et

   $$m = aq = u \prod_{p \in F \cup \{q\}} p^{\nu_a(p)}$$

2. <u>Si $\Lambda_q = \{p_0\}$ alors $\nu_m(p_0) = \nu_a(p_0) + 1$ et pour tout $p \in F \setminus \{p_0\}$ $\nu_m(p) = \nu_a(p)$</u>
   (a) D'abord on montre $p \in F \setminus \{p_0\} \Rightarrow \nu_m(p) = \nu_a(p)$

   En effet, d'après *2.* on a
$$\nu_m(p) = \nu_a(p) + \nu_q(p)$$
   et $\nu_q(p) \neq 0 \Leftrightarrow p \in \Lambda_q \Leftrightarrow p = p_0$.
   (b) Ensuite on montre $\nu_m(p_0) = \nu_a(p_0) + 1$

   Il suffit de montrer que $\nu_q(p_0) = 1$. Or il existe $w \in U(A)$ tel que $p_0 = wq$ ainsi *2.* permet d'affirmer que $\nu_q(p_0) = \nu_q(wq) = \nu_q(q) = 1$

   Ainsi l'égalité (9.38) page 556 s'écrit (voir théorème [8.2]page 216)
$$a = up_0^{\nu_a(p_0)} \prod_{p\in F\setminus\{p_0\}} p^{\nu_m(p)}$$
   et puisque $q = w^{-1}p_0$
$$m = aq = uw^{-1}p_0^{\nu_a(p_0)+1} \prod_{p\in F\setminus\{p_0\}} p^{\nu_m(p)} = uw^{-1} \prod_{p\in F} p^{\nu_m(p)}$$
   Ce qui donne une représentation de m du type (9.39) page 556.

Ainsi $X = \varnothing$ et
$$A^* \subset \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \Gamma(F) \cup U(A)$$
en particulier si $x \in A^*$ et $x \notin U(A)$ il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que
$$x \in \Gamma(F)$$

Preuve de *4.*

On montre (a)

On montre d'abord que si (u, F) vérifie (9.37) page 551 alors les ensembles
$$A(F) = \{(s,t) \in F \times F / \exists\ v \in U(A) : t = vs\} \quad \text{et} \quad \Delta(F) = \{(s,t) \in F \times F / s = t\}$$
vérifient $A(F) = \Delta(F)$. Si Card$(F) = 1$ l'égalité est claire on suppose maintenant Card$(F) \geq 2$. Il suffit de montrer $A(F) \cap \Delta(F)^c = \varnothing$, or si $(s,t) \in A(F) \cap \Delta(F)^c$ et $F' = \{p \in F/p \notin \{s,t\}\}$ le théorème [8.2] page 216 montre que
$$x = u \prod_{p\in F} p^{\nu_x(p)} = us^{\nu_x(s)}t^{\nu_x(t)} \prod_{p\in F'} p^{\nu_x(p)}$$
puisque $t = vs$ on a
$$x = uv^{\nu_x(t)}s^{\nu_x(s)+\nu_x(t)} \prod_{p\in F'} p^{\nu_x(p)}$$
ainsi
$$x \in s^{\nu_x(s)+\nu_x(t)}A$$
et ceci contredit la maximalité de $\nu_x(s)$ puisque $\nu_x(t) \geq 1$, par suite $A(F) = \Delta(F)$.
On montre ensuite que si $(u,v) \in U(A) \times U(A)$ et si F et G sont des sous-ensemble finis non vide de s(ν_x) vérifiant
$$x = u \prod_{p\in F} p^{\nu_x(p)} = v \prod_{q\in G} q^{\nu_x(q)}$$
alors la relation λ de F dans G définie par
$$\lambda = \{(p,q) \in F \times G / \exists\ w \in U(A) : q = wp\}$$
est une bijection de F dans G.

1. <u>On montre $\mathrm{dom}(\lambda) = F$</u>

   Si $p \in F$ alors p divise x donc il divise $\prod_{q \in G} q^{\nu_x(q)}$. Le point (iv) montre alors qu'il existe $q \in B$ tel que p divise $q^{\nu_x(q)}$, p et q étant irréductibles on a (par (iii) par exemple) $q = wp$ pour un certain $w \in U(A)$, par suite $(p, q) \in \lambda$.
2. <u>On montre que λ est une fonction</u>.

   Si $(p, q) \in \lambda$ et $(p, q') \in \lambda$ il existe $(w, w') \in U(A) \times U(A)$ tel que

   $$p = wq = w'q'$$

   ainsi $q = w^{-1}w'q'$ et $(q, q') \in A(G)$, l'égalité $A(G) = \Delta(G) = \{(q, q') \in G \times G/q = q'\}$ montre que $q = q'$
3. <u>On montre que λ est injective</u>.

   Si $(p, q) \in \lambda$ et $(p', q) \in \lambda$ il existe $(w, w') \in U(A) \times U(A)$ tel que

   $$p = wq \quad \text{et} \quad p' = w'q$$

   ainsi $p' = w'w^{-1}p$ et $(p, p') \in A(F)$, l'égalité $A(F) = \Delta(F) = \{(p, p') \in F \times F/p = p'\}$ montre que $p = p'$
4. <u>On montre $\mathrm{im}(\lambda) = G$</u>

   Si $q \in G$ alors q divise x donc il divise $\prod_{p \in F} p^{\nu_x(p)}$. Le point (iv) montre alors qu'il existe $p \in F$ tel que q divise $p^{\nu_x(p)}$, p et q étant irréductibles on a (par (iii) par exemple) $p = wq$ pour un certain $w \in U(A)$, par suite $(p, q) \in \lambda$.

En particulier si (u, F) et (v, G) vérifient (9.37) page 551 alors

$$\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(G)$$

On montre (b)

C'est une conséquence directe de la preuve de (a) puisque pour tout $q \in B$ il existe $p \in F$ tel que $\lambda(p) = q$. ■

Pour avoir l'unicité il faut évidemment se restreindre à développer en facteurs sur un sous-ensemble "admissible" d'éléments irréductibles.

Définition 9.44 *On note $(A, +, .)$ un anneau principal. Un sous-ensemble $\mathbb{I}_a$ de l'ensemble $\mathbb{I}$ des éléments irréductibles est dit **admissible** si il vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $q \in \mathbb{I}$ il existe $p \in \mathbb{I}_a$ tel que $pA = qA$*
2. $$\{(p, q) \in \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a / \exists\ u \in U(A) : q = up\} = \{(p, q) \in \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a / p = q\}$$

Dans $\mathbb{Z}$ l'ensemble $\mathbb{I}_+ = \{p \in \mathbb{I}/p > 0\}$ est admissible. En adaptant le lemme [9.28] page 550 dont on utilise les notations et résultats on obtient le lemme suivant :

Lemme 9.29 *On note $(A, +, .)$ un anneau principal et $\mathbb{I}_a$ un ensemble admissible d'éléments irréductibles.*

(i) Si $q \in \mathbb{I}$ il existe un unique *$p \in \mathbb{I}_a$ tel que*

$$qA = pA$$

*(ii) Si $x \in A^*$ et $x \notin U(A)$ l'ensemble $\mathrm{s}_a(\nu_x) = \mathbb{D}(x) \cap \mathbb{I}_a$ des diviseurs admissibles de x est **fini** non vide.*

(iii) Pour tout $x \in A^* \cap U(A)^c$ il existe $u \in U(A)$ tel que

$$x = u \prod_{p \in \mathrm{s}_a(\nu_x)} p^{\nu_x(p)}$$

Preuve

(i)

Par définition d'un ensemble admissible il existe $p \in \mathbb{I}_a$ tel que $qA = pA$,on montre que p est unique. Si $r \in \mathbb{I}_a$ vérifie $rA = qA = pA$ il existe (d'après le lemme [9.27] page 546) un certain $u \in U(A)$ tel que $p = ru$ la définition d'un ensemble admissible montre alors que $r = p$

(ii)

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de A et

$$X = \{x \in A^* / \mathrm{s}_a(\nu_x) \in \mathcal{F}\}$$

Et on montre par l'absurde que l'ensemble $X^c \cap A^*$ est vide. Si $X^c \cap A^* \neq \varnothing$ on considère l'application φ de $X^c \cap A^*$ dans $\mathfrak{I}(A)$ définie par

$$\varphi(x) = xA$$

et on pose $\mathfrak{X} = \mathrm{im}(\varphi)$. D'après le (v) du lemme [9.28]page 550 $\mathfrak{X}$ possède un élément maximal $\mathfrak{m}$. Ainsi il existe $m \in X^c \cap A^*$ tel que $\mathfrak{m} = \varphi(m) = mA$. m n'est pas inversible (sinon $\mathrm{s}_a(\nu_m) = \varnothing$ et $m \in X$), le lemme [9.27] page 546 montre qu'il existe $r \in \mathbb{I}$ tel que $mA \subset rA$, par suite si q est l'unique élément de $\mathbb{I}_a$ tel que $rA = qA$ il existe $b \in A^*$ tel que $m = bq$ on a donc $mA \subset bA$.

- On a $mA \neq bA$ puisque si il existe $u \in U(A)$ tel que $m = ub$ alors $b(q - u) = 0$ ainsi $q \in U(A)$ ce qui contredit l'assertion $q \in \mathbb{I}$.
- $b \in X$, en effet la maximalité de mA dans $\mathfrak{X}$ donne

$$b \in X^c \quad \text{et} \quad mA \subset bA \Rightarrow mA = bA$$

Ainsi $\mathrm{s}_a(\nu_b)$ est fini. On montre que $\mathrm{s}_a(\nu_m) = \mathrm{s}_a(\nu_b) \cup \{q\}$. Il est clair que $\mathrm{s}_a(\nu_b) \cup \{q\} \subset \mathrm{s}_a(\nu_m)$, inversement, si p est un diviseur admissible de m alors p divise bq

- Si $1 \in \mathtt{pgcd}(p, q)$ alors le lemme de Gauss montre que p divise b par suite $p \in \mathrm{s}_a(\nu_b)$
- Si $1 \notin \mathtt{pgcd}(p, q)$ alors puisque p et q sont irréductible on obtient

$$pA = pA + qA = qA$$

  ainsi il existe $u \in U(A)$ tel que $q = pu$, p et q étant admissibles cela entraîne $p = q$.

En particulier $\mathrm{s}_a(\nu_m) = \mathrm{s}_a(\nu_b) \cup \{q\}$ est fini, ce qui est la contradiction cherchée puisque par construction $\mathrm{s}_a(\nu_m)$ serait infini.

(iii)

On considère l'ensemble Γ défini par

$$\Gamma = \left\{ x \in A^* \cap U(A)^c / \exists\, u \in U(A) : x = u \prod_{p \in \mathrm{s}_a(\nu_x)} p^{\nu_x(p)} \right\}$$

Et on montre par l'absurde que l'ensemble

$$X = (A^* \cap U(A)^c) \cap \Gamma^c$$

est vide. Si $X \neq \varnothing$ on considère l'application φ de X dans $\mathfrak{I}(A)$ définie par

$$\varphi(x) = xA$$

et on pose $\mathfrak{X} = \mathrm{im}(\varphi)$. D'après le lemme [9.28] page 550 $\mathfrak{X}$ possède un élément maximal $\mathfrak{m}$. Ainsi il existe $m \in X$ tel que $\mathfrak{m} = \varphi(m) = mA$. m n'est ni nul ni inversible (puisque $m \in X$), le lemme [9.27] page 546 montre qu'il existe $r \in \mathbb{I}$ tel que $mA \subset rA$, ainsi, si $q \in \mathbb{I}_a$ est l'unique élément admissible tel que $rA = qA$ il existe $b \in A^*$ tel que $m = bq$ on a donc $mA \subset bA$.

— On a $mA \neq bA$ puisque si il existe $u \in U(A)$ tel que $m = ub$ alors $b(q-u) = 0$ ainsi $q \in U(A)$ ce qui contredit l'assertion $q \in \mathbb{I}$.
— $b \in X^c$, en effet la maximalité mA dans $\mathfrak{X}$ donne

$$b \in X \quad \text{et} \quad mA \subset bA \Rightarrow mA = bA$$

Ainsi

$$a \in [(A^*)^c \cup U(A)] \cup \Gamma$$

puisque $b \neq 0$ on a $b \in U(A) \cup \Gamma$ Si $b \in U(A)$ alors $m = bq$ et $\mathrm{s}_a(\nu_m) = \{q\}$ et ceci contredit l'assertion $m \in X$, par suite $b \in \Gamma$

$$b = u \prod_{p \in \mathrm{s}_a(\nu_b)} p^{\nu_b(p)}$$

alors

$$m = bq = u \prod_{p \in \mathrm{s}_a(\nu_b)} p^{\nu_b(p)} q \tag{9.40}$$

Remarquons que cette égalité entraîne déjà que $\mathrm{s}_a(\nu_m) = \mathrm{s}_a(\nu_b) \cup \{q\}$. En effet, il est clair que

$$\mathrm{s}_a(\nu_b) \cup \{q\} \subset \mathrm{s}_a(\nu_m) \ .$$

Inversement, si p est un diviseur admissible de m alors p divise bq
— Si $1 \in \mathtt{pgcd}(p,q)$ alors le lemme de Gauss montre que p divise b par suite $p \in \mathrm{s}_a(\nu_b)$
— Si $1 \notin \mathtt{pgcd}(p,q)$ alors puisque p et q sont irréductible on obtient

$$pA = pA + qA = qA$$

ainsi il existe $u \in U(A)$ tel que $q = pu$, p et q étant admissibles cela entraîne $p = q$.

Enfin on remarque
— Si $q \in \mathrm{s}_a(\nu_b)$ et $F' = \mathrm{s}_a(\nu_b) \cap \{q\}^c$ on obtient

$$m = uq^{\nu_a(q)+1} \prod_{p \in F'} p^{\nu_b(p)}$$

Or le lemme [9.28] page 550 montre que pour tout $p \in \mathbb{I}$

$$\nu_m(p) = \nu_b(p) + \nu_q(p)$$

et puisque p et q sont admissibles

$$\nu_q(p) = \begin{cases} 1 & si \quad p = q \\ 0 & si \quad p \neq q \end{cases}$$

on obtient $\nu_m(p) = \nu_b(p)$ si $p \neq q$ et $\nu_m(q) = \nu_b(q) + 1$. Ainsi (9.40) s'écrit

$$m = u \prod_{p \in \mathrm{s}_a(\nu_m)} p^{\nu_m(p)}$$

et contredit l'assertion $m \in X$.
— si $q \notin \mathrm{s}_a(\nu_b)$ on montre que $\nu_b(q) = 0$. en effet puisque on a

$$b = u \prod_{p \in \mathrm{s}_a(\nu_b)} p^{\nu_b(p)}$$

le lemme [9.28] page 550 montre que si q divise b il existe $p_0 \in \mathrm{s}_a(\nu_b)$ tel que q divise $p_0^{\nu_b(p_0)}$, q étant irréductible il existe $v \in U(A)$ tel que $q = vp_0$, p_0 et q étant admissibles on obtient $q = p_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $q \notin \mathrm{s}_a(\nu_b)$ En particulier on a $\nu_b(q) = 0$ d'où

$$\nu_m(p) = \nu_a(p) \quad \text{si} \quad p \in \mathrm{s}_a(\nu_b) \quad \text{et} \quad \nu_m(q) = 1$$

ainsi (9.40) s'écrit

$$m = bq = u \prod_{p \in s_a(\nu_b) \cup \{q\}} p^{\nu_m(p)} = u \prod_{p \in s_a(\nu_m)} p^{\nu_m(p)}$$

et ceci contredit l'assertion $m \in X$
ainsi l'ensemble $A^* \cap U(A)^c \cap \Gamma^c$ est vide et

$$A^* \subset \Gamma \cup U(A) \ .$$

■

On peut plonger tout anneau commutatif et intègre dans un corps commutatif.

9.5.4 *Corps de fractions et corps de rationnels d'un anneau commutatif*

On introduit deux définitions.

Définition 9.45 *On note $(A, +, .)$ un anneau commutatif, on appelle* ***corps de fractions*** *de A un couple $((\mathbb{Q}(A), +, \centerdot\,), i)$ où*

— *$(\mathbb{Q}(A), +, \centerdot\,)$ est un corps commutatif*

— *i est un morphisme* ***injectif*** *de l'anneau A dans l'anneau $\mathbb{Q}(A)$*

Ce couple vérifie la propriété universelle suivante : pour tout corps commutatif K et pour tout morphisme injectif de l'anneau A dans l'anneau K il existe un unique morphisme injectif f^* de $\mathbb{Q}(A)$ dans K vérifiant

$$f = f^* \circ i \ .$$

La définition des anneaux ordonnés est donnée par [9.5] page 437, on définit les corps de rationnels.

Définition 9.46 *On note $(A, +, \ .\ , O_0)$ un anneau commutatif* ***ordonné****, on appelle* ***corps de rationnels*** *de A un couple $((\mathbb{Q}(A), +, \centerdot\,, O), i)$ où*

— *$(\mathbb{Q}(A), +, \centerdot\,, O\ )$ est un corps commutatif* ***ordonné***

— *i est un morphisme* ***strictement croissant*** *de l'anneau $(A, +, \ .\ , O_0\ )$ dans l'anneau $(\mathbb{Q}(A), +, \centerdot\,, O\ )$*

Ce couple vérifie la propriété universelle suivante : pour tout corps commutatif ordonné K et pour tout morphisme strictement croissant de l'anneau A dans l'anneau K il existe un unique morphisme strictement croissant f^* de $\mathbb{Q}(A)$ dans K vérifiant

$$f = f^* \circ i \ .$$

Par ≪ abstract nonsense ≫ on obtient

Lemme 9.30 *Si $((K, +, *), i)$ et $((L, +, \bullet), j)$ sont des corps de fractions de A alors il existe des morphismes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(K, L)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(L, K)$ tels que*

$$f \circ g = id_L \qquad \text{et} \qquad g \circ f = id_K$$

Preuve

— Puisque $((K, +, *), i)$ est un corps de fractions de A il existe un morphisme injectif $j^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(K, L)$ tel que

$$j = j^* \circ i$$

— Puisque $((L, +, \bullet), j)$ est un corps de fractions de A il existe un morphisme injectif $i^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(L, K)$ tel que

$$i = i^* \circ j$$

En particulier $j^* \circ i^*$ est un morphisme injectif de L dans L qui vérifie

$$j = j^* \circ i^* \circ j. \tag{9.41}$$

Mais, par définition d'un corps de fractions de A , le seul morphisme injectif f de L dans L vérifiant $j = f \circ j$ est l'identité par suite (9.41) entraîne $j^* \circ i^* = id_L$. De même l'égalité

$$i = i^* \circ j^* \circ i$$

montre que $i^* \circ j^* = id_K$ ■

On montre de même que les corps de rationnels sur un anneau commutatif ordonné sont tous isomorphes dans la catégorie des anneaux ordonnés. On montre l'existence de corps de fractions et de corps de rationnels.

Lemme 9.31 *On note $(A, +, .)$ un anneau commutatif et **intègre**, $M = A \times A^*$ et $R \subset M \times M$ la relation de M dans M définie par*

$$R = \{((x, y), (a, b)) \in M \times M / xb = ya\}$$

m *est l'application de $M \times M$ dans M définie par*

$$\mathrm{m}((x, y), (a, b)) = (xa, yb)$$

et s *est l'application de $M \times M$ dans M définie par*

$$\mathrm{s}((x, y), (a, b)) = (xb + ya, yb) \ .$$

Pour toute application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M \times M, M)$ de $M \times M$ dans M, on note φ_f l'application de l'ensemble $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$ dans $\mathcal{P}(M)$ définie par

$$\varphi_f(X, Y) = \{(a, b) \in M / \exists \ [(x, y), (z, t)] \in X \times Y : [(a, b), f((x, y), (z, t))] \in R\}$$

(i) R est une relation d'équivalence sur M, on note $\mathbb{Q}(A) = M/R$ l'ensemble quotient de M par R et

$$\pi : M \mapsto \mathbb{Q}(A)$$

l'application canonique.

(ii) si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(M \times M, M)$ vérifie les propriétés (9.42) et (9.43) suivantes

$$((x, y), (z, t)) \in R \quad \text{et} \quad ((a, b), (c, d)) \in R \Rightarrow (f((x, y), f(a, b))), (f(z, t), f(c, d))) \in R \tag{9.42}$$

et

$$((x, y), (z, t)) \in M \times M \ (c, d) \in M \Rightarrow (f(f((x, y), (z, t)), (c, d)), f((x, y), f((z, t), (c, d))) \in R \tag{9.43}$$

alors

1. *Pour tout $(X, Y) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$ et $Z \in \mathcal{P}(M)$*

$$\varphi_f(\varphi_f(X, Y), Z) = \varphi_f(X, \varphi_f(Y, Z))$$

2. *pour tout $((x, y), (a, b)) \in M \times M$*

$$\varphi_f[\pi(x, y), \pi(a, b)] = \pi[f((x, y), (a, b))]$$

(iii) s *vérifie (9.42) et (9.43) et si σ est la restriction de φ_{s} à $\mathbb{Q}(A)$ alors $(\mathbb{Q}(A), \sigma)$ est un groupe commutatif de plus*

— *l'élément neutre de* σ *est l'ensemble* $\pi(0,1) = \{0\} \times A^*$
— $\mathbb{Q}(A)^* = \{U \in \mathbb{Q}(A)/U \neq \{0\} \times A^*\} = \{U \in \mathbb{Q}(A)/\exists (x,y) \in A^* \times A^* : U = \pi(x,y)\}$

Enfin, pour tout $(x,y) \in A \times A^*$ *l'inverse de* $\pi(x,y)$ *pour la loi* σ *est* $\pi(-x,y)$ *:*

$$\sigma(\pi(x,y), \pi(-x,y)) = \pi(0,1)$$

(iv) m *vérifie (9.42) et (9.43) page 562 et si* μ *est la restriction de* φ_{m} *à* $\mathbb{Q}(A)$ *alors* $(\mathbb{Q}(A), \mu)$ *est un monoïde commutatif d'élément neutre* $\pi(1,1)$ *et*

$$\pi(1,1) = \{(x,y) \in M/x = y\} \ .$$

(v) $(\mathbb{Q}(A), \sigma, \mu)$ *est un corps. l'élément neutre de* $(\mathbb{Q}(A)^*, \mu)$ *est* $\pi(1,1)$ *et pour tout* $(x,y) \in A^* \times A^*$ *l'inverse de* $\pi(x,y)$ *pour la loi* μ *est* $\pi(y,x)$.

(vi) Si $j : A \mapsto \mathbb{Q}(A)$ *est l'application définie par*

$$j(x) = \pi(x,1)$$

$((\mathbb{Q}(A), \sigma, \mu), j)$ *est un corps de fractions de* A *: si* $(K, +, \,\centerdot\,)$ *est un corps commutatif, pour tout morphisme injectif* f *de l'anneau* A *dans l'anneau* K *la relation*

$$f^* = \{(U,y) \in \mathbb{Q}(A) \times K/\exists (a,b) \in M : U = \pi(a,b) \;\; f(b) \in K^* \;\; y = f(a)(f(b))^{-1}\}$$

est un morphisme injectif et c'est l'unique morphisme de $\mathbb{Q}(A)$ *dans* K *tel que*

$$f = f^* \circ j \ .$$

(vii) Si $((K, +, \,\centerdot\,), i)$ *est un corps de fractions de* A *alors pour tout* $b \in A^*$ *on a* $i(b) \in K^*$ *et l'application* φ *de* M *dans* K *définie par*

$$\varphi(a,b) = i(a) \centerdot (i(b))^{-1}$$

est surjective. De plus

$$\varphi(a,b) = \varphi(x,y) \Leftrightarrow ay = bx \tag{9.44}$$

Enfin :

1. *pour tout* $(a,b) \in M$ *et* $(c,d) \in M$

$$\varphi(a,b) + \varphi(c,d) = \varphi(ad + bc, bd)$$

et pour tout $d \in A^*$ $\varphi(0,d)$ *est l'élément neutre de* $(K,+)$,

$$\varphi(0,d) = 0_k \ .$$

2. *pour tout* $(a,b) \in M$ *on a* $\varphi(-a,b) = \varphi(a,-b)$ *et* $\varphi(-a,b)$ *est l'inverse de* $\varphi(a,b)$ *dans* $(K,+)$ *:*

$$\varphi(-a,b) = -\varphi(a,b) = \varphi(a,-b)$$

3. *pour tout* $(a,b) \in M$ *et* $(c,d) \in M$

$$\varphi(a,b) \centerdot \varphi(c,d) = \varphi(ac, bd)$$

et pour tout $d \in A^*$ $\varphi(d,d)$ *est l'élément neutre de* $(K, \centerdot)$,

$$\varphi(d,d) = 1_k \ .$$

4. *pour tout* $(a,b) \in A^* \times A^*$ $\varphi(b,a)$ *est l'inverse de* $\varphi(a,b)$ *dans* $(K, \centerdot)$ *:*

$$\varphi(a,b) \centerdot \varphi(b,a) = \varphi(ab, ab) = 1_k$$

Preuve

(i)

1. reflexivité : l'assertion $((a,b),(a,b)) \in R$ s'écrit
$$ab = ba$$
2. symétrie : l'assertion $((a,b),(c,d)) \in R$ s'écrit $ad = bc$ et l'assertion $((c,d),(a,b)) \in R$ s'écrit $cb = ad$
3. si $((a,b),(c,d)) \in R$, $((c,d),(e,f)) \in R$ alors
$$ad = bc \quad cf = de$$
en multipliant la première égalité par f et la seconde par b on obtient
$$adf = bcf = bde$$
par suite
$$(af - be)d = 0$$
puisque $d \in A^*$ et A est intègre on obtient $af = be$ c'est à dire $((a,b),(e,f)) \in R$

(ii)

C'est le point (i) du lemme [9.8] page 465

(iii)

Remarquons d'abord que puisque A est intègre, s est bien à valeurs dans M.

1 On montre que s vérifie (9.42)

Il s'agit de montrer que si
$$xt = zy \quad \text{et} \quad ad = bc$$
alors
$$(xb + ya)td = yb(zd + tc)$$
or cette égalité est équivalente à l'égalité
$$bd(xt - yz) = (bc - ad)yt.$$

2 On montre que s vérifie (9.43)

Il suffit de montrer
$$\mathrm{s}(\mathrm{s}((x,y),(z,t)),(a,b)) = \mathrm{s}((x,y),\mathrm{s}((z,t),(a,b)))$$
c'est à dire
$$\mathrm{s}((xt + zy, yt),(a,b)) = \mathrm{s}((x,y),(zb + ta, tb))$$
ou encore
$$((xt + zy)b + ayt, ytb) = (xtb + y(zb + ta), ytb)$$
et l'égalité $(xt + zy)b + ayt = xtb + y(zb + ta)$ est claire.

3 On montre que $(\mathbb{Q}(A), \sigma)$ est un groupe commutatif.

1. σ est une loi interne puisque d'après (ii)
$$\sigma(\pi(x,y),\pi(a,b)) = \pi(\mathrm{s}((x,y),(a,b))) = \pi(xb + ya, yb)$$
2. σ est associative d'après (ii)

3. σ est commutative puisque $\mathrm{s}((x,y),(a,b))) = \mathrm{s}((a,b),(x,y))$
4. $\pi(0,1)$ est l'élément neutre de σ puisque

$$\sigma(\pi(x,y),\pi(0,1)) = \pi(x\times 1 + y\times 0, y\times 1) = \pi(x,y)$$

Enfin, $\pi(0,1) = \{0\}\times A^*$ puisque

$$(x,y)\in\pi(0,1) \Leftrightarrow ((x,y),(0,1))\in R \Leftrightarrow x\times 1 = y\times 0 \Leftrightarrow x = 0$$

5. Pour tout $(x,y)\in M$ $\pi(-x,y)$ est l'inverse de $\pi(x,y)$ puisque

$$\sigma(\pi(x,y),\pi(-x,y)) = \pi(xy + (-x)y, y^2) = \pi(0,y^2)$$

et puisque $(0,y^2)\in\{0\}\times A^*$ on a (par 4.) $\pi(0,y^2) = \pi(0,1)$

Enfin on montre que

$$\mathbb{Q}(A)^* = \{U\in\mathbb{Q}(A)/U\neq\pi(0,1)\} = \pi(A^*\times A^*)$$

or

$$\pi(x,y)\neq\pi(0,1) \Leftrightarrow (x,y)\notin\pi(0,1) \Leftrightarrow x\neq 0 \Leftrightarrow (x,y)\in A^*\times A^*\ .$$

(iv)

Remarquons d'abord que puisque A est intègre, m est bien à valeurs dans M.

1 On montre que m vérifie (9.42)

Il s'agit de montrer que si

$$xt = zy \quad \text{et} \quad ad = bc$$

alors

$$xatd = zcyb$$

or

$$xatd = (xt)(ad) = (zy)(bc) = zcyb$$

2 On montre que m vérifie (9.43)

Il suffit de montrer

$$\mathrm{m}(\mathrm{m}((x,y),(z,t)),(a,b)) = \mathrm{m}((x,y),\mathrm{m}((z,t),(a,b)))$$

c'est à dire

$$\mathrm{m}((xz,yt),(a,b)) = \mathrm{m}((x,y),(za,tb))$$

ou encore

$$((xz)a,(yt)b) = (x(za),y(tb))$$

et cette l'égalité provient de l'associativité de la multiplication de A.

3 On montre que $(\mathbb{Q}(A),\mu)$ est un monoïde commutatif.

1. μ est une loi interne puisque d'après (ii)

$$\mu(\pi(x,y),\pi(a,b)) = \pi(\mathrm{m}((x,y),(a,b))) = \pi(xa,yb)$$

2. μ est associative d'après (ii)
3. μ est commutative puisque $\mathrm{m}((x,y),(a,b))) = \mathrm{m}((a,b),(x,y))$

4. $\pi(1,1)$ est l'élément neutre de μ puisque

$$\mu(\pi(x,y),\pi(1,1)) = \pi(x\times 1, y\times 1) = \pi(x,y)$$

Enfin, $\pi(1,1) = \{(x,y)\in M/x=y\}$ puisque

$$(x,y)\in\pi(1,1) \Leftrightarrow ((x,y),(1,1))\in R \Leftrightarrow x\times 1 = 1\times y \Leftrightarrow x=y$$

(v)

On montre que μ est distributive par rapport à σ.
On a

$$\mu(\sigma(\pi(x,y),\pi(z,t)),\pi(a,b)) = \mu(\pi(xt+yz,yt),\pi(a,b)) = \pi(a(xt+yz),ytb))$$

et

$$\sigma(\mu(\pi(x,y),\pi(a,b)),\mu(\pi(z,t),\pi(a,b)))) = \sigma(\pi(xa,yb),\pi(za,tb))) = \pi(xatb+ybza,ytb^2)$$

et l'égalité

$$a(xt+yz)ytb^2 = (xatb+ybza)ytb$$

montre, par définition de la relation d'équivalence, que

$$\pi(a(xt+yz),ytb)) = \pi(xatb+ybza,ytb^2)\ .$$

Pour montrer que $(\mathbb{Q}(A),\sigma,\mu)$ est un corps il reste à montrer que tout élément de $\mathbb{Q}(A)^*$ possède un inverse pour μ. Or si $U\in\mathbb{Q}(A)^*$ il existe (d'après (iii)) un couple $(x,y)\in A^*\times A^*$ tel que $U=\pi(x,y)$, puisque $x\in A^*$ $\pi(y,x)$ est défini et

$$\mu(\pi(x,y),\pi(y,x)) = \pi(\mathrm{m}((x,y),(y,x))) = \pi(xy,yx) = \pi(1,1)$$

puisque d'après (iv) $(xy,xy)\in\pi(1,1)$.

(vi)

1. On montre que j est un morphisme de $(A,+)$ dans $(\mathbb{Q}(A),\sigma)$

   Puisque $\mathrm{s}((x,1),(y,1)) = (x\times 1+y\times 1, 1\times 1) = (x+y,1)$ on obtient

   $$j(x+y) = \pi(x+y,1) = \pi(\mathrm{s}((x,1),(y,1))) = \sigma(\pi(x,1),\pi(y,1))$$

2. On montre que j est un morphisme de $(A,.)$ dans $(\mathbb{Q}(A),\mu)$

   Puisque $\mathrm{m}((x,1),(y,1)) = (xy,1\times 1) = (xy,1)$ on obtient

   $$j(xy) = \pi(xy,1) = \pi(\mathrm{m}((x,1),(y,1))) = \mu(\pi(x,1),\pi(y,1))$$

   d'autre part on a $j(1)=\pi(1,1)$.

3. On montre que j est injective

   Si $\pi(x,1)=\pi(y,1)$ alors $x\times 1 = 1\times y$ par suite $x=y$

4. On montre la propriété universelle

   Si $(K,+_k,\centerdot)$ est un corps commutatif d'unité 1_k et $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(A,K)$ un morphisme injectif, on considère la relation f^* de $\mathbb{Q}(A)$ dans K définie par

   $$f^* = \{(U,y)\in\mathbb{Q}(A)\times K/\exists\ (a,b)\in M:\ U=\pi(a,b)\ , f(b)\in K^*\ ,\ y=f(a)\centerdot(f(b))^{-1}\}$$

1 On montre que f^* est une application

(a) $\mathrm{dom}(f^*) = \mathbb{Q}(A)$.

Si $U \in \mathbb{Q}(A)$ il existe $(a, b) \in A \times A^*$ tel que $U = \pi(a, b)$. Puisque f est un morphisme injectif et $b \in A^*$ on a $f(b) \in K^*$ par suite

$$(U, f(a) \centerdot (f(b))^{-1}) \in f^* \ .$$

(b) f^* est une fonction.

Si $(U, y) \in f^*$ et $(U, y') \in f^*$ alors il existe $(a, b) \in M$ et $(a', b') \in M$ tel que

$$U = \pi(a, b) = \pi(a', b') \quad y = f(a) \centerdot (f(b))^{-1} \quad y' = f(a') \centerdot (f(b'))^{-1}$$

mais l'égalité $\pi(a, b) = \pi(a', b')$ entraîne $ab' = ba'$, puisque f est un morphisme on obtient $f(a) \centerdot f(b') = f(ab') = f(ba') = f(b) \centerdot f(a')$, f étant injective on a $f(b) \in K^*$ et $f(b') \in K^*$ par suite

$$y = f(a) \centerdot (f(b))^{-1} = f(a') \centerdot (f(b'))^{-1} = y'$$

2 On montre que f^* est injective

Si $f^*(\pi(x, y)) = f^*(\pi(a, b))$ alors

$$f(x) \centerdot (f(y))^{-1} = f(a) \centerdot (f(b))^{-1}$$

par suite $f(xb) = f(ya)$, f étant injective on obtient $xb = ya$ ainsi $((x, y), (a, b)) \in R$ et

$$\pi(x, y) = \pi(a, b)$$

3 On montre que f^* est un morphisme de $(\mathbb{Q}(A), \sigma)$ dans $(K, +_k)$

On a

$$f^*(\sigma(\pi(x, y), \pi(a, b))) = f^*(\pi(xb + ya, yb)) = (f(xb + ya)) \centerdot [(f(b))^{-1} \centerdot (f(y))^{-1}]$$

d'où

$$f^*(\sigma(\pi(x, y), \pi(a, b))) = (f(xb)) \centerdot [(f(b))^{-1} \centerdot (f(y))^{-1}] +_k (f(ya)) \centerdot [(f(b))^{-1} \centerdot (f(y))^{-1}]$$

or

$$(f(xb)) \centerdot [(f(b))^{-1}(f(y))^{-1}] = (f(x)) \centerdot (f(y))^{-1} = f^*(\pi(x, y))$$

et

$$(f(ya)) \centerdot [(f(b))^{-1} \centerdot (f(y))^{-1}] = (f(a)) \centerdot (f(b))^{-1} = f^*(\pi(a, b))$$

4 On montre que f^* est un morphisme de $(\mathbb{Q}(A), \mu)$ dans $(K, \centerdot)$

On a

$$f^*(\mu(\pi(x, y), \pi(a, b))) = f^*(\pi(xa, yb)) = (f(xa)) \centerdot [(f(b))^{-1} \centerdot (f(y))^{-1}]$$

d'où

$$f^*(\mu(\pi(x, y), \pi(a, b))) = f^*(\pi(xa, yb)) = (f(x)) \centerdot (f(y))^{-1} \centerdot f(a)(f(b))^{-1}$$

ainsi

$$f^*(\mu(\pi(x, y), \pi(a, b))) = f^*(\pi(x, y)) \centerdot f^*(\pi(a, b))$$

5 On montre que $f = f^* \circ j$

On a $f^*(j(x)) = f^*(\pi(x, 1)) = f(x) \centerdot (f(1))^{-1}$ mais puisque f est un morphisme on a $f(1) = 1_k$ et $(f(1))^{-1} = 1_k$

6 On montre l'unicité de f^*.

On remarque d'abord que d'après (iii) et (v) pour tout $(x,y) \in M$ alors $j(y) \in \mathbb{Q}(A)^*$ et

$$\pi(x,y) = \mu(\pi(x,1), \pi(1,y)) = \mu(j(x), j(y)^{-1})$$

ainsi, si g est un morphisme injectif de $(\mathbb{Q}(A), \mu)$ dans $(K, \centerdot)$ on obtient

$$g(\pi(x,y)) = g(\mu(j(x), j(y)^{-1})) = g(j(x)) \centerdot g((j(y))^{-1}) = g \circ j(x) \centerdot (g \circ j(y))^{-1}$$

en particulier, si $g \circ j = f$, on a $g = f^*$.

(vii)

Puisque i est un morphisme injectif on a $i(b) \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$, d'autre part d'après (vi) il existe un unique morphisme injectif i^* de $\mathbb{Q}(A)$ dans K vérifiant, pour tout $(a,b) \in M$

$$i^*(\pi(a,b)) = i(a) \centerdot (i(b))^{-1} = \varphi(a,b) \tag{9.45}$$

et $i^* \circ j = i$. on montre que i^* est aussi surjectif. Par définition d'un corps de fractions de A il existe un morphisme injectif j^* de K dans $\mathbb{Q}(A)$ tel que

$$j = j^* \circ i$$

ainsi $i^* \circ j^*$ est un morphisme injectif de K dans K vérifiant $(i^* \circ j^*) \circ i = i$, mais par définition d'un corps de fractions de A le seul morphisme vérifiant cette égalité est l'identité de K, ainsi pour tout $x \in K$ $j^*(x)$ est un élément de $\mathbb{Q}(A)$ tel que $i^*(j^*(x)) = x$. Ceci montre que pour tout $x \in K$ il existe $U_x \in \mathbb{Q}(A)$ tel que $i^*(U_x) = x$ (unique puisque i^* est injective). Puisque $\pi : M \mapsto \mathbb{Q}(A)$ est surjective il existe $(a,b) \in M$ tel que $U_x = \pi(a,b)$ et (9.45) montre alors que

$$\varphi(a,b) = i^*(\pi(a,b)) = i^*(U_x) = x \ .$$

Enfin, puisque i est un morphisme injectif

$$i(a)(i(b))^{-1} = i(x)(i(y))^{-1} \Leftrightarrow i(a)i(y) = i(x)i(b) \Leftrightarrow i(ay) = i(xb) \Leftrightarrow ay = xb \ .$$

On montre maintenant *1. 2. , 3. , 4.*,

1. Si $(a,b) \in M$ et $(c,d) \in M$ on a

$$\varphi(a,b) + \varphi(c,d) = i(a) \centerdot (i(b))^{-1} + i(c) \centerdot (i(d))^{-1}$$

en multipliant les termes de cette égalité par $i(bd) = i(b) \centerdot i(d)$ on obtient

$$i(bd)(\varphi(a,b) + \varphi(c,d)) = i(ad + cb)$$

ainsi

$$\varphi(a,b) + \varphi(c,d) = i(ad + bc) \centerdot (i(bd))^{-1} = \varphi(ad + bc, bd)$$

Puisque φ est surjective, pour tout $x \in K$ il existe $(a,b) \in M$ tel que $x = \varphi(a,b)$ ainsi

$$x + \varphi(0,d) = \varphi(a,b) + \varphi(0,d) = \varphi(ad + b \times 0, bd) = \varphi(ad, bd)$$

or

$$\varphi(ad, bd) = i(ad)(i(bd))^{-1} = i(a) \centerdot (i(b))^{-1}(i(d) \centerdot (i(d))^{-1}) = i(a)(i(b))^{-1} = x$$

et pour tout $d \in A^*$ et $x \in K$

$$x + \varphi(0,d) = x \ .$$

et $\varphi(0,d) = 0_k$

2. Puisque $(-a)(-b) = ab$ on a, d'après (9.44) page 563, $\varphi(-a,b) = \varphi(a,-b)$. D'autre part

$$\varphi(a,b) + \varphi(-a,b) = \varphi(ab + (-a)b, b^2) = \varphi(0,b^2) = 0_k$$

3. Si $(a,b) \in M$ et $(c,d) \in M$ on a

$$\varphi(a,b) \centerdot \varphi(c,d) = (i(a) \centerdot (i(b))^{-1})(i(c) \centerdot (i(d))^{-1})$$

ainsi

$$\varphi(a,b) \centerdot \varphi(c,d) = i(ac) \centerdot (i(bd))^{-1} = \varphi(ac,bd)$$

Puisque φ est surjective, pour tout $x \in K$ il existe $(a,b) \in M$ tel que $x = \varphi(a,b)$ ainsi

$$x \centerdot \varphi(d,d) = \varphi(ad,bd)$$

or

$$\varphi(ad,bd) = i(ad) \centerdot (i(bd))^{-1} = (i(a) \centerdot (i(b))^{-1}) \centerdot (i(d) \centerdot (i(d))^{-1}) = i(a) \centerdot (i(b))^{-1} = x$$

et pour tout $d \in A^*$ et $x \in K$

$$x \centerdot \varphi(d,d) = x \ .$$

et $\varphi(d,d) = 1_k$

4. D'après *3.* si $(a,b) \in A^* \times A^*$ on a $\varphi(ab,ba) = 1_k$, par suite

$$\varphi(a,b) \centerdot \varphi(b,a) = \varphi(ab,ba) = 1_k$$

■

On fixe les résultats du lemme [9.31] page 562 dans des notations plus usuelles. Si $(K,+,\centerdot)$ est un corps et $x \in K^*$ on note $\frac{1}{x}$ l'inverse multiplicatif de x et pour tout $(x,y) \in K \times K^*$ on note $\frac{x}{y}$ l'élément xy^{-1} on a alors les relations usuelles des corps commutatifs

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{et} \quad (\frac{a}{b}) \centerdot (\frac{c}{d}) = \frac{ac}{bd}$$

avec

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Dans le formalisme usuel le point (vii) du lemme [9.31] (p. 562) montre que si $((K,+,\centerdot),i)$ est un corps de fractions de A alors pour tout $x \in K$ il existe $(a,b) \in A \times A^*$ tel que

$$x = \frac{i(a)}{i(b)} \ .$$

0n montre maintenant l'existence de corps de rationnels d'un anneau commutatif ordonné A. Si $(A,+,.,\leq)$ est un anneau ordonné le lemme [9.4] page 437 permet d'affirmer que A est intègre, ainsi si A est commutatif le lemme [9.31] page 562 montre qu'il existe un corps de fractions de A qu'on note $((K,+,\centerdot),i)$, on va montrer qu'il existe un ordre O sur K tel que $((K,+,\centerdot,O),i)$ est un corps de rationnels de A. Dans le lemme qui suit on utilise les notations et résultats des lemmes [9.4] page 437 et [9.31] page 562.

Lemme 9.32 *On note $(A,+,.,\leq)$ un anneau commutatif ordonné et $((K,+,\centerdot),i\,)$ un corps de fractions de A, de plus*

— *L'application φ de $A \times A^*$ dans K est définie par*

$$\varphi(a,b) = \frac{i(a)}{i(b)}$$

— *Le sous-ensemble de* Γ *de* $A \times A^*$ *est défini par*

$$\Gamma = \{(a,b) \in A \times A^* / ab \geq 0\}$$

— *Le sous-ensemble* K_+ *de* K *est défini par*

$$K_+ = \varphi(\Gamma) = \{x \in K / \exists\ (a,b) \in \Gamma : x = \varphi(a,b)\}$$

(i) Pour tout $x \in K_+$ *il existe* $(a,b) \in A_+ \times A_+^*$ *tel que*

$$x = \varphi(a,b)\ .$$

(ii) Si $(x,y) \in K_+ \times K_+$ *alors*

$$x + y \in K_+ \quad \text{et} \quad x \centerdot y \in K_+$$

(iii) La relation O *de* K *dans* K *définie par*

$$O = \{(x,y) \in K \times K / y - x \in K_+\}$$

est une relation d'ordre total compatible avec les lois de K*. Ainsi* $(K, +, \centerdot, O)$ *est un corps ordonné et*

$$K_+ = \{x \in K / (0_k, x) \in O\}$$

(iv) $((K, +, \centerdot, O), i)$ *est un corps de rationnels de* A*.*

Preuve

(i)

D'après le lemme [9.4] page 437 on a

$$\Gamma = (A_+ \times A_+^*) \cup (A_- \times A_-^*)$$

mais si $x = \varphi(a,b)$ avec $(a,b) \in A_- \times A_-^*$ alors $(-a,-b) \in A_+ \times A_+^*$ et $x = \varphi(-a,-b)$ puisque l'égalité $a(-b) = (-a)b$ entraîne, d'après le lemme [9.31] page 562 $\varphi(a,b) = \varphi(-a,-b)$.

(ii)

Si $(x,y) \in K_+ \times K_+$ il existe $(a,b) \in A_+ \times A_+^*$ et $(c,d) \in A_+ \times A_+^*$ tel que $x = \dfrac{i(a)}{i(b)}$ et $y = \dfrac{i(c)}{i(d)}$ par suite

$$x + y = \frac{i(ad+bc)}{i(bd)}$$

et la compatibilité des lois de A avec l'ordre montre que

$$(ad+bc)(bd) \geq 0$$

de même

$$x \centerdot y = \frac{i(ac)}{i(bd)}$$

et la compatibilité de la multiplication de A avec l'ordre montre que

$$(ac)(bd) \geq 0$$

(iii)

1. réflexivité : puisque i est un morphisme de A dans K on a $i(0_a) = 0_k = \varphi(0_a, 1_a)$ et $1_a 0_a \geq 0_a$ par suite $0_k \in K_+$ et pour tout $x \in K$ $(x,x) \in O$

2. transitivité : si $(x, y) \in O$ et $(y, z) \in O$ alors

$$y - x \in K_+ \quad \text{et} \quad z - y \in K_+$$

ainsi (ii) et l'égalité $z - x = (z - y) + (y - x)$ montre que $z - x \in K_+$ par suite $(x, z) \in O$

3. antisymétrie : on montre d'abord que si $(0, x) \in O$ et $(x, 0) \in O$ alors $x = 0_k$. Il s'agit de montrer que si $x \in K_+$ et $-x \in K_+$ alors $x = 0$. Mais si $x \in K_+$ et $-x \in K_+$ il existe $(a, b) \in A_+ \times A_+^*$ et $(c, d) \in A_+ \times A_+^*$ tels que

$$x = \varphi(a, b) \quad \text{et} \quad -x = \varphi(c, d)$$

ainsi (voir lemme [9.31] page 562)

$$\varphi(a, b) = \varphi(-c, d)$$

et $ad = (-c)b = -(cb)$ or la compatibilité des lois de A avec l'ordre sur A montre que

$$ab \geq 0 \quad \text{et} \quad -(cb) \leq 0$$

l'antisymétrie de $\leq$ montre alors que $ab = 0$, puisque $b \neq 0$ l'intégrité de A entraîne $a = 0$ par suite $x = \varphi(0, b) = 0_k$. Or l'assertion $(x, y) \in O \quad \text{et} \quad (y, x) \in O$ est l'assertion

$$y - x \in K_+ \quad \text{et} \quad -(y - x) \in K_+ \ .$$

et on vient de voir que cela entraîne $y - x = 0_k$ et $y = x$.

4. On montre que O est un ordre total sur K. D'après le lemme [9.31] page 562 l'application φ est surjective de $A \times A^*$ dans K. Par suite si $(x, y) \in K \times K$ il existe $(a, b) \in A \times A^*$ et $(c, d) \in A \times A^*$ tel que

$$x = \varphi(a, b) \quad \text{et} \quad y = \varphi(c, d)$$

le même lemme montre que

$$y - x = \varphi(c, d) - \varphi(a, b) = \varphi(cb - da, bd) \quad \text{et} \quad x - y = \varphi(ad - bc, bd)$$

puisque A est totalement ordonné on a $(cb - da)bd \geq 0 \quad \text{ou} \quad (cb - da)bd \leq 0$,
— si $(cb - da)bd \geq 0$ alors $y - x \in K_+$ et $(x, y) \in O$
— si $(cb - da)bd \leq 0$ alors $(ad - bc)bd \geq 0$ et $(y, x) \in O$.

5. On montre [$x \in K \Rightarrow y \mapsto x + y$ est strictement croissante. L'égalité

$$x + t - (x + z) = t - z$$

montre :

$$(z, t) \in O \Rightarrow (x + z, x + t) \in O$$

l'injectivité de $y \mapsto x + y$ assure alors la croissance stricte.

6. On montre [$x \in K_+^* \Rightarrow y \mapsto x \centerdot y$ est strictement croissante. L'égalité

$$x \centerdot t - (x \centerdot z) = x \centerdot (t - z)$$

et (ii) montre :

$$x \neq 0_k, (0, x) \in O \quad \text{et} \quad (z, t) \in O \Rightarrow (x \centerdot z, x \centerdot t) \in O$$

puisque $x \neq 0_k$, l'injectivité de $y \mapsto x \centerdot y$ assure alors la croissance stricte.

Enfin , par définition de O, on a

$$x \in K_+ \Leftrightarrow (0_k, x) \in O \Leftrightarrow x \geq 0_k \ .$$

$$(iv)$$

Il reste à voir que i est strictement croissante de $(A, \leq)$ dans (K, O). Or si $a \leq b$ alors, puisque i est un morphisme de $(A, +, .)$ dans $(K, +, \ \centerdot\ )$ on a

$$i(b) - i(a) = \varphi(b - a, 1_a)$$

avec $(b-a)1_a \geq 0$ par suite $(i(a), i(b)) \in O$. Ainsi i est croissante et son injectivité assure alors la croissance stricte. ■

Les lemmes [9.31] page 562 et [9.32] page 569 permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 9.6 ***Existence de corps de fractions et de corps de rationnels***

(i) Tout anneaux commutatif intègre possède un corps de fractions.

(ii) Si $(A, +, \ .\ , \ O_0\ )$ *est un anneau commutatif ordonné et* $((K, +, \ \centerdot\ ), \ i\ )$ *est un corps de fraction de* $(A, +, .)$ *il existe un ordre* O *sur* K *tel que* $((K, +, \ \centerdot\ , \ O), \ i\ )$ *est un corps de rationnels de* $(A, + \ , \ . \ , \ O_0\ )$

Dans la proposition et définition [9.1] page 447 on a vu que si $(A, +, ., O_0\ )$ est un anneau ordonné il existe un unique sous-ensemble $\mathbb{N}$ de A vérifiant :
— $0_a \in \mathbb{N}$ et $0_a = \min_O\{k : k \in \mathbb{N}\}$
— $(\mathbb{N}, O_0 \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ est un sous-ensemble d'entiers naturels de succession

$$s(n) = n + 1_a$$

$\mathbb{N}$ est appelé l'ensemble des entiers naturels de A et A est archimèdien si pour tout $(a, b) \in A_+^* \times A$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $ka \geq b$. Lorsque $(A, +, ., O)$ est archimèdien, tout corps de rationnels sur A est archimèdien.

Lemme 9.33 *On note* $(A, + \ , \ . \ , \ O_0)$ *un anneau commutatif ordonné,* $((K, \ + \ , \ \centerdot\ ) \ , \ i\ )$ *un corps de fractions de* $(A, \ + \ , \ . \ )$ *et* O *un ordre sur* K *tel que* $((K, +, \ \centerdot\ , O\ ), i\ )$ *est un corps de rationnels de* $(A, + \ , \ . \ , \ O_0)$.

(i) Si $\mathbb{N}$ *est le sous-ensemble d'entiers naturels de* $(A, +, ., O_0)$ *alors* $i(\mathbb{N})$ *est le sous-ensemble d'entiers naturels de* $(K, +, \ \centerdot\ , \ O\ )$

(ii) Si $(A, +, \ . \ , \ O_0\ )$ *est archimèdien alors* $(K, +, \ \centerdot\ , \ O\ )$ *est archimèdien.*

(iii) $\mathrm{im}(i)$ *est un sous-anneau de* K *qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $(\mathrm{im}(i), +, \ \centerdot\ , O \cap (\mathrm{im}(i) \times \mathrm{im}(i)))$ *est un anneau ordonné*
2. *si* $j : \mathrm{im}(i) \mapsto K$ *est l'application de* $\mathrm{im}(i)$ *dans* K *définie par*

   $$j(x) = x$$

   alors

   (a) $((K, +, \ \centerdot\ ), j\ )$ *est un corps de fractions de* $(\mathrm{im}(i), \ + \ , \ \centerdot\ )$

   (b) $((K, +, \ \centerdot\ , O), j\ )$ *est un corps de rationnels de* $(\mathrm{im}(i), +, \ \centerdot\ , \ O \cap (\mathrm{im}(i) \times \mathrm{im}(i)))$
3. *pour tout* $x \in K$ *il existe* $(a, b) \in \mathrm{im}(i) \times \mathrm{im}(i)^*$ *tel que*

   $$x = \frac{a}{b}$$
4. *Si* $\mathbb{N}_0$ *est l'ensemble des entiers naturels de* $\mathrm{im}(i)$ *alors*

(a) $\mathbb{N}_0$ *est l'ensemble des entiers naturels de* K*,*

(b) Si $(A, +, \ . \ , \ O_0 \ )$ *est archimèdien alors pour tout* $(x, y) \in K_+^* \times K$ *il existe* $k \in \mathbb{N}_0$ *tel que* $(y, kx) \in O$

Preuve

(i)

Il s'agit de montrer

1. $0_k \in i(\mathbb{N})$ et $0_k = \min_O\{k : k \in i(\mathbb{N})\}$
2. $(i(\mathbb{N}), O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})))$ est un ensemble d'entiers naturels de succession

$$s(n) = n + 1_k$$

1. Puisque i est un morphisme d'anneaux $0_k = i(0_a)$ ainsi $0_k \in i(\mathbb{N})$. Puisque $0_a = \min_{O_0}\{k : k \in \mathbb{N}\}$ et i est strictement croissante, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $(i(0_a), i(k)) \in O$.
2. Cela provient de la croissance stricte de i
   (a) D'abord on montre que tout sous-ensemble non vide de $(i(\mathbb{N}),\ O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})))$ possède un minimum. Si X est un sous-ensemble non vide de $i(\mathbb{N})$ on pose

   $$E = i^{-1}(X) = \{k \in \mathbb{N}/i(k) \in X\} \ .$$

   Puisque $(\mathbb{N}, O_0 \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ est bien ordonné E possède un minimum :

   $$n_0 = \min_{O_0}\{k : k \in E\}$$

   on montre que

   $$i(n_0) = \min_O\{x : x \in X\} \ .$$

   — Puisque $n_0 \in E$ on a $i(n_0) \in X$
   — Si $x \in X$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = i(k)$ ainsi $i(k) \in X$ et $k \in E$, par suite

   $$n_0 \leq k$$

   la croissance de i montre alors que $i(n_0) \leq i(k)$ par suite

   $$\forall \ x \in X \quad i(n_0) \leq x \ .$$

   (b) On montre que la succession de $(i(\mathbb{N}), O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})))$ est

   $$s(x) = \min_O\{y : y \in]x, \to [\cap i(\mathbb{N})\} = x + 1_k \ .$$

   Puisque i est un morphisme, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $i(n+1) = i(n) + i(1_a) = i(n) + 1_k$ il suffit de montrer que

   $$\forall \ n \in \mathbb{N} \quad s(i(n)) = \min_O\{y : y \in]i(n), \to [\cap i(\mathbb{N})\} = i(n+1)$$

   Puisque $i(n+1) > i(n)$ on a $s(i(n)) \leq i(n+1)$. Il reste à montrer

   $$[(i(n), y) \in O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})) \quad \text{et} \quad y \neq i(n)] \Rightarrow (i(n+1), y) \in O \ .$$

   Mais si $(i(n), y) \in O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N}))$ alors $y \in i(\mathbb{N})$ ainsi il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $y = i(u)$.
   — Puisque $y > i(n)$ on a $u > n$, en effet, si $u \leq n$ alors $y = i(u) \leq i(n) < y$.
   — Puisque $u > n$ on a $n + 1 \leq u$ par suite $i(n+1) \leq i(u)$ et $(i(n+1), y) \in O$.

(c) Pour montrer que $(i(\mathbb{N}), O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})))$ est un ensemble d'entiers naturels il reste à voir que $(i(\mathbb{N}), O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})))$ est sans élément maximal et que le seul ensemble héréditaire de $(i(\mathbb{N}), O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})))$ est $i(\mathbb{N})$, mais si $x \in i(\mathbb{N})$ alors $x + 1_k \in i(\mathbb{N})$ et $x + 1_k > x$, par suite x n'est pas maximal. Enfin, si H' est un sous-ensemble héréditaire de $(i(\mathbb{N}), O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})))$ on montre que l'ensemble

$$H = i^{-1}(H') = \{k \in \mathbb{N} / i(k) \in H'\}$$

est héréditaire dans $(\mathbb{N}, O_0 \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$.

— D'abord $0_a \in H$ puisque $i(0_a) = 0_k$ et 0_k est le plus petit élément de $i(\mathbb{N})$(et appartient donc à H') .

— Ensuite, si $n \in H$ alors $i(n) \in H'$, H' étant héréditaire on a $s(i(n)) \in H'$ mais la succession de $(i(\mathbb{N}), O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})))$ vérifie $s(i(n)) = i(n+1)$ par suite

$$n \in H \Rightarrow i(n+1) \in H' \Rightarrow n+1 \in H$$

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $i(k) \in H'$ d'où

$$i(\mathbb{N}) \subset H' \subset i(\mathbb{N}) \ .$$

(ii)

On note $\mathbb{N}$ le sous-ensemble d'entiers naturels de $(A, +, \ . \ , \ O_0 \ )$, puisque $i(\mathbb{N})$ est le sous-ensemble d'entiers naturels de $(K, +, \ \centerdot \ , \ O \ )$ il s'agit de montrer que pour tout $(x, y) \in K_+^* \times K$ il existe $p \in i(\mathbb{N})$ tel que $(y, px) \in O$.

— si $(y, 0_k) \in O$ on prend $p = 0_k$

— si $y \in K_+^*$ alors le lemme [9.32] page 569 montre qu'il existe $(a, b) \in A_+^* \times A_+^*$ et $(c, d) \in A_+^* \times A_+^*$ tel que

$$x = i(a) \centerdot (i(b))^{-1} = \frac{i(a)}{i(b)} \quad \text{et} \quad y = i(c) \centerdot (i(d))^{-1} = \frac{i(c)}{i(d)} \ .$$

Puisque A est achimèdien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$nad \geq bc$$

i étant un morphisme croissant on obtient

$$i(n) \centerdot i(a) \centerdot i(d) \geq i(b) \centerdot i(c) \tag{9.46}$$

puisque $(K, +, \ \centerdot \ , \ O \ )$ est un anneau ordonné l'application $u \mapsto (i(b))^{-1}(i(d))^{-1}u$ est croissante et l'inégalité (9.46) montre que

$$i(n) \centerdot i(a) \centerdot (i(b))^{-1} \geq i(c) \centerdot (i(d))^{-1}$$

c'est à dire

$$i(n) \centerdot x \geq y$$

(iii)

1. Puisque par construction i est un morphisme d'anneaux $\mathrm{im}(i)$ est un sous-anneau de K, la compatibilité des lois et de l'ordre induit suit de celle de des lois de K et de O.

2. (a) Il s'agit de montrer que pour tout corps $(L, +, \times \ )$ et pour tout morphisme injectif f de $\mathrm{im}(i)$ dans L il existe un unique morphisme injectif f^* de $(K, +, \ \centerdot \ )$ dans $(L, +, \times \ , \ )$ tel que

$$\forall \ x \in \mathrm{im}(i) \quad f(x) = f^* \circ j(x) = f^*(x) \ .$$

mais puisque $f \circ i$ est un morphisme injectif de A dans L, par définition d'un corps de fractions il existe un unique morphisme injectif g de K dans L tel que

$$g \circ i = f \circ i$$

en particulier, puisque pour tout $x \in \mathrm{im}(i)$ il existe $y \in A$ tel que $x = i(y)$ on obtient

$$g(x) = g(i(y)) = f(i(y)) = f(x) \ .$$

(b) Il s'agit de montrer que pour tout corps ordonné $(L, +, \times, \ O_l)$ et pour tout morphisme strictement croissant f de $\mathrm{im}(i)$ dans L il existe un unique morphisme strictement croissant f^* de $(K, +, \ \centerdot \ , \ O \ )$ dans $(L, +, \times \ , \ O_l \ )$ tel que

$$\forall \ x \in \mathrm{im}(i) \quad f(x) = f^* \circ j(x) = f^*(x) \ .$$

mais puisque $f \circ i$ est un morphisme strictement croissant de A dans L, par définition d'un corps de rationnels il existe un unique morphisme strictement croissant g de K dans L tel que

$$g \circ i = f \circ i$$

en particulier, pour tout $x \in \mathrm{im}(i)$

$$g(x) = f(x) \ .$$

3. D'après le lemme [9.31] page 562, il résulte du fait que $((K, +, \ \centerdot \ ) \ , \ j \ )$ est un corps de fractions de $\mathrm{im}(i)$ que l'application φ de $\mathrm{im}(i) \times \mathrm{im}(i)^*$ dans K définie par

$$\varphi(a, b) = j(a)(j(b))^{-1} = \frac{a}{b}$$

est surjective.

4. (a) Il est clair que si $\mathbb{N}$ est l'ensemble d'entiers naturels de A alors $\mathbb{N}_0 = i(\mathbb{N})$, en effet,

$$[O \cap (\mathrm{im}(i) \times \mathrm{im}(i))] \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})) = O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N}))$$

et d'après (i)
— $0_k \in \mathrm{im}(i)$ et $0_k = \min_O\{k : k \in i(\mathbb{N})\}$
— $(i(\mathbb{N}), O \cap (i(\mathbb{N}) \times i(\mathbb{N})))$ est un ensemble d'entiers naturels et c'est l'ensemble d'entiers naturels de $(K, +, \ \centerdot \ , \ O \ )$.

(b) D'après (ii) $(K, +, \ \centerdot \ , \ O)$ est archimèdien et on vient de voir que $\mathbb{N}_0$ est son ensemble d'entiers naturels.

∎

Le corps des rationnels d'un ensemble d'entiers relatif s'appelle le corps des entiers rationnels.

9.5.5 *Corps des entiers rationnels*

Par définition un corps d'entiers rationnels est un corps de rationnels sur un ensemble d'entiers relatifs.

Définition 9.47 *Un corps commutatif ordonné* $(\mathbb{Q} \ , \ + \ , \ \centerdot \ , \ O)$ *est appelé un* ***corps d'entiers rationnels*** *s'il existe un couple* $((\mathbb{Z}, +, \ \times \ , \ O_0 \ ) \ , \ i \ )$ *où*
— $(\mathbb{Z} \ , \ + \ , \ \times \ , \ O_0 \ )$ *est un ensemble d'entiers relatifs*
— i *est un morphisme strictement croissant de* $(\mathbb{Z} \ , \ + \ , \ \times \ , \ O_0 \ )$ *dans* $(\mathbb{Q} \ , \ + \ , \ \centerdot \ , \ O \ )$
ce couple vérifie les propriété suivantes :

1. $((\mathbb{Q} \ , \ + \ , \ \centerdot \ ), \ i \ )$ *est un corps de fractions de* $(\mathbb{Z} \ , \ + \ , \ \times \ )$
2. $((\mathbb{Q} \ , \ + \ , \ \centerdot \ , \ O), \ i \ )$ *est un corps de rationnels de* $(\mathbb{Z} \ , \ + \ , \ \times \ , \ O_0 \ )$

L'existence de corps d'entiers rationnels est assurée par les lemmes [9.31] page 562 et [9.32] page 569 . On montre que les corps d'entiers rationnels sont isomorphes dans la catégorie des anneaux ordonnés.

Théorème 9.7 *Si* $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O)$ *et* $(\mathbb{Q}'\ ,\ +'\ ,\odot\ ,\ O')$ *sont des corps d'entiers rationnels il existe un morphisme strictement croissant* f *de* $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$ *dans* $(\mathbb{Q}'\ ,\ +'\ ,\ \odot\ ,\ O'\ )$ *et un morphisme strictement croissant* g *de* $(\mathbb{Q}'\ ,\ +'\ ,\ \odot\ ,\ O')$ *dans* $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$ *tels que*

$$g \circ f = id_{\mathbb{Q}} \quad \text{et} \quad f \circ g = id_{\mathbb{Q}'}$$

Preuve On note $((\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \times\ ,\ O_0\ ),\ i\ )$ un couple où
— $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \times\ ,\ O_0\ )$ est un ensemble d'entiers relatifs
— i est un morphisme strictement croissant de $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \times\ ,\ O_0\ )$ dans $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$
et

1. $((\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ),\ i\ )$ est un corps de fractions de $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \times\ )$
2. $((\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O),\ i\ )$ est un corps de rationnels de $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \times\ ,\ O_0\ )$

de même On note $((\mathbb{Z}'\ ,\ +'\ ,\ \star\ ,\ O_0'\ ),\ j\ )$ un couple où
— $(\mathbb{Z}'\ ,\ +'\ ,\ \star\ ,\ O_0'\ )$ est un ensemble d'entiers relatifs
— j est un morphisme strictement croissant de $(\mathbb{Z}'\ ,\ +\ ,\ \star\ ,\ O_0'\ )$ dans $(\mathbb{Q}'\ ,\ +\ ,\ \odot\ ,\ O'\ )$
et

1. $((\mathbb{Q}'\ ,\ +'\ ,\ \odot\ ),\ j\ )$ est un corps de fractions de $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \times\ )$
2. $((\mathbb{Q}\ ,\ +'\ ,\ \odot\ ,\ O'),\ j\ )$ est un corps de rationnels de $(\mathbb{Z}'\ ,\ +'\ ,\ \star\ ,\ O_0'\ )$

D'après le théorème [8.8] page 281 il existe un morphisme u bijectif et strictement croissant de l'anneau ordonné $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \times\ ,\ O_0\ )$ dans $(\mathbb{Z}'\ ,\ +'\ ,\ \star\ ,\ O_0'\ )$. Ainsi $j \circ u$ est un morphisme strictement croissant de $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \times\ ,\ O_0\ )$ dans $(\mathbb{Q}'\ ,\ +'\ ,\ \odot\ ,\ O'\ )$, la définition d'un corps de rationnels montre alors qu'il existe un morphisme strictement croissant f de $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$ dans $(\mathbb{Q}'\ ,\ +'\ ,\ \odot\ ,\ O'\ )$ tel que

$$f \circ i = j \circ u$$

de même il existe un morphisme strictement croissant g de $(\mathbb{Q}'\ ,\ +'\ ,\ \odot\ ,\ O'\ )$ dans $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$ tel que

$$g \circ j = i \circ u^{-1}\ .$$

Ainsi $g \circ f$ est un morphisme strictement croissant de $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$ dans $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$ vérifiant

$$(g \circ f) \circ i = g \circ (f \circ i) = g \circ (j \circ u) = (g \circ j) \circ u = i$$

et par définition d'un corps de rationnels le seul morphisme φ strictement croissant vérifiant $\varphi \circ i = i$ est l'identité de $\mathbb{Q}$, par suite on obtient $g \circ f = id_{\mathbb{Q}}$. De mème l'égalité

$$(f \circ g) \circ j = j$$

entraìne $f \circ g = id_{\mathbb{Q}'}$ ■

Les lemmes qui suivent donnent quelques propriétés utiles des corps d'entiers rationnels. Dans la proposition et définition [9.1] page 447 on a vu que si $(A\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O_0\ )$ est un anneau ordonné il existe un unique sous-ensemble $\mathbb{N}$ de A vérifiant :
— $0_a \in \mathbb{N}$ et $0_a = \min_O\{k : k \in \mathbb{N}\}$
— $(\mathbb{N}, O_0 \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ est un sous-ensemble d'entiers naturels de succession

$$s(n) = n + 1_a$$

$\mathbb{N}$ est appelé l'ensemble des entiers naturels de A

Lemme 9.34 *On note* $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$ *un corps d'entiers rationnels et* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels .*

(i) l'ensemble $\mathbb{Z}$ *défini par*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N} = \{u \in \mathbb{Q} / \exists\ (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : u = m - n\}$$

possède les propriétés suivantes :

1. $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )$ *est un sous-anneau de* $\mathbb{Q}$
2. *Si*
$$\mathbb{Z}_+ = \{u \in \mathbb{Z}/(0,u) \in O\}$$
alors $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ *et* $(\mathbb{Z}_+\ ,\ O \cap (\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+))$ *est un ensemble d'entiers naturels de succession* s *définie par*
$$s(u) = u + 1$$
3. $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$ *est un ensemble d'entiers relatifs et si* j *est l'application de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Q}$ *définie par*
$$j(u) = u$$
alors :
   (a) $((\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot)\ ,\ j\ )$ *est un corps de fractions de* $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )$
   (b) $((\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )\ ,\ j\ )$ *est un corps de rationnels de* $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$*.*
   (c) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$ *il existe* $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *tel que*
$$x = \frac{u}{v}$$

(ii) Il existe un unique sous-ensemble $\mathbb{Z}$ *de* $\mathbb{Q}$ *tel que* $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$ *est un anneau d'entiers relatifs vérifiant* $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ *.*
De plus, si j *est l'application de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Q}$ *définie par* $j(u) = u$ *alors*

1. $((\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot)\ ,\ j\ )$ *est un corps de fractions de* $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )$
2. $((\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )\ ,\ j\ )$ *est un corps de rationnels de* $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$*.*
3. *l'application* φ *de* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *dans* $\mathbb{Q}$ *définie par*
$$\varphi(a,b) = \frac{a}{b}$$
est surjective.

Preuve

(i)

1. On montre que $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )$ est un anneau.
Il est clair que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, en particulier $0 \in \mathbb{Z}$ et $1 \in \mathbb{Z}$
1 On montre que $(\mathbb{Z}\ ,\ +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}\ ,\ +)$
— Si $u \in \mathbb{Z}$ il existe $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $u = m - n$, par suite $-u = n - m$ et $-u \in \mathbb{Z}$
— Si $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ alors il existe $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que
$$u = m - n \quad \text{et} \quad v = p - q$$
par suite $u+v = m+p-(n+q)$. Or d'après la proposition et définition [9.1] page 447 $(\mathbb{N}\ ,\ +)$ est un monoïde, par suite $m + p \in \mathbb{N}$ et $n + q \in \mathbb{N}$, ainsi $u + v \in \mathbb{Z}$.

2 On montre que $(\mathbb{Z}\ ,\ \centerdot\ )$ est un sous-monoïde de $(\mathbb{Q}\ ,\ \centerdot\ )$
Si $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ alors il existe $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que

$$u=m-n \quad \text{et} \quad v=p-q$$

par suite $u\centerdot v=m\centerdot p+n\centerdot q-(m\centerdot q+n\centerdot p)$. Or d'après la proposition et définition [9.1] page 447 $(\mathbb{N}\ ,\ +)$ et $(\mathbb{N}\ ,\ \centerdot\ )$ sont des monoïdes, par suite $m\centerdot p+n\centerdot q\in\mathbb{N}$ et $m\centerdot q+n\centerdot p\in\mathbb{N}$, ainsi $u\centerdot v\in\mathbb{Z}$.

3 distributivité
Elle provient de la distibutivité des lois sur $\mathbb{Q}$.

2. On montre que $\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}$

   D'abord puisque $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ et $0=\min_O\{k:k\in\mathbb{N}\}$ on a $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}_+$. Il suffit donc de montrer $\mathbb{Z}_+\subset\mathbb{N}$. On considère l'application Γ de $\mathbb{Z}_+$ dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ définie par

$$\Gamma(u)=\{m\in\mathbb{N}/\exists\ n\in\mathbb{N}_m:u=m-n\}$$

   et on montre

   (a) Pour tout $u\in\mathbb{Z}_+$ $\Gamma(u)\neq\varnothing$
   (b) Si $O(\mathbb{N})=O\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ alors pour tout $u\in\mathbb{Z}_+$ $u=\min_{O(\mathbb{N})}\{k:k\in\Gamma(u)\}$

   (a) Puisque $u\in\mathbb{Z}_+$ il existe $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $u=m-n$ et $(0,m-n)\in O$, la compatibilité de l'addition et de l'ordre O montre alors que $(n,m)\in O$, c'est à dire $n\in\mathbb{N}_m$.
   (b) puisque $(\mathbb{N}\ ,\ O(\mathbb{N}))$ est bien ordonné, pour tout $u\in\mathbb{Z}_+$ $\Gamma(u)$ possède un plus petit élément $m(u)$ qui appartient à $\mathbb{N}$. puisque $m(u)\in\Gamma(u)$ il existe $n(u)\in\mathbb{N}_{m(u)}$ tel que

$$u=m(u)-n(u)$$

   On montre que $u=m(u)$
   — si $u=0$ alors l'égalité $0=0-0$ montre $0\in\Gamma(0)$ et puisque 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ on a $m(0)=0$
   — si $u\neq 0$ alors $m(u)\in\mathbb{N}^*$, puisque l'assertion $m(u)=0$ et $n(u)\in\mathbb{N}_{m(u)}$ entraîne les égalités $m(u)=n(u)=0$ et $u=0$. Cela entraîne que $m(u)-1\in\mathbb{N}$, en effet d'après le lemme [4.3] page 78, si s est la succession de $(\mathbb{N}\ ,\ O(\mathbb{N})\ )$ on a $s(\mathbb{N})=\mathbb{N}^*$, ainsi puisque $m(u)\in\mathbb{N}^*$ il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $s(k)=m(u)$. $\mathbb{N}$ étant le sous-ensemble d'entiers naturels de $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$, la succession de $(\mathbb{N}, O(\mathbb{N}))$ est par définition $s(k)=k+1$ par suite $k=m(u)-1\in\mathbb{N}$. Ce qui précède montre que pour tout $u\in\mathbb{Z}_+$ on a $m(u)=u$. En effet, si $u=m(u)-n(u)$ avec $n(u)\in\mathbb{N}^*$ alors

$$u=m(u)-1-(n(u)-1)$$

   avec $n(u)-1\in\mathbb{N}$, par suite $m(u)-1\in\Gamma(u)$ et ceci contredit la minimalité de $m(u)$. Ainsi le seul entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $u=m(u)-n$ est $n=0$, puisque par définition de $\Gamma(u)$ cet entier existe on obtient $m(u)=u$. Par suite $u\in\mathbb{N}$ comme étant le plus petit élément d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}_+\subset\mathbb{N}$.

   En particulier $(\mathbb{Z}_+\ ,\ O\cap(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+)\ )=(\mathbb{N}\ ,\ O\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))$ et par définition $(\mathbb{N}\ ,\ O\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))$ est un ensemble d'entiers naturels de succession $s(n)=n+1$.

3. On montre que $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\ )$ est un ensemble d'entiers relatifs vérifiant (a) et (b)

   D'après *1.* $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )$ est un anneau et d'après *2.* $(\mathbb{Z}_+\ ,\ O\cap(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+)\ )$ est un ensemble d'entiers naturels, il reste donc à vérifier que $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ )$ est un anneau ordonné mais la totalité de l'ordre $O\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ et sa compatibilité avec les lois $+$ et $\centerdot$ suivent du fait que $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$ est un corps ordonné.

On montre (a) , (b) et (c) .

Par définition d'un corps d'entiers rationnels il existe un couple $((A\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O_0)\ ,\ i\ )$ où
— $(A\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O_0\ )$ est un ensemble d'entiers relatifs
— i est un morphisme strictement croissant de $(A\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O_0\ )$ dans $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$
— $((\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )\ ,\ i)$ est un corps de fractions de $(A\ ,\ +\ ,\ .\ )$
— $((\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )\ ,\ i)$ est un corps de rationnels de $(A\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O_0\ )$

On montre que pour un tel couple on a $i(A) = \mathrm{im}(i) = \mathbb{Z}$. En effet , puisque par définition d'un ensemble d'entiers relatifs l'ensemble des entiers naturels de $(A\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O_0\ )$ est A_+ le lemme [9.33] page 572 permet d'affirmer que $i(A_+) = \mathbb{N}$, en d'autre termes pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a \in A_+$ tel que $i(a) = k$ et pour tout $a \in A_+$ on a $i(a) \in \mathbb{N}$.

— On montre $\mathbb{Z} \subset i(A)$. En effet, si $x \in \mathbb{Z}$ il existe par définition $(m, n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $x = m-n$, ainsi, si $(a, b) \in A_+ \times A_+$ vérifient

$$i(a) = m \quad i(b) = n$$

on obtient $x = i(a) - i(b)$, mais par construction i est un morphisme d'anneaux par suite

$$x = i(a - b) \quad \text{et} \quad x \in i(A)$$

— On montre $i(A) \subset \mathbb{Z}$. Si $x \in i(A)$ il existe $y \in A$ tel que $x = i(y)$, d'après le lemme [9.4] page 437 on a $A = A_+ - A_+$ par suite il existe $(a, b) \in A_+ \times A_+$ tel que $y = a - b$ (par exemple $a = \max\{0, y\}$ et $b = \max\{0, -y\}$), puisque i est un morphisme on obtient

$$x = i(y) = i(a) - i(b)$$

l'égalité $i(A_+) = \mathbb{N}$ montre alors que x est la différence de deux éléments de $\mathbb{N}$ par suite $x \in \mathbb{Z}$.

Ainsi

$$\mathrm{im}(i) = \mathbb{Z}$$

et le lemme [9.33] page 572 montre que $\mathrm{im}(i)$ vérifie les propriétés (a), (b) et (c).

(ii)

L'existence est assurée par (i) il reste donc à montrer l'unicité. Mais si $(A\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O \cap (A \times A))$ anneau ordonné vérifiant $A_+ = \mathbb{N}$ alors l'égalité $A = A_+ - A_+$ (voir lemme [9.4] page 437) montre que $A = \mathbb{N} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}$. ■

Exercice 9.1 *On note* $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps commutatif ordonné tel que* $1 \neq 0$.

(i) Montrer que $b \in K_+^*$ *si et seulement si* $b^{-1} \in K_+^*$.

(ii) Si $(a, b) \in K \times K^*$ *montrer*

$$\frac{a}{b} \in K_+ \Leftrightarrow a \centerdot b \in K_+$$

(iii) Si $(a, b) \in K \times K^*$ *montrer*

$$\frac{a}{b} \in K_+^* \Leftrightarrow \exists\ (a', b') \in K_+^* \times K_+^* \quad \text{tel que} \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Preuve

(i)

D'après le lemme [9.4] page 437 on a $1 > 0$.

1. On montre $b \in K_+^* \Rightarrow b^{-1} \in K_+^*$.

   En effet si $b^{-1} \in K_-$ alors d'après le lemme [9.4] page 437 on a $bb^{-1} \in K_-$ ce qui contredit l'assertion $1 > 0$,d'autre part $b^{-1} \neq 0$ puisque $bb^{-1} = 1$ et $1 \neq 0$.
2. On montre $b^{-1} \in K_+^* \Rightarrow b \in K_+^*$.

   En effet, $b = (b^{-1})^{-1}$

(ii)

D'après le lemme [9.4] page 437 et (i) on a
- $(a,b) \in K_+ \times K_+^* \Rightarrow (a, b^{-1}) \in K_+ \times K_+^* \Rightarrow ab^{-1} \in K_+$
- $(a,b) \in K_- \times K_+^* \Rightarrow (a, b^{-1}) \in K_- \times K_+^* \Rightarrow ab^{-1} \in K_-$
- $(a,b) \in K_+ \times K_-^* \Rightarrow (a, b^{-1}) \in K_+ \times K_-^* \Rightarrow ab^{-1} \in K_-$
- $(a,b) \in K_- \times K_-^* \Rightarrow (a, b^{-1}) \in K_- \times K_-^* \Rightarrow ab^{-1} \in K_+$

par suite
$$\frac{a}{b} \in K_+ \Leftrightarrow (a,b) \in (K_+ \times K_+^*) \cup (K_- \times K_-^*) \Leftrightarrow b \in K^* \quad \text{et} \quad ab \in K_+ \ .$$

(iii)

D'après (ii) si $\frac{a}{b} \in K_+^*$ alors $ab \in K_+^*$
- si $a < 0$ alors $ab \in K_+^* \Rightarrow b < 0$ et si $a' = -a$ et $b' = -b$ on a $(a', b') \in K_+^* \times K_+^*$ et puisque $a(-b) = (-a)b$ on obtient
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$
- si $a > 0$ alors $ab \in K_+^* \Rightarrow b > 0$

■

Si on recopie bêtement le lemme [9.34] page 577 en changeant corps d'entiers rationnels par corps ordonné on obtient le lemme suivant

Lemme 9.35 *On note $(K\ ,\ +\ ,\ \boldsymbol{.}\ ,\ O\ )$ un corps commutatif ordonné et $\mathbb{N}$ son sous-ensemble d'entiers naturels .*

(i) l'ensemble $\mathbb{Z}$ défini par
$$\mathbb{Z} = \{u \in K / \exists\ (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : u = m - n\}$$
possède les propriétés suivantes :
1. *$(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \boldsymbol{.}\ )$ est un sous-anneau de K*
2. *Si*
$$\mathbb{Z}_+ = \{u \in \mathbb{Z} / (0,u) \in O\}$$
   alors $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ et $(\mathbb{Z}_+\ ,\ O \cap (\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+))$ est un ensemble d'entiers naturels de succession s définie par
$$s(u) = u + 1$$
3. *$(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \boldsymbol{.}\ ,\ O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$ est un ensemble d'entiers relatifs*

(ii) Il existe un unique sous-ensemble $\mathbb{Z}$ de K tel que $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \boldsymbol{.}\ ,\ O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$ est un anneau d'entiers relatifs vérifiant $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

(iii) Si φ est l'application de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dans K définie par
$$\varphi(a,b) = \frac{a}{b} = a\,\boldsymbol{.}\,b^{-1}$$

alors $(\mathrm{im}(\varphi)\ ,\ +\ ,\ \mathbf{.}\ ,\ O\cap(\mathrm{im}(\varphi)\times\mathrm{im}(\varphi))\ )$ *est un corps d'entiers rationnels. Plus précisément, si* j *est l'application de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathrm{im}(\varphi)$ *définie par*

$$j(u)=\varphi(u,1)$$

alors
a $((\mathrm{im}(\varphi)\ ,\ +\ ,\ \mathbf{.}\ )\ ,\ j\ )$ *est un corps de fractions de* $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \mathbf{.}\ )$
b $((\mathrm{im}(\varphi)\ ,\ +\ ,\ \mathbf{.}\ ,\ O\cap(\mathrm{im}(\varphi)\times\mathrm{im}(\varphi))\ )\ ,\ j\ )$ *est un corps de rationnels de* $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \mathbf{.}\ ,\ O\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\ )$
de plus $\mathrm{im}(\varphi)$ *est l'unique sous-corps* $\mathbb{Q}$ *de* K *qui vérifie les propriétés* **a** *et* **b**.

Preuve

(i)

1. On montre que $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \mathbf{.}\ )$ est un anneau.

   Il est clair que $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$, en particulier $0\in\mathbb{Z}$ et $1\in\mathbb{Z}$

   1 On montre que $(\mathbb{Z}\ ,\ +)$ est un sous-groupe de $(K\ ,\ +)$

   — Si $u\in\mathbb{Z}$ il existe $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $u=m-n$, par suite $-u=n-m$ et $-u\in\mathbb{Z}$
   — Si $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ alors il existe $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que

   $$u=m-n\quad\text{et}\quad v=p-q$$

   par suite $u+v=m+p-(n+q)$. Or d'après la proposition et définition [9.1] page 447 $(\mathbb{N}\ ,\ +)$ est un sous-monoïde de K, par suite $m+p\in\mathbb{N}$ et $n+q\in\mathbb{N}$, ainsi $u+v\in\mathbb{Z}$.

   2 On montre que $(\mathbb{Z}\ ,\ \mathbf{.}\ )$ est un sous-monoïde de $(K\ ,\ \mathbf{.}\ )$
   Si $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ alors il existe $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que

   $$u=m-n\quad\text{et}\quad v=p-q$$

   par suite $u\mathbf{.}v=m\mathbf{.}p+n\mathbf{.}q-(m\mathbf{.}q+n\mathbf{.}p)$. Or d'après la proposition et définition [9.1] page 447 $(\mathbb{N}\ ,\ +)$ et $(\mathbb{N}\ ,\ \mathbf{.}\ )$ sont des sous-monoïdes de K, par suite $m\mathbf{.}p+n\mathbf{.}q\in\mathbb{N}$ et $m\mathbf{.}q+n\mathbf{.}p\in\mathbb{N}$, ainsi $u\mathbf{.}v\in\mathbb{Z}$.

   3 distributivité
   Elle provient de la distibutivité des lois sur K.

2. On montre que $\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}$

   D'abord puisque $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ et $0=\min_O\{k:k\in\mathbb{N}\}$ on a $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}_+$. Il suffit donc de montrer $\mathbb{Z}_+\subset\mathbb{N}$. On considère l'application Γ de $\mathbb{Z}_+$ dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ définie par

   $$\Gamma(u)=\{m\in\mathbb{N}/\exists\ n\in\mathbb{N}_m:u=m-n\}$$

   et on montre
   (a) Pour tout $u\in\mathbb{Z}_+$ $\Gamma(u)\neq\varnothing$
   (b) Si $O(\mathbb{N})=O\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ alors pour tout $u\in\mathbb{Z}_+$ $u=\min_{O(\mathbb{N})}\{k:k\in\Gamma(u)\}$
   (a) Puisque $u\in\mathbb{Z}_+$ il existe $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $u=m-n$ et $(0,m-n)\in O$, la compatibilité de l'addition et de l'ordre O montre alors que $(n,m)\in O$, c'est à dire $n\in\mathbb{N}_m$.
   (b) puisque $(\mathbb{N}\ ,\ O(\mathbb{N}))$ est bien ordonné, pour tout $u\in\mathbb{Z}_+$ $\Gamma(u)$ possède un plus petit élément $m(u)$ qui appartient à $\mathbb{N}$. puisque $m(u)\in\Gamma(u)$ il existe $n(u)\in\mathbb{N}_{m(u)}$ tel que

   $$u=m(u)-n(u)$$

   On montre que $u=m(u)$

— si $u = 0$ alors l'égalité $0 = 0 - 0$ montre $0 \in \Gamma(0)$ et puisque 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ on a $m(0) = 0$

— si $u \neq 0$ alors $m(u) \in \mathbb{N}^*$, puisque l'assertion $m(u) = 0$ et $n(u) \in \mathbb{N}_{m(u)}$ entraîne les égalités $m(u) = n(u) = 0$ et $u = 0$. Cela entraîne que $m(u) - 1 \in \mathbb{N}$, en effet d'après le lemme [4.3] page 78, si s est la succession de $(\mathbb{N}\ ,\ O(\mathbb{N})\ )$ on a $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$, ainsi puisque $m(u) \in \mathbb{N}^*$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $s(k) = m(u)$. $\mathbb{N}$ étant le sous-ensemble d'entiers naturels de $(K\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$, la succession de $(\mathbb{N}, O(\mathbb{N}))$ est par définition $s(k) = k + 1$ par suite $k = m(u) - 1 \in \mathbb{N}$. Ce qui précède montre que pour tout $u \in \mathbb{Z}_+$ on a $m(u) = u$. En effet, si $u = m(u) - n(u)$ avec $n(u) \in \mathbb{N}^*$ alors

$$u = m(u) - 1 - (n(u) - 1)$$

avec $n(u) - 1 \in \mathbb{N}$, par suite $m(u) - 1 \in \Gamma(u)$ et ceci contredit la minimalité de $m(u)$. Ainsi le seul entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u = m(u) - n$ est $n = 0$, puisque par définition de $\Gamma(u)$ cet entier existe on obtient $m(u) = u$. Par suite $u \in \mathbb{N}$ comme étant le plus petit élément d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N}$.

En particulier $(\mathbb{Z}_+\ ,\ O \cap (\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)\ ) = (\mathbb{N}\ ,\ O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ et par définition $(\mathbb{N}\ ,\ O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ est un ensemble d'entiers naturels de succession $s(n) = n + 1$.

3. On montre que $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})\ )$ est un ensemble d'entiers relatifs

D'après *1.* $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )$ est un anneau et d'après *2.* $(\mathbb{Z}_+\ ,\ O \cap (\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)\ )$ est un ensemble d'entiers naturels, il reste donc à vérifier que $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ )\ )$ est un anneau ordonné mais la totalité de l'ordre $O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ et sa compatibilité avec les lois $+$ et $\centerdot$ suivent du fait que $(K\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\ )$ est un corps ordonné.

(ii)

L'existence est assurée par (i) il reste donc à montrer l'unicité. Mais si $(A\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O \cap (A \times A))$ anneau ordonné vérifiant $A_+ = \mathbb{N}$ alors l'égalité $A = A_+ - A_+$ (voir lemme [9.4] page 437) montre que $A = \mathbb{N} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}$.

(iii)

A On montre que $\text{im}(\varphi)$ est un sous-corps de K .

1. $(\text{im}(\varphi)\ ,\ +\ )$ est un sous-groupe de $(K\ ,\ +\ )$

(a) Si $(x, y) \in \text{im}(\varphi) \times \text{im}(\varphi)$ il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad y = \frac{c}{d}$$

ainsi

$$x + y = \frac{a \centerdot d + c \centerdot b}{b \centerdot d}$$

et puisque $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )$ est un anneau intègre on a $(a \centerdot d + c \centerdot b\ , b \centerdot d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et

$$x + y = \varphi(a \centerdot d + c \centerdot b\ , b \centerdot d)$$

(b) Si $x \in \text{im}(\varphi)$ il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que

$$x = \frac{a}{b}$$

par suite

$$x + \frac{(-a)}{b} = \frac{a \centerdot b + (-a) \centerdot b}{b^2} = 0\ .$$

et

$$-x = \varphi(-a\ ,\ b)\ .$$

2. $\underline{(\mathrm{im}(\varphi)\ ,\ \centerdot\ )\ \text{est un sous-monoïde de}\ (K\ ,\ \centerdot\ )}$

Si $(x,y) \in \mathrm{im}(\varphi) \times \mathrm{im}(\varphi)$ il existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad y = \frac{c}{d}$$

ainsi, puisque K est commutatif,

$$x \centerdot y = \frac{a \centerdot c}{b \centerdot d}$$

et puisque $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )$ est un anneau intègre on a $(a \centerdot c\ ,\ b \centerdot d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et

$$x \centerdot y = \varphi(a \centerdot c\ ,\ b \centerdot d)$$

3. $\underline{(\mathrm{im}(\varphi)^*\ ,\ \centerdot\ )\ \text{est un sous-groupe de}\ (K^*\ ,\ \centerdot\ )}$

Il reste à vérifier

$$x \in \mathrm{im}(\varphi)^* \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathrm{im}(\varphi)^*\ .$$

Puisque tout corps est intègre $x \in \mathrm{im}(\varphi)^*$ si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ tel que

$$x = \frac{a}{b}$$

par suite

$$x \centerdot \frac{b}{a} = \frac{a \centerdot b}{a \centerdot b} = 1\ .$$

et

$$\frac{1}{x} = \varphi(b\ ,\ a)\ .$$

B On montre que $((\mathrm{im}(\varphi)\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )\ ,\ j\ )$ est un corps de fractions de $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )$

Il s'agit de montrer que si $(L\ ,\ +'\ ,\ \circledcirc)$ est un corps commutatif et f un morphisme injectif de $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )$ dans $(L\ ,\ +'\ ,\ \circledcirc\ )$ il existe un unique morphiosme injectif f^* de $\mathrm{im}(\varphi)$ dans L tel que

$$f = f^* \circ j$$

I Preuve de l'existence de f^*.

Si f est un morphisme injectif de $\mathbb{Z}$ dans L on considère la relation f^* de $\mathrm{im}(\varphi)$ dans L définie par

$$f^* = \{(x,\lambda) \in \mathrm{im}(\varphi) \times K / \exists\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : x = \frac{a}{b}\ ,\ f(b) \in L^*\ ,\ \lambda = f(a) \circledcirc (f(b))^{-1}\}$$

a On montre que f^* est une application

1. $\mathrm{dom}(f^*) = \mathrm{im}(\varphi)$.

Si $x \in \mathrm{im}(\varphi)$ il existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$. Puisque f est un morphisme injectif et $b \in \mathbb{Z}^*$ on a $f(b) \in L^*$ par suite

$$(x, f(a) \circledcirc (f(b))^{-1}) \in f^*\ .$$

2. f^* est une fonction.

Si $(x,\lambda) \in f^*$ et $(x,\mu) \in f^*$ alors il existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $(a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que

$$x = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \lambda = f(a) \circledcirc (f(b))^{-1} \quad \mu = f(a') \circledcirc (f(b'))^{-1}$$

mais l'égalité $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ entraîne $a \centerdot b' = b \centerdot a'$, puisque f est un morphisme on obtient

$$f(a) \circledcirc f(b') = f(a \centerdot b') = f(b \centerdot a') = f(b) \circledcirc f(a') \ ,$$

f étant injective on a $f(b) \in L^*$ et $f(b') \in L^*$ par suite

$$\lambda = f(a) \circledcirc (f(b))^{-1} = f(a') \circledcirc (f(b'))^{-1} = \mu$$

b On montre que f^* est injective

Si $f^*(\dfrac{u}{v}) = f^*(\dfrac{a}{b})$ alors

$$f(u) \circledcirc (f(v))^{-1} = f(a) \circledcirc (f(b))^{-1}$$

par suite $f(u \centerdot b) = f(v \centerdot a)$, f étant injective on obtient $u \centerdot b = v \centerdot a$ ainsi et $\dfrac{u}{v} = \dfrac{a}{b}$

c On montre que f^* est un morphisme de $(\mathrm{im}(\varphi), +)$ dans $(L, +')$

On a

$$f^*(\frac{u}{v} + \frac{a}{b}) = f^*(\frac{ub+va}{vb}) = (f(u \centerdot b + v \centerdot a)) \circledcirc [(f(b))^{-1} \circledcirc (f(v))^{-1}]$$

d'où

$$f^*(\frac{u}{v} + \frac{a}{b}) = (f(u \centerdot b)) \circledcirc [(f(b))^{-1} \circledcirc (f(v))^{-1}] +' (f(v \centerdot a)) \circledcirc [(f(b))^{-1} \circledcirc (f(v))^{-1}]$$

or

$$(f(u \centerdot b)) \circledcirc [(f(b))^{-1} \circledcirc (f(v))^{-1}] = (f(u)) \circledcirc (f(v))^{-1} = f^*(\frac{u}{v})$$

et

$$(f(v \centerdot a)) \circledcirc [(f(b))^{-1} \circledcirc (f(v))^{-1}] = (f(a)) \circledcirc (f(b))^{-1} = f^*(\frac{a}{b})$$

d On montre que f^* est un morphisme de $(\mathrm{im}(\varphi)\ ,\ \centerdot)$ dans $(L\ ,\ \circledcirc)$

On a

$$f^*(\frac{u}{v} \centerdot \frac{a}{b}) = f^*(\frac{u \centerdot a}{v \centerdot b}) = (f(ua)) \circledcirc [(f(b))^{-1} \circledcirc (f(v))^{-1}]$$

d'où

$$f^*(\frac{u}{v} \centerdot \frac{a}{b}) = f^*(\frac{u \centerdot a}{v \centerdot b})) = (f(u)) \circledcirc (f(v))^{-1} \circledcirc f(a)(f(b))^{-1}$$

ainsi

$$f^*(\frac{u}{v} \centerdot \frac{a}{b}) = f^*(\frac{u}{v}) \circledcirc f^*(\frac{a}{b})$$

e On montre que $f = f^* \circ j$

On a $f^*(j(u)) = f^*(\dfrac{u}{1}) = f(u) \circledcirc (f(1))^{-1}$ mais puisque f est un morphisme on a $f(1) = 1_l$ et $(f(1))^{-1} = 1_l$

II Preuve de l'unicité de f^*.

Si g est un morphisme injectif de $\mathrm{im}(\varphi)$ dans L, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ on a

$$g(\frac{a}{b}) = g(a \centerdot b^{-1}) = g(a) \circledcirc (g(b))^{-1}$$

en particulier, si $\forall\ a \in \mathbb{Z}$ on a $g(a) = f \circ j(a) = f(a)$ on obtient : pour tout $x \in \mathrm{im}(\varphi)$ $g(x) = f^*(x)$.

C On montre que $((\mathrm{im}(\varphi)\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O \cap (\mathrm{im}(\varphi) \times \mathrm{im}(\varphi)))\ ,\ j\ )$ est un corps de rationnels de $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$

Il est clair que $(\mathrm{im}(\varphi)\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\cap(\mathrm{im}(\varphi)\times\mathrm{im}(\varphi)))$ est un corps ordonné et que j est strictement croissante .Il s'agit de montrer que si $(L\ ,\ +'\ ,\ \circledcirc\ ,\ O')$ est un corps commutatif ordonné et f un morphisme strictement croissant de $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ O\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}))$ dans $(L\ ,\ +'\ ,\ \circledcirc\ ,\ O'\ )$ il existe un unique morphisme strictement croissant f^* de $\mathrm{im}(\varphi)$ dans L tel que

$$f = f^* \circ j$$

Il suffit donc de vérifier que si f^* est le morphisme définie en **B** alors f^* est strictement croissant de $(\mathrm{im}(\varphi)\ ,\ O\cap(\mathrm{im}(\varphi)\times\mathrm{im}(\varphi))$ dans (L,O'). On remarque que d'après l'exercice [9.1] page 579

$$\mathrm{im}(\varphi)_+ = \{x\in K/\exists\ (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* : ab\in\mathbb{Z}_+\ ,\ x=\frac{a}{b}\}$$

et puisque $\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$ on obtient

$$\mathrm{im}(\varphi)_+ = \{x\in K/\exists\ (a,b)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+^* : x=\frac{a}{b}\}$$

En particulier, si $x\in(\mathrm{im}(\varphi))_+^*$ il existe $(a,b)\in\mathbb{Z}_+^*\times\mathbb{Z}_+^*$ tel que

$$x=\frac{a}{b}$$

puisque $(a,b)\in\mathbb{Z}_+^*\times\mathbb{Z}_+^*$ et f est un morphisme strictement croissant, on obtient $f(a)\in L_+^*$, $f(b)^{-1}\in L_+^*$ et la compatibilité de l'ordre O' avec la loi $\circledcirc$ montre que

$$f(a)\circledcirc(f(b))^{-1}\in L_+^*$$

autrement dit

$$x\in(\mathrm{im}(\varphi))_+^* \Rightarrow f^*(x)\in L_+^*\ .$$

Cela permet de montrer que f^* est stictement croissante, puisque si $(x,y)\in O\cap(\mathrm{im}(\varphi)\times\mathrm{im}(\varphi))$ et $y\neq x$, la compatibilité de l'ordre O avec la loi $+$ montre que $y-x\in\mathrm{im}(\varphi)_+^*$, par suite

$$f^*(y-x)\in L_+^*$$

f^* étant un morphisme on obtient

$$f^*(y)-f^*(x)\in L_+^*$$

en particulier $f^*(x)\neq f^*(y)$ et la compatibilité de l'ordre O' avec la loi $+'$ montre que

$$(f^*(x)\ ,\ f^*(y))\in O'$$

D On montre que $\mathrm{im}(\varphi)$ est l'unique sous-corps de K vérifiant **a** et **b**

On note $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de K vérifiant **a** et **b**.

1. On montre $\mathbb{Q}\subset\mathrm{im}(\varphi)$

   Puisque $((\mathbb{Q}\ ,\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ )\ ,\ j)$ est un corps de fractions de $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \centerdot)$ le lemme [9.31] page 562 permet d'affirmer que l'application γ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ dans $\mathbb{Q}$ définie par

   $$\gamma(a,b)=(j(a))\centerdot(j(b))^{-1}=a\centerdot b^{-1}=\frac{a}{b}$$

   est surjective de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ dans $\mathbb{Q}$, par suite tout élément de $\mathbb{Q}$ est un élément de $\mathrm{im}(\varphi)$.
2. On montre $\mathrm{im}(\varphi)\subset\mathbb{Q}$

   Puisque par définition j est une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ on a $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$, par suite tout élément de $\mathrm{im}(\varphi)$ est un produit d'éléments de $\mathbb{Q}$.

$\blacksquare$

Le lemme [9.35] page 580 permet de fixer quelques définitions.

Définition 9.48 *On note* $(K\ ,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ O\ )$ *un corps commutatif ordonné et* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels :*

1. *L'ensemble*
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N} = \{x \in K / \exists\ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x = m - n\}$$
est appelé l'ensemble des ***entiers relatifs*** *de* K.
2. *L'ensemble*
$$\mathbb{Q} = \{x \in K / \exists\ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : x = \frac{a}{b}\}$$
est appelé l'ensemble des ***entiers rationnels*** *de* K.

Le théorème suivant provient directement du lemme [9.35] page 580.

Théorème 9.8 *On note* $(K\ ,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ O\ )$ *un corps commutatif ordonné et* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels.*

(i) Si $\mathbb{Z}$ *est le sous-ensemble d'entiers relatifs de* K *alors* $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$ *est un ensemble d'entiers relatifs et* $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

(ii) Si $\mathbb{Q}$ *est le sous-ensemble d'entiers rationnels de* K *et* j *l'application de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Q}$ *définie par*

$$j(a) = a$$

alors

a $((\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \cdot)\ ,\ j)$ *est un corps de fractions de* $(\mathbb{Z}\ ,+\ ,\ \cdot\ )$

b $((\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ O \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}))\ ,\ j)$ *est un corps de rationnels de* $(\mathbb{Z}\ ,+\ ,\ \cdot\ , O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$.

Preuve Voir lemme [9.35] page 580. $\blacksquare$

Les corps d'entiers rationnels possèdent les propriétés suivantes.

Lemme 9.36 *On note* $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O)$ *un corps d'entiers rationnels ,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels et* $\mathbb{Z}$ *son sous-ensemble d'entiers relatifs.*

(i) Pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$ *il existe* $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ *tel que* $\mathtt{pgcd}(a, b) = 1$ *et*

$$x = \frac{a}{b}\ .$$

(ii) $\mathbb{Q}$ *est archimèdien : pour tout* $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+^*$ *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$ny \geq x$$

(iii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *tel que* $x < y$ *il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$x < x + \frac{1}{k} < y$$

(iv) $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

(v) Dans $\mathbb{Q}$ *l'equation*

$$x^2 = 2$$

n'a pas de solution.

Preuve

(i)

D'après le lemme [9.34] page 577 pour tout $x \in \mathbb{Q}$ il existe $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que

$$x = \frac{u}{v}$$

puisque $x \in \mathbb{Q}^*$ on a $(u,v) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$. Si $d = \mathtt{pgcd}(u,v)$ alors il existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que

$$u = da \quad \text{et} \quad v = db \ ,$$

on montre que $\mathtt{pgcd}(a,b) = 1$. En effet , d'après l'identité de Bezout (voir (9.28) page 522) il existe $(e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que

$$ue + vf = d$$

ainsi

$$d(ae + bf) = d$$

$(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \boldsymbol{.}\ )$ étant intègre on obtient

$$ae + bf = 1 \quad \text{et} \quad \mathtt{pgcd}(a,b) = 1 \ .$$

En particulier on obtient

$$x = \frac{u}{v} = \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \quad \text{avec} \quad \mathtt{pgcd}(a,b) = 1 \ .$$

(ii)

Si $x \leq 0$ on prend $n = 0$, on peut donc supposer $x > 0$. Puisque $(x,y) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q}_+^*$ il existe (voir exercice [9.1] page 579) $(u,v) \in \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*$ tel que

$$y = \frac{u}{v} \quad \text{et} \quad x = \frac{a}{b}$$

D'après le théorème [9.8] page 586, $(\mathbb{Z}\ ,\ +\ ,\ \boldsymbol{.}\ ,\ O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$ est un anneau d'entiers relatifs tel que $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ et le théorème [8.8] page 281 montre que cet anneau est Archimèdien, ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nub \geq av$. Il résulte de la propriété de corps ordonné de $\mathbb{Q}$ que l'application $x \mapsto b^{-1}v^{-1}x$ est croissante, par suite

$$nub \geq av \Rightarrow n\frac{u}{v} \geq \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad ny \geq x \ .$$

(iii)

Puisque $y - x > 0$ il existe , d'après (ii), $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(y-x) > 1$ la compatibilité des lois et de l'ordre montre alors que

$$x < x + \frac{1}{n} < y \ .$$

(iv)

D'après le théorème [8.8] page 281 $\mathbb{Z}$ est dénombrable, ainsi le théorème [6.4] page 151 montre que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable. D'après le lemme [9.34] page 577 l'application φ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dans $\mathbb{Q}$ définie part

$$\varphi(a,b) = \frac{a}{b}$$

est surjective. Le théorème [6.4] page 151 permet alors d'affirmer que $\mathbb{Q}$ est fini ou dénombrable, mais $\mathbb{Q}$ n'est pas fini puisque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

(v)

On montre d'abord que si pgcd$(a, b) = 1$ alors $a^2 \neq 2b^2$. Pour cela on remarque

$$a^2 \text{ divise } 2 \Rightarrow a \text{ divise } 2 \tag{9.47}$$

En effet, si a ne divise pas 2 alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2q + 1$ par suite $a^2 = 4(q^2 + q) + 1$ ne divise pas 2. En particulier l'égalité $a^2 = 2b^2$ entraîne l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$, ainsi on obtient $4k^2 = 2b^2$ et puisque $\mathbb{Z}$ est intègre cela entraîne $b^2 = 2k^2$ et (9.47) montre alors que b est aussi divisible par 2 par suite

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow \text{pgcd}(a, b) \geq 2 \ .$$

Enfin, si $x \in \mathbb{Q}$ vérifie $x^2 = 2$ alors d'après (i) il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ telle que pgcd$(a, b) = 1$ et $x = \dfrac{a}{b}$, cela entraîne alors $a^2 = 2b^2$ et ceci est impossible d'après ce qu'on vient de voir. ■

En fait pour tout entier relatif irréductible $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \geq 2$ l'équation $x^2 = p$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Q}$

Exercice 9.2 *On note* $(\mathbb{Q},\ +,\ .)\ , O)$ *un corps d'entiers rationnels ,* $\mathbb{N}$ *son ensemble d'entiers naturels* $\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N}$ *son anneau d'entiers relatifs,* $p \in \mathbb{Z}$ *un entier premier supérieur à deux. On veut montrer que dans* $\mathbb{Q}$ *l'équation*

$$x^2 = p$$

n'a pas de solution.

(i) Soit $a \in \mathbb{Z}$*, montrer*

$$p \text{ divise } a^2 \Rightarrow p \text{ divise } a$$

(ii) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *tel que* $\texttt{pgcd}(a, b) = 1$ *, montrer que*

$$a^2 \neq pb^2 \ .$$

en déduire que pour tout $x \in \mathbb{Q}$

$$x^2 \neq p \ .$$

Preuve

(i)

Puisque p est premier il suffit de montrer que $\texttt{pgcd}(a, p) \neq 1$. Posons $a^2 = pk$, si $\texttt{pgcd}(a, p) = 1$ alors d'après l'identité de Bezout il existe $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que

$$au + pv = 1$$

ainsi

$$a = a^2u + pav = p(ku + av)$$

par suite p divise a et $\texttt{pgcd}(a, p) = p$.

(ii)

Si $a^2 = pb^2$ alors par (i) p divise a, ainsi il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = pq$, par suite

$$p^2q^2 = pb^2 \text{ et } p(b^2 - pq^2) = 0$$

l'intégrité de $\mathbb{Z}$ montre alors que $b^2 = pq^2$, ainsi p divise b^2 et (i) montre que p divise b, ainsi

$$\texttt{pgcd}(a, b) \geq p > 1 \ .$$

La conclusion provient alors du fait que tout élément x de $\mathbb{Q}$ s'écrit $x = \dfrac{a}{b}$ avec $\texttt{pgcd}(a, b) = 1$. ■

On résume les résultats de base sur les anneaux ordonnés (voir définition [9.5] page 437)

Théorème 9.9 *On note* $(A, +, \ . \ , O)$ *un anneau ordonné d'unité* 1 *vérifiant* $1 \neq 0$ *.*

(i) Il existe un unique sous-ensemble $\mathbb{N}$ *de* A *tel que* $(\mathbb{N}, O)$ *est un ensemble d'entiers naturels de succession* $s(n) = n + 1$ *et* $0 = \min_O\{n : n \in \mathbb{N}\}$. $\mathbb{N}$ *est appelé l'ensemble des entiers naturels de* $(A, +, \ . \ , O)$

(ii) Si $\mathbb{Z}$ *est l'ensemble*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N} = \{x \in A / \exists \ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x = m - n\}$$

alors $(\mathbb{Z}, +, \ . \ , O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$ *est un anneau d'entiers relatifs tel que* $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$. $\mathbb{Z}$ *est appelé l'anneau des entiers relatifs de* $(A, +, \ . \ , O)$

(iii) Si $(A, +, \ . \ )$ *est un* ***corps*** *et* φ *l'application de* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *dans* A *définie par*

$$\varphi(a, b) = \frac{a}{b}$$

alors $(\operatorname{im}(\varphi), +, \ . \ , O \cap (\operatorname{im}(\varphi) \times \operatorname{im}(\varphi))$ *est un corps de rationnels de* $(\mathbb{Z}, +, O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$*. Plus précisément, si* j *est l'application de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\operatorname{im}(\varphi)$ *définie par*

$$j(u) = \varphi(u, 1)$$

alors

1. $((\operatorname{im}(\varphi), +, \ . \ ), j)$ *est un corps de fractions de* $(\mathbb{Z}, +, \ . \ )$
2. $((\operatorname{im}(\varphi), +, \ . \ , O \cap (\operatorname{im}(\varphi) \times \operatorname{im}(\varphi))), j)$ *est un corps de rationnels de* $(\mathbb{Z}, +, \ . \ , O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$

$\operatorname{im}(\varphi)$ *est appelé le corps des entiers rationnels de* $(A, +, \ . \ , O)$

(iv) Si $(\mathbb{Q}, +, \ . \ , O)$ *est un corps d'entiers rationnels,* $\mathbb{Z}$ *son anneau d'entiers relatifs et* φ *l'application de* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *dans* A *définie par*

$$\varphi(a, b) = \frac{a}{b}$$

alors φ *est une application surjective de* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *dans* $\mathbb{Q}$*. De plus , si* j *est l'application de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Q}$ *définie par*

$$j(u) = u$$

alors

1. $((\mathbb{Q}, +, \ . \ ), j)$ *est un corps de fractions de* $(\mathbb{Z}, +, \ . \ )$
2. $((\mathbb{Q}, +, \ . \ , O), j)$ *est un corps de rationnels de* $(\mathbb{Z}, +, \ . \ , O \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$

Preuve

(i)

Voir proposition et définition [9.1] page 447

(ii)

Voir lemme [9.35] page 580

(iii)

Voir lemme [9.35] page 580

(iv)

Voir lemme [9.34] page 577 ■

On en vient enfin à la construction de $\mathbb{R}$.

Chapitre 10

Construction des réels et premiers éléments d'analyse

Le lemme [9.36] page 586 permet d'affirmer que si ($\mathbb{Q}$, + , . , O) est un corps d'entiers rationnels l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution. On connaît cependant des corps pour lesquels l'équation

$$x^2 = a$$

posséde des solutions pour tout $a > 0$, ce sont les corps de réels. On rappelle que toute les propriétés de ce type de corps sont issues des propriétés equivalentes suivantes :

d $\mathbb{R}$ est un corps ordonné dans lequel tout ensemble majoré posséde une borne supérieure.

c $\mathbb{R}$ est un corps ordonné archimédien et topologiquement complet.

La propriété **d** est associée au nom de Dedekind, on appelle les corps vérifiant cette propriété les corps de Dedekind. La propriété **c**, qui sera précisée , est associée au nom de Cantor, on appelle les corps vérifiant cette propriété les corps de Cantor. Dans les pages qui suivent on montre que tout corps de Dedekind est un corps de Cantor et inversement, du coup on appelle ce type de corps les corps de Cantor-dedekind ou des corps de réels. Ensuite on montre que tous les corps de Cantor-Dedekind sont isomorphes dans la catégorie des anneaux ordonnés, il suffit alors d'en construire un et d'étudier ces propriétés.

10.1 *Corps de Dedekind*

10.1.1 *Définition et premières propriétés*

La définition des anneaux ordonnés est donnée en [9.5] page 437.

Définition 10.1 *Un corps ordonné* (K , + , . , O) *tel que* $1 \neq 0$ *est appelé un* ***corps de Dedekind*** *s'il est commutatif et si tout sous-ensemble majoré de* (K , O) *possède une borne supérieure. En d'autres termes si* $A \subset K$ *et si l'ensemble* $\mathrm{Maj}(A)$ *des majorants de* A *est non vide alors* $\mathrm{Maj}(A)$ *possède un plus petit élément pour l'ordre* O *.*

Les définitions suivantes sont standards.

Définition 10.2 *On note* (K , + , . , , O) *un anneau ordonné,* X *un ensemble et* $A \subset X$ *un sous-ensemble de* X

(i) Une application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, K)$ *est dite majorée sur* A *si l'ensemble*

$$f(A) = \{y \in K / \exists\ x \in A : y = f(x)\}$$

est majoré : Il existe $M \in K$ *tel que*

$$\forall\ x \in A \quad f(x) \leq M\ .$$

On dit que f *est majorée si elle est majorée sur* X

(ii) On dit qu'une application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, K)$ *admet une borne supérieure sur* A *si l'ensemble*

$$f(A) = \{y \in K / \exists\ x \in A : y = f(x)\}$$

admet une borne supérieure. La borne supérieure de $f(A)$ *est appelée la borne supérieure de* f *sur* A*. On dit que* f *admet une borne supérieure si elle admet une borne supérieure sur* X

(iii) Une application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, K)$ *est dite minorée sur* A *si l'ensemble*

$$f(A) = \{y \in K / \exists\ x \in A : y = f(x)\}$$

est minoré : Il existe $m \in K$ *tel que*

$$\forall\ x \in A \quad f(x) \geq m\ .$$

On dit que f *est minorée si elle est minorée sur* X

(iv) On dit qu'une application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, K)$ *admet une borne inférieure sur* A *si l'ensemble*

$$f(A) = \{y \in K / \exists\ x \in A : y = f(x)\}$$

admet une borne inférieure. La borne inférieure de $f(A)$ *est appelée la borne inférieure de* f *sur* A*. On dit que* f *admet une borne inférieure si elle admet une borne inférieure sur* X

(v) Une application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, K)$ *est dite bornée sur* A *si l'ensemble*

$$|f|(A) = \{y \in K / \exists\ x \in A : y = |f(x)| = \max\{f(x)\ ,\ -f(x)\}\}$$

est majoré : Il existe $M \in K$ *tel que*

$$\forall\ x \in A \quad |f(x)| \leq M\ .$$

On dit que f *est bornée si elle est bornée sur* X

les notations suivantes sont pratiques.

Notation 10.1 *(notations standards sur les bornes supérieures et inférieures).*

On note $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un anneau ordonné,* X *un ensemble et* $A \subset X$ *un sous-ensemble non vide de* X

1. *Si* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, K)$ *possède une borne supérieure sur* A *on note* $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ *la borne supérieure de* $f(A)$

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup\{y : y \in f(A)\}$$

2. *Si* O_X *est un ordre sur* X *et* $A = [a, \rightarrow [= \{x \in X / (a, x) \in O_X\}$*,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, K)$ *possède une borne supérieure sur* A *on note* $\sup\limits_{x \geq a} f(x)$ *la borne supérieure de* $f(A)$

$$\sup_{x \geq a} f(x) = \sup_{x \in A} f(x) = \sup\{y : y \in f(A)\}$$

3. *Si* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, K)$ *possède une borne inférieure sur* A *on note* $\inf\limits_{x \in A} f(x)$ *la borne inférieure de* $f(A)$

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf\{y : y \in f(A)\}$$

4. Si O_X est un ordre sur X et $A = [a, \to [= \{x \in X/(a,x) \in O_X\}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,K)$ possède une borne inférieure sur A on note $\inf_{x \geq a} f(x)$ la borne inférieure de $f(A)$

$$\inf_{x\geq a} f(x) = \inf_{x\in A} f(x) = \inf\{y : y \in f(A)\}$$

5. Si $(\mathbb{N}\ ,\ O_0\ )$ est un ensemble d'entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ et $U_n = [n, \to [= \{k \in \mathbb{N}/(n,k) \in O_0\}$, $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ est une suite qui possède une borne supérieure sur U_n on note $\sup_{k\geq n} x_k$ la borne supérieure de $x(U_n)$:

$$\sup_{k\geq n} x_k = \sup_{k\in U_n} x_k = \sup\{y : y \in x(U_n)\}$$

6. Si $(\mathbb{N}\ ,\ O_0\ )$ est un ensemble d'entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ et $U_n = [n, \to [= \{k \in \mathbb{N}/(n,k) \in O_0\}$, $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ est une suite qui possède une borne inférieure sur U_n on note $\inf_{k\geq n} x_k$ la borne inférieure de $x(U_n)$:

$$\inf_{k\geq n} x_k = \inf_{k\in U_n} x_k = \inf\{y : y \in x(U_n)\}$$

Le lemme qui suit n'est qu'une traduction des définitions.

Lemme 10.1 *On note $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ un corps de Dedekind, X un ensemble et*

$$(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,K) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,K)$$

des applications de X dans K.

(i) Tout sous-ensemble non vide minoré de K possède une borne inférieure.

(ii) Si $U \in \mathcal{P}^*(X)$ et f est bornée sur U alors :

1. f possède une borne supérieure et inférieure sur U qui sont notées

$$\sup_{x\in U} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in U} f(x)$$

2. l'application $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,K)$ définie par $h(x) = -f(x)$ est bornée sur U et

$$\sup\{x : x \in h(U)\} = -\inf_{x\in U} f(x) \quad \text{et} \quad \inf\{x : x \in h(U)\} = -\sup_{x\in U} f(x)$$

ce qui s'écrit

$$\sup_{x\in U}(-f(x)) = -\inf_{x\in U} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in U}(-f(x)) = -\sup_{x\in U} f(x) \tag{10.1}$$

(iii) Si $(U,V) \in \mathcal{P}^*(X) \times \mathcal{P}^*(X)$ vérifient

$$(x,y) \in U \times V \Rightarrow f(x) \leq g(y)$$

alors f est majorée sur U, g est minorée sur V et

$$\sup_{x\in U} f(x) \leq \inf_{y\in V} g(y) \tag{10.2}$$

(iv) Soit $(U,V) \in \mathcal{P}^*(X) \times \mathcal{P}^*(X)$.

1. Si f est majorée sur U et g est majorée sur V, l'application $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X \times X, K)$ définie par

$$h(x,y) = f(x) + g(y)$$

est majorée sur $U \times V$ et

$$\sup_{x\in U} f(x) + \sup_{y\in V} g(y) = \sup\{z : z \in h(U \times V)\}$$

ce qui s'écrit

$$\sup_{x\in U} f(x) + \sup_{y\in V} g(y) = \sup_{(x,y)\in U\times V} (f(x) + g(y)) \tag{10.3}$$

2. Si f est minorée sur U et g est minorée sur V, l'application $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X \times X, K)$ définie par

$$h(x,y) = f(x) + g(y)$$

est minorée sur $U \times V$ et

$$\inf_{x \in U} f(x) + \inf_{y \in V} g(y) = \inf\{z : z \in h(U \times V)\}$$

ce qui s'écrit

$$\inf_{x \in U} f(x) + \inf_{y \in V} g(y) = \inf_{(x,y) \in U \times V} (f(x) + g(y)) \tag{10.4}$$

(v) Si $U \in \mathcal{P}^*(X)$, f et g sont bornées sur U alors l'application $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, K)$ définie par

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

est bornée sur U et

$$\inf_{x \in U} f(x) + \inf_{x \in U} g(x) \leq \inf\{z : z \in h(U)\} \leq \sup\{z : z \in h(U)\} \leq \sup_{x \in U} f(x) + \sup_{x \in U} g(x)$$

ce qui s'écrit

$$\inf_{x \in U} f(x) + \inf_{x \in U} g(x) \leq \inf_{x \in U}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in U}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in U} f(x) + \sup_{x \in U} g(x) \tag{10.5}$$

(vi) Si $U \in \mathcal{P}^*(X)$, f est bornée sur U alors l'application $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X \times X, K)$ définie par

$$h(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

est bornée sur $U \times U$ et

$$\sup_{x \in U} f(x) - \inf_{x \in U} f(x) = \sup\{z : z \in h(U \times U)\}$$

ce qui s'écrit

$$\sup_{x \in U} f(x) - \inf_{x \in U} f(x) = \sup_{(x,y) \in U \times U} |f(x) - f(y)| \tag{10.6}$$

(vii) Si $U \in \mathcal{P}^*(X)$ et f est bornée sur U alors pour tout $t \in K$ l'application $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, K)$ définie par

$$h(x) = tf(x)$$

est bornée sur U et

1. si $t \in K_+$

$$t \sup_{x \in U} f(x) = \sup\{z : z \in h(U)\} \quad \text{et} \quad t \inf_{x \in U} f(x) = \inf\{z : z \in h(U)\}$$

ce qui s'écrit

$$\sup_{x \in U} tf(x) = t \sup f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in U} tf(x) = t \inf_{x \in U} f(x) \tag{10.7}$$

2. si $t \in K_-$

$$t \sup_{x \in U} f(x) = \inf\{z : z \in h(U)\} \quad \text{et} \quad t \inf_{x \in U} f(x) = \sup\{z : z \in h(U)\}$$

ce qui s'écrit

$$\sup_{x \in U} tf(x) = t \inf f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in U} tf(x) = t \sup_{x \in U} f(x) \tag{10.8}$$

(viii) Si $(U,V) \in \mathcal{P}^*(X) \times \mathcal{P}^*(X)$, $U \subset V$ et f est bornée sur V alors f est bornée sur U et

$$\sup_{x \in U} f(x) \leq \sup_{x \in V} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in U} f(x) \geq \inf_{x \in V} f(x) \tag{10.9}$$

Preuve

(i)

On montre que si m est un minorant de A alors $-m$ est un majorant de l'ensemble

$$-A = \{y \in K / -y \in A\}$$

et que

$$-\sup\{x : x \in -A\}$$

est une borne inférieure de A

1. D'abord on montre que si m est un minorant de A alors $-m$ est un majorant de $-A$

   Si $y \in -A$ il existe $x \in A$ tel que $y = -x$ puisque m est un minorant de A on a $x \geq m$, la compatibilité de l'ordre et de l'addition montre alors que $x - (m + x) \geq m - (m + x)$ ainsi $-m \geq -x$

2. Ensuite on montre que $-\sup\{x : x \in -A\}$ est une borne inférieure de A

   (a) $-\sup\{x : x \in -A\}$ est un minorant de A.
   En effet, si $x \in A$ alors $-x \in -A$ par suite $-x \leq \sup\{x : x \in -A\}$ et la compatibilité de l'addition et de l'ordre montre alors que $x \geq -\sup\{x : x \in -A\}$

   (b) $-\sup\{x : x \in -A\}$ est le plus grand minorant de A.
   En effet, si m est un minorant de A alors d'après 1. $-m$ est un majorant de $-A$ et puisque $\sup\{x : x \in -A\}$ est le plus petit majorant de $-A$ on obtient $\sup\{x : x \in -A\} \leq -m$, la compatibilité de l'addition et de l'ordre montre alors que $m \leq -\sup\{x : x \in -A\}$

Ainsi A possède une borne inférieure et

$$\inf\{x : x \in A\} = -\sup\{x : x \in -A\}$$

(ii)

1. D'après (i) il suffit de montrer que $f(U)$ est majoré et minoré. On montre que si M est un majorant de $|f|(U)$ alors M est un majorant de $f(U)$ et $-M$ est un minorant de $f(U)$. En effet, dire que M est un majorant de $|f|(U)$ c'est dire

   $$x \in U \Rightarrow \max\{f(x)\ ,\ -f(x)\} \leq M \tag{10.10}$$

   ceci montre que

   $$x \in U \Rightarrow f(x) \leq M$$

   ainsi M est un majorant de $f(U)$. Il reste à voir

   $$x \in U \Rightarrow f(x) \geq -M$$

   Mai d'après (10.10) on a

   $$x \in U \Rightarrow -f(x) \leq M$$

   la compatibilité de l'addition et de l'ordre montre alors que $-f(x)+(f(x)-M) \leq M+(f(x)-M)$ par suite

   $$x \in U \Rightarrow -M \leq f(x)$$

   et $-M$ est un minorant de $f(U)$.

2. D'après le lemme [9.4] page 437 pour tout $x \in X$ on a $|h(x)| = |f(x)|$ ainsi h et f sont simultanément bornées.

   (a) On montre que $-\sup\{x : x \in h(U)\}$ est un minorant de $f(U)$.
   Si $y \in f(U)$ il existe $x \in U$ tel que $y = f(x)$ par suite $-y = h(x)$ est un élément de $h(U)$ ainsi $-y \leq \sup\{x : x \in h(U)\}$ la compatibilité de l'ordre et de l'addition montre alors que $y \geq -\sup\{x : x \in h(U)\}$.

(b) On montre que $-\sup\{x : x \in h(U)\}$ est le plus grand minorant de $f(U)$.
Si m est un minorant de $f(U)$ alors

$$x \in U \Rightarrow f(x) \geq m$$

la compatibilité de l'addition et de l'ordre entraîne

$$x \in U \Rightarrow f(x) - (f(x) + m) \geq m - (f(x) + m)$$

d'où

$$x \in U \Rightarrow h(x) \leq -m$$

Ainsi $-m$ est un majorant de $h(U)$ et puisque $\sup\{x : x \in h(U)\}$ est le plus petit majorant de $h(U)$ on obtient

$$\sup\{x : x \in h(U)\} \leq -m \quad \text{et} \quad m \leq -\sup\{x : x \in h(U)\} \ .$$

(c) On montre que $-\inf\{x : x \in h(U)\}$ est un majorant de $f(U)$.
Si $y \in f(U)$ il existe $x \in U$ tel que $y = f(x)$ par suite $-y = h(x)$ est un élément de $h(U)$ ainsi $-y \geq \inf\{x : x \in h(U)\}$ la compatibilité de l'ordre et de l'addition montre alors que $y \leq -\inf\{x : x \in h(U)\}$.

(d) On montre que $-\inf\{x : x \in h(U)\}$ est le plus petit majorant de $f(U)$.
Si M est un majorant de $f(U)$ alors

$$x \in U \Rightarrow f(x) \leq M$$

la compatibilité de l'addition et de l'ordre entraîne

$$x \in U \Rightarrow h(x) \geq -M$$

Ainsi $-M$ est un minorant de $h(U)$ et puisque $\inf\{x : x \in h(U)\}$ est le plus grand minorant de $h(U)$ on obtient

$$\inf\{x : x \in h(U)\} \geq -M \quad \text{et} \quad -\inf\{x : x \in h(U)\} \leq M \ .$$

Les propriétés (a) et (b) montre que

$$\sup\{x : x \in h(U)\} = -\inf_{x \in U} f(x)$$

et Les propriétés (c) et (d) montre que

$$\inf\{x : x \in h(U)\} = -\sup_{x \in U} f(x)$$

(iii)

Par hypothèse pour tout $y \in V$ $g(y)$ est un majorant de $f(U)$, puisque $\sup\limits_{x \in U} f(x)$ est le plus petit majorant de $f(U)$ on obtient

$$y \in V \Rightarrow \sup_{x \in U} f(x) \leq g(y)$$

ainsi $\sup\limits_{x \in U} f(x)$ est un minorant de $g(V)$, puisque $\inf\limits_{y \in V} g(y)$ est le plus grand minorant de $g(V)$ on obtient

$$\sup_{x \in U} f(x) \leq \inf_{y \in V} g(y)$$

(iv)

1. (a) On montre que $\sup_{x\in U} f(x) + \sup_{y\in V} g(y)$ est un majorant de $h(U\times V)$.

Pour tout $(x,y)\in U\times V$ on a

$$f(x) \le \sup_{x\in U} f(x) \quad \text{et} \quad g(y) \le \sup_{y\in V} g(y)$$

ainsi la compatibilité de l'addtion et de l'ordre entraîne

$$(x,y)\in U\times V \Rightarrow f(x)+g(y) \le \sup_{x\in U} f(x) + \sup_{y\in V} g(y)$$

(b) On montre que $\sup_{x\in U} f(x) + \sup_{y\in V} g(y)$ est le plus petit majorant de $h(U\times V)$.

Si M est un majorant de $h(U\times V)$ alors

$$(x,y)\in U\times V \Rightarrow f(x) \le M - g(y)$$

ainsi pour tout $y\in V$ $M-g(y)$ est un majorant de $f(U)$. Puisque $\sup_{x\in U} f(x)$ est le plus petit majorant de $f(U)$ on obtient

$$y\in V \Rightarrow \sup_{x\in U} f(x) \le M - g(y) \Rightarrow g(y) \le M - \sup_{x\in U} f(x)$$

ainsi $M - \sup_{x\in U} f(x)$ est un majorant de $g(V)$. Puisque $\sup_{y\in V} g(y)$ est le plus petit majorant de $g(V)$ on obtient

$$\sup_{y\in V} g(y) \le M - \sup_{x\in U} f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x\in U} f(x) + \sup_{y\in V} g(y) \le M$$

2. (a) On montre que $\inf_{x\in U} f(x) + \inf_{y\in V} g(y)$ est un minorant de $h(U\times V)$.

Pour tout $(x,y)\in U\times V$ on a

$$\inf_{x\in U} f(x) \le f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{y\in V} g(y) \le g(y)$$

ainsi la compatibilité de l'addtion et de l'ordre entraîne

$$(x,y)\in U\times V \Rightarrow \inf_{x\in U} f(x) + \inf_{y\in V} g(y) \le f(x)+g(y)$$

(b) On montre que $\inf_{x\in U} f(x) + \inf_{y\in V} g(y)$ est le plus grand minorant de $h(U\times V)$.

Si m est un minorant de $h(U\times V)$ alors

$$(x,y)\in U\times V \Rightarrow m - g(y) \le f(x)$$

ainsi pour tout $y\in V$ $m-g(y)$ est un minorant de $f(U)$. Puisque $\inf_{x\in U} f(x)$ est le plus grand minorant de $f(U)$ on obtient

$$y\in V \Rightarrow m - g(y) \le \inf_{x\in U} f(x) \Rightarrow m - \inf_{x\in U} f(x) \le g(y)$$

ainsi $m - \inf_{x\in U} f(x)$ est un minorant de $g(V)$. Puisque $\inf_{y\in V} g(y)$ est le plus grand minorant de $g(V)$ on obtient

$$m - \inf_{x\in U} f(x) \le \inf_{y\in V} g(y) \quad \text{et} \quad m \le \inf_{x\in U} f(x) + \inf_{y\in V} g(y)$$

(v)

1. <u>On montre que h est bornée sur U</u>

   D'après le lemme [9.4] page 437 on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

   ainsi si M_f est un majorant de $|f|(U)$ et M_g est un majorant de $|g|(U)$ alors $M_f + M_g$ est un majorant de $|h|(U)$.

2. <u>On montre $\inf\limits_{x \in U} f(x) + \inf\limits_{x \in U} g(x) \leq \inf\{z : z \in h(U)\}$</u>

   Puisque $\inf\{z : z \in h(U)\}$ est le plus grand minorant de $h(U)$ il suffit de montrer que $\inf\limits_{x \in U} f(x) + \inf\limits_{x \in U} g(x)$ est un minorant de $h(U)$. Si $z \in h(U)$ il existe $y \in U$ tel que $z = f(y) + g(y)$, les inégalités

$$\inf_{x \in U} f(x) \leq f(y) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in U} g(x) \leq g(y)$$

   et la compatibilité de l'addition et de l'ordre montrent que

$$\inf_{x \in U} f(x) + \inf_{x \in U} g(x) \leq z$$

3. <u>On montre $\inf\{z : z \in h(U)\} \leq \sup\{z : z \in h(U)\}$</u>

   Puisque $U \neq \varnothing$ pour tout $x \in U$

$$\inf\{z : z \in h(U)\} \leq f(x) + h(x) \leq \sup\{z : z \in h(U)\}$$

4. <u>On montre $\sup\{z : z \in h(U)\} \leq \sup\limits_{x \in U} f(x) + \sup\limits_{x \in U} g(x)$</u>

   Puisque $\sup\{z : z \in h(U)\}$ est le plus petit majorant de l'ensemble $h(U)$ il suffit de montrer que $\sup\limits_{x \in U} f(x) + \sup\limits_{x \in U} g(x)$ est un majorant de $h(U)$. Si $z \in h(U)$ il existe $y \in U$ tel que $z = f(y) + g(y)$, les inégalités

$$f(y) \leq \sup_{x \in U} f(x) \quad \text{et} \quad g(y) \leq \sup_{x \in U} g(x)$$

   et la compatibilité de l'addition et de l'ordre montrent que

$$z \leq \sup_{x \in U} f(x) + \sup_{x \in U} g(x)$$

(vi)

1. <u>On montre que h est bornée sur $U \times U$</u>

   D'après le lemme [9.4] page 437 on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)|$$

   ainsi si M est un majorant de $|f|(U)$ alors $2M$ est un majorant de $|h|(U \times U)$.

2. <u>On montre $\sup\{z : z \in h(U \times U)\} \leq \sup\limits_{x \in U} f(x) - \inf\limits_{x \in U} g(x)$</u>

   Puisque $\sup\{z : z \in h(U \times U)\}$ est le plus petit majorant de $h(U \times U)$ il suffit de montrer que $\sup\limits_{x \in U} f(x) - \inf\limits_{x \in U} g(x)$ est un majorant de $h(U \times U)$. Si $z \in h(U \times U)$ il existe $(u, v) \in U \times U$ tel que $z = |f(u) - f(v)|$.

(a) Si $f(u) \geq f(v)$ alors $z = f(u) - f(v)$ et les inégalités (puisque par (10.1) page 592 on a $\sup_{x \in U}(-f(x)) = -\inf_{x \in U} f(x)$)

$$f(u) \leq \sup_{x \in U} f(x) \quad \text{et} \quad -f(v) \leq -\inf_{x \in U} f(x)$$

et la compatibilité de l'addition et de l'ordre montrent que

$$f(u) - f(v) \leq \sup_{x \in U} f(x) - \inf_{x \in U} f(x)$$

(b) Si $f(u) \leq f(v)$ alors $z = f(v) - f(u)$ et les inégalités

$$f(v) \leq \sup_{x \in U} f(x) \quad \text{et} \quad -f(u) \leq -\inf_{x \in U} f(x)$$

et la compatibilité de l'addition et de l'ordre montrent que

$$f(v) - f(u) \leq \sup_{x \in U} f(x) - \inf_{x \in U} f(x)$$

Ainsi $z \in h(U \times U) \Rightarrow z \leq \sup_{x \in U} f(x) - \inf_{x \in U} f(x)$

(c) On montre que $\sup_{x \in U} f(x) - \inf_{x \in U} f(x)$ est le plus petit majorant de $h(U \times U)$

Si M est un majorant de $h(U \times U)$ alors

$$(x, y) \in U \times U \Rightarrow f(x) \leq M + f(y)$$

ainsi pour tout $y \in U$ $M + f(y)$ est un majorant de $f(U)$, puisque $\sup_{x \in U} f(x)$ est le plus petit majorant de $f(U)$ on obtient

$$y \in U \Rightarrow \sup_{x \in U} f(x) \leq M + f(y) \Rightarrow \sup_{x \in U} f(x) - M \leq f(y) \ .$$

Ainsi $\sup_{x \in U} f(x) - M$ est un minorant de $f(U)$, puisque $\inf_{x \in U} f(x)$ est le plus grand minorant de $f(U)$ on obtient

$$\sup_{x \in U} f(x) - M \leq \inf_{x \in U} f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in U} f(x) - \inf_{x \in U} f(x) \leq M \ .$$

(vii)

D'après le lemme [9.4] page 437 on a $|h(x)| = |t||f(x)|$ ainsi si M est un majorant de $|f|(U)$ la compatibilité de la multiplication et de l'ordre montre que $|t|M$ est un majorant de $|h|(U)$. Si $t = 0$ les égalités (10.7) page 593 sont trivialement vérifiées, on peut donc supposer $t \in K^*$.

1. Le cas $t \in K_+^*$

(a) On montre que $t \sup_{x \in U} f(x)$ est un majorant de $h(U)$.

Si $z \in h(U)$ il existe $y \in U$ tel que $z = tf(y)$ l'inégalité

$$f(y) \leq \sup_{x \in U} f(x)$$

et la compatibilité de l'ordre et de la multiplication montre alors que $tf(y) \leq t \sup_{x \in U} f(x)$ par suite

$$z \leq t \sup_{x \in U} f(x) \ .$$

(b) On montre que $t\sup_{x\in U} f(x)$ est le plus petit majorant de $h(U)$.

Si M est un majorant de $h(U)$ alors l'égalité $f(x) = \dfrac{h(x)}{t}$ et la compatibilité de la multiplication et de l'ordre montre que $\dfrac{M}{t}$ est un majorant de $f(U)$. Puisque $\sup_{x\in U} f(x)$ est le plus petit majorant de $f(U)$ on obtient $\sup_{x\in U} f(x) \leq \dfrac{M}{t}$ et la compatibilité de la multiplication et de l'ordre montre que

$$t \sup_{x\in U} f(x) \leq M \ .$$

(c) On montre que $t \inf_{x\in U} f(x)$ est un minorant de $h(U)$.

Si $z \in h(U)$ il existe $y \in U$ tel que $z = tf(y)$ l'inégalité

$$\inf_{x\in U} f(x) \leq f(y)$$

et la compatibilité de l'ordre et de la multiplication montre alors que $t \inf_{x\in U} f(x) \leq tf(y)$ par suite

$$t \inf_{x\in U} f(x) \leq z \ .$$

(d) On montre que $t \inf_{x\in U} f(x)$ est le plus grand minorant de $h(U)$.

Si m est un minorant de $h(U)$ alors l'égalité $f(x) = \dfrac{h(x)}{t}$ et la compatibilité de la multiplication et de l'ordre montre que $\dfrac{m}{t}$ est un minorant de $f(U)$. Puisque $\inf_{x\in U} f(x)$ est le plus grand minorant de $f(U)$ on obtient $\dfrac{m}{t} \leq \inf_{x\in U} f(x)$ et la compatibilité de la multiplication et de l'ordre montre que

$$m \leq t \sup_{x\in U} f(x) \ .$$

Les points (a) et (b) montre que

$$\sup_{x\in U} tf(x) = t \sup_{x\in U} f(x)$$

et Les points (c) et (d) montre que

$$\inf_{x\in U} tf(x) = t \inf_{x\in U} f(x)$$

2. <u>Le cas $t \in K_-^*$</u>

Puisque $h(x) = (-t)(-f(x))$ et $-t \in K_+^*$ *1.* montre que

$$\sup_{x\in U} tf(x) = (-t) \sup_{x\in U}(-f(x)) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in U} tf(x) = (-t) \inf_{x\in U}(-f(x))$$

et (10.1) page 592 montre alors que

$$\sup_{x\in U} tf(x) = (-t) \sup_{x\in U}(-f(x)) = (-t)(- \inf_{x\in U} f(x)) = t \inf_{x\in U} f(x)$$

et

$$\inf_{x\in U} tf(x) = (-t) \inf_{x\in U}(-f(x)) = (-t)(- \sup_{x\in U} f(x)) = t \sup_{x\in U} f(x) \ .$$

(viii)

— On remarque
$$U \subset V \Rightarrow |f|(U) \subset |f|(V)$$
en effet,
$$x \in |f|(U) \Leftrightarrow \exists\, y \in U : x = |f(y)|$$
puisque $U \subset V$ on a $y \in V$ et $x \in |f|(V)$. Ainsi tout majorant de $|f|(V)$ est un majorant de $|f|(U)$ puisque si M est un majorant de $|f|(V)$ alors
$$x \in |f|(U) \Rightarrow x \in |f|(V) \Rightarrow x \leq M\ .$$
— On remarque
$$U \subset V \Rightarrow f(U) \subset f(V)$$
en effet,
$$x \in f(U) \Leftrightarrow \exists\, y \in U : x = f(y)$$
puisque $U \subset V$ on a $y \in V$ et $x \in f(V)$. Puisque $\sup\limits_{x\in V} f(x)$ est un majorant de $f(V)$ c'est aussi un majorant de $f(U)$, mais par définition $\sup\limits_{x\in U} f(x)$ est le plus petit majorant de $f(U)$, par suite $\sup\limits_{x\in U} f(x) \leq \sup\limits_{x\in V} f(x)$.

— Si m est un minorant de $f(V)$ alors m est un minorant de $f(U)$, en effet
$$x \in f(U) \Rightarrow x \in f(V) \Rightarrow m \leq x\ .$$
puisque $\inf\limits_{x\in V} f(x)$ est un minorant de $f(V)$ c'est un minorant de $f(U)$, or $\inf\limits_{x\in U} f(x)$ est le plus grand minorant de $f(U)$ par suite
$$\inf_{x\in V} f(x) \leq \inf_{x\in U} f(x)$$
■

Le lemme qui suit établit quelques propriétés élémentaires des corps de Dedekind. Pour les définitions des sous-ensembles d'entiers naturels, d'entiers relatifs et du sous-corps d'entiers rationnels d'un corps ordonné on peut se reporter au théorème [9.9] page 589

Lemme 10.2 *On note* $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps de Dedekind tel que* $1 \neq 0$ *,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N}$ *son anneau d'entiers relatifs et* $\mathbb{Q}$ *son sous-corps d'entiers rationnels.*

(i) on a
$$x \in K_+^* \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in K_+^*$$
(ii) K *est archimèdien : pour tout* $(a, b) \in K_+^* \times K$ *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*
$$na \geq b$$
(iii) Pour tout $a \in K_+$ *l'ensemble* $\mathbb{N}_a = \{n \in \mathbb{N}/n \leq a\}$ *est un sous-ensemble majoré de l'ensemble ordonné* $(\mathbb{N},\ O\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\ )$ *et possède un plus grand élément pour l'ordre* $O(\mathbb{N}) = O\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ *. L'application* E *de* K_+ *dans* $\mathbb{N}$ *définie par*
$$E(a) = \max\nolimits_{O(\mathbb{N})}\{n : n \in \mathbb{N}_a\}$$
possède les propriétés suivantes : pour tout $(a, b) \in K_+ \times K_+$
$$E(a + b) \leq a + b \leq E(a) + E(b) + 1 \tag{10.11}$$
$$0 \leq E(ab) - E(a)E(b) \leq E(a) + E(b) \tag{10.12}$$
(iv) Si $(x, y) \in K \times K$ *et* $x < y$ *alors* $\mathbb{Q}\cap]x, y[\neq \varnothing$ *: il existe* $q \in \mathbb{Q}$ *tel que*
$$x < q < y$$

Preuve

(i)

D'après le lemme [9.4] page 437 on a $1 > 0$ et $K_+K_- \subset K_-$ ainsi

— Si $x \in K_+^*$ et $\frac{1}{x} \in K_-$ on a, puisque $1 = x.\frac{1}{x}$ alors $1 \in K_-$ par suite

$$x \in K_+^* \Rightarrow \frac{1}{x} \in K_+$$

D'autre part $\frac{1}{x} \neq 0$ puisque si $\frac{1}{x} = 0$ alors $1 = x.\frac{1}{x} = 0$

— Si $\frac{1}{x} \in K_+^*$ et $x \in K_-$ alors $1 \in K_-$ par suite

$$\frac{1}{x} \in K_+ \Rightarrow x \in K_+$$

d'autre part $x \neq 0$ puisque 0 n'est pas inversible.

(ii)

Si $a \in K_+^*$ et φ est l'application de $\mathbb{N}$ dans K définie par

$$\varphi(n) = na$$

alors $\mathrm{im}(\varphi)$ est non majoré. En effet, s'il était majoré, par définition d'un corps de dedekind $\mathrm{im}(\varphi)$ posséderait une borne supérieure m, on aurait alors

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1)a \leq m$$

ainsi $m - a$ serait un majorant de $\mathrm{im}(\varphi)$ strictement inférieur à m et ceci contredit la définition d'une borne supérieure. Puisque $\mathrm{im}(\varphi)$ n'est pas majoré, pour tout $b \in K$ il existe $x \in \mathrm{im}(\varphi)$ tel que $x > b$, ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > b$.

(iii)

Puisque $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ est archimédien il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 1 \geq a$, n_0 est un majorant de $\mathbb{N}_a$ pour l'ordre $O(\mathbb{N})$ puisque

$$n \in \mathbb{N}_a \Rightarrow n \leq a \leq n_0$$

Ainsi, puisque $(\mathbb{N}\ ,\ O(\mathbb{N}))$ est un ensemble d'entiers naturels , le lemme [4.3] page 78 montre que $\mathbb{N}_a$ posséde un plus grand élément.Soit $(a, b) \in K_+ \times K_+$, alors la compatibilité des lois et de l'ordre montre que $a + b \in K_+$ et $ab \in K_+$.

1. <u>On montre $E(a+b) \leq a+b \leq E(a)+E(b)+1$</u>

   Par définition d'un maximum $E(a+b) \in \mathbb{N}_{a+b}$ par suite $E(a+b) \leq a+b$. On remarque ensuite que par définition d'un maximum, pour tout $a \in K_+$ $E(a) \in \mathbb{N}_a$ et $E(a)+1 \notin \mathbb{N}_a$, par suite

   $$E(a) \leq a < E(a)+1 \quad \text{et} \quad E(b) \leq b < E(b)+1 \tag{10.13}$$

   Ainsi la compatibilité de l'addition et de l'ordre montre

   $$a + b < E(a) + E(b) + 2$$

   par suite

   $$a + b \leq E(a) + E(b) + 1$$

2. <u>On montre $0 \leq E(ab) - E(a)E(b) \leq E(a) + E(b)$</u>

(a) D'abord les inégalités (10.13) page 601 et la compatibilité de l'ordre et de la multiplication montrent

$$E(a)E(b) \leq ab \ .$$

Ainsi $E(a)E(b) \in \mathbb{N}_{ab}$ et $E(a)E(b) \leq E(ab)$.

(b) Ensuite les inégalités (10.13) page 601 et la compatibilité de l'ordre et de la multiplication montrent

$$ab < (E(a)+1)(E(b)+1).$$

l'égalité

$$(E(a)+1)(E(b)+1) = E(a)E(b) + E(a) + E(b) + 1$$

montre alors que

$$E(ab) \leq ab < E(a)E(b) + E(a) + E(b) + 1$$

d'où

$$E(ab) - E(a)E(b) < E(a) + E(b) + 1$$

et

$$E(ab) - E(a)E(b) \leq E(a) + E(b) \ .$$

(iv)

On montre d'abord le résultat dans le cas $0 \leq x < y$. On pose

$$k = E(\frac{1}{y-x}) + 1$$

Ainsi $k \in \mathbb{N}$ vérifie

$$k - 1 \leq \frac{1}{y-x} < k$$

et la compatibilité des lois et de l'ordre montre que

$$x + \frac{1}{k} < y$$

Si $l = E(kx) + 1$ on obtient

$$l - 1 \leq kx < l$$

par suite

$$\frac{l-1}{k} \leq x < \frac{l}{k}$$

ainsi

$$x < \frac{l-1}{k} + \frac{1}{k} \leq x + \frac{1}{k} < y$$

d'où

$$x < \frac{l}{k} < y \ ,$$

et par définition du sous-corps de rationnels de $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ on a $\frac{l}{k} \in \mathbb{Q}$. Il reste à voir les cas $x < 0 < y$, $x < y \leq 0$.

— Si $x < 0 < y$ alors $0 \in \mathbb{Q} \cap]x, y[$

— Si $x < y \leq 0$ et $l \in \mathbb{Q} \cap] - y, -x[$ alors $-l \in \mathbb{Q} \cap]x, y[$.

■

L'existence de bornes supérieures et inférieures de suites bornées permet d'aborder la notion de convergence de suites.

10.1.2 *Convergence dans les corps de Dedekind*

Le Théorème qui suit est d'utilisation courante. Pour la définition d'une suites bornées, majorées ou minorées voir définition [10.2] page 590

Théorème 10.1 *On note* $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps de Dedekind ,* $(\mathbb{N}\ ,\ \mathcal{O}\ )$ *un ensemble d'entiers naturels et* U *l'application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *définie par*

$$U_n = \{k \in \mathbb{N}/(n,k) \in \mathcal{O}\}$$

(i) Si $(a,b) \in K \times K$ *pour que* $a < b$ *il faut et il suffit qu'il existe* $\varepsilon \in K_+^*$ *tel que*

$$a + \varepsilon \leq b$$

(ii) Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K)$ *est une suite croissante majorée de* $(\mathbb{N}\ ,\mathcal{O})$ *dans* (K,O) *l'ensemble*

$$x(\mathbb{N}) = \{y \in K/\exists\ k \in \mathbb{N} : y = x_k\}$$

possède une borne supérieure $y = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$*,* y *est l' unique élément de* K *qui vérifie la propriété suivante : Pour tout* $\varepsilon \in K_+^*$ *il existe* $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow y - \varepsilon \leq x_k \leq y\ .$$

(iii) Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K)$ *est une suite décroissante minorée de* $(\mathbb{N}\ ,\mathcal{O})$ *dans* (K,O) *l'ensemble*

$$x(\mathbb{N}) = \{y \in K/\exists\ k \in \mathbb{N} : y = x_k\}$$

possède une borne inférieure $z = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$*,* z *est l' unique élément de* K *qui vérifie la propriété suivante : Pour tout* $\varepsilon \in K_+^*$ *il existe* $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow z \leq x_k \leq z + \varepsilon\ .$$

(iv) Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K)$ *est une suite bornée de* $\mathbb{N}$ *dans* $(K\ ,\ O\ )$ *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *l'ensemble*

$$x(U_n) = \{y \in K/\exists\ k \in U_n : y = x_k\}$$

possède les propriétés suivantes

1. $x(U_n)$ *possède une borne supérieure* y_n *qu'on note indifféremment*

$$y_n = \sup_{k\geq n} x_k = \sup_{k\in U_n} x_k = \sup\{y : y \in x(U_n)\}$$

2. *la suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K)$ *définie par*

$$y_n = \sup_{k\geq n} x_k$$

est décroissante minorée de $(\mathbb{N}\ ,\ \mathcal{O})$ *dans* $(K,\ O)$*, ainsi l'ensemble* $y(\mathbb{N})$ *possède une borne inférieure* l^* *qu'on note indifféremment*

$$l^* = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{k\geq n} x_k) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$$

3. $x(U_n)$ *possède une borne inférieure* z_n *qu'on note indifféremment*

$$z_n = \inf_{k\geq n} x_k = \inf_{k\in U_n} x_k = \inf\{y : y \in x(U_n)\}$$

4. la suite $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , K)$ *définie par*

$$z_n = \inf_{k \geq n} x_k$$

est croissante majorée de $(\mathbb{N}\ ,\ \mathcal{O})$ *dans* $(K,\ O)$ *, ainsi l'ensemble* $z(\mathbb{N})$ *possède une borne supérieure* l_* *qu'on note indifféremment*

$$l_* = \sup_{n \in \mathbb{N}}(\inf_{k \geq n} x_k) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k$$

5. Pour toute suite bornée $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , K)$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k \tag{10.14}$$

(v) Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , K)$ *est une suite borné l'application* $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}\ , K)$ *définie par*

$$z_{p,q} = |x_p - x_q|$$

est bornée et possède les propriétés suivantes

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *l'ensemble*

$$z(U_n \times U_n) = \{y \in K / \exists\ (p, q) \in U_n \times U_n : y = z_{p,q}\}$$

possède une borne supérieure w_n *qu'on note indifféremment*

$$w_n = \sup_{(p,q) \in U_n \times U_n} |x_p - x_q| = \sup_{p \geq n, q \geq n} |x_p - x_q|$$

2. La suite $w \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , K)$ *définie par*

$$w_n = \sup_{p \geq n, q \geq n} |x_p - x_q|$$

est décroissante positive de $(\mathbb{N}\ ,\ \mathcal{O})$ *dans* $(K,\ O\ )$ *ainsi elle possède une borne inférieure qu'on note*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{p \geq n, q \geq n} |x_p - x_q| = \inf_{n \in \mathbb{N}} w_n\ .$$

On a alors

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k - \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{p \geq n, q \geq n} |x_p - x_q| \tag{10.15}$$

(vi) Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , K)$ *est une suite borné les propriétés* I, II *et* III *suivantes sont équivalentes :*

I

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k \tag{10.16}$$

II *Il existe* $l \in K$ *vérifiant la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in K_+^*$ *il existe* $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - l| \leq \varepsilon\ . \tag{10.17}$$

III *Pour tout* $\varepsilon \in K_+^*$ *il existe* $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *vérifiant :*

$$[\ p \geq n(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q \geq n(\varepsilon)\ ] \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \varepsilon\ . \tag{10.18}$$

Preuve

(i)

Puisque $2 > 1$, la compatibilité de la multiplication et de l'ordre montre que $\dfrac{1}{2} < 1$ et que si $b - a > 0$ $0 < \dfrac{b-a}{2} < b - a$ par suite

$$a + \frac{b-a}{2} < a + b - a \leq b$$

(ii)

Dire que x est majorée c'est dire que l'ensemble $x(\mathbb{N})$ est majoré, ainsi par définition d'un corps de Dedekind $x(\mathbb{N})$ posséde une borne supérieure y. Puisque y est le plus petit majorant de $x(\mathbb{N})$ pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ $y - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $x(\mathbb{N})$, ainsi il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $y - \varepsilon \leq x_{n(\varepsilon)}$

— puisque x est croissante on a

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow y - \varepsilon \leq x_{n(\varepsilon)} \leq x_k$$

— puisque y est un majorant de $x(\mathbb{N})$ on a

$$k \in \mathbb{N} \Rightarrow x_k \leq y \ .$$

On montre ensuite que si y vérifie la propriété que pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow y - \varepsilon \leq x_k \leq y$$

alors $y = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$

1. D'abord on montre que y est un majorant de $x(\mathbb{N})$

   En effet, si $k \in \mathbb{N}$ alors
   — si $k \leq n(\varepsilon)$, la croissance de x montre $x_k \leq x_{n(\varepsilon)} \leq y$
   — si $k \geq n(\varepsilon)$ la propriété entraîne $x_k \leq y$

2. Ensuite on montre que y est le plus petit majorant de $x(\mathbb{N})$

   Il suffit de montrer que si $t < y$ alors t n'est pas un majorant de $x(\mathbb{N})$. or si $t < y$ il existe d'après (i) un $\varepsilon \in K_+^*$ tel que $t < y - \varepsilon$, la propriété entraîne alors qu'il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

   $$t < y - \varepsilon \leq x_{n(\varepsilon)}$$

   ce qui montre que t n'est pas un majorant de $x(\mathbb{N})$.

(iii)

Dire que x est minorée c'est dire que l'ensemble $x(\mathbb{N})$ est minoré, ainsi le lemme [10.1] page 592 permet d'affirmer que $x(\mathbb{N})$ posséde une borne inférieure z. Puisque z est le plus grand minorant de $x(\mathbb{N})$ pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ $z + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $x(\mathbb{N})$, ainsi il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n(\varepsilon)} \leq z + \varepsilon$

— puisque x est décroissante on a

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow x_k \leq x_{n(\varepsilon)} \leq z + \varepsilon$$

— puisque z est un minorant de $x(\mathbb{N})$ on a

$$k \in \mathbb{N} \Rightarrow z \leq x_k \ .$$

On montre ensuite que si z vérifie la propriété que pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow z \leq x_k \leq y + \varepsilon$$

alors $z = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$

1. D'abord on montre que z est un minorant de $x(\mathbb{N})$

   En effet, si $k \in \mathbb{N}$ alors
   — si $k \leq n(\varepsilon)$, la décroissance de x montre $x_k \geq x_{n(\varepsilon)} \geq z$
   — si $k \geq n(\varepsilon)$ la propriété entraîne $x_k \geq z$

2. Ensuite on montre que z est le plus grand minorant de $x(\mathbb{N})$

   Il suffit de montrer que si $t > z$ alors t n'est pas un minorant de $x(\mathbb{N})$. or si $t > z$ il existe d'après (i) un $\varepsilon \in K_+^*$ tel que $t > z + \varepsilon$, la propriété entraîne alors qu'il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

   $$t > z + \varepsilon \geq x_{n(\varepsilon)}$$

   ce qui montre que t n'est pas un minorant de $x(\mathbb{N})$.

(iv)

1. Puisque x est bornée elle est bornée sur U_n et le lemme [10.1] page 592 montre que $x(U_n)$ posséde une borne supérieure.
2. (a) D'abord on montre que y est décroissante

   Puisque $U_{n+1} \subset U_n$ les inégalités (10.9) page 593 montre que

   $$\sup_{k \in U_{n+1}} x_k \leq \sup_{k \in U_n} x_k$$

   ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $y_{n+1} \leq y_n$.

   (b) Ensuite on montre que y est minorée

   D'après le le lemme [10.1] page 592, $x(\mathbb{N})$ posséde un minorant. Si m est un minorant de $x(\mathbb{N})$ alors

   $$n \in \mathbb{N} \Rightarrow y_n \geq x_n \geq m$$

3. Puisque x est bornée elle est bornée sur U_n et le lemme [10.1] page 592 montre que $x(U_n)$ posséde une borne inférieure.
4. (a) D'abord on montre que z est croissante

   Puisque $U_{n+1} \subset U_n$ les inégalités (10.9) page 593 montre que

   $$\inf_{k \in U_n} x_k \leq \inf_{k \in U_{n+1}} x_k$$

   ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $z_n \leq z_{n+1}$.

   (b) Ensuite on montre que z est majorée

   D'après le lemme [10.1] page 592, $x(\mathbb{N})$ posséde un majorant . Si M est un majorant de $x(\mathbb{N})$ alors

   $$n \in \mathbb{N} \Rightarrow z_n \leq x_n \leq M$$

5. On montre $l_* \leq l^*$

   D'après l'inégalité (10.2) page 592, il suffit de montrer

   $$(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow z_p \leq y_q$$

   — si $p \leq q$ alors la croissance de z entraîne $z_p \leq z_q \leq x_q \leq y_q$
   — si $q \leq p$ alors la décroissance de y entraîne $z_p \leq x_p \leq y_p \leq y_q$
   Ainsi l'inégalité (10.2) montre que

   $$\sup_{p \in \mathbb{N}} z_p \leq \inf_{q \in \mathbb{N}} y_q$$

   c'est à dire $l_* \leq l^*$.

(v)

1. <u>On montre que l'ensemble $z(U_n \times U_n)$ posséde une borne supérieure</u>

   D'après le (vi) du lemme [10.1] page 592 $z(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ est borné, ainsi $z(U_n \times U_n)$ est borné et le même lemme montre que $z(U_n \times U_n)$ possède une borne supérieure.

2. (a) <u>On montre que w est décroissante</u>

   Puisque $U_{n+1} \times U_{n+1} \subset U_n \times U_n$ les inégalités (10.9) page 593 montre que

   $$\sup_{(p,q)\in U_{n+1}\times U_{n+1}} z_{p,q} \leq \sup_{(p,q)\in U_n\times U_n} z_{p,q}$$

   ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $w_{n+1} \leq w_n$.

   (b) <u>On montre que $l^* - l_* = \inf_{n\in\mathbb{N}} w_n$</u>

   D'après l'égalité (10.6) page 593 on a

   $$\sup_{k\in U_n} x_k - \inf_{k\in U_n} x_k = \sup_{(p,q)\in U_n\times U_n} |x_p - x_q|$$

   autrement dit :

   $$y_n - z_n = w_n$$

   Puisque $l^* = \inf_{k\in\mathbb{N}} y_k$ et $l_* = \sup_{k\in\mathbb{N}} z_k$ il suffit de montrer

   $$\inf_{k\in\mathbb{N}}(y_k - z_k) = \inf_{k\in\mathbb{N}} y_k - \sup_{k\in\mathbb{N}} z_k \ .$$

   — Si $n \in \mathbb{N}$ les inégalités

   $$\inf_{k\in\mathbb{N}} y_k \leq y_n \quad \text{et} \quad -\sup_{k\in\mathbb{N}} z_k \leq -z_n$$

   montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\inf_{k\in\mathbb{N}} y_k - \sup_{k\in\mathbb{N}} z_k \leq y_n - z_n$ ainsi $\inf_{k\in\mathbb{N}} y_k - \sup_{k\in\mathbb{N}} z_k$ est un minorant de l'ensemble

   $$U = \{a \in K / \exists\ n \in \mathbb{N} : a = y_n - z_n\}$$

   Puisque $\inf_{k\in\mathbb{N}}(y_k - z_k)$ est le plus grand minorant de U on obtient

   $$\inf_{k\in\mathbb{N}} y_k - \sup_{k\in\mathbb{N}} z_k \leq \inf_{k\in\mathbb{N}}(y_k - z_k) \ ,$$

   Il reste à établir que $\inf_{k\in\mathbb{N}} y_k - \sup_{k\in\mathbb{N}} z_k$ est le plus grand minorant de U. Pour cela on montre que si m est un minorant de U alors

   $$(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow m + z_p \leq y_q$$

   Or :
   — si $p \leq q$ alors la croissance de z entraîne $m + z_p \leq m + z_q$ et puisque m est un minorant de U on a $m + z_q \leq y_q$
   — si $q \leq p$ alors la décroissance de y entraîne $y_p \leq y_q$ et puisque m est un minorant de U on a $m + z_p \leq y_p \leq y_q$

   Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$ $m + z_p$ est un minorant de $y(\mathbb{N})$ puisque $\inf_{k\in\mathbb{N}} y_k$ est le plus grand minorant de $y(\mathbb{N})$ on obtient

   $$p \in \mathbb{N} \Rightarrow m + z_p \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} y_k$$

par suite $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} y_k - m$ est un majorant de $z(\mathbb{N})$, puisque $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} z_k$ est le plus petit majorant de $z(\mathbb{N})$ on obtient

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} z_k \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} y_k - m$$

et

$$m \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} y_k - \sup_{k\in\mathbb{N}} z_k$$

Ainsi (10.15) page 604 est établie .

(vi)

1 On montre I $\Rightarrow$ II

Si I est vérifiée alors $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_k = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} x_k$, posons $l = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_k = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} x_k$

— Puisque la suite $z_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k$ est croissante majorée (par l) (ii) permet d'affirmer que pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $p(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$l - \varepsilon \leq \inf_{k\geq p(\varepsilon)} x_k \leq l$$

en particulier pour tout $k \geq p(\varepsilon)$ on a

$$l - \varepsilon \leq x_k$$

— Puisque la suite $y_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$ est décroissante minorée (par l) (iii) permet d'affirmer que pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $q(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$l \leq \sup_{k\geq q(\varepsilon)} x_k \leq l + \varepsilon$$

en particulier pour tout $k \geq q(\varepsilon)$ on a

$$x_k \leq l + \varepsilon$$

Ainsi, si $n(\varepsilon) = \max\{p(\varepsilon)\ ,\ q(\varepsilon)\}$ alors pour tout $k \geq n(\varepsilon)$ on a

$$l - \varepsilon \leq x_k \leq l + \varepsilon$$

et le lemme [9.4] page 437 permet alors d'affirmer

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |x_k - l| \leq \varepsilon\ .$$

2 On montre II $\Rightarrow$ III

Si II est vérifiée alors il existe $l \in K$ tel que pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |x_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Puisque $|x_p - x_q| = |(x_p - l) - (x_q - l)| \leq |x_p - l| + |x_q - l|$ on obtient

$$[\quad p \geq n(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q \geq n(\varepsilon) \quad] \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \varepsilon\ .$$

3 On montre III $\Rightarrow$ I

Si x vérifie III alors pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$(p, q) \in U_{n(\varepsilon)} \times U_{n(\varepsilon)} \Rightarrow |x_p - x_p| \leq \varepsilon$$

par suite pour tout $\varepsilon \in K_+^*$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{p\geq n, q\geq n} |x_p - x_q| \leq \sup_{p\geq n(\varepsilon), q\geq n(\varepsilon)} |x_p - x_q| \leq \varepsilon$$

et $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{p\geq n, q\geq n} |x_p - x_q| = 0$. L'égalité (10.15) page 604 montre alors que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k \ .$$

■

Ce lemme permet d'introduire quelques notations.

Notation 10.2 *On note $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ un corps de Dedekind , $(\mathbb{N}\ ,\mathcal{O})$ un ensemble d'entiers naturels et $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ une suite* ***bornée*** *à valeurs dans K. On note*

1.
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$$

$\limsup_{n\to\infty} x_n$ *est appelée la limite supérieure de x*

2.
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k$$

$\liminf_{n\to\infty} x_n$ *est appelée la limite inférieure de x.*

En fait il s'avère que tout corps ordonné archimédien dans lequel on a l'équivalence II $\Leftrightarrow$ III est un corps de Dedekind, on introduit quelques définitions.

Définition 10.3 *On note $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ un corps ordonné, $(\mathbb{N}\ ,\mathcal{O})$ un ensemble d'entiers naturels et $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ une suite à valeurs dans K. On dit que x posséde une* ***limite*** *s'il existe $l \in K$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que*

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - l| \leq \varepsilon \ .$$

L'ensemble

$$\mathcal{L}(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} \{l \in K / |x_k - l| \leq \varepsilon\}$$

est appelé l'ensemble des limites de x.

On s'intéresse surtout aux suites $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ qui vérifient $\mathcal{L}(x) \neq \varnothing$.

Proposition et définition 10.1 *On note $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ un corps ordonné et $(\mathbb{N}\ ,\mathcal{O})$ un ensemble d'entiers naturels*

(i) Si $(a, b) \in K \times K$ alors

$$a = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad |a - b| \leq \varepsilon$$

(ii) Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ vérifie $\mathcal{L}(x) \neq \varnothing$ alors $\mathcal{L}(x)$ ne contient qu'un élément qu'on note $\lim_{n\to\infty} x_n$, cet élément est appelé la ***limite*** *de la suite x.*

Preuve

(i)

Il suffit de montrer que si $a \neq b$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < |b - a|$$

Puisque $2 > 1$, la compatibilité de la multiplication et de l'ordre montre que $\dfrac{1}{2} < 1$ et que

$$|a - b| \neq 0 \Rightarrow \frac{|b - a|}{2} < |b - a|$$

par suite $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2}$ convient.

(ii)

Si $(a,b) \in \mathcal{L}(x) \times \mathcal{L}(x)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ et $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq \max\{n_0(\varepsilon)\ ,\ n_1(\varepsilon)\} \Rightarrow |x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |x_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ainsi, pour $\varepsilon > 0$ et $n = \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\}$ on obtient

$$|a-b| \leq |a - x_n| + |b - x_n| \leq \varepsilon$$

et (i) montre que $a = b$. ■

Lorsque $\mathcal{L}(x) \neq \varnothing$ on dit que la suite x est convergente.

Définition 10.4 *On note $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ un corps ordonné , $(\mathbb{N}\ ,\mathcal{O})$ un ensemble d'entiers naturels et $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ une suite à valeurs dans K. On dit que x est **convergente** de limite $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ou que x tend vers l si*

$$\mathcal{L}(x) = \{l\}$$

Si K est un corps ordonné et $\mathbb{N}$ est son ensemble d'entiers naturels alors K est archimédien si et seulement si la suite x définie par

$$x_n = \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ \dfrac{1}{n} & si \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

tend vers zéro. Le théorème [10.1] page 603 montre que dans un corps de Dedekind une suite borné est convergente si et seulement si elle vérifie la propriété suivante

Définition 10.5 ***(Définition d'une suite de Cauchy)***
*On note $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ un corps ordonné , $(\mathbb{N}\ ,\mathcal{O})$ un ensemble d'entiers naturels et $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ une suite à valeurs dans K. On dit que x est **une suite de Cauchy** si pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que*

$$[\ p \geq n(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q \geq n(\varepsilon)\ ] \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \varepsilon$$

Un corps ordonné est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 10.6 *Un corps ordonné $(K,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ est dit **topologiquement complet**, ou plus simplement complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

Le lemme qui suit permet de se familiariser avec ces notions.

Lemme 10.3 *On note $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ un corps commutatif ordonné et $(\mathbb{N}\ ,\mathcal{O})$ un ensemble d'entiers naturels*

(i) Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ est une suite de Cauchy de K elle est bornée.

(ii) Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ et $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ sont des suites de Cauchy, les suites $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$, $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ et $c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ définies par

$$a_n = x_n + y_n \quad ,b_n = x_n y_n \quad \text{et} \quad c_n = |x_n|\ ,$$

sont des suites de Cauchy

(iii) Toute suite convergente $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ est une suite de Cauchy.

(iv) Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ et $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ sont des suites convergentes, les suites $a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$, $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ et $c \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K\ )$ définies par

$$a_n = x_n + y_n \quad ,b_n = x_n y_n \quad \text{et} \quad c_n = |x_n|$$

sont des suites convergentes, de plus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = |\lim_{n\to\infty} x_n| \ . \tag{10.19}$$

En particulier pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les suite $d_n = \lambda + y_n$, $e_n = \lambda y_n$ sont convergentes et

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lambda + \lim_{n\to\infty} y_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty} e_n = \lambda \lim_{n\to\infty} y_n$$

(v) Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , K\ )$ et $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , K\ )$ sont des suites convergentes et s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq p \Rightarrow x_k \leq y_k$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

en particulier si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq p \Rightarrow x_k = y_k$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(vi) Si $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ est un corps de Dedekind il est archimédien et complet.

Preuve

(i)

Puisque x est une suite de Cauchy il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n \quad \text{et} \quad q \geq n \Rightarrow |x_p - x_q| \leq 1$$

En particulier, puisque l'égalité $x_p = (x_p - x_q) + x_q$ et le lemme [9.4] page 437 entraînent

$$|x_p| \leq |x_q| + |x_p - x_q|$$

on obtient

$$p \geq n \quad \text{et} \quad q \geq n \Rightarrow |x_p| \leq |x_q| + 1$$

en particulier

$$p \geq n \Rightarrow |x_p| \leq |x_n| + 1 \ . \tag{10.20}$$

Le théorème [6.3] page 128 montre que l'ensemble $|x|(\mathbb{N}_n) = \{y \in K/\exists\ q \in \mathbb{N}_n : y = |x_q|\ \}$ est fini. Puisque K est totalement ordonné le lemme [6.1] page 133 montre que $|x|(\mathbb{N}_n)$ posséde un maximum M . On montre

$$p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_p| \leq M + 1\ ,$$

en effet :

1. Si $p \leq n$ la définition d'un maximum montre

$$|x_p| \leq M \leq M + 1$$

2. si $p \geq n$ l'inégalité (10.20) montre que

$$|x_p| \leq |x_n| + 1 \leq M + 1$$

(ii)

1. On montre que a est une suite de Cauchy

   Puisque x est une suite de Cauchy pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n(x) \quad \text{et} \quad q \geq n(x) \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

   Puisque y est une suite de Cauchy pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(y) \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n(y) \quad \text{et} \quad q \geq n(y) \Rightarrow |y_p - y_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

   Posons $n(a) = \max\{n(x), n(y)\}$, l'égalité $a_p - a_q = (x_p - x_q) + (y_p - y_q)$ et le lemme [9.4] page 437 entraînent

$$p \geq n(a) \quad \text{et} \quad q \geq n(a) \Rightarrow |a_p - a_q| \leq |x_p - x_q| + |y_p - y_q| \leq \varepsilon$$

2. On montre que b est une suite de Cauchy

   D'après (i) les ensembles $|x|(\mathbb{N})$ et $|y|(\mathbb{N})$ définis par $|x|(\mathbb{N}) = \{z \in K / \exists\ k \in \mathbb{N} : z = |x_k|\ \}$ et $|y|(\mathbb{N}) = \{z \in K / \exists\ k \in \mathbb{N} : z = |y_k|\ \}$ sont majorés, on note M_x un majorant de $|x|(\mathbb{N})$ et M_y un majorant de $|y|(\mathbb{N})$. Puisque x est une suite de Cauchy pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n(x) \quad \text{et} \quad q \geq n(x) \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \frac{\varepsilon}{2\max\{1, M_y\}} \ ,$$

   Puisque y est une suite de Cauchy pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(y) \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n(y) \quad \text{et} \quad q \geq n(y) \Rightarrow |y_p - y_q| \leq \frac{\varepsilon}{2\max\{1, M_x\}} \ .$$

   Posons $n(b) = \max\{n(x), n(y)\}$, l'égalité $b_p - b_q = x_p(y_p - y_q) + y_q(x_p - x_q)$ et le lemme [9.4] page 437 entraînent

$$p \geq n(b) \quad \text{et} \quad q \geq n(b) \Rightarrow |b_p - b_q| \leq |x_p||y_p - y_q| + |y_q||x_p - x_q| \leq \varepsilon$$

3. On montre que c est une suite de Cauchy

   Le lemme [9.4] page 437 entraîne

$$|x_p| \leq |x_q| + |x_p - x_q| \quad \text{et} \quad |x_q| \leq |x_p| + |x_p - x_q|$$

   puisque par définition $|c_p - c_q| = \max\{|x_p| - |x_q|, |x_q| - |x_p|\}$ on obtient

$$|c_p - c_q| \leq |x_p - x_q|$$

   Puisque x est une suite de Cauchy pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n(x) \quad \text{et} \quad q \geq n(x) \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \varepsilon$$

   par suite

$$p \geq n(x) \quad \text{et} \quad q \geq n(x) \Rightarrow |c_p - c_q| \leq \varepsilon$$

(iii)

Si x est convergente de limite l alors pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

par suite

$$p \geq n(x) \quad \text{et} \quad q \geq n(x) \Rightarrow |x_p - x_q| \leq |x_p - l| + |l - x_q| \leq \varepsilon$$

(iv)

1. <u>On montre que a est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$</u>

   Si x est convergente de limite $l(x)$ pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que

   $$p \geq n(x) \Rightarrow |x_p - l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

   Si y est est convergente de limite $l(y)$ pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(y) \in \mathbb{N}$ tel que

   $$p \geq n(y) \quad \Rightarrow |y_p - l(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

   Posons $n(a) = \max\{n(x), n(y)\}$, l'égalité $a_p - (l(x) + l(y)) = (x_p - l(x)) + (y_p - l(y))$ et le lemme [9.4] page 437 entraînent

   $$p \geq n(a) \Rightarrow |a_p - (l(x) + l(y))| \leq |x_p - l(x)| + |y_p - l(y)| \leq \varepsilon$$

2. <u>On montre que b est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$</u>

   D'après (iii) et (i) les ensembles $|x|(\mathbb{N})$ et $|y|(\mathbb{N})$ définis par $|x|(\mathbb{N}) = \{z \in K / \exists\ k \in \mathbb{N} : z = |x_k|\ \}$ et $|y|(\mathbb{N}) = \{z \in K / \exists\ k \in \mathbb{N} : z = |y_k|\ \}$ sont majorés, on note M_x un majorant de $|x|(\mathbb{N})$ et M_y un majorant de $|y|(\mathbb{N})$. Si x est une suite convergente de limite $l(x)$ pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que

   $$p \geq n(x) \quad \Rightarrow |x_p - l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\max\{1, M_y, |l(y)|\}} \ ,$$

   Si y est une suite convergente de limite $l(y)$ pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(y) \in \mathbb{N}$ tel que

   $$p \geq n(y) \quad \Rightarrow |y_p - l(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2\max\{1, M_x, |l(x)|\}} \ .$$

   Posons $n(b) = \max\{n(x), n(y)\}$, l'égalité $b_p - l(x)l(y) = x_p(y_p - l(y)) + l(y)(x_p - l(x))$ et le lemme [9.4] page 437 entraînent

   $$p \geq n(b) \quad \Rightarrow |b_p - l(x)l(y)| \leq |x_p||y_p - l(y)| + |l(y)||x_p - l(x)| \leq \varepsilon$$

3. <u>On montre que c est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = |\lim\limits_{n\to\infty} x_n|$</u>

   On note $l(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ Le lemme [9.4] page 437 entraîne

   $$|x_p| \leq |l(x)| + |x_p - l(x)| \quad \text{et} \quad |l(x)| \leq |x_p| + |x_p - l(x)|$$

   puisque par définition $|c_p - |l(x)|| = \max\{|x_p| - |l(x)|, |l(x)| - |x_p|\}$ on obtient

   $$|c_p - |l(x)|| \leq |x_p - l(x)|$$

   Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l(x)$ pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que

   $$p \geq n(x) \quad \Rightarrow |x_p - l(x)| \leq \varepsilon$$

   par suite

   $$p \geq n(x) \quad \Rightarrow |c_p - |l(x)|| \leq \varepsilon$$

4. <u>On montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda + y_n) = \lambda + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda y_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} y_n$</u>

   Il suffit de poser $x_n = \lambda$ et d'appliquer (10.19) page 611 .

(v)

On pose $l(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$, $l(y) = \lim_{n\to\infty} y_n$ et on montre que que l'assertion $l(x) > l(y)$ entraîne une assertion fausse. Si $l(x) > l(y)$ et $\varepsilon = \dfrac{l(x) - l(y)}{4}$ alors par définition d'une limite

— il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que
$$k \geq n(x) \Rightarrow l(x) - \varepsilon \leq x_k$$

— il existe $n(y) \in \mathbb{N}$ tel que
$$k \geq n(y) \Rightarrow y_k \leq l(y) + \varepsilon$$

en particulier pour $k = \max\{n(x), n(y), p\}$ on obtient

$$l(x) - \varepsilon \leq x_k \leq y_k \leq l(y) + \varepsilon \quad \text{et} \quad l(x) - l(y) \leq 2\varepsilon$$

mais par définition $2\varepsilon < l(x) - l(y)$.

(vi)

Le lemme [10.2] page 600 montre que tout corps de Dedekind est archimédien. Puisque toute suite de Cauchy est bornée (d'après (i)) , l'équivalence des assertions (10.17) et (10.18) (page 604) montre que K est topologiquement complet. ■

Le but du paragraphe suivant est de montrer la réciproque du point (vi) du lemme [10.3 page 610].

10.2 *Corps de Cantor*

Un corps de Cantor est un corps ordonné archimédien et topologiquement complet

Définition 10.7 *On appelle corps de* ***Cantor*** *un corps ordonné commutatif* $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *tel que* $1 \neq 0$ *et qui est archimédien et topologiquement complet.*

10.2.1 *Premières propriétés*

Le lemme qui suit établit quelques propriétés élémentaires de la convergence dans les corps archimédien. Pour les définitions des sous-ensembles d'entiers naturels, d'entiers relatifs et du sous-corps d'entiers rationnels d'un corps ordonné on peut se reporter au théorème [9.9] page 589 . Pour la notion de convergence voir la définition [10.4] page 610

Lemme 10.4 *On note* $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps ordonné archimédien et commutatif tel que* $1 \neq 0$, $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N}$ *son anneau d'entiers relatifs et* $\mathbb{Q}$ *son sous-corps d'entiers rationnels.*

(i) Pour tout $a \in K_+$ *l'ensemble* $\mathbb{N}_a = \{n \in \mathbb{N}/n \leq a\}$ *est un sous-ensemble majoré de l'ensemble ordonné* $(\mathbb{N},\ O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})\ )$ *et posséde un plus grand élément pour l'ordre* $O(\mathbb{N}) = O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ *. L'application* E *de* K_+ *dans* $\mathbb{N}$ *définie par*
$$E(a) = \max_{O(\mathbb{N})}\{n : n \in \mathbb{N}_a\}$$
posséde les propriétés suivantes : pour tout $(a, b) \in K_+ \times K_+$

$$E(a + b) \leq a + b \leq E(a) + E(b) + 1 \tag{10.21}$$

$$0 \leq E(ab) - E(a)E(b) \leq E(a) + E(b) \tag{10.22}$$

(ii) Si $0 < x < 1$ *alors la suite* $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ K)$ *définie par*

$$\alpha_n = x^n$$

tend vers 0 : pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq x^n \leq \varepsilon \ . \tag{10.23}$$

De plus la suite $s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ K)$ définie par

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

vérifie

1. $s_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1 - x}$

(iii) Pour tout $(a, p) \in K_+ \times \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq E(p^n a) - pE(p^{n-1}a) \leq p^n a - pE(p^{n-1}a) \leq p - 1 \tag{10.24}$$

(iv) Pour tout $a \in K_+$ et $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $p \geq 2$, la suite $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ K)$ définie par

$$x_n = \frac{E(p^n a)}{p^n}$$

est une suite croissante d'entiers rationnels qui converge vers a.

(v) Si $(x, y) \in K \times K$ et $x < y$ alors $\mathbb{Q} \cap]x, y[\neq \varnothing$: il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x < q < y \ .$$

Preuve

(i)

Puisque $(K \ , \ + \ , \ . \ , \ O \ )$ est archimédien il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 1 \geq a$, n_0 est un majorant de $\mathbb{N}_a$ pour l'ordre $O(\mathbb{N})$ puisque

$$n \in \mathbb{N}_a \Rightarrow n \leq a \leq n_0$$

Ainsi, puisque $(\mathbb{N} \ , \ O(\mathbb{N}))$ est un ensemble d'entiers naturels , le lemme [4.3] page 78 montre que $\mathbb{N}_a$ possède un plus grand élément.Soit $(a, b) \in K_+ \times K_+$, alors la compatibilité des lois et de l'ordre montre que $a + b \in K_+$ et $ab \in K_+$.

1. <u>On montre $E(a + b) \leq a + b \leq E(a) + E(b) + 1$</u>

   Par définition d'un maximum $E(a + b) \in \mathbb{N}_{a+b}$ par suite $E(a + b) \leq a + b$. On remarque ensuite que par définition d'un maximum, pour tout $a \in K_+$ $E(a) \in \mathbb{N}_a$ et $E(a) + 1 \notin \mathbb{N}_a$, par suite

   $$E(a) \leq a < E(a) + 1 \quad \text{et} \quad E(b) \leq b < E(b) + 1 \tag{10.25}$$

   Ainsi la compatibilité de l'addition et de l'ordre montre

   $$a + b < E(a) + E(b) + 2$$

   par suite

   $$a + b \leq E(a) + E(b) + 1$$

2. <u>On montre $0 \leq E(ab) - E(a)E(b) \leq E(a) + E(b)$</u>

(a) D'abord les inégalités (10.13) page 601 et la compatibilité de l'ordre et de la multiplication montrent
$$E(a)E(b) \leq ab \ .$$
Ainsi $E(a)E(b) \in \mathbb{N}_{ab}$ et $E(a)E(b) \leq E(ab)$.

(b) Ensuite les inégalités (10.25) page 615 et la compatibilité de l'ordre et de la multiplication montrent
$$ab < (E(a)+1)(E(b)+1).$$
l'égalité
$$(E(a)+1)(E(b)+1) = E(a)E(b) + E(a) + E(b) + 1$$
montre alors que
$$E(ab) \leq ab < E(a)E(b) + E(a) + E(b) + 1$$
d'où
$$E(ab) - E(a)E(b) < E(a) + E(b) + 1$$
et
$$E(ab) - E(a)E(b) \leq E(a) + E(b) \ .$$

(ii)

On montre d'abord que si $x \in [0 \ , \ \frac{1}{2}]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$x^n \leq \frac{1}{n} \tag{10.26}$$
On pose
$$H = \left\{ n \in \mathbb{N} / \ x^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \right\}$$
et on montre que H est héréditaire.

— Par hypothèse $0 \in H$

— Si $n \in H$ alors $x^{n+2} = xx^{n+1} \leq \dfrac{x}{n+1}$ mais puisque $x \leq \dfrac{1}{2}$ on a $\dfrac{x}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+2}$

ce qui montre que $H = \mathbb{N}$. Ensuite on montre que si $x \in [\frac{1}{2} \ , \ 1[$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie : pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$x^n \leq \frac{2^k}{n+k}$$
pour cela on remarque qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie
$$\forall \ j \in \mathbb{N} \quad \frac{x}{j+k} \leq \frac{1}{j+1+k} \tag{10.27}$$
en effet puisque K est archimédien et $\dfrac{1}{x} - 1 \in K_+^*$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$k(\frac{1}{x} - 1) \geq 1$$
(par exemple, avec les notations de (i), $k = E(\dfrac{x}{1-x}) + 1$) pour un tel k on obtient
$$1 + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$$

par suite, puisque pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{j+k+1}{j+k} = 1 + \dfrac{1}{j+k}$ on obtient

$$\frac{j+1+k}{j+k} \leq 1 + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{x}{j+k} \leq \frac{1}{j+k+1}$$

On montre maintenant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant (10.27) page 616 l'ensemble

$$H = \left\{ n \in \mathbb{N} / \ x^n \leq \frac{2^k}{n+k} \right\}$$

est héréditaire.

— D'abord $0 \in H$, en effet, puisque $\dfrac{x}{2} \leq \dfrac{1}{2}$ l'inégalité (10.26) page 616 montre que

$$(\frac{x}{2})^k \leq \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad x^k \leq \frac{2^k}{k} \ .$$

— Si $n \in H$ alors

$$x^{n+1} \leq x \frac{2^k}{n+k}$$

et le choix de k montre que $\dfrac{x}{n+k} \leq \dfrac{1}{n+1+k}$ ainsi $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$.

par suite $H = \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0,1[$ il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$x^n \leq \frac{2^k}{n+k}$$

K étant archimédien pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 \varepsilon \geq 2^k$ par suite

$$n \geq n_0 \Rightarrow x^n \leq \frac{2^k}{n+k} \leq \frac{2^k}{n} \leq \varepsilon$$

1. Calcul de s_n.

   On pose

   $$H = \left\{ n \in \mathbb{N} / s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \right\}$$

   et on montre que H est héréditaire.
   — puisque $x^0 = 1$ on a $0 \in H$
   — Si $n \in H$ alors

   $$s_{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1-x}$$

2. calcul de $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$

   D'après les égalités (10.19) page 611 on obtient

   $$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} (\frac{1 - x^{n+1}}{1-x}) = \frac{1}{1-x} (1 - \lim_{n \to \infty} x^{n+1}) = \frac{1}{1-x}$$

(iii)

Les inégalités

$$E(p^{n-1}a) \leq p^{n-1}a < E(p^{n-1}a) + 1$$

entraînent

$$pE(p^{n-1}a) \leq p^n a < pE(p^{n-1}a) + p$$

ainsi d'une part

$$pE(p^{n-1}a) \leq E(p^n a)$$

et d'autre part, puisque $E(p^n a) \leq p^n a$

$$E(p^n a) - pE(p^{n-1}a) \leq p^n a - pE(p^{n-1}a) < p$$

(*iv*)

En multipliant les inégalités (10.24) page 615 par $\frac{1}{p^n}$ on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq x_n - x_{n-1} \leq a - x_{n-1} \leq \frac{p-1}{p^n} \tag{10.28}$$

ce qui montre que x est croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq a - x_n \leq \frac{p-1}{p^{n+1}} \leq \frac{1}{p^n}$$

On remarque alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{p^n} \leq \frac{1}{n}$. Pour cela on montre que l'ensemble

$$H = \{n \in \mathbb{N} / p^n \geq n\}$$

est héréditaire.

- Il est clair que $0 \in H$ et puisque $p \geq 2$, $1 \in H$
- si $n \in H$ et $n \neq 0$ alors puisque $p \geq 2$ et $p^{n+1} = pp^n$ on obtient

$$p^{n+1} \geq pp^n \geq 2n \geq n+1$$

Ainsi les inégalités (10.28) page 618 entraînent, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq a - x_n \leq \frac{1}{n}$$

K étant archimédien, pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \varepsilon \geq 1$ par suite

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq a - x_n \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon \ .$$

(*v*)

On montre d'abord le résultat dans le cas $0 \leq x < y$. On pose

$$k = E(\frac{1}{y-x}) + 1$$

Ainsi $k \in \mathbb{N}$ vérifie

$$k - 1 \leq \frac{1}{y-x} < k$$

et la compatibilité des lois et de l'ordre montre que

$$x + \frac{1}{k} < y$$

Si $l = E(kx) + 1$ on obtient

$$l - 1 \leq kx < l$$

par suite

$$\frac{l-1}{k} \leq x < \frac{l}{k}$$

ainsi

$$x < \frac{l-1}{k} + \frac{1}{k} \leq x + \frac{1}{k} < y$$

d'où

$$x < \frac{l}{k} < y \ ,$$

et par définition du sous-corps de rationnels de $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ on a $\frac{l}{k} \in \mathbb{Q}$. Il reste à voir les cas $x < 0 < y$, $x < y \leq 0$.

— Si $x < 0 < y$ alors $0 \in \mathbb{Q} \cap]x, y[$

— Si $x < y \leq 0$ et $l \in \mathbb{Q} \cap]-y, -x[$ alors $-l \in \mathbb{Q} \cap]x, y[$.

■

On introduit une définition

Définition 10.8 *On note* $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps ordonné archimédien ,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $O(\mathbb{N}) = O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ *l'ordre induit sur* $\mathbb{N}$ *si* E *est l'application de* K_+ *dans* $\mathbb{N}$ *définie par* $E(a) = \max_{O(\mathbb{N})}\{n \in \mathbb{N}/n \leq a\}$ *Alors* $E(a)$ *s'appelle la* ***partie entière*** *de* a.

10.2.2 *Convergence dans les corps de Cantor*

L'hypothèse du lemme [10.4] page 614 est la propriété d'Archimède, le lemme qui suit permet de sentir ce qui se passe quand on rajoute la complétude.

Lemme 10.5 *On note* $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps de Cantor,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N}$ *son anneau d'entiers relatifs et* $\mathbb{Q}$ *son sous-corps d'entiers rationnels.* 0 *sera l'élément neutre de* $(K,\ +\ )$ *et* 1 *celui de* $(K\ ,\ .\ )$

(i) Si $x \in]0, 1[\subset K$ *et* $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ *est une suite vérifiant*

$$|\alpha_k| \leq x^k$$

alors la suite $s(\alpha)$ *définie par*

$$s_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$$

est convergente et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|s_n(\alpha) - \lim_{n\to\infty} s_n(\alpha)| \leq \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

(ii) Pour toute suite $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ *la suite* $s_n(\alpha)$ *définie par*

$$s_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{2^{k+1}}$$

est convergente et l'application ϕ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ *dans* K *définie par*

$$\phi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} s_n(\alpha)$$

posséde les propriétés suivantes :

1. *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ $\phi(\alpha) \in [0, 1]$

2. l'application λ *de* $[0,1]$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},K)$ *définie par*

$$\lambda(x)(k) = \begin{cases} E(2^{k+1}x) - 2E(2^k x) & si \quad x \neq 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

vérifie $\lambda([0,1]) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\{0,1\})$ *et* $\phi \circ \lambda = id_{[0,1]}$ *: pour tout* $x \in [0,1]$

$$\phi \circ \lambda(x) = x \ . \tag{10.29}$$

En particulier λ *est injective.*

3. $\mathrm{im}(\phi) = [0,1]$ *: pour tout* $x \in [0,1]$ *il existe* $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\{0,1\})$ *tel que* $x = \phi(\alpha)$

4. ϕ *n'est pas injective : si* $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\{0,1\})$ *et* $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\{0,1\})$ *sont les suites définies par*

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & si \quad k = 0 \\ 0 & si \quad k > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_k = \begin{cases} 0 & si \quad k = 0 \\ 1 & si \quad k > 0 \end{cases} \tag{10.30}$$

alors

$$\phi(\alpha) = \phi(\beta) = \frac{1}{2}$$

(iii) Posons

$$D(n) = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\{0,1\}) / \alpha_n = 0\}$$

et

$$\Gamma = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} D(k) = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\{0,1\}) / n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\ k \geq n : \alpha_k = 0\}$$

Si $\phi_{K,\Gamma}$ *est la restriction de* ϕ *à* Γ *alors* $\phi_{K,\Gamma}$ *est une bijection de* Γ *dans* $[0,1[$ *dont l'inverse est la restriction de* λ *à* $[0,1[$

(iv) Les corps de Cantor sont indénombrables.

Preuve

(i)

Puisque K est topologiquement complet il suffit de montrer que $s_n(\alpha)$ est une suite de Cauchy. Pour cela on prouve

$$(l,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \Rightarrow |s_{n+l}(\alpha) - s_n(\alpha)| \leq \frac{x^{n+1}}{1-x} \ .$$

On pose

$$H = \left\{ l \in \mathbb{N} / \forall\ n \in \mathbb{N} : |s_{l+n+1}(\alpha) - s_n(\alpha)| \leq x^{n+1} \sum_{k=0}^{l} x^k \right\}$$

et on montre que H est héréditaire.

1. $0 \in H$, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|s_{n+1}(\alpha) - s_n(\alpha)| = |\alpha_{n+1}|$ ainsi par hypothèse

$$|s_{n+1}(\alpha) - s_n(\alpha)| \leq x^{n+1}$$

2. si $l \in H$ alors $l+1 \in H$. En effet, si $l \in H$ alors l'inégalité

$$|s_{n+l+2}(\alpha) - s_n(\alpha)| \leq |s_{n+l+2}(\alpha) - s_{n+l+1}(\alpha)| + |s_{n+l+1}(\alpha) - s_n(\alpha)|$$

entraîne

$$|s_{n+l+2}(\alpha) - s_n(\alpha)| \leq |s_{n+l+2}(\alpha) - s_{n+l+1}(\alpha)| + x^{n+1} \sum_{k=0}^{l} x^k$$

mais on vient de voir que

$$|s_{n+l+2}(\alpha) - s_{n+l+1}(\alpha)| \leq x^{n+2+l}$$

par suite

$$|s_{n++l+2}(\alpha) - s_n(\alpha)| \leq x^{n+1}(x^{l+1} + \sum_{k=0}^{l} x^k)$$

l'égalité $\sum_{k=0}^{l+1} x^k = x^{l+1} + \sum_{k=0}^{l} x^k$ montre alors que $l+1 \in H$.

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|s_{n+l}(\alpha) - s_n(\alpha)| \leq x^{n+1} \sum_{k=0}^{l-1} x^k$$

en particulier, puisque d'après le lemmme [10.4] page 614, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{l-1} x^k = \frac{1-x^l}{1-x}$$

pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

$$|s_{n+l}(\alpha) - s_n(\alpha)| \leq x^{n+1} \sum_{k=0}^{l-1} x^k \leq \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

ainsi on obtient

$$p \geq n \Rightarrow |s_p(\alpha) - s_n(\alpha)| \leq \frac{x^{n+1}}{1-x} \tag{10.31}$$

Puisque K est archimédien, le lemme [10.4] page 614 montre que pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow x^{n+1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon(1-x)$$

et (10.30) page 620 montre alors

$$p \geq n_0 \quad \text{et} \quad q \geq n_0 \Rightarrow |s_p(\alpha) - s_q(\alpha)| \leq |s_p(\alpha) - s_{n_0}(\alpha)| + |s_q(\alpha) - s_{n_0}(\alpha)| \leq \varepsilon\ .$$

La complétude de K montre alors que la suite $s(\alpha)$ est convergente, on note $L = \lim_{n\to\infty} s_n(\alpha)$ et on montre que pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|L - s_n(\alpha)| < \varepsilon + \frac{x^{n+1}}{1-x}\ . \tag{10.32}$$

En effet , par définition d'une limite, pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |L - s_n(\alpha)| < \varepsilon$$

en particulier pour tout $l \geq n(\varepsilon)$

$$|L - s_n(\alpha)| \leq |L - s_{n+l}(\alpha)| + |s_{n+l}(\alpha) - s_n(\alpha)| < \varepsilon + |s_{n+l}(\alpha) - s_n(\alpha)|$$

et l'inégalité (10.30) page 620 montre alors que

$$|L - s_n(\alpha)| < \varepsilon + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ on obtient

$$|L - s_n(\alpha)| \leq \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

(ii)

Puisque $|\frac{\alpha_k}{2^{k+1}}| \leq (\frac{1}{2})^k$, (i) permet d'afirmer que $s_n(\alpha)$ possède une limite.

1. On montre que pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ on a $0 \leq \phi(\alpha) \leq 1$

   Puisque $0 \leq \frac{\alpha_k}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^k$ le lemme [9.4] page 437 montre que

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2})^k$$

   le le lemme [10.3] page 610 entraîne alors

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} s_n(\alpha) \leq \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2})^k \leq 1$$

2. On montre que pour tout $x \in [0,1]$ on a $\lambda(x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ et $\phi(\lambda(x)) = x$

   (a) Si $x = 1$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a, par définition, $\lambda(1)(k) = 1$, par suite $\lambda(1) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\,, \{0,1\})$. D'autre part d'après le lemme [9.1] page 419 on a

$$s_n(\lambda(1)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

   et le lemme [10.4] page 614 montre que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

   (b) Si $x \neq 1$ alors les inégalités

$$E(2^k x) \leq 2^k x < E(2^k x) + 1$$

   entraînent

$$2E(2^k x) \leq 2^{k+1} x < 2E(2^k x) + 2$$

   par suite

$$2E(2^k x) \leq E(2^{k+1} x) \leq 2^{k+1} x \leq 2E(2^k x) + 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \lambda(x)(k) \leq 1$$

   et puisque $\lambda(x)(k) \in \mathbb{N}$ on obtient $\lambda(x)(k) \in \{0,1\}$. pour montrer que $\phi(\lambda(x)) = x$ on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$s_n(\lambda(x)) = \frac{E(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}$$

   On pose

$$H = \left\{ n \in \mathbb{N} / \ \frac{E(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda(x)(k)}{2^{k+1}} \right\}$$

   et on montre que H est héréditaire.

— D'abord $0 \in H$ puisque
$$\frac{\lambda(x)(0)}{2} = \frac{E(2x) - 2E(x)}{2}$$
et $x \in]0,1[\Rightarrow E(x) = 0$

— Ensuite si $n \in H$ alors
$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\lambda(x)(k)}{2^{k+1}} = \frac{\lambda(x)(n+1)}{2^{n+2}} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\lambda(x)(k)}{2^{k+1}} = \frac{\lambda(x)(n+1)}{2^{n+2}} + \frac{E(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}$$
l'égalité
$$\frac{\lambda(x)(n+1)}{2^{n+2}} + \frac{E(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} = \frac{E(2^{n+2}x) - 2E(2^{n+1}x)}{2^{n+2}} + \frac{E(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} = \frac{E(2^{n+2}x)}{2^{n+2}}$$
montre alors que $n+1 \in H$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$s_n(\lambda(x)) = \frac{E(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}$$
Le lemme [10.4] page 614 montre alors que la suite $s_n(\lambda(x))$ est croissante de limite x ainsi
$$\phi(\lambda(x)) = \lim_{n\to\infty} s_n(\lambda(x)) = x \ .$$

3. <u>On montre $\mathrm{im}(\phi) = [0,1]$</u>

   D'après *1* $\mathrm{im}(\phi) \subset [0,1]$ et d'après *2* pour tout $x \in [0,1]$ on a $\phi(\lambda(x)) = x$ par suite $[0,1] \subset \mathrm{im}(\phi)$.
4. <u>On montre que ϕ n'est pas injective</u>

   Si α et β sont les suites définie par (10.30) page 620 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $s_n(\alpha) = \dfrac{1}{2}$ et d'après les lemmes [9.1] page 419 et [10.4] page 614 pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$s_n(\beta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2})^k = \frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)$$
   ainsi
$$\phi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} s_n(\alpha) = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} s_n(\beta) = \phi(\beta) \ .$$

(iii)

On montre d'abord
$$\alpha \in \Gamma \Rightarrow \phi(\alpha) \in [0,1[$$
En effet puisque $\alpha \in \Gamma$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_p = 0$, considérons la suite $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ définie par
$$\beta_k = \begin{cases} \alpha_k & si \quad k \neq p \\ 1 & si \quad k = p \end{cases}$$
Alors pour tout $n \geq p$ $s_n(\alpha) = s_n(\beta) - \dfrac{1}{2^{p+1}}$ ainsi le lemme [10.3] page 610 montre que
$$\phi(\alpha) = \phi(\beta) - \frac{1}{2^{p+1}}$$
et puisque d'après *1* $\phi(\beta) \leq 1$ on obtient
$$\phi(\alpha) \leq \phi(\beta) - \frac{1}{2^{p+1}} < 1$$

Pour montrer que la restriction de ϕ à Γ est injective on montre :

$$\alpha \in \Gamma \Rightarrow \lambda(\phi(\alpha)) = \alpha \ .$$

On montre que pour tout $\alpha \in \Gamma$ et $j \in \mathbb{N}^*$

$$E(2^j \phi(\alpha)) = \sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k} \alpha_k \ ,$$

on vérifie que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ il existe $a_j \in [0, 1[$ tel que

$$n \geq j \Rightarrow \sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k} \alpha_k \leq 2^j s_n(\alpha) \leq \sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k} \alpha_k + a_j \ .$$

D'après le lemme [9.1] page 419 et le lemme [8.4] page 202 on a , si $n \geq j$

$$2^j s_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k} \alpha_k + \sum_{k=j}^{n} \frac{\alpha_k}{2^{k+1-j}}$$

le changement de variable $k \mapsto k - j$ (voir théorème [8.1] page 211) montre que

$$\sum_{k=j}^{n} \frac{\alpha_k}{2^{k+1-j}} = \sum_{l=0}^{n-j} \frac{\alpha_{l+j}}{2^{l+1}}$$

ainsi, si β^j est la suite définie par

$$\beta^j_l = \alpha_{l+j}$$

on obtient, pour $n \geq j$

$$2^j s_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k} \alpha_k + s_{n-j}(\beta^j) \leq \sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k} \alpha_k + s_n(\beta^j)$$

le lemme [10.3] page 610 montre alors que

$$2^j \lim_{n\to\infty} s_n(\alpha) \leq \sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k} \alpha_k + \lim_{n\to\infty} s_n(\beta^j)$$

en d'autre termes

$$2^j \phi(\alpha) \leq \sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k} \alpha_k + \phi(\beta^j)$$

mais puisque $\beta^j \in \Gamma$ on a vu que $\phi(\beta^j) < 1$ et les inégalités

$$\sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k} \alpha_k \leq 2^j \phi(\alpha) < \sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k} \alpha_k + 1$$

entraînent

$$E(2^j \phi(\alpha)) = \sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k} \alpha_k \ .$$

Cela permet de voir que pour tout $j \in \mathbb{N}$ $\lambda(\phi(\alpha))(j) = \alpha_j$ puisque

$$\lambda(\phi(\alpha))(j) = E(2^{j+1}\phi(\alpha)) - 2E(2^j\phi(\alpha)) = \sum_{k=0}^{j} 2^{j-k}\alpha_k - 2\sum_{k=0}^{j-1} 2^{j-1-k}\alpha_k = \alpha_j$$

En particulier la restriction $\phi_{K,\Gamma}$ de ϕ à Γ est injective puisque

$$\phi(\alpha) = \phi(\beta) \Rightarrow \alpha = \lambda(\phi(\alpha)) = \lambda(\phi(\beta)) = \beta \; .$$

Il reste à voir que pour tout $x \in [0,1[$ il existe au moins une solution α dans Γ de l'équation

$$\phi(\alpha) = x$$

Puisque d'après (ii) on a $x \in [0,1[\Rightarrow \phi(\lambda(x)) = x$ il suffit de montrer :

$$x \in [0,1[\Rightarrow \lambda(x) \in \Gamma \; .$$

Mais si $\lambda(x) \notin \Gamma$ alors l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} / \forall\ k \geq n\ \lambda(x)(k) = 1\}$$

est non vide. Puisque $\mathbb{N}$ est bien ordonné pour l'ordre $O(\mathbb{N}) = O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, A possède un plus petit élément $p = \min_{O(\mathbb{N})}\{k : k \in A\}$. On a $p > 0$ puisque si $p = 0$ alors

$$s_n(\lambda(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}$$

ainsi

$$\phi(\lambda(x)) = \lim_{n\to\infty} s_n(\lambda(x)) = 1$$

mais par (ii) on a $\phi(\lambda(x)) = x$ par suite

$$p = 0 \Rightarrow x = 1$$

et par hypothèse $x < 1$. Ainsi $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \geq p$ on a

$$s_n(\lambda(x)) = s_{p-1}(\lambda(x)) + \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}$$

une factorisation et un changement de variable donnent

$$\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{2^{k-p}} = \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{l=0}^{n-p} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^p}(1 - (\frac{1}{2})^{n+1-p})$$

ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^p}$$

et

$$x = \phi(\lambda(x)) = \lim_{n\to\infty} s_n(\lambda(x)) = s_{p-1}(x) + \frac{1}{2^p}$$

par suite

$$2^p x = \sum_{k=0}^{p-1} 2^{p-1-k}\lambda(x)(k) + 1$$

en particulier $2^p x \in \mathbb{N}$ et $\lambda(x)(p) = 0$ et ceci contredit la définition de p , ainsi $A = \varnothing$ et

$$x \in [0,1[\Rightarrow \lambda(x) \in \Gamma \ .$$

En résumé, pour tout $x \in [0,1[$ $\lambda(x)$ est l'unique élément de Γ vérifiant

$$\phi(\lambda(x)) = x$$

ce qui montre que la restriction $\phi_{K,\Gamma}$ de ϕ à Γ est une bijection de Γ dans $[0,1[$ d'inverse λ.

(iv)

On pose $D(n)^c = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0,1\}) / \alpha_n = 1\}$

$$\Gamma^c = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0,1\}) / \alpha \notin \Gamma\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} D(k)^c$$

et on montre que Γ^c est au plus dénombrable. On remarque d'abord que l'ensemble $\bigcap_{k\geq 0} D(k)^c$ ne contient qu'un seul élément, c'est la suite $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ définie par $\alpha_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et φ_n est l'application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_{n-1}, \{0,1\})$ dans $\bigcap_{k\geq n} D(k)^c$ définie par

$$\varphi_n(u)(k) = \begin{cases} u_k & si \quad k \in \mathbb{N}_{n-1} \\ 1 & si \quad k \geq n \end{cases}$$

alors φ_n est une bijection dont l'inverse est l'application qui envoie l'application $\alpha \in \bigcap_{k\geq n} D(k)^c$ sur sa restriction à $\mathbb{N}_{n-1}$. Le lemme [6.3] page 140 montre alors que $\bigcap_{k\geq n} D(k)^c$ est fini (de cardinal 2^n), le théorème [6.4] page 151 montre alors que

$$\Gamma^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} D(k)^c$$

est au plus dénombrable. Cela permet de voir que Γ n'est pas dénombrable, en effet, si Γ était dénombrable alors l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0,1\}) = \Gamma \cup \Gamma^c$$

serait dénombrable (encore le théorème [6.4] page 151) et le théorème [7.1] page 156 permet d'affirmer qu'il n'existe pas d'application surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0,1\})$. Puisque d'après (iii) il existe une bijection de $[0,1[$ dans Γ, $[0,1[$ donc K est indénombrable ■

Dans le lemme qui suit on montre que tout corps de Cantor est un corps de Dedekind.

Lemme 10.6 *On note $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ un corps de Cantor, $\mathbb{N}$ son sous-ensemble d'entiers naturels, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N}$ son anneau d'entiers relatifs et $\mathbb{Q}$ son sous-corps d'entiers rationnels. 0 sera l'élément neutre de $(K,\ +\ )$ et 1 celui de $(K\ ,\ .\ )$*

(i) Pour tout ensemble non vide majoré A, tout $a \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$M_n(a) = \{p \in \mathbb{N} / a + \frac{p}{2^n} \in \mathrm{Maj}(A)\}$$

est non vide et possède un minimum pour l'ordre $O(\mathbb{N}) = O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. La suite

$$p_n(a) = \min_{O(\mathbb{N})}\{p : p \in M_n(a)\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in A$

$$0 \leq 2p_n(a) - p_{n+1}(a) \leq 1$$

2. Pour tout $a \in A$ la suite $\delta(a)$ définie par

$$\delta_n(a) = a + \frac{p_n(a)}{2^n}$$

est convergente et pour tout $a \in A$ sa limite est la borne supérieur de A :

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(a) = \sup\{x : x \in A\}$$

(ii) Tout corps de Cantor est un corps de Dedekind.

Preuve

(i)

Si b est un majorant de A, $E(2^n(b-a))$ la partie entière de $2^n(b-a)$ et $p = E(2^n(b-a))+1$ alors $a + \frac{p}{2^n} > b$ par suite $p \in M_n(a)$. Puisque par définition $(\mathbb{N}\ ,\ O(\mathbb{N}))$ est bien ordonné $M_n(a)$ possède un minimum.

1. On montre $0 \leq 2p_n(a) - p_{n+1}(a) \leq 1$
   (a) L'égalité
   $$a + \frac{2p_n(a)}{2^{n+1}} = a + \frac{p_n(a)}{2^n}$$
   montre que $2p_n(a) \in M_{n+1}(a)$ par suite $p_{n+1}(a) \leq 2p_n(a)$
   (b) L'égalité
   $$a + \frac{2p_n(a)-2}{2^{n+1}} = a + \frac{p_n(a)-1}{2^n}$$
   montre que $2p_n(a) - 2 \notin M_{n+1}(a)$ par suite $p_{n+1}(a) > 2p_n(a) - 2$ et $2p_n(a) - p_{n+1}(a) \leq 1$
2. On montre que $\delta(a)$ est convergente et $\lim_{n\to\infty} \delta_n(a) = \sup\{x : x \in A\}$

   1 on montre que $\delta(a)$ est convergente

   Puisque K est topologiquement complet il suffit de vérifier que $\delta(a)$ est une suite de Cauchy.Pour cela on prouve
   $$(l, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow |\delta_{n+l}(a) - \delta_n(a)| \leq \frac{1}{2^n}\ .$$
   On pose
   $$H = \left\{ l \in \mathbb{N} / \forall\ n \in \mathbb{N} : |\delta_{l+n+1}(a) - \delta_n(a)| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{2^k} \right\}$$
   et on montre que H est héréditaire.
   (a) $0 \in H$, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|\delta_{n+1}(a) - \delta_n(a)| = |\frac{p_{n+1}(a) - 2p_n(a)}{2^{n+1}}|$ ainsi *1* montre que
   $$|\delta_{n+1}(a) - \delta_n(a)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$
   (b) si $l \in H$ alors $l+1 \in H$. En effet, si $l \in H$ alors l'inégalité
   $$|\delta_{n+l+1}(a) - \delta_n(a)| \leq |\delta_{n+l+2}(a) - \delta_{n+l+1}(a)| + |\delta_{n+l+1}(a) - \delta_n(a)|$$

entraîne

$$|\delta_{n+l+2}(a) - \delta_n(a)| \leq |\delta_{n+l+2}(a) - \delta_{n+l+1}(a)| + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{2^k}$$

mais on vient de voir que

$$|\delta_{n+l+2}(a) - \delta_{n+l+1}(a)| \leq \frac{1}{2^{n+l+2}}$$

par suite

$$|\delta_{n++l+2}(a) - \delta_n(a)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(\frac{1}{2^{l+1}} + \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{2^k})$$

l'égalité $\sum_{k=0}^{l+1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{l+1}} + \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{2^k}$ montre alors que $l + 1 \in H$.

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|\delta_{n+l}(a) - \delta_n(a)| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{2^k}$$

en particulier, puisque d'après le lemmme [10.4] page 614, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{2^k} = 2(1 - \frac{1}{2^l})$$

pour tout $l \in \mathbb{N}^*$

$$|\delta_{n+l}(a) - \delta_n(\alpha)| \leq 2\frac{1}{2^{n+1}}(1 - \frac{1}{2^l}) \leq \frac{1}{2^n}$$

ainsi on obtient

$$p \geq n \Rightarrow |\delta_p(a) - \delta_n(a)| \leq \frac{1}{2^n} \tag{10.33}$$

Puisque K est archimédien, le lemme [10.4] page 614 montre que pour tout $\varepsilon \in K_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

et (10.33) page 628 montre alors

$$p \geq n_0 \quad \text{et} \quad q \geq n_0 \Rightarrow |\delta_p(a) - \delta_q(a)| \leq |\delta_p(a) - \delta_{n_0}(a)| + |\delta_q(a) - \delta_{n_0}(a)| \leq \varepsilon\ .$$

La complétude de K montre alors que la suite $\delta(a)$ est convergente,

2 On montre que $\lim_{n\to\infty} \delta_n(a) = \sup\{x : x \in A\}$

On note $M = \lim_{n\to\infty} \delta_n(a)$

(a) D'abord M est un majorant de A. En effet, dans le cas contraire il existe $c \in A$ tel que $M < c$ posons $\varepsilon = \frac{c - M}{2}$, par définition d'une limite il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\delta_n(a) \leq M + \varepsilon < c$$

et par définition $\delta_n(a)$ est un majorant de A ainsi on aurait

$$c \leq \delta_n(a) < c\ .$$

(b) Ensuite on montre que M est le plus petit majorant de A. Il suffit de voir que si $x < M$ alors x n'est pas un majorant de A. D'après le lemme [10.4] page 614 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{M-x}{2}$$

Posons $\varepsilon = M - x - \dfrac{1}{2^{n_0}}$, par définition d'une limite il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow M - \varepsilon \leq a + \frac{p_n(a)}{2^n}$$

le remplacement de ε par sa valeur donne

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow x + \frac{1}{2^{n_0}} \leq a + \frac{p_n(a)}{2^n}$$

par suite

$$n \geq \max\{n_0, n(\varepsilon)\} \Rightarrow x + \frac{1}{2^n} \leq x + \frac{1}{2^{n_0}} \leq a + \frac{p_n(a)}{2^n}$$

ainsi on obtient

— si $p_n(a) = 0$ alors $x < a$ et x n'est pas un majorant de A

— si $p_n(a) \geq 1$

$$x \leq a + \frac{p_n(a) - 1}{2^n}$$

et par définition de $p_n(a)$, $a + \dfrac{p_n(a)-1}{2^n}$ n'est pas un majorant de A (donc x non plus).

Ainsi M est le plus petit majorant de A : $M = \sup\{x : x \in A\}$.

(ii)

D'après (i) tout sous-ensemble majoré d'un corps de Cantor posséde une borne supérieure, c'est pile la définition d'un corps de Dedekind. ■

Ce lemme conclut la preuve du théorème suivant.

Théorème 10.2 *Pour qu'un corps ordonné* $(K\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *soit un corps de Cantor il faut et il suffit qu'il soit un corps de Dedekind.*

Preuve Pour montrer que tout corps de Dedekind est un corps de Cantor voir lemme [10.3] page 610. Pour montrer que tout corps de Cantor est corps de Dedekind voir lemme [10.6] page 626 ■

Le théorème [10.2] page 629 permet d'introduire une définition

Définition 10.9 *Un corps ordonné* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *est appelé un corps de* ***réels*** *ou un corps de* ***Cantor-Dedekind*** *s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

d $\mathbb{R}$ *est un corps de Dedekind : tout sous-ensemble majoré de* $\mathbb{R}$ *posséde une borne supérieure.*

c $\mathbb{R}$ *est un corps de Cantor :* $\mathbb{R}$ *est archimédien et toute suite de Cauchy de* $\mathbb{R}$ *est convergente.*

Un minimum de consistance nécessite de montrer que les corps de réels sont isomorphes dans la catégorie des anneaux ordonnés.

10.3 *Isomorphisme et constructions des corps de réels*

10.3.1 *Isomorphisme des corps de réels*

On veut montrer que si ($\mathbb{R}$, $+$, $.$, O) et ($\mathbb{R}'$, $\oplus$, $\otimes$, O') sont des corps de réels il existe une application bijective strictement croissante φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}'$ vérifiant

$$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y) \quad \text{et} \quad \varphi(xy) = \varphi(x) \otimes \varphi(y)$$

Une explication heuristique permet de comprendre un peu pourquoi on a ce genre de résultat.

— Si $\mathbb{N}$ est le sous-ensemble d'entiers naturels de ($\mathbb{R}$, $+$, $.$, O) et

$$\Gamma = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0,1\}) / \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists \ k \geq n : \alpha_k = 0\}$$

Le lemme [10.5] page 619 permet d'affirmer que l'application $\phi_{\mathbb{R},\Gamma}$ de Γ dans $[0,1[$ définie par

$$\phi_{\mathbb{R},\Gamma}(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{2^{k+1}}$$

est une bijection d'inverse l'application $\phi_{\Gamma,\mathbb{R}}$ de $[0,1[$ dans Γ définie par

$$\phi_{\Gamma,\mathbb{R}}(x)(k) = E(2^{k+1}x) - 2E(2^k x)$$

— Si $\mathbb{N}'$ est le sous-ensemble d'entiers naturels de ($\mathbb{R}'$, $\oplus$, $.$ $\otimes$ O') et

$$\Gamma' = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}', \{0',1'\}) / \ \forall n \in \mathbb{N}' \ \exists \ k \geq n : \alpha_k = 0'\}$$

le théorème [5.2] page 96 permet d'affirmer qu'il existe une unique bijection croissante g de ($\mathbb{N}$, O) dans ($\mathbb{N}'$, O') qui vérifie

$$g(n+m) = g(n) \oplus g(m) \quad \text{et} \quad g(mn) = g(m) \otimes g(n)$$

cette bijection induit une bijection g_* de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}', \{0',1'\})$ (définie par $g_*(\alpha)(k') = g(\alpha_{g^{-1}(k')})$) qui vérifie

$$g_*(\Gamma) = \Gamma'$$

on considère alors l'application u de $[0,1[$ dans $[0',1'[$ définie par

$$u = \phi_{\mathbb{R}',\Gamma'} \circ g_* \circ \phi_{\Gamma,\mathbb{R}}$$

qui est bijective. Sous une forme plus simple on a, pour $x \in [0,1[$

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(E(2^n x))}{g(2^n)}$$

— On montre alors que l'application δ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}'_+$ définie par

$$\delta(x) = g(E(x)) \oplus u(x - E(x))$$

est une bijection qui vérifie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$$\delta(x+y) = \delta(x) \oplus \delta(y) \quad \text{et} \quad \delta(xy) = \delta(x) \otimes \delta(y) \ .$$

— il suffit alors de vérifier que l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}'$ définie par

$$\varphi(x) = \delta(x^+) - \delta(x^-)$$

est une bijection qui vérifie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y) \quad \text{et} \quad \varphi(xy) = \varphi(x) \otimes \varphi(y) \ .$$

Le lemme qui suit utilise les résultats et notations du lemme [10.5] page 619 et des théorèmes [5.1] page 90 et [5.2] page 96

Lemme 10.7 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps de Cantor ,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* 0 *sera l'élément neutre de* $(\mathbb{R},\ +\ )$ *et* 1 *celui de* $(\mathbb{R}\ ,\ .\ )$*. de même* $(\mathbb{R}'\ ,\ \oplus\ ,\ \otimes\ ,\ O'\ )$ *sera un corps de Cantor,* $\mathbb{N}'$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $0'$ *sera l'élément neutre de* $(\mathbb{R}',\ \oplus\ )$ *et* $1'$ *celui de* $(\mathbb{R}'\ ,\ \otimes\ )$*. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $E(x)$ *est la partie entière de* x *et pour tout* $x' \in \mathbb{R}'$ $E'(x')$ *est la partie entière de* x'*.*

(i) Si g *est l'unique bijection croissante de* $(\mathbb{N}, O)$ *dans* $(\mathbb{N}', O')$ *alors la suite* $\beta(x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R}'_+)$ *définie par*

$$\beta_n(x) = \frac{g(E(2^n x))}{g(2^n)}$$

est, pour tout $x \in \mathbb{R}$*, croissante majorée et convergente . L'application* δ *de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}'_+$ *définie par*

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \beta_n(x)$$

est additive et multiplicative sur $\mathbb{R}_+$ *: elle vérifie pour* $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$$\delta(x+y) = \delta(x) \oplus \delta(y) \quad \text{et} \quad \delta(xy) = \delta(x) \otimes \delta(y)\ .$$

De plus pour tout $p \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\delta(p) = g(p)$$

et δ *est strictement croissante de* $(\mathbb{R}_+, O)$ *dans* $(\mathbb{R}'_+, O')$*, elle vérifie*

$$E' \circ \delta = g \circ E \tag{10.34}$$

(ii) On note $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ *un ensemble d'entiers naturels*

1. *Pour toute suite* décroissante $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{N}, \mathbb{R}_+)$ *vérifiant* $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = 0$ *on a*

$$\lim_{p\to\infty} \delta(x_p) = 0'$$

2. *Pour toute suite* décroissante $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{N}, \mathbb{R}_+)$ *vérifiant* $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = l_x$ *on a*

$$\lim_{p\to\infty} \delta(x_p) = \delta(l_x)$$

3. *Pour toute suite* croissante majorée $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{N}, \mathbb{R}_+)$ *vérifiant* $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = l_x$ *on a*

$$\lim_{p\to\infty} \delta(x_p) = \delta(l_x)$$

(iii) δ *est une bijection de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}'_+$ *dont l'inverse est l'application additive multiplicative et strictement croissante définie par*

$$\delta^{-1}(x') = \lim_{n'\to\infty} \frac{g^{-1}(E'((2')^{n'} \otimes x'))}{g^{-1}((2')^{n'})}$$

de plus si $(\mathcal{N}\ ,\ \mathcal{O})$ *est un ensemble d'entiers naturels*

1. *Pour toute suite* bornée $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{N}, \mathbb{R}_+)$ *la suite* $p \to \delta(x_p)$ *est bornée et*

$$\delta(\liminf_{p\to\infty} x_p) = \liminf_{p\to\infty} \delta(x_p)$$

2. Pour toute suite bornée $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{N}, \mathbb{R}_+)$ *la suite* $p \to \delta(x_p)$ *est bornée et*

$$\delta(\limsup_{p\to\infty} x_p) = \limsup_{p\to\infty} \delta(x_p)$$

(iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *on note*

$$x^+ = \max\{x, 0\} \quad \text{et} \quad x^- = \max\{-x, 0\}$$

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x = x^+ - x^- \quad \text{et} \quad |x| = x^+ + x^-$$

2. L'application φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}'$ *définie par*

$$\varphi(x) = \delta(x^+) - \delta(x^-)$$

est une bijection croissante vérifiant, pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y) \quad \text{et} \quad \varphi(xy) = \varphi(x) \otimes \varphi(y) \quad \text{et} \quad [x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \varphi(x) = \delta(x)].$$

(v) Si g *est l'unique bijection croissante de* $(\mathbb{N}\ , O\ )$ *dans* $(\mathbb{N}'\ ,\ O'\ )$ *alors* φ *est l'unique isomorphisme d'anneaux de* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .)$ *dans* $(\mathbb{R}'\ ,\ \oplus\ ,\ \otimes)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

a φ *est croissante*

b *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) = g(n)$

c *Si* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R}_+)$ *est une suite décroissante telle que* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0'$$

Preuve Pour éviter des notations trop lourdes on note de la même manière l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}'$:

$$x' \oplus y' = x' + y' \quad \text{et} \quad x' \otimes y' = x'y'\ ,$$

cela signifie qu'on laisse au lecteur le soin d'identifier si la somme ou le produit est effectué dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}'$ de même les relations d'ordre seront notées indifféremment $\leq$.

(i)

L'existence et l'unicité de g sont assurées par le théorème [5.1] page 90 qui établit de plus que $g(0) = 0'$ et $g(1) = 1'$. β est définie puisque $g(2^n) > g(0)$ et $g(0) = 0'$.

1 <u>On montre que $\beta(x)$ est une suite croissante de $\mathbb{R}'$.</u>

L'égalité

$$\beta_{n+1}(x) - \beta_n(x) = \frac{g(2^n)g(E(2^{n+1}x)) - g(2^{n+1})g(E(2^n x))}{g(2^n)g(2^{n+1})}$$

montre que la croissance de β suit de l'inégalité

$$g(2^n)g(E(2^{n+1}x)) - g(2^{n+1})g(E(2^n x)) \geq 0'$$

mais d'après le théorème [5.2] page 96 on a pour $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$g(p + q) = g(p) + g(q) \quad \text{et} \quad g(pq) = g(p)g(q) \tag{10.35}$$

par suite

$$g(2^n)g(E(2^{n+1}x)) - g(2^{n+1})g(E(2^n x)) = g[2^n E(2^{n+1}x) - 2^{n+1}E(2^n x)]$$

or d'après le lemme [10.4] page 614 (voir (10.24) page 615)

$$2E(2^n x) \leq E(2^{n+1}x) \quad \text{et} \quad 2^{n+1}E(2^n x) \leq 2^n E(2^{n+1}x)$$

ainsi la croissance de g entraîne, puisque $g(0) = 0'$

$$g[2^n E(2^{n+1}x) - 2^{n+1}E(2^n x)] \geq g(0) \geq 0'$$

par suite puisque $\beta_{n+1}(x) - \beta_n(x) = \dfrac{g[2^n E(2^{n+1}x) - 2^{n+1}E(2^n x)]}{g(2^n)g(2^{n+1})}$ on obtient :

$$\beta_{n+1}(x) - \beta_n(x) \geq 0'$$

2 <u>On montre que la suite $n \mapsto \beta_n(x)$ est majorée .</u>

On montre que

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \beta_n(x) < g(E(x)+1)$$

les inégalités

$$E(2^n x) \leq 2^n x < 2^n(E(x)+1)$$

et la stricte croissance de g entraîne

$$g(E(2^n x)) < g(2^n(E(x)+1))$$

Les égalités (10.35) page 632 montre alors que

$$g(E(2^n x)) < g(2^n)g(E(x)+1) \quad \text{et} \quad \beta_n(x) = \frac{g(E(2^n x))}{g(2^n)} < g(E(x)+1)$$

3 <u>On montre que $\beta(x)$ posséde une limite .</u>

Puisque $\beta(x)$ est une suite croissante majorée dans le corps de Dedekind $\mathbb{R}'$ le théorème [10.1] page 603 montre que $\beta(x)$ est convergente et

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \beta_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n(x) \ .$$

4 <u>On montre $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \Rightarrow \delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y)$</u>

Pour cela on vérifie d'abord que l'application $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\ \mathbb{R}'_+)$ définie par $u_n = \dfrac{g(1)}{g(2^n)} = \dfrac{1'}{g(2^n)}$ vérifie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1'}{g(2^n)} = 0' \tag{10.36}$$

Il suffit par exemple de vérifier que l'ensemble

$$X' = \{x' \in \mathbb{R}'/\exists\ n \in \mathbb{N} : x' = g(2^n)\}$$

n'est pas majoré . Mais si X' est majoré, il résulte du fait que $\mathbb{R}'$ est un corps de Dedekind que X' posséde une borne supérieure $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} g(2^n)$ mais ceci est impossible puisque $\dfrac{M}{g(2)}$ serait un majorant de X' plus petit que M (remarquer que $g(2) > 1'$) . En effet

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow g(2^{n+1}) \leq M \Rightarrow g(2)g(2^n) \leq M \Rightarrow g(2^n) \leq \frac{M}{g(2)}$$

et par définition M est le plus petit majorant de X'. Ainsi pour $\varepsilon' \in \mathbb{R}'_+$ tel que $\varepsilon' > 0'$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$g(2^{n_0}) \geq \frac{1'}{\varepsilon'}$$

par suite

$$n \geq n_0 \Rightarrow g(2^n) \geq g(2^{n_0}) \geq \frac{1'}{\varepsilon'} \quad \text{et} \quad 0 \leq u_n \leq \varepsilon' \ .$$

Ensuite on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$$\beta_n(x) + \beta_n(y) \leq \beta_n(x+y) \leq \beta_n(x) + \beta_n(y) + \frac{1'}{g(2^n)} \ .$$

En effet, les inégalités (10.21) page 614 montrent que

$$E(2^n x) + E(2^n y) \leq E(2^n(x+y)) \leq E(2^n x) + E(2^n y) + 1$$

la croissance de g entraîne alors

$$g(E(2^n x) + E(2^n x)) \leq g(E(2^n(x+y))) \leq g(E(2^n x) + E(2^n y) + 1)$$

les égalités (10.35) page 632 montre alors que

$$g(E(2^n x)) + g(E(2^n y)) \leq g(E(2^n(x+y))) \leq g(E(2^n x)) + g(E(2^n y)) + 1'$$

en multipliant ces inégalités par $\dfrac{1'}{g(2^n)}$ qui est strictement positif on obtient

$$\beta_n(x) + \beta_n(y) \leq \beta_n(x+y) \leq \beta_n(x) + \beta_n(y) + \frac{1'}{g(2^n)} \tag{10.37}$$

mais d'après le lemme [10.3] page 610

$$\delta(x) + \delta(y) = \lim_{n\to\infty} \beta_n(x) + \lim_{n\to\infty} \beta_n(y) = \lim_{n\to\infty} (\beta_n(x) + \beta_n(y))$$

et le même lemme montre (en passant à la limite) que les inégalités (10.37) page 634 entraînent

$$\delta(x) + \delta(y) \leq \delta(x+y) \leq \delta(x) + \delta(y) + \lim_{n\to\infty} \frac{1'}{g(2^n)}$$

et d'après (10.36) page 633 $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1'}{g(2^n)} = 0'$

5 <u>On montre $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \Rightarrow \delta(xy) = \delta(x)\delta(y)$</u>

On vérifie

$$\beta_n(x)\beta_n(y) \leq \beta_{2n}(xy) \leq \frac{\delta(x) + \delta(y)}{g(2^n)} + \beta_n(x)\beta_n(y)$$

En effet, les inégalités (10.22) page 614 montrent que

$$E(2^n x)E(2^n y) \leq E(2^{2n}(xy)) \leq E(2^n x) + E(2^n y) + E(2^n x)E(2^n y)$$

la croissance de g entraîne alors

$$g(E(2^n x)E(2^n y)) \leq g[E(2^{2n}(xy))] \leq g[E(2^n x) + E(2^n y) + E(2^n x)E(2^n y)]$$

les égalités (10.35) page 632 montrent alors que

$$g(E(2^n x))g(E(2^n y)) \le g(E(2^{2n}(xy))) \le g(E(2^n x)) + g(E(2^n y)) + g(E(2^n x))g(E(2^n y)) \tag{10.38}$$

Puisque $g(2^{2n}) = g(2^n.2^n) = g(2^n)g(2^n)$ en multipliant les inégalités (10.38) par $\frac{1'}{g(2^n)}\frac{1'}{g(2^n)}$ on obtient

$$\frac{g(E(2^n x))}{g(2^n)}\frac{g(E(2^n y))}{g(2^n)} \le \frac{g(E(2^{2n} x))}{g(2^{2n})} \le \frac{1'}{g(2^n)}(\frac{g(E(2^n x))}{g(2^n)} + \frac{g(E(2^n y))}{g(2^n)}) + \frac{g(E(2^n x))}{g(2^n)}\frac{g(E(2^n y))}{g(2^n)}$$

autrement dit

$$\beta_n(x)\beta_n(y) \le \beta_{2n}(xy) \le \frac{1'}{g(2^n)}(\beta_n(x) + \beta_n(y)) + \beta_n(x)\beta_n(y) \ .$$

puisque $\beta(x)$ est une suite croissante qui converge vers $\delta(x)$ on a $\beta_n(x) \le \delta(x)$ par suite

$$\beta_n(x)\beta_n(y) \le \beta_{2n}(xy) \le \frac{1'}{g(2^n)}(\delta(x) + \delta(y)) + \beta_n(x)\beta_n(y) \ .$$

le lemme [10.3] page 610 montre que

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n(x)\beta_n(y) \le \lim_{n\to\infty} \beta_{2n}(xy) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1'}{g(2^n)}(\delta(x) + \delta(y)) + \lim_{n\to\infty} \beta_n(x)\beta_n(y) \ .$$

Ainsi (10.36) page 633 entraîne

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n(x)\beta_n(y) \le \lim_{n\to\infty} \beta_{2n}(xy) \le \lim_{n\to\infty} \beta_n(x)\beta_n(y) \ .$$

et puisque par le lemme [10.3] page 610

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n(x)\beta_n(y) = \lim_{n\to\infty} \beta_n(x) \lim_{n\to\infty} \beta_n(y) = \delta(x)\delta(y)$$

on obtient déjà :

$$\delta(x)\delta(y) \le \lim_{n\to\infty} \beta_{2n}(xy) \le \delta(x)\delta(y)$$

il sufit donc de vérifier $\lim_{n\to\infty} \beta_{2n}(xy) = \delta(xy)$ mais puisque $\beta(xy)$ est croissante on a

$$\beta_n(xy) \le \beta_{2n}(xy) \le \delta(xy)$$

et (encore le lemme [10.3] page 610)

$$\delta(xy) \le \lim_{n\to\infty} \beta_n(xy) \le \lim_{n\to\infty} \beta_{2n}(xy) \le \delta(xy)$$

6 On montre $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \delta(p) = g(p)$

Mais si $p \in \mathbb{N}$ $\beta(p)$ est constante puisque

$$\beta_n(p) = \frac{g(E(2^n p))}{g(2^n)} = \frac{g(2^n p)}{g(2^n)}$$

et les égalités [10.35] page 632 entraînent

$$\beta_n(p) = \frac{g(2^n p)}{g(2^n)} = g(p)$$

Ainsi on obtient

$$\delta(p) = \lim_{n\to\infty} \beta_n(p) = g(p)$$

7 On montre que δ est strictement croissante.

D'abord on vérifie $x > 0 \Rightarrow \delta(x) > 0'$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 x \geq 1$ par suite

$$2^{n_0}x \geq n_0 x \geq 1 \quad \text{et} \quad E(2^{n_0}x) \geq 1 > 0$$

ainsi

$$g(E(2^{n_0}x)) \geq g(1) > 0'$$

et

$$\delta(x) \geq \frac{g(E(2^{n_0}x))}{g(2^{n_0})} > 0' \ .$$

cela permet de montrer que δ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. En effet si $x < y$ alors on vient de voir que $\delta(y-x) > 0'$ or l'égalité $y = (y-x) + x$ et l'additivité de δ sur $\mathbb{R}_+$ montrent que

$$\delta(y) = \delta(y-x) + \delta(x) \quad \text{et} \quad \delta(y) > \delta(x)$$

8 On montre que $E' \circ \delta = g \circ E$.

1. D'abord par définition $E(x) \leq x$, la croissance de δ montre que $\delta(E(x)) \leq \delta(x)$ or d'après **6** $\delta(E(x)) = g(E(x))$ ainsi $g(E(x)) \leq E'(\delta(x))$
2. Ensuite puisque $E'(\delta(x)) \leq \delta(x)$ on a $g^{-1}(E'(\delta(x))) \leq x$. En effet, puisque par définition tout corps ordonné est totalement ordonné (voir définition [9.5] page 437) on a

$$g^{-1}(E'(\delta(x))) \leq x \quad \text{ou} \quad g^{-1}(E'(\delta(x))) > x$$

mais l'assertion $g^{-1}(E'(\delta(x))) > x$ et la croissance stricte de δ entraîne

$$\delta(g^{-1}(E'(\delta(x))) > \delta(x)$$

et **6** montre que $\delta(g^{-1}(E'(\delta(x))) = E'(\delta(x))$. Ainsi $g^{-1}(E'(\delta(x))) \leq x$ et puisque $g^{-1}(E'(\delta(x))) \in \mathbb{N}$ on obtient $g^{-1}(E'(\delta(x))) \leq E(x)$, la croissance de g entraîne alors $E'(\delta(x)) \leq g(E(x))$.

(ii)

1. On montre $x_p \searrow 0 \Rightarrow \delta(x_p) \searrow 0'$

   La croissance de δ et la décroissance de x montre que la suite $p \mapsto \delta(x_p)$ est décroissante, comme de plus elle est minorée par $0'$ et $\mathbb{R}'$ est un corps de Dedekind le théorème [10.1] page 603 montre que cette suite posséde une limite et

$$\lim_{p\to\infty} \delta(x_p) = \inf_{p\in\mathcal{N}} \delta(x_p) \ .$$

   pour montrer que $\lim_{p\to\infty} \delta(x_p) = 0'$ on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $p \in \mathcal{N}$ tel que

$$\delta(x_p) \leq \frac{1'}{g(2^n)}$$

   Si $n \in \mathbb{N}$, puisque $x_p \searrow 0$ il existe $p \in \mathcal{N}$ tel que $x_p \leq \dfrac{1}{2^n}$, la croissance de δ montre que $\delta(2^n x_p) \leq \delta(1) \leq 1'$.
   — Puisque δ est multiplicative on obtient

$$\delta(2^n)\delta(x_p) \leq 1' \quad \text{et} \quad \delta(x_p) \leq \frac{1'}{\delta(2^n)}$$

— Puisque $\delta(2^n) = g(2^n)$ on obtient l'existence d'un $p \in \mathcal{N}$ tel que

$$\delta(x_p) \leq \frac{1'}{g(2^n)}$$

cela permet de montrer que le plus grand minorant de la suite $p \mapsto \delta(x_p)$ est $0'$. En effet, si $\varepsilon' \in \mathbb{R}'$ et $\varepsilon' > 0'$ il existe (d'après (10.36) page 633) un certain $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\frac{1'}{g(2^n)} < \varepsilon'$ et on vient de voir qu'il existe $p \in \mathcal{N}$ tel que

$$\delta(x_p) \leq \frac{1'}{g(2^n)} \leq \varepsilon' \ .$$

Ainsi on obtient

$$\lim_{p\to\infty} \delta(x_p) = \inf_{p\in\mathcal{N}} \delta(x_p) = 0'$$

2. <u>On montre $x_p \searrow l_x \Rightarrow \delta(x_p) \searrow \delta(l_x)$</u>

   En effet si $x_p \searrow l_x$ alors $x_p - l_x$ est une suite positive qui décroît vers 0 l'additivité de δ et le lemme [10.3 page 610 montre que

   $$\lim_{p\to\infty} \delta(x_p) = \delta(l_x) + \lim_{p\to\infty} \delta(x_p - l_x)$$

   et d'après *1.* on a $\lim_{p\to\infty} \delta(x_p - l_x) = 0'$.

3. <u>On montre $x_p \nearrow l_x \Rightarrow \delta(x_p) \nearrow \delta(l_x)$</u>

   En effet si $x_p \nearrow l_x$ alors $l_x - x_p$ est une suite positive qui décroît vers 0 l'additivité de δ et le lemme [10.3 page 610 montre que

   $$\delta(l_x) = \lim_{p\to\infty} \delta(x_p) + \lim_{p\to\infty} \delta(l_x - x_p)$$

   et d'après *1.* on a $\lim_{p\to\infty} \delta(l_x - x_p) = 0'$.

(iii)

D'abord comme application strictement croissante d'un ensemble totalement ordonné dans un ensemble ordonné, δ est injective. Puisque g^{-1} est l'unique bijection croissante de $(\mathbb{N}', O')$ dans $(\mathbb{N}, O)$ (i) permet d'affirmer qu'on peut définir une application η de $\mathbb{R}'_+$ dans $\mathbb{R}_+$ par

$$\eta(x') = \lim_{n'\to\infty} \frac{g^{-1}(E'((2')^{n'}x'))}{g^{-1}((2')^{n'})}$$

qui est additive multiplicative et strictement croissante . pour montrer que δ est surjective on montre

$$x' \in \mathbb{R}'_+ \Rightarrow \delta(\eta(x')) = x' \ .$$

D'après (i) la suite $\beta'(x')$ définie par

$$\beta'_{n'}(x') = \frac{g^{-1}(E'((2')^{n'}x'))}{g^{-1}((2')^{n'})}$$

est croissante et (ii) montre alors que

$$\delta(\eta(x')) = \lim_{n'\to\infty} \delta(\beta_{n'}(x')) \tag{10.39}$$

Mais il est facile d'établir que $\delta(\beta'_{n'}(x')) = \frac{E'((2')^{n'}x')}{(2')^{n'}}$. En effet, puisque δ est multiplicative

$$\delta(\beta'_{n'}(x')) = \delta(g^{-1}(E'((2')^{n'}x')))\delta(\frac{1}{g^{-1}(2')^{n'}})$$

Or

— D'après (i)

$$\delta(g^{-1}(E'((2')^{n'}x'))) = g(g^{-1}(E'((2')^{n'}x')) = E'((2')^{n'}x')$$

— l'égalité

$$1' = \delta(1) = \delta(\frac{g^{-1}(E'((2')^{n'})}{g^{-1}(E'((2')^{n'})}) = \delta(g^{-1}(E'((2')^{n'}))\delta(\frac{1}{g^{-1}(E'((2')^{n'})})$$

montre que

$$\delta(\frac{1}{g^{-1}(E'((2')^{n'})}) = \frac{1'}{\delta(g^{-1}(E'((2')^{n'})} = \frac{1'}{(2')^{n'}}$$

L'égalité (10.39) page 637 montre alors que

$$\delta(\eta(x')) = \lim_{n'\to\infty} \frac{E'((2')^{n'}x')}{(2')^{n'}}$$

et le lemme [10.4] page 614 permet d'affirmer que

$$\lim_{n'\to\infty} \frac{E'((2')^{n'}x')}{(2')^{n'}} = x'$$

Ainsi δ -qui est injective - est aussi surjective, de plus l'égalité $\delta \circ \eta = id_{\mathbb{R}'_+}$ montre que $\delta^{-1} = \eta$.

1. <u>On montre $\liminf\limits_{p\to\infty} \delta(x_p) = \delta(\liminf\limits_{p\to\infty} x_p)$</u>

   D'abord , si M est un majorant de $x(\mathcal{N})$ la croissance de δ montre que pour tout $p \in \mathcal{N}$ on a

   $$0' \leq \delta(x_p) \leq \delta(M)$$

   par suite $p \to \delta(x_p)$ est bornée. Puisque la suite $y_p = \inf\limits_{k\geq p} x_k$ est croissante de limite $\liminf\limits_{p\to\infty} x_p$ il résulte de (ii) (point *3.*) que

   $$\delta(\liminf_{p\to\infty} x_p) = \lim_{p\to\infty} \delta(\inf_{k\geq p} x_k) \tag{10.40}$$

   il suffit donc de montrer que $\delta(\inf\limits_{k\geq p} x_k) = \inf\limits_{k\geq p} \delta(x_k)$. En d'autres termes il s'agit de montrer que $\delta(\inf\limits_{k\geq p} x_k)$ est le plus grand minorant de l'ensemble

   $$\Gamma_p = \{x' \in \mathbb{R}'/\exists\ k \in \mathcal{N} : k \geq p\ x' = \delta(x_k)\}$$

   (a) D'abord, puisque

   $$k \geq p \Rightarrow x_k \geq \inf_{k\geq p} x_k$$

   la croissance de δ montre que $\delta(\inf\limits_{k\geq p} x_k)$ est un minorant de Γ_p

   (b) Ensuite, si m est un minorant de Γ_p alors pour tout $k \in \mathcal{N}$ tel que $k \geq p$ on a

   $$\delta(x_k) \geq m$$

   la croissance de δ^{-1} montre alors que

   $$k \geq p \Rightarrow x_k \geq \delta^{-1}(m)$$

   la définition d'une borne inférieure donne

   $$\inf_{k\geq p} x_k \geq \delta^{-1}(m)$$

   et la croissance de δ entraîne

   $$\delta(\inf_{k\geq p} x_k) \geq m$$

Ainsi $\delta(\inf_{k\geq p} x_k)$ est le plus grand minorant de Γ_p et $\delta(\inf_{k\geq p} x_k) = \inf_{k\geq p} \delta(x_k)$. L'égalité (10.40) page 638 montre alors que

$$\delta(\liminf_{p\to\infty} x_p) = \lim_{p\to\infty} \delta(\inf_{k\geq p} x_k) = \liminf_{p\to\infty} \delta(x_p)$$

2. <u>On montre $\limsup_{p\to\infty} \delta(x_p) = \delta(\limsup_{p\to\infty} x_p)$</u>

D'abord , si M est un majorant de $x(\mathcal{N})$ la croissance de δ montre que pour tout $p \in \mathcal{N}$ on a

$$0' \leq \delta(x_p) \leq \delta(M)$$

par suite $p \to \delta(x_p)$ est bornée. Puisque la suite $y_p = \sup_{k\geq p} x_k$ est décroissante de limite $\limsup_{p\to\infty} x_p$ il résulte de (ii) (point *2.*) que

$$\delta(\limsup_{p\to\infty} x_p) = \lim_{p\to\infty} \delta(\sup_{k\geq p} x_k) \tag{10.41}$$

il suffit donc de montrer que $\delta(\sup_{k\geq p} x_k) = \sup_{k\geq p} \delta(x_k)$. En d'autres termes il s'agit de montrer que $\delta(\sup_{k\geq p} x_k)$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Gamma_p = \{x' \in \mathbb{R}'/\exists\ k \in \mathcal{N} : k \geq p\ x' = \delta(x_k)\}$$

(a) D'abord, puisque

$$k \geq p \Rightarrow x_k \leq \sup_{k\geq p} x_k$$

la croissance de δ montre que $\delta(\sup_{k\geq p} x_k)$ est un majorant de Γ_p

(b) Ensuite, si M est un majorant de Γ_p alors pour tout $k \in \mathcal{N}$ tel que $k \geq p$ on a

$$\delta(x_k) \leq M$$

la croissance de δ^{-1} montre alors que

$$k \geq p \Rightarrow x_k \leq \delta^{-1}(M)$$

la définition d'une borne supérieure donne

$$\sup_{k\geq p} x_k \leq \delta^{-1}(M)$$

et la croissance de δ entraîne

$$\delta(\sup_{k\geq p} x_k) \leq M$$

Ainsi $\delta(\sup_{k\geq p} x_k)$ est le plus petit majorant de Γ_p et $\delta(\sup_{k\geq p} x_k) = \sup_{k\geq p} \delta(x_k)$. L'égalité (10.41) page 639 montre alors que

$$\delta(\limsup_{p\to\infty} x_p) = \lim_{p\to\infty} \delta(\sup_{k\geq p} x_k) = \limsup_{p\to\infty} \delta(x_p)$$

(iv)

1. — Si $x \geq 0$ alors $x^+ = x$ et $x^- = 0$ par suite $x = x^+ - x^-$
   — Si $x \leq 0$ alors $x^+ = 0$ et $x^- = -x$ par suite $x = -(-x) = -x^- = x^+ - x^-$
   — Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$, $x^+ = x$ et $x^- = 0$ par suite $|x| = x^+ + x^-$
   — Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$ $x^+ = 0$ et $x^- = -x$ par suite $|x| = -x = x^- = x^+ + x^-$

2. (a) <u>On montre $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$</u>

les égalités
$$x + y = (x+y)^+ - (x+y)^- = x^+ + y^+ - (x^- + y^-)$$
montrent que
$$(x+y)^+ + (x^- + y^-) = (x+y)^- + x^+ + y^+$$
L'additivité de δ sur $\mathbb{R}_+$ montre alors que
$$\delta((x+y)^+) + \delta(x^-) + \delta(y^-) = \delta((x+y)^-) + \delta(x^+) + \delta(y^+)$$
ainsi
$$\delta((x+y)^+) - \delta((x+y)^-) = \delta(x^+) - \delta(x^-) + \delta(y^+) - \delta(y^-)$$
ce qui s'écrit
$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

(b) <u>On montre $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$</u>

les égalités
$$xy = (xy)^+ - (xy)^- = x^+y^+ + x^-y^- - (x^-y^+ + y^-x^+)$$
montrent que
$$(xy)^+ + (x^-y^+ + y^-x^+) = (xy)^- + x^+y^+ + x^-y^-$$
ainsi puisque δ est additive
$$\delta((xy)^+) - \delta((xy)^-) = \delta(x^+y^+ + y^-x^-) - \delta(x^-y^+ + y^-x^+)$$
puisque δ est additive et multiplicative sur $\mathbb{R}_+$ on obtient
$$\varphi(xy) = \delta(x^+)[\delta(y^+) - \delta(y^-)] - \delta(x^-)[\delta(y^+) - \delta(y^-)]$$
ce qui s'écrit après factorisation
$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

(c) <u>On montre que φ est strictement croissante</u>

Si $x < y$ alors $x^+ + y^- < y^+ + x^-$ ainsi la croissance stricte de δ montre que
$$\delta(x^+) + \delta(y^-) < \delta(y^+) + \delta(x^-)$$
par suite
$$\delta(x^+) - \delta(x^-) < \delta(y^+) - \delta(y^-) \quad \text{et} \quad \varphi(x) < \varphi(y) \ .$$

(d) <u>On montre $x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \varphi(x) = \delta(x)$</u>

Si $x \in \mathbb{R}_+$ alors $x^+ = x$ et $x^- = 0$ par suite
$$\varphi(x) = \delta(x^+) - \delta(x^-) = \delta(x) \ .$$

(e) <u>On montre que φ est bijective</u>

Comme application strictement croissante d'un ensemble totalement ordonné dans un ensemble ordonné φ est injective. Il suffit donc de vérifier que φ est surjective , mais si $y \in \mathbb{R}'$ alors (iii) permet d'affirmer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $x_1 \in \mathbb{R}_+$ tels que
$$\delta(x_0) = \max_{O'}\{y, 0'\} \quad \text{et} \quad \delta(x_1) = \max_{O'}\{-y, 0'\}$$
On montre que si $x = x_0 - x_1$ alors $\varphi(x) = y$.

— Puisque φ est additive on a

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) - \varphi(x_1)$$

— D'après (d) et les définitions de x_0 et x_1 on a

$$\varphi(x_0) = \delta(x_0) = \max_{O'}\{y, 0'\} \quad \text{et} \quad \varphi(x_1) = \delta(x_1) = \max_{O'}\{-y, 0'\}$$

par suite

$$\varphi(x) = \max_{O'}\{y, 0'\} - \max_{O'}\{-y, 0'\}$$

et *1.* montre que

$$\max_{O'}\{y, 0'\} - \max_{O'}\{-y, 0'\} = y$$

$$(v)$$

D'aprés ce qu'on vient de voir φ vérifie les propriétés de (v). Il suffit donc de vérifier que si χ satisfait les propriétés **a** , **b** , **c** alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\chi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(E(2^n x)}{g(2^n)}$$

d'après le lemme [10.4] page 614 pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite

$$u_n = \frac{E(2^n x)}{2^n}$$

est une suite croissante qui converge vers x, ainsi la suite $x_n = x - u_n$ est une suite décroissante positive qui converge vers 0, la propriété **c** montre alors que

$$\lim_{n\to\infty} \chi(x - u_n) = 0'$$

L'additivité de χ et le lemme [10.3] page 610 montre alors que

$$\chi(x) = \lim_{n\to\infty} \chi(u_n)$$

il suffit donc de vérifier que $\chi(u_n) = \dfrac{g(E(2^x x))}{g(2^n)}$ or :

— puisque χ est multiplicative et $\chi(1) = g(1) = 1'$

$$\chi(u_n) = \chi(E(2^n x))\chi(\frac{1}{2^n}) = \chi(E(2^n x))\frac{1'}{\chi(2^n)}$$

— d'après **b**

$$\chi(E(2^n x)) = g(E(2^n x)) \quad \text{et} \quad \chi(2^n) = g(2^n) \ .$$

■

Ainsi « à isomorphisme près » il n'existe qu'un corps de réels il ne reste plus qu'à en construire un.

10.3.2 *Une construction de corps de réels*

I *Germe de corps de Cantor*

Le chapitre « structure d'anneau » permet de définir et construire des corps d'entiers rationnels (voir définition [9.47] page 575). Si $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O)$ est un corps d'entiers rationnels , $\mathbb{N}$ son sous-ensemble d'entiers naturels l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ hérite d'une structure d'anneau où l'addition $\oplus$ et la multiplication $\otimes$ sont définies par

$$(a \oplus b)_n = a_n + b_n \quad \text{et} \quad (a \otimes b)_n = a_n b_n \ .$$

Si $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ est l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ (voir définition [10.5] page 610) alors $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ est un sous-anneau de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})$. L'ensemble

$$\mathfrak{a}=\{x\in\mathtt{C}(\mathbb{Q})/\lim_{n\to\infty}x_n=0\}$$

est un idéal de $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ et l'anneau quotient $\mathtt{C}(\mathbb{Q})/\mathfrak{a}$ est un corps qu'on peut munir d'un ordre qui en fait un corps de Cantor.

Lemme 10.8 *On note* $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O)$ *un corps d'entiers rationnels,* $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ *l'ensemble des suites de cauchy de* $\mathbb{Q}$*,* $\oplus$ *et* $\otimes$ *les applications de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})$ *définies par*

$$(x\oplus y)_n=x_n+y_n\quad\text{et}\quad(x\otimes y)_n=x_ny_n\ .$$

(i) Les lois $\oplus$ *et* $\otimes$ *vérifient les propriétés suivantes :*

1. $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})\ ,\ \oplus\ ,\ \otimes)$ *est un anneau commutatif, l'élément neutre de* $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})\ ,\oplus)$ *est la suite* 0^s *définie par* $0^s_n=0$ *et l'élément neutre de* $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})\ ,\otimes)$ *est la suite* 1^s *définie par* $1^s_n=1$
2. $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ *est un sous-anneau de* $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})\ ,\ \oplus\ ,\ \otimes\ )$
3. *L'ensemble*
$$\mathfrak{a}=\{x\in\mathtt{C}(\mathbb{Q})/\lim_{n\to\infty}x_n=0\}$$
est un idéal de $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$*.*

(ii) On peut munir l'ensemble quotient $\mathbb{R}(\mathbb{Q})=\mathtt{C}(\mathbb{Q})/\mathfrak{a}$ *d'une structure d'anneau dont l'addition sera notée* $+_q$ *et la multiplication* $\centerdot$ *. Enfin on notera* $p_{\mathfrak{a}}$ *le morphisme canonique de* $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ *dans* $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ *:*

$$p_{\mathfrak{a}}(x)=\{y\in\mathtt{C}(\mathbb{Q})/y-x\in\mathfrak{a}\}$$

(iii) Si $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ *est une suite vérifiant : pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *on a* $\varphi(n)\geq n$ *alors pour tout* $x\in\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ *la suite* y *définie par*

$$y_n=x_{\varphi(n)}$$

est une suite de Cauchy et

$$p_{\mathfrak{a}}(x)=p_{\mathfrak{a}}(y)$$

(iv) Pour que $t\in\mathbb{R}(\mathbb{Q})^*$ *il faut et il suffit qu'il existe* $(y,\varepsilon)\in\mathtt{C}(\mathbb{Q})\times\mathbb{Q}^*_+$ *tel que* $t=p_{\mathfrak{a}}(y)$ *et pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *l'inégalité* $|y_n|\geq\varepsilon$ *soit vérifiée.*

(v) $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ )$ *est un corps*

Preuve

(i)

1. <u>$(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})\ ,\ \oplus,\ \otimes)$ est un anneau.</u>

1 On montre que $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})\ ,\ \oplus)$ est un groupe commutatif

(a) $\oplus$ est associative , en effet, si $(x,y)\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})$ et $z\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$[(x\oplus y)\oplus z]_n=(x\oplus y)_n+z_n=(x_n+y_n)+z_n$$

l'associativité de l'addition sur $\mathbb{Q}$ montre alors que

$$(x_n+y_n)+z_n=x_n+(y_n+z_n)=x_n+(y\oplus z)_n=[x\oplus(y\oplus z)]_n$$

ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$[(x\oplus y)\oplus z]_n=[x\oplus(y\oplus z)]_n\quad\text{et}\quad(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$$

(b) $\oplus$ est commutative , en effet si $(x, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ alors la commutativité de l'addition sur $\mathbb{Q}$ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(x \oplus y)_n = x_n + y_n = y_n + x_n = (y \oplus x)_n$$

ainsi $x \oplus y = y \oplus x$.

(c) 0^s est l'élément neutre de $\oplus$, en effet si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(x \oplus 0^s)_n = x_n + 0^s_n = x_n + 0 = x_n \ (= (0^s \oplus x)_n \ )$$

(d) Pour tout $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ la suite $-x$ définie par

$$(-x)_n = -x_n$$

est l'inverse de x pour $\oplus$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(x \oplus (-x))_n = x_n + (-x_n) = 0 = 0^s_n$$

2 On montre que $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \ , \ \otimes)$ est un monoïde commutatif

(a) $\otimes$ est associative , en effet, si $(x, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ et $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$[(x \otimes y) \otimes z]_n = (x \otimes y)_n z_n = (x_n y_n) z_n$$

l'associativité de la multiplication sur $\mathbb{Q}$ montre alors que

$$(x_n y_n) z_n = x_n (y_n z_n) = x_n (y \otimes z)_n = [x \otimes (y \otimes z)]_n$$

ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$[(x \otimes y) \otimes z]_n = [x \otimes (y \otimes z)]_n \quad \text{et} \quad (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$$

(b) $\otimes$ est commutative , en effet si $(x, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ alors la commutativité de la multiplication sur $\mathbb{Q}$ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(x \otimes y)_n = x_n y_n = y_n x_n = (y \otimes x)_n$$

ainsi $x \otimes y = y \otimes x$.

(c) 1^s est l'élément neutre de $\otimes$, en effet si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(x \otimes 1^s)_n = x_n 1^s_n = x_n.1 = x_n \ .$$

3 On vérifie que $\otimes$ est distributive sur $\oplus$

Si $(x, y) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ et $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$[x \otimes (y \oplus z)]_n = x_n (y \oplus z)_n = x_n (y_n + z_n) = x_n y_n + x_n z_n = (x \otimes y)_n + (x \otimes z)_n$$

ainsi on obtient

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z \ .$$

2. <u>On montre que $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ est un sous-anneau de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$</u>

   D'après le lemme [10.3] page 610 la somme et le produit de suites de Cauchy sont des suites de Cauchy, puisque les suites constantes 0^s et 1^s sont des suites de Cauchy il suffit de vérifier $x \in \mathtt{C}(\mathbb{Q}) \Rightarrow -x \in \mathtt{C}(\mathbb{Q})$, ce qui est clair.

3. <u>On montre que $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$</u>

   Il s'agit de montrer que ($\mathfrak{a}$, $\oplus$) est un sous-groupe de $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ et

$$(x, a) \in \mathtt{C}(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{a} \Rightarrow x \otimes a \in \mathfrak{a}$$

   — D'après le lemme [10.3] page 610 on a

$$(x, y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x \oplus y)_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

   ainsi $(x, y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \Rightarrow x \oplus y \in \mathfrak{a}$,

   — il est clair que $0^s \in \mathfrak{a}$,

   — si $x \in \mathfrak{a}$ alors $\lim_{n\to\infty} (-x)_n = -\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, par suite $-x \in \mathfrak{a}$.

   ainsi $\mathfrak{a}$ est un sous-groupe de $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$.

   Si $(x, a) \in \mathtt{C}(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{a}$, alors comme suite de Cauchy x est bornée (voir encore le lemme [10.3] page 610), on note M un majorant strictement positif de $|x|(\mathbb{N})$ puisque a tend vers 0, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

   ainsi, puisque $|(x \otimes a)_n| = |x_n||a_n|$ on obtient

$$n \geq n_0 \Rightarrow |(x \otimes a)_n| \leq \varepsilon$$

   par suite

$$\lim_{n\to\infty} (x \otimes a)_n = 0 \quad \text{et} \quad x \otimes a \in \mathfrak{a} .$$

(ii)

C'est un résultat général sur les anneaux quotient qui est établi au lemme [9.13] page 485 .

(iii)

Il s'agit de montrer que y est une suite de Cauchy et $y - x \in \mathfrak{a}$ (c'est à dire $\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$)

1. <u>D'abord on montre $y \in \mathtt{C}(\mathbb{Q})$.</u>

   Puisque x est une suite de Cauchy , pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$[p \geq n(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q \geq n(\varepsilon)] \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \varepsilon$$

   mais par hypothèse pour tout entier p et q $\varphi(p) \geq p$ et $\varphi(q) \geq q$ par suite

$$[p \geq n(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q \geq n(\varepsilon)] \Rightarrow [\varphi(p) \geq n(\varepsilon) \quad \varphi(p) \geq n(\varepsilon)] \Rightarrow |x_{\varphi(p)} - x_{\varphi(q)}| \leq \varepsilon$$

   Ce qui prouve que y est une suite de Cauchy.

2. <u>On montre que $y - x \in \mathfrak{a}$</u>

   Puisque x est une suite de Cauchy , pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$[p \geq n(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q \geq n(\varepsilon)] \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \varepsilon$$

   mais puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \geq n$ on obtient

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow [\varphi(n) \geq n(\varepsilon) \quad \text{et} \quad n \geq n(\varepsilon)] \Rightarrow |x_{\varphi(n)} - x_n| \leq \varepsilon$$

   ainsi

$$\lim_{n\to\infty} (x_{\varphi(n)} - x_n) = 0 \quad \text{et} \quad y - x \in \mathfrak{a} .$$

(iv)

Si $x \in \mathtt{C}(\mathbb{Q})$ vérifie $t = p_{\mathfrak{a}}(x)$ la suite x ne tend pas vers 0 sinon $t = \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ est le neutre additif de $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$. Mais dire que 0 n'est pas limite de x c'est dire (voir [10.3] page 609) que

$$0 \notin \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} \{l \in \mathbb{Q} / |x_k - l| \leq \varepsilon\}$$

ainsi en passant au complémentaire on obtient

$$0 \in \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} \{l \in \mathbb{Q} / |x_k - l| > \varepsilon\} \ .$$

En d'autres termes il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$U_n = \{k \in \mathbb{N} / k \geq n \quad \text{et} \quad |x_k| > \varepsilon\}$$

est non vide . Comme ensemble d'entiers naturels de $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ .\ ,\ O\ )$, l'ensemble $\mathbb{N}$ est bien ordonné pour l'ordre $O(\mathbb{N}) = O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble U_n posséde un minimum pour $O(\mathbb{N})$ et l'application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\varphi(n) = \min_{O(\mathbb{N})} \{k : k \in U_n\}$$

vérifie

$$\varphi(n) \geq n \quad \text{et} \quad |x_{\varphi(n)}| > \varepsilon \ .$$

Si y est la suite définie par $y_n = x_{\varphi(n)}$ alors (iii) permet d'affirmer que $t = p_{\mathfrak{a}}(x) = p_{\mathfrak{a}}(y)$ ainsi (y, ε) est un couple vérifiant les conclusions de (iv).

(v)

Il reste à voir que tout élément de $\mathbb{R}(\mathbb{Q})^*$ est inversible. Mais d'après (iv) si $t \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})^*$ alors il existe un couple $(x, \eta) \in \mathtt{C}(\mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \geq \eta$ et $t = p_{\mathfrak{a}}(x)$ on montre que si y est la suite définie par $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ alors y est une suite de Cauchy et $p_{\mathfrak{a}}(y)$ est l'inverse multiplicatif de t.

— puisque x est une suite de Cauchy et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|x_n| \geq \eta$ l'inégalité

$$|\frac{1}{x_p} - \frac{1}{x_q}| \leq \frac{|x_q - x_p|}{\eta^2}$$

montre que y est une suite de Cauchy.

— puisque $x \otimes y = 1^s$ et que par construction $p_{\mathfrak{a}}$ est un morphisme on obtient

$$p_{\mathfrak{a}}(x \otimes y) = p_{\mathfrak{a}}(x) \centerdot p_{\mathfrak{a}}(y) = t \centerdot p_{\mathfrak{a}}(y) = p_{\mathfrak{a}}(1^s)$$

ainsi $p_{\mathfrak{a}}(y)$ est l'inverse de t.

■

Le corps quotient $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ construit au lemme [10.8] page 642 s'appelle un germe de corps de Cantor au dessus de $\mathbb{Q}$.

Définition 10.10 *Si* $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *est un corps d'entiers rationnels*

1. *Le corps quotient* $\mathbb{R}(\mathbb{Q}) = \mathtt{C}(\mathbb{Q})/\mathfrak{a}$ *construit au lemme [10.8] est appelé le germe de corps de Cantor au-dessus de* $\mathbb{Q}$
2. *On note* p *le morphisme canonique de* $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ *dans* $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$, *i l'application de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ *définie par*

$$i(q)_n = q$$

l'application γ *de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ *définie par*

$$\gamma(q) = p \circ i(q) = \{x \in \mathtt{C}(\mathbb{Q}) / \lim_{n \to \infty} x_n = q\}$$

est appelée le plongement de $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$.

Pour passer d'un germe à un corps de Cantor il faut commencer par mettre un ordre sur $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$.

II ***Ordre sur les germes de corps de Cantor***

Si $\mathbb{Q}$ est un corps d'entiers rationnels et $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ est le germe de corps de Cantor au- dessus de $\mathbb{Q}$, $\mathtt{C}_+(\mathbb{Q})$ l'ensemble des suites de Cauchy positives de $\mathbb{Q}$ on pose

$$\mathbb{R}_+(\mathbb{Q}) = \{t \in \mathbb{R}(\mathbb{Q}) / \exists\ x \in \mathtt{C}_+(\mathbb{Q}) : t = p(x)\}$$

et $\mathcal{O}$ est la relation définie par

$$\mathcal{O} = \{(s,t) \in \mathbb{R}(\mathbb{Q}) \times \mathbb{R}(\mathbb{Q}) / t - s \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})\}$$

alors $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$ est un corps ordonné. l'ordre $\mathcal{O}$ posséde de plus les propriétés suivantes :

1. Le plongement γ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ est un morphisme strictement croissant
2. Si $\mathbb{N}$ est le sous-ensemble d'entiers naturels de $\mathbb{Q}$ alors $\gamma(\mathbb{N})$ est le sous-ensemble d'entiers naturels de $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$
3. $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\mathcal{O})$ est un corps archimédien.

Le lemme qui suit utilise les notations et résultats du lemme [10.8] page 642

Lemme 10.9 *On note* $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O)$ *un corps d'entiers rationnels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels ,* $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ )$ *le germe de corps de Cantor au-dessus de* $\mathbb{Q}$ *et* $p : \mathtt{C}(\mathbb{Q}) \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ *le morphisme canonique de* $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ *dans* $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$*. De plus on note*

$$\mathtt{C}_+(\mathbb{Q}) = \mathtt{C}(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}_+)$$

l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ *à valeurs positives,*

$$\mathtt{C}_-(\mathbb{Q}) = \mathtt{C}(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}_-)$$

l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ *à valeurs négatives et*

$$\mathbb{R}_+(\mathbb{Q}) = p(\mathtt{C}_+(\mathbb{Q})) = \{t \in \mathbb{R}(\mathbb{Q}) /\ \exists\ x \in \mathtt{C}_+(\mathbb{Q}) : t = p(x)\}$$

(i) L'ensemble $\mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ *posséde les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $(s,t) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q}) \times \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$

$$s +_q t \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q}) \quad \text{et} \quad s \centerdot t \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$$

2.
$$t \notin \mathbb{R}_+(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow t \neq p(0^s) \quad \text{et} \quad -t \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$$

3. *Si* $\mathbb{R}_-(\mathbb{Q}) = \{t \in \mathbb{R}(\mathbb{Q}) / -t \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})\}$ *alors*

$$\mathbb{R}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}_+(\mathbb{Q}) \cup \mathbb{R}_-(Q) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_+(\mathbb{Q}) \cap \mathbb{R}_-(\mathbb{Q}) = \{p(0^s)\}$$

4. *si* $(x,y) \in \mathtt{C}(\mathbb{Q}) \times \mathtt{C}(\mathbb{Q})$ *vérifie pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \leq y_n$$

alors $p(y) - p(x) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$.

(ii) La relation $\mathcal{O}$ *de* $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ *dans* $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ *définie par*

$$\mathcal{O} = \{(s,t) \in \mathbb{R}(\mathbb{Q}) \times \mathbb{R}(\mathbb{Q}) /\ t - s \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})\}$$

est une relation d'ordre total qui est compatible avec les lois de $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$*. Autrement dit* $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$ *est un corps ordonné.*

(iii) Le plongement γ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ est un morphisme strictement croissant de $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O)$ dans $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$ de plus $\gamma(\mathbb{N})$ est le sous-ensemble d'entiers naturels de $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$.

(iv) Si $x \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$, $(x,y) \in \mathcal{O}$, $x \neq y$ et $x \neq p(0^s)$ il existe $(a,b) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q}_+^*$ tel que $(\gamma(a),x) \in \mathcal{O}$ et $(y,\gamma(b)) \in \mathcal{O}$. En d'autres termes si $(x,y) \in \mathbb{R}(\mathbb{Q}) \times \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ vérifie

$$p(0^s) < x < y$$

il existe $(a,b) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q}_+^*$ tel que

$$\gamma(a) \leq x < y \leq \gamma(b)\ .$$

(v) $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$ est un corps archimédien : pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q}) \times \mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\gamma(n) \centerdot a \geq b\ .$$

(vi) Pour tout $u \in \mathtt{C}(\mathbb{Q})$ la suite $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R}(\mathbb{Q}))$ définie par

$$x_n = \gamma(u_n)$$

converge vers $p(u)$ dans $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$.

Preuve

(i)

1. Si $(s,t) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})) \times \mathbb{R}_+(Q)$ il existe des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ à valeurs positives x et y tel que

$$s = p(x) \quad \text{et} \quad t = p(y)\ .$$

Les suites $x \oplus y$ et $x \otimes y$ sont à valeurs positives et le lemme [10.3] page 610 montre que ce sont des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$. Par construction p est un morphisme de $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ dans $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ par suite

$$s +_q t = p(x \oplus y) \quad \text{et} \quad s \centerdot t = p(x \otimes y)$$

Ainsi $s \centerdot t$ et $s +_q t$ sont des images par p de suites de Cauchy à valeurs positives.

2. (a) <u>On montre que si $t \notin \mathbb{R}_+(\mathbb{Q}) \Rightarrow t \neq p(0^s)$ et $-t \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$.</u>

Puisque $p(0^s) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ il suffit de montrer : $t \notin \mathbb{R}_+(\mathbb{Q}) \Rightarrow -t \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$. Pour voir ceci on montre d'abord que que si $t = p(x)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$V_n = \{k \in \mathbb{N}/\ k \geq n \quad \text{et} \quad x_k < 0\}$$

est non vide. En effet, dire que $V_{n_0} = \varnothing$ c'est dire que pour tout $k \geq n_0$ on a $x_k \geq 0$, si φ est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\varphi(n) = n + n_0$ alors $\varphi(n) \geq n$ et le lemme [10.8] page 642 montre que la suite $y_n = x_{\varphi(n)}$ est une suite de Cauchy telle que $t = p(x) = p(y)$ mais, par définition de n_0, y est une suite à valeurs positives et $t = p(y)$ appartiendrait à $\mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n \neq \varnothing$, comme sous-ensemble d'entiers naturels de $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ l'ensemble $\mathbb{N}$ est bien ordonné pour l'ordre $O(\mathbb{N}) = O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. En particulier l'ensemble V_n possède un minimum pour l'ordre $O(\mathbb{N})$ et l'application χ définie par

$$\chi(n) = \min_{O(\mathbb{N})}\{k : k \in V_n\}$$

vérifie

$$\chi(n) \geq n \quad \text{et} \quad x_{\chi(n)} < 0\ ,$$

par suite (encore le lemme [10.8)] page 642) la suite z définie par $z_n = x_{\chi(n)}$ est une suite à valeurs négatives qui vérifie $t = p(x) = p(z)$. En particulier $-t = p(-z)$ et $-z$ est une suite à valeurs positives.

(b) <u>On montre $[\ t \neq p(0^s) \quad \text{et} \quad -t \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})\ ] \Rightarrow t \notin \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$.</u>

Il suffit de vérifier que le seul élément $t \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ tel que $t \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ et $-t \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ est l'ensemble $p(0^s) = \mathfrak{a}$. Mais si t est un tel élément il existe des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ à valeurs positives x et y telles que $t = p(x)$ et $-t = p(y)$. Puisque par construction p est un morphisme de $(\mathtt{C}(\mathbb{Q})\ ,\ \oplus)$ dans $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ , +_q)$ on a

$$p(x \oplus y) = p(x) +_q p(y) = t +_q (-t) = p(0^s)\ .$$

Ainsi la suite $x \oplus y$ est une suite de Cauchy à valeurs positives qui est convergente de limite nulle. Mais, puisque $(x \oplus y)_n = x_n + y_n$ on a $0 \leq x_n \leq (x \oplus y)_n$ cela permet de montrer que la suite x tend vers 0. En effet, si $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq x_n + y_n \leq \varepsilon$$

par suite

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq x_n \leq x_n + y_n \leq \varepsilon$$

et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ par suite $t = p(x) = p(0^s)$

3. Ce point est une façon pratique d'énoncer *(2)*
4. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leq y_n$ alors $y - x \in \mathtt{C}_+(\mathbb{Q})$ et puisque $p(y) - p(x) = p(y - x)$ on obtient $p(y) - p(x) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$

(ii)

1 $\mathcal{O}$ est un ordre total

1. Reflexivité : puisque $p(0^s) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ pour tout $t \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ on a $(t,t) \in \mathcal{O}$
2. Transitivité : si $t - s \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ et $r - t \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ alors d'après *(i)(1)* l'égalité $r - s = (r - t) + (t - s)$ entraîne que $r - s \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$
3. Antisymétrie : si $(s,t) \in \mathcal{O}$ et $(t,s) \in \mathcal{O}$ alors

$$t - s \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q}) \cap \mathbb{R}_-(\mathbb{Q})$$

par suite *(i)(3)* montre que $s = t$

4. Totalité : Si $(s,t) \in \mathbb{R}(\mathbb{Q}) \times \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ et $(s,t) \notin \mathcal{O}$ alors $t - s \notin \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ et *(i)(2)* montre alors que $s = t$ ou $s - t \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$, par suite $(t,s) \in \mathcal{O}$

2 Compatibilité des lois et de l'ordre

1. Compatibilité avec l'addition $+_q$: si $a \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ et $(s,t) \in \mathcal{O}$ alors $t - s \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ et l'égalité

$$t - s = (a +_q t) - (a +_q s)$$

montre que $(a +_q s, a +_q t) \in \mathcal{O}$ ainsi l'application $t \mapsto a +_q t$ est croissante , $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ , +_q)$ étant un groupe cela montre que $t \mapsto a +_q t$ est strictement croissante..

2. Compatibilité avec la multiplication $\centerdot$: si $a \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$, $a \neq p(0^s)$ et $(s,t) \in \mathcal{O}$ alors $t - s \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ et *(i)(1)* montre que

$$a \centerdot (t - s) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$$

ainsi $(a \centerdot s, a \centerdot t) \in \mathcal{O}$ et l'application $t \mapsto a \centerdot t$ est croissante. $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ étant un corps cela montre que $t \mapsto a \centerdot t$ est strictement croissante.

(iii)

1 γ est un morphisme d'anneaux

L'injection i de $\mathbb{Q}$ dans $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ est un morphisme de $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ .\ )$ dans $(\mathtt{C}(\mathbb{Q})\ ,\ \oplus\ ,\ \otimes)$ puisque

$$(i(a) \oplus i(b))_n = i(a)_n + i(b)_n = a + b = i(a+b)_n$$

et

$$(i(a) \otimes i(b))_n = i(a)_n i(b)_n = ab = i(ab)_n$$

ainsi $\gamma = p \circ i$ est un composé de morphismes.

2 γ est strictement croissante

1. D'abord γ est injective. En effet , dire que $\gamma(a) = \gamma(b)$ c'est dire que la suite $u_n = i(a)_n - i(b)_n$ converge vers 0 dans $\mathbb{Q}$ or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = a - b$.
2. Ensuite γ est croissante. Si $a \leq b$ alors $i(b) - i(a) \in \mathtt{C}_+(\mathbb{Q})$ par suite $(p(i(a))\ ,\ p(i(b))) \in \mathcal{O}$ et $(\gamma(a)\ ,\ \gamma(b)) \in \mathcal{O}$

3 $\gamma(\mathbb{N})$ est le sous-ensemble d'entiers naturels de $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$

Il s'agit de montrer que si $\mathcal{O}(\mathbb{N}) = \mathcal{O} \cap (\gamma(\mathbb{N}) \times \gamma(\mathbb{N}))$ alors $(\gamma(\mathbb{N})\ ,\ \mathcal{O}(\mathbb{N}))$ est un ensemble d'entiers naturels d'élément minimum $p(0^s)$ et de succession $s(k) = k +_q p(1^s)$

1. D'abord on montre que tout sous-ensemble non vide de $\gamma(\mathbb{N})$ possède un minimum pour l'ordre $\mathcal{O}(\mathbb{N})$. Si X est un sous-ensemble non vide de $\gamma(\mathbb{N})$ on pose

   $$E = \gamma^{-1}(X) = \{k \in \mathbb{N} / \gamma(k) \in X\}\ .$$

   Puisque $(\mathbb{N}, O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ est bien ordonné E possède un minimum pour l'ordre $O(\mathbb{N}) = O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

   $$n_0 = \min_{O(\mathbb{N})}\{k : k \in E\}$$

   on montre que

   $$\gamma(n_0) = \min_{\mathcal{O}(\mathbb{N})}\{x : x \in X\}\ .$$

   — Puisque $n_0 \in E$ on a $\gamma(n_0) \in X$
   — Si $x \in X$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = \gamma(k)$ ainsi $\gamma(k) \in X$ et $k \in E$, par suite

   $$n_0 \leq k$$

   la croissance de γ montre alors que $\gamma(n_0) \leq \gamma(k)$ par suite

   $$\forall\ x \in X \quad \gamma(n_0) \leq x\ .$$

2. On montre que la succession de $(\gamma(\mathbb{N}), \mathcal{O}(\mathbb{N}))$ est

   $$s(x) = \min_{\mathcal{O}(\mathbb{N})}\{y : y \in]x, \to [\} = x +_q p(1^s)\ .$$

   Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\gamma(k+1) = \gamma(k) +_q \gamma(1) = \gamma(k) +_q p(1^s)$ il suffit de montrer que

   $$\forall\ k \in \mathbb{N} \quad s(\gamma(k)) = \min_{\mathcal{O}(\mathbb{N})}\{y : y \in]\gamma(k), \to [\} = \gamma(k+1)$$

   Puisque $\gamma(k+1) > \gamma(k)$ on a $s(\gamma(k)) \leq \gamma(k+1)$. Il reste à montrer

   $$[(\gamma(k), y) \in \mathcal{O}(\mathbb{N}) \quad \text{et} \quad y \neq \gamma(k)] \Rightarrow (\gamma(k+1), y) \in \mathcal{O}(\mathbb{N})\ .$$

   Mais si $(\gamma(k), y) \in \mathcal{O}(\mathbb{N})$ alors, puisque $\mathcal{O}(\mathbb{N}) \subset \gamma(\mathbb{N}) \times \gamma(\mathbb{N})$, $y \in \gamma(\mathbb{N})$ ainsi il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $y = \gamma(u)$.
   — Puisque $y > \gamma(k)$ on a $u > k$, en effet, si $u \leq k$ alors $y = \gamma(u) \leq \gamma(k) < y$.
   — Puisque $u > k$ on a $k + 1 \leq u$ par suite $\gamma(k+1) \leq \gamma(u)$ et $(\gamma(k+1), y) \in \mathcal{O}(\mathbb{N})$.

3. Pour montrer que $(\gamma(\mathbb{N}), \mathcal{O}(\mathbb{N}))$ est un ensemble d'entiers naturels il reste à voir que $(\gamma(\mathbb{N}), \mathcal{O}(\mathbb{N}))$ est sans élément maximal et que le seul ensemble héréditaire de $(\gamma(\mathbb{N}), \mathcal{O}(\mathbb{N}))$ est $\gamma(\mathbb{N})$, mais si $x \in \gamma(\mathbb{N})$ alors $x +_q p(1^s) \in \gamma(\mathbb{N})$ et $x +_q p(1^s) > x$, par suite x n'est pas maximal.Enfin, si H' est un sous-ensemble héréditaire de $(\gamma(\mathbb{N}), \mathcal{O}(\mathbb{N}))$ on montre que l'ensemble

$$H = \gamma^{-1}(H') = \{k \in \mathbb{N} / \gamma(k) \in H'\}$$

est héréditaire dans $(\mathbb{N}, O(\mathbb{N}))$.

— D'abord $0 \in H$ puisque $\gamma(0) = p(0^s)$ et $p(0^s)$ est le plus petit élément de $\gamma(\mathbb{N})$ (et appartient donc à H') .

— Ensuite, si $n \in H$ alors $\gamma(n) \in H'$, H' étant héréditaire on a $s(\gamma(n)) \in H'$ mais la succession de $(\gamma(\mathbb{N}), \mathcal{O}(\mathbb{N}))$ vérifie $s(\gamma(n)) = \gamma(n+1)$ par suite

$$n \in H \Rightarrow \gamma(n+1) \in H' \Rightarrow n+1 \in H$$

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\gamma(k) \in H'$ d'où

$$\gamma(\mathbb{N}) \subset H' \subset \gamma(\mathbb{N}) \ .$$

(iv)

1 On montre $x \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ et $x \neq p(0^s) \Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* : \gamma(\varepsilon) \leq x$

Si $u \in \mathtt{C}_+(\mathbb{Q})$ vérifie $x = p(u)$ la suite u ne tend pas vers 0 sinon $x = p(u) = p(0^s)$. Mais dire que 0 n'est pas limite de u c'est dire (voir [10.3] page 609) que

$$0 \notin \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} \{l \in \mathbb{Q} / |u_k - l| \leq \varepsilon\}$$

ainsi en passant au complémentaire on obtient

$$0 \in \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} \{l \in \mathbb{Q} / |u_k - l| > \varepsilon\} \ .$$

En d'autres termes il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$V_n = \{k \in \mathbb{N} / k \geq n \quad \text{et} \quad |u_k| > \varepsilon\}$$

est non vide . Puisque par hypothèse pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $u_k \geq 0$ on obtient

$$V_n = \{k \in \mathbb{N} / k \geq n \quad \text{et} \quad u_k > \varepsilon\}$$

Comme ensemble d'entiers naturels de $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ .\ ,\ O\ )$, l'ensemble $\mathbb{N}$ est bien ordonné pour l'ordre $O(\mathbb{N}) = O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble V_n posséde un minimum pour $O(\mathbb{N})$ et l'application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\varphi(n) = \min_{O(\mathbb{N})} \{k : k \in V_n\}$$

vérifie

$$\varphi(n) \geq n \quad \text{et} \quad u_{\varphi(n)} > \varepsilon \ .$$

Si v est la suite définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ alors la suite v vérifie $v - i(\varepsilon) \in \mathtt{C}_+(\mathbb{Q})$ et le lemme [10.8] page 642 permet d'affirmer que $x = p(u) = p(v)$. Ainsi on obtient $x - \gamma(\varepsilon) = p(v - i(\varepsilon)) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$, ce qui montre que

$$(\gamma(\varepsilon)\ ,\ x) \in \mathcal{O}$$

2 On montre $y \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ et $y \neq p(0^s) \Rightarrow \exists b \in \mathbb{Q}_+^* : y \leq \gamma(b)$

Puisque $y > p(0^s)$ il existe d'après **1** un certain $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que

$$\gamma(\varepsilon) \leq \frac{p(1^s)}{y}$$

La compatibilité de la multiplication et de l'ordre montre alors que

$$\gamma(\varepsilon) \centerdot y \leq p(1^s) \quad \text{et} \quad y \leq \frac{p(1^s)}{\gamma(\varepsilon)}$$

mais puisque γ est un morphisme on a

$$p(1^s) = \gamma(1) = \gamma(\frac{1}{\varepsilon}.\varepsilon) = \gamma(\frac{1}{\varepsilon}) \centerdot \gamma(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \gamma(\frac{1}{\varepsilon}) = \frac{p(1^s)}{\gamma(\varepsilon)}$$

Ainsi on obtient $y \leq \gamma(\frac{1}{\varepsilon})$.

(v)

Il s'agit de montrer que si $x > p(0^s)$ et $y \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ il existe $u \in \gamma(\mathbb{N})$ tel que $u \centerdot x \geq y$. Il suffit de considérer le cas $p(0^s) < x < y$. Dans ce cas (iv) montre qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q}_+^*$ tel que

$$\gamma(a) \leq x < y \leq \gamma(b)$$

Puisque $\mathbb{Q}$ est archimédien (voir lemme [9.36] page 586) il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na \geq b$, γ étant un morphisme croissant on obtient

$$\gamma(n) \centerdot \gamma(a) \geq \gamma(b) \geq y$$

la compatibilité de la multiplication et de l'ordre montre, puisque $x \geq \gamma(a)$, que $\gamma(n) \centerdot x \geq \gamma(n) \centerdot \gamma(a) \geq y$, ainsi $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$ est archimédien.

(vi)

On montre d'abord que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow p(u) - \gamma(\varepsilon) \leq \gamma(u_k) \leq p(u) +_q \gamma(\varepsilon)$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, puisque $u \in \mathtt{C}(\mathbb{Q})$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow u_k - \varepsilon \leq u_{k+n} \leq u_k + \varepsilon\ . \tag{10.42}$$

Par suite, si $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi_k \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ est définie par $\varphi_k(n) = k + n$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $v^k \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ définie par $v_n^k = u_{\varphi_k(n)}$ vérifie

1. v^k est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $p(v^k) = p(u)$. En effet, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\varphi_k(n) \geq n$ cette assertion est assurée par le lemme [10.8] page 642
2. pour tout $k \geq n(\varepsilon)$ on a, d'après (10.42) page 651, $i(u_k + \varepsilon) - v^k \in \mathtt{C}_+(\mathbb{Q})$ en particulier $p(i(u_k + \varepsilon) - v^k) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ et l'égalité $p(i(u_k + \varepsilon) - v^k) = \gamma(u_k + \varepsilon) - p(v^k) = [\gamma(u_k) +_q \gamma(\varepsilon)] - p(u)$ entraîne
$$p(u) \leq \gamma(u_k + \varepsilon) \leq \gamma(u_k) +_q \gamma(\varepsilon)$$
3. pour tout $k \geq n(\varepsilon)$ on a, d'après (10.42) page 651, $v^k - i(u_k - \varepsilon) \in \mathtt{C}_+(\mathbb{Q})$ en particulier $p(v^k - i(u_k - \varepsilon)) \in \mathbb{R}_+(\mathbb{Q})$ et l'égalité $p(v^k - i(u_k - \varepsilon)) = p(u) - \gamma(u_k - \varepsilon) = p(u) - [\gamma(u_k) - \gamma(\varepsilon)]$ entraîne $\gamma(u_k) - \gamma(\varepsilon) \leq p(u)$.

Ainsi 2 et 3 montrent que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \gamma(u_k) - \gamma(\varepsilon) \leq p(u) \leq \gamma(u_k) +_q \gamma(\varepsilon) \tag{10.43}$$

cela permet de montrer que $\gamma(u_n)$ converge vers $p(u)$ dans $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$, en effet si $\eta \in \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ et $\eta > p(0^s)$ alors (iv) permet d'affirmer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\gamma(\varepsilon) \leq \eta$, par suite si $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vérifie la propriété (10.43) page 651 on obtient

$$k \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \gamma(u_k) - \eta \leq p(u) \leq \gamma(u_k) +_q \eta$$

■

Le corps ordonné archimédien construit au lemme [10.9] page 646 s'appelle le complété de $\mathbb{Q}$.

Définition 10.11 *On note* $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps d'entiers rationnels, Le corps ordonné archimédien* $(\mathbb{R}(\mathbb{Q})\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$ *construit au lemme* [10.9] *page 646 s'appelle le* ***complété*** *de* $\mathbb{Q}$.

L'existence d'un corps de réels sera donc établi si on montre que tout complété d'un corps d'entiers rationnels est ... complet.

III *Construction Cantorienne, suite et fin .*

Si $\mathbb{R}$ est le complété d'un corps d'entiers rationnels $\mathbb{Q}$ alors le plongement $\gamma(\mathbb{Q})$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est ≪ dense ≫ dans $\mathbb{R}$ au sens suivant : si $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vérifie $x < y$ alors $\gamma(\mathbb{Q}) \cap]x,y[\neq \varnothing$. En particulier, si $\tau \in \mathtt{C}(\mathbb{R})$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ il existe une suite $q \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathbb{Q})$ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\gamma(q_n) \in]\tau_n - \gamma(\frac{1}{2^n}), \tau_n + \gamma(\frac{1}{2^n})[$, il résulte alors du fait que τ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ que q est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$, ainsi le lemme [10.9] page 646 montre que la suite $x_n = \gamma(q_n)$ converge dans $\mathbb{R}$ (vers $p(q)$), mais par construction $|\tau_n - x_n|_{\mathbb{R}} \leq \gamma(\frac{1}{2^n})$ ainsi τ converge dans $\mathbb{R}$ vers $p(q)$. Dans le lemme qui suit on aura besoin de distinguer entre la valeur absolue dans le corps d'entiers rationnels $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O)$ et la valeur absolue dans son complété $(\mathbb{R}\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$, on les notera respectivement $|.|$ et $|.|_{\mathbb{R}}$:

$$|q| = \max_O\{q,-q\} \quad \text{et} \quad |x|_{\mathbb{R}} = \max_{\mathcal{O}}\{x,-x\}$$

On utilise de plus les résultats et notations des lemmes [10.8] page 642 et [10.9] page 646

Lemme 10.10 *On note* $(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O)$ *un corps d'entiers rationnels,* $\mathbb{N}$ *son ensemble d'entiers naturels et* $(\mathbb{R}\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$ *son complété, p le morphisme canonique de* $\mathtt{C}(\mathbb{Q})$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $\gamma = p \circ i$ *le plongement de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$.

(i) Pour tout $q \in \mathbb{Q}$ *on a* $|\gamma(q)|_{\mathbb{R}} = \gamma(|q|)$. *Si* $(\mathcal{N}\ ,O_0)$ *est un ensemble d'entiers naturels* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{N}\ ,\ \mathbb{Q})$ *est une suite à valeurs dans* $\mathbb{Q}$, *pour que la suite* λ *de* $\mathcal{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$\lambda_n = \gamma(x_n)$$

soit une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ *il faut et il suffit que x soit une suite de Cauchy dans* $\mathbb{Q}$.

(ii) Si $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *vérifie* $s < t$ *alors* $\gamma(\mathbb{Q}) \cap]s,t[\neq \varnothing$ *: il existe* $q \in \mathbb{Q}$ *tel que* $\gamma(q) \in]s,t[$.

(iii) $(\mathbb{R}\ ,\ +_q\ ,\ \centerdot\ ,\ \mathcal{O})$ *est un corps de réels.*

Preuve Pour éviter des notations trop lourdes on note de la même manière l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, cela signifie qu'on laisse au lecteur le soin d'identifier si la somme ou le produit est effectué dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R}$ de même les relations d'ordre seront notées indifféremment $\leq$.

(i)

1. <u>On montre $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow |\gamma(q)|_{\mathbb{R}} = \gamma(|q|)$</u>

— Si $q \geq 0$ alors $|q| = q$ et la croissance de γ montre que $\gamma(q) \geq p(0^s)$, par suite

$$|\gamma(q)|_{\mathbb{R}} = \gamma(q) = \gamma(|q|)$$

— Si $q \leq 0$ alors $|q| = -q$ et la croissance de γ montre que $\gamma(q) \leq p(0^s)$, par suite, puisque γ est un morphisme

$$|\gamma(q)|_{\mathbb{R}} = -\gamma(q) = \gamma(-q) = \gamma(|q|)$$

2. On montre $x \in \mathtt{C}(\mathcal{N}\ ,\mathbb{Q}) \Rightarrow \lambda \in \mathtt{C}(\mathcal{N},\mathbb{R})$

Soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ d'après le lemme [10.9] page 646 il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\gamma(\varepsilon) \leq \eta$, puisque x est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathcal{N}$ tel que

$$p \geq n(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \varepsilon$$

— puisque $\gamma(|x_p - x_q|) = |\gamma(x_p - x_q)|_{\mathbb{R}}$ et γ est croissante

$$p \geq n(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\gamma(x_p - x_q)|_{\mathbb{R}} \leq \gamma(\varepsilon) \leq \eta$$

— puisque γ est un morphisme $\gamma(x_p - x_q) = \gamma(x_p) - \gamma(x_q) = \lambda_p - \lambda_q$ par suite

$$p \geq n(\varepsilon) \quad \text{et} \quad q \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\lambda_p - \lambda_q|_{\mathbb{R}} \leq \eta$$

3. On montre $x \notin \mathtt{C}(\mathcal{N},\mathbb{Q}) \Rightarrow \lambda \notin \mathtt{C}(\mathcal{N},\mathbb{R})$

Dire que $x \notin \mathtt{C}(\mathcal{N},\mathbb{Q})$, c'est dire qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ vérifiant la propriété que pour tout $n \in \mathcal{N}$ il existe $p \geq n$ et $q \geq n$ tel que

$$|x_p - x_q| \geq \varepsilon$$

puisque γ est un morphisme strictement croissant vérifiant $\gamma(|x_p - x_q|) = |\lambda_p - \lambda_q|_{\mathbb{R}}$ on obtient

$$|\lambda_p - \lambda_q|_{\mathbb{R}} \geq \gamma(\varepsilon) > p(0^s) \quad \text{et} \quad \lambda \notin \mathtt{C}(\mathcal{N},\mathbb{R})$$

(ii)

Puisque $\mathbb{R}$ est un corps archimédien de sous-ensemble d'entiers naturels $\gamma(\mathbb{N})$ et γ est un morphisme $\gamma(\mathbb{Q})$ est le corps d'entiers rationnels de $\mathbb{R}$, ainsi (ii) suit du lemme [10.4] page 614 , on en remet quand même une couche. On remarque d'abord que, puisque γ est un morphisme de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ on a $\gamma(\dfrac{p}{q}) = \dfrac{\gamma(p)}{\gamma(q)}$. Si $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vérifie $p(0^s) \leq s < t$ d'après le lemme [10.9] page 646 l'ensemble

$$U = \{n \in \mathbb{N}^* / \gamma(n)(t-s) > p(1^s)\}$$

est non vide. Comme ensemble d'entiers naturels de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ est bien ordonné pour l'ordre $O(\mathbb{N}) = O \cap (\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ et U posséde un plus petit élément pour cet ordre

$$k = \min_{O(\mathbb{N})}\{n : n \in U\}$$

l'inégalité $t - s > \dfrac{p(1^s)}{\gamma(k)}$ s'écrit , puisque $\gamma(\dfrac{1}{k}) = \dfrac{p(1^s)}{\gamma(k)}$

$$s + \gamma(\frac{1}{k}) < t\ .$$

De même l'ensemble

$$V = \{n \in \mathbb{N}^* / \gamma(n) > \gamma(k)s\}$$

est non vide et si

$$l = \min_{O(\mathbb{N})}\{n : n \in V\}$$

les inégalités $\gamma(l) > \gamma(k)s$ et $\gamma(l-1) \leq \gamma(k)s$ s'écrivent

$$\gamma(\frac{l-1}{k}) \leq s < \gamma(\frac{l}{k})$$

Ainsi, puisque $\gamma(\frac{l}{k}) = \gamma(\frac{l-1}{k}) + \gamma(\frac{1}{k})$ on a $\gamma(\frac{l}{k}) \leq s + \gamma(\frac{1}{k})$ et

$$s < \gamma(\frac{l}{k}) \leq s + \gamma(\frac{1}{k}) < t$$

et $\gamma(\frac{l}{k}) \in]s, t[$

(iii)

D'après le lemme [10.9] page 646 ($\mathbb{R}$, $+_q$, $\centerdot$, $\mathcal{O}$) est archimédien , il suffit donc de vérifier la complétude. On montre d'abord que toute suite suite de Cauchy $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ est convergente . On pose $\eta_n = \gamma(\frac{1}{2^n})$ si $\tau \in \mathtt{C}(\mathbb{Q})$ d'après (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$U_n = \{q \in \mathbb{Q}/\ \gamma(q) \in]\tau_n - \eta_n, \tau_n + \eta_n[\ \}$$

est non vide. Si h est une fonction de choix de $\mathbb{Q}$ (voir axiome [2.1] page 48) on montre que la suite $x_n = h(U_n)$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ tel que $\gamma(x_n)$ converge dans $\mathbb{R}$, on vérifie alors que τ converge dans $\mathbb{R}$ vers la limite de $n \mapsto \gamma(x_n)$.

1. On montre que la suite λ définie par $\lambda_n = \gamma(x_n)$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$

   En effet, par définition d'une fonction de choix pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in U_n$ autrement dit on a $\gamma(x_n) \in]\tau_n - \eta_n, \tau_n + \eta_n[$ et

   $$|\gamma(x_n) - \tau_n|_{\mathbb{R}} < \eta_n$$

   l'inégalité

   $$|\gamma(x_p) - \gamma(x_q)|_{\mathbb{R}} \leq |\gamma(x_p) - \tau_p|_{\mathbb{R}} + |+|\tau_p - \tau_q|_{\mathbb{R}} + |\gamma(x_q) - \tau_q|_{\mathbb{R}}$$

   entraîne donc

   $$|\lambda_p - \lambda_q|_{\mathbb{R}} \leq \eta_p + \eta_q + |\tau_p - \tau_q|_{\mathbb{R}} \tag{10.44}$$

   par suite pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ on a
   — puisque $n \mapsto \eta_n$ tend vers $p(0^s)$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

   $$n \geq n_0 \Rightarrow \eta_n \leq \frac{\rho}{4}$$

   — puisque τ est une suite de Cauchy il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

   $$p \geq n_1 \quad \text{et} \quad q \geq n_1 \Rightarrow |\tau_p - \tau_q|_{\mathbb{R}} \leq \frac{\rho}{2}$$

   Ainsi l'inégalité (10.44) page 654 entraîne :

   $$p \geq \max\{n_0, n_1\} \quad \text{et} \quad q \geq \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow |\lambda_p - \lambda_q|_{\mathbb{R}} \leq \rho$$

   et λ est donc une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$.

2. On montre que la suite λ définie par $\lambda_n = \gamma(x_n)$ converge dans $\mathbb{R}$

   En effet, puisque λ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ le point (i) permet d'affirmer que x est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$, le lemme [10.9] page 646 montre alors que la suite λ converge dans $\mathbb{R}$ vers $p(x)$.

3. <u>On montre que τ converge dans $\mathbb{R}$</u>

En effet, par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|\tau_n - \lambda_n|_{\mathbb{R}} < \eta_n$, si on note l la limite de la suite λ on a donc , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\tau_n - l|_{\mathbb{R}} \leq |\tau_n - \lambda_n|_{\mathbb{R}} + |\lambda_n - l|_{\mathbb{R}} \leq \eta_n + |\lambda_n - l|_{\mathbb{R}} \tag{10.45}$$

Par suite si $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ alors

— puisque η tend vers $p(0^s)$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \eta_n \leq \frac{\rho}{2}$$

— puisque λ tend vers l il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |\lambda_n - l|_{\mathbb{R}} \leq \frac{\rho}{2}$$

et l'inégalité (10.45) page 655 montre que

$$n \geq \max\{n_0 \ , n_1\} \Rightarrow |\tau_n - l|_{\mathbb{R}} \leq \rho$$

et τ converge vers l.

Cela permet de montrer que pour tout ensemble d'entiers naturels $(\mathcal{N} \ , O_0)$ toute suite de Cauchy de $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{R}$ est convergente. En effet, si $\rho \in \mathtt{C}(\mathcal{N}, \mathbb{R})$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{R}$ et g est l'unique bijection croissante de $(\mathbb{N}, O \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ dans $(\mathcal{N} \ , O_0)$ alors la suite τ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\tau_n = \rho_{g(n)}$$

est une suite de Cauchy . En effet si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_0 \in \mathcal{N}$ vérifie

$$p \geq n_0 \quad \text{et} \quad q \geq n_0 \Rightarrow |\rho_p - \rho_q|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon$$

la croissance de g montre alors que

$$p \geq g^{-1}(n_0) \quad \text{et} \quad q \geq g^{-1}(n_0) \Rightarrow g(p) \geq n_0 \quad \text{et} \quad g(q) \geq n_0 \Rightarrow |\tau_p - \tau_q|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon$$

Ainsi, d'après ce qu'on vient de voir τ est convergente, on montre que si l est la limite de τ alors l est la limite de ρ. En effet, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifie

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\tau_n - l|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon$$

alors d'après la croissance de g^{-1} on obtient

$$n \geq g(n_0) \Rightarrow g^{-1}(n) \geq n_0 \Rightarrow |\tau_{g^{-1}(n)} - l|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon$$

et l'égalité $\tau_{g^{-1}(n)} = \rho_n$ montre que ρ tend vers l. ■

Le lemme [10.10] page 652 permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 10.3 *Le complété de tout corps d'entiers rationnels est un corps de réels .*

On rappelle de plus que d'après le lemme [10.7] page 631 « à isomorphisme près » il n'existe qu'un corps de réels. Un langage utile a été dévelloppé autours de certaines familles de sous-ensembles de corps de réels.

10.4 *Familles utiles de sous-ensembles d'un corps de réels*

10.4.1 *Convexes et intervalles des corps de réels*

I *définition*

Dans le champs sémantique lié à la description des réels la notion d'intervalle est centrale.

Définition 10.12 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps de réels, un sous-ensemble* I *de* $\mathbb{R}$ *est dit* ***convexe*** *si* I *est est un ensemble non vide qui vérifie :*

$$[\ 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \text{et} \quad (x, y) \in I \times I\ ] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in I$$

La compatibilité des lois et de l'ordre montre que pour $(a, b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ vérifiant $a < b$ les ensembles suivants sont convexes :
- $\mathbb{R}$
- $\{a\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$
- $]a, \rightarrow [= \{x \in \mathbb{R}/a < x\}$
- $[a, \rightarrow [= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x\}$
- $] \leftarrow, b[= \{x \in \mathbb{R}/x < b\}$
- $] \leftarrow, b] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq b\}$

Le lemme suivant montre que cette liste décrit tout les convexes de $\mathbb{R}$

Lemme 10.11 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps de réels et* I *un convexe de* $\mathbb{R}$

(i) Si I *est borné non réduit à un point alors* I *posséde une borne inférieure et une borne supérieure*

$$m(I) = \inf\{x : x \in I\} \quad \text{et} \quad M(I) = \sup\{x : x \in I\}$$

qui vérifient

$$]m(I), M(I)[\subset I \subset [m(I), M(I)] \tag{10.46}$$

en particulier

1. *si* $m(I) \in I$ *et* $M(I) \notin I$ *alors*
$$I = [m(I), M(I)[$$
2. *si* $m(I) \notin I$ *et* $M(I) \in I$ *alors*
$$I =]m(I), M(I)]$$
3. *si* $m(I) \in I$ *et* $M(I) \in I$ *alors*
$$I = [m(I), M(I)]$$
4. *si* $m(I) \notin I$ *et* $M(I) \notin I$ *alors*
$$I =]m(I), M(I)[$$

(ii) Si I *est minoré et n'est pas majoré alors* I *posséde une borne inférieure*

$$m(I) = \inf\{x : x \in I\}$$

qui vérifie

$$]m(I), \rightarrow [\subset I \subset [m(I), \rightarrow [$$

en particulier

1. si $m(I) \in I$ alors

$$I = [m(I), \to [$$

2. si $m(I) \notin I$ alors

$$I =]m(I), \to [$$

(iii) Si I est majoré et n'est pas minoré alors I posséde une borne supérieure

$$M(I) = \sup\{x : x \in I\}$$

qui vérifie

$$] \leftarrow, M(I)[\subset I \subset] \leftarrow, M(I)]$$

en particulier

1. si $M(I) \in I$ alors

$$I =] \leftarrow, M(I)]$$

2. si $M(I) \notin I$ alors

$$I =] \leftarrow, M(I)[$$

(iv) Si I n'est ni majoré ni minoré alors $I = \mathbb{R}$

(v) Pour qu'un sous-ensemble C de $\mathbb{R}$ soit convexe il faut et il suffit que

$$(x, y) \in C \times C \quad \text{et} \quad x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset C$$

(vi) Si I et J sont des sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$ et $I \cap J \neq \varnothing$ alors $I \cup J$ est convexe .

(vii) Tout convexe de $\mathbb{R}$ non réduit à un point est indénombrable.

Preuve

(i)

Par définition d'un corps de Dedekind I posséde une borne supérieure et le lemme [10.1] page 592 montre que I posséde une borne inférieure.

1 On montre $]m(I), M(I)[\subset I$

Si $m(I) < x < M(I)$ alors
- puisque $m(I)$ est le plus grand minorant de I, x n'est pas un minorant de I par suite il existe $y_0 \in I$ tel que $y_0 < x$
- puisque $M(I)$ est le plus petit majorant de I, x n'est pas un majorant de I par suite il existe $y_1 \in I$ tel que $x < y_1$

si $\lambda = \dfrac{x - y_0}{y_1 - y_0}$ l'égalité

$$x = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_0$$

et la convexité de I montrent que $x \in I$.

2 On montre $I \subset [m(I), M(I)]$

Cela provient du fait que $m(I)$ est un minorant de I et $M(I)$ est un majorant de I .

(ii)

Puisque ($\mathbb{R}$, $+$, $.$, O) est un corps de Dedekind le lemme [10.1] page 592 montre que I posséde une borne inférieure.

1 On montre $]m(I), \to [\subset I$

Si $x > m(I)$ alors

— puisque $m(I)$ est le plus grand minorant de I, x n'est pas un minorant de I par suite il existe $y_0 \in I$ tel que $y_0 < x$

— puisque I n'est pas majoré , x n'est pas un majorant de I par suite il existe $y_1 \in I$ tel que $x < y_1$

si $\lambda = \dfrac{x - y_0}{y_1 - y_0}$ l'égalité

$$x = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_0$$

et la convexité de I montrent que $x \in I$.

2 On montre $I \subset [m(I), \rightarrow [$

Cela provient du fait que $m(I)$ est un minorant de I .

(iii)

Puisque ($\mathbb{R}$, + , . , O) est un corps de Dedekind I posséde une borne supérieure

1 On montre $] \leftarrow, M(I)[\subset I$

Si $x < M(I)$ alors

— puisque $M(I)$ est le plus petit majorant de I, x n'est pas un majorant de I par suite il existe $y_1 \in I$ tel que $x < y_1$

— puisque I n'est pas minoré , x n'est pas un minorant de I par suite il existe $y_0 \in I$ tel que $y_0 < x$

si $\lambda = \dfrac{x - y_0}{y_1 - y_0}$ l'égalité

$$x = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_0$$

et la convexité de I montrent que $x \in I$.

2 On montre $I \subset] \leftarrow, M(I)]$

Cela provient du fait que $M(I)$ est un majorant de I .

(iv)

Si $x \in \mathbb{R}$ alors x n'est ni un majorant ni un minorant de I, ainsi il existe $(y_0, y_1) \in I \times I$ tel que $y_0 < x < y_1$. Si $\lambda = \dfrac{x - y_0}{y_1 - y_0}$ l'égalité

$$x = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_0$$

et la convexité de I montrent que $x \in I$.

(v)

1 Si C est convexe alors [$(x, y) \in C \times C$ et $x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset C$]

D'abord si $x = y$ alors $[x, y] = \{x\}$ on peut donc supposer $x < y$. Si $t \in [x, y]$ et $\lambda = \dfrac{t - x}{y - x}$ l'égalité

$$t = \lambda y + (1 - \lambda) x$$

et la convexité de C montrent que $t \in C$.

2 Si [$(x, y) \in C \times C$ et $x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset C$] alors C est convexe.

En effet, la compatibilité des lois et de l'ordre montre

— si $x \leq y$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$

$$x \leq \lambda x + (1 - \lambda) x \leq \lambda y + (1 - \lambda) x \leq \lambda y + (1 - \lambda) y \leq y$$

— si $y \leq x$ pour tout $\lambda \in [0,1]$

$$y \leq \lambda y + (1-\lambda)y \leq \lambda x + (1-\lambda)y \leq \lambda x + (1-\lambda)x \leq x$$

(vi)

On montre

$$(x,y) \in (I \cup J) \times (I \cup J) \quad \text{et} \quad x \leq y \Rightarrow [x,y] \subset I \cup J$$

1. si $(x,y) \in I \times I$ alors $[x,y] \subset I \subset I \cup J$
2. si $(x,y) \in J \times J$ alors $[x,y] \subset J \subset I \cup J$
3. si $(x,y) \in I \times J$ et $b \in I \cap J$ alors
   — si $x \leq b \leq y$ on a $[x,b] \subset I$ et $[b,y] \subset J$ par suite

   $$[x,y] = [x,b] \cup [b,y] \subset I \cup J$$

   — si $b \leq x \leq y$ on a $[x,y] \subset [b,y] \subset J \subset I \cup J$
   — si $x \leq y \leq b$ on a $[x,y] \subset [x,b] \subset I \subset I \cup J$
4. si $(x,y) \in J \times I$ et $b \in I \cap J$ alors une preuve similaire à celle de 3 montre

   $$[x,y] \subset I \cup J$$

(vii)

On montre d'abord que $]-1\ ,\ +1[$ est indénombrable. Puisque d'après le lemme [10.5] page 619 $\mathbb{R}$ est indénombrable il suffit de montrer qu'il existe une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,+1[$. Mais l'application f de $\mathbb{R}$ dans $]-1\ ,\ +1[$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

est une bijection dount l'inverse est l'application g de $]-1\ ,\ +1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{1-t} & si \quad t \in [0,1[\\ \dfrac{t}{1+t} & si \quad t \in]-1\ ,\ 0[\end{cases}$$

Cela permet de montrer que si $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $a < b$ alors $]a,b[$ est indénombrable puisque l'application φ de $]-1\ ,\ +1[$ dans $]a\ ,\ b[$ définie par $\varphi(x) = (\frac{b-a}{2})x + \frac{a+b}{2}$ est une bijection de $]-1\ ,\ +1[$ dans $]a\ ,\ b[$. Il suffit alors de montrer que tout convexe de $\mathbb{R}$ contient un ensemble du type $]a,b[$ or

1. Si I est borné le point (i) montre que $]m(I)\ ,\ M(I)\ [\subset I$
2. Si I est minoré non majoré le point (ii) montre que $]m(I)\ ,\ m(I)+1\ [\subset I$
3. Si I est majoré non minoré le point (iii) montre que $]M(I)-1\ ,\ M(I)\ [\ \subset I$
4. si I n'est ni majoré ni minoré alors $I = \mathbb{R}$ et $]-1\ ,\ +1[\subset I$.

■

Par tradition les convexes d'un corps de réels sont appelés les intervalles.

Définition 10.13 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps de réels et* I *un sous-ensemble convexe de* $\mathbb{R}$*,*

1. *On dit que* I *est un* ***intervalle fermé à gauche*** *si* I *est minoré et si sa borne inférieure*

   $$m(I) = \inf\{x : x \in I\}$$

   vérifie $m(I) \in I$

2. *On dit que I est un* ***intervalle fermé à droite*** *si I est majoré et si sa borne supérieure*

$$M(I) = \sup\{x : x \in I\}$$

vérifie $M(I) \in I$

3. *On dit que I est un* ***intervalle fermé*** *si I est un intervalle et vérifie l'une des propriétés suivantes :*

   (a) *I est fermé à droite et à gauche :*

$$I = [m(I)\ ,\ M(I)]$$

   (b) *I est fermé à gauche non majoré :*

$$I = [m(I)\ ,\ \rightarrow [$$

   (c) *I est fermé à droite non minoré :*

$$I =]\leftarrow\ , M(I)]$$

   (d) *$I = \mathbb{R}$*

4. *On dit que I est un* ***intervalle ouvert à gauche*** *si I est minoré et si sa borne inférieure*

$$m(I) = \inf\{x : x \in I\}$$

vérifie $m(I) \notin I$

5. *On dit que I est un* ***intervalle ouvert à droite*** *si I est majoré et si sa borne supérieure*

$$M(I) = \sup\{x : x \in I\}$$

vérifie $M(I) \notin I$

6. *On dit que I est un* ***intervalle ouvert*** *si I est un intervalle et vérifie l'une des propriétés suivantes :*

   (a) *I est ouvert à droite et à gauche :*

$$I =]m(I)\ ,\ M(I)[$$

   (b) *I est ouvert à gauche non majoré :*

$$I =]m(I)\ ,\ \rightarrow [$$

   (c) *I est ouvert à droite non minoré :*

$$I =]\leftarrow\ , M(I)[$$

   (d) *$I = \mathbb{R}$*

On utilisera les notations suivantes :

Notation 10.3 *Si $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ est un corps de réels on note $\mathcal{I}$ la famille des intervalles de $\mathbb{R}$, de plus*

- *$\mathcal{I}^o$ sera l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$*
- *$\mathcal{I}^f$ sera l'ensemble des intervalles fermés de $\mathbb{R}$*

Il est plus facile de travailler sur $\mathbb{R}$ si on a un peu de familiarité avec les familles de réunions d'intervalles.

10.4.2 *Les familles de réunions d'intervalles*

I *La famille des réunions finies d'intervalles*

On introduit quelques définitions

Définition 10.14 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps de réels ,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *une famille non vide de sous-ensembles de* $\mathbb{R}$

1. *On dit qu'un sous-ensemble* A *de* $\mathbb{R}$ *est* ***réunion finie*** *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *si* A *est non vide et s' il existe un ensemble d'entiers naturels* $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$*, un entier* $n \in \mathbb{N}$ *et une application*

$$F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F})$$

qui vérifient

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} F_k$$

On note $\mathcal{F}_s$ *la famille des réunions finies d'éléments de* $\mathcal{F}$ *:*

$$\mathcal{F}_s = \left\{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / \exists n \in \mathbb{N}\ \exists\ F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F}) : A = \bigcup_{k=0}^{n} F_k \right\}$$

2. *On dit que* $\mathcal{F}$ *est* ***stable par réunions finies*** *si toutes réunions finies d'éléments de* $\mathcal{F}$ *est un d'éléments de* $\mathcal{F}$ *:*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$$

3. *On dit qu'un sous-ensemble non vide* A *de* $\mathbb{R}$ *est* ***somme disjointe finie*** *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *si il existe un ensemble d'entiers naturels* $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$*, un entier* $n \in \mathbb{N}$ *et une application*

$$F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F})$$

qui vérifient

(a)

$$[\ (k, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n \quad \text{et} \quad k \neq j\ ] \Rightarrow F_k \cap F_j = \varnothing$$

(b)

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} F_k$$

4. *On dit qu'un sous-ensemble non vide* P *de* $\mathcal{F}$ *est une* ***partition finie*** *en éléments de* $\mathcal{F}$ *si*

(a) P *est fini et* $\varnothing \notin \mathrm{P}$

(b) si P *n'est pas un singleton,* P *est constitué de parties deux à deux disjointes :*

$$[\ (F, G) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P} \quad \text{et} \quad F \neq G] \Rightarrow F \cap G = \varnothing\ .$$

On note $\mathbf{P}_f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{F})$ *l'ensemble des partitions finies en éléments de* $\mathcal{F}$*.*

5. *Si* A *est un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *on dit que* $\mathrm{P} \in \mathbf{P}_f(\mathcal{F})$ *est une partition finie de* A *si*

$$A = \bigcup_{F \in \mathrm{P}} F\ .$$

On note

$$\mathfrak{a}(\mathcal{F}) = \left\{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / \exists\ \mathrm{P} \in \mathbf{P}_f(\mathcal{F}) : A = \bigcup_{F \in \mathrm{P}} F \right\}$$

Le lemme suivant est une application directe des définitions

Lemme 10.12 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps de réels ,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *une famille de sous-ensembles de* $\mathbb{R}$ *telle que* $\varnothing \notin \mathcal{F}$

(i) Pour que A *soit réunion finie d'éléments de* $\mathcal{F}$ *il faut et il suffit que* pour tout *ensemble d'entiers naturels* $(\mathbb{N}, O)$ *il existe un entier* $n \in \mathbb{N}$ *et une application* $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F})$ *qui vérifient*

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} F_k$$

(ii) Pour que A *soit somme disjointe finie d'éléments de* $\mathcal{F}$ *il faut et il suffit que* pour tout *ensemble d'entiers naturels* $(\mathbb{N}, O)$ *il existe un entier* $n \in \mathbb{N}$ *et une application* $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F})$ *qui vérifient les propriétés 1 et 2 suivantes*

1. $$k \neq j \Rightarrow F_k \cap F_j = \varnothing$$

2. $$A = \bigcup_{k=0}^{n} F_k$$

(iii) Pour que A *soit somme disjointe finie d'éléments de* $\mathcal{F}$ *il faut et il suffit qu'il existe un sous-ensemble non vide fini* P *de* $\mathcal{F}$ *qui vérifie les propriétés 1 et 2 suivantes*

1. $$(F, G) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P} \quad \text{et} \quad F \neq G \Rightarrow F \cap G = \varnothing$$

2. $$A = \bigcup_{F \in \mathrm{P}} F\ .$$

En particulier $\mathfrak{a}(\mathcal{F})$ *est la famille des sommes disjointes finies d'éléments de* $\mathcal{F}$*.*

(iv) Si $\mathcal{F}$ *posséde la propriété suivante :*

$$[\ (A, B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \quad \text{et} \quad A \cap B \neq \varnothing\ ] \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

alors

$$[\ (A, B) \in \mathfrak{a}(\mathcal{F}) \times \mathfrak{a}(\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad A \cap B \neq \varnothing\ ] \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{a}(\mathcal{F})$$

(v) Si $\mathcal{F}$ *posséde les propriétés suivantes :*

$$[\ (A, B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \quad \text{et} \quad A \cap B \neq \varnothing\ ] \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

et

$$A \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad A^c \neq \varnothing \Rightarrow A^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{F})$$

alors $\mathfrak{a}(\mathcal{F})$ *est stable par complémentation :*

$$A \in \mathfrak{a}(\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad A^c \neq \varnothing \Rightarrow A^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{F})\ .$$

(vi) Pour que $\mathcal{F}$ *soit stable par réunions finies il faut et il suffit que*

$$(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}\ .$$

(vii) La famille $\mathcal{F}_s$ *est stable par réunions finies.*

(viii) Si $\mathcal{I}$ *est la famille des intervalles de* $\mathbb{R}$ *alors*

1. *Pour tout* $(I, J) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ *tel que* $I \cap J \neq \varnothing$ $I \cap J$ *est un intervalle.*

2. Pour tout $(I, J) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ tel que $I \cap J^c \neq \varnothing$ $I \cap J^c$ est somme disjointe finie d'éléments de $\mathcal{I}$

3. $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ est stable par intersections finies :

$$(A, B) \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \times \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \quad \text{et} \quad A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \ .$$

4. $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ est stable par complémentation :

$$A \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \quad \text{et} \quad A \neq \mathbb{R} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \ .$$

5. $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ est stable par réunions finies : $\mathfrak{a}(\mathcal{I})_s = \mathfrak{a}(\mathcal{I})$.

6. Tout élément de $\mathcal{I}_s$ est somme disjointe finie d'éléments de $\mathcal{I}$.

(ix) La famille $\mathfrak{B}(\mathcal{I}) = \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \cup \{\varnothing\}$ constituée des sommes disjointes finies d'intervalles auxquelles on a rajouté l'ensemble vide est un anneau de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ([1]) , cela signifie que $\mathfrak{B}(\mathcal{I})$ possède les propriétés suivantes :

1. $\varnothing \in \mathfrak{B}(\mathcal{I})$ et $\mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathcal{I})$

2. $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{I}) \Rightarrow A^c \in \mathfrak{B}(\mathcal{I})$

3. $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathcal{I}) \times \mathfrak{B}(\mathcal{I}) \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{B}(\mathcal{I})$

4. $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathcal{I}) \times \mathfrak{B}(\mathcal{I}) \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{B}(\mathcal{I})$.

Preuve

(i)

On note $(\mathbb{N}\ , O)$ un ensemble d'entiers naturels , si A est réunion finie d'éléments de $\mathcal{F}$, il existe par définition un ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}'\ ,\ O'\ )$, un élément $p \in \mathbb{N}'$ et une application

$$F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}'_p, \mathcal{F})$$

vérifiant

$$A = \bigcup_{k=0}^{p} F_k \ . \tag{10.47}$$

Le théorème [5.1] page 90 montre qu'il existe une unique bijection croissante g de $(\mathbb{N}\ ,\ O\ )$ dans $(\mathbb{N}',\ O')$, on si $n = g^{-1}(p)$ la croissance de g montre que $g(\mathbb{N}_n) \subset \mathbb{N}'_p$, ainsi, puisque $\mathrm{dom}(F) = \mathbb{N}'_p$, l'application $G = F \circ g$ est définie sur $\mathbb{N}_n$ et $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F})$ vérifie

$$G_l = F_{g(l)} \ .$$

On montre que

$$A = \bigcup_{l=0}^{n} G_l \ .$$

1. D'abord on montre $A \subset \bigcup_{l=0}^{n} G_l$.

   Si $x \in A$ alors (10.47) page 663 montre qu'il existe $k \in \mathbb{N}'_p$ tel que $x \in F_k$, si $l = g^{-1}(k)$ alors $l \in \mathbb{N}_n$ et $x \in G_l$

2. Ensuite on montre $\bigcup_{l=0}^{n} G_l \subset A$.

   Si $x \in \bigcup_{l=0}^{n} G_l$ alors il existe $l \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in G_l$ ainsi $g(l) \leq p$ et $x \in F_{g(l)}$

1. Le produit est l'intersection , la somme est la différence symétrique

(ii)

On note $(\mathbb{N}\ , O)$ un ensemble d'entiers naturels, si A est somme disjointe finie d'éléments de $\mathcal{F}$, il existe par définition un ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}'\ ,\ O'\ )$, un élément $p \in \mathbb{N}'$ et une application

$$F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}'_p, \mathcal{F})$$

vérifiant

$$A = \bigcup_{k=0}^{p} F_k \ . \tag{10.48}$$

et

$$k \neq q \Rightarrow F_k \cap F_q = \varnothing \tag{10.49}$$

Le théorème [5.1] page 90 montre qu'il existe une unique bijection croissante g de $(\mathbb{N}\ ,\ O\ )$ dans $(\mathbb{N}',\ O')$, si $n = g^{-1}(p)$ la croissance de g montre que $g(\mathbb{N}_n) \subset \mathbb{N}'_p$ ainsi, puisque $\mathrm{dom}(F) = \mathbb{N}'_p$, l'application $G = F \circ g$ est définie sur $\mathbb{N}_n$ et $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F})$ vérifie

$$G_l = F_{g(l)}\ .$$

On montre que

$$A = \bigcup_{l=0}^{n} G_l \quad \text{et} \quad [\ l \neq j \Rightarrow G_l \cap G_j = \varnothing.]$$

1. D'abord on montre $A \subset \bigcup_{l=0}^{n} G_l$.
   Si $x \in A$ alors (10.48) page 664 montre qu'il existe $k \in \mathbb{N}'_p$ tel que $x \in F_k$, si $l = g^{-1}(k)$ alors $l \in \mathbb{N}_n$ et $x \in G_l$
2. Ensuite on montre $\bigcup_{l=0}^{n} G_l \subset A$.

   Si $x \in \bigcup_{l=0}^{n} G_l$ alors il existe $l \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in G_l$ ainsi $g(l) \leq p$ et $x \in F_{g(l)}$
3. Enfin on montre $l \neq j \Rightarrow G_l \cap G_j = \varnothing$
   Puisque g est injective on a $l \neq j \Rightarrow g(l) \neq g(j)$ ainsi (10.49) page 664 montre :

$$l \neq j \Rightarrow g(l) \neq g(j) \Rightarrow F_{g(l)} \cap F_{g(j)} = \varnothing \Rightarrow G_l \cap G_j = \varnothing\ .$$

(iii)

1 On montre que si A est somme disjointe finie d'éléments de $\mathcal{F}$ alors $A \in \mathfrak{a}(\mathcal{F})$

On note $(\mathbb{N}\ , O)$ un ensemble d'entiers naturels, si A est somme disjointe finie d'éléments de $\mathcal{F}$, il existe par (ii) un entier $n \in \mathbb{N}$ et une application $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F})$ vérifiant

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} \Phi_k \quad \text{et} \quad k \neq j \Rightarrow \Phi_k \cap \Phi_j = \varnothing$$

On pose $\mathrm{P} = \Phi(\mathbb{N}_n) = \{F \in \mathcal{F} / \exists\ k \in \mathbb{N}_n : F = \Phi_k\}$ et on montre que P vérifie les propriétés énoncées en (iii).

1. Puisque P est l'image d'un ensemble fini par une application le théorème [6.3] page 128 montre que P est fini .

2. On montre que Φ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans P. En effet puisque $\varnothing \notin \mathcal{F}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ on a $\Phi_k \neq \varnothing$ ainsi l'assertion
$$k \neq j \Rightarrow \Phi_k \cap \Phi_j = \varnothing$$
montre
$$k \neq j \Rightarrow \Phi_k \neq \Phi_j \ .$$
par suite Φ est injective et puisque P est l'image de $\mathbb{N}_n$ par Φ, Φ est une bijection.
3. On montre $A \subset \bigcup_{F \in \mathrm{P}} F$. En effet, si $x \in A$ il existe par définition de Φ un entier $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in \Phi_k$ ainsi il existe $F \in \mathrm{P}$ tel que $x \in F$, par suite $x \in \bigcup_{F \in \mathrm{P}} F$
4. On montre $\bigcup_{F \in \mathrm{P}} F \subset A$. En effet, si $x \in \bigcup_{F \in \mathrm{P}} F$ il existe $F \in \mathrm{P}$ tel que $x \in F$ par suite il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in \Phi_k$ et par construction $\Phi_k \subset A$
5. On montre
$$[\ (F, G) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P} \quad \text{et} \quad F \neq G\ ] \Rightarrow F \cap G = \varnothing \ .$$
Si $(F, G) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}$ il existe $(k, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ tel que $F = \Phi_k$ et $G = \Phi_j$, puisque $F \neq G$ on a $k \neq j$ par suite $F \cap G = \Phi_k \cap \Phi_j = \varnothing$.

2 On montre que si $A \in \mathfrak{a}(\mathcal{F})$ alors A est somme disjointe finie d'éléments de $\mathcal{F}$.

Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{P}_f(\mathcal{F})$ une partition finie de A
- puisque P est un ensemble fini non vide le théorème [6.3] page 128 montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection Φ de $\mathbb{N}_n$ dans P
- puisque P est constitué d'ensemble deux à deux disjoints et Φ est injective on a
$$k \neq j \Rightarrow \Phi_k \neq \Phi_j \Rightarrow \Phi_k \cap \Phi_j = \varnothing \ .$$
- puisque P est une partition de A et Φ est bijective on a
$$A = \bigcup_{F \in \mathrm{P}} F = \bigcup_{k=0}^{n} \Phi_k \ .$$

(iv)

Si $(A, B) \in \mathfrak{a}(\mathcal{F}) \times \mathfrak{a}(\mathcal{F})$ vérifie $A \cap B \neq \varnothing$, il existe un couple $(\mathrm{P}_0\ ,\ \mathrm{P}_1)$ de partitions finies d'éléments de $\mathcal{F}$ tel que
$$A = \bigcup_{F \in \mathrm{P}_0} F \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{G \in \mathrm{P}_1} G$$
Puisque $A \cap B \neq \varnothing$ l'ensemble
$$\Delta = \{(F, G) \in \mathrm{P}_0 \times \mathrm{P}_1 / F \cap G \neq \varnothing\}$$
est non vide. Si φ est l'application de Δ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par
$$\varphi(F, G) = F \cap G$$
L'hypothèse de (iv) montre que l'ensemble $\mathrm{P} = \mathrm{im}(\varphi) = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / \exists\ (F, G) \in \Delta : U = \varphi(F, G)\}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}$. On montre que P est une partition finie de $A \cap B$.
1. On montre que P est fini.
On remarque d'abord que puisque P_0 et P_1 sont finis l'ensemble $\mathrm{P}_0 \times \mathrm{P}_1$ est fini (voir par exemple le lemme [6.2] page 136). Puisque Δ est un sous-ensemble de $\mathrm{P}_0 \times \mathrm{P}_1$ l'ensemble Δ est fini (voir théorème[6.3] page 128), ainsi P est fini comme image d'un ensemble fini par une application (encore le théorème [6.3])

2. On montre que P est une partition.

   Si $(U, V) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}$ et $U \neq V$ il existe $(F, G) \in \Delta$ et $(H, K) \in \Delta$ tel que $U = F \cap G$ et $V = H \cap K$. Puisque $U \neq V$ on a $F \neq H$ ou $G \neq K$
   — Si $F \neq H$ alors puisque P_0 est une partition on a $F \cap H = \varnothing$ et l'inclusion $U \cap V \subset F \cap H$ montre que $U \cap V = \varnothing$.
   — Si $G \neq K$ alors puisque P_1 est une partition on a $G \cap K = \varnothing$ et l'inclusion $U \cap V \subset G \cap K$ montre que $U \cap V = \varnothing$.

3. On montre $A \cap B = \bigcup_{H \in \mathrm{P}} H$

   (a) D'abord On montre $A \cap B \subset \bigcup_{H \in \mathrm{P}} H$

   Si $x \in A \cap B$ alors $x \in A$ et $x \in B$ par suite il existe $F \in \mathrm{P}_0$ et $G \in \mathrm{P}_1$ tel que $x \in F \cap G$ ainsi $F \cap G \neq \varnothing$ et par définition $F \cap G \in \mathrm{P}$

   (b) Ensuite On montre $\bigcup_{H \in \mathrm{P}} H \subset A \cap B$

   Si $x \in \bigcup_{H \in \mathrm{P}} H$ alors il existe $H \in \mathrm{P}$ tel que $x \in H$ par suite il existe $F \in \mathrm{P}_0$ et $G \in \mathrm{P}_1$ tel que $x \in F \cap G$, or $F \subset A$ et $G \subset B$.

(v)

On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels, si $A \neq \mathbb{R}$ est somme disjointe finie d'éléments de $\mathcal{F}$ il existe d'après (ii) un entier $n \in \mathbb{N}$ et une application $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F})$ tel que

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} F_k \quad \text{et} \quad k \neq j \Rightarrow F_k \cap F_j = \varnothing \ .$$

Ainsi $A^c = \bigcap_{k=0}^{n} F_k^c$, on pose

$$U = \left\{ k \in \mathbb{N}_n / \bigcap_{j=0}^{k} F_j^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{F}) \right\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de vérifier

1. $0 \in U$
2. $[\ k \in U \quad \text{et} \quad k < n\ ] \Rightarrow k + 1 \in U$

or

1. Puisque par hypothèse $F_0^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{F})$ on a $0 \in U$
2. Si $k \in U$ et $k < n$ alors $\bigcap_{j=0}^{k} F_j^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{F})$ et puisque par hypothèse $F_{k+1}^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{F})$

$$\bigcap_{j=0}^{k+1} F_j^c = \bigcap_{j=0}^{k} F_j^c \cap F_{k+1}^c$$

   est l'intersection de deux éléments de $\mathfrak{a}(\mathcal{F})$ et (iv) montre alors que $k + 1 \in U$

Par suite $U = \mathbb{N}_n$ et $A^c = \bigcap_{j=0}^{n} F_j^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{F})$.

(vi)

On note $(\mathbb{N}\ ,\ O)$ un ensemble d'entiers naturels. Si $A \in \mathcal{F}_s$ il existe d'après (i) un entier $n \in \mathbb{N}$ et une application $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F})$ tels que

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} F_k\ ,$$

on pose

$$U = \left\{ k \in \mathbb{N}_n / \bigcup_{j=0}^{k} F_j \in \mathcal{F} \right\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de vérifier

1. $0 \in U$
2. $[\ k \in U \quad \text{et} \quad k < n\ ] \Rightarrow k+1 \in U$

Or

1. L'assertion $0 \in U$ provient du fait que $F_0 \in \mathcal{F}$
2. Si $k \in U$ et $k < n$ alors :
   — puisque $k \in U$ l'ensemble
   $$F = \bigcup_{j=0}^{k} F_j$$
   est un élément de $\mathcal{F}$
   — puisque
   $$\bigcup_{j=0}^{k+1} F_j = F \cup F_{k+1}$$
   et $F_{k+1} \in \mathcal{F}$ l'hypothèse de (vi) montre que $k+1 \in U$.

Ainsi, sous l'hypothèse (vi), tout élément de $\mathcal{F}_s$ est un élément de $\mathcal{F}$

(vii)

D'après (vi) il suffit de montrer

$$(A, B) \in \mathcal{F}_s \times \mathcal{F}_s \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}_s\ .$$

On note $(\mathbb{N}\ ,\ O)$ un ensemble d'entiers naturels. Si $(A, B) \in \mathcal{F}_s \times \mathcal{F}_s$ il existe d'après (i) un couple d'entiers $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et un couple d'applications $(F, G) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_p, \mathcal{F})$ tel que

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} F_k \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{j=0}^{p} G_j$$

On considère l'application H de $\mathbb{N}_{n+p+1}$ dans $\mathcal{F}$ définie par

$$H_l = \begin{cases} F_l & si \quad l \leq n \\ G_{l-(n+1)} & si \quad n+1 \leq l \leq n+p+1 \end{cases}$$

et on montre que $A \cup B = \displaystyle\bigcup_{l=0}^{n+p+1} H_l$

1. D'abord on montre $A \cup B \subset \displaystyle\bigcup_{l=0}^{n+p+1} H_l$.
   Si $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$
   — si $x \in A$ il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in F_k$ par suite $x \in H_k$

— si $x \in B$ il existe $j \in \mathbb{N}_p$ tel que $x \in G_j$ par suite $x \in H_{j+n+1}$

2. Ensuite on montre que $\displaystyle\bigcup_{l=0}^{n+p+1} H_l \subset A \cup B$.

Si $x \in \displaystyle\bigcup_{l=0}^{n+p+1} H_l$ il existe $l \in \mathbb{N}_{n+p+1}$ tel que $x \in H_l$

— si $l \leq n$ alors $x \in F_l$ par suite $x \in A$ et $x \in A \cup B$

— si $n+1 \leq l \leq n+p+1$ alors $x \in G_{l-(n+1)}$ par suite $x \in B$ et $x \in A \cup B$

(viii)

1. Si $(I,J) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ et $I \cap J \neq \varnothing$ alors $I \cap J \in \mathcal{I}$

Soit $(I,J) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ tel que $I \cap J \neq \varnothing$, d'après le lemme [10.11] page 656 il suffit de montrer

$$(x,y) \in (I \cap J) \times (I \cap J) \quad \text{et} \quad x \leq y \Rightarrow [x,y] \subset I \cap J\ .$$

Or :

— si $(x,y) \in (I \cap J) \times (I \cap J)$ et $x \leq y$ alors $(x,y) \in I \times I$ et $x \leq y$ ainsi le lemme [10.11] page 656 entraîne $[x,y] \subset I$

— si $(x,y) \in (I \cap J) \times (I \cap J)$ et $x \leq y$ alors $(x,y) \in J \times J$ et $x \leq y$ ainsi le lemme [10.11] page 656 entraîne $[x,y] \subset J$

2. si$(I,J) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ et $I \cap J^c \neq \varnothing$ alors $I \cap J^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$

On montre d'abord que si $J \neq \mathbb{R}$ alors J^c est somme disjointe d'au plus deux éléments de $\mathcal{I}$. Puisque $J \neq \mathbb{R}$ le lemme [10.11] page 656 montre que J est majoré ou minoré.

(a) Si J est borné alors le lemme [10.11] page 656 montre que J a l'une des formes suivantes
   — $J = [m(J)\ ,\ M(J)]$ alors $J^c =]\leftarrow\ m(J)[\cup]M(J)\ ,\ \rightarrow[$
   — $J = [m(J)\ ,\ M(J)[$ alors $J^c =]\leftarrow\ m(J)[\cup[M(J)\ ,\ \rightarrow[$
   — $J =]m(J)\ ,\ M(J)]$ alors $J^c =]\leftarrow\ m(J)]\cup]M(J)\ ,\ \rightarrow[$
   — $J =]m(J)\ ,\ M(J)[$ alors $J^c =]\leftarrow\ m(J)]\cup]M(J)\ ,\ \rightarrow[$

(b) Si J est minoré et non majoré alors le lemme [10.11] page 656 montre que J a l'une des formes suivantes
   — $J = [m(J)\ , \rightarrow[$ alors $J^c =]\leftarrow\ ,\ m(J)[$
   — $J =]m(J)\ , \rightarrow[$ alors $J^c =]\leftarrow\ ,\ m(J)]$

(c) Si J est majoré et non minoré alors le lemme [10.11] page 656 montre que J a l'une des formes suivantes
   — $J =]\leftarrow, M(J)[$ alors $J^c = [M(J)\ ,\ \rightarrow[$
   — $J =]\leftarrow\ ,\ M(J)]$ alors $J^c =]M(J)\ ,\ \rightarrow[$

Ainsi pour tout $J \in \mathcal{I}$ vérifiant $J \neq \mathbb{R}$ J^c est soit un intervalle soit une somme disjointe de deux intervalles, le point (*1*) montre alors que si $I \in \mathcal{I}$ vérifie $I \cap J^c \neq \varnothing$ alors $I \cap J^c$ est soit un intervalle (si J^c est un intervalle ou si J^c est une somme disjointe de deux intervalles telle que l'intersection de I et de l'un de ces intervalles est vide) soit une somme disjointe de deux intervalles (si J^c est une somme disjointe de deux intervalles dont l'intersection avec I est non vide).

3. $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ est stable par intersections finies

C'est une conséquence directe de (*iv*) et (*1*)

4. $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ est stable par complémentation

C'est une conséquence directe de (*v*) et (*2*)

5. $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ est stable par réunions finies

Si $(A,B) \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \times \mathfrak{a}(\mathcal{I})$ alors si $A = \mathbb{R}$ ou $B = \mathbb{R}$ $A \cup B = \mathbb{R}$ on peut donc supposer $A \neq \mathbb{R}$ et $B \neq \mathbb{R}$, d'autre part si $A^c \cap B^c = \varnothing$ alors $A \cup B = \mathbb{R}$ on peut donc aussi supposer $A^c \cap B^c \neq \varnothing$

— puisque $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ est stable par complémentation $A^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$ et $B^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$

— puisque $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ est stable par intersection finies

$$A^c \cap B^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$$

— puisque $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ est stable par complémentation et $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B$ on obtient

$$A \cup B \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$$

6. Toute somme finie déléments de $\mathcal{I}$ est un élément de $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$

On note $(\mathbb{N}\ ,\ O)$ un ensemble d'entiers naturels. Si $A \in \mathcal{I}_s$ il existe d'après (i) un entier $n \in \mathbb{N}$ et une application $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{I})$ tels que

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} F_k\ ,$$

on pose

$$U = \left\{ k \in \mathbb{N}_n / \bigcap_{j=0}^{k} F_j^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \right\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$. D'après le lemme [5.10] page 111 il suffit de vérifier

(a) $0 \in U$

(b) $[\ k \in U \quad \text{et} \quad k < n\ ] \Rightarrow k+1 \in U$

or

(a) $0 \in U$ puisque d'après *(2)* $F_0^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$

(b) Si $k \in U$ et $k < n$ alors $\bigcap_{j=0}^{k} F_j^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$ et puisque $F_{k+1}^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$ et

$$\bigcap_{j=0}^{k+1} F_j^c = \bigcap_{j=0}^{k} F_j^c \cap F_{k+1}^c$$

$\bigcap_{j=0}^{k+1} F_j^c$ est un élément de $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ comme intersection d'éléments de $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$.

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et $A^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$, la stabilité de $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ par complémentation montre alors que $A \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$.

(ix)

1. Par définition $\varnothing \in \mathfrak{B}(\mathcal{I})$ et puisque $\mathbb{R} \in \mathcal{I}$ on a $\mathbb{R} \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$
2. Si $A = \varnothing$ alors $A^c = \mathbb{R}$ par suite $A^c \in \mathfrak{B}(\mathcal{I})$. Si $A \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$ alors la stabilité de $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ par complémentation montre que $A^c \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$.
3. Soit $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathcal{I}) \times \mathfrak{B}(\mathcal{I})$
   — si $A \cap B = \varnothing$ alors $A \cap B \in \mathfrak{B}(\mathcal{I})$
   — si $A \cap B \neq \varnothing$ alors $(A, B) \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \times \mathfrak{a}(\mathcal{I})$ ainsi puisque $A \cap B \neq \varnothing$ la stabilité de $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ par intersections finies montre que $A \cap B \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$.
4. — si $A \cup B = \varnothing$ alors $A \cup B \in \mathfrak{B}(\mathcal{I})$
   — si $A \cup B \neq \varnothing$ alors $A \neq \varnothing$ ou $B \neq \varnothing$ ainsi la stabilité de $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ par réunions finies montre que $A \cup B \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$.

■

Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ne sont pas tous des réunions finies d'intervalles , il suffit par exemple de penser au sous-corps d'entiers rationnels $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$.

II *La famille des réunions finies ou dénombrables d'intervalles*

On introduit quelques définitions

Définition 10.15 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps de réels ,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *une famille non vide de sous-ensembles de* $\mathbb{R}$

1. *On dit qu'un sous-ensemble* A *de* $\mathbb{R}$ *est* ***réunion finie ou dénombrable*** *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *si* A *est non vide et s' il existe un ensemble d'entiers naturels* $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$ *et une application* $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{F})$ *qui vérifient*
$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$$
On note $\mathcal{F}_\sigma$ *la famille des réunions finies ou dénombrables d'éléments de* $\mathcal{F}$ *:*
$$\mathcal{F}_\sigma = \left\{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / \exists\ F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{F}) : A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k \right\}$$
2. *On dit que* $\mathcal{F}$ *est* ***stable par réunions finies ou dénombrables*** *si toutes réunions finies ou dénombrables d'éléments de* $\mathcal{F}$ *est un d'éléments de* $\mathcal{F}$ *:*
$$\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}$$
3. *On dit qu'un sous-ensemble non vide* P *de* $\mathcal{F}$ *est une* ***partition finie ou dénombrable*** *en éléments de* $\mathcal{F}$ *si*
   (a) P *est fini ou dénombrable et* $\varnothing \notin \mathrm{P}$
   (b) *si* P *n'est pas un singleton* P *est constitué de parties deux à deux disjointes :*
$$[\ (F,G) \in \mathrm{P}\times\mathrm{P} \quad \text{et} \quad F \neq G] \Rightarrow F\cap G = \varnothing\ .$$
   On note $\mathbf{P}_\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{F})$ *l'ensemble des partitions finies ou dénombrables d'éléments de* $\mathcal{F}$*.*
4. *Si* A *est un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *on dit que* $\mathrm{P} \in \mathbf{P}_\sigma(\mathcal{F})$ *est une partition finie ou dénombrable de* A *si*
$$A = \bigcup_{F\in\mathrm{P}} F\ .$$
   On note
$$\mathfrak{a}_\sigma(\mathcal{F}) = \left\{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / \exists\ \mathrm{P} \in \mathbf{P}_\sigma(\mathcal{F}) : A = \bigcup_{F\in\mathrm{P}} F \right\}$$
   Si $A \in \mathfrak{a}_\sigma(\mathcal{F})$ *on dit que* A *est somme disjointe finie ou dénombrable d'éléments de* $\mathcal{F}$*.*

Le théorème suivant est une application directe des définitions

Théorème 10.4 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ O\ )$ *un corps de réels ,* $\mathbb{Q}$ *son corps de rationnels et* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *une famille de sous-ensembles de* $\mathbb{R}$ *telle que* $\varnothing \notin \mathcal{F}$

(i) Pour que A soit réunion finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$ *il faut et il suffit que* pour tout *ensemble d'entiers naturels* $(\mathbb{N}, O)$ *il existe une application* $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{F})$ *qui vérifient*
$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$$

(ii) Si $\mathcal{F}$ *posséde la propriété suivante :*
$$(A,B) \in \mathcal{F}\times\mathcal{F} \Rightarrow A\cap B \in \mathcal{F}$$

alors

$$(A,B) \in \mathcal{F}_\sigma \times \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}_\sigma$$

(iii) Si $\mathcal{F}$ posséde la propriété suivante :

$$(A,B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$

alors

$$(A,B) \in \mathcal{F}_\sigma \times \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}_\sigma$$

(iv) Pour que I soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (voir définition [10.13] page 659) il faut et il suffit que I soit un intervalle vérifiant

$$x \in I \Rightarrow \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{tel que} \quad]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset I \tag{10.50}$$

(v) Si I et J sont des intervalles ouverts tels que $I \cap J \neq \varnothing$ alors $I \cup J$ est un intervalle ouvert.

(vi) Pour tout intervalle ouvert I on a $I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

(vii) Si $\mathcal{I}^o$ est l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $O \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *O est réunion d'intervalles ouverts : Il existe un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{I}^o$ tel que*

$$O = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$$

2. *O est somme disjointe d'intervalles ouverts : il existe un sous-ensemble P de $\mathcal{I}^o$ vérifiant les propriétés suivantes*

   (a)

$$O = \bigcup_{F \in \mathrm{P}} F$$

   (b)

$$[\ (F,G) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P} \quad \text{et} \quad F \neq G] \Rightarrow F \cap G = \varnothing$$

3. *Il existe une partition finie ou dénombrable de O en intervalles ouverts.*
4. *Pour tout $x \in O$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O$.*

(viii) La famille $\mathcal{T} = \mathfrak{a}_\sigma(\mathcal{I}^o) \cup \{\varnothing\}$ des sommes disjointes finies ou dénombrables d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ auxquelles on a rajouté l'ensemble vide possède les propriétés suivantes :

1. *O est un élément non vide de $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in O$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O$.*
2. *$\varnothing \in \mathcal{T}$ et $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$*
3. *$\mathcal{T}$ est stable par intersections finies :*

$$[\ O_0 \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad O_1 \in \mathcal{T}\ ] \Rightarrow O_0 \cap O_1 \in \mathcal{T}$$

4. *$\mathcal{T}$ est stable par réunions quelconques : si $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{T}$ alors*

$$\bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \in \mathcal{T}\ .$$

Preuve

(i)

On note $(\mathbb{N}\ , O)$ un ensemble d'entiers naturels , si A est réunion finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$, il existe par définition un ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}'\ ,\ O'\ )$ et une application $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}', \mathcal{F})$ vérifiant

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}'} F_k\ . \tag{10.51}$$

Le théorème [5.1] page 90 montre qu'il existe une unique bijection croissante g de $(\mathbb{N}\ ,\ O\ )$ dans $(\mathbb{N}',\ O')$, puisque $\mathrm{dom}(F) = \mathbb{N}'$, l'application $G = F \circ g$ est définie sur $\mathbb{N}$ et $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{F})$ vérifie

$$G_l = F_{g(l)}\ .$$

On montre que

$$A = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} G_l\ .$$

1. D'abord on montre $A \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} G_l$.
   Si $x \in A$ alors (10.51) page 672 montre qu'il existe $k \in \mathbb{N}'$ tel que $x \in F_k$, si $l = g^{-1}(k)$ alors $x \in G_l$
2. Ensuite on montre $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} G_l \subset A$.
   Si $x \in \bigcup_{l \in \mathbb{N}} G_l$ alors il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $x \in G_l$ ainsi $x \in F_{g(l)}$

(ii)

On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels . Si $(A, B) \in \mathcal{F}_\sigma \times \mathcal{F}_\sigma$ Il existe d'après (i) un couple d'applications $(F, G) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , \mathcal{F}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , \mathcal{F})$ vérifiant

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_j$$

ainsi

$$A \cap B = \bigcup_{(k,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} F_k \cap G_j\ .$$

Le théorème [6.4] page 151 permet d'affirmer qu'il existe une bijection $n \to (k(n), j(n))$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ On considère l'application $H \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ définie par

$$H_n = F_{k(n)} \cap G_{j(n)}$$

et on montre que H est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}$ vérifiant

$$A \cap B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$$

— Puisque $\mathcal{F}$ est stable par intersections finies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $H_n \in \mathcal{F}$
— Si $x \in A \cap B$ il existe $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$ tels que $x \in F_k$ et $x \in G_j$, par suite si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $k(n) = k$ et $j(n) = j$ on a $x \in H_n$ ainsi

$$A \cap B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$$

— Si $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in F_{k(n)} \cap G_{j(n)}$ et il résulte des inclusions $F_{k(n)} \subset A$ et $G_{j(n)} \subset B$ que $x \in A \cap B$ par suite

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n \subset A \cap B\ .$$

(iii)

On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels . Si $(A,B) \in \mathcal{F}_\sigma \times \mathcal{F}_\sigma$ Il existe d'après (i) un couple d'applications $(F,G) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\mathcal{F}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\mathcal{F})$ vérifiant

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} G_j$$

ainsi

$$A \cup B = \bigcup_{(k,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} F_k \cup G_j \ .$$

Le théorème [6.4] page 151 permet d'affirmer qu'il existe une bijection $n \to (k(n), j(n))$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ On considère l'application $H \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ définie par

$$H_n = F_{k(n)} \cup G_{j(n)}$$

et on montre que H est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}$ vérifiant

$$A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$$

— Puisque $\mathcal{F}$ est stable par réunions finies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $H_n \in \mathcal{F}$

— Si $x \in A\cup B$ il existe $k \in \mathbb{N}$ ou $j \in \mathbb{N}$ tels que $x \in F_k$ ou $x \in G_j$, par suite si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $k(n) = k$ et $j(n) = j$ on a $x \in H_n$ ainsi

$$A \cup B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$$

— Si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in F_{k(n)} \cup G_{j(n)}$ et il résulte des inclusions $F_{k(n)} \subset A$ et $G_{j(n)} \subset B$ que $x \in A \cup B$ par suite

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \subset A \cup B \ .$$

(iv)

A On montre que si I est un intervalle ouvert il vérifie (10.50) page 671

1. Si I est ouvert borné alors $I =]m(I), M(I)[$ ainsi pour tout $x \in I$ et $\varepsilon < \min\{M(I) - x, x - m(I)\}$

$$m(I) < x - \varepsilon < x + \varepsilon < M(I) \quad \text{et} \quad]x-\varepsilon,\ x+\varepsilon[\subset I$$

2. Si I est ouvert majoré et non minoré alors $I =]\leftarrow, M(I)[$ ainsi pour tout $x \in I$ et $\varepsilon < M(I) - x$

$$x - \varepsilon < x + \varepsilon < M(I) \quad \text{et} \quad]x-\varepsilon,\ x+\varepsilon[\subset I$$

3. Si I est ouvert minoré et non majoré alors $I =]m(I), \to [$ ainsi pour tout $x \in I$ et $\varepsilon < x - m(I)$

$$m(I) < x - \varepsilon < x + \varepsilon \quad \text{et} \quad]x-\varepsilon,\ x+\varepsilon[\subset I$$

4. si $I = \mathbb{R}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$ on a $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset I$.

B On montre que si I est un intervalle vérifiant (10.50) page 671 alors I est ouvert.

Il suffit (voir le lemme [10.11] page 656) de montrer que si I vérifie la propriété

$$x \in I \Rightarrow \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{tel que} \quad]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset I$$

alors les éventuelles bornes supérieures et inférieures de I n'appartiennent pas à I.

— Si I est minoré et $m(I) \in I$, l'hypothèse entraîne qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]m(I)-\varepsilon\ ,\ m(I)+\varepsilon[\subset I$ ainsi $m(I) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ est un élément de I strictement plus petit que $m(I)$, ce qui contredit le fait que $m(I)$ est un minorant de I

— Si I est majoré et $M(I) \in I$, l'hypothèse entraîne qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]M(I)-\varepsilon\ ,\ M(I)+\varepsilon[\subset I$ ainsi $M(I) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ est un élément de I strictement plus grand que $M(I)$, ce qui contredit le fait que $M(I)$ est un majorant de I

(v)

D'après le lemme [10.11] page 656 $I \cup J$ est un intervalle, d'après (iv) il suffit donc de montrer

$$x \in I \cup J \Rightarrow \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{tel que} \quad]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset I \cup J\ .$$

Or si $x \in I \cup J$ alors $x \in I$ ou $x \in J$

— Si $x \in I$ alors (iv) montre qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I \subset I \cup J$$

— Si $x \in J$ alors (iv) montre qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset J \subset I \cup J$$

(vi)

Puisque tout corps de réels est archimédien le lemme [10.4] page 614 montre que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vérifiant $x < y$

$$\mathbb{Q} \cap]x, y[\neq \varnothing\ ,$$

par suite

1. Si I est borné alors $I =]m(I)\ ,\ M(I)[$ et $\mathbb{Q} \cap I \neq \varnothing$
2. si I est minoré non majoré alors $I =]m(I)\ , \rightarrow [$ et pour tout $x > m(I)$ on a

$$\mathbb{Q} \cap]m(I), x[\subset \mathbb{Q} \cap I$$

   ainsi $\mathbb{Q} \cap I \neq \varnothing$

3. si I est majoré non minoré alors $I =] \leftarrow\ ,\ M(I)[$ et pour tout $x < M(I)$ on a

$$\mathbb{Q} \cap]x, M(I)[\subset \mathbb{Q} \cap I$$

   ainsi $\mathbb{Q} \cap I \neq \varnothing$

4. si $I = \mathbb{R}$ on a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

(vii)

On montre $(1) \Rightarrow (2)$

On note $\mathcal{I}^o(O)$ l'ensemble des intervalles ouverts inclus dans O :

$$\mathcal{I}^o(O) = \{I \in \mathcal{I}^o / I \subset O\}$$

et R la relation de O dans O définie par

$$R = \{(x, y) \in O \times O / \exists I \in \mathcal{I}^o(O) : (x, y) \in I \times I\}$$

Ainsi R est l'ensemble des couples d'éléments de O constirués par des éléments qui appartiennent a un intervalle ouvert inclus dans O. On montre :

1. R est une relation d'équivalence sur O

2. Pour tout $a \in O$ la classe d'équivalence $\pi(a) = \{y \in O/(a,y) \in R\}$ est un intervalle ouvert
3. L'ensemble $\mathrm{P} = \mathrm{im}(\pi) = \{F \in \mathcal{P}(O)/\exists\ a \in O : F = \pi(a)\}$ vérifie

$$[(F,G) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P} \quad \text{et} \quad F \neq G] \Rightarrow F \cap G = \varnothing$$

et

$$O = \bigcup_{F \in \mathrm{im}(\pi)} F$$

1. <u>On montre que R est une relation d'équivalence</u>
   (a) La relation R est réflexive . En effet, puisque par hypothèse O est réunion d'intervalles ouverts pour tout $x \in O$ il existe $F \in \mathcal{I}^o(O)$ tel que $x \in F$, ainsi $(x,x) \in F \times F$.
   (b) La symétrie de R est claire.
   (c) La relation R est transitive. En effet , si $(x,y) \in R$ et $(y,z) \in R$ alors il existe un couple (I,J) d'intervalles ouverts inclus dans O tels que $(x,y) \in I \times I$ et $(y,z) \in J \times J$
   — puisque $y \in I \cap J$ (v) permet d'affirmer que $I \cup J$ est un intervalle ouvert ,
   — puisque $I \subset O$ et $J \subset O$ on a $I \cup J \subset O$
   Ainsi $I \cup J \in \mathcal{I}^o(O)$ et $(x,z) \in (I \cup J) \times (I \cup J)$ ce qui montre que $(x,z) \in R$.
2. <u>On montre que pour tout $a \in O$ $\pi(a)$ est un intervalle ouvert</u>
   (a) D'abord on montre que $\pi(a)$ est un intervalle.
   D'après le lemme [10.11] page 656 il suffit de montrer

$$(x,y) \in \pi(a) \times \pi(a) \quad \text{et} \quad x \leq y \Rightarrow [x,y] \subset \pi(a)\ .$$

   or si $(x,y) \in \pi(a) \times \pi(a)$ existe un couple (I,J) d'intervalles ouverts inclus dans O tels que $(a,x) \in I \times I$ et $(a,y) \in J \times J$
   — puisque $a \in I \cap J$ (v) permet d'affirmer que $I \cup J$ est un intervalle ouvert ,
   — si $t \in I \cup J$ alors $t \in \pi(a)$ puisque $I \cup J$ est un intervalle ouvert inclus dans O et contenant a et t, par suite $I \cup J \subset \pi(a)$
   — puisque $I \cup J$ est un intervalle contenant x et y on a $[x,y] \subset I \cup J$
   Ainsi on obtient

$$[x,y] \subset I \cup J \subset \pi(a)$$

   (b) Ensuite on montre que $\pi(a)$ est ouvert.
   D'après (iv) il suffit de montrer

$$x \in \pi(a) \Rightarrow \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{tel que} \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \pi(a)$$

   Or si $x \in \pi(a)$ il existe un intervalle ouvert inclus dans O tel que $(a,x) \in I \times I$, on a $I \subset \pi(a)$ puisque si $t \in I$ alors I est un intervalle ouvert inclus dans O tel que $(a,t) \in I \times I$. Puisque $x \in I$ et I est ouvert (iv) montre qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset I$. Ainsi on obtient

$$]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset I \subset \pi(a)\ .$$

3. <u>On montre que $\mathrm{P} = \mathrm{im}(\pi)$ est une partition de O.</u>

   D'abord P est une partition puisque si $(F,G) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}$ il existe $(a,b) \in O \times O$ tel que $F = \pi(a)$ et $G = \pi(b)$ le lemme [7.12] page 186 montre alors

$$F \neq G \Rightarrow \pi(a) \neq \pi(b) \Rightarrow \pi(a) \cap \pi(b) = \varnothing \Rightarrow F \cap G = \varnothing\ .$$

   Ensuite on a

$$O = \bigcup_{F \in \mathrm{P}} F$$

   puisque si $a \in O$ alors $a \in \pi(a)$ et $F \in \mathrm{P} \Rightarrow F \subset O$.

On montre *2*⇒ *3*

On montre que toute partition P de O en intervalles ouverts est fini ou dénombrable. On considère le sous-ensemble Φ de $\mathbb{Q} \times \mathrm{P}$ défini par

$$\Phi = \{(q, F) \in \mathbb{Q} \times \mathrm{P} / q \in F\}$$

et on vérifie

1. Φ est une fonction et $\mathrm{dom}(\Phi) = O \cap \mathbb{Q}$
2. Φ est surjective : pour tout $F \in \mathrm{P}$ il existe $q \in O \cap \mathbb{Q}$ tel que $\Phi_q = F$

1. On montre que Φ est une fonction et $\mathrm{dom}(\Phi) = O \cap \mathbb{Q}$
   (a) Φ est non vide. En effet d'après (vi) si F est un intervalle ouvert $\mathbb{Q} \cap F \neq \varnothing$, par suite si $F \in \mathrm{P}$ il existe $q \in \mathbb{Q} \cap F$ et pour un tel q on a $(q, F) \in \Phi$.
   (b) Φ est une fonction . Si $(q, F) \in \Phi$ et $(q, G) \in \Phi$ on a $q \in F \cap G$, puisque P est une partition cela entraîne $F = G$.
   (c) On montre que $\mathrm{dom}(\Phi) \subset \mathbb{Q} \cap O$. Si $q \in \mathrm{dom}(\Phi)$ il existe $F \in \mathrm{P}$ telle que $q \in F$, puisque $F \subset O$ on a $q \in O \cap \mathbb{Q}$
   (d) On montre que $O \cap \mathbb{Q} \subset \mathrm{dom}(\Phi)$. Si $q \in O \cap \mathbb{Q}$ alors puisque P est une partition de O il existe $F \in \mathrm{P}$ tel que $q \in F$ ainsi $(q, F) \in \Phi$ et $q \in \mathrm{dom}(\Phi)$.
2. On montre que Φ est surjective

   Si $F \in \mathrm{P}$ il existe d'après (vi) un entier rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q \in F$ ainsi $(q, F) \in \Phi$ et $F \in \mathrm{im}(\Phi)$.

Ainsi toute partition P de O en intervalles ouverts est l'image par une application d'un ensemble dénombrable ce qui montre que P est fini ou dénombrable.

On montre *3*⇒ *4*

Si P est une partition finie ou dénombrable de O en intervalles ouverts alors pour tout $x \in O$ il existe $F \in \mathrm{P}$ tel que $x \in F$, (iv) montre alors qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset F$. Puisque $F \subset O$ on obtient $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset O$.

On montre *4*⇒ *1*

On pose $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{I}^o / F \subset O\}$ et on montre que sous l'hypothèse (4) $\mathcal{F}$ est non vide et

$$O = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F\ .$$

— si $x \in O$ par hypothèse il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset O$ par suite $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \neq \varnothing$,

— puisque pour tout $F \in \mathcal{F}$ on a $F \subset O$ on obtient

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \subset O$$

— si $x \in O$ par hypothèse il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset O$ puisque $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\in \mathcal{F}$ et $x \in]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[$ on obtient

$$O \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F\ .$$

$(viii)$

1. C'est l'équivalence $(3) \Leftrightarrow (4)$ de (vii)
2. $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

3. Si $O_0 \cap O_1 = \varnothing$ alors $O_0 \cap O_1 \in \mathcal{T}$, on peut donc supposer $O_0 \cap O_1 \neq \varnothing$. Il suffit d'après (*1*) de montrer que si $x \in O_0 \cap O_1$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O_0 \cap O_1$, or
— puisque $O_0 \in \mathcal{T}$ il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon_0\ ,\ x+\varepsilon_0[\subset O_0$
— puisque $O_1 \in \mathcal{T}$ il existe $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon_1\ ,\ x+\varepsilon_1[\subset O_1$
Ainsi en posant $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0\ ,\ \varepsilon_1\}$ on obtient $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O_0 \cap O_1$
4. Il suffit d'après (*1*) de montrer que si $x \in \bigcup\limits_{O \in \mathcal{O}} O$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset \bigcup\limits_{O \in \mathcal{O}} O$. Or si $x \in \bigcup\limits_{O \in \mathcal{O}} O$ il existe $O \in \mathcal{O}$ tel que $x \in O$, puisque $O \in \mathcal{T}$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O$, ainsi
$$]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O \subset \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O$$

■

Le théorème [10.4] page 670 permet de définir la topologie standard sur les corps de réels .

Définition 10.16 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels . La famille* $\mathcal{T} = \mathfrak{a}_\sigma(\mathcal{I}^o) \cup \{\varnothing\}$ *des sommes disjointes finies ou dénombrables d'intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$ *auxquelles on a rajouté l'ensemble vide est appelée la* ***topologie standard*** *du corps* $\mathbb{R}$*. Un élément* $O \in \mathcal{T}$ *est appelé un* ***ouvert*** *de* $\mathbb{R}$*.*

Les propriétés immédiates de la topologie standard des corps de réels sont données par le point (*viii*) du théorème [10.4] page 670 mais on aura besoin d'un peu plus .

10.5 *Topologie standard des corps de réels*

On utilise la définition [10.16] page 677 .

10.5.1 *Intérieur et adhérence*

Si $A \subset \mathbb{R}$ l'intérieur de A est le ≪ plus grand ≫ ouvert inclus dans A

Définition 10.17 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *et* $A \subset \mathbb{R}$ *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$*.*

1. *On appelle enveloppe inférieure ouverte de* A *le sous-ensemble de* $\mathcal{T}$ *défini par*
$$\mathcal{G}(A) = \{O \in \mathcal{T} / O \subset A\}$$
on a $\varnothing \in \mathcal{G}(A)$*.*
2. *Si* $A \subset \mathbb{R}$ *on appelle* ***intérieur*** *de* A *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *défini par*
$$\mathrm{int}(A) = \bigcup_{O \in \mathcal{G}(A)} O$$
3. *On appelle* ***adhérence*** *de* A *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *défini par*
$$\mathrm{adh}(A) = (\mathrm{int}(A^c))^c$$

Le lemme suivant est une application directe des définitions. On y utilise les résultats et notations du lemme [10.11] page 656 et du théorème [10.4] page 670 .

Lemme 10.13 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels ,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels ,* $\mathbb{Q}$ *son corps d'entiers rationnels et* $A \subset \mathbb{R}$ *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$*.*

(i) $\mathrm{int}(A)$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $\mathrm{int}(A) \subset A$*. Pour que* $x \in \mathrm{int}(A)$ *il faut et il suffit qu'il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel*

que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset A$.

(ii) Pour que $x\in\operatorname{adh}(A)$ *il faut et il suffit que pour tout* $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$

$$]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap A\neq\varnothing\ .$$

en particulier $A\subset\operatorname{adh}(A)$

(iii) Pour que $t\in\operatorname{adh}(A)$ *il faut et il suffit qu'il existe une suite* $x\in\operatorname{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ A)$ *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=t$

(iv) A *est ouvert si et seulement si* $\operatorname{int}(A)=A$

(v) Pour que $\operatorname{adh}(A)=A$ *il faut et il suffit que* A^c *soit ouvert.*

(vi) Si I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *alors*

1. *si* I *est borné*
$$\operatorname{int}(I)=]m(I)\ ,\ M(I)[\quad\text{et}\quad\operatorname{adh}(I)=[m(I)\ ,\ M(I)]$$
2. *si* I *est minoré et non majoré alors*
$$\operatorname{int}(I)=]m(I)\ ,\ \rightarrow[\quad\text{et}\quad\operatorname{adh}(I)=[m(I)\ ,\ \rightarrow[$$
3. *si* I *est majoré non minoré alors*
$$\operatorname{int}(I)=]\leftarrow\ ,\ M(I)[\quad\text{et}\quad\operatorname{adh}(I)=]\leftarrow\ ,\ M(I)]$$
4. *si* $I=\mathbb{R}$ *alors*
$$\operatorname{int}(I)=\mathbb{R}=\operatorname{adh}(I)\ .$$

(vii) $\operatorname{adh}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$, $\operatorname{int}(\mathbb{Q})=\varnothing$ *et* $\operatorname{int}(\mathbb{Q}^c)=\varnothing$, $\operatorname{adh}(\mathbb{Q}^c)=\mathbb{R}$.

(viii) Si B *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *et* $A\subset B$ *alors*

$$\operatorname{int}(A)\subset\operatorname{int}(B)\quad\text{et}\quad\operatorname{adh}(A)\subset\operatorname{adh}(B)\ .$$

(ix) Si B *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *alors*

$$\operatorname{int}(A\cap B)=\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)\quad\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)\subset\operatorname{int}(A\cup B)$$

(x) Si B *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *alors*

$$\operatorname{adh}(A\cap B)\subset\operatorname{adh}(A)\cap\operatorname{adh}(B)\quad\operatorname{adh}(A)\cup\operatorname{adh}(B)=\operatorname{adh}(A\cup B)$$

Preuve

(i)

1. $\operatorname{int}(A)$ est ouvert et $\operatorname{int}(A)\subset A$.
   — D'après le théorème [10.4] page 670 $\mathcal{T}$ est stable par réunions quelconques, puisque $\mathcal{G}(A)\subset\mathcal{T}$ on a
   $$\operatorname{int}(A)=\bigcup_{O\in\mathcal{G}(A)}O\in\mathcal{T}\ .$$
   — Puisque $O\in\mathcal{G}(A)\Rightarrow O\subset A$ on a $\bigcup\limits_{O\in\mathcal{G}(A)}O\subset A$
2. $x\in\operatorname{int}(A)\Leftrightarrow\exists\ \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset A$
   — Si $x\in\operatorname{int}(A)$ alors il existe $O\in\mathcal{G}(A)$ tel que $x\in O$, or le théorème [10.4] page 670 montre qu'il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O$ par suite
   $$]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O\subset A$$

— Si il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset A$ alors $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\in \mathcal{G}(A)$ par suite $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset \mathrm{int}(A)$ et $x \in \mathrm{int}(A)$.

(ii)

1. Si il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap A = \varnothing$ alors $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset A^c$ le point (i) montre alors que $x \in \mathrm{int}(A^c)$ et par définition $\mathrm{int}(A^c) = (\mathrm{adh}(A))^c$ par suite
$$x \in \mathrm{adh}(A) \Rightarrow \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing\ .$$
2. Si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing$ le point (i) montre que $x \notin \mathrm{int}(A^c)$ par suite $x \in \mathrm{adh}(A)$

(iii)

1. Si il existe $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ A)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = t$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq n_0 \Rightarrow |t - x_n| < \varepsilon$$
par suite $x_{n_0} \in]t-\varepsilon\ ,\ t+\varepsilon[\cap A$ et le point (ii) montre que $t \in \mathrm{adh}(A)$
2. Si $t \in \mathrm{adh}(A)$ alors le point (ii) montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $]t - \dfrac{1}{n+1}\ ,\ t + \dfrac{1}{n+1}[\cap A \neq \varnothing$ par suite si h est une fonction de choix pour $\mathbb{R}$ (voir axiome [2.1] page 48) la suite à valeurs dans A définie par
$$x_n = h(]t - \frac{1}{n+1}\ ,t + \frac{1}{n+1}[\cap A)$$
converge vers t puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \in]t - \dfrac{1}{n+1}\ ,\ t + \dfrac{1}{n+1}[$

(iv)

1. Si A est ouvert alors $A \in \mathcal{G}(A)$ par suite
$$A \subset \bigcup_{O \in \mathcal{G}(A)} O$$
et $A \subset \mathrm{int}(A) \subset A$.
2. Si $\mathrm{int}(A) = A$ alors le point (i) montre que pour tout $x \in A$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset A$, le théorème [10.4] page 670 montre alors que A est ouvert.

(v)

1. Si A^c est ouvert alors (iv) montre que $\mathrm{int}(A^c) = A^c$ par suite $\mathrm{adh}(A) = (A^c)^c = A$
2. si $\mathrm{adh}(A) = A$ alors $(\mathrm{int}(A^c))^c = A$ par suite $\mathrm{int}(A^c) = A^c$ et (iv) montre que A^c est ouvert.

(vi)

1. Si I est un intervalle borné le lemme [10.11] page 656 montre que
$$]m(I)\ ,\ M(I)[\subset I \subset [m(I)\ ,\ M(I)]$$
Puisque $]m(I)\ ,\ M(I)[\ \in \mathcal{T}$ on a
$$]m(I)\ ,\ M(I)\ [\ \subset \mathrm{int}(I) \subset I \subset [m(I)\ ,\ M(I)\ ] \tag{10.52}$$
   (a) On montre que $m(I) \notin \mathrm{int}(I)$ et $M(I) \notin \mathrm{int}(I)$,
      — Si $m(I) \in \mathrm{int}(I)$ alors le point (i) montre qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]m(I)-\varepsilon\ ,\ m(I)+\varepsilon[\subset I$, cela entraîne que $m(I)$ n'est pas un minorant de I et contredit la définition de $m(I)$ comme borne inférieure de I
      — Si $M(I) \in \mathrm{int}(I)$ alors le point (i) montre qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]M(I)-\varepsilon\ ,\ M(I)+\varepsilon[\subset I$, cela contredit la définition de $M(I)$ comme borne supérieure de I

Les inclusions (10.52) page 679 montrent alors que

$$]m(I)\ ,\ M(I)[\subset \mathrm{int}(I)\subset]m(I)\ ,\ M(I)[$$

(b) On montre que pour tout $x\in[m(I)\ ,\ M(I)]$ et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap I\neq\varnothing$.
— Si $x\in]m(I)\ ,\ M(I)[$ les inclusions (10.52) page 679 montre que $x\in I$ ainsi on obtient $x\in]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap I$.
— Si $x=m(I)$ alors puisque $m(I)$ est le plus grand minorant de I, pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ le réel $m(I)+\dfrac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant de I par suite il existe $y\in I$ tel que $y\in[m(I)\ ,m(I)+\dfrac{\varepsilon}{2}]\cap I$ par suite $y\in]m(I)-\varepsilon\ ,\ m(I)+\varepsilon[\cap I$
— Si $x=M(I)$ alors puisque $M(I)$ est le plus petit majorant de I, pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ le réel $M(I)-\dfrac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de I par suite il existe $y\in I$ tel que $y\in[M(I)-\dfrac{\varepsilon}{2}\ ,M(I)]\cap I$ par suite $y\in]M(I)-\varepsilon\ ,\ M(I)+\varepsilon[\cap I$
Le point (ii) montre alors que $[m(I)\ ,\ M(I)]\subset \mathrm{adh}(I)$.

(c) On montre $\mathrm{adh}(I)\subset[m(I)\ ,\ M(I)]$. Si $t\in\mathrm{adh}(I)$ il existe par (iii) une suite $x\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ I)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=t$ les inclusions [10.52) page 679 montrent que

$$m(I)\leq x_n\leq M(I)$$

et le lemme [10.3] page 610 entraîne donc « en passant à la limite » que $m(I)\leq t\leq M(I)$.

2. Si I est un intervalle minoré non majoré le lemme [10.11] page 656 montre que

$$]m(I)\ ,\rightarrow[\subset I\subset[m(I)\ ,\ \rightarrow[$$

Puisque $]m(I)\ ,\ \rightarrow[\ \in\mathcal{T}$ on a

$$]m(I)\ ,\ \rightarrow\ [\ \subset \mathrm{int}(I)\subset I\subset[m(I)\ ,\ \rightarrow\ [\tag{10.53}$$

(a) On montre que $m(I)\notin\mathrm{int}(I)$,
— Si $m(I)\in\mathrm{int}(I)$ alors le point (i) montre qu'il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]m(I)-\varepsilon\ ,\ m(I)+\varepsilon[\subset I$, cela entraîne que $m(I)$ n'est pas un minorant de I et contredit la définition de $m(I)$ comme borne inférieure de I
Les inclusions (10.53) page 680 montrent alors que

$$]m(I)\ ,\ \rightarrow[\subset\mathrm{int}(I)\subset]m(I)\ ,\ \rightarrow[$$

(b) On montre que pour tout $x\in[m(I)\ ,\ \rightarrow[$ et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap I\neq\varnothing$.
— Si $x\in]m(I)\ ,\ \rightarrow[$ les inclusions (10.53) page 680 montre que $x\in I$ ainsi on obtient $x\in]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap I$.
— Si $x=m(I)$ alors puisque $m(I)$ est le plus grand minorant de I, pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ le réel $m(I)+\dfrac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant de I par suite il existe $y\in I$ tel que $y\in[m(I)\ ,m(I)+\dfrac{\varepsilon}{2}]\cap I$ par suite $y\in]m(I)-\varepsilon\ ,\ m(I)+\varepsilon[\cap I$
Le point (ii) montre alors que $[m(I)\ ,\rightarrow[\subset\mathrm{adh}(I)$.

(c) On montre $\mathrm{adh}(I)\subset[m(I)\ ,\ \rightarrow[$. Si $t\in\mathrm{adh}(I)$ il existe par (iii) une suite $x\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ I)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=t$ les inclusions [10.53) page 680 montrent que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$m(I)\leq x_n$$

et le lemme [10.3] page 610 entraîne donc « en passant à la limite » que $m(I)\leq t$.

3. Si I est un intervalle majoré non minoré le lemme [10.11] page 656 montre que

$$]\leftarrow,M(I)[\subset I\subset]\leftarrow,\ M(I)]$$

Puisque $]\leftarrow,\ M(I)[\ \in\mathcal{T}$ on a

$$]\leftarrow,\ M(I)\ [\ \subset\text{int}(I)\subset I\subset]\leftarrow,\ M(I)\ ] \tag{10.54}$$

(a) On montre que $M(I)\notin\text{int}(I)$,
— Si $M(I)\in\text{int}(I)$ alors le point (i) montre qu'il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]M(I)-\varepsilon\ ,\ M(I)+\varepsilon[\subset I$, cela entraîne que $M(I)$ n'est pas un majorant de I et contredit la définition de $M(I)$ comme borne supérieure de I
Les inclusions (10.54) page 681 montrent alors que

$$]\leftarrow,\ M(I)[\subset\text{int}(I)\subset]\leftarrow,\ M(I)]$$

(b) On montre que pour tout $x\in]\leftarrow,\ M(I)]$ et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap I\neq\varnothing$.
— Si $x\in]\leftarrow\ ,\ M(I)[$ les inclusions (10.54) page 680 montre que $x\in I$ ainsi on obtient $x\in]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap I$.
— Si $x=M(I)$ alors puisque $M(I)$ est le plus petit majorant de I, $M(I)-\dfrac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de I par suite il existe $y\in I$ tel que $y\in[M(I)-\dfrac{\varepsilon}{2}\ ,\ M(I)]\cap I$ ainsi on obtient $y\in]M(I)-\varepsilon\ ,\ M(I)+\varepsilon[\cap I$
Le point (ii) montre alors que $]\leftarrow,M(I)]\subset\text{adh}(I)$.

(c) On montre $\text{adh}(I)\subset]\leftarrow,\ M(I)]$. Si $t\in\text{adh}(I)$ il existe par (iii) une suite $x\in\text{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ I)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=t$ les inclusions [10.54) page 681 montrent que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$x_n\leq M(I)$$

et le lemme [10.3] page 610 entraîne donc « en passant à la limite » que $t\leq M(I)$.

4. Si $I=\mathbb{R}$ alors puisque l'ensemble vide et $\mathbb{R}$ sont des ouverts on a

$$\text{int}(\mathbb{R})=\mathbb{R}\quad\text{et}\quad\text{adh}(\mathbb{R})=(\varnothing)^c=\mathbb{R}\ .$$

(vii)

1. <u>On montre que $\text{adh}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$</u>
D'après le lemme [10.4] page 614 pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ on a

$$\mathbb{Q}\cap]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\neq\varnothing$$

ainsi le point (ii) montre que

$$\mathbb{R}\subset\text{adh}(\mathbb{Q})\subset\mathbb{R}\ .$$

2. <u>On montre que $\text{int}(\mathbb{Q})=\varnothing$</u>
D'après le lemme [9.36] page 586 $\mathbb{Q}$ est dénombrable, ainsi d'après le théorème [6.4] page 151 tout sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ est fini ou dénombrable, ceci montre que $\text{int}(\mathbb{Q})=\varnothing$. En effet , si $x\in\text{int}(\mathbb{Q})$ alors il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset\mathbb{Q}$ et le lemme [10.11] page 656 montre que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[$ est indénombrable.

3. <u>On montre $\text{int}(\mathbb{Q}^c)=\varnothing$</u>
par définition on a

$$(\text{adh}(\mathbb{Q}))^c=\text{int}(\mathbb{Q}^c)=\mathbb{R}^c=\varnothing$$

4. <u>On montre $\mathrm{adh}(\mathbb{Q}^c) = \mathbb{R}$</u>

   Par définition on a
   $$\mathrm{adh}(\mathbb{Q}^c) = (\mathrm{int}(\mathbb{Q}))^c = \varnothing^c = \mathbb{R} \ .$$

(*viii*)

1. <u>On montre $\mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}(B)$</u>

   Si $x \in \mathrm{int}(A)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon \ , \ x+\varepsilon[\subset A$, puisque $A \subset B$ on a $]x-\varepsilon \ , \ x+\varepsilon[\subset B$ et $x \in \mathrm{int}(B)$.
2. <u>On montre $\mathrm{adh}(A) \subset \mathrm{adh}(B)$</u>

   Par définition $\mathrm{adh}(A) = (\mathrm{int}(A^c))^c$, puisque $A \subset B$ alors $B^c \subset A^c$ et (1) montre que $\mathrm{int}(B^c) \subset \mathrm{int}(A^c)$ ainsi en passant au complémentaire $\mathrm{adh}(A) \subset \mathrm{adh}(B)$

(*ix*)

1. <u>On montre $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$</u>
   (a) D'abord d'après (*viii*) on a, puisque $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$,
   $$\mathrm{int}(A \cap B) \subset \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) \ .$$
   (b) Si $x \in \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$ il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que
   $$]x-\varepsilon_0 \ , \ x+\varepsilon_0[\subset A \quad \text{et} \quad]x-\varepsilon_1 \ , \ x+\varepsilon_1[\subset B \ ,$$
   si $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0 \ , \ \varepsilon_1\}$ on obtient $]x-\varepsilon \ , \ x+\varepsilon[\subset A \cap B$ ainsi $x \in \mathrm{int}(A \cap B)$
2. <u>On montre $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \subset \mathrm{int}(A \cup B)$</u>

   Puisque $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ (*viii*) montre que $\mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}(A \cup B)$ et $\mathrm{int}(B) \subset \mathrm{int}(A \cup B)$ ainsi
   $$\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \subset \mathrm{int}(A \cup B) \ .$$

(*x*)

d'après (*ix*) on a
$$\mathrm{adh}(A \cup B) = (\mathrm{int}(A^c \cap B^c))^c = (\mathrm{int}(A^c) \cap \mathrm{int}(B^c))^c = (\mathrm{int}(A^c))^c \cup (\mathrm{int}(B^c))^c = \mathrm{adh}(A) \cup \mathrm{adh}(B) \ .$$
Puisque $\mathrm{int}(A^c) \cup \mathrm{int}(B^c) \subset \mathrm{int}(A^c \cup B^c)$ ainsi on obtient
$$\mathrm{adh}(A \cap B) = (\mathrm{int}(A^c \cup B^c))^c \subset \mathrm{adh}(A) \cap \mathrm{adh}(B)$$

■

Ainsi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $\mathrm{adh}(A) = A$ sont ceux qui vérifient $A^c \in \mathcal{T}$, ils ont droit à une définition.

Définition 10.18 *On note* $(\mathbb{R} \ , \ + \ , \ . \ , \ \leq)$ *un corps de réels , un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ est dit* ***fermé*** *si son complémentaire est ouvert . On note*
$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / F^c \cap \mathbb{R} \in \mathcal{T}\}$$
l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}$ *.*

Le lemme qui suit n'utilise que les propriétés de la topologie $\mathcal{T}$ par passage au complémentaire ainsi que les notations et résultats du lemme [10.13] page 677 .

Lemme 10.14 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels ,* $\mathcal{F}$ *l'ensemble des fermés de* $\mathbb{R}$ *et* $(\mathbb{N}\ ,\ \mathcal{O})$ *un ensemble d'entiers naturels.*

(i) $\varnothing \in \mathcal{F}$ *et* $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$

(ii) $\mathcal{F}$ *est stable par réunions finies :*

$$(F,\ G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$$

(iii) $\mathcal{F}$ *est stable par intersections quelconques : si* $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ *est un sous-ensemble de* $\mathcal{F}$ *alors*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{H}} F \in \mathcal{F}$$

(iv) Un sous-ensemble F *de* $\mathbb{R}$ *est fermé si et seulement si* $\mathrm{adh}(F) = F$.

(v) Pour tout sous-ensemble A *de* $\mathbb{R}$ *l'ensemble* $\mathrm{adh}(A)$ *est fermé et tout fermé contenant* A *contient* $\mathrm{adh}(A)$

(vi) Si A *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *toute suite convergente* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ A)$ *vérifie*

$$\lim_{n \to \infty} x_n \in \mathrm{adh}(A)\ .$$

(vii) Pour que F *soit un fermé de* $\mathbb{R}$ *il faut et il suffit que toute suite convergente* x *à valeurs dans* F *vérifie*

$$\lim_{n \to \infty} x_n \in F$$

Preuve

(i)

Puisque $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$ et $\varnothing = \mathbb{R}^c$ on a $\varnothing \in \mathcal{F}$. Puisque $\varnothing \in \mathcal{T}$ et $\varnothing^c = \mathbb{R}$ on a $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$

(ii)

Si $(F, G) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ alors $F^c \in \mathcal{T}$ et $G^c \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ étant stable par intersections finies (voir par exemple le théorème [10.4] page 670) on a $F^c \cap G^c \in \mathcal{T}$, l'égalité $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$ montre alors que $F \cup G \in \mathcal{F}$.

(iii)

Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ l'ensemble

$$\mathcal{G} = \{O \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / O^c \in \mathcal{H}\}$$

est un sous-ensemble de $\mathcal{T}$, puisque $\mathcal{T}$ est stable par réunions quelconques (encore le théorème [10.4] page 670) les égalités

$$(\bigcap_{F \in \mathcal{H}} F)^c = \bigcup_{F \in \mathcal{H}} F^c = \bigcup_{O \in \mathcal{G}} O$$

montrent que $\bigcap_{F \in \mathcal{H}} F \in \mathcal{F}$

(iv)

1. Si $\mathrm{adh}(F) = F$ alors F est fermé.

   En effet, on a alors
   $$F^c = (\mathrm{adh}(F))^c = \mathrm{int}(F^c)$$
   et le lemme [10.13] page 677 montre que $\mathrm{int}(F^c)$ est ouvert.

2. Si F est fermé alors $\text{adh}(F) = F$

   Si F^c est ouvert alors d'après le lemme [10.13] page 677 on a $\text{int}(F^c) = F^c$ ainsi

$$\text{adh}(F) = (\text{int}(F^c))^c = F \ .$$

(v)

Puisque par définition $(\text{adh}(A))^c = \text{int}(A^c)$, $(\text{adh}(A))^c$ est ouvert ainsi $\text{adh}(A)$ est fermé . Si F est fermé et $A \subset F$ le lemme [10.13] page 677 montre que $\text{adh}(A) \subset \text{adh}(F)$, F étant fermé on a $\text{adh}(F) = F$

(vi)

on montre que si t est limite d'une suite d'éléments de A alors $t \in \text{adh}(A)$.En effet, par définition d'une limite, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - t| < \varepsilon$$

ainsi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a $]t-\varepsilon\ ,\ t+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing$ et le lemme [10.13] page 677 montre que $t \in \text{adh}(A)$.

(vii)

1. D'abord si F est fermé et $x \in \text{Hom}_{\textbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ F)$ est une suite convergente d'éléments de F elle converge vers un élément de F. En effet d'après (vi) on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \text{adh}(F)$ et puisque F est fermé (iv) montre que $\text{adh}(F) = F$.
2. Ensuite si $x \in \text{Hom}_{\textbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ F)$ est une suite convergente d'éléments de F qui ne converge pas vers un élément de F alors F n'est pas fermé. En effet d'après (vi) on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \text{adh}(F)$ et puisque par hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \notin F$ on obtient

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \text{adh}(F) \cap F^c \ .$$

   Ainsi $\text{adh}(F) \neq F$ et (iv) montre que F n'est pas fermé.

■

Si K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ alors la famille des sous-ensembles de K qui sont de la forme $O \cap K$ où O est un ouvert de $\mathbb{R}$ hérite d'une structure similaire à celle de $\mathcal{T}$

10.5.2 *Topologie induite*

I *Définition et premières propriétés*

Si K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur K est la famille de sous-ensembles de K de la forme $O \cap K$ où $O \in \mathcal{T}$.

Définition 10.19 *On note $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ un corps de réels, $\mathcal{T}$ la topologie standard sur $\mathbb{R}$ et K un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On appelle* ***topologie induite*** *sur K par la topologie $\mathcal{T}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(K)$, noté $\imath(K\ ,\mathcal{T})$, et défini par*

$$\imath(K\ ,\ \mathcal{T}) = \{U \in \mathcal{P}(K) / \exists\ O \in \mathcal{T} : U = O \cap K\}$$

1. *Un élément U de $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$ est appelé un ouvert de K, on dit alors que U est $\imath(K,\ \mathcal{T})$-ouvert.*
2. *Un sous-ensemble F de K est appelé un fermé de K ou un $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$-fermé si $F^c \cap K \in \imath(K\ ,\ \mathcal{T})$, on note*

$$\mathcal{F}(K,\mathcal{T}) = \{F \in \mathcal{P}(K) / F^c \cap K \in \imath(K\ ,\ \mathcal{T})\}$$

   l'ensemble des fermés de K.

Le lemme suivant n'est qu'un jeu d'écriture.

Lemme 10.15 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels et* K *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *.*

(i) La famille $\imath(K\ ,\mathcal{T})$ *des ouverts de* K *possède les propriétés suivantes :*

1. $\varnothing \in \imath(K\ ,\mathcal{T})$ *et* $K \in \imath(K\ ,\mathcal{T})$
2. $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$ *est stable par intersections finies : si* $(U,V) \in \imath(K\ ,\mathcal{T}) \times \imath(K\ ,\mathcal{T})$ *alors*
$$U \cap V \in \imath(K\ ,\mathcal{T})$$
3. $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$ *est stable par réunions quelconques : si* $\mathcal{G} \subset \imath(K\ ,\mathcal{T})$ *est un sous-ensemble de* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$ *alors*
$$\bigcup_{U\in\mathcal{G}} U \in \imath(K\ ,\mathcal{T})$$

(ii) Pour qu'un sous-ensemble non vide U *de* K *soit* $\imath(K\ \mathcal{T})$*-ouvert il faut et il suffit que pour tout* $x \in U$ *il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap K \subset U\ .$$

(iii) La famille $\mathcal{F}(K\ ,\mathcal{T})$ *des fermés de* K *posséde les propriétés suivantes :*

1. $\varnothing \in \mathcal{F}(K\ ,\mathcal{T})$ *et* $K \in \mathcal{F}(K,\mathcal{T})$
2. $\mathcal{F}(K\ ,\mathcal{T})$ *est stable par réunions finies : si* $(F,G) \in \mathcal{F}(K\ ,\mathcal{T}) \times \mathcal{F}(K\ ,\mathcal{T})$ *alors*
$$F \cup G \in \mathcal{F}(K\ ,\mathcal{T})$$
3. $\mathcal{F}(K\ ,\ \mathcal{T})$ *est stable par intersections quelconques : si* $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(K\ ,\mathcal{T})$ *est un sous-ensemble de* $\mathcal{F}(K\ ,\mathcal{T})$ *alors*
$$\bigcap_{F\in\mathcal{H}} F \in \mathcal{F}(K\ ,\mathcal{T})$$

(iv) Pour qu'un sous-ensemble F *de* K *soit un fermé de* K *il faut et il suffit qu'il existe un fermé* H *de* $\mathbb{R}$ *tel que* $F = H \cap K$*.*

Preuve

$$(i)$$

1. On a $\varnothing = \varnothing \cap K$ et $\varnothing \in \mathcal{T}$, on a $K = \mathbb{R} \cap K$ et $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$.
2. Si U et V sont des ouverts de K il existe $(O_0\ ,\ O_1) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ tel que
$$U = O_0 \cap K \quad \text{et} \quad V = O_1 \cap K$$
ainsi $U \cap V = (O_0 \cap O_1) \cap K$ et puisque $\mathcal{T}$ est stable par intersections finies on obtient $U \cap V \in \imath(K,\mathcal{T})$.
3. Si $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble de $\imath(K,\mathcal{T})$ on considère le sous-ensemble $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{T}$ défini par
$$\mathcal{G}' = \{O \in \mathcal{T} / \exists\ U \in \mathcal{G} : U = O \cap K\}$$
et on montre que
$$\bigcup_{U\in\mathcal{G}} U = \left(\bigcup_{O\in\mathcal{G}'} O\right) \cap K$$

(a) D'abord on montre

$$\bigcup_{U\in\mathcal{G}} U \subset \left(\bigcup_{O\in\mathcal{G}'} O\right) \cap K \ .$$

Si $x \in \bigcup_{U\in\mathcal{G}} U$ il existe $U \in \mathcal{G}$ tel que $x \in U$, puisque $U \in \imath(K,\mathcal{T})$ il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $U = O \cap K$, ainsi $O \in \mathcal{G}'$ et $x \in O \cap K$ la conclusion provient alors de l'inclusion

$$O \cap K \subset \left(\bigcup_{O\in\mathcal{G}'} O\right) \cap K$$

(b) Ensuite on montre

$$\left(\bigcup_{O\in\mathcal{G}'} O\right) \cap K \subset \bigcup_{U\in\mathcal{G}} U \ .$$

Si $x \in \left(\bigcup_{O\in\mathcal{G}'} O\right) \cap K$ alors il existe $O \in \mathcal{G}'$ tel que $x \in O \cap K$, puisque $O \in \mathcal{G}'$ il existe $U \in \mathcal{G}$ tel que $U = O \cap K$ ainsi $x \in U$ et la conclusion provient de l'inclusion

$$U \subset \bigcup_{U\in\mathcal{G}} U \ .$$

Puisque $\mathcal{T}$ est stable par réunions quelconques on a $\bigcup_{O\in\mathcal{G}'} O \in \mathcal{T}$ ainsi $\bigcup_{U\in\mathcal{G}} U \in \imath(K,\mathcal{T})$

(ii)

I On montre la nécessité

Si U est $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$-ouvert alors il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $U = O \cap K$, le point $(viii)$ du théorème [10.4] page 670 montre que pour tout $x \in O$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O$. En particulier si $x \in U$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O$, ainsi $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap K \subset O \cap K$ et $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap K \subset U$.

II On montre la suffisance

On note

$$\Gamma = \{(x,\varepsilon) \in U \times \mathbb{R}_+^* /]x-\varepsilon\ \ x+\varepsilon[\cap K \subset U\} \ ,$$

par hypothèse $\Gamma \neq \varnothing$. Si I l'application de Γ dans $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$ définie par

$$I(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap K$$

on montre que

$$U = \bigcup_{(x,\varepsilon)\in\Gamma} I(x,\varepsilon)$$

D'abord $U \subset \bigcup_{(x,\varepsilon)\in\Gamma} I(x,\varepsilon)$ puisque par hypothèse pour tout $x \in U$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $I(x,\varepsilon) \subset U$, pour un tel ε on a $(x,\varepsilon) \in \Gamma$ et $x \in I(x,\varepsilon)$. Ensuite $\bigcup_{(x,\varepsilon)\in\Gamma} I(x,\varepsilon) \subset U$ puisque pour tout $(x,\varepsilon) \in \Gamma$ on a $I(x,\varepsilon) \subset U$. $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$ étant stable par réunions on obtient $U \in \imath(K\ ,\ \mathcal{T})$.

(iii)

1. On a $K^c \cap K = \varnothing \cap K$ ainsi $K \in \mathcal{F}(K, \mathcal{T})$. De même puisque $\varnothing^c \cap K = K$ et $K \in \imath(K, \mathcal{T})$ on obtient $\varnothing \in \mathcal{F}(K, \mathcal{T})$.
2. Si $(F, G) \in \mathcal{F}(K, \mathcal{T}) \times \mathcal{F}(K, \mathcal{T})$ il existe $(O_0, O_1) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ tel que
$$F^c \cap K = O_0 \cap K \quad \text{et} \quad G^c \cap K = O_1 \cap K$$
les égalités
$$(F \cup G)^c \cap K = (F^c \cap K) \cap (G^c \cap K) = (O_0 \cap O_1) \cap K$$
montrent que $F \cup G \in \mathcal{F}(K, \mathcal{T})$.
3. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(K, \mathcal{T})$ alors pour tout $F \in \mathcal{H}$ on a $F^c \cap K \in \imath(K, \mathcal{T})$ l'égalité
$$\left(\bigcap_{F \in \mathcal{H}} F \right)^c \cap K = \bigcup_{F \in \mathcal{H}} F^c \cap K$$
et la stabilité de $\imath(K, \mathcal{T})$ par réunions quelconques montre que $\bigcap_{F \in \mathcal{H}} F \in \mathcal{F}(K, \mathcal{T})$.

(iv)

Si F est un fermé de K il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $F^c \cap K = O \cap K$, par suite $F \cup K^c = O^c \cup K^c$ et puisque $F \subset K$
$$F = (F \cup K^c) \cap K = (O^c \cup K^c) \cap K = O^c \cap K$$
et par définition O^c est un fermé de $\mathbb{R}$. ■

On défini maintenant l'intérieur et l'adhérence pour la topologie induite.

II *Intérieur et adhérence pour la topologie induite.*

Si K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et A un sous-ensemble de K l'intérieur de A est le « plus grand » ouvert de la topologie $\imath(K, \mathcal{T})$ inclus dans A et l'adhérence de A est le « plus petit » fermé de la topologie $\imath(K, \mathcal{T})$ qui contient A

Définition 10.20 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels* K *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *et* $A \subset K$ *un sous-ensemble de* K. *Enfin les sous-ensembles* $\mathcal{G}(A)$ *et* $\mathcal{H}(A)$ *de* $\mathcal{P}(K)$ *sont définis par*
$$\mathcal{G}(A) = \{U \in \imath(K, \mathcal{T}) / U \subset A\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(A) = \{F \in \mathcal{F}(K, \mathcal{T}) / A \subset F\}$$

1. *On appelle* ***intérieur*** *de* A *pour la topologie* $\imath(K, \mathcal{T})$ *le sous-ensemble* $\operatorname{int}(A, \imath(K, \mathcal{T}))$ *de* K *défini par*
$$\operatorname{int}(A, \imath(K, \mathcal{T})) = \bigcup_{U \in \mathcal{G}(A)} U$$
2. *On appelle* ***adhérence*** *de* A *pour la topologie* $\imath(K, \mathcal{T})$ *le sous-ensemble* $\operatorname{adh}(A, \imath(K, \mathcal{T}))$ *de* K *défini par*
$$\operatorname{adh}(A, \imath(K, \mathcal{T})) = \bigcap_{F \in \mathcal{H}(A)} F$$

Le lemme qui suit utilise les résultats et notations des lemmes [10.13] page 677 , [10.14] page 683 et [10.15] page 685.

Lemme 10.16 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels ,* K *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *et* $A \subset K$ *un sous-ensemble de* K.

(i) $\operatorname{int}(A, \imath(K, \mathcal{T}))$ *est* $\imath(K, \mathcal{T})$*-ouvert,* $\operatorname{adh}(A, \imath(K, \mathcal{T}))$ *est* $\imath(K, \mathcal{T})$*-fermé et*
$$\operatorname{int}(A, \imath(K, \mathcal{T})) \subset A \subset \operatorname{adh}(A, \imath(K, \mathcal{T}))$$

de plus

1. *A est $\imath(K,\mathcal{T})$-ouvert si et seulement si* $\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))=A$
2. *A est $\imath(K,\mathcal{T})$-fermé si et seulement si* $\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))=A$
3. *pour que $x\in\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$ il faut et il suffit qu'il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que*

$$]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap K\subset A$$

(ii) Si B est un sous-ensemble de K et $A\subset B$ alors

$$\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))\subset\mathrm{int}(B,\imath(K,\mathcal{T}))\quad\text{et}\quad\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))\subset\mathrm{adh}(B,\imath(K,\mathcal{T}))$$

(iii)

1. $\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))=\mathrm{adh}(A)\cap K$*, en particulier, si K est un fermé de $\mathbb{R}$ alors*

$$\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))=\mathrm{adh}(A)\cap K=\mathrm{adh}(A)$$

2. *pour que $x\in\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$ il faut et il suffit que $x\in K$ et que pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$*

$$]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap A\neq\varnothing$$

3. $\mathrm{int}(A^c\cap K,\imath(K,\mathcal{T}))=(\mathrm{adh}(A))^c\cap K$
4. $\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))=(\mathrm{adh}(A^c\cap K))^c\cap K$*, en particulier si K est un ouvert de $\mathbb{R}$ alors*

$$\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))=\mathrm{int}(A)$$

(iv) Si B est un sous-ensemble de K alors

$$\mathrm{int}(A\cap B,\imath(K,\mathcal{T}))=\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))\cap\mathrm{int}(B,\imath(K,\mathcal{T}))\quad\text{et}\quad\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))\cup\mathrm{int}(B,\imath(K,\mathcal{T}))\subset\mathrm{int}(A\cup B,\imath(K,\mathcal{T}))$$

(v) Si B est un sous-ensemble de K alors

$$\mathrm{adh}(A\cap B,\imath(K,\mathcal{T}))\subset\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))\cap\mathrm{adh}(B,\imath(K,\mathcal{T}))\quad\text{et}\quad\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))\cup\mathrm{adh}(B,\imath(K,\mathcal{T}))=\mathrm{adh}(A\cup B,\imath(K,\mathcal{T}))$$

Preuve

(i)

a D'après le lemme [10.15] page 685 l'ensemble $\imath(K,\mathcal{T})$ des ouverts de K est stable par réunions quelconques , par suite

$$\bigcup_{U\in\mathcal{G}(A)}U\in\imath(K,\mathcal{T})$$

ainsi $\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$ est un ouvert de K. De plus puisque $U\in\mathcal{G}(A)\Rightarrow U\subset A$ on obtient $\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))\subset A$.

b D'après le lemme [10.15] page 685 l'ensemble $\mathcal{F}(K,\mathcal{T})$ des fermés de K est stable par intersections quelconques , par suite

$$\bigcap_{F\in\mathcal{H}(A)}F\in\mathcal{F}(K,\mathcal{T})$$

ainsi $\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$ est un fermé de K. De plus puisque $F\in\mathcal{H}(A)\Rightarrow A\subset F$ on obtient l'inclusion $A\subset\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$.

On montre maintenant les points 1 à 3.

1. D'abord si A est $\imath(K,\mathcal{T})$-ouvert alors $A\in\mathcal{G}(A)$ par suite $A\subset\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$ et

$$A\subset\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))\subset A$$

Ensuite si $A=\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$ alors d'après a A est $\imath(K,\mathcal{T})$-ouvert.

2. D'abord si A est $\imath(K,\mathcal{T})$-fermé alors $A \in \mathcal{H}(A)$ par suite $\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T})) \subset A$ et

$$A \subset \mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T})) \subset A$$

Ensuite si $A = \mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$ alors d'après b A est $\imath(K,\mathcal{T})$-fermé.

3. (a) Si il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap K \subset A$ alors l'ensemble $U =]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap K$ est un élément de $\mathcal{G}(A)$ tel que $x \in U$ par suite

$$x \in \mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$$

(b) si $x \in \mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$ alors puisque $\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$ est $\imath(K,\mathcal{T})$-ouvert il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que

$$\mathrm{int}(A,\imath(K,\mathcal{T})) = O \cap K$$

puisque $x \in O$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O$ par suite $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap K \subset O \cap K \subset A$

(ii)

Il suffit de remarquer

$$A \subset B \Rightarrow \mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(B) \subset \mathcal{H}(A)$$

(iii)

1. On montre $\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T})) = \mathrm{adh}(A) \cap K$.

(a) D'abord puisque $\mathrm{adh}(A)$ est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant A (voir par exemple le lemme [10.14] page 683) le lemme [10.15] page 685 montre que $\mathrm{adh}(A) \cap K$ est un fermé de K contenant A par suite $\mathrm{adh}(A) \cap K \in \mathcal{H}(A)$ et l'égalité

$$\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T})) = \bigcap_{F \in \mathcal{H}(A)} F$$

montre que $\mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T})) \subset \mathrm{adh}(A) \cap K$.

(b) Ensuite si $F \in \mathcal{H}(A)$ alors $A \subset F$ et le lemme [10.15] page 685 montre qu'il existe un fermé H de $\mathbb{R}$ tel que $F = H \cap K$, un tel fermé H contient A ainsi le lemme [10.13] page 677 montre que $\mathrm{adh}(A) \subset H$, par suite $\mathrm{adh}(A) \cap K \subset F$ et $\mathrm{adh}(A) \cap K$ est inclus dans tout élément de $\mathcal{H}(A)$ ainsi :

$$\mathrm{adh}(A) \cap K \subset \mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))\ .$$

2. (a) si $x \in \mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))$ alors $x \in \mathrm{adh}(A)$ par suite pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing$$

(b) si $x \in K$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing$$

alors $x \in \mathrm{adh}(A) \cap K$ par suite d'après 1

$$x \in \mathrm{adh}(A,\imath(K,\mathcal{T}))\ .$$

3. On montre $\mathrm{int}(A^c \cap K,\imath(K,\mathcal{T})) = \mathrm{int}(A^c) \cap K = (\mathrm{adh}(A))^c \cap K$

(a) D'abord puisque $\mathrm{int}(A^c) \cap K$ est un $\imath(K,\mathcal{T})$-ouvert inclus dans $A^c \cap K$ on a

$$\mathrm{int}(A^c) \cap K \subset \mathrm{int}(A^c \cap K,\imath(K,\mathcal{T}))$$

(b) Ensuite si U est un $\imath(K,\mathcal{T})$-ouvert inclus dans $A^c \cap K$ alors il existe un ouvert O de $\mathbb{R}$ tel que $U = O \cap K$. Puisque $A \subset K$ on a $O \cap A = (O \cap K) \cap A = U \cap A = \varnothing$, ainsi $O \subset A^c$ et $O \subset \mathrm{int}(A^c)$ par suite , puisque $U = O \cap K$, on obtient $U \subset \mathrm{int}(A^c) \cap K$, ce qui montre que

$$\mathrm{int}(A^c \cap K,\imath(K,\mathcal{T})) \subset \mathrm{int}(A^c) \cap K\ .$$

(c) Enfin la définition de l'adhérence (voir définition [10.17] page 677) donne l'égalité $(\text{adh}(A))^c = \text{int}(A^c)$

4. Si on pose $B = A^c \cap K$ alors $B^c \cap K = (A \cup K^c) \cap K = A \cap K = A$ et l'égalité ($\mathit{2}$) montre que
$$\text{int}(B^c \cap K, \imath(K, \mathcal{T})) = (\text{adh}(B))^c \cap K$$
ce qui s'écrit
$$\text{int}(A, \imath(K, \mathcal{T})) = (\text{adh}(A^c \cap K))^c \cap K \ .$$

(iv)

1. D'abord d'après *(iii)* on a , puisque $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
$$\text{int}(A \cap B, \imath(K, \mathcal{T})) = (\text{adh}(A^c \cup B^c) \cap K)^c \cap K$$
et le lemme [10.13] page 677 montre que $\text{adh}((A^c \cup B^c) \cap K) = \text{adh}(A^c \cap K) \cup \text{adh}(B^c \cap K)$ ainsi
$$\text{int}(A \cap B, \imath(K, \mathcal{T})) = (\text{adh}(A^c \cap K))^c \cap K \cap (\text{adh}(B^c \cap K))^c \cap K = \text{int}(A, \imath(K, \mathcal{T})) \cap \text{int}(B, \imath(K, \mathcal{T}))$$

2. Ensuite puisque $\text{int}(A, \imath(K, \mathcal{T})) \cup \text{int}(B, \imath(K, \mathcal{T}))$ est $\imath(K, \mathcal{T})$-ouvert et inclus dans $A \cup B$ on a
$$\text{int}(A, \imath(K, \mathcal{T})) \cup \text{int}(B, \imath(K, \mathcal{T})) \subset \text{int}(A \cup B, \imath(K, \mathcal{T}))$$

(v)

1. Puisque $\text{adh}(A, \imath(K, \mathcal{T})) \cap \text{adh}(B, \imath(K, \mathcal{T}))$ est $\imath(K, \mathcal{T})$-fermé et contient $A \cap B$ on a
$$\text{adh}(A \cap B, \imath(K, \mathcal{T})) \subset \text{adh}(A, \imath(K, \mathcal{T})) \cap \text{adh}(B, \imath(K, \mathcal{T})) \ .$$

2. D'après *(iii)* on a
$$\text{adh}(A \cup B, \imath(K, \mathcal{T})) = \text{adh}(A \cup B) \cap K$$
et le lemme [10.13] page 677 $\text{adh}(A \cup B) = \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$ ainsi on obtient
$$\text{adh}(A \cup B, \imath(K, \mathcal{T})) = (\text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)) \cap K = (\text{adh}(A) \cap K) \cup (\text{adh}(B) \cap K)$$
et *(iii)* montre que
$$(\text{adh}(A) \cap K) \cup (\text{adh}(B) \cap K) = \text{adh}(A, \imath(K, \mathcal{T})) \cup \text{adh}(B, \imath(K, \mathcal{T}))$$

■

On a vu que si K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ alors l'ensemble vide et K sont des ensemble à la fois $\imath(K, \mathcal{T})$-ouverts et $\imath(K, \mathcal{T})$-fermés. Si ces ensembles sont les seuls sous-ensembles de K à la fois $\imath(K, \mathcal{T})$-ouverts et $\imath(K, \mathcal{T})$-fermés on dit que K est connexe.

III *Connexité dans* $\mathbb{R}$

On introduit une définition .

Définition 10.21 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels et* K *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$*,* K *est dit* ***connexe*** *si les seuls sous-ensembles à la fois* $\imath(K, \mathcal{T})$*-ouverts et* $\imath(K, \mathcal{T})$*-fermés sont* K *et l'ensemble vide.*

On montre dans le lemme suivant que les seuls sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Lemme 10.17 *On note* ($\mathbb{R}$, + , . , $\leq$) *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $\Gamma(K)$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ *défini par*

$$\Gamma(K) = \{(O_0, O_1) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} / K \cap O_0 \cap O_1 = \varnothing \quad \text{et} \quad K = (O_0 \cap K) \cup (O_1 \cap K)\}$$

(i) Pour que K *soit connexe il faut et il suffit que l'ensemble* $\Phi(K)$ *défini par*

$$\Phi(K) = \{(O_0, O_1) \in \Gamma(K)/ \ O_0 \cap K \neq \varnothing \quad \text{et} \quad O_1 \cap K \neq \varnothing\}$$

soit vide.

(ii) Si K *n'est pas un intervalle ,* K *n'est pas connexe.*

(iii) Les seuls sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Preuve

(i)

I On montre que si K n'est pas connexe il existe $(O_0, O_1) \in \Gamma(K)$ tel que $(K \cap O_0) \neq \varnothing$ et $K \cap O_1 \neq \varnothing$. Si U est un sous-ensemble strict non vide de K qui est $\imath(K, \mathcal{T})$ ouvert et fermé alors

1. puisque U est $\imath(K, \mathcal{T})$ ouvert il existe $O_0 \in \mathcal{T}$ tel que $U = O_0 \cap K$,
2. puisque U est $\imath(K, \mathcal{T})$ fermé il existe $O_1 \in \mathcal{T}$ tel que $U^c \cap K = O_1 \cap K$.

Ainsi on obtient

$$O_0 \cap O_1 \cap K = (O_0 \cap K) \cap (O_1 \cap K) = U \cap (U^c \cap K) = \varnothing$$

et

$$(O_0 \cap K) \cup (O_1 \cap K) = U \cup (U^c \cap K) = K$$

D'autre part , puisque $U \neq \varnothing$ on a $K \cap O_0 \neq \varnothing$ et puisque $U \neq K$ on a $K \cap O_1 \neq \varnothing$.

II On montre que s'il existe $(O_0, O_1) \in \Gamma(K)$ avec $K \cap O_0 \neq \varnothing$ et $K \cap O_1 \neq \varnothing$ alors K n'est pas connexe. Posons $U = K \cap O_0$ alors il résulte de l'égalité $K \cap O_0 \cap O_1 = \varnothing$ que $U^c \cap K = K \cap O_1$ ainsi U est à la fois $\imath(K, \mathcal{T})$ ouvert et $\imath(K, \mathcal{T})$ fermé , d'autre part

— puisque $K \cap O_0 \neq \varnothing$ on a $U \neq \varnothing$

— puisque $K \cap O_1 \neq \varnothing$ et $U^c \cap K = K \cap O_1$ on a $U \neq K$

(ii)

D'après le lemme [10.11] page 656 , si K n'est pas un intervalle il existe $(a, b) \in K \times K$ tel que $[a, b] \cap K^c \neq \varnothing$. On montre que si $c \in [a, b] \cap K^c$ l'ensemble $U = K \cap]c, \rightarrow[$ est $\imath(K, \mathcal{T})$ ouvert et fermé.

— Puisque $]c, \rightarrow[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (voir lemme [10.13] page 677 par exemple) on a $U \in \imath(K, \mathcal{T})$

— De l'égalité $U^c \cap K = K \cap] \leftarrow, c]$ et du fait que $c \notin K$ on déduit

$$U^c \cap K = K \cap] \leftarrow, c[$$

par suite $U^c \cap K \in \imath(K, \mathcal{T})$.

(iii)

D'après (ii) il reste à montrer que tout intervalle est connexe. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, si I n'est pas connexe (i) permet d'affirmer qu'il existe $(O_0, O_1) \in \Gamma(I)$ tel que $O_0 \cap I \neq \varnothing$ et $O_1 \cap I \neq \varnothing$. Soit $(a, b) \in (O_0 \cap I) \times (O_1 \cap I)$, sans perdre de généralité on peut supposer $a < b$. On pose

$$A = \{t \in [a, b]/[a, t] \subset O_0\} \quad \text{et} \quad B = \{t \in [a, b]/[t, b] \subset O_1\} \ .$$

Puisque A est majoré par b , l'ensemble A possède une borne supérieure notée τ, de même B étant minoré par a il possède une borne inférieure notée λ. On montre

1. $\tau \in [a, b]$ et $\tau \in I$
2. $\lambda \in [a, b]$ et $\lambda \in I$

3. $[a,\tau[\subset A$, $\tau\in O_1\cap I$ et $A=[a,\tau[$
4. $]\lambda,b]\subset B$, $\lambda\in O_0\cap I$ et $B=]\lambda,b]$
5. $$\tau=\inf\{t:t\in O_1\cap[a,b]\}=\min\{t:t\in O_1\cap[a,b]\}$$
   et
   $$\lambda=\sup\{t:t\in O_0\cap[a,b]\}=\max\{t:t\in O_0\cap[a,b]\}$$
6. $O_0\cap O_1\cap I\neq\varnothing$ et $(O_0,O_1)\notin\Gamma(I)$.

1. Puisque b est un majorant de A et τ est le plus petit majorant de A on a $\tau\leq b$, puisque $a\in A$ et τ est un majorant de A on a $a\leq\tau$, ainsi $\tau\in[a,b]$. Puisque I est un intervalle et $(a,b)\in I\times I$ on a (voir lemme [10.11] page 656) $[a,b]\subset I$ ainsi $\tau\in I$
2. Puisque a est un minorant de B et λ est le plus grand minorant de B on a $\lambda\geq a$, puisque $b\in B$ et λ est un minorant de B on a $\lambda\leq b$, ainsi $\lambda\in[a,b]$. Puisque I est un intervalle et $(a,b)\in I\times I$ on a (voir lemme [10.11] page 656) $[a,b]\subset I$ ainsi $\lambda\in I$
3. (a) si $t\in[a,\tau[$ alors t n'est pas un majorant de A puisque τ est le plus petit majorant de A, ainsi il existe $x\in A$ tel que $t\leq x$, par suite $[a,t]\subset[a,x]\subset O_0$ et $t\in A$
   (b) si $\tau=b$ alors $\tau\in O_1\cap I$, si $\tau<b$ et $\tau\in O_0$ alors d'après le théorème [10.4] page 670 il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon[\subset O_0$. Si $0<\rho<\min\{\varepsilon,b-\tau\}$ alors $[\tau\ ,\tau+\rho]\subset O_0$ par suite $[a,\tau+\rho]=[a,\tau[\cup[\tau,\tau+\rho]\subset O_0$ et ceci contredit le fait que τ est un majorant de A. Ainsi $\tau\notin O_0$ et puisque I est somme directe de $O_0\cap I$ et $O_1\cap I$ on obtient $\tau\in O_1\cap I$.
   (c) d'après (a) on a $[a,\tau[\subset A$ et puisque τ est un majorant de A on obtient
   $$[a,\tau[\subset A\subset[a,\tau]$$
   l'égalité $A=[a,\tau[$ provient alors de $\tau\notin A$ puisque $\tau\in O_1\cap I$.
4. (a) si $t\in]\lambda,b]$ alors t n'est pas un minorant de B puisque λ est le plus grand minorant de B, ainsi il existe $x\in B$ tel que $t\geq x$, par suite $[t,b]\subset[x,b]\subset O_1$ et $t\in B$
   (b) si $\lambda=a$ alors $\lambda\in O_0\cap I$, si $\lambda>a$ et $\lambda\in O_1$ alors d'après le théorème [10.4] page 670 il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[\subset O_1$. Si $0<\rho<\min\{\varepsilon,\lambda-a\}$ alors $[\lambda-\rho,\lambda]\subset O_1$ par suite $[\lambda-\rho,b]=[\lambda-\rho,\lambda]\cup]\lambda,b]\subset O_1$ et ceci contredit le fait que λ est un minorant de B. Ainsi $\lambda\notin O_1$ et puisque I est somme directe de $O_0\cap I$ et $O_1\cap I$ on obtient $\lambda\in O_0\cap I$.
   (c) d'après (a) on a $]\lambda,b]\subset B$ et puisque λ est un minorant de B on obtient
   $$]\lambda,b]\subset B\subset[\lambda,b]$$
   l'égalité $B=]\lambda,b]$ provient alors de $\lambda\notin B$ puisque $\lambda\in O_0\cap I$.
5. (a) τ est un minorant de $O_1\cap[a,b]$ puisque si $t\in O_1\cap[a,b]$ alors $t\notin A$ par suite l'égalité $A=[a,\tau[$ montre que $t\geq\tau$.
   (b) puisque $\tau\in O_1\cap[a,b]$ on obtient
   $$\tau=\min\{t:t\in O_1\cap[a,b]\}=\inf\{t:t\in O_1\cap[a,b]\}$$
   (c) λ est un majorant de $O_0\cap[a,b]$ puisque si $t\in O_0\cap[a,b]$ alors $t\notin B$ par suite l'égalité $B=]\lambda,b]$ montre que $t\leq\lambda$.
   (d) puisque $\lambda\in O_0\cap[a,b]$ on obtient
   $$\lambda=\max\{t:t\in O_0\cap[a,b]\}=\sup\{t:t\in O_0\cap[a,b]\}$$
6. On montre que le fait que $O_0\cap[a,b]$ posséde un maximum entraîne la contradiction voulu.
   — Puisque $B=]\lambda,b]$ et $B\subset O_1\cap[a,b]$ on a $]\lambda,b]\subset O_1\cap[a,b]$

— puisque $O_1 \cap [a,b] = O_0^c \cap [a,b]$ on obtient $]\lambda, b] \subset O_0^c$
— le lemme [10.13] page 677 montre alors que,puisque $\mathrm{adh}(O_0^c) = O_0^c$,

$$\mathrm{adh}(]\lambda, b]) \subset \mathrm{adh}(O_0^c) \quad \text{et} \quad [\lambda, b] \subset O_0^c$$

ainsi $\lambda \in O_0^c \cap [a,b]$ et puisque $O_0^c \cap [a,b] = O_1 \cap [a,b]$ on obtient, en tenant compte de 4

$$\lambda \in O_1 \cap O_0 \cap [a,b]$$

ce qui contredit l'égalité $O_0 \cap O_1 \cap I = \varnothing$.

■

Afin de définir des limites sur les fonctions à valeurs réelles on a besoin d'outils rigoureux.

10.6 *Filtres et ultrafiltres*

10.6.1 *Définition*

On introduit quelques définitions.

Définition 10.22 *On note X un ensemble non vide et K un sous-ensemble non vide de X, un* ***filtre*** *sur K est un sous-ensemble non vide Φ de $\mathcal{P}(K)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\varnothing \notin \Phi$
2. *Φ est une section finissante de $(\mathcal{P}(K), \subset)$:*

$$[(A,B) \in \Phi \times \mathcal{P}(K) \quad \text{et} \quad A \subset B] \Rightarrow B \in \Phi$$

3. *Φ est stable par intersections finies :*

$$(A,B) \in \Phi \times \Phi \Rightarrow A \cap B \in \Phi\ .$$

On note $\mathbb{F}(K)$ l'ensemble des filtres sur K.

Lorsque $K = X$ on parle simplement de filtre. Si A est un sous-ensemble non vide de X le sous-ensemble Φ de $\mathcal{P}(X)$ défini par

$$\Phi = \{U \in \mathcal{P}(X) / A \subset U\}$$

est un filtre. La plupart des filtres utiles en analyse sont construits à partir de « base de filtre » .

Définition 10.23 *Soit X un ensemble non vide, un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ est appelé une* ***base de filtre*** *sur X si*

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}$
2. *pour tout $(A,B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ il existe $C \in \mathcal{B}$ tel que*

$$C \subset A \cap B$$

Il est clair qu'une base de filtre est centrée au sens suivant.

Définition 10.24 *On note X un ensemble, un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}(X)$ est dit* ***centré*** *si toute intersection fini d'éléments de $\mathcal{E}$ est non vide : pour tout ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}\ , O)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute application $E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{E})$ on a*

$$\bigcap_{k=0}^{n} E_k \neq \varnothing\ .$$

Pour tout ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}\ , O)$ on note $\mathcal{E}_p$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}_p = \{A \in \mathcal{P}(X) / \exists\ n \in \mathbb{N}, \exists\ E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{E}) : A = \bigcap_{k=0}^{n} E_k\}$$

Exercice 10.1 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels et* X *un ensemble,* $\mathcal{E}$ *un sous-ensemble de* $\mathcal{P}(X)$ *et*

$$\mathcal{E}_p = \{A \in \mathcal{P}(X) / \exists\ n \in \mathbb{N}, \exists\ E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{E}) : A = \bigcap_{k=0}^{n} E_k\}\ .$$

Pour que $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}$ *il faut et il suffit que la condition* $\mathcal{C}$ *suivante soit vérifiée :*

$$\mathcal{C} : \quad (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}\ .$$

Preuve

I On montre que si $\mathcal{C}$ est vérifiée alors $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}$.

Il est clair que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_p$ il suffit donc de montrer $\mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}$. Si $A \in \mathcal{E}_p$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{E})$ tels que

$$A = \bigcap_{k=0}^{n} E_k$$

On pose

$$U = \{p \in \mathbb{N}_n / \bigcap_{k=0}^{p} E_k \in \mathcal{E}\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$ en vérifiant (voir lemme [5.10] page 111)

1. $0 \in U$
2. $[p \in U \quad \text{et} \quad p < n] \Rightarrow p + 1 \in U$

1. $0 \in U$ puisque $E_0 \in \mathcal{E}$
2. si $p < n$ et $p \in U$ alors l'ensemble $B = \bigcap_{k=0}^{p} E_k$ appartient à $\mathcal{E}$, l'égalité

$$\bigcap_{k=0}^{p+1} E_k = B \cap E_{p+1}$$

montre que $\bigcap_{k=0}^{p+1} E_k$ est l'intersection de deux éléments de $\mathcal{E}$, ainsi la propriété $\mathcal{C}$ entraîne que $p + 1 \in U$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$, en particulier $n \in U$ et puisque $A = \bigcap_{k=0}^{n} E_k$ on obtient $A \in \mathcal{E}$.

II On montre que si $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}$ alors $\mathcal{C}$ est vérifiée.

Il est clair que si $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ alors $A \cap B \in \mathcal{E}_p$. ∎

Comme sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ l'ensemble $\mathbb{F}(X)$ des filtres sur X est ordonné par l'inclusion on montre dans le lemme qui suit que $(\mathbb{F}(X), \subset)$ est inductif.

Lemme 10.18 *On note* $(\mathbb{N}, O)$ *un ensemble d'entiers naturels,* X *un ensemble non vide et* K *un sous-ensemble non vide de* X *.*

(i) L'ensemble ordonné $(\mathbb{F}(K), \subset)$ *des filtres sur* K *muni de l'inclusion est inductif.*

(ii) Tout filtre sur K *est majoré par un élément maximal, en d'autres termes pour tout* $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ *il existe* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}(K)$ *tel que*

1. $\Phi \subset \mathcal{U}$

2. le seul filtre contenant $\mathcal{U}$ *est* $\mathcal{U}$

(iii) Si $\mathcal{B}$ *est une base de filtre sur* K *le sous-ensemble* $\Phi(\mathcal{B})$ *de* $\mathcal{P}(K)$ *défini par*

$$\Phi(\mathcal{B}) = \{U \in \mathcal{P}(K) / \exists\ B \in \mathcal{B} : B \subset U\}$$

est un filtre sur K *et tout filtre contenant* $\mathcal{B}$ *contient* $\Phi(\mathcal{B})$*.*

(iv) Si $\mathcal{E}$ *est une sous-famille centrée de* $\mathcal{P}(K)$ *alors* $\mathcal{E}_p$ *est une base de filtre sur* K *et tout filtre sur* K *contenant* $\mathcal{E}$ *contient* $\Phi(\mathcal{E}_p)$*. En particulier toute famille centrée de sous-ensembles de* K *est contenue dans un filtre.*

(v)Soit $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ *et* $A \notin \Phi$ *alors le sous-ensemble* Φ_A *de* $\mathcal{P}(K)$ *défini par*

$$\Phi_A = \{V \in \mathcal{P}(K) / A \cup V \in \Phi\}$$

est un filtre sur K *qui vérifie* $\Phi \subset \Phi_A$*.*

(vi) Soit X *et* Y *des ensembles,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, Y)$ *une application de* X *dans* Y*, si* Φ *est un filtre sur* X*, le sous-ensemble* $\Phi(f)$ *de* $\mathcal{P}(Y)$ *défini par*

$$\Phi(f) = \{B \in \mathcal{P}(Y) / f^{-1}(B) \in \Phi\}$$

est un filtre sur Y

Preuve Dans toute la preuve $(\mathbb{N}\ , O)$ désigne un ensemble d'entiers naturels

(i)

Soit $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}(K)$ une famille de filtre sur K totalement ordonnée pour l'inclusion , on montre que le sous-ensemble Λ de $\mathcal{P}(K)$ défini par

$$\Lambda = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{F}} \Phi = \{A \in \mathcal{P}(K) / \exists\ \Phi \in \mathcal{F} : A \in \Phi\}$$

est un filtre.

1. Il est clair que $\varnothing \notin \Lambda$ puisque pour tout $\Phi \in \mathcal{F}$ on a $\varnothing \notin \Phi$.
2. Soit $(A, B) \in \Lambda \times \mathcal{P}(K)$ tels que $A \subset B$
   — puisque $A \in \Lambda$ il existe $\Phi \in \mathcal{F}$ tel que $A \in \Phi$,
   — Φ étant un filtre on obtient $B \in \Phi$ ainsi $B \in \Lambda$.
3. Si $(A, B) \in \Lambda \times \Lambda$ il existe $\Phi_0 \in \mathcal{F}$ et $\Phi_1 \in \mathcal{F}$ tels que $A \in \Phi_0$ et $B \in \Phi_1$. Puisque $\mathcal{F}$ est totalement ordonné pour l'inclusion on a $\Phi_0 \subset \Phi_1$ ou $\Phi_1 \subset \Phi_0$
   — si $\Phi_0 \subset \Phi_1$ alors $(A, B) \in \Phi_1 \times \Phi_1$ par suite $A \cap B \in \Phi_1$ et $A \cap B \in \Lambda$,
   — si $\Phi_1 \subset \Phi_0$ alors $(A, B) \in \Phi_0 \times \Phi_0$ par suite $A \cap B \in \Phi_0$ et $A \cap B \in \Lambda$.
   Enfin il est clair que Λ est un majorant de $\mathcal{F}$ pour l'inclusion puisque $\Phi \in \mathcal{F} \Rightarrow \Phi \subset \Lambda$.

(ii)

Puisque $\mathbb{F}(K)$ est inductif pour l'inclusion le lemme de Zorn (voir lemme [2.5] page 50) montre que tout filtre sur K est majoré par un élément maximal.

(iii)

1. $\varnothing \notin \Phi(\mathcal{B})$ puisque $\varnothing \notin \mathcal{B}$.
2. Soit $(U, V) \in \Phi(\mathcal{B}) \times \mathcal{P}(K)$ tel que $U \subset V$, alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset U$ par suite $B \subset V$ et $V \in \Phi(\mathcal{B})$

3. Soit $(U, V) \in \Phi(\mathcal{B}) \times \Phi(\mathcal{B})$ alors il existe $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{B}$ tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de filtre il existe $C \in \mathcal{B}$ tel que $C \subset A \cap B$ par suite $C \subset U \cap V$ et $U \cap V \in \Phi(\mathcal{B})$.
4. Si $\mathbf{F}$ est un filtre contenant $\mathcal{B}$ alors tout élément de $\Phi(\mathcal{B})$ contient un élément de $\mathbf{F}$ et appartient donc à $\mathbf{F}$.

(iv)

I On montre que $\mathcal{E}_p$ est une base de filtre.

1. Par définition d'une famille centrée $\varnothing \notin \mathcal{E}_p$.
2. Pour montrer la deuxième propriété d'une base de filtre il suffit de montrer que $\mathcal{E}_p$ est stable par intersections finies. Si $A \in \mathcal{E}_p$ et $B \in \mathcal{E}_p$ alors il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_p, \mathcal{E})$ et $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_q, \mathcal{E})$ tels que
$$A = \bigcap_{k=0}^{p} E_k \quad \text{et} \quad B = \bigcap_{j=0}^{q} F_j$$
Si G est l'application de $\mathbb{N}_{p+q+1}$ dans $\mathcal{E}$ définie par
$$G_k = \begin{cases} E_k & si \quad 0 \leq k \leq p \\ F_{k-(p+1)} & si \quad p+1 \leq k \leq p+q+1 \end{cases}$$
l'égalité
$$A \cap B = \bigcap_{l=0}^{p+q+1} G_l$$
montre que $A \cap B \in \mathcal{E}_p$.

II On montre que tout filtre contenant $\mathcal{E}$ contient $\Phi(\mathcal{E}_p)$.

D'après (iii) il suffit de montrer que tout filtre contenant $\mathcal{E}$ contient $\mathcal{E}_p$. Soit $\mathbf{F}$ un filtre vérifiant $\mathcal{E} \subset \mathbf{F}$, on montre que $\mathcal{E}_p \subset \mathbf{F}$. Si $A \in \mathcal{E}_p$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une application $E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{E})$ tel que $A = \bigcap_{k=0}^{n} E_k$,on pose
$$U = \{p \in \mathbb{N}_n / \bigcap_{k=0}^{p} E_k \in \mathbf{F}\}$$
et on montre que $U = \mathbb{N}_n$

1. D'abord $0 \in U$ puisque $E_0 \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{E} \subset \mathbf{F}$.
2. Ensuite si $p \in U$ et $p < n$ alors l'ensemble $B = \bigcap_{k=0}^{p} E_k$ est un élément de $\mathbf{F}$ ainsi puisque $E_{p+1} \in \mathbf{F}$ et $\mathbf{F}$ est stable par intersections finies l'égalité
$$\bigcap_{k=0}^{p+1} E_k = B \cap E_{p+1}$$
montre que $p + 1 \in U$

Ainsi on obtient $n \in U$ et $A \in \mathbf{F}$.

(v)

1. $\varnothing \notin \Phi_A$ puisque $A \notin \Phi$.
2. Si $(V, U) \in \Phi_A \times \mathcal{P}(K)$ et $V \subset U$ l'inclusion $A \cup V \subset A \cup U$ montre que $A \cup U$ contient un élément de Φ et appartient donc à Φ.

3. Si $(U, V) \in \Phi_A \times \Phi_A$ l'égalité

$$A \cup (U \cap V) = (A \cup U) \cap (A \cup V)$$

et la stabilité de Φ par intersections finies montrent que $U \cap V \in \Phi_A$.

4. Si $U \in \Phi$ alors $A \cup U$ contient un élément de Φ et appartient donc à Φ, par suite $\Phi \subset \Phi_A$.

(vi)

1. $\varnothing \notin \Phi(f)$ puisque $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $\varnothing \notin \Phi$.
2. Si $(A, B) \in \Phi(f) \times \mathcal{P}(Y)$ et $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \in \Phi$ et l'inclusion $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ montre que $f^{-1}(B)$ contient un élément de Φ et appartient donc à Φ, par suite $B \in \Phi(f)$.
3. Si $(A, B) \in \Phi(f) \times \Phi(f)$ l'égalité $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ montre que $f^{-1}(A \cap B)$ est l'intersection de deux éléments de Φ, par suite $A \cap B \in \Phi(f)$.

■

Le lemme [10.18] page 694 permet d'énoncer quelques définitions.

Définition 10.25 *On note X un ensemble non vide et K un sous-ensemble non vide de X, si $\mathcal{B}$ est une base de filtre sur K le filtre*

$$\Phi(\mathcal{B}) = \{U \in \mathcal{P}(K) / \exists\ B \in \mathcal{B} : B \subset U\}$$

*est appelé le **filtre engendré** par $\mathcal{B}$.*

Définition 10.26 *On note X et Y des ensembles non vides, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, Y)$ une application de X dans Y et Φ un filtre sur X . Le filtre*

$$\Phi(f) = \{B \in \mathcal{P}(Y) / f^{-1}(B) \in \Phi\}$$

*est appelé le **filtre image** de Φ par f.*

Enfin un filtre maximal pour l'inclusion est appelé un ultrafiltre.

Définition 10.27 *On note X un ensemble non vide , K un sous-ensemble non vide de X et $\mathbb{F}(K)$ l'ensemble des filtres sur K, un élément maximal de l'ensemble ordonné $(\mathbb{F}(K), \subset)$ est appelé un **ultrafiltre**.*

Le lemme ensembliste utile sur les ultrafiltres est le suivant.

Lemme 10.19 *On note $(\mathbb{N}, O)$ un ensemble d'entiers naturels, X un ensemble non vide, K un sous-ensemble non vide de X et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur K.*

(i) Si A est un sous-ensemble de X alors soit $A \cap K \in \mathcal{U}$ soit $A^c \cap K \in \mathcal{U}$:

$$A \cap K \notin \mathcal{U} \Leftrightarrow A^c \cap K \in \mathcal{U}$$

(ii) Si $n \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{P}(K))$ pour que $\bigcup_{k=0}^{n} B_k \in \mathcal{U}$ il faut et il suffit qu'il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $B_k \in \mathcal{U}$.

Preuve

(i)

I On montre $A \cap K \notin \mathcal{U} \Rightarrow A^c \cap K \in \mathcal{U}$

Si $A \cap K \notin \mathcal{U}$ le lemme [10.18] page 694 montre que l'ensemble

$$\mathcal{U}_A = \{B \in \mathcal{P}(K) / B \cup (A \cap K) \in \mathcal{U}\}$$

est un filtre sur K contenant $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ étant un ultrafiltre on obtient $\mathcal{U} = \mathcal{U}_A$. Or pour tout filtre Φ sur K, $K \in \Phi$, par suite $A^c \cap K \in \mathcal{U}_A$ et $A^c \cap K \in \mathcal{U}$.

II On montre $A^c \cap K \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap K \notin \mathcal{U}$.

En effet, si $A^c \cap K$ et $A \cap K$ sont des éléments de $\mathcal{U}$ la stabilité de $\mathcal{U}$ par intersections finies montre que $\varnothing \in \mathcal{U}$, ce qui contredit la définition d'un filtre.

(ii)

1. On montre que si $B_k \notin \mathcal{U}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ alors $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k \notin \mathcal{U}$.

   Si pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ $B_k \notin \mathcal{U}$ alors (i) permet d'affirmer que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ on a $B_k^c \cap K \in \mathcal{U}$, puisque $\mathcal{U}$ est stable par intersections finies on obtient (voir par exemple l'exercice [10.1] page 694)
$$\bigcap_{k=0}^{n} (B_k^c \cap K) \in \mathcal{U}\ .$$
   L' égalité $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} (B_k^c \cap K) = (\bigcup_{k=0}^{n} B_k)^c \cap K$ montre alors (encore (i)) que $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k \notin \mathcal{U}$.

2. On montre que si $B_k \in \mathcal{U}$ pour un $k \in \mathbb{N}_n$ alors $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k \in \mathcal{U}$.

   En effet dans ce cas $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k$ contient un élément du filtre $\mathcal{U}$ et est donc un élément de $\mathcal{U}$.

■

Pour généraliser trivialement le théorème [10.1] page 603 on peut définir des limites supérieures et inférieures le long des filtres pour des fonctions à valeurs dans un corps de réels.

10.6.2 *Limite supérieure et inférieure le long des filtres pour les fonctions bornées à valeurs dans un corps de réels*

Dans cette section on travaille autour de la définition suivante qui utilise les définitions [10.2] page 590 et les notations [10.1] page 591 :

Définition 10.28 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* X *un ensemble non vide,* K *un sous-ensemble non vide de* X*,* $\mathbb{F}(K)$ *l'ensemble des filtres sur* K *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *une application bornée de* K *dans* $\mathbb{R}$*.*

1. *On appelle* ***limite supérieure*** *de* f *le long des filtres sur* K *l'application* l^* *de* $\mathbb{F}(K)$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*
$$l^*(\Phi) = \inf_{V \in \Phi} (\sup_{x \in V} f(x))$$
   Pour tout $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ *le réel* $l^*(\Phi)$ *est appelé la* Φ*-limite supérieure de* f*, on le note*
$$l^*(\Phi) = \limsup_{\Phi} f$$
   Ainsi $\displaystyle\limsup_{\Phi} f$ *est le plus grand minorant du sous-ensemble* Λ^* *de* $\mathbb{R}$ *défini par*
$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ V \in \Phi : t = \sup_{x \in V} f(x)\}$$

*2. On appelle **limite inférieure** de f le long des filtres sur K l'application l_* de $\mathbb{F}(K)$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$l_*(\Phi) = \sup_{V\in\Phi}(\inf_{x\in V} f(x))$$

Pour tout $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ le réel $l_*(\Phi)$ est appelé la Φ-limite inférieure de f, on le note

$$l_*(\Phi) = \liminf_{\Phi} f$$

Ainsi $\liminf_{\Phi} f$ est le plus petit majorant du sous-ensemble Λ_* de $\mathbb{R}$ défini par

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ V \in \Phi : t = \inf_{x\in V} f(x)\}$$

Le théorème qui suit est une application directe des définitions.

Théorème 10.5 *On note $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ un corps de réels , X un ensemble non vide, K un sous-ensemble non vide de X, $\mathbb{F}(K)$ l'ensemble des filtres sur K et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ une application bornée de K dans $\mathbb{R}$.*

(i) Pour tout $\Phi \in \mathbb{F}(K)$

$$\inf_{x\in K} f(x) \leq \liminf_{\Phi} f \leq \limsup_{\Phi} f \leq \sup_{x\in K} f(x)$$

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ alors

1. pour que $\liminf_{\Phi} f > \lambda$ il faut et il suffit qu'il existe $V \in \Phi$ tel que

$$\inf_{x\in V} f(x) > \lambda$$

2. pour que $\limsup_{\Phi} f < \lambda$ il faut et il suffit qu'il existe $V \in \Phi$ tel que

$$\sup_{x\in V} f(x) < \lambda$$

(iii) Pour tout $\Phi \in \mathbb{F}(K)$

$$\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f = \inf_{V\in\Phi}(\sup_{(x,y)\in V\times V} |f(x) - f(y)|) \tag{10.55}$$

En d'autres termes $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ est le plus grand minorant du sous-ensemble Γ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ V \in \Phi : t = \sup_{(x,y)\in V\times V} |f(x) - f(y)|\}$$

(iv) Pour tout $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

I

$$\limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f$$

II *Il existe $l \in \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $V_\varepsilon \in \Phi$ tel que*

$$\sup_{x\in V_\varepsilon} |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

III *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $V_\varepsilon \in \Phi$ tel que*

$$\sup_{(v,y)\in V_\varepsilon\times V_\varepsilon} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\ .$$

(v) Pour tout $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ $\liminf_{\Phi} f$ est le plus petit élément de l'ensemble $\bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V))$:

$$\liminf_{\Phi} f = \min\{x : x \in \bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V))\}$$

(vi) Pour tout $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ $\limsup_{\Phi} f$ est le plus grand élément de l'ensemble $\bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V))$:

$$\limsup_{\Phi} f = \max\{x : x \in \bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V))\}$$

(vii) pour tout $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ on a $\bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V)) = \bigcap_{B\in\Phi(f)} \mathrm{adh}(B)$

(viii) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$
2. *il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$*

$$]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\in \Phi(f) \ .$$

(ix) Si $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ et $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ est un couple d'applications bornées de K dans $\mathbb{R}$ alors

$$\liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g = \sup_{V\in\Phi}(\inf_{x\in V} f(x) + \inf_{x\in V} g(x))$$

De plus l'application $f+g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ est bornée et

$$\liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g \leq \liminf_{\Phi}(f+g) \tag{10.56}$$

(x) Si $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ et $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ est un couple d'applications bornées de K dans $\mathbb{R}$ alors

$$\limsup_{\Phi} f + \limsup_{\Phi} g = \inf_{V\in\Phi}(\sup_{x\in V} f(x) + \sup_{x\in V} g(x))$$

et

$$\limsup_{\Phi}(f+g) \leq \limsup_{\Phi} f + \limsup_{\Phi} g \tag{10.57}$$

(xi) Si $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ et $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ est un couple d'applications bornées de K dans $\mathbb{R}$ et si il existe $V \in \Phi$ tel que pour tout $x \in V$ l'inégalité $f(x) \leq g(x)$ est vérifiée alors

$$\liminf_{\Phi} f \leq \liminf_{\Phi} g \quad \text{et} \quad \limsup_{\Phi} f \leq \limsup_{\Phi} g \tag{10.58}$$

(xii) Si $\Phi \in \mathbb{F}(K)$ et $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ est un couple d'applications bornées de K dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f \quad \text{et} \quad \liminf_{\Phi} g = \limsup_{\Phi} g$$

alors

$$\liminf_{\Phi}(f+g) = \limsup_{\Phi}(f+g) \tag{10.59}$$

(xiii) Si $\Phi \in \mathbb{F}(K)$, $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ est une application bornée de K dans $\mathbb{R}$ alors l'application $af \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ définie par $(af)(x) = af(x)$ est bornée et

1. *Si $a \geq 0$*

$$\liminf_{\Phi}(af) = a\liminf_{\Phi} f \quad \text{et} \quad \limsup_{\Phi}(af) = a\limsup_{\Phi} f \tag{10.60}$$

2. Si $a \le 0$

$$\liminf_{\Phi}(af) = a \limsup_{\Phi} f \quad \text{et} \quad \limsup_{\Phi}(af) = a \liminf_{\Phi} f \tag{10.61}$$

Preuve Dans toute la preuve On pose

$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ V \in \Phi : t = \sup_{x \in V} f(x)\}$$

et

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ V \in \Phi : t = \inf_{x \in V} f(x)\}$$

(i)

1. <u>On montre $\inf_{x \in K} f(x) \le \liminf_{\Phi} f$</u>

   Puisque $K \in \Phi$ on a $\inf_{x \in K} f(x) \in \Lambda_*$, or $\liminf_{\Phi} f$ est un majorant de Λ_*

2. <u>On montre $\liminf_{\Phi} f \le \limsup_{\Phi} f$</u>

   Il suffit de voir que pour tout $(U, V) \in \Phi \times \Phi$

   $$\inf_{x \in U} f(x) \le \sup_{x \in V} f(x)$$

   Or d'après [10.9] page 593 on a, puisque $U \cap V \ne \varnothing$,

   $$\inf_{x \in U} f(x) \le \inf_{x \in U \cap V} f(x) \le \sup_{x \in U \cap V} f(x) \le \sup_{x \in V} f(x)$$

   ainsi pour tout $V \in \Phi$ le réel $\sup_{x \in V} f(x)$ est un majorant de Λ_* et puisque $\liminf_{\Phi} f$ est le plus petit majorant de Λ_* on obtient

   $$V \in \Phi \Rightarrow \liminf_{\Phi} f \le \sup_{x \in V} f(x)$$

   En particulier $\liminf_{\Phi} f$ est un minorant de Λ^* et puisque $\limsup_{\Phi} f$ est le plus grand minorant de Λ^* on obtient

   $$\liminf_{\Phi} f \le \limsup_{\Phi} f$$

3. <u>On montre $\limsup_{\Phi} f \le \sup_{x \in K} f(x)$</u>

   Puisque $K \in \Phi$ on a $\sup_{x \in K} f(x) \in \Lambda^*$, or $\limsup_{\Phi} f$ est un minorant de Λ^* .

(ii)

1. Si $\liminf_{\Phi} f > \lambda$ alors λ n'est pas un majorant de Λ_* puisque $\liminf_{\Phi} f$ est le plus petit majorant de Λ_*, ainsi il existe $V \in \Phi$ tel que

   $$\inf_{x \in V} f(x) > \lambda \ .$$

   Inversement , si il existe $V \in \Phi$ tel que $\inf_{x \in V} f(x) > \lambda$ alors

   $$\liminf_{\Phi} f \ge \inf_{x \in V} f(x) > \lambda \ .$$

2. Si $\limsup_{\Phi} f < \lambda$ alors λ n'est pas un minorant de Λ^* puisque $\limsup_{\Phi} f$ est le plus grand minorant de Λ^*, ainsi il existe $V \in \Phi$ tel que

$$\sup_{x\in V} f(x) < \lambda \ .$$

Inversement , si il existe $V \in \Phi$ tel que $\sup_{x\in V} f(x) < \lambda$ alors

$$\limsup_{\Phi} f \leq \sup_{x\in V} f(x) < \lambda \ .$$

(iii)

D'après (10.6) page 593

$$\sup_{x\in V} f(x) - \inf_{x\in V} f(x) = \sup_{(x,y)\in V\times V} |f(x) - f(y)| \ ,$$

il suffit donc de vérifier que

$$\inf_{V\in\Phi} (\sup_{x\in V} f(x) - \inf_{x\in V} f(x)) = \limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$$

autrement dit il faut montrer que $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ est le plus grand minorant de l'ensemble Δ défini par

$$\Delta = \{t \in \mathbb{R} / \exists V \in \Phi : t = \sup_{x\in V} f(x) - \inf_{x\in V} f(x)\}$$

1. D'abord on montre que $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ est un minorant de Δ. En effet, puisque pour tout $V \in \Phi$ on a $\sup_{x\in V} f(x) \geq \limsup_{\Phi} f$ et $-\inf_{x\in V} f(x) \geq -\liminf_{\Phi} f$ la compatibilité de l'addition et de l'ordre montre que

$$V \in \Phi \Rightarrow \sup_{x\in V} f(x) - \inf_{x\in V} f(x) \geq \limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$$

Ainsi $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ est un minorant de l'ensemble Δ

2. Ensuite on montre que $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ est le plus grand minorant de Δ. En effet, si

$$\lambda > \limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$$

alors $\limsup_{\Phi} f < \lambda + \liminf_{\Phi} f$ ainsi *(ii)* montre qu'il existe $V_0 \in \Phi$ tel que $\sup_{x\in V_0} f(x) < \lambda + \liminf_{\Phi} f$, par suite

$$\sup_{x\in V_0} f(x) - \lambda < \liminf_{\Phi} f$$

et *(ii)* montre qu'il existe $V_1 \in \Phi$ tel que

$$\sup_{x\in V_0} f(x) - \lambda < \inf_{x\in V_1} f(x)$$

ainsi on obtient

$$\sup_{x\in V_0\cap V_1} f(x) - \lambda \leq \sup_{x\in V_0} f(x) - \lambda < \inf_{x\in V_1} f(x) \leq \inf_{x\in V_0\cap V_1} f(x)$$

et

$$\sup_{x\in V_0\cap V_1} f(x) - \inf_{x\in V_0\cap V_1} f(x) < \lambda$$

mais puisque $V_0 \cap V_1 \in \Phi$ on a $\sup_{x\in V_0\cap V_1} f(x) - \inf_{x\in V_0\cap V_1} f(x) \in \Delta$, ce qui montre que tout nombre réel strictement supérieur à $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ n'est pas un minorant de Δ.

On a donc vu que

$$\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f = \inf_{V\in\Phi}(\sup_{x\in V} f(x) - \inf_{x\in V} f(x)) = \inf_{V\in\Phi}(\sup_{(x,y)\in V\times V} |f(x)-f(y)|)$$

(iv)

1 On montre **I** $\Rightarrow$ **II**

Posons $l = \limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f$, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors

— puisque $\limsup_{\Phi} f < l+\varepsilon$ il existe (voir (ii)) $U_\varepsilon \in \Phi$ tel que

$$\sup_{x\in U_\varepsilon} f(x) < l+\varepsilon$$

— puisque $\liminf_{\Phi} f > l-\varepsilon$ il existe $W_\varepsilon \in \Phi$ tel que

$$\inf_{x\in W_\varepsilon} f(x) > l-\varepsilon$$

Ainsi en posant $V_\varepsilon = U_\varepsilon \cap W_\varepsilon$ alors $V_\varepsilon \in \Phi$ et

$$x \in V_\varepsilon \Rightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$$

2 On montre **II** $\Rightarrow$ **III**

Si la propriété **II** est vérifiée alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $V_\varepsilon \in \Phi$ tel que

$$\sup_{x\in V_\varepsilon} |f(x)-l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ainsi

$$(x,y) \in V_\varepsilon \times V_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq |f(x)-l| + |l-f(y)| \leq \varepsilon$$

3 On montre **III** $\Rightarrow$ **I**

La propriété **III** est une traduction de

$$\inf_{V\in\Phi}(\sup_{(x,y)\in V\times V} |f(x)-f(y)|) = 0$$

en effet, si l'ensemble $\Delta = \{t \in \mathbb{R}_+^* / \exists\ V \in \Phi : t = \sup_{(x,y)\in V\times V} |f(x)-f(y)|\}$ possède un minorant strictement positif ε alors

$$V \in \Phi \Rightarrow \sup_{(x,y)\in V\times V} |f(x)-f(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$$

l'égalité (10.55) page 699 montre alors que

$$\limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f\ .$$

(v)

1. <u>D'abord on montre que $\liminf_{\Phi} f \in \bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V))$</u>

   D'après le lemme [10.13] page 677 il faut montrer que pour tout $V \in \Phi$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

   $$]\liminf_{\Phi} f - \varepsilon\ ,\ \liminf_{\Phi} f + \varepsilon[\cap f(V) \neq \varnothing\ .$$

   Or si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

— d'après (ii) il existe $V_\varepsilon \in \Phi$ tel que

$$\inf_{x\in V_\varepsilon} f(x) > \liminf_\Phi f - \varepsilon$$

ainsi pour tout $V \in \Phi$ on obtient, puisque $V \cap V_\varepsilon \in \Phi$

$$\liminf_\Phi f - \varepsilon < \inf_{x\in V_\varepsilon} f(x) \leq \inf_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x) \leq \liminf_\Phi f$$

et

$$\liminf_\Phi f - \varepsilon < \inf_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x) < \inf_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x) + \varepsilon \leq \liminf_\Phi f + \varepsilon \tag{10.62}$$

— puisque par définition le réel $\inf_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x)$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$f(V \cap V_\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ x \in V \cap V_\varepsilon : t = f(x)\}$$

il existe $x_0 \in V \cap V_\varepsilon$ tel que $\inf_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x) \leq f(x_0) < \inf_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x) + \varepsilon$ et (10.62) montre que

$$f(x_0) \in]\liminf_\Phi f - \varepsilon\ ,\ \liminf_\Phi f + \varepsilon[\cap f(V)$$

2. Ensuite on montre que $\liminf_\Phi f$ est un minorant de $\bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V))$

Si $a \in \bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V))$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $V \in \Phi$

$$]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap f(V) \neq \varnothing$$

cela montre que pour tout $V \in \Phi$ on a

$$\inf_{x\in V} f(x) < a + \varepsilon$$

en effet, si $t \in]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap f(V)$ alors
— puisque $t \in f(V)$ il existe $x_V \in V$ tel que $t = f(x_V)$
— puisque $t < a + \varepsilon$ on obtient $f(x_V) < a + \varepsilon$ et

$$\inf_{x\in V} f(x) \leq f(x_V) < a + \varepsilon$$

et puisque par définition $\liminf_\Phi f = \sup_{V\in\Phi}(\inf_{x\in V} f(x))$ on obtient

$$\liminf_\Phi f \leq a + \varepsilon$$

cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient

$$\liminf_\Phi f \leq a\ .$$

(vi)

1. D'abord on montre que $\limsup_\Phi f \in \bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V))$

D'après le lemme [10.13] page 677 il faut montrer que pour tout $V \in \Phi$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]\limsup_\Phi f - \varepsilon\ ,\ \limsup_\Phi f + \varepsilon[\cap f(V) \neq \varnothing\ .$$

Or si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

— d'après (ii) il existe $V_\varepsilon \in \Phi$ tel que

$$\sup_{x\in V_\varepsilon} f(x) < \limsup_{\Phi} f + \varepsilon$$

ainsi pour tout $V \in \Phi$ on obtient, puisque $V \cap V_\varepsilon \in \Phi$

$$\limsup_{\Phi} f \leq \sup_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x) \leq \sup_{x\in V_\varepsilon} f(x) < \limsup_{\Phi} f + \varepsilon$$

et

$$\limsup_{\Phi} f - \varepsilon < \sup_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x) - \varepsilon \leq \sup_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x) < \limsup_{\Phi} f + \varepsilon \ . \tag{10.63}$$

— puisque par définition le réel $\sup\limits_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x)$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$f(V\cap V_\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ x \in V \cap V_\varepsilon : t = f(x)\}$$

il existe $x_0 \in V \cap V_\varepsilon$ tel que $\sup\limits_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x) - \varepsilon < f(x_0) \leq \sup\limits_{x\in V\cap V_\varepsilon} f(x)$ et (10.63) montre que

$$f(x_0) \in]\limsup_{\Phi} f - \varepsilon \ , \ \limsup_{\Phi} f + \varepsilon[\cap f(V)$$

2. Ensuite on montre que $\limsup\limits_{\Phi} f$ est un majorant de $\bigcap\limits_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V))$

Si $a \in \bigcap\limits_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V))$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $V \in \Phi$

$$]a-\varepsilon \ , \ a+\varepsilon[\cap f(V) \neq \varnothing$$

cela montre que pour tout $V \in \Phi$ on a

$$\sup_{x\in V} f(x) > a - \varepsilon$$

en effet, si $t \in]a-\varepsilon \ , \ a+\varepsilon[\cap f(V)$ alors
— puisque $t \in f(V)$ il existe $x_V \in V$ tel que $t = f(x_V)$
— puisque $t > a - \varepsilon$ on obtient $f(x_V) > a - \varepsilon$ et

$$\sup_{x\in V} f(x) \geq f(x_V) > a - \varepsilon$$

et puisque par définition $\limsup\limits_{\Phi} f = \inf\limits_{V\in\Phi} (\sup\limits_{x\in V} f(x))$ on obtient

$$\limsup_{\Phi} f \geq a - \varepsilon$$

cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient

$$\limsup_{\Phi} f \geq a \ .$$

(vii)

1 On montre $\bigcap\limits_{B\in\Phi(f)} \mathrm{adh}(B) \subset \bigcap\limits_{V\in\Phi} \mathrm{adh} f(V)$

Pour cela on remarque que pour tout $V \in \Phi$ on a $f(V) \in \Phi(f)$. En effet, l'inclusion $V \subset f^{-1}(f(V))$ montre que pour tout $V \in \Phi$ l'ensemble $f^{-1}(f(V))$ contient un élément de Φ, et appartient donc à Φ. Ainsi pour tout $V \in \Phi$

$$\bigcap_{B\in\Phi(f)} \mathrm{adh}(B) \subset \mathrm{adh}(f(V)) \ .$$

$$2 \ \text{ On montre } \bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V)) \subset \bigcap_{B\in\Phi(f)} \mathrm{adh}(B)$$

Pour cela on remarque que pour tout $B \in \Phi(f)$ il existe $V \in \Phi$ tel que $f(V) \subset B$. Par définition de $\Phi(f)$ pour tout $B \in \Phi(f)$ l'ensemble $V = f^{-1}(B) = \{x \in K / f(x) \in B\}$ est un élément de Φ ainsi, puisque $f(f^{-1}(B)) \subset B$ on a $f(V) \subset B$ et pour tout $B \in \Phi(f)$

$$\bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(f(V)) \subset \mathrm{adh}(B)$$

(viii)

1. Si $\limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f$ alors (iv) permet d'affirmer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ vérifiant la propriété que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $V_\varepsilon \in \Phi$ tel que

$$\sup_{x\in V_\varepsilon} |f(x) - l| < \varepsilon$$

Un tel V_ε vérifie $V_\varepsilon \subset f^{-1}(]l-\varepsilon \ , \ l+\varepsilon[)$ ainsi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble $f^{-1}(]l-\varepsilon \ , \ l+\varepsilon[)$ contient un élément du filtre Φ et appartient donc à Φ, ce qui montre que $]l-\varepsilon \ , \ l+\varepsilon[\in \Phi(f)$.

2. Dire que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $]l-\varepsilon \ , \ l+\varepsilon] \in \Phi(f)$, c'est dire que l'ensemble $V_\varepsilon = f^{-1}(]l-\varepsilon \ , \ l+\varepsilon[)$ appartient à Φ. Or par définition on a

$$x \in f^{-1}(]l-\varepsilon \ , \ l+\varepsilon[) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

par suite

$$\sup_{x\in V_\varepsilon} |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

et (iv) permet de conclure.

(ix)

$$1 \ \text{ On montre } \liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g = \sup_{V\in\Phi}(\inf_{x\in V} f(x) + \inf_{x\in V} g(x))$$

Il s'agit de montrer que $\liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g$ est le plus petit majorant du sous-ensemble L_* de $\mathbb{R}$ défini par

$$L_* = \{t \in \mathbb{R} / \exists \ V \in \Phi : t = \inf_{x\in V} f(x) + \inf_{x\in V} g(x)\}$$

1. D'abord $\liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g$ est un majorant de L_* puisque les inégalités

$$\inf_{x\in V} f(x) \leq \liminf_{\Phi} f \quad \text{et} \quad \inf_{x\in V} g(x) \leq \liminf_{\Phi} g$$

montrent que

$$\inf_{x\in V} f(x) + \inf_{x\in V} g(x) \leq \liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g$$

2. Ensuite on montre que si $\lambda < \liminf_\Phi f + \liminf_\Phi g$ alors λ n'est pas un majorant de L_*. En effet, si $\lambda - \liminf_\Phi g < \liminf_\Phi f$ alors (ii) permet d'affirmer qu'il existe $V \in \Phi$ tel que

$$\lambda - \liminf_\Phi g < \inf_{x\in V} f(x)$$

ainsi $\lambda - \inf_{x\in V} f(x) < \liminf_\Phi g$ et il existe $U \in \Phi$ tel que

$$\lambda - \inf_{x\in V} f(x) < \inf_{x\in U} g(x)$$

ainsi

$$\lambda < \inf_{x\in V} f(x) + \inf_{x\in U} g(x) \le \inf_{x\in U\cap V} f(x) + \inf_{x\in U\cap V} g(x)$$

et puisque $U \cap V \in \Phi$ le réel λ n'est pas un majorant de L_*.

Ceci permet donc d'affirmer

$$\liminf_\Phi f + \liminf_\Phi g = \sup_{V\in\Phi}(\inf_{x\in V} f(x) + \inf_{x\in V} g(x)) \tag{10.64}$$

2 On montre l'inégalité (10.56) page 700

D'après le lemme [10.1] page 592 on a

$$\inf_{x\in V} f(x) + \inf_{x\in V} g(x) \le \inf_{x\in V}(f+g)(x)$$

par suite

$$\sup_{V\in\Phi}(\inf_{x\in V} f(x) + \inf_{x\in V} g(x)) \le \sup_{V\in\Phi}(\inf_{x\in V}(f+g)(x))$$

et l'égalité (10.64) montre que

$$\liminf_\Phi f + \liminf_\Phi g \le \liminf_\Phi (f+g)$$

$$(x)$$

1 On montre $\limsup_\Phi f + \limsup_\Phi g = \inf_{V\in\Phi}(\sup_{x\in V} f(x) + \sup_{x\in V} g(x))$

Il s'agit de montrer que $\limsup_\Phi f + \limsup_\Phi g$ est le plus grand minorant du sous-ensemble L^* de $\mathbb{R}$ défini par

$$L^* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ V \in \Phi : t = \sup_{x\in V} f(x) + \sup_{x\in V} g(x)\}$$

1. D'abord $\limsup_\Phi f + \limsup_\Phi g$ est un minorant de L^* puisque les inégalités

$$\limsup_\Phi f \le \sup_{x\in V} f(x) \quad \text{et} \quad \limsup_\Phi g \le \sup_{x\in V} g(x)$$

montrent que

$$\liminf_\Phi f + \liminf_\Phi g \le \sup_{x\in V} g(x) + \sup_{x\in V} f(x)$$

2. Ensuite on montre que si $\lambda > \limsup_\Phi f + \limsup_\Phi g$ alors λ n'est pas un minorant de L^*. En effet, si $\lambda - \limsup_\Phi g > \limsup_\Phi f$ alors (ii) permet d'affirmer qu'il existe $V \in \Phi$ tel que

$$\lambda - \limsup_\Phi g > \sup_{x\in V} f(x)$$

ainsi $\lambda - \sup_{x\in V} f(x) > \limsup_{\Phi} g$ et il existe $U \in \Phi$ tel que

$$\lambda - \sup_{x\in V} f(x) > \sup_{x\in U} g(x)$$

ainsi

$$\lambda > \sup_{x\in V} f(x) + \sup_{x\in U} g(x) \geq \sup_{x\in U\cap V} f(x) + \sup_{x\in U\cap V} g(x)$$

et puisque $U \cap V \in \Phi$ le réel λ n'est pas un minorant de L^*.
Ceci permet donc d'affirmer

$$\limsup_{\Phi} f + \limsup_{\Phi} g = \inf_{V\in\Phi}(\sup_{x\in V} f(x) + \sup_{x\in V} g(x)) \tag{10.65}$$

2 On montre l'inégalité (10.57) page 700

D'après le lemme [10.1] page 592 on a

$$\sup_{x\in V}(f+g)(x) \leq \sup_{x\in V} f(x) + \sup_{x\in V} g(x)$$

par suite

$$\inf_{V\in\Phi}(\sup_{x\in V}(f+g)(x)) \leq \inf_{V\in\Phi}(\sup_{x\in V} f(x) + \sup_{x\in V} g(x))$$

et l'égalité (10.65) montre que

$$\limsup_{\Phi}(f+g) \leq \limsup_{\Phi} f + \limsup_{\Phi} g$$

(xi)

Soit $V \in \Phi$ tel que pour tout $x \in V$ $f(x) \leq g(x)$ alors pour tout $U \in \Phi$ on a

$$\inf_{x\in U} f(x) \leq \inf_{x\in U\cap V} f(x) \leq \inf_{x\in U\cap V} g(x)$$

et puisque $U \cap V \in \Phi$ on obtient pour tout $U \in \Phi$

$$\inf_{x\in U} f(x) \leq \inf_{x\in U\cap V} g(x) \leq \liminf_{\Phi} g$$

ce qui montre que $\liminf_{\Phi} f \leq \liminf_{\Phi} g$. De même les inégalités

$$\limsup_{\Phi} f \leq \sup_{x\in U\cap V} f(x) \leq \sup_{x\in U\cap V} g(x) \leq \sup_{x\in U} g(x)$$

montre que $\limsup_{\Phi} f \leq \limsup_{\Phi} g$.

(xii)

Il suffit de montrer $\limsup_{\Phi}(f+g) \leq \liminf_{\Phi}(f+g)$. Or si $\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$ et $\liminf_{\Phi} g = \limsup_{\Phi} g$ alors l'inégalité (10.56) page 700 montre que

$$\limsup_{\Phi} f + \limsup_{\Phi} g \leq \liminf_{\Phi}(f+g)$$

et l'inégalité (10.57) page 700 montre alors que

$$\limsup_{\Phi}(f+g) \leq \liminf_{\Phi}(f+g)$$

$(xiii)$

1. Si $a \geq 0$ alors d'après le lemme [10.1] page 592 pour tout $V \in \Phi$
$$\inf_{x \in V}(af)(x) = a \inf_{x \in V} f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{V \in \Phi}(a \inf_{x \in V} f(x)) = a \sup_{V \in \Phi}(\inf_{x \in V} f(x))$$
de même
$$\sup_{x \in V}(af)(x) = a \sup_{x \in V} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{V \in \Phi}(a \sup_{x \in V} f(x)) = a \inf_{V \in \Phi}(\sup_{x \in V} f(x))$$
2. Si $a \leq 0$ alors d'après le lemme [10.1] page 592 pour tout $V \in \Phi$
$$\inf_{x \in V}(af)(x) = a \sup_{x \in V} f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{V \in \Phi}(a \sup_{x \in V} f(x)) = a \inf_{V \in \Phi}(\sup_{x \in V} f(x))$$
de même
$$\sup_{x \in V}(af)(x) = a \inf_{x \in V} f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{V \in \Phi}(a \inf_{x \in V} f(x)) = a \sup_{V \in \Phi}(\inf_{x \in V} f(x))$$

■

Une certaine forme d'analphabétisme mondain entraîne que pour chaque filtre on utilise des notations différentes pour les limites supérieures et inférieures , on fixe maintenant ces notations.

10.7 *Filtres utiles à l'étude des fonctions à valeurs dans un corps de réels.*

10.7.1 *Ensemble dirigé*

Définition 10.29 *Un ensemble ordonné (I_d, O) est dit* ***strictement dirigé à droite*** *si le sous-ensemble $\mathcal{B}_d$ de $\mathcal{P}(I_d)$ défini par*
$$\mathcal{B}_d = \{A \in \mathcal{P}(I_d) / \exists k \in I : A =]k, \rightarrow [\}$$
est une base de filtre. Le filtre Φ_d engendré par $\mathcal{B}_d$ défini par
$$\Phi_d = \{A \in \mathcal{P}(I_d) / \exists\ k \in I :]k, \rightarrow [\subset A\}$$
est appelé le filtre standard associé à (I_d, O)

Dire que $\mathcal{B}_d$ est une base de filtre se traduit par
— pour tout $i \in I_d$ on a $]i\ , \rightarrow [\neq \varnothing$
— pour tout $(i, j) \in I_d \times I_d$ il existe $k \in I_d$ tel que $k \geq i$ et $k \geq j$
Remarquons qu'un ensemble strictement dirigé à droite est sans élément maximal puisque pour tout $k \in I$ on a $]k, \rightarrow [\neq \varnothing$. On a une version sur la gauche

Définition 10.30 *Un ensemble ordonné (I_g, O) est dit* ***strictement dirigé à gauche*** *si le sous-ensemble $\mathcal{B}_g$ de $\mathcal{P}(I_g)$ défini par*
$$\mathcal{B}_g = \{A \in \mathcal{P}(I_g) / \exists k \in I : A =] \leftarrow, k[\}$$
est une base de filtre. Le filtre Φ_g engendré par $\mathcal{B}_g$ défini par
$$\Phi_g = \{A \in \mathcal{P}(I_g) / \exists\ k \in I :] \leftarrow, k[\subset A\}$$
est appelé le filtre standard associé à (I_g, O)

Un ensemble est dit strictement dirigé s'il est strictement dirigé à droite ou à gauche.
— Si ($\mathbb{N}$, O) est un ensemble d'entiers naturels il est strictement dirigé à droite.
— Si ($\mathbb{Z}$, $+$, . , O) est un ensemble d'entiers relatifs il est strictement dirigé à droite et à gauche
— Si ($\mathbb{R}$, $+$, . , O) est un corps de réels il est strictement dirigé à droite et à gauche

Définition 10.31 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \mathcal{O})$ *un corps de réels et* (I, O) *un ensemble strictement dirigé, une application* u *de* I *dans* $\mathbb{R}$ *est appelée une* ***suite généralisée*** *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Définition 10.32 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \mathcal{O})$ *un corps de réels ,* (I_d, O) *un ensemble strictement dirigé à droite et* Φ_d *le filtre standard sur* I_d. *Si* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d\ , \mathbb{R})$ *est une suite généralisée bornée alors*

1. *on appelle limite inférieure de* u *lorsque* i *tend vers l'infini le nombre réel* $\liminf\limits_{i \to +\infty} u_i$ *défini par*

$$\liminf_{i \to +\infty} u_i = \liminf_{\Phi_d} u = \sup_{V \in \Phi_d} (\inf_{i \in V} u_i)$$

2. *on appelle limite supérieure de* u *lorsque* i *tend vers l'infini le nombre réel* $\limsup\limits_{i \to +\infty} u_i$ *défini par*

$$\limsup_{i \to +\infty} u_i = \limsup_{\Phi_d} u = \inf_{V \in \Phi_d} (\sup_{i \in V} u_i)$$

On a une version à gauche de cette définition.

Définition 10.33 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \mathcal{O})$ *un corps de réels ,* (I_g, O) *un ensemble strictement dirigé à gauche et* Φ_g *le filtre standard sur* I_g. *Si* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_g\ , \mathbb{R})$ *est une suite généralisée bornée alors*

1. *on appelle limite inférieure de* u *lorsque* i *tend vers moins l'infini le nombre réel* $\liminf\limits_{i \to -\infty} u_i$ *défini par*

$$\liminf_{i \to -\infty} u_i = \liminf_{\Phi_g} u = \sup_{V \in \Phi_g} (\inf_{i \in V} u_i)$$

2. *on appelle limite supérieure de* u *lorsque* i *tend vers moins l'infini le nombre réel* $\limsup\limits_{i \to -\infty} u_i$ *défini par*

$$\limsup_{i \to -\infty} u_i = \limsup_{\Phi_g} u = \inf_{V \in \Phi_g} (\sup_{i \in V} u_i)$$

Un copier-coller du théorème [10.5] page 699 donne le lemme suivant.

Lemme 10.20 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \mathcal{O})$ *un corps de réels ,* (I_d, O) *un ensemble strictement dirigé à droite ,* Φ_d *le filtre standard sur* I_d *et* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d\ , \mathbb{R})$ *une suite généralisée bornée .*

(i) Le réel $\liminf\limits_{i \to +\infty} u_i$ *est le plus petit majorant de l'ensemble* $L_*(u)$ *défini par*

$$L_*(u) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ i \in I_d : t = \inf_{k > i} u_k\}$$

ce qu'on note

$$\liminf_{i \to +\infty} u_i = \sup_{i \in I_d} \inf_{k > i} u_k$$

(ii) Le réel $\limsup\limits_{i \to +\infty} u_i$ *est le plus grand minorant de l'ensemble* $L^*(u)$ *défini par*

$$L^*(u) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ i \in I_d : t = \sup_{k > i} u_k\}$$

ce qu'on note

$$\limsup_{i \to +\infty} u_i = \inf_{i \in I_d} \sup_{k > i} u_k$$

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors*

1. *pour que* $\liminf\limits_{i \to +\infty} u_i > \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $i \in I_d$ *tel que*

$$\inf_{k > i} u_k > \lambda$$

2. pour que $\limsup\limits_{i\to+\infty} u_i < \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $i \in I_d$ *tel que*

$$\sup_{k>i} u_k < \lambda$$

(iv) On a

$$\limsup_{i\to+\infty} u_i - \liminf_{i\to+\infty} u_i = \inf_{i\in I_d}\left(\sup_{p>i,q>i} |u_p - u_q|\right) , \tag{10.66}$$

en d'autres termes $\limsup\limits_{i\to+\infty} u_i - \liminf\limits_{i\to+\infty} u_i$ *est le plus grand minorant de l'ensemble* $\Gamma(u)$ *défini par*

$$\Gamma(u) = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ i \in I_d : t = \sup_{p>i,q>i} |u_p - u_q|\}$$

(v) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a

$$\liminf_{i\to+\infty} u_i = \limsup_{i\to+\infty} u_i$$

b *Il existe* $l \in \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $i_\varepsilon \in I_d$ *tel que*

$$k > i_\varepsilon \Rightarrow |u_k - l| \leq \varepsilon$$

c *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $i_\varepsilon \in I_d$ *tel que*

$$[\ p > i_\varepsilon \quad \text{et} \quad q > i_\varepsilon\ ] \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

(vi) $\bigcap\limits_{i\in I_d} \mathrm{adh}(u(]i,\ \to [)) = \bigcap\limits_{V\in\Phi_d} \mathrm{adh}(u(V))$ *de plus*

1. $\liminf\limits_{i\to+\infty} u_i$ *est le plus petit élément de* $\bigcap\limits_{i\in I_d} \mathrm{adh}(u(]i, \to [))$ *:*

$$\liminf_{i\to+\infty} u_i = \min\{t : t \in \bigcap_{i\in I_d} \mathrm{adh}(u(]i, \to [))$$

2. $\limsup\limits_{i\to+\infty} u_i$ *est le plus grand élément de* $\bigcap\limits_{i\in I_d} \mathrm{adh}(u(]i, \to [))$ *:*

$$\limsup_{i\to+\infty} u_i = \max\{t : t \in \bigcap_{i\in I_d} \mathrm{adh}(u(]i, \to [))$$

(vii) Si $(u, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d, \mathbb{R})$ *est un couple de suites généralisées bornées de* I_d *dans* $\mathbb{R}$ *alors*

$$\liminf_{i\to+\infty} u_i + \liminf_{i\to+\infty} v_i = \sup_{i\in I_d}(\inf_{k>i} u_k + \inf_{k>i} v_k)$$

De plus l'application $u + v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d, \mathbb{R})$ *définie par* $(u + v)_i = u_i + v_i$ *est bornée et*

$$\liminf_{i\to+\infty} u_i + \liminf_{i\to+\infty} v_i \leq \liminf_{i\to+\infty} (u + v)_i \tag{10.67}$$

(viii)Si $(u, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d, \mathbb{R})$ *est un couple de suites généralisées bornées de* I_d *dans* $\mathbb{R}$ *alors*

$$\limsup_{i\to+\infty} u_i + \limsup_{i\to+\infty} v_i = \inf_{i\in I_d}(\sup_{k>i} u_k + \sup_{k>i} v_k)$$

De plus

$$\limsup_{i\to+\infty} (u + v)_i \leq \limsup_{i\to+\infty} u_i + \limsup_{i\to+\infty} v_i \tag{10.68}$$

(ix) Si $(u,v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d,\mathbb{R})$ *est un couple de suites généralisées bornées de* I_d *dans* $\mathbb{R}$ *et si il existe* $p \in I_d$ *tel que pour tout* $k > p$ *l'inégalité* $u_k \leq v_k$ *est vérifiée alors*

$$\liminf_{i\to+\infty} u_i \leq \liminf_{i\to+\infty} v_i \quad \text{et} \quad \limsup_{i\to+\infty} u_i \leq \limsup_{i\to+\infty} v_i \tag{10.69}$$

(x) Si $(u,v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d,\mathbb{R})$ *est un couple de suites généralisées bornées de* I_d *dans* $\mathbb{R}$ *telles que*

$$\liminf_{i\to+\infty} u_i = \limsup_{i\to+\infty} u_i \quad \text{et} \quad \liminf_{i\to+\infty} v_i = \limsup_{i\to+\infty} v_i$$

alors

$$\liminf_{i\to+\infty} (u+v)_i = \limsup_{i\to+\infty} (u+v)_i \tag{10.70}$$

(xi) Si $a \in \mathbb{R}$ *et* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d,\mathbb{R})$ *est une suite généralisée bornée de* I_d *dans* $\mathbb{R}$ *alors l'application* $au \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d,\mathbb{R})$ *définie par* $(au)_i = au_i$ *est bornée et*

1. *Si* $a \geq 0$
$$\liminf_{i\to+\infty} (au)_i = a \liminf_{i\to+\infty} u_i \quad \text{et} \quad \limsup_{i\to+\infty} (au)_i = a \limsup_{i\to+\infty} u_i \tag{10.71}$$

2. *Si* $a \leq 0$
$$\liminf_{i\to+\infty} (au)_i = a \limsup_{i\to+\infty} u_i \quad \text{et} \quad \limsup_{i\to+\infty} (au)_i = a \liminf_{i\to+\infty} u_i \tag{10.72}$$

Preuve

(i)

Par définition $\liminf\limits_{i\to+\infty} u_i$ est la borne supérieure de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ V \in \Phi_d : t = \inf_{i\in V} u_i\}\ ,$$

mais si $i \in I_d$ on a $]i\ ,\ \to[\in \Phi_d$ ainsi $L_*(u) \subset \Lambda_*$ et $\sup\{t : t \in L_*(u)\} \leq \liminf\limits_{i\to+\infty} u_i$ il suffit donc de montrer que tout majorant de $L_*(u)$ est un majorant de Λ_*. Or tout élément de Λ_* est majoré par un élément de $L_*(u)$. En effet si $t = \inf\limits_{i\in V} u_i$ et $V \in \Phi_d$ il existe (par définition) un certain $p \in I_d$ tel que $]p, \to[\subset V$ par suite $s = \inf\limits_{k>p} u_k$ est un élément de $L_*(u)$ qui majore t.

(ii)

Par définition $\limsup\limits_{i\to+\infty} u_i$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ V \in \Phi_d : t = \sup_{i\in V} u_i\}\ ,$$

mais si $i \in I_d$ on a $]i\ ,\ \to[\in \Phi_d$ ainsi $L^*(u) \subset \Lambda^*$ et $\limsup\limits_{i\to+\infty} u_i \leq \inf\{t : t \in L^*(u)\}$ il suffit donc de montrer que tout minorant de $L^*(u)$ est un minorant de Λ^*. Or tout élément de Λ^* est minoré par un élément de $L^*(u)$. En effet si $t = \sup\limits_{i\in V} u_i$ et $V \in \Phi_d$ il existe (par définition) un certain $p \in I_d$ tel que $]p, \to[\subset V$ par suite $s = \sup\limits_{k>p} u_k$ est un élément de $L_*(u)$ qui minore t.

(iii)

1. Si $\lambda < \liminf\limits_{i\to+\infty} u_i$ alors λ n'est pas un majorant de $L_*(u)$ par suite il existe $i \in I_d$ tel que $\inf\limits_{k>i} u_k > \lambda$
2. Si $\limsup\limits_{i\to+\infty} u_i < \lambda$ alors λ n'est pas un minorant de $L^*(u)$ par suite il existe $i \in I_d$ tel que $\sup\limits_{k>i} u_k < \lambda$

$$(iv)$$

D'après (10.55) page 699 il suffit de montrer que si

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists \ V \in \Phi_d : t = \sup_{(p,q)\in V\times V} |u_p - u_q|\}$$

alors $\inf\{t : t \in \Gamma\} = \inf\{t : t \in \Gamma(u)\}$. Or si $i \in I_d$ on a $]i\ ,\ \to [\in \Phi_d$ ainsi $\Gamma(u) \subset \Gamma$ et

$$\inf\{t : t \in \Gamma\} \leq \inf\{t : t \in \Gamma(u)\}$$

Il suffit donc de montrer que tout minorant de $\Gamma(u)$ est un minorant de Γ. Or tout élément de Γ est minoré par un élément de $\Gamma(u)$. En effet si $t = \sup\limits_{(p,q)\in V\times V} |u_p - u_q|$ et $V \in \Phi_d$ il existe (par définition) un certain $j \in I_d$ tel que $]j, \to [\subset V$ par suite $s = \sup\limits_{p>j, q>j} |u_p - u_q|$ est un élément de $\Gamma(u)$ qui minore t.

$$(v)$$

1 On montre $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$

Posons $l = \limsup\limits_{i\to+\infty} u_i = \liminf\limits_{i\to+\infty} u_i$, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors

— puisque $\limsup\limits_{i\to+\infty} u_i < l + \varepsilon$ il existe (voir (iii)) $i_\varepsilon \in I_d$ tel que

$$\sup_{i>i_\varepsilon} f(x) < l + \varepsilon$$

— puisque $\liminf\limits_{i\to+\infty} u_i > l - \varepsilon$ il existe $j_\varepsilon \in I_d$ tel que

$$\inf_{i>j_\varepsilon} f(x) > l - \varepsilon$$

Puisque $\mathcal{B}_d$ est une base de filtre il existe $k_\varepsilon \in I_d$ tel que $k_\varepsilon \geq i_\varepsilon$ et $k_\varepsilon \geq j_\varepsilon$ pour un tel k_ε on a

$$i > k_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < u_i < l + \varepsilon$$

2 On montre $\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c}$

Si la propriété **b** est vérifiée alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $i_\varepsilon \in I_d$ tel que

$$\sup_{i>i_\varepsilon} |u_i - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ainsi

$$[\ p > i_\varepsilon \quad \text{et} \quad q > i_\varepsilon\ ] \Rightarrow |u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |l - u_q| \leq \varepsilon$$

3 On montre $\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a}$

La propriété **c** est une traduction de

$$\inf_{i\in I_d} (\sup_{p>i, q>i} |u_p - u_q|) = 0$$

en effet, si l'ensemble $\Delta = \{t \in \mathbb{R}_+^* / \exists\ i \in I_d : t = \sup\limits_{p>i, q>i} |u_p - u_q|\}$ possède un minorant strictement positif ε alors

$$i \in I_d \Rightarrow \sup_{p>i, q>i} |u_p - u_q| > \frac{\varepsilon}{2}$$

l'égalité (10.66) page 711 montre alors que

$$\limsup_{i\to+\infty} u_i = \liminf_{i\to+\infty} u_i \ .$$

(vi)

D'abord, puisque pour tout $i \in I_d$ on a $]i\ ,\ \to [\in \Phi_d$ on a, pour tout $i \in I_d$, $\bigcap_{V\in\Phi_d} \operatorname{adh}(u(V)) \subset \operatorname{adh}(u(]i\ ,\ \to [))$. Ensuite, puisque pour tout $V \in \Phi_d$ il existe $i \in I_d$ tel que $]i\ ,\ \to [\subset V$ on a, pour tout $V \in \Phi_d$, $\bigcap_{i\in I_d} \operatorname{adh}(u(]i,\ \to [)) \subset \operatorname{adh}(u(V))$. Les points *1* et *2* proviennent alors des points (v) et (vi) du théorème [10.5] page 699.

(vii) à (xi)

Ces points ne sont qu'une traduction littérale des points (ix) à $(xiii)$ du théorème [10.5] page 699. ■

L'essentiel de la preuve du lemme [10.20] page 710 consiste à vérifier qu'un résultat vrai sur une base de filtre est vrai sur le filtre engendré par cette base, le lemme qui suit formalise ce point.

Lemme 10.21 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,* X *un ensemble non vide,* K *un sous-ensemble non vide de* X*,* $\mathcal{B}$ *une base de filtre sur* K *et* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ *une application bornée de* K *dans* $\mathbb{R}$*.* Φ *est le filtre sur* K *engendré par* $\mathcal{B}$ *:*

$$\Phi = \{V \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ B \in \mathcal{B} : B \subset V\}$$

(i) Le réel $\liminf_{\Phi} f$ *est le plus petit majorant de l'ensemble* $L_*(\mathcal{B})$ *défini par*

$$L_*(\mathcal{B}) = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ B \in \mathcal{B} : t = \inf_{x\in B} f(x)\}$$

ce qu'on note

$$\liminf_{\Phi} f = \sup_{B\in\mathcal{B}} \inf_{x\in B} f(x)$$

(ii) Le réel $\limsup_{\Phi} f$ *est le plus grand minorant de l'ensemble* $L^*(\mathcal{B})$ *défini par*

$$L^*(\mathcal{B}) = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ B \in \mathcal{B} : t = \sup_{x\in B} f(x)\}$$

ce qu'on note

$$\limsup_{\Phi} f = \inf_{B\in\mathcal{B}} \sup_{x\in B} f(x)$$

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors*

1. *pour que* $\liminf_{\Phi} f > \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $B \in \mathcal{B}$ *tel que*

$$\inf_{x\in B} f(x) > \lambda$$

2. *pour que* $\limsup_{\Phi} f < \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $B \in \mathcal{B}$ *tel que*

$$\sup_{x\in B} f(x) < \lambda$$

(iv) On a

$$\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f = \inf_{B\in\mathcal{B}} \Big(\sup_{(x,y)\in B\times B} |f(x) - f(y)| \Big) \tag{10.73}$$

en d'autres termes $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ *est le plus grand minorant de l'ensemble* $\Gamma(\mathcal{B})$ *défini par*

$$\Gamma(\mathcal{B}) = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ B \in \mathcal{B} : t = \sup_{(x,y)\in B\times B} |f(x) - f(y)|\}$$

(v) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a

$$\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$$

b *Il existe $l \in \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $B_\varepsilon \in \mathcal{B}$ tel que*

$$\sup_{x \in B_\varepsilon} |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

c *pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $B_\varepsilon \in \mathcal{B}$ tel que*

$$\sup_{(x,y) \in B_\varepsilon \times B_\varepsilon} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

(vi) $\displaystyle\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \operatorname{adh}(u(B)) = \bigcap_{V \in \Phi} \operatorname{adh}(u(V))$ *de plus*

1. $\displaystyle\liminf_{\Phi} f$ *est le plus petit élément de* $\displaystyle\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \operatorname{adh}(u(B))$ *:*

$$\liminf_{\Phi} f = \min\{t : t \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \operatorname{adh}(u(B))$$

2. $\displaystyle\limsup_{\Phi} f$ *est le plus grand élément de* $\displaystyle\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \operatorname{adh}(u(B))$ *:*

$$\limsup_{\Phi} f = \max\{t : t \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \operatorname{adh}(u(B))$$

Preuve

(i)

Par définition $\liminf_{\Phi} f$ est la borne supérieure de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ V \in \Phi : t = \inf_{i \in V} f(x)\}\ ,$$

mais si $B \in \mathcal{B}$ on a $B \in \Phi$ ainsi $L_*(\mathcal{B}) \subset \Lambda_*$ et $\sup\{t : t \in L_*(\mathcal{B})\} \leq \liminf_{\Phi} f$ il suffit donc de montrer que tout majorant de $L_*(\mathcal{B})$ est un majorant de Λ_*. Or tout élément de Λ_* est majoré par un élément de $L_*(\mathcal{B})$. En effet si $t = \inf_{x \in V} f(x)$ et $V \in \Phi$ il existe (par définition) un certain $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset V$ par suite $s = \inf_{x \in B} f(x)$ est un élément de $L_*(\mathcal{B})$ qui majore t.

(ii)

Par définition $\limsup_{\Phi} f$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ V \in \Phi : t = \sup_{x \in V} f(x)\}\ ,$$

mais si $B \in \mathcal{B}$ on a $B \in \Phi$ ainsi $L^*(\mathcal{B}) \subset \Lambda^*$ et $\limsup_{\Phi} f \leq \inf\{t : t \in L^*(\mathcal{B})\}$ il suffit donc de montrer que tout minorant de $L^*(\mathcal{B})$ est un minorant de Λ^*. Or tout élément de Λ^* est minoré par un élément de $L^*(\mathcal{B})$. En effet si $t = \sup_{x \in V} f(x)$ et $V \in \Phi$ il existe (par définition) un certain $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset V$ par suite $s = \sup_{x \in B} f(x)$ est un élément de $L^*(\mathcal{B})$ qui minore t.

(iii)

1. Si $\lambda < \liminf_{\Phi} f$ alors λ n'est pas un majorant de $L_*(\mathcal{B})$ par suite il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $\inf_{x\in B} f(x) > \lambda$
2. Si $\limsup_{\Phi} f < \lambda$ alors λ n'est pas un minorant de $L^*(\mathcal{B})$ par suite il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $\sup_{x\in B} f(x) < \lambda$

(iv)

D'après (10.55) page 699 il suffit de montrer que si

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}/ \ \exists\ V \in \Phi : t = \sup_{(x,y)\in V\times V} |f(x) - f(y)|\}$$

alors $\inf\{t : t \in \Gamma\} = \inf\{t : t \in \Gamma(\mathcal{B})\}$. Or si $B \in \mathcal{B}$ on a $B \in \Phi$ ainsi $\Gamma(\mathcal{B}) \subset \Gamma$ et

$$\inf\{t : t \in \Gamma\} \leq \inf\{t : t \in \Gamma(\mathcal{B})\}$$

Il suffit donc de montrer que tout minorant de $\Gamma(\mathcal{B})$ est un minorant de Γ. Or tout élément de Γ est minoré par un élément de $\Gamma(\mathcal{B})$. En effet si $t = \sup_{(x,y)\in V\times V} |f(x) - f(y)|$ et $V \in \Phi$ il existe (par définition) un certain $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset V$ par suite $s = \sup_{(x,y)\in B\times B} |f(x) - f(y)|$ est un élément de $\Gamma(\mathcal{B})$ qui minore t.

(v)

1 On montre **a** $\Rightarrow$ **b**

Posons $l = \limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f$, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors

— puisque $\limsup_{\Phi} f < l + \varepsilon$ il existe (voir (iii)) $B_0 \in \mathcal{B}$ tel que

$$\sup_{x\in B_0} f(x) < l + \varepsilon$$

— puisque $\liminf_{\Phi} f > l - \varepsilon$ il existe $B_1 \in \mathcal{B}$ tel que

$$\inf_{x\in B_1} f(x) > l - \varepsilon$$

Puisque $\mathcal{B}$ est une base de filtre il existe $B_\varepsilon \in \mathcal{B}$ tel que $B_\varepsilon \subset B_0 \cap B_1$, pour un tel B_ε on a

$$x \in B_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

2 On montre **b** $\Rightarrow$ **c**

Si la propriété **b** est vérifiée alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $B_\varepsilon \in \mathcal{B}$ tel que

$$\sup_{x\in B_\varepsilon} |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ainsi

$$[(x, y) \in B_\varepsilon \times B_\varepsilon] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |l - f(y)| \leq \varepsilon$$

3 On montre **c** $\Rightarrow$ **a**

La propriété **c** est une traduction de

$$\inf_{B\in\mathcal{B}}(\sup_{(x,y)\in B\times B} |f(x) - f(y)|) = 0$$

en effet, si l'ensemble $\Delta = \{t \in \mathbb{R}_+^*/\exists\ B \in \mathcal{B} : t = \sup_{(x,y)\in B\times B} |f(x) - f(y)|\}$ possède un minorant strictement positif ε alors

$$B \in \mathcal{B} \Rightarrow \sup_{(x,y)\in B\times B} |f(x) - f(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$$

l'égalité (10.73) page 714 montre alors que

$$\limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f\ .$$

(vi)

D'abord, puisque pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a $B \in \Phi$ on obtient : pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\bigcap_{V\in\Phi} \mathrm{adh}(u(V)) \subset \mathrm{adh}(u(B))$.

Ensuite, puisque pour tout $V \in \Phi$ il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset V$ on a, pour tout $V \in \Phi$, $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} \mathrm{adh}(u(B)) \subset \mathrm{adh}(u(V))$.

Les points *1* et *2* proviennent alors des points (v) et (vi) du théorème [10.5] page 699. ■

On a une version à gauche du lemme [10.20] page 710

Lemme 10.22 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \mathcal{O})$ *un corps de réels* , (I_g, O) *un ensemble strictement dirigé à gauche* , Φ_g *le filtre standard sur* I_g *et* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_g\ , \mathbb{R})$ *une suite généralisée bornée .*

(i) Le réel $\liminf_{i\to-\infty} u_i$ *est le plus petit majorant de l'ensemble* $L_*(u)$ *défini par*

$$L_*(u) = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ i \in I_d : t = \inf_{k<i} u_k\}$$

ce qu'on note

$$\liminf_{i\to+\infty} u_i = \sup_{i\in I_d} \inf_{k<i} u_k$$

(ii) Le réel $\limsup_{i\to-\infty} u_i$ *est le plus grand minorant de l'ensemble* $L^*(u)$ *défini par*

$$L^*(u) = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ i \in I_d : t = \sup_{k<i} u_k\}$$

ce qu'on note

$$\limsup_{i\to-\infty} u_i = \inf_{i\in I_d} \sup_{k<i} u_k$$

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors*

1. *pour que* $\liminf_{i\to-\infty} u_i > \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $i \in I_d$ *tel que*

$$\inf_{k<i} u_k > \lambda$$

2. *pour que* $\limsup_{i\to-\infty} u_i < \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $i > k$ *tel que*

$$\sup_{k<i} u_k < \lambda$$

(iv) On a

$$\limsup_{i\to-\infty} u_i - \liminf_{i\to-\infty} u_i = \inf_{i\in I_d} (\sup_{p<i,q<i} |u_p - u_q|)\ , \tag{10.74}$$

en d'autres termes $\limsup_{i\to-\infty} u_i - \liminf_{i\to-\infty} u_i$ *est le plus grand minorant de l'ensemble* $\Gamma(u)$ *défini par*

$$\Gamma(u) = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ i \in I_d : t = \sup_{p<i,q<i} |u_p - u_q|\}$$

(v) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a
$$\liminf_{i\to-\infty} u_i = \limsup_{i\to-\infty} u_i$$

b *Il existe $l \in \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $i_\varepsilon \in I_g$ tel que*
$$k < i_\varepsilon \Rightarrow |u_k - l| \leq \varepsilon$$

c *pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $i_\varepsilon \in I_g$ tel que*
$$[\ p < i_\varepsilon \quad \text{et} \quad q < i_\varepsilon\ ] \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

(vi) $\displaystyle\bigcap_{i\in I_g} \mathrm{adh}(u(]\leftarrow,\ i[)) = \bigcap_{V\in\Phi_g} \mathrm{adh}(u(V))$ *de plus*

1. $\displaystyle\liminf_{i\to-\infty} u_i$ *est le plus petit élément de* $\displaystyle\bigcap_{i\in I_g} \mathrm{adh}(u(]\leftarrow, i[))$ *:*
$$\liminf_{i\to-\infty} u_i = \min\{t : t \in \bigcap_{i\in I_g} \mathrm{adh}(u(]\leftarrow, i[))$$

2. $\displaystyle\limsup_{i\to-\infty} u_i$ *est le plus grand élément de* $\displaystyle\bigcap_{i\in I_d} \mathrm{adh}(u(]\leftarrow, i[))$ *:*
$$\limsup_{i\to-\infty} u_i = \max\{t : t \in \bigcap_{i\in I_g} \mathrm{adh}(u(]\leftarrow, i[))$$

(vii) Si $(u, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_g, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_g, \mathbb{R})$ est un couple de suites généralisées bornées de I_g dans $\mathbb{R}$ alors
$$\liminf_{i\to-\infty} u_i + \liminf_{i\to-\infty} v_i = \sup_{i\in I_d}(\inf_{k<i} u_k + \inf_{k<i} v_k)$$
De plus l'application $u + v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d, \mathbb{R})$ définie par $(u + v)_i = u_i + v_i$ est bornée et
$$\liminf_{i\to-\infty} u_i + \liminf_{i\to-\infty} v_i \leq \liminf_{i\to-\infty}(u + v)_i \tag{10.75}$$

(viii)Si $(u, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_g, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_g, \mathbb{R})$ est un couple de suites généralisées bornées de I_g dans $\mathbb{R}$alors
$$\limsup_{i\to-\infty} u_i + \limsup_{i\to-\infty} v_i = \inf_{i\in I_d}(\sup_{k<i} u_k + \sup_{k<i} v_k)$$
De plus
$$\limsup_{i\to-\infty}(u + v)_i \leq \limsup_{i\to-\infty} u_i + \limsup_{i\to-\infty} v_i \tag{10.76}$$

(ix) Si $(u, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_g, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_g, \mathbb{R})$ est un couple de suites généralisées bornées de I_g dans $\mathbb{R}$ et si il existe $p \in I_d$ tel que pour tout $k < p$ l'inégalité $u_k \leq v_k$ est vérifiée alors
$$\liminf_{i\to-\infty} u_i \leq \liminf_{i\to-\infty} v_i \quad \text{et} \quad \limsup_{i\to-\infty} u_i \leq \limsup_{i\to-\infty} v_i \tag{10.77}$$

(x) Si $(u, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_g, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_g, \mathbb{R})$ est un couple de suites généralisées bornées de I_g dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\liminf_{i\to-\infty} u_i = \limsup_{i\to-\infty} u_i \quad \text{et} \quad \liminf_{i\to-\infty} v_i = \limsup_{i\to-\infty} v_i$$
alors
$$\liminf_{i\to-\infty}(u + v)_i = \limsup_{i\to-\infty}(u + v)_i \tag{10.78}$$

(xi) Si $a \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_g, \mathbb{R})$ est une suite généralisée bornée de I_g dans $\mathbb{R}$ alors l'application $au \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I_d, \mathbb{R})$ définie par $(au)_i = au_i$ est bornée et

1. Si $a \geq 0$

$$\liminf_{i\to-\infty}(au)_i = a\liminf_{i\to-\infty} u_i \quad \text{et} \quad \limsup_{i\to-\infty}(au)_i = a\limsup_{i\to-\infty} u_i \tag{10.79}$$

2. Si $a \leq 0$

$$\liminf_{i\to-\infty}(au)_i = a\limsup_{i\to-\infty} u_i \quad \text{et} \quad \limsup_{i\to-\infty}(au)_i = a\liminf_{i\to-\infty} u_i \tag{10.80}$$

Preuve La preuve , similaire à celle du lemme [10.20] page 710 , est laissée au soin du lecteur. ■
On peut aussi dérouler le théorème [10.5] page 699 sur des filtres liés à la topologie standard.

10.7.2 *Quelques filtres associés à la topologie.*

On commence par définir quelques bases de filtres sur $\mathbb{R}$.

Lemme 10.23 *On note $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ un corps de réels ,$\mathcal{T}$ la topologie standard sur $\mathbb{R}$ et K un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.*

(i) Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $\mathcal{T}$ défini par

$$\mathcal{O}(x_0) = \{O \in \mathcal{T}/x_0 \in O\}$$

est une base de filtre sur $\mathbb{R}$.

(ii) Si $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ le sous-ensemble $\mathcal{B}_e(x_0)$ de $\mathcal{P}(K)$ défini par

$$\mathcal{B}_e(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : B =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K\}$$

est une base de filtre sur K.

(iii) Si $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ le sous-ensemble $\mathcal{B}(x_0)$ de $\mathcal{P}(K)$ défini par

$$\mathcal{B}(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ O \in \mathcal{O}(x_0) : B = O \cap K\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *Tout élément de $\mathcal{B}(x_0)$ contient un élément de $\mathcal{B}_e(x_0)$:*

$$B \in \mathcal{B}(x_0) \Rightarrow\ \exists\ U \in \mathcal{B}_e(x_0) \quad \text{tel que } U \subset B$$

2. *$\mathcal{B}(x_0)$ est une base de filtre sur K*

(iv) Si $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ le sous-ensemble $\mathcal{B}_d(x_0)$ de $\mathcal{P}(K)$ défini par

$$\mathcal{B}_d(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ n \in \mathbb{N}^* : B =]x_0 - \frac{1}{n}\ ,\ x_0 + \frac{1}{n}[\cap K\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *Tout élément de $\mathcal{B}_e(x_0)$ contient un élément de $\mathcal{B}_d(x_0)$:*

$$B \in \mathcal{B}_e(x_0) \Rightarrow\ \exists\ U \in \mathcal{B}_d(x_0) \quad \text{tel que } U \subset B$$

2. *$\mathcal{B}_d(x_0)$ est une base de filtre sur K*

(v) Pour tout $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ les bases $\mathcal{B}(x_0)$, $\mathcal{B}_e(x_0)$ et $\mathcal{B}_d(x_0)$ engendrent le même filtre :

$$\{A \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ O \in \mathcal{B}(x_0) : O \subset A\} = \{A \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ B \in \mathcal{B}_e(x_0) : B \subset A\}$$

et

$$\{A \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ O \in \mathcal{B}(x_0) : O \subset A\} = \{A \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ B \in \mathcal{B}_d(x_0) : B \subset A\}$$

(vi) Si $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ pour que le sous-ensemble $\mathcal{B}_-(x_0)$ de $\mathcal{P}(K)$ défini par

$$\mathcal{B}_-(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(K) \ \ \textit{exists}\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : B =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K\}$$

soit une base de filtre sur K il faut et il suffit que

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \neq \varnothing\ . \tag{10.81}$$

(vii) Si $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ pour que le sous-ensemble $\mathcal{B}_+(x_0)$ de $\mathcal{P}(K)$ défini par

$$\mathcal{B}_+(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : B =]x_0\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K\}$$

soit une base de filtre sur K il faut et il suffit que

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad]x_0\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K \neq \varnothing\ . \tag{10.82}$$

Preuve

(i)

1. $\varnothing \notin \mathcal{O}(x_0)$ puisque $O \in \mathcal{O}(x_0) \Rightarrow x_0 \in O$
2. Si $(O_0, O_1) \in \mathcal{O}(x_0) \times \mathcal{O}(x_0)$ alors $x_0 \in O_0 \cap O_1$ et d'après le théorème [10.4] page 670 on a $O_0 \cap O_1 \in \mathcal{T}$.

(ii)

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}_e(x_0)$ puisque d'après le lemme [10.13] page 677 on a

$$x_0 \in \mathrm{adh}(K) \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap K \neq \varnothing$$

2. Si $(A, B) \in \mathcal{B}_e(x_0) \times \mathcal{B}_e(x_0)$ alors il existe $(\varepsilon\ ,\ \eta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$A =]x_0 - \varepsilon\ , x_0 + \varepsilon[\cap K \quad \text{et} \quad B =]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta[\cap K\ ,$$

si $\delta = \min\{\varepsilon\ ,\ \eta\}$ alors

$$]x_0 - \delta\ , x_0 + \delta[\cap K \subset A \cap B\ .$$

ainsi $A \cap B$ contient un élément de $\mathcal{B}_e(x_0)$

(iii)

1. Si $A \in \mathcal{B}(x_0)$ il existe $O \in \mathcal{O}(x_0)$ tel que $A = O \cap K$, le théorème [10.4] page 670 montre qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\subset O$, pour un tel ε l'ensemble $U =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K$ est un élément de $\mathcal{B}_e(x_0)$ inclus dans A.
2. (a) d'abord $\varnothing \notin \mathcal{B}(x_0)$ puisque tout élément de $\mathcal{B}(x_0)$ contient un élément de $\mathcal{B}_e(x_0)$.
   (b) ensuite si $(A, B) \in \mathcal{B}(x_0) \times \mathcal{B}(x_0)$ il existe $(O_0\ ,\ O_1) \in \mathcal{O}(x_0) \times \mathcal{O}(x_0)$ tel que $A = O_0 \cap K$ et $B = O_1 \cap K$ ainsi $A \cap B = (O_0 \cap O_1) \cap K$ est un élément de $\mathcal{B}(x_0)$

(iv)

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}_d(x_0)$ puisque $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$.
2. Si $(A, B) \in \mathcal{B}_d(x_0) \times \mathcal{B}_d(x_0)$ alors il existe $(p\ ,\ q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$A =]x_0 - \frac{1}{p}\ , x_0 + \frac{1}{p}[\cap K \quad \text{et} \quad B =]x_0 - \frac{1}{q}\ ,\ x_0 + \frac{1}{q}[\cap K\ ,$$

si $n = \max\{p\ ,\ q\}$ alors

$$]x_0 - \frac{1}{n}\ , x_0 + \frac{1}{n}[\cap K \subset A \cap B\ .$$

ainsi $A \cap B$ contient un élément de $\mathcal{B}_d(x_0)$

3. Si $A \in \mathcal{B}_e(x_0)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K$, $\mathbb{R}$ étant archimédien il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$, pour un tel n l'ensemble $U =]x_0 - \dfrac{1}{n}\ ,\ x_0 + \dfrac{1}{n}[\cap K$ est un élément de $\mathcal{B}_d(x_0)$ inclus dans A.

(v)

1. D'abord puisque $\mathcal{B}_d(x_0) \subset \mathcal{B}_e(x_0) \subset \mathcal{B}(x_0)$ on a
$$\Phi(\mathcal{B}_d(x_0)) \subset \Phi(\mathcal{B}_e(x_0)) \subset \Phi(\mathcal{B}(x_0))$$
2. Ensuite si $A \in \Phi(\mathcal{B}(x_0))$ il existe $O \in \mathcal{B}(x_0)$ tel que $O \subset A$, (iii) montre alors qu'il existe $O_e \in \mathcal{B}_e(x_0)$ tel que $O_e \subset O$ et (iv) entraîne alors qu'il existe $O_d \in \mathcal{B}_d(x_0)$ tel que $O_d \subset O_e$, ainsi
$$O_d \subset A$$
et $A \in \Phi(\mathcal{B}_d(x_0))$

(vi)

1. D'abord si $\mathcal{B}_-(x_0)$ est une base de filtre alors $\varnothing \notin \mathcal{B}_-(x_0)$ par suite
$$\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \neq \varnothing$$
2. Ensuite si (10.81) page 720 est vérifié alors $\varnothing \notin \mathcal{B}_-(x_0)$. Enfin si $(A, B) \in \mathcal{B}_-(x_0) \times \mathcal{B}_-(x_0)$ alors il existe $(\varepsilon\ ,\ \eta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tels que
$$A =]x_0 - \varepsilon\ , x_0[\cap K \quad \text{et} \quad B =]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K\ ,$$
si $\delta = \min\{\varepsilon\ ,\ \eta\}$ alors
$$]x_0 - \delta\ , x_0[\cap K \subset A \cap B\ .$$
ainsi $A \cap B$ contient un élément de $\mathcal{B}_-(x_0)$

(vii)

1. D'abord si $\mathcal{B}_+(x_0)$ est une base de filtre alors $\varnothing \notin \mathcal{B}_+(x_0)$ par suite
$$\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow]x_0\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K \neq \varnothing$$
2. Ensuite si (10.82) page 720 est vérifié alors $\varnothing \notin \mathcal{B}_+(x_0)$. Enfin si $(A, B) \in \mathcal{B}_+(x_0) \times \mathcal{B}_+(x_0)$ alors il existe $(\varepsilon\ ,\ \eta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tels que
$$A =]x_0\ , x_0 + \varepsilon[\cap K \quad \text{et} \quad B =]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K\ ,$$
si $\delta = \min\{\varepsilon\ ,\ \eta\}$ alors
$$]x_0\ ,\ x_0 + \delta[\cap K \subset A \cap B\ .$$
ainsi $A \cap B$ contient un élément de $\mathcal{B}_+(x_0)$

■

Il y a une botanique de définitions autours de ces bases de filtres qu'il semble de bon ton de s'approprier.

Définition 10.34 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,*$\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *si* $x_0 \in \mathbb{R}$ *on appelle* ***filtre des voisinages*** *de* x_0 *le filtre* $\mathcal{V}(x_0)$ *engendré par* $\mathcal{O}(x_0) = \{O \in \mathcal{T} / x_0 \in O\}$ *:*
$$\mathcal{V}(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / \exists\ O \in \mathcal{O}(x_0) : O \subset A\}$$

Un jeu de langage permet d'établir le lemme suivant.

Lemme 10.24 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,* X *un ensemble non vide,* K *un sous-ensemble non vide de* X*,* Φ *un filtre sur* K *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ *une application bornée de* K *dans* $\mathbb{R}$*.*

(i) le filtre $\mathcal{V}(x_0)$ *est engendré par la base de filtre*

$$\mathcal{B}_e(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : A =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\}$$

ainsi

$$\mathcal{V}(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})/\exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\subset A\}$$

(ii) Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\limsup\limits_{\Phi} f = \liminf\limits_{\Phi} f$
2. $\bigcap\limits_{U\in\Phi} \mathrm{adh}(f(U))$ *est un singleton.*
3. *Il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
$$f^{-1}(]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[\in \Phi$$
4. *Il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $V \in \mathcal{V}(l)$
$$f^{-1}(V) \in \Phi$$
5. *Il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que*
$$\mathcal{V}(l) \subset \Phi(f)$$

Preuve

(i)

Il s'agit de montrer que $V \in \mathcal{V}(x_0)$ si et seulement si il existe $A \in \mathcal{B}_e(x_0)$ tel que $A \subset V$

— puisque pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\in \mathcal{O}(x_0)$, tout ensemble contenant un élément de $\mathcal{B}_e(x_0)$ appartient à $\mathcal{V}(x_0)$.

— si $V \in \mathcal{V}(x_0)$ alors il existe $O \in \mathcal{O}(x_0)$ tel que $O \subset V$, or d'après le lemme [10.23] page 719 tout élément de $\mathcal{O}(x_0)$ contient un élément de $\mathcal{B}_e(x_0)$.

(ii)

On montre *1*⇔ *2*

D'après les points (v) et (vi) du théorème [10.5] page 699 on a

$$\liminf_{\Phi} f = \min\{x : x \in \bigcap_{U\in\Phi} \mathrm{adh}(f(U))\} \quad \text{et} \quad \limsup_{\Phi} f = \max\{x : x \in \bigcap_{U\in\Phi} \mathrm{adh}(f(U))\}$$

On montre *1*⇔ *3*

D'après le point $(viii)$ du théorème [10.5] page 699 l'égalité $\liminf\limits_{\Phi} f = \limsup\limits_{\Phi} f$ est vérifiée si et seulement si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a $]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[\in \Phi(f)$, or par définition du filtre image $\Phi(f)$ l'assertion $]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[\in \Phi(f)$ est pile l'assertion $f^{-1}(]l-\varepsilon\ , l+\varepsilon[) \in \Phi$

On montre *3*⇔ *4*

1. D'abord si la propriété *4* est vérifiée alors la propriété *3* est vérifiée puisque pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a $]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[\in \mathcal{V}(l)$.
2. Ensuite si la propriété *3* est vérifiée et $V \in \mathcal{V}(l)$, alors puisque le filtre $\mathcal{V}(l)$ est engendré par $\mathcal{B}_e(l)$ il existe un certain $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[\subset V$. Ainsi $f^{-1}(V)$ contient $f^{-1}(]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[)$ qui est un élément de Φ, ce qui montre que $f^{-1}(V) \in \Phi$.

On montre *4* $\Leftrightarrow$ *5*

en effet, par définition du filtre image $\Phi(f)$ on a

$$\mathcal{V}(l) \subset \Phi(f) \Leftrightarrow \ \forall\, V \in \mathcal{V}(l)\ f^{-1}(V) \in \Phi\ .$$

■

Lorsque K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ on utilise souvent le filtre suivant :

Définition 10.35 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$*. On appelle filtre des* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$ *voisinages de* x_0 *le filtre* $\mathcal{V}_K(x_0)$ *engendré par la base de filtre* $\mathcal{B}(x_0)$ *définie par* $\mathcal{B}(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ O \in \mathcal{O}(x_0) : B = O \cap K\}$ *:*

$$\mathcal{V}_K(x_0) = \{V \in \mathcal{P}(K)/\exists\ A \in \mathcal{B}(x_0) : A \subset V\}$$

De plus

1. *L'ensemble* $\mathcal{B}_e(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : B =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K\}$ *est appelé l'ensemble des* $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$ *voisinages élémentaires de* x_0
2. *L'ensemble* $\mathcal{B}(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ O \in \mathcal{O}(x_0) : B = O \cap K\}$ *est appelé l'ensemble des* $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$ *voisinages ouverts de* x_0

D'après le lemme [10.23] page 719 le filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$ est aussi engendré par la base des voisinages élémentaires de x_0, ainsi

$$\mathcal{V}_K(x_0) = \{V \in \mathcal{P}(K)/\exists\ A \in \mathcal{B}_e(x_0) : A \subset V\}\ .$$

Si f est une application bornée de K dans $\mathbb{R}$ la limite inférieure lorsque « x tend vers x_0 » est la limite inférieure de f le long de $\mathcal{V}_K(x_0)$

Définition 10.36 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$*. Si* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application bornée de* K *dans* $\mathbb{R}$ *on appelle limite inférieure de* f *lorsque* x *tend vers* x_0 *le réel* $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$ *défini par*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \sup_{V\in\mathcal{V}_K(x_0)} (\inf_{x\in V} f(x))$$

On a une version limite supérieure.

Définition 10.37 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,*$\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$*. Si* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application bornée de* K *dans* $\mathbb{R}$ *on appelle limite supérieure de* f *lorsque* x *tend vers* x_0 *le réel* $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$ *défini par*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \inf_{V\in\mathcal{V}_K(x_0)} (\sup_{x\in V} f(x))$$

En déroulant les résultats sur ce cas particulier on obtient le lemme suivant .

Lemme 10.25 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,*$\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *, enfin* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application bornée de* K *dans* $\mathbb{R}$ *.*

(i) Pour tout $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$

$$\inf_{x\in K} f(x) \leq \liminf_{x\to x_0} f(x) \leq \limsup_{x\to x_0} f(x) \leq \sup_{x\in K} f(x)$$

(ii) Si $x_0 \in K$ *alors*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \limsup_{x\to x_0} f(x) \tag{10.83}$$

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. *pour que* $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) > \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $V \in \mathcal{V}_K(x_0)$ *tel que*

$$\inf_{x\in V} f(x) > \lambda$$

2. *pour que* $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x) < \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $V \in \mathcal{V}_K(x_0)$ *tel que*

$$\sup_{x\in V} f(x) < \lambda$$

(iv) Pour tout $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *on note* I *l'application de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathcal{B}_e(x_0)$ *définie par*

$$I(\varepsilon) =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K$$

alors

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) - \liminf_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*} \Big(\sup_{(x,y)\in I(\varepsilon)\times I(\varepsilon)} |f(x) - f(y)| \Big) \tag{10.84}$$

(v) $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$ *est le plus petit élément de l'ensemble* $\bigcap\limits_{V\in\mathcal{V}_K(x_0)} \mathrm{adh}(f(V))$ *:*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \min\{x : x \in \bigcap_{V\in\mathcal{V}_K(x_0)} \mathrm{adh}(f(V))\}$$

(vi) $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$ *est le plus grand élément de l'ensemble* $\bigcap\limits_{V\in\mathcal{V}_K(x_0)} \mathrm{adh}(f(V))$ *:*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \max\{x : x \in \bigcap_{V\in\mathcal{V}_K(x_0)} \mathrm{adh}(f(V))\}$$

(vii) Les conditions suivantes sont équivalentes

1. $$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x)$$

2. *il existe* $l \in \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_K(x_0)$ *tel que*

$$x \in V_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| \le \varepsilon$$

3. *il existe* $l \in \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_K(x_0)$ *tel que*

$$(x, y) \in V_\varepsilon \times V_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$

4. *il existe* $l \in \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $O_\varepsilon \in \mathcal{O}(x_0)$ *tel que*

$$x \in O_\varepsilon \cap K \Rightarrow |f(x) - l| \le \varepsilon$$

5. *il existe* $l \in \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$x \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta[\cap K \Rightarrow |f(x) - l| \le \varepsilon$$

6. *il existe* $l \in \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$f^{-1}(]l - \varepsilon\ ,\ l + \varepsilon[) \in \mathcal{V}_K(x_0)\ .$$

7. $\bigcap\limits_{V\in\mathcal{V}_K(x_0)} \mathrm{adh}(f(V))$ *est un singleton*

8. $\bigcap_{O\in\mathcal{O}(x_0)} \mathrm{adh}(f(O\cap K))$ *est un singleton*

9. $\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*} \mathrm{adh}(f(]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0+\varepsilon[\cap K))$ *est un singleton*

Preuve

(i)

Voir le point (i) du théorème [10.5] page 699 .

(ii)

1. Si $x_0 \in K$ alors pour tout $V \in \mathcal{V}_K(x_0)$ on a $x_0 \in V$, par suite
$$V \in \mathcal{V}_K(x_0) \Rightarrow \inf_{x\in V} f(x) \leq f(x_0)$$
ainsi $\sup_{V\in\mathcal{V}_K(x_0)} (\inf_{x\in V} f(x)) \leq f(x_0)$ et $\liminf_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0)$
2. Si $x_0 \in K$ alors pour tout $V \in \mathcal{V}_K(x_0)$ on a $x_0 \in V$, par suite
$$V \in \mathcal{V}_K(x_0) \Rightarrow f(x_0) \leq \sup_{x\in V} f(x)$$
ainsi $\inf_{V\in\mathcal{V}_K(x_0)} (\sup_{x\in V} f(x)) \geq f(x_0)$ et $\limsup_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$

(iii)

Voir le point (ii) du théorème [10.5] page 699 .

(iv)

Puisque $I(\mathbb{R}_+^*) = \mathcal{B}_e(x_0)$ est une base du filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$ (iv) est une conséquence du point (iv) lemme [10.21] page 714 .

(v)

Voir le point (v) du théorème [10.5] page 699 .

(vi)

Voir le point (vi) du théorème [10.5] page 699 .

(vii)

Les équivalences *1*$\Leftrightarrow$ *2*$\Leftrightarrow$ *3* sont une conséquence du point (iv) du théorème [10.5] page 699 . Les équivalences *1*$\Leftrightarrow$ *4*$\Leftrightarrow$ *5* sont une conséquence du point (v) du lemme [10.21] page 714 et du fait que $\mathcal{B}(x_0)$ et $\mathcal{B}_e(x_0)$ sont des bases du filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$. L' équivalences *1*$\Leftrightarrow$ *6* est une conséquence du point (ii) du lemme [10.24] page 722 . Les équivalences *1*$\Leftrightarrow$ *7*$\Leftrightarrow$ *8*$\Leftrightarrow$ *9* sont une conséquence du point (ii) du lemme [10.24] page 722 et du point (vi) du lemme [10.21] page 714 qui affirme que pour toute base $\mathcal{B}(x_0)$ du filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$ on a
$$\bigcap_{V\in\mathcal{V}_K(x_0)} \mathrm{adh} f(V) = \bigcap_{B\in\mathcal{B}(x_0)} \mathrm{adh} f(B)$$

■

Le lemme [10.25] page 723 est bien sympathique lorsque $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ est bornée mais on aura à étudier des fonctions du type
$$\varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
qui sont définies sur $K \setminus \{x_0\}$ sans être forcément bornée sur cet ensemble. On peut définir des objets du genre $\liminf_{x\to x_0} \varphi(x)$ dès que φ est localement bornée au voisinage de x_0 au sens suivant.

Définition 10.38 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$*, enfin* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *est* ***localement bornée*** *au voisinage de* x_0 *si il existe un* $\imath(K,\mathcal{T})$*-voisinage de* x_0 *sur lequel* f *est bornée : l'ensemble*

$$\Omega_f(x_0) = \{\omega \in \mathcal{V}_K(x_0)/\ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}$$

est non vide

On commence par définir la notion de limite en un point où f est localement bornée. Le lemme qui suit est un jeu d'écriture qui utilise les notations et résultats du théorème [10.5] page 699 et du lemme [10.23] page 719.

Lemme 10.26 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$*,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée au voisinage de* x_0*.*

(i) Si $\omega \in \Omega_f(x_0)$ *alors* $x_0 \in \mathrm{adh}(\omega)$ *et le sous-ensemble de* $\mathcal{P}(\omega)$ *défini par*

$$\mathcal{V}_\omega(x_0) = \mathcal{P}(\omega) \cap \mathcal{V}_K(x_0) = \{U \in \mathcal{V}_K(x_0)/\ U \subset \omega\} = \{U \in \mathcal{P}(\omega)/\ \exists\ V \in \mathcal{V}_K(x_0) : U = V \cap \omega\}$$

est un filtre sur ω*. De plus les sous-ensembles de* $\mathcal{P}(\omega)$ *définis par*

$$\mathcal{B}(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(\omega)/\ \exists\ O \in \mathcal{O}(x_0) : A = O \cap \omega\}$$

$$\mathcal{B}_e(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(\omega)/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : B =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap\omega\}$$

et

$$\mathcal{B}_d(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(\omega)/\ \exists\ n \in \mathbb{N}^* : B =]x_0 - \frac{1}{n}\ ,\ x_0 + \frac{1}{n}[\cap\omega\}$$

sont des bases de filtre qui engendrent $\mathcal{V}_\omega(x_0)$

(ii) Si $x_0 \in K$ *pour tout* $\omega \in \Omega_f(x_0)$

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq f(x_0) \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\omega \in \Omega_f(x_0)$ *alors Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f > \lambda$
2. *il existe* $U \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ *tel que*
$$\inf_{x\in U} f(x) > \lambda$$
3. *il existe* $O \in \mathcal{O}(x_0)$ *vérifiant les propriétés (a) et (b) suivantes*
   (a) $O \cap K \in \Omega_f(x_0)$
   (b)
$$\inf_{x\in O\cap K} f(x) > \lambda$$
4. *il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *vérifiant les propriétés* (α) *et* (β) *suivantes*
   (α) $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K \in \Omega_f(x_0)$
   (β)
$$\inf_{x\in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\cap K} f(x) > \lambda$$

(iv) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\omega \in \Omega_f(x_0)$ *alors Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f < \lambda$

2. il existe $U \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ tel que

$$\sup_{x \in U} f(x) < \lambda$$

3. il existe $O \in \mathcal{O}(x_0)$ vérifiant les propriétés (a) et (b) suivantes

(a) $O \cap K \in \Omega_f(x_0)$

(b)

$$\sup_{x \in O \cap K} f(x) < \lambda$$

4. il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant les propriétés (α) et (β) suivantes

(α) $]x_0 - \varepsilon \ , \ x_0 + \varepsilon[\cap K \in \Omega_f(x_0)$

(β)

$$\sup_{x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap K} f(x) < \lambda$$

(v) Si $(\omega \ , \ \pi) \in \Omega_f(x_0) \times \Omega_f(x_0)$ alors

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f$$

En particulier si f est bornée

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \liminf_{x \to x_0} f(x)$$

(vi) Si $(\omega \ , \ \pi) \in \Omega_f(x_0) \times \Omega_f(x_0)$ alors

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f$$

En particulier si f est bornée

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \limsup_{x \to x_0} f(x)$$

(vii) Pour tout $\omega \in \Omega_f(x_0)$ il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \omega)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

(viii) Pour tout $\omega \in \Omega_f(x_0)$ et toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \omega)$ qui converge vers x_0 on a

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq \liminf_{n \to +\infty} f(y_n)$$

(ix) Pour tout $\omega \in \Omega_f(x_0)$ il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \omega)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

(x) Pour tout $\omega \in \Omega_f(x_0)$ et toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \omega)$ qui converge vers x_0 on a

$$\limsup_{n \to +\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

(xi) Pour $\omega \in \Omega_f(x_0)$ les conditions suivantes sont équivalentes

α $\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$

β *pour toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \omega)$ qui converge vers x_0 la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ est convergente et*

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

γ *pour toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

(xii)

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \inf_{U\in\mathcal{V}_\omega(x_0)} (\sup_{(x,y)\in U\times U} |f(x) - f(y)|) \tag{10.85}$$

En d'autres termes $\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$ *est le plus grand minorant du sous-ensemble* Γ *de* $\mathbb{R}$ *défini par*

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ U \in \mathcal{V}_\omega(x_0) : t = \sup_{(x,y)\in U\times U} |f(x) - f(y)|\}$$

(xiii) Pour tout $\omega \in \Omega_f(x_0)$ *les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *pour toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*
$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$
2. *pour toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*
$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$
3. $\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$
4. *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ *tel que*
$$\sup_{x\in U_\varepsilon} |f(x) - \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f| \leq \varepsilon$$
5. *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ *tel que*
$$\sup_{(x,y)\in U_\varepsilon\times U_\varepsilon} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
6. $$\inf_{U\in\mathcal{V}_\omega(x_0)} (\sup_{(x,y)\in U\times U} |f(x) - f(y)|) = 0$$

Preuve

(i)

I On montre $x_0 \in \mathrm{adh}(\omega)$

En effet, d'après le lemme [10.13] page 677 il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap\ \omega \neq \varnothing$$

or l'égalité $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap\ \omega = (]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K) \cap \omega$ montre que cet ensemble est l'intersection de deux éléments du filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$.

II On montre que $\mathcal{V}_\omega(x_0)$ est un filtre

1. $\varnothing \notin \mathcal{V}_\omega(x_0)$ puisque $U \in \mathcal{V}_\omega(x_0) \Rightarrow U \in \mathcal{V}_K(x_0)$.
2. Si $(U, B) \in \mathcal{V}_\omega(x_0) \times \mathcal{P}(\omega)$ et $U \subset B$ alors B contient un élément de $\mathcal{V}_K(x_0)$, ainsi il appartient à $\mathcal{V}_K(x_0)$ et puisque $B \subset \omega$ on obtient $B \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$.

3. Si $(U,W) \in \mathcal{V}_\omega(x_0) \times \mathcal{V}_\omega(x_0)$ alors $U \cap W$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x_0)$, et puisque $U \cap W \subset \omega$ on obtient $U \cap W \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$.

La partie « de plus » est une application directe du lemme [10.23] page 719.

(ii)

1. Puisque $x_0 \in K$ pour tout $U \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ on a $x_0 \in U$, ainsi

$$U \in \mathcal{V}_\omega(x_0) \Rightarrow \inf_{x \in U} f(x) \leq f(x_0)$$

ainsi puisque $\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \sup_{U \in \mathcal{V}_\omega(x_0)} (\inf_{x \in U} f(x))$ on obtient

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f(x) \leq f(x_0)$$

2. Puisque pour tout $U \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ on a $x_0 \in U$, ainsi

$$U \in \mathcal{V}_\omega(x_0) \Rightarrow f(x_0) \leq \sup_{x \in U} f(x)$$

ainsi puisque $\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \inf_{U \in \mathcal{V}_\omega(x_0)} (\sup_{x \in U} f(x))$

$$f(x_0) \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

(iii)

1. <u>On montre $1 \Rightarrow 2$</u>
C'est le point (ii) du théorème [10.5] page 699
2. <u>On montre $2 \Rightarrow 3$</u>
Si $U \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ vérifie 2, alors $U \in \mathcal{V}_K(x_0)$ puisque $\mathcal{V}_\omega(x_0) \subset \mathcal{V}_K(x_0)$. Or $\mathcal{V}_K(x_0)$ est engendré par les $\imath(K,\mathcal{T})$-voisinages ouverts de x_0 ainsi il existe $O \in \mathcal{O}(x_0)$ tel que $O \cap K \subset U$.
   (a) puisque f est bornée sur U , f est bornée sur $O \cap K$ qui est un $\imath(K,\mathcal{T})$ voisinage ouvert de x_0 ainsi $O \cap K \in \Omega_f(x_0)$
   (b) puisque $O \cap K \subset U$ on obtient
$$\inf_{x \in O \cap K} f(x) \geq \inf_{x \in U} f(x) > \lambda$$
3. <u>On montre $3 \Rightarrow 4$</u>
Si $O \in \mathcal{O}(x_0)$ vérifie 3, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \varepsilon \ , \ x_0 + \varepsilon[\subset O$.
   (α) puisque f est bornée sur $O \cap K$, f est bornée sur $]x_0 - \varepsilon \ , \ x_0 + \varepsilon[\cap K$ qui est un $\imath(K,\mathcal{T})$ voisinage ouvert de x_0 ainsi $]x_0 - \varepsilon \ , \ x_0 + \varepsilon[\cap K \in \Omega_f(x_0)$
   (β) puisque $]x_0 - \varepsilon \ , \ x_0 + \varepsilon[\cap K \subset O \cap K$ on obtient
$$\inf_{x \in]x_0 - \varepsilon \ , \ x_0 + \varepsilon[\cap K} f(x) \geq \inf_{x \in O \cap K} f(x) > \lambda$$
4. <u>On montre $4 \Rightarrow 1$</u>
Si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie 4 alors $]x_0 - \varepsilon \ , \ x_0 + \varepsilon[\cap \omega \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ par suite
$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \geq \inf_{x \in]x_0 - \varepsilon \ , \ x_0 + \varepsilon[\cap \omega} f(x) \geq \inf_{x \in]x_0 - \varepsilon \ , \ x_0 + \varepsilon[\cap K} f(x) > \lambda$$

(iv)

1. <u>On montre 1 $\Rightarrow$ 2</u>
   C'est le point (ii) du théorème [10.5] page 699
2. <u>On montre 2 $\Rightarrow$ 3</u>
   Si $U \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ vérifie 2, alors $U \in \mathcal{V}_K(x_0)$ puisque $\mathcal{V}_\omega(x_0) \subset \mathcal{V}_K(x_0)$. Or $\mathcal{V}_K(x_0)$ est engendré par les $\imath(K,\mathcal{T})$-voisinages ouverts de x_0 ainsi il existe $O \in \mathcal{O}(x_0)$ tel que $O \cap K \subset U$.
   (a) puisque f est bornée sur U , f est bornée sur $O \cap K$ qui est un $\imath(K,\mathcal{T})$ voisinage ouvert de x_0 ainsi $O \cap K \in \Omega_f(x_0)$
   (b) puisque $O \cap K \subset U$ on obtient
$$\sup_{x \in O \cap K} f(x) \leq \sup_{x \in U} f(x) < \lambda$$
3. <u>On montre 3 $\Rightarrow$ 4</u>
   Si $O \in \mathcal{O}(x_0)$ vérifie 3, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\subset O$.
   (α) puisque f est bornée sur $O \cap K$, f est bornée sur $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K$ qui est un $\imath(K,\mathcal{T})$ voisinage ouvert de x_0 ainsi $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K \in \Omega_f(x_0)$
   (β) puisque $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K \subset O \cap K$ on obtient
$$\sup_{x \in]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K} f(x) \leq \sup_{x \in O \cap K} f(x) < \lambda$$
4. <u>On montre 4 $\Rightarrow$ 1</u>
   Si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie 4 alors $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap \omega \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ par suite
$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq \sup_{x \in]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap \omega} f(x) \leq \sup_{x \in]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K} f(x) < \lambda$$

(v)

Il s'agit de montrer que le plus petit majorant de l'ensemble
$$\Lambda_*(\omega) = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ U \in \mathcal{V}_\omega(x_0) : t = \inf_{x \in U} f(x)\}$$
est aussi le plus petit majorant de l'ensemble
$$\Lambda_*(\pi) = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ V \in \mathcal{V}_\pi(x_0) : t = \inf_{x \in V} f(x)\}\ .$$
Or tout élément de $\Lambda_*(\omega)$ est majoré par un élément de $\Lambda_*(\pi)$. En effet, si $t = \inf_{x \in U} f(x)$ et $U \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ alors $U \cap \pi \in \mathcal{V}_\pi(x_0)$ et $s = \inf_{x \in U \cap \pi} f(x)$ est un élément de $\Lambda_*(\pi)$ qui majore t. Ainsi tout majorant de $\Lambda_*(\pi)$ est un majorant de $\Lambda_*(\omega)$ et $\sup\{t : t \in \Lambda_*(\omega)\} \leq \sup\{t : t \in \Lambda_*(\pi)\}$, ainsi on obtient $\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq \liminf_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f$. L'interversion des rôles de π et ω donne aussi $\liminf_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f \leq \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$. Enfin si f est bornée, alors $K \in \Omega_f(x_0)$ par suite
$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \liminf_{x \to x_0} f(x)$$

(vi)

Il s'agit de montrer que le plus grand minorant de l'ensemble
$$\Lambda^*(\omega) = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ U \in \mathcal{V}_\omega(x_0) : t = \sup_{x \in U} f(x)\}$$
est aussi le plus grand minorant de l'ensemble
$$\Lambda^*(\pi) = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ V \in \mathcal{V}_\pi(x_0) : t = \sup_{x \in V} f(x)\}\ .$$

Or tout élément de $\Lambda^*(\omega)$ est minoré par un élément de $\Lambda^*(\pi)$. En effet, si $t = \sup_{x\in U} f(x)$ et $U \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ alors $U\cap\pi \in \mathcal{V}_\pi(x_0)$ et $s = \sup_{x\in U\cap\pi} f(x)$ est un élément de $\Lambda^*(\pi)$ qui minore t. Ainsi tout minorant de $\Lambda^*(\pi)$ est un minorant de $\Lambda^*(\omega)$ et $\inf\{t : t \in \Lambda^*(\pi)\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(\omega)\}$, ainsi on obtient $\limsup_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$. L'interversion des rôles de π et ω donne aussi $\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq \liminf_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f$. Enfin si f est bornée, alors $K \in \Omega_f(x_0)$ par suite

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \limsup_{x\to x_0} f(x)$$

(vii)

On considère l'application I de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathcal{V}_\omega(x_0)$ définie par

$$I(k) =]x_0 - \frac{1}{k}\ ,\ x_0 + \frac{1}{k}[\cap\omega$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$A_n = \left\{k \in \mathbb{N}^*/k > n \quad \text{et} \quad \inf_{x\in I(k)} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \frac{1}{n}\right\}$$

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A_n \neq \varnothing$. En effet, puisque $\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f > \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \frac{1}{n}$ le point (iii) montre qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble $U_\varepsilon =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K$ vérifie $U_\varepsilon \in \Omega_f(x_0)$ et

$$\inf_{x\in U_\varepsilon} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \frac{1}{n}$$

mais pour tout $p > \max\{\frac{1}{\varepsilon}\ ,\ n+1\}$ on a $p > n$ et $I(p) \subset U_\varepsilon$ par suite

$$\inf_{x\in I(p)} f(x) \geq \inf_{x\in U_\varepsilon} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \frac{1}{n}$$

ce qui montre que $A_n \neq \varnothing$. On considère l'application φ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\varphi(n) = \min\{k : k \in A_n\}$$

et on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble

$$\Gamma_n = I(\varphi(n))\cap f^{-1}(]\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \frac{1}{n}\ ,\ \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \frac{1}{n}[) = \left\{x \in I(\varphi(n))/\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \frac{1}{n} < f(x) < \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \frac{1}{n}\right\}$$

est non vide. En effet

— puisque $\inf_{x\in I(\varphi(n))} f(x) + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de $f(I(\varphi(n)))$ il existe $y \in I(\varphi(n))$ tel que

$$\inf_{x\in I(\varphi(n))} f(x) \leq f(y) < \inf_{x\in I(\varphi(n))} f(x) + \frac{1}{n} \tag{10.86}$$

— puisque $I(\varphi(n)) \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ on a

$$\inf_{x\in I(\varphi(n))} f(x) + \frac{1}{n} \leq \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \frac{1}{n}$$

— puisque $\varphi(n) \in A_n$ on a

$$\inf_{x\in I(\varphi(n))} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \frac{1}{n}$$

Ainsi tout point y vérifiant (10.86) page 731 est un élément de Γ_n. En posant $\Gamma_0 = \omega$ l'axiome du choix montre que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n = \{y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega) / \forall\ n \in \mathbb{N} \quad y_n \in \Gamma_n\}$$

est non vide et par définition tout élément y de Π vérifie , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|y_n - x_0| < \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(y_n) - \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f| < \frac{1}{n}$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

$(viii)$

Soit $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)$ une suite convergeant vers x_0, on doit montrer que le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists\ V \in \mathcal{V}_\omega(x_0) : t = \inf_{x \in V} f(x)\}$$

est inférieur au plus petit majorant de l'ensemble $\Lambda_*(y)$ défini par

$$\Lambda_*(y) = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \inf_{k \geq n} f(y_k)\}$$

Or tout élément de Λ_* est majoré par un élément de $\Lambda_*(y)$. En effet, si $t = \inf_{x \in V} f(x)$ avec $V \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ alors (i) permet d'affirmer qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta[\cap \omega \subset V$, puisque la suite y tend vers x_0 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta[\cap \omega$$

ainsi $y([n_0\ ,\ \to [) \subset V$ et le réel $s = \inf_{k \geq n_0} f(y_k)$ majore t.Ceci montre que tout majorant de $\Lambda_*(y)$ est un majorant de Λ_*.

(ix)

On peut poser $g = -f$ et appliquer (vii) mais il est peut-être plus probant de s'entraîner au jeu des $\inf - \sup$. On considère l'application I de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathcal{V}_\omega(x_0)$ définie par

$$I(k) =]x_0 - \frac{1}{k}\ ,\ x_0 + \frac{1}{k}[\cap \omega$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$B_n = \left\{ k \in \mathbb{N}^* / k > n \quad \text{et} \quad \sup_{x \in I(k)} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \frac{1}{n} \right\}$$

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $B_n \neq \varnothing$. En effet, puisque $\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f < \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \frac{1}{n}$ le point (iv) montre qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble $U_\varepsilon =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K$ vérifie $U_\varepsilon \in \Omega_f(x_0)$ et

$$\sup_{x \in U_\varepsilon} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \frac{1}{n}$$

mais pour tout $p > \max\{\frac{1}{\varepsilon}\ ,\ n+1\}$ on a $p > n$ et $I(p) \subset U_\varepsilon$ par suite

$$\sup_{x \in I(p)} f(x) \leq \sup_{x \in U_\varepsilon} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \frac{1}{n}$$

ce qui montre que $B_n \neq \varnothing$. On considère l'application φ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\varphi(n) = \min\{k : k \in B_n\}$$

et on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble

$$\Gamma_n = I(\varphi(n)) \cap f^{-1}(]\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \frac{1}{n} \ , \ \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \frac{1}{n}[) = \left\{ x \in I(\varphi(n)) / \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \frac{1}{n} < f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \frac{1}{n} \right\}$$

est non vide. En effet

— puisque $\displaystyle\sup_{x \in I(\varphi(n))} f(x) - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $f(I(\varphi(n)))$ il existe $y \in I(\varphi(n))$ tel que

$$\sup_{x \in I(\varphi(n))} f(x) - \frac{1}{n} < f(y) \leq \sup_{x \in I(\varphi(n))} f(x) \tag{10.87}$$

— puisque $I(\varphi(n)) \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ on a

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq \sup_{x \in I(\varphi(n))} f(x)$$

— puisque $\varphi(n) \in B_n$ on a

$$\sup_{x \in I(\varphi(n))} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \frac{1}{n}$$

Ainsi tout point y vérifiant (10.87) page 733 est un élément de Γ_n. En posant $\Gamma_0 = \omega$ l'axiome du choix montre que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n = \{ y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \omega) / \forall \ n \in \mathbb{N} \quad y_n \in \Gamma_n \}$$

est non vide et par définition tout élément y de Π vérifie , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|y_n - x_0| < \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(y_n) - \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f| < \frac{1}{n}$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

(x)

Posons $g(x) = -f(x)$ alors g est bornée sur ω par suite $\omega \in \Omega_g(x_0)$ et le point $(viii)$ montre que pour toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \omega)$ qui converge vers x_0 on a

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} g \leq \liminf_{n \to +\infty} g(y_n)$$

Les égalités $\displaystyle\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} g = -\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$ et $\displaystyle\liminf_{n \to +\infty} g(y_n) = -\limsup_{n \to +\infty} f(y_n)$ donne le résultat.

(xi)

I On montre $\alpha \Leftrightarrow \beta$

1. <u>D'abord on montre $\alpha \Rightarrow \beta$</u>

   D'après $(viii)$ et (x) si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \omega)$ est une suite qui tend vers x_0

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq \liminf_{n \to +\infty} f(y_n) \leq \limsup_{n \to +\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

Ainsi, si α est vérifié on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

ce qui montre que la suite $u_n = f(y_n)$ est convergente de limite $\liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$.

2. Ensuite on montre $\beta \Rightarrow \alpha$

   D'après (ix) il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)$ qui tend vers x_0 et qui vérifie l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$, par suite sous l'hypothèse β on obtient

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

II On montre $\alpha \Leftrightarrow \gamma$

1. D'abord on montre $\alpha \Rightarrow \gamma$

   D'après $(viii)$ et (x) si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)$ est une suite qui tend vers x_0

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq \liminf_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

   Ainsi, si α est vérifié on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

   ce qui montre que la suite $u_n = f(y_n)$ est convergente de limite $\limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$.

2. Ensuite on montre $\gamma \Rightarrow \alpha$

   D'après (vii) il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)$ qui tend vers x_0 et qui vérifie l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$, par suite sous l'hypothèse γ on obtient

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

(xii)

C'est le point (iii) du théorème [10.5] page 699 (voir (10.55) page 699)

$(xiii)$

Les équivalences $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$ sont prouvées par le point (xi), il suffit donc de montrer l'équivalence des énoncés 3 à 6

On montre $3 \Rightarrow 4$

alors

— puisque $\limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f < \limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \varepsilon$ il existe (voir (iv)) $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ tel que

$$\sup_{x\in V_\varepsilon} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \varepsilon$$

— puisque l'hypothèse 3 implique que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f > \limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \varepsilon$ il existe $W_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ tel que

$$\inf_{x\in W_\varepsilon} f(x) > \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \varepsilon$$

Ainsi en posant $U_\varepsilon = V_\varepsilon \cap W_\varepsilon$ alors $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ et

$$x \in U_\varepsilon \Rightarrow \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \varepsilon < f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f + \varepsilon$$

On montre $4 \Rightarrow 5$

Si la propriété 4 est vérifiée alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ tel que

$$\sup_{x \in U_\varepsilon} |f(x) - \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ainsi

$$(x,y) \in U_\varepsilon \times U_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f| + |\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - f(y)| \leq \varepsilon$$

On montre $5 \Rightarrow 6$

Si la propriété 5 est vérifiée alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ et

$$(x,y) \in U_\varepsilon \times U_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ainsi l'ensemble

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}_+ / \ \exists\ U \in \mathcal{V}_\omega(x_0) : t = \sup_{(x,y) \in U \times U} |f(x) - f(y)|\}$$

ne possède pas de minorant strictement positif.

On montre $6 \Rightarrow 3$

En effet d'après (10.85) page 728 on a

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \inf_{U \in \mathcal{V}_\omega(x_0)} (\sup_{(x,y) \in U \times U} |f(x) - f(y)|).$$

■

Le lemme [10.26] page 726 permet d'aborder les premières notions de limites de fonctions.

Définition 10.39 *On note $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ un corps de réels ,$\mathcal{T}$ la topologie standard sur $\mathbb{R}$, K un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ est une application de K dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet une $\imath(K,\mathcal{T})$-* ***limite*** *en x_0 si elle vérifie les propriétés suivantes*

1. *f est localement bornée au voisinage de x_0 c'est à dire qu'il existe un $\imath(K,\mathcal{T})$-voisinage de x_0 sur lequel f est bornée : l'ensemble*

$$\Omega_f(x_0) = \{\omega \in \mathcal{V}_K(x_0) / \ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}$$

est non vide.

2. *Il existe $\omega \in \Omega_f(x_0)$ tel que*

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

Pour montrer l'existence d'une $\imath(K,\mathcal{T})$-limite en un point on peut piocher dans les équivalences 1 à 6 évoquées au point $(xiii)$ du lemme [10.26] page 726 mais il semble de bon ton d'énoncer ces résultats en termes de convergence de suite et de convergence de filtre.

Lemme 10.27 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,* $\mathbb{N}$ *son ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée au voisinage de* x_0.

(i) Pour que f *admette une* $\imath(K,\mathcal{T})$*-limite en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\omega \in \Omega_f(x_0)$ *et toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *converge vers* l.

(ii) Pour que f *admette une* $\imath(K,\mathcal{T})$*-limite en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\omega \in \Omega_f(x_0)$ *et pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ *vérifiant*

$$\sup_{x\in U_\varepsilon} |f(x) - l| < \varepsilon \tag{10.88}$$

(iii) Pour que f *admette une* $\imath(K,\mathcal{T})$*-limite en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que le filtre image de* $\mathcal{V}_K(x_0)$ *par* f *converge vers* l *:*

$$V \in \mathcal{V}(l) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_K(x_0)\ .$$

Preuve

(i)

1. On montre que si la propriété énoncée en (i) est vérifiée alors f admet une $\imath(K,\ \mathcal{T})$-limite en x_0

   Il suffit de montrer que pour tout $\omega \in \Omega_f(x_0)$ on a

   $$l = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

   mais d'après le point (vii) du lemme [10.26] page 726 il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)$ qui converge vers x_0 telle la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ converge vers $\liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$ ainsi on a

   $$l = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

   de même d'après le point (ix) du lemme [10.26] page 726 il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)$ qui converge vers x_0 telle la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ converge vers $\limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$ ainsi on a aussi

   $$l = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

   en particulier on obtient $l = \liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$.

2. On montre que si f admet une $\imath(K,\ \mathcal{T})$-limite en x_0 alors la propriété énoncée en (i) est vérifiée.

   Soit $\pi \in \Omega_f(x_0)$ tel que $\limsup\limits_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f = \liminf\limits_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f$ on pose $l = \limsup\limits_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f$. L'application des points (v) et (vi) du lemme [10.26] page 726 permet d'affirmer que pour tout $\omega \in \Omega_f(x_0)$

   $$l = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f\ .$$

   Le point (xi) du lemme [10.26] page 726 montre alors que pour toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)$ qui converge vers x_0 la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ converge vers l.

(ii)

1. On montre que si la propriété énoncée en (ii) est vérifiée alors f admet une $\imath(K,\ \mathcal{T})$-limite en x_0

   Il suffit de vérifier que si l vérifie cette propriété alors

   $$\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = l = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

(a) D'abord on montre que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq l + \varepsilon$$

En effet, si $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ vérifie (10.88) page 736 alors $\sup_{x \in U_\varepsilon} f(x) \leq l + \varepsilon$ par suite

$$\inf_{V \in \mathcal{V}_\omega(x_0)} (\sup_{x \in V} f(x)) \leq l + \varepsilon$$

et $\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq l + \varepsilon$

(b) Ensuite on montre que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \geq l - \varepsilon$$

En effet, si $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ vérifie (10.88) page 736 alors $\inf_{x \in U_\varepsilon} f(x) \geq l - \varepsilon$ par suite

$$\sup_{V \in \mathcal{V}_\omega(x_0)} (\inf_{x \in V} f(x)) \geq l - \varepsilon$$

et $\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \geq l - \varepsilon$.

Les inégalités $l - \varepsilon \leq \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq l + \varepsilon$ étant vérifiées pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on obtient

$$l = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$$

ce qui montre que f possède une limite en x_0

2. <u>On montre que si f admet une $\imath(K, \mathcal{T})$-limite en x_0 alors la propriété énoncée en (ii) est vérifiée.</u>

Soit $\pi \in \Omega_f(x_0)$ tel que $\limsup_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f$ on pose $l = \limsup_{\mathcal{V}_\pi(x_0)} f$ et on vérifie que l possède la propriété voulu . L'application du le point (v) du lemme [10.26] page 726 permet d'affirmer que pour tout $\omega \in \Omega_f(x_0)$

$$l = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \ .$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

— puisque $\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f > l - \varepsilon$ le point (iii) du lemme [10.26] page 726 permet d'affirmer qu'il existe $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ tel que

$$\inf_{x \in v_\varepsilon} f(x) > l - \varepsilon$$

— puisque $\limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f < l + \varepsilon$ le point (iv) du lemme [10.26] page 726 permet d'affirmer qu'il existe $W_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ tel que

$$\sup_{x \in W_\varepsilon} f(x) < l + \varepsilon$$

ainsi on obtient, si $U_\varepsilon = V_\varepsilon \cap W_\varepsilon$

$$\sup_{x \in U_\varepsilon} |f(x) - l| < \varepsilon \ .$$

(iii)

1. On montre que si la propriété énoncée en (iii) est vérifiée alors f admet une $\imath(K,\ \mathcal{T})$-limite en x_0

   Il suffit de vérifier (10.88) page 736. Mais si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors $]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[\in \mathcal{V}(l)$ et l'hypothèse de (iii) entraîne que pour tout $\omega \in \Omega_f(x_0)$ l'ensemble $U_\varepsilon = f^{-1}(]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[)\cap\omega$ vérifie $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$. Or par définition $x \in U_\varepsilon \Rightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$ ainsi :

$$\sup_{x\in U_\varepsilon} |f(x)-l| < \varepsilon\ .$$

2. On montre que si f admet une $\imath(K,\mathcal{T})$-limite en x_0 alors la propriété énoncée en (iii) est vérifiée.

   Si $V \in \mathcal{V}(l)$ alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[\subset V$, si $\omega \in \Omega_f(x_0)$ le point (ii) montre qu'il existe $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ tel que $U_\varepsilon \subset f^{-1}(]x_0-l\ ,\ x_0+l[)$ ainsi $f^{-1}(V)$ contient un élément du filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$ et appartient donc à $\mathcal{V}_K(x_0)$.

■

Un copier-coller de ce genre de preuve permet d'établir les mêmes résultats pour des « voisinages à gauche » ou à droite.

Définition 10.40 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *un point* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *est dit* K***-accessible à gauche*** *si l'ensemble* $\mathcal{B}_-(x_0)$ *défini par*

$$\mathcal{B}_-(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : B =]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap K\}$$

est une base de filtre sur K*.*

Le lemme [10.23] page 719 permet d'affirmer que x_0 est K-accessible à gauche si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \neq \varnothing\ .$$

Définition 10.41 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$*,* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *un point* K*-accessible à gauche on appelle* ***filtre à gauche*** *en* x_0 *le filtre sur* K *noté* $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ *engendré par* $\mathcal{B}_-(x_0)$ *:*

$$\mathcal{V}_K^-(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(K)/\exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \subset A\}$$

On utilisera aussi la définition suivante :

Définition 10.42 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *un point* K*-accessible à gauche, enfin* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *est* ***localement bornée à gauche*** *en* x_0 *si il existe* $\omega \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$ *sur lequel* f *est bornée : l'ensemble*

$$\Omega_f^-(x_0) = \{\omega \in \mathcal{V}_K^-(x_0)/\ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}$$

est non vide.

Le filtre à gauche permet de éfinir la notion de limite à gauche.

Lemme 10.28 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *un point* K*-accessible à gauche,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée à gauche en* x_0*.*

(i) Si $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ *alors pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *on a* $]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap\omega \neq \varnothing$ *et le sous-ensemble de* $\mathcal{P}(\omega)$ *défini par*

$$\mathcal{V}_\omega^-(x_0) = \mathcal{P}(\omega)\cap\mathcal{V}_K^-(x_0) = \{U \in \mathcal{V}_K^-(x_0)/\ U \subset \omega\} = \{U \in \mathcal{P}(\omega)/\ \exists\ V \in \mathcal{V}_K^-(x_0) : U = V\cap\omega\}$$

est un filtre sur ω. De plus le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\omega)$ définis par

$$\mathcal{B}_d^-(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(\omega) / \ \exists\ n \in \mathbb{N}^* : B =]x_0 - \frac{1}{n}\ ,\ x_0[\cap\omega\}$$

est une base de filtre sur ω qui engendre $\mathcal{V}_\omega^-(x_0)$

(ii) Si f est localement bornée au voisinage de x_0 alors f est localement bornée à gauche en x_0, de plus pour tout $\omega \in \Omega_f(x_0) \cap \Omega_f^-(x_0)$

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \tag{10.89}$$

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ alors Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f > \lambda$
2. *il existe $U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ tel que*
$$\inf_{x\in U} f(x) > \lambda$$
3. *il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant les propriétés (α) et (β) suivantes*
   (α) $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \in \Omega_f^-(x_0)$
   (β)
$$\inf_{x\in]x_0-\varepsilon,x_0[\cap K} f(x) > \lambda$$

(iv) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ alors Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f < \lambda$
2. *il existe $U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ tel que*
$$\sup_{x\in U} f(x) < \lambda$$
3. *il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant les propriétés (α) et (β) suivantes*
   (α) $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \in \Omega_f^-(x_0)$
   (β)
$$\sup_{x\in]x_0-\varepsilon,x_0[\cap K} f(x) < \lambda$$

(v) Si $(\omega\ ,\ \pi) \in \Omega_f^-(x_0) \times \Omega_f^-(x_0)$ alors

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f$$

En particulier si f est bornée

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$

(vi) Si $(\omega\ ,\ \pi) \in \Omega_f^-(x_0) \times \Omega_f^-(x_0)$ alors

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f$$

En particulier si f est bornée

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$

(vii) Pour tout $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap]\leftarrow\ ,\ x_0[)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

(viii) Pour tout $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ et toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ qui converge vers x_0 on a

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq \liminf_{n\to+\infty} f(y_n)$$

(ix) Pour tout $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

(x) Pour tout $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ et toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ qui converge vers x_0 on a

$$\limsup_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

(xi) Pour $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ les conditions suivantes sont équivalentes

α $\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$

β *pour toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ qui converge vers x_0 la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

γ *pour toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ qui converge vers x_0 la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

(xii)

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \inf_{U\in\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} \Big(\sup_{(x,y)\in U\times U} |f(x) - f(y)| \Big) \tag{10.90}$$

En d'autres termes $\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$ est le plus grand minorant du sous-ensemble Γ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0) : t = \sup_{(x,y)\in U\times U} |f(x) - f(y)|\}$$

(xiii) Pour tout $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ les conditions suivantes sont équivalentes

1. *pour toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ qui converge vers x_0 la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

2. *pour toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ qui converge vers x_0 la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

3. $\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$

4. *pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ tel que*

$$\sup_{x\in U_\varepsilon} |f(x) - \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f| \leq \varepsilon$$

5. *pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ tel que*

$$\sup_{(x,y)\in U_\varepsilon\times U_\varepsilon} |f(x)-f(y)| \le \varepsilon$$

6.

$$\inf_{U\in\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} \Big(\sup_{(x,y)\in U\times U} |f(x)-f(y)| \Big) = 0$$

Preuve

(i)

I On montre x_0 est ω-accessible à gauche

Il faut montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap\omega \neq \varnothing$$

or l'égalité $]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap\omega = (]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap K)\cap\omega$ montre que cet ensemble est l'intersection de deux éléments du filtre $\mathcal{V}_K^-(x_0)$.

II On montre que $\mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ est un filtre

1. $\varnothing \notin \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ puisque $U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0) \Rightarrow U \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$.
2. Si $(U,B) \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)\times\mathcal{P}(\omega)$ et $U\subset B$ alors B contient un élément de $\mathcal{V}_K^-(x_0)$, ainsi il appartient à $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ et puisque $B\subset\omega$ on obtient $B\in\mathcal{V}_\omega^-(x_0)$.
3. Si $(U,W) \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)\times\mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ alors $U\cap W$ est un élément de $\mathcal{V}_K^-(x_0)$, et puisque $U\cap W\subset\omega$ on obtient $U\cap W\in\mathcal{V}_\omega^-(x_0)$.

III On montre que $\mathcal{B}_d^-(x_0)$ est une base de filtre engendrant $\mathcal{V}_\omega^-(x_0)$

1. Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $]x_0-\dfrac{1}{n}\ ,\ x_0[\cap\omega\in\mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ on obtient $\mathcal{B}_d^-(x_0)\subset\mathcal{V}_\omega^-(x_0)$
2. Si $A=]x_0-\dfrac{1}{p}\ ,\ x_0[\cap\omega$ et $B=]x_0-\dfrac{1}{q}\ ,\ x_0[\cap\omega$ alors pour tout $n\ge\max\{p\ ,\ q\}$ on a

$$]x_0-\frac{1}{n}\ ,\ x_0[\cap\omega\subset A\cap B$$

3. Si $U\in\mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ alors $U\in\mathcal{V}_K^-(x_0)$ ainsi il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap K\subset U$, par suite pour tout $n\ge\dfrac{1}{\varepsilon}$ on a

$$]x_0-\frac{1}{n}\ ,\ x_0[\cap\omega\subset U\ .$$

(ii)

1. On montre que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \le \liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$.

   Il s'agit de montrer que le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t\in\mathbb{R}/\exists\ V\in\mathcal{V}_\omega(x_0) : t=\inf_{x\in V} f(x)\}$$

   est inférieur au plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*^- = \{t\in\mathbb{R}/\exists\ U\in\mathcal{V}_\omega^-(x_0) : t=\inf_{x\in U} f(x)\}\ .$$

   Mais tout élément de Λ_* est majoré par un élément de Λ_*^-. En effet, si $t=\inf\limits_{x\in V} f(x)$ avec $V\in\mathcal{V}_\omega(x_0)$ alors, par définition de $\mathcal{V}_\omega(x_0)$, il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0+\varepsilon[\cap\omega\subset V$, pour un tel ε l'ensemble $U=]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap\omega$ vérifie $U\in\mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ et $U\subset V$ par suite le réel $s=\inf\limits_{x\in U} f(x)$ est un élément de Λ_*^- qui majore t ainsi $\sup\{t : t\in\Lambda_*\}\le\sup\{s : s\in\Lambda_*^-\}$ et $\liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f\le\liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$.

2. l'inégalité $\liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq \limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$ est toujours vrai d'après le théorème [10.5] page 699

3. On montre que $\limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq \liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$.

   Il s'agit de montrer que le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ V \in \mathcal{V}_\omega(x_0) : t = \sup_{x \in V} f(x)\}$$

   est supérieur au plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda_*^- = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0) : t = \sup_{x \in U} f(x)\}\ .$$

   Mais tout élément de Λ_* est minoré par un élément de Λ_*^-. En effet, si $t = \sup\limits_{x \in V} f(x)$ avec $V \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ alors, par définition de $\mathcal{V}_\omega(x_0)$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap \omega \subset V$, pour un tel ε l'ensemble $U =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap \omega$ vérifie $U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ et $U \subset V$ par suite le réel $s = \sup\limits_{x \in U} f(x)$ est un élément de Λ_*^- qui minore t ainsi $\inf\{s : s \in \Lambda_*^-\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda_*\}$ et $\limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq \limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$.

(iii)

1. <u>On montre $1 \Rightarrow 2$</u>
   C'est le point (ii) du théorème [10.5] page 699
2. <u>On montre $2 \Rightarrow 3$</u>
   Si $U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ vérifie 2, alors $U \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$ puisque $\mathcal{V}_\omega^-(x_0) \subset \mathcal{V}_K^-(x_0)$. Ainsi il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \subset U$.
   (a) puisque f est bornée sur U , f est bornée sur $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K$ qui est un élément de $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ ainsi $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \in \Omega_f^-(x_0)$
   (b) puisque $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \subset U$ on obtient

$$\inf_{x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[\cap K} f(x) \geq \inf_{x \in U} f(x) > \lambda$$

3. <u>On montre $3 \Rightarrow 1$</u>
   Si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie 3 alors $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap \omega \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ par suite

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \geq \inf_{x \in]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap \omega} f(x) \geq \inf_{x \in]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K} f(x) > \lambda$$

(iv)

1. <u>On montre $1 \Rightarrow 2$</u>
   C'est le point (ii) du théorème [10.5] page 699
2. <u>On montre $2 \Rightarrow 3$</u>
   Si $U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ vérifie 2, alors $U \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$ puisque $\mathcal{V}_\omega^-(x_0) \subset \mathcal{V}_K^-(x_0)$. Ainsi il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \subset U$.
   (a) puisque f est bornée sur U , f est bornée sur $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K$ qui est un élément de $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ ainsi $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \in \Omega_f^-(x_0)$
   (b) puisque $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \subset U$ on obtient

$$\sup_{x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[\cap K} f(x) \leq \sup_{x \in U} f(x) < \lambda$$

3. <u>On montre 3 ⇒ 1</u>
   Si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie 3 alors $]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap\omega \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ par suite

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq \sup_{x\in]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap\omega} f(x) \leq \sup_{x\in]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap K} f(x) < \lambda$$

(v)

Il s'agit de montrer que le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*(\omega) = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0) : t = \inf_{x\in U} f(x)\}$$

est aussi le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*(\pi) = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ V \in \mathcal{V}_\pi^-(x_0) : t = \inf_{x\in V} f(x)\}\ .$$

Or tout élément de $\Lambda_*(\omega)$ est majoré par un élément de $\Lambda_*(\pi)$. En effet, si $t = \inf_{x\in U} f(x)$ et $U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ alors $U\cap\pi \in \mathcal{V}_\pi^-(x_0)$ et $s = \inf_{x\in U\cap\pi} f(x)$ est un élément de $\Lambda_*(\pi)$ qui majore t. Ainsi tout majorant de $\Lambda_*(\pi)$ est un majorant de $\Lambda_*(\omega)$ et $\sup\{t : t \in \Lambda_*(\omega)\} \leq \sup\{t : t \in \Lambda_*(\pi)\}$, ainsi on obtient $\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq \liminf_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f$. L'interversion des rôles de π et ω donne aussi $\liminf_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f \leq \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$. Enfin si f est bornée, alors $K \in \Omega_f^-(x_0)$ par suite

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$

(vi)

Il s'agit de montrer que le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda^*(\omega) = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0) : t = \sup_{x\in U} f(x)\}$$

est aussi le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda^*(\pi) = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ V \in \mathcal{V}_\pi^-(x_0) : t = \sup_{x\in V} f(x)\}\ .$$

Or tout élément de $\Lambda^*(\omega)$ est minoré par un élément de $\Lambda^*(\pi)$. En effet, si $t = \sup_{x\in U} f(x)$ et $U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ alors $U\cap\pi \in \mathcal{V}_\pi^-(x_0)$ et $s = \sup_{x\in U\cap\pi} f(x)$ est un élément de $\Lambda^*(\pi)$ qui minore t. Ainsi tout minorant de $\Lambda^*(\pi)$ est un minorant de $\Lambda^*(\omega)$ et $\inf\{t : t \in \Lambda^*(\pi)\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(\omega)\}$, ainsi on obtient $\limsup_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$. L'interversion des rôles de π et ω donne aussi $\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq \liminf_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f$. Enfin si f est bornée, alors $K \in \Omega_f^-(x_0)$ par suite

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$

(vii)

On considère l'application I de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathcal{V}_\omega(x_0)$ définie par

$$I(k) =]x_0 - \frac{1}{k}\ ,\ x_0[\cap\omega$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$A_n = \left\{k \in \mathbb{N}^*/k > n \quad \text{et} \quad \inf_{x\in I(k)} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \frac{1}{n}\right\}$$

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A_n \neq \varnothing$. En effet, puisque $\liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f > \liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \dfrac{1}{n}$ le point (iii) montre qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble $U_\varepsilon =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K$ vérifie $U_\varepsilon \in \Omega_f^-(x_0)$ et

$$\inf_{x \in U_\varepsilon} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \frac{1}{n}$$

mais pour tout $p > \max\{\dfrac{1}{\varepsilon}\ ,\ n+1\}$ on a $p > n$ et $I(p) \subset U_\varepsilon$ par suite

$$\inf_{x \in I(p)} f(x) \geq \inf_{x \in U_\varepsilon} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \frac{1}{n}$$

ce qui montre que $A_n \neq \varnothing$. On considère l'application φ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\varphi(n) = \min\{k : k \in A_n\}$$

et on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble

$$\Gamma_n = I(\varphi(n)) \cap f^{-1}(]\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \frac{1}{n}\ ,\ \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \frac{1}{n}[) = \left\{ x \in I(\varphi(n)) / \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \frac{1}{n} < f(x) < \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \frac{1}{n} \right\}$$

est non vide. En effet

— puisque $\inf\limits_{x \in I(\varphi(n))} f(x) + \dfrac{1}{n}$ n'est pas un minorant de $f(I(\varphi(n)))$ il existe $y \in I(\varphi(n))$ tel que

$$\inf_{x \in I(\varphi(n))} f(x) \leq f(y) < \inf_{x \in I(\varphi(n))} f(x) + \frac{1}{n} \tag{10.91}$$

— puisque $I(\varphi(n)) \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ on a

$$\inf_{x \in I(\varphi(n))} f(x) + \frac{1}{n} \leq \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \frac{1}{n}$$

— puisque $\varphi(n) \in A_n$ on a

$$\inf_{x \in I(\varphi(n))} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \frac{1}{n}$$

Ainsi tout point y vérifiant (10.91) page 744 est un élément de Γ_n. En posant $\Gamma_0 = \omega$ l'axiome du choix montre que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n = \{y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega) / \forall\ n \in \mathbb{N} \quad y_n \in \Gamma_n\}$$

est non vide et par définition tout élément y de Π vérifie , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < x_0 - y_n < \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(y_n) - \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f| < \frac{1}{n}$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

$(viii)$

Soit $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega \cap] \leftarrow\ \ x_0[)$ une suite convergeant vers x_0, on doit montrer que le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ V \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0) : t = \inf_{x \in V} f(x)\}$$

est inférieur au plus petit majorant de l'ensemble $\Lambda_*(y)$ défini par

$$\Lambda_*(y) = \{t \in \mathbb{R}/ \ \exists \ n \in \mathbb{N} : t = \inf_{k \geq n} f(y_k)\}$$

Or tout élément de Λ_* est majoré par un élément de $\Lambda_*(y)$. En effet, si $t = \inf_{x \in V} f(x)$ avec $V \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ alors par définition de $\mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \eta \ , \ x_0[\cap\omega \subset V$, puisque la suite y tend vers x_0 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in]x_0 - \eta \ , \ x_0 + \eta[\cap\omega$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $y_n < x_0$ par suite

$$n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in]x_0 - \eta \ , \ x_0[\cap\omega$$

ainsi $y([n_0 \ , \ \to [) \subset V$ et le réel $s = \inf_{k \geq n_0} f(y_k)$ majore t.Ceci montre que tout majorant de $\Lambda_*(y)$ est un majorant de Λ_*.

(ix)

On peut poser $g = -f$ et appliquer (vii) mais il est peut-être plus probant de s'entraîner au jeu des $\inf - \sup$. On considère l'application I de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathcal{V}_\omega(x_0)$ définie par

$$I(k) =]x_0 - \frac{1}{k} \ , \ x_0[\cap\omega$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$B_n = \left\{ k \in \mathbb{N}^*/k > n \quad \text{et} \quad \sup_{x \in I(k)} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \frac{1}{n} \right\}$$

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $B_n \neq \varnothing$. En effet, puisque $\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f < \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \frac{1}{n}$ le point (iv) montre qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble $U_\varepsilon =]x_0 - \varepsilon \ , \ x_0[\cap K$ vérifie $U_\varepsilon \in \Omega_f^-(x_0)$ et

$$\sup_{x \in U_\varepsilon} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \frac{1}{n}$$

mais pour tout $p > \max\{\frac{1}{\varepsilon} \ , \ n+1\}$ on a $p > n$ et $I(p) \subset U_\varepsilon$ par suite

$$\sup_{x \in I(p)} f(x) \leq \sup_{x \in U_\varepsilon} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \frac{1}{n}$$

ce qui montre que $B_n \neq \varnothing$. On considère l'application φ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\varphi(n) = \min\{k : k \in B_n\}$$

et on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble

$$\Gamma_n = I(\varphi(n)) \cap f^{-1}(]\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \frac{1}{n} \ , \ \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \frac{1}{n}[) = \left\{ x \in I(\varphi(n))/\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \frac{1}{n} < f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \frac{1}{n} \right\}$$

est non vide. En effet

— puisque $\sup_{x \in I(\varphi(n))} f(x) - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $f(I(\varphi(n)))$ il existe $y \in I(\varphi(n))$ tel que

$$\sup_{x \in I(\varphi(n))} f(x) - \frac{1}{n} < f(y) \leq \sup_{x \in I(\varphi(n))} f(x) \tag{10.92}$$

— puisque $I(\varphi(n)) \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ on a

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \le \sup_{x\in I(\varphi(n))} f(x)$$

— puisque $\varphi(n) \in B_n$ on a

$$\sup_{x\in I(\varphi(n))} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \frac{1}{n}$$

Ainsi tout point y vérifiant (10.92) page 745 est un élément de Γ_n. En posant $\Gamma_0 = \omega$ l'axiome du choix montre que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n = \{y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)/\forall\ n \in \mathbb{N} \quad y_n \in \Gamma_n\}$$

est non vide et par définition tout élément y de Π vérifie , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < x_0 - y_n < \frac{1}{\varphi(n)} \le \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(y_n) - \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f| < \frac{1}{n}$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

(x)

Posons $g(x) = -f(x)$ alors g est bornée sur ω par suite $\omega \in \Omega_g^-(x_0)$ et le point $(viii)$ montre que pour toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\omega\cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ qui converge vers x_0 on a

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} g \le \liminf_{n\to+\infty} g(y_n)$$

Les égalités $\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} g = -\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$ et $\liminf_{n\to+\infty} g(y_n) = -\limsup_{n\to+\infty} f(y_n)$ donne le résultat.

(xi)

I On montre $\alpha \Leftrightarrow \beta$

1. D'abord on montre $\alpha \Rightarrow \beta$

   D'après $(viii)$ et (x) si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ est une suite qui tend vers x_0

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \le \liminf_{n\to+\infty} f(y_n) \le \limsup_{n\to+\infty} f(y_n) \le \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

   Ainsi, si α est vérifié on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

   ce qui montre que la suite $u_n = f(y_n)$ est convergente de limite $\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$.

2. Ensuite on montre $\beta \Rightarrow \alpha$

   D'après (ix) il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ qui tend vers x_0 et qui vérifie l'égalité $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$, par suite sous l'hypothèse β on obtient

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

II On montre $\alpha \Leftrightarrow \gamma$

1. D'abord on montre $\alpha \Rightarrow \gamma$

   D'après $(viii)$ et (x) si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega \cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ est une suite qui tend vers x_0

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq \liminf_{n \to +\infty} f(y_n) \leq \limsup_{n \to +\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

   Ainsi, si α est vérifié on obtient

$$\liminf_{n \to +\infty} f(y_n) = \limsup_{n \to +\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

   ce qui montre que la suite $u_n = f(y_n)$ est convergente de limite $\limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$.

2. Ensuite on montre $\gamma \Rightarrow \alpha$

   D'après (vii) il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega \cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ qui tend vers x_0 et qui vérifie l'égalité $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = \liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$, par suite sous l'hypothèse γ on obtient

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

(xii)

C'est le point (iii) du théorème [10.5] page 699 (voir (10.55) page 699)

$(xiii)$

Les équivalences $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$ sont prouvées par le point (xi), il suffit donc de montrer l'équivalence des énoncés 3 à 6

On montre $3 \Rightarrow 4$

alors

— puisque $\limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f < \limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \varepsilon$ il existe (voir (iv)) $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ tel que

$$\sup_{x \in V_\varepsilon} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \varepsilon$$

— puisque l'hypothèse 3 implique que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f > \limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f - \varepsilon$ il existe $W_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ tel que

$$\inf_{x \in W_\varepsilon} f(x) > \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \varepsilon$$

Ainsi en posant $U_\varepsilon = V_\varepsilon \cap W_\varepsilon$ alors $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ et

$$x \in U_\varepsilon \Rightarrow \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \varepsilon < f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f + \varepsilon$$

On montre $4 \Rightarrow 5$

Si la propriété 4 est vérifiée alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ tel que

$$\sup_{x \in U_\varepsilon} |f(x) - \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ainsi

$$(x, y) \in U_\varepsilon \times U_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f| + |\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - f(y)| \leq \varepsilon$$

On montre $5 \Rightarrow 6$

Si la propriété 5 est vérifiée alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ et

$$(x,y) \in U_\varepsilon \times U_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ainsi l'ensemble

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}_+ / \ \exists \ U \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0) : t = \sup_{(x,y)\in U\times U} |f(x) - f(y)|\}$$

ne possède pas de minorant strictement positif.

On montre $6 \Rightarrow 3$

En effet d'après (10.90) page 740 on a

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \inf_{U\in\mathcal{V}_\omega(x_0)} (\sup_{(x,y)\in U\times U} |f(x) - f(y)|).$$

■

La définition de la notion de limite à gauche n'est plus qu'un jeu linguistique.

Définition 10.43 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *un point* K*-accessible à gauche,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *admet une* $\imath(K,\mathcal{T})$*-* ***limite à gauche*** *en* x_0 *si elle vérifie les propriétés suivantes*

1. f *est localement bornée à gauche en* x_0 *: l'ensemble*

$$\Omega_f^-(x_0) = \{\omega \in \mathcal{V}_K^-(x_0) / \ \exists \ m \in \mathbb{R}_+ : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}$$

est non vide.

2. *Il existe* $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ *tel que*

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

Pour montrer l'existence d'une $\imath(K,\mathcal{T})$-limite à gauche en un point on peut piocher dans les équivalences 1 à 6 évoquées au point $(xiii)$ du lemme [10.28] page 738 mais il semble de bon ton d'énoncer ces résultats en termes de convergence de suite et de convergence de filtre.

Lemme 10.29 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,* $\mathbb{N}$ *son ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *un point* K*-accessible à gauche,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée à gauche en* x_0*.*

(i) Pour que f *admette une* $\imath(K,\mathcal{T})$*-limite à gauche en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ *et toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap]\leftarrow\ ,\ x_0[)$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *converge vers* l*.*

(ii) Pour que f *admette une* $\imath(K,\mathcal{T})$*-limite à gauche en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ *et pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ *vérifiant*

$$\sup_{x\in U_\varepsilon} |f(x) - l| < \varepsilon \tag{10.93}$$

(iii) Pour que f *admette une* $\imath(K,\mathcal{T})$*-limite à gauche en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que le filtre image de* $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ *par* f *converge vers* l *:*

$$V \in \mathcal{V}(l) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_K^-(x_0)\ .$$

Preuve

(i)

1. On montre que si la propriété énoncée en (i) est vérifiée alors f admet une $\imath(K,\ \mathcal{T})$-limite à gauche en x_0

   Il suffit de montrer que pour tout $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ on a

   $$l = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

   mais d'après le point (vii) du lemme [10.28] page 738 il existe une suite y vérifiant :
   — $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega \cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$
   — y converge vers x_0 et la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ converge vers $\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$
   ainsi on a

   $$l = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f\ .$$

   De même d'après le point (ix) du lemme [10.28] page 738 il existe une suite y vérifiant :
   — $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega \cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$
   — y converge vers x_0 et la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ converge vers $\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$
   ainsi on a aussi

   $$l = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f\ .$$

   en particulier on obtient $l = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f$.

2. On montre que si f admet une $\imath(K,\ \mathcal{T})$-limite à gauche en x_0 alors la propriété énoncée en (i) est vérifiée.

   Soit $\pi \in \Omega_f^-(x_0)$ tel que $\limsup_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f$ on pose $l = \limsup_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f$. L'application des points (v) et (vi) du lemme [10.28] page 738 permet d'affirmer que pour tout $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$

   $$l = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f\ .$$

   Le point (xi) du lemme [10.28] page 738 montre alors que si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega \cap] \leftarrow\ ,\ x_0[)$ est une suite qui converge vers x_0 la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ converge vers l.

(ii)

1. On montre que si la propriété énoncée en (ii) est vérifiée alors f admet une $\imath(K,\ \mathcal{T})$-limite à gauche en x_0

   Il suffit de vérifier que si l vérifie cette propriété alors

   $$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = l = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

   (a) D'abord on montre que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

   $$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq l + \varepsilon$$

   En effet, si $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ vérifie (10.93) page 748 alors $\sup_{x \in U_\varepsilon} f(x) \leq l + \varepsilon$ par suite

   $$\inf_{V \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)} (\sup_{x \in V} f(x)) \leq l + \varepsilon$$

   et $\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq l + \varepsilon$

(b) Ensuite on montre que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \geq l - \varepsilon$$

En effet, si $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ vérifie (10.93) page 748 alors $\inf_{x \in U_\varepsilon} f(x) \geq l - \varepsilon$ par suite

$$\sup_{V \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)} (\inf_{x \in V} f(x)) \geq l - \varepsilon$$

et $\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \geq l - \varepsilon$.

Les inégalités $l - \varepsilon \leq \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \leq l + \varepsilon$ étant vérifiées pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on obtient

$$l = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f$$

ce qui montre que f possède une limite à gauche en x_0

2. On montre que si f admet une $\imath(K,\ \mathcal{T})$-limite à gauche en x_0 alors la propriété énoncée en (ii) est vérifiée.

Soit $\pi \in \Omega_f^-(x_0)$ tel que $\limsup_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f$ on pose $l = \limsup_{\mathcal{V}_\pi^-(x_0)} f$ et on vérifie que l possède la propriété voulu . L'application du le point (v) du lemme [10.28] page 738 permet d'affirmer que pour tout $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$

$$l = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f \ .$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

— puisque $\liminf_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f > l - \varepsilon$ le point (iii) du lemme [10.28] page 738 permet d'affirmer qu'il existe $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ tel que

$$\inf_{x \in v_\varepsilon} f(x) > l - \varepsilon$$

— puisque $\limsup_{\mathcal{V}_\omega^-(x_0)} f < l + \varepsilon$ le point (iv) du lemme [10.28] page 738 permet d'affirmer qu'il existe $W_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega(x_0)$ tel que

$$\sup_{x \in W_\varepsilon} f(x) < l + \varepsilon$$

ainsi on obtient, si $U_\varepsilon = V_\varepsilon \cap W_\varepsilon$

$$\sup_{x \in U_\varepsilon} |f(x) - l| < \varepsilon \ .$$

(iii)

1. On montre que si la propriété énoncée en (iii) est vérifiée alors f admet une $\imath(K,\ \mathcal{T})$-limite à gauche en x_0

Il suffit de vérifier (10.93) page 748. Mais si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors $]l - \varepsilon\ ,\ l + \varepsilon[\in \mathcal{V}(l)$ et l'hypothèse de (iii) entraîne que pour tout $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ l'ensemble $U_\varepsilon = f^{-1}(]l - \varepsilon\ ,\ l + \varepsilon[) \cap \omega$ vérifie $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$. Or par définition $x \in U_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ ainsi :

$$\sup_{x \in U_\varepsilon} |f(x) - l| < \varepsilon \ .$$

2. On montre que si f admet une $\imath(K, \mathcal{T})$-limite à gauche en x_0 alors la propriété énoncée en (iii) est vérifiée.

Si $V \in \mathcal{V}(l)$ alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]l - \varepsilon\ ,\ l + \varepsilon[\subset V$, si $\omega \in \Omega_f^-(x_0)$ le point (ii) montre qu'il existe $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^-(x_0)$ tel que $U_\varepsilon \subset f^{-1}(]x_0 - l\ ,\ x_0 + l[)$ ainsi $f^{-1}(V)$ contient un élément du filtre $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ et appartient donc à $\mathcal{V}_K^-(x_0)$.

■

Il y a évidemment une version « à droite » de ces méthodes, on énonce les définitions et les propriétés sont données sans preuves.

Définition 10.44 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *un point* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *est dit* K***-accessible à droite*** *si l'ensemble* $\mathcal{B}_+(x_0)$ *défini par*

$$\mathcal{B}_+(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : B =]x_0\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K\}$$

est une base de filtre sur K*.*

Le lemme [10.23] page 719 permet d'affirmer que x_0 est K-accessible à droite si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]x_0\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K \neq \varnothing\ .$$

Définition 10.45 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$*,* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *un point* K*-accessible à droite on appelle* ***filtre à droite*** *en* x_0 *le filtre sur* K *noté* $\mathcal{V}_K^+(x_0)$ *engendré par* $\mathcal{B}_+(x_0)$ *:*

$$\mathcal{V}_K^+(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(K)/\exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x_0\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K \subset A\}$$

On utilisera aussi la définition suivante :

Définition 10.46 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,*$\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *un point* K*-accessible à droite , enfin* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *est* ***localement bornée à droite*** *en* x_0 *si il existe* $\omega \in \mathcal{V}_K^+(x_0)$ *sur lequel* f *est bornée : l'ensemble*

$$\Omega_f^+(x_0) = \{\omega \in \mathcal{V}_K^+(x_0)/\ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}$$

est non vide

Le filtre à droite permet de définir la notion de limite à droite.

Lemme 10.30 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *un point* K*-accessible à droite,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée à droite en* x_0*.*

(i) Si $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *alors pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *on a* $]x_0\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap\omega \neq \varnothing$ *et le sous-ensemble de* $\mathcal{P}(\omega)$ *défini par*

$$\mathcal{V}_\omega^+(x_0) = \mathcal{P}(\omega) \cap \mathcal{V}_K^+(x_0) = \{U \in \mathcal{V}_K^+(x_0)/\ U \subset \omega\} = \{U \in \mathcal{P}(\omega)/\ \exists\ V \in \mathcal{V}_K^+(x_0) : U = V \cap \omega\}$$

est un filtre sur ω*. De plus le sous-ensemble de* $\mathcal{P}(\omega)$ *définis par*

$$\mathcal{B}_d^+(x_0) = \{B \in \mathcal{P}(\omega)/\ \exists\ n \in \mathbb{N}^* : B =]x_0\ ,\ x_0 + \frac{1}{n}[\cap\omega\}$$

est une base de filtre sur ω *qui engendre* $\mathcal{V}_\omega^+(x_0)$

(ii) Si f *est localement bornée au voisinage de* x_0 *alors* f *est localement bornée à droite en* x_0*, de plus pour tout* $\omega \in \Omega_f(x_0) \cap \Omega_f^+(x_0)$

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \leq \liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega(x_0)} f \tag{10.94}$$

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *alors Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f > \lambda$

2. il existe $U \in \mathcal{V}_\omega^+(x_0)$ *tel que*

$$\inf_{x\in U} f(x) > \lambda$$

3. il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *vérifiant les propriétés* (α) *et* (β) *suivantes*

(α) $]x_0\ ,\ x_0+\varepsilon[\cap K \in \Omega_f^+(x_0)$

(β)

$$\inf_{x\in]x_0, x_0+\varepsilon[\cap K} f(x) > \lambda$$

(iv) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *alors Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f < \lambda$

2. il existe $U \in \mathcal{V}_\omega^+(x_0)$ *tel que*

$$\sup_{x\in U} f(x) < \lambda$$

3. il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *vérifiant les propriétés* (α) *et* (β) *suivantes*

(α) $]x_0\ ,\ x_0+\varepsilon[\cap K \in \Omega_f^+(x_0)$

(β)

$$\sup_{x\in]x_0, x_0+\varepsilon[\cap K} f(x) < \lambda$$

(v) Si $(\omega\ ,\ \pi) \in \Omega_f^+(x_0) \times \Omega_f^+(x_0)$ *alors*

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\pi^+(x_0)} f$$

En particulier si f *est bornée*

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$$

(vi) Si $(\omega\ ,\ \pi) \in \Omega_f^+(x_0) \times \Omega_f^+(x_0)$ *alors*

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\pi^+(x_0)} f$$

En particulier si f *est bornée*

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$$

(vii) Pour tout $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *il existe une suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap]x_0\ ,\ \to [)$ *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f$$

(viii) Pour tout $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *et toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap]x_0\ ,\ \to [)$ *qui converge vers* x_0 *on a*

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f \leq \liminf_{n\to+\infty} f(y_n)$$

(ix) Pour tout $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *il existe une suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap]x_0\ ,\ \to [)$ *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f$$

(x) Pour tout $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *et toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap]x_0\ ,\ \to [)$ *qui converge vers* x_0 *on a*

$$\limsup_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f$$

(xi) Pour $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *les conditions suivantes sont équivalentes*

α $\liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f$

β *pour toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap]x_0\ ,\ \to[)$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f$$

γ *pour toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap]x_0\ ,\ \to[)$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f$$

(xii)

$$\limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f = \inf_{U\in\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} \Big(\sup_{(x,y)\in U\times U} |f(x) - f(y)| \Big) \tag{10.95}$$

En d'autres termes $\limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f$ *est le plus grand minorant du sous-ensemble* Γ *de* $\mathbb{R}$ *défini par*

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ U \in \mathcal{V}_\omega^+(x_0) : t = \sup_{(x,y)\in U\times U} |f(x) - f(y)|\}$$

(xiii) Pour tout $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *pour toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap]x_0\ ,\ \to[)$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f$$

2. *pour toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap]x_0\ ,\ \to[)$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f$$

3. $\limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f$

4. *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^+(x_0)$ *tel que*

$$\sup_{x\in U_\varepsilon} |f(x) - \limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f| \le \varepsilon$$

5. *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^+(x_0)$ *tel que*

$$\sup_{(x,y)\in U_\varepsilon\times U_\varepsilon} |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$

6.

$$\inf_{U\in\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} \Big(\sup_{(x,y)\in U\times U} |f(x) - f(y)| \Big) = 0$$

Preuve La preuve, similaire à celle du lemme [10.28] page 738 est laissée au soin du lecteur. ∎

La définition de la notion de limite à droite n'est plus qu'un jeu linguistique.

Définition 10.47 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *un point* K*-accessible à droite,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *admet une* $\imath(K,\mathcal{T})$*-* ***limite à droite*** *en* x_0 *si elle vérifie les propriétés suivantes*

1. f *est localement bornée à droite en* x_0 *: l'ensemble*

$$\Omega_f^+(x_0) = \{\omega \in \mathcal{V}_K^+(x_0)/\ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}$$

est non vide.

2. *Il existe* $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *tel que*

$$\liminf_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_\omega^+(x_0)} f$$

Pour montrer l'existence d'une $\imath(K,\mathcal{T})$-limite à gauche en un point on peut piocher dans les équivalences 1 à 6 évoquées au point $(xiii)$ du lemme [10.30] page 751 mais il semble de bon ton d'énoncer ces résultats en termes de convergence de suite et de convergence de filtre.

Lemme 10.31 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathrm{adh}(K)$ *un point* K*-accessible à droite,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée à droite en* x_0*.*

(i) Pour que f *admette une* $\imath(K,\mathcal{T})$*-limite à droite en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *et toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega\cap]x_0\ ,\ \rightarrow[)$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *converge vers* l*.*

(ii) Pour que f *admette une* $\imath(K,\mathcal{T})$*-limite à droite en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\omega \in \Omega_f^+(x_0)$ *et pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $U_\varepsilon \in \mathcal{V}_\omega^+(x_0)$ *vérifiant*

$$\sup_{x\in U_\varepsilon} |f(x) - l| < \varepsilon \tag{10.96}$$

(iii) Pour que f *admette une* $\imath(K,\mathcal{T})$*-limite à droite en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que le filtre image de* $\mathcal{V}_K^+(x_0)$ *par* f *converge vers* l *:*

$$V \in \mathcal{V}(l) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_K^+(x_0)\ .$$

Preuve La preuve, similaire à celle du lemme [10.29] page 748 est laissée au soin du lecteur. ∎

Finalement toute cette botanique autours de la notion de limite consiste à expliquer que même si f n'est pas globalement bornée on peut définir des objets similaires à la limite supérieure et inférieure qui vérifient les propriétés énoncées au théorème [10.5] page 699 . On peut facilement formaliser ces notions.

10.8 *Limite supérieure et inférieure le long des filtres pour les fonctions localement bornées à valeurs dans un corps de réels*

10.8.1 *Définition et premières propriétés*

Si X est un ensemble non vide et Φ est un filtre sur X, une application f de X dans $\mathbb{R}$ est dite localement bornée sur Φ si il existe $\omega \in \Phi$ sur lequel f est bornée.

Définition 10.48 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* X *un ensemble non vide, enfin* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* X *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *est* ***localement bornée*** *sur* Φ *si il existe* $\omega \in \Phi$ *sur lequel* f *est bornée : l'ensemble*

$$\Omega_f(\Phi) = \{\omega \in \Phi/\ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}$$

est non vide

Sous différentes formes on a déjà prouvé le lemme suivant une bonne centaine de fois.

Lemme 10.32 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* X *un ensemble non vide,* Φ *un filtre sur* X*, enfin* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* X *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée sur* Φ*.*

(i) L'ensemble $\Omega_f(\Phi)$ *est stable par intersections et réunions finies :*

$$(\omega\ ,\pi) \in \Omega_f(\Phi) \times \Omega_f(\Phi) \Rightarrow \omega \cap \pi \in \Omega_f(\Phi) \quad \text{et} \quad \omega \cup \pi \in \Omega_f(\Phi)$$

En particulier $\Omega_f(\Phi)$ *est une base de filtre incluse dans* Φ*.*

(ii) L'ensemble $\Omega_f(\Phi)$ *est une section commençante de* $(\Phi\ ,\ \subset)$ *: si* $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ *alors*

$$\mathcal{V}_\omega(\Phi) = \{V \in \Phi / V \subset \omega\} \subset \Omega_f(\Phi)\ .$$

(iii) Pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ *le sous-ensemble* $\mathcal{V}_\omega(\Phi)$ *défini par*

$$\mathcal{V}_\omega(\Phi) = \mathcal{P}(\omega) \cap \Phi = \{V \in \Phi / V \subset \omega\}$$

est un filtre sur ω*.*

(iv) Si $\Lambda_*(f, \Phi)$ *est le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *défini par*

$$\Lambda_*(f, \Phi) = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \inf_{x \in \pi} f(x)\}$$

alors $\Lambda_*(f, \Phi)$ *est majoré et pour tout* $\omega \in \Omega_f(\Phi)$

$$\sup\{t : t \in \Lambda_*(f, \Phi)\} = \liminf_{\mathcal{V}_\omega(\Phi)} f \tag{10.97}$$

(v) Si $\Lambda^*(f, \Phi)$ *est le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *défini par*

$$\Lambda^*(f, \Phi) = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \sup_{x \in \pi} f(x)\}$$

alors $\Lambda^*(f, \Phi)$ *est minoré et pour tout* $\omega \in \Omega_f(\Phi)$

$$\inf\{t : t \in \Lambda^*(f, \Phi)\} = \limsup_{\mathcal{V}_\omega(\Phi)} f \tag{10.98}$$

Preuve

(i)

Soit $(\omega\ ,\ \pi) \in \Omega_f(\Phi) \times \Omega_f(\Phi)$, m_ω un majorant de $|f|(\omega)$ et m_π un majorant de $|f|(\pi)$ alors $\min\{m_\omega\ ,\ m_\pi\}$ est un majorant de $|f|(\omega \cap \pi)$ et $\max\{m_\omega\ ,\ m_\pi\}$ est un majorant de $|f|(\omega \cup \pi)$ d'autre part

— puisque Φ est un filtre $\omega \cap \pi \in \Phi$

— puisque Φ est un filtre et $\omega \subset \omega \cup \pi$ on a $\omega \cup \pi \in \Phi$.

Enfin puisque $\Omega_f(\Phi) \subset \Phi$ on a $\varnothing \notin \Omega_f(\Phi)$, et le fait que $\Omega_f(\Phi)$ soit stable par intersections finies montre alors que cet ensemble est une base de filtre sur X.

(ii)

Si $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ alors f est bornée sur tout sous-ensemble de ω, ainsi tout élément de Φ inclus dans ω appartient à $\Omega_f(\Phi)$.

(iii)

1. $\varnothing \notin \mathcal{V}_\omega(\Phi)$ puisque $V \in \mathcal{V}_\omega(\Phi) \Rightarrow V \in \Phi$
2. Si $(V, B) \in \mathcal{V}_\omega(\Phi) \times \mathcal{P}(\omega)$ et $V \subset B$ alors B contient un élément du filtre Φ et appartient donc à Φ. Puisque $B \subset \omega$ on obtient $B \in \mathcal{V}_\omega(\Phi)$.

3. Si $(U,V) \in \mathcal{V}_\omega(\Phi)\times\mathcal{V}_\omega(\Phi)$ alors $U\cap V \in \Phi$ puisque Φ est stable par intersections finies et $U\cap V \subset \omega$ par suite $U \cap V \in \mathcal{V}_\omega(\Phi)$.

(iv)

1. On montre que pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ l'ensemble $\Lambda_*(f,\Phi)$ est majoré par le réel $\sup\limits_{x\in\omega} f(x)$.

Soit $\omega \in \Omega_f(\Phi)$, si $t \in \Lambda_*(f,\Phi)$ il existe $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ tel que $t = \inf\limits_{x\in\pi} f(x)$ les inégalités

$$\inf_{x\in\pi} f(x) \leq \inf_{x\in\omega\cap\pi} f(x) \leq \sup_{x\in\omega\cap\pi} f(x) \leq \sup_{x\in\omega} f(x)$$

montre que $t \leq \sup\limits_{x\in\omega} f(x)$

2. On montre que pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ on a $\sup\{t : t \in \Lambda_*(f,\Phi)\} = \liminf\limits_{\mathcal{V}_\omega(\Phi)} f$

Il s'agit de montrer que le plus petit majorant de l'ensemble $\Lambda_*(f,\Phi)$ est aussi le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*(\omega) = \{t \in \mathbb{R}/ \ \exists\ V \in \mathcal{V}_\omega(\Phi) : t = \inf_{x\in V} f(x)\}\ .$$

(a) D'abord on montre $\sup\{t : t \in \Lambda_*(\omega)\} \leq \sup\{t : t \in \Lambda_*(f,\Phi)\}$

En effet, d'après (ii) on a $\mathcal{V}_\omega(\Phi) \subset \Omega_f(\Phi)$ par suite $\Lambda_*(\omega) \subset \Lambda_*(f,\Phi)$ et tout majorant de $\Lambda_*(f,\Phi)$ est un majorant de $\Lambda_*(\omega)$. En particulier le plus petit majorant de l'ensemble $\Lambda_*(\omega)$ est inférieur au plus petit majorant de l'ensemble $\Lambda_*(f,\Phi)$

(b) Ensuite on montre $\sup\{t : t \in \Lambda_*(f,\Phi)\} \leq \sup\{t : t \in \Lambda_*(\omega)\}$

Il suffit de montrer que tout élément de $\Lambda_*(f,\Phi)$ est majoré par un élément de $\Lambda_*(\omega)$. Or si $t = \inf\limits_{x\in\pi} f(x)$ avec $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ alors $\pi\cap\omega \in \Phi$ ainsi $\pi\cap\omega \in \mathcal{V}_\omega(\Phi)$ et $s = \inf\limits_{x\in\pi\cap\omega} f(x)$ est un élément de $\Lambda_*(\omega)$, l'inégalité $\inf\limits_{x\in\pi} f(x) \leq \inf\limits_{x\in\pi\cap\omega} f(x)$ montre que $t \leq s$. Par suite tout majorant de $\Lambda_*(\omega)$ est un majorant de $\Lambda_*(f,\Phi)$. En particulier le plus petit majorant de l'ensemble $\Lambda_*(f,\Phi)$ est inférieur au plus petit majorant de l'ensemble $\Lambda_*(\omega)$.

(v)

1. On montre que pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ l'ensemble $\Lambda^*(f,\Phi)$ est minoré par le réel $\inf\limits_{x\in\omega} f(x)$.

Soit $\omega \in \Omega_f(\Phi)$, si $t \in \Lambda^*(f,\Phi)$ il existe $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ tel que $t = \sup\limits_{x\in\pi} f(x)$ les inégalités

$$\inf_{x\in\omega} f(x) \leq \inf_{x\in\omega\cap\pi} f(x) \leq \sup_{x\in\omega\cap\pi} f(x) \leq \sup_{x\in\pi} f(x)$$

montre que $\inf\limits_{x\in\omega} f(x) \leq t$

2. On montre que pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ on a $\inf\{t : t \in \Lambda^*(f,\Phi)\} = \limsup\limits_{\mathcal{V}_\omega(\Phi)} f$

Il s'agit de montrer que le plus grand minorant de l'ensemble $\Lambda^*(f,\Phi)$ est aussi le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda^*(\omega) = \{t \in \mathbb{R}/ \ \exists\ V \in \mathcal{V}_\omega(\Phi) : t = \sup_{x\in V} f(x)\}\ .$$

(a) D'abord on montre $\inf\{t : t \in \Lambda^*(f,\Phi)\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(\omega)\}$

En effet, d'après (ii) on a $\mathcal{V}_\omega(\Phi) \subset \Omega_f(\Phi)$ par suite $\Lambda^*(\omega) \subset \Lambda^*(f,\Phi)$ et tout minorant de $\Lambda^*(f,\Phi)$ est un minorant de $\Lambda^*(\omega)$. En particulier le plus grand minorant de l'ensemble $\Lambda^*(f,\Phi)$ est inférieur au plus grand minorant de l'ensemble $\Lambda^*(\omega)$

(b) Ensuite on montre $\inf\{t : t \in \Lambda^*(\omega)\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(f,\Phi)\}$

Il suffit de montrer que tout élément de $\Lambda^*(f,\Phi)$ est minoré par un élément de $\Lambda^*(\omega)$. Or si $t = \sup_{x\in\pi} f(x)$ avec $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ alors $\pi \cap \omega \in \Phi$ ainsi $\pi \cap \omega \in \mathcal{V}_\omega(\Phi)$ et $s = \sup_{x\in\pi\cap\omega} f(x)$ est un élément de $\Lambda^*(\omega)$, l'inégalité $\sup_{x\in\pi\cap\omega} f(x) \leq \sup_{x\in\pi} f(x)$ montre que $s \leq t$. Par suite tout minorant de $\Lambda^*(\omega)$ est un minorant de $\Lambda_*(f,\Phi)$. En particulier le plus grand minorant de l'ensemble $\Lambda^*(\omega)$ est inférieur au plus grand minorant de l'ensemble $\Lambda^*(f,\Phi)$.

■

Le lemme [10.32] page 755 permet de définir des notions de limites supérieures et limites inférieures pour des applications localement bornées sur un filtre.

Définition 10.49 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels, X un ensemble non vide, Φ un filtre sur X, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X\ ,\ \mathbb{R})$ est une application de X dans $\mathbb{R}$ qui est localement bornée sur Φ. Enfin on considère les ensembles*

$$\Omega_f(\Phi) = \{\omega \in \Phi /\ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}\ ,$$

$$\Lambda_*(f,\Phi) = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \inf_{x\in\pi} f(x)\}$$

et

$$\Lambda^*(f,\Phi) = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \sup_{x\in\pi} f(x)\}$$

1. *On appelle **limite inférieure** de f le long de Φ le réel $\liminf_\Phi f$ défini comme la borne supérieure de $\Lambda_*(f,\Phi)$:*
$$\liminf_\Phi f = \sup\{t : t \in \Lambda_*(f,\Phi)\} = \sup_{\omega\in\Omega_f(\Phi)} (\inf_{x\in\omega} f(x))$$
2. *On appelle **limite supérieure** de f le long de Φ le réel $\limsup_\Phi f$ défini comme la borne inférieure de $\Lambda^*(f,\Phi)$:*
$$\limsup_\Phi f = \inf\{t : t \in \Lambda^*(f,\Phi)\} = \inf_{\omega\in\Omega_f(\Phi)} (\sup_{x\in\omega} f(x))$$

Le lemme [10.32] page 755 montre l'existence de ces limites pour toute application localement bornée sur Φ. De plus ce lemme montre que le calcul de ces limites peut-être effectué comme une limsup ou une liminf classique en se restreignant à n'importe quel élément du filtre sur lequel f est bornée, ainsi les énoncés du théorème [10.5] page 699 sont encore vérifiés dans le cas localement borné.

Théorème 10.6 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels, X un ensemble non vide, Φ un filtre sur X et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{R})$ une application de X dans $\mathbb{R}$ qui est localement bornée sur Φ.*

(i) Pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$
$$\inf_{x\in\omega} f(x) \leq \liminf_\Phi f \leq \limsup_\Phi f \leq \sup_{x\in\omega} f(x)$$

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

1. *pour que $\liminf_\Phi f > \lambda$ il faut et il suffit qu'il existe $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ tel que*
$$\inf_{x\in\omega} f(x) > \lambda$$
2. *pour que $\limsup_\Phi f < \lambda$ il faut et il suffit qu'il existe $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ tel que*
$$\sup_{x\in\omega} f(x) < \lambda$$

(iii) Pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$

$$\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f = \inf_{\pi \in \Omega_f(\Phi)} (\sup_{(x,y)\in\pi\times\pi} |f(x) - f(y)|) \tag{10.99}$$

En d'autres termes $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ est le plus grand minorant du sous-ensemble Γ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \sup_{(x,y)\in\pi\times\pi} |f(x) - f(y)|\}$$

(iv) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

I

$$\limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f$$

II *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que*

$$\sup_{x\in\omega_\varepsilon} |f(x) - \limsup_{\Phi} f| \leq \varepsilon$$

III *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que*

$$\sup_{x\in\omega_\varepsilon} |f(x) - \liminf_{\Phi} f| \leq \varepsilon$$

IV *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\pi_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que*

$$\sup_{(v,y)\in\pi_\varepsilon\times\pi_\varepsilon} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\ .$$

(v) Le réel $\liminf_{\Phi} f$ est le plus petit élément de l'ensemble $\bigcap_{\omega\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\omega))$:

$$\liminf_{\Phi} f = \min\{x : x \in \bigcap_{\omega\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\omega))\}$$

(vi) Le réel $\limsup_{\Phi} f$ est le plus grand élément de l'ensemble $\bigcap_{\omega\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\omega))$:

$$\limsup_{\Phi} f = \max\{x : x \in \bigcap_{\omega\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\omega))\}$$

(vii) Si $\Phi(f)$ est le filtre image de Φ par f alors $\bigcap_{\omega\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\omega)) = \bigcap_{B\in\Phi(f)} \mathrm{adh}(B)$

(viii) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$
2. *le filtre $\Phi(f)$ est convergeant : il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$*

$$]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\in \Phi(f)\ .$$

(ix) Si $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, \mathbb{R})$ est un couple d'applications de X dans $\mathbb{R}$ qui sont localement bornées sur Φ alors

$$\liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g = \sup_{\omega\in\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)} (\inf_{x\in\omega} f(x) + \inf_{x\in\omega} g(x))$$

De plus l'application $f+g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{R})$ *définie par* $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ *est localement bornée sur* Φ *et*

$$\liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g \leq \liminf_{\Phi}(f+g) \tag{10.100}$$

(x) Si $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{R})$ *est un couple d'applications de* X *dans* $\mathbb{R}$ *qui sont localement bornées sur* Φ *alors*

$$\limsup_{\Phi} f + \limsup_{\Phi} g = \inf_{\omega \in \Omega_f(\Phi) \cap \Omega_g(\Phi)} (\sup_{x\in\omega} f(x) + \sup_{x\in\omega} g(x))$$

et

$$\limsup_{\Phi}(f+g) \leq \limsup_{\Phi} f + \limsup_{\Phi} g \tag{10.101}$$

(xi) Si $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{R})$ *est un couple d'applications de* X *dans* $\mathbb{R}$ *qui sont localement bornées sur* Φ *et si il existe* $\omega \in \Omega_g(\Phi) \cap \Omega_f(\Phi)$ *tel que pour tout* $x \in \omega$ *l'inégalité* $f(x) \leq g(x)$ *est vérifiée alors*

$$\liminf_{\Phi} f \leq \liminf_{\Phi} g \quad \text{et} \quad \limsup_{\Phi} f \leq \limsup_{\Phi} g \tag{10.102}$$

(xii) Si $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{R})$ *est un couple d'applications de* X *dans* $\mathbb{R}$ *qui sont localement bornées sur* Φ *et qui vérifient*

$$\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f \quad \text{et} \quad \liminf_{\Phi} g = \limsup_{\Phi} g$$

alors

$$\liminf_{\Phi}(f+g) = \limsup_{\Phi}(f+g) = \liminf_{\Phi}(f) + \liminf_{\Phi}(g) \tag{10.103}$$

(xiii) Si $a \in \mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{R})$ *est une application de* X *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée sur* Φ *alors l'application* $af \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X,\mathbb{R})$ *définie par* $(af)(x) = af(x)$ *est localement bornée sur* Φ *et*

1. *Si* $a \geq 0$
$$\liminf_{\Phi}(af) = a\liminf_{\Phi} f \quad \text{et} \quad \limsup_{\Phi}(af) = a\limsup_{\Phi} f \tag{10.104}$$
2. *Si* $a \leq 0$
$$\liminf_{\Phi}(af) = a\limsup_{\Phi} f \quad \text{et} \quad \limsup_{\Phi}(af) = a\liminf_{\Phi} f \tag{10.105}$$

Preuve Dans toute la preuve On pose

$$\Lambda^*(f,\Phi) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \sup_{x\in\pi} f(x)\}$$

et

$$\Lambda_*(f,\Phi) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \inf_{x\in\pi} f(x)\}$$

(i)

Soit $\omega \in \Omega_f(\Phi)$

1. <u>On montre $\inf_{x\in\omega} f(x) \leq \liminf_{\Phi} f$</u>

   Puisque $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ on a $\inf_{x\in\omega} f(x) \in \Lambda_*(f,\Phi)$, or $\liminf_{\Phi} f$ est un majorant de $\Lambda_*(f,\Phi)$
2. <u>On montre $\liminf_{\Phi} f \leq \limsup_{\Phi} f$</u>

   Il suffit de voir que pour tout $(\omega,\pi) \in \Omega_f(\Phi) \times \Omega_f(\Phi)$

$$\inf_{x\in\omega} f(x) \leq \sup_{x\in\pi} f(x)$$

Or d'après [10.9] page 593 on a, puisque $\omega \cap \pi \neq \varnothing$,

$$\inf_{x\in\omega} f(x) \leq \inf_{x\in\omega\cap\pi} f(x) \leq \sup_{x\in\omega\cap\pi} f(x) \leq \sup_{x\in\pi} f(x)$$

ainsi pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ le réel $\sup\limits_{x\in\pi} f(x)$ est un majorant de $\Lambda_*(f,\Phi)$ et puisque $\liminf\limits_{\Phi} f$ est le plus petit majorant de $\Lambda_*(f,\Phi)$ on obtient

$$\pi \in \Omega_f(\Phi) \Rightarrow \liminf_{\Phi} f \leq \sup_{x\in\pi} f(x)$$

En particulier $\liminf\limits_{\Phi} f$ est un minorant de $\Lambda^*(f,\Phi)$ et puisque $\limsup\limits_{\Phi} f$ est le plus grand minorant de $\Lambda^*(f,\Phi)$ on obtient

$$\liminf_{\Phi} f \leq \limsup_{\Phi} f$$

3. <u>On montre $\limsup\limits_{\Phi} f \leq \sup\limits_{x\in\omega} f(x)$</u>

   Puisque $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ on a $\sup\limits_{x\in\omega} f(x) \in \Lambda^*(f,\Phi)$, or $\limsup\limits_{\Phi} f$ est un minorant de $\Lambda^*(f,\Phi)$.

(ii)

1. Si $\liminf\limits_{\Phi} f > \lambda$ alors λ n'est pas un majorant de $\Lambda_*(f,\Phi)$ puisque $\liminf\limits_{\Phi} f$ est le plus petit majorant de $\Lambda_*(f,\Phi)$, ainsi il existe $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\inf_{x\in\omega} f(x) > \lambda \ .$$

   Inversement , si il existe $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ tel que $\inf\limits_{x\in\omega} f(x) > \lambda$ alors

$$\liminf_{\Phi} f \geq \inf_{x\in\omega} f(x) > \lambda \ .$$

2. Si $\limsup\limits_{\Phi} f < \lambda$ alors λ n'est pas un minorant de $\Lambda^*(f,\Phi)$ puisque $\limsup\limits_{\Phi} f$ est le plus grand minorant de $\Lambda^*(f,\Phi)$, ainsi il existe $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\sup_{x\in\omega} f(x) < \lambda \ .$$

   Inversement , si il existe $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ tel que $\sup\limits_{x\in\omega} f(x) < \lambda$ alors

$$\limsup_{\Phi} f \leq \sup_{x\in\omega} f(x) < \lambda \ .$$

(iii)

D'après (10.6) page 593

$$\sup_{x\in\pi} f(x) - \inf_{x\in\pi} f(x) = \sup_{(x,y)\in\pi\times\pi} |f(x) - f(y)| \ ,$$

il suffit donc de vérifier que

$$\inf_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} (\sup_{x\in\pi} f(x) - \inf_{x\in\pi} f(x)) = \limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$$

autrement dit il faut montrer que $\limsup\limits_{\Phi} f - \liminf\limits_{\Phi} f$ est le plus grand minorant de l'ensemble Δ défini par

$$\Delta = \{t \in \mathbb{R} / \exists \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \sup_{x\in\pi} f(x) - \inf_{x\in\pi} f(x)\}$$

1. D'abord on montre que $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ est un minorant de Δ. En effet, puisque pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ on a $\sup_{x\in\pi} f(x) \geq \limsup_{\Phi} f$ et $-\inf_{x\in\pi} f(x) \geq -\liminf_{\Phi} f$ la compatibilité de l'addition et de l'ordre montre que

$$\pi \in \Omega_f(\Phi) \Rightarrow \sup_{x\in\pi} f(x) - \inf_{x\in\pi} f(x) \geq \limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$$

Ainsi $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ est un minorant de l'ensemble Δ

2. Ensuite on montre que $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ est le plus grand minorant de Δ. En effet , si

$$\lambda > \limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$$

alors $\limsup_{\Phi} f < \lambda + \liminf_{\Phi} f$ ainsi (ii) montre qu'il existe $\pi_0 \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\sup_{x\in\pi_0} f(x) < \lambda + \liminf_{\Phi} f$$

par suite $\sup_{x\in\pi_0} f(x) - \lambda < \liminf_{\Phi} f$ et (ii) montre qu'il existe $\pi_1 \in \Phi$ tel que

$$\sup_{x\in\pi_0} f(x) - \lambda < \inf_{x\in\pi_1} f(x)$$

ainsi on obtient

$$\sup_{x\in\pi_0\cap\pi_1} f(x) - \lambda \leq \sup_{x\in\pi_0} f(x) - \lambda < \inf_{x\in\pi_1} f(x) \leq \inf_{x\in\pi_0\cap\pi_1} f(x)$$

et

$$\sup_{x\in\pi_0\cap\pi_1} f(x) - \inf_{x\in\pi_0\cap\pi_1} f(x) < \lambda$$

mais puisque $\pi_0 \cap \pi_1 \in \Omega_f(\Phi)$ on a $\sup_{x\in\pi_0\cap\pi_1} f(x) - \inf_{x\in\pi_0\cap\pi_1} f(x) \in \Delta$, ce qui montre que tout nombre réel strictement supérieur à $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ n'est pas un minorant de Δ.

On a donc vu que

$$\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f = \inf_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} (\sup_{x\in\pi} f(x) - \inf_{x\in\pi} f(x)) = \inf_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} (\sup_{(x,y)\in\pi\times\pi} |f(x) - f(y)|)$$

$$(iv)$$

1 On montre **I** $\Leftrightarrow$ **II**

1. <u>D'abord on montre I$\Rightarrow$ II</u>

Posons $l = \limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f$, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors

— puisque $\limsup_{\Phi} f < l + \varepsilon$ il existe (voir (ii)) $\varpi_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\sup_{x\in\varpi_\varepsilon} f(x) < l + \varepsilon$$

— puisque $\liminf_{\Phi} f > l - \varepsilon$ il existe $\pi_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\inf_{x\in\pi_\varepsilon} f(x) > l - \varepsilon$$

Ainsi en posant $\omega_\varepsilon = \pi_\varepsilon \cap \varpi_\varepsilon$ alors $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ et

$$x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \Rightarrow \limsup_\Phi f - \varepsilon < f(x) < \limsup_\Phi f + \varepsilon$$

2. Ensuite on montre II$\Rightarrow$ I

   Il suffit d'après (i) de montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\limsup_\Phi f < \liminf_\Phi f + \varepsilon$$

   Mais II implique que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow \limsup_\Phi f - \frac{\varepsilon}{2} < f(x)$$

   par suite

$$\limsup_\Phi f - \varepsilon < \inf_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \leq \liminf_\Phi f \ .$$

2 On montre **II** $\Rightarrow$ **III**

— Puisque II est vérifiée pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\sup_{x\in\omega_\varepsilon} |f(x) - \limsup_\Phi f| < \varepsilon$$

— Puisque II$\Rightarrow$ I on a $\limsup_\Phi f = \liminf_\Phi f$

ainsi on obtient que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\sup_{x\in\omega_\varepsilon} |f(x) - \liminf_\Phi f| < \varepsilon$$

2 On montre **III** $\Rightarrow$ **IV**

Si la propriété **III** est vérifiée alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\sup_{x\in\omega_\varepsilon} |f(x) - \liminf_\Phi f| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ainsi

$$(x, y) \in \omega_\varepsilon \times \omega_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \liminf_\Phi f| + |\liminf_\Phi f - f(y)| < \varepsilon$$

3 On montre **IV** $\Rightarrow$ **I**

La propriété **IV** est une traduction de

$$\inf_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \Big(\sup_{(x,y)\in\pi\times\pi} |f(x) - f(y)| \Big) = 0$$

en effet, si l'ensemble $\Delta = \{t \in \mathbb{R}_+^* / \exists\ \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \sup_{(x,y)\in\pi\times\pi} |f(x) - f(y)|\}$ possède un minorant strictement positif ε alors

$$\pi \in \Omega_f(\Phi) \Rightarrow \sup_{(x,y)\in\pi\times\pi} |f(x) - f(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$$

Ce qui contredit la propriété énoncée en **IV** , l'égalité (10.99) page 758 montre alors que

$$\limsup_\Phi f = \liminf_\Phi f \ .$$

(v)

1. D'abord on montre que $\liminf_{\Phi} f \in \bigcap_{\omega \in \Omega_f(\Phi)} \operatorname{adh}(f(\omega))$

D'après le lemme [10.13] page 677 il faut montrer que pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]\liminf_{\Phi} f - \varepsilon \ , \ \liminf_{\Phi} f + \varepsilon[\cap f(\pi) \neq \varnothing \ .$$

Or si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
— d'après (ii) il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\inf_{x \in \omega_\varepsilon} f(x) > \liminf_{\Phi} f - \varepsilon$$

ainsi pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ on obtient, puisque $\pi \cap \omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$

$$\liminf_{\Phi} f - \varepsilon < \inf_{x \in \omega_\varepsilon} f(x) \leq \inf_{x \in \pi \cap \omega_\varepsilon} f(x) \leq \liminf_{\Phi} f$$

et

$$\liminf_{\Phi} f - \varepsilon < \inf_{x \in \pi \cap \omega_\varepsilon} f(x) \leq \liminf_{\Phi} f \tag{10.106}$$

— puisque par définition le réel $\inf_{x \in \pi \cap \omega_\varepsilon} f(x)$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$f(\pi \cap \omega_\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} / \exists \ x \in \pi \cap \omega_\varepsilon : t = f(x)\}$$

il existe $x_0 \in \pi \cap \omega_\varepsilon$ tel que $\inf_{x \in \pi \cap \omega_\varepsilon} f(x) \leq f(x_0) < \inf_{x \in \pi \cap \omega_\varepsilon} f(x) + \varepsilon$ et (10.106) montre que

$$f(x_0) \in]\liminf_{\Phi} f - \varepsilon \ , \ \liminf_{\Phi} f + \varepsilon[\cap f(\pi)$$

2. Ensuite on montre que $\liminf_{\Phi} f$ est un minorant de $\bigcap_{\pi \in \Omega_f(\Phi)} \operatorname{adh}(f(\pi))$

Si $a \in \bigcap_{\pi \in \Omega_f(\Phi)} \operatorname{adh}(f(\pi))$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\pi \in \Omega_f(\Phi)$

$$]a - \varepsilon \ , \ a + \varepsilon[\cap f(\pi) \neq \varnothing$$

cela montre que pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ on a

$$\inf_{x \in \pi} f(x) < a + \varepsilon$$

en effet, si $t \in]a - \varepsilon \ , \ a + \varepsilon[\cap f(\pi)$ alors
— puisque $t \in f(\pi)$ il existe $x_\pi \in \pi$ tel que $t = f(x_\pi)$
— puisque $t < a + \varepsilon$ on obtient $f(x_\pi) < a + \varepsilon$ et

$$\inf_{x \in \pi} f(x) \leq f(x_\pi) < a + \varepsilon$$

ainsi $a + \varepsilon$ est un majorant de $\Lambda_*(f, \Phi)$ et par définition $\liminf_{\Phi} f$ est le plus petit majorant de cet ensemble, par suite

$$\liminf_{\Phi} f \leq a + \varepsilon$$

cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient

$$\liminf_{\Phi} f \leq a \ .$$

(vi)

1. D'abord on montre que $\limsup_{\Phi} f \in \bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi))$

D'après le lemme [10.13] page 677 il faut montrer que pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]\limsup_{\Phi} f - \varepsilon \ , \ \limsup_{\Phi} f + \varepsilon[\cap f(\pi) \neq \varnothing \ .$$

Or si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

— d'après (ii) il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\sup_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) < \limsup_{\Phi} f + \varepsilon$$

ainsi pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ on obtient, puisque $\pi \cap \omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$

$$\limsup_{\Phi} f \leq \sup_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} f(x) \leq \sup_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \leq \limsup_{\Phi} f + \varepsilon$$

et

$$\limsup_{\Phi} f - \varepsilon < \sup_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} f(x) - \varepsilon \leq \sup_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} f(x) < \limsup_{\Phi} f + \varepsilon \ . \tag{10.107}$$

— puisque par définition le réel $\sup_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} f(x)$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$f(\pi\cap\omega_\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ x \in \pi\cap\omega_\varepsilon : t = f(x)\}$$

il existe $x_0 \in \pi\cap\omega_\varepsilon$ tel que $\sup_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} f(x) - \varepsilon < f(x_0) \leq \sup_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} f(x)$ et (10.107) montre que

$$f(x_0) \in]\limsup_{\Phi} f - \varepsilon \ , \ \limsup_{\Phi} f + \varepsilon[\cap f(\pi)$$

2. Ensuite on montre que $\limsup_{\Phi} f$ est un majorant de $\bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi))$

Si $a \in \bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi))$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\pi \in \Omega_f(\Phi)$

$$]a - \varepsilon \ , \ a + \varepsilon[\cap f(\pi) \neq \varnothing$$

cela montre que pour tout $\pi \in \Phi$ on a

$$\sup_{x\in\pi} f(x) > a - \varepsilon$$

en effet, si $t \in]a - \varepsilon \ , \ a + \varepsilon[\cap f(\pi)$ alors

— puisque $t \in f(\pi)$ il existe $x_\pi \in \pi$ tel que $t = f(x_\pi)$

— puisque $t > a - \varepsilon$ on obtient $f(x_\pi) > a - \varepsilon$ et

$$\sup_{x\in\pi} f(x) \geq f(x_\pi) > a - \varepsilon$$

ainsi $a - \varepsilon$ est un minorant de $\Lambda^*(f, \Phi)$ et puisque par définition $\limsup_{\Phi} f$ est le plus grand minorant de cet ensemble on obtient

$$\limsup_{\Phi} f \geq a - \varepsilon$$

cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient

$$\limsup_{\Phi} f \geq a \ .$$

(vii)

$$1 \text{ On montre } \bigcap_{B\in\Phi(f)} \mathrm{adh}(B) \subset \bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi))$$

Pour cela on remarque que pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ on a $f(\pi) \in \Phi(f)$. En effet, l'inclusion $\pi \subset f^{-1}(f(\pi))$ montre que pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ l'ensemble $f^{-1}(f(\pi))$ contient un élément de Φ, et appartient donc à Φ. Ainsi pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$

$$\bigcap_{B\in\Phi(f)} \mathrm{adh}(B) \subset \mathrm{adh}(f(\pi)) \ .$$

$$2 \text{ On montre } \bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi)) \subset \bigcap_{B\in\Phi(f)} \mathrm{adh}(B)$$

Pour cela on remarque que pour tout $B \in \Phi(f)$ il existe $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ tel que $f(\pi) \subset B$. Par définition de $\Phi(f)$ pour tout $B \in \Phi(f)$ l'ensemble $V = f^{-1}(B) = \{x \in X/f(x) \in B\}$ est un élément de Φ par suite si $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ alors $\pi = \omega \cap f^{-1}(B)$ est un élément de $\Omega_f(\Phi)$ vérifiant $f(\pi) \subset B$ et pour tout $B \in \Phi(f)$

$$\bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi)) \subset \mathrm{adh}(B)$$

$(viii)$

1. Si $\limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f$ alors (iv) permet d'affirmer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ vérifiant la propriété que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que
$$\sup_{x\in\omega_\varepsilon} |f(x) - l| < \varepsilon$$
Un tel ω_ε vérifie $\omega_\varepsilon \subset f^{-1}(]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[)$ ainsi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble $f^{-1}(]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[)$ contient un élément du filtre Φ et appartient donc à Φ, ce qui montre que $]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[\in \Phi(f)$.
2. Dire que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[\in \Phi(f)$, c'est dire que l'ensemble $V_\varepsilon = f^{-1}(]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[)$ appartient à Φ. Or par définition on a
$$x \in f^{-1}(]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$
par suite si $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ l'ensemble $\omega_\varepsilon = \pi \cap f^{-1}(]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[)$ vérifie
$$\sup_{x\in\omega_\varepsilon} |f(x) - l| \leq \varepsilon$$
et (iv) permet de conclure.

(ix)

$$1 \text{ On montre } \liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g = \sup_{\pi\in\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)} (\inf_{x\in\pi} f(x) + \inf_{x\in\pi} g(x))$$

Il s'agit de montrer que $\liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g$ est le plus petit majorant du sous-ensemble L_* de $\mathbb{R}$ défini par

$$L_* = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ \pi \in \Omega_f(\Phi) \cap \Omega_g(\Phi) : t = \inf_{x\in\pi} f(x) + \inf_{x\in\pi} g(x)\}$$

1. D'abord $\liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g$ est un majorant de L_* puisque les inégalités
$$\inf_{x\in\pi} f(x) \leq \liminf_{\Phi} f \quad \text{et} \quad \inf_{x\in\pi} g(x) \leq \liminf_{\Phi} g$$
montrent que
$$\inf_{x\in\pi} f(x) + \inf_{x\in\pi} g(x) \leq \liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g$$

2. Ensuite on montre que si $\lambda < \liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g$ alors λ n'est pas un majorant de L_*. En effet, si $\lambda - \liminf_{\Phi} g < \liminf_{\Phi} f$ alors (ii) permet d'affirmer qu'il existe $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\lambda - \liminf_{\Phi} g < \inf_{x\in\pi} f(x)$$

ainsi $\lambda - \inf_{x\in\pi} f(x) < \liminf_{\Phi} g$ et il existe $\omega \in \Omega_g(\Phi)$ tel que

$$\lambda - \inf_{x\in\pi} f(x) < \inf_{x\in\omega} g(x)$$

ainsi

$$\lambda < \inf_{x\in\pi} f(x) + \inf_{x\in\omega} g(x) \leq \inf_{x\in\omega\cap\pi} f(x) + \inf_{x\in\omega\cap\pi} g(x)$$

et puisque $\omega\cap\pi \in \Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)$ le réel λ n'est pas un majorant de L_*.

Ceci permet donc d'affirmer

$$\liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g = \sup_{\pi\in\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)} (\inf_{x\in\pi} f(x) + \inf_{x\in\pi} g(x)) \tag{10.108}$$

2 On montre l'inégalité (10.100) page 759

D'après le lemme [10.1] page 592 on a

$$\inf_{x\in\pi} f(x) + \inf_{x\in\pi} g(x) \leq \inf_{x\in\pi} (f+g)(x)$$

par suite

$$\sup_{\pi\in\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)} (\inf_{x\in\pi} f(x) + \inf_{x\in\pi} g(x)) \leq \sup_{\pi\in\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)} (\inf_{x\in\pi} (f+g)(x))$$

Ainsi l'inclusion $\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi) \subset \Omega_{f+g}(\Phi)$ qui entraîne

$$\sup_{\pi\in\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)} (\inf_{x\in\pi} (f+g)(x)) \leq \sup_{\pi\in\Omega_{f+g}(\Phi)} (\inf_{x\in\pi} (f+g)(x)) \leq \liminf_{\Phi} (f+g)$$

et l'égalité (10.108) montrent que

$$\liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g \leq \liminf_{\Phi} (f+g)$$

$$(x)$$

1 On montre $\limsup_{\Phi} f + \limsup_{\Phi} g = \inf_{\omega\in\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)} (\sup_{x\in\omega} f(x) + \sup_{x\in\omega} g(x))$

Il s'agit de montrer que $\limsup_{\Phi} f + \limsup_{\Phi} g$ est le plus grand minorant du sous-ensemble L^* de $\mathbb{R}$ défini par

$$L^* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \omega \in \Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi) : t = \sup_{x\in\omega} f(x) + \sup_{x\in\omega} g(x)\}$$

1. D'abord $\limsup_{\Phi} f + \limsup_{\Phi} g$ est un minorant de L^* puisque les inégalités

$$\limsup_{\Phi} f \leq \sup_{x\in\omega} f(x) \quad \text{et} \quad \limsup_{\Phi} g \leq \sup_{x\in\omega} g(x)$$

montrent que

$$\liminf_{\Phi} f + \liminf_{\Phi} g \leq \sup_{x\in\omega} g(x) + \sup_{x\in\omega} f(x)$$

2. Ensuite on montre que si $\lambda > \limsup_\Phi f + \limsup_\Phi g$ alors λ n'est pas un minorant de L^*. En effet, si $\lambda - \limsup_\Phi g > \limsup_\Phi f$ alors (ii) permet d'affirmer qu'il existe $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\lambda - \limsup_\Phi g > \sup_{x\in\pi} f(x)$$

ainsi $\lambda - \sup_{x\in\pi} f(x) > \limsup_\Phi g$ et il existe $\omega \in \Omega_g(\Phi)$ tel que

$$\lambda - \sup_{x\in\pi} f(x) > \sup_{x\in\omega} g(x)$$

ainsi

$$\lambda > \sup_{x\in\pi} f(x) + \sup_{x\in\omega} g(x) \geq \sup_{x\in\pi\cap\omega} f(x) + \sup_{x\in\pi\cap\omega} g(x)$$

et puisque $\pi\cap\omega \in \Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)$ le réel λ n'est pas un minorant de L^*.

Ceci permet donc d'affirmer

$$\limsup_\Phi f + \limsup_\Phi g = \inf_{\omega\in\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)} (\sup_{x\in\omega} f(x) + \sup_{x\in\omega} g(x)) \tag{10.109}$$

2 On montre l'inégalité (10.101) page 759

D'après le lemme [10.1] page 592 on a

$$\sup_{x\in\omega}(f+g)(x) \leq \sup_{x\in\omega} f(x) + \sup_{x\in\omega} g(x)$$

par suite

$$\inf_{\omega\in\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)} (\sup_{x\in\omega}(f+g)(x)) \leq \inf_{\omega\in\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)} (\sup_{x\in\omega} f(x) + \sup_{x\in\omega} g(x))$$

L'inclusion $\Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi) \subset \Omega_{f+g}(\Phi)$ et l'égalité (10.109) montrent que

$$\limsup_\Phi (f+g) \leq \limsup_\Phi f + \limsup_\Phi g$$

(xi)

Soit $\omega \in \Omega_f(\Phi)\cap\Omega_g(\Phi)$ tel que pour tout $x\in\omega$ $f(x)\leq g(x)$ alors pour tout $\pi\in\Omega_f(\Phi)$ on a

$$\inf_{x\in\pi} f(x) \leq \inf_{x\in\pi\cap\omega} f(x) \leq \inf_{x\in\pi\cap\omega} g(x)$$

et puisque $\pi\cap\omega\in\Omega_g(\Phi)$ on obtient pour tout $\pi\in\Omega_f(\Phi)$

$$\inf_{x\in\pi} f(x) \leq \inf_{x\in\pi\cap\omega} g(x) \leq \liminf_\Phi g$$

ce qui montre que $\liminf_\Phi f \leq \liminf_\Phi g$. De même les inégalités

$$\limsup_\Phi f \leq \sup_{x\in\pi\cap\omega} f(x) \leq \sup_{x\in\pi\cap\omega} g(x) \leq \sup_{x\in\pi} g(x)$$

étant vérifiées pour tout $\pi\in\Omega_g(\Phi)$ on obtient $\limsup_\Phi f \leq \limsup_\Phi g$.

(xii)

Il suffit de montrer $\limsup_\Phi (f+g) \leq \liminf_\Phi (f) + \liminf_\Phi (g) \leq \liminf_\Phi (f+g)$. Or si $\liminf_\Phi f = \limsup_\Phi f$ et $\liminf_\Phi g = \limsup_\Phi g$ alors l'inégalité (10.101) page 759 montre que

$$\limsup_\Phi (f+g) \leq \liminf_\Phi f + \liminf_\Phi g$$

et l'inégalité (10.100) page 759 montre alors que

$$\limsup_{\Phi}(f+g) \leq \liminf_{\Phi}(f+g)$$

(*xiii*)

1. Si $a \geq 0$ alors d'après le lemme [10.1] page 592 pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$

$$\inf_{x\in\omega}(af)(x) = a\inf_{x\in\omega} f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{\omega\in\Omega_f(\Phi)}(a\inf_{x\in\omega} f(x)) = a\sup_{\omega\in\Omega_f(\Phi)}(\inf_{x\in\omega} f(x))$$

de même

$$\sup_{x\in\omega}(af)(x) = a\sup_{x\in\omega} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{\omega\in\Omega_f(\Phi)}(a\sup_{x\in V} f(x)) = a\inf_{\omega\in\Omega_f(\Phi)}(\sup_{x\in\omega} f(x))$$

2. Si $a \leq 0$ alors d'après le lemme [10.1] page 592 pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$

$$\inf_{x\in\omega}(af)(x) = a\sup_{x\in\omega} f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{\omega\in\Omega_f(\Phi)}(a\sup_{x\in\omega} f(x)) = a\inf_{\omega\in\Omega_f(\Phi)}(\sup_{x\in\omega} f(x))$$

de même

$$\sup_{x\in\omega}(af)(x) = a\inf_{x\in\omega} f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{\omega\in\Omega_f(\Phi)}(a\inf_{x\in\omega} f(x)) = a\sup_{\omega\in\Omega_f(\Phi)}(\inf_{x\in\omega} f(x))$$

■

On a vu dans la section « filtres utiles » que l'étude de toutes les notions traditionnelles de limites se réduit à regarder une égalité du type

$$\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$$

pour des filtres Φ pertinents. On peut maintenant abandonner la botanique.

10.8.2 *Limite pour des applications localement bornées sur un filtre*

I *Définition*

Une application f de X dans $\mathbb{R}$ admet une limite le long d'un filtre Φ si elle est localement bornée sur Φ et si $\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$.

Définition 10.50 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* X *un ensemble non vide,* Φ *un filtre sur* X*,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* X *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *admet une* ***limite*** *le long de* Φ *(ou admet une* Φ*-limite) si elle vérifie les propriétés suivantes*

1. f *est localement bornée sur* Φ *c'est à dire qu'il existe un* $\omega \in \Phi$ *sur lequel* f *est bornée : l'ensemble*

$$\Omega_f(\Phi) = \{\omega \in \Phi / \ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}$$

est non vide.

2. $$\sup_{\omega\in\Omega_f(\Phi)}(\inf_{x\in\omega} f(x)) = \liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f = \inf_{\omega\in\Omega_f(\Phi)}(\sup_{x\in\omega} f(x))$$

Le théorème suivant est d'utilisation courante.

Théorème 10.7 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* X *un ensemble non vide,* Φ *un filtre sur* X*,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X\ ,\ \mathbb{R})$ *désigne une application de* X *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée sur* Φ*. Les conditions suivantes sont équivalente :*

1. *f admet une Φ-limite*
2. *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que*

$$\sup_{x\in\omega_\varepsilon} |f(x) - \liminf_{\Phi} f| \leq \varepsilon$$

3. *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que*

$$\sup_{x\in\omega_\varepsilon} |f(x) - \limsup_{\Phi} f| \leq \varepsilon$$

4. *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que*

$$\sup_{(x,y)\in\omega_\varepsilon\times\omega_\varepsilon} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

5. *L'ensemble* $\bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi))$ *est un singleton*
6. *Le filtre image de Φ par f est convergeant : il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\mathcal{V}(l) \subset \Phi(f) \ .$$

Preuve Les équivalences $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$ sont prouvées au point (iv) du théorème [10.6] page 757 . Il reste à voir $1 \Leftrightarrow 5$ et $1 \Leftrightarrow 6$

A On montre $1 \Leftrightarrow 5$

En effet d'après les points (v) et (vi) du théorème [10.6] page 757 on a

$$\liminf_{\Phi} f = \min\{t : t \in \bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi))\} \quad \text{et} \quad \limsup_{\Phi} f = \max\{t : t \in \bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi))\}$$

Par suite

1. Si $\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$ alors le plus grand élément de $\bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi))$ est aussi le plus petit élément de $\bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi))$
2. Si $\bigcap_{\pi\in\Omega_f(\Phi)} \mathrm{adh}(f(\pi)) = \{l\}$ alors $\liminf_{\Phi} f = l = \limsup_{\Phi} f$

B On montre $1 \Leftrightarrow 6$

1. <u>D'abord on montre $1 \Rightarrow 6$</u>
   D'après le point $(viii)$ du du théorème [10.6] page 757 si 1 est vérifiée il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]l-\varepsilon \ , \ l+\varepsilon[\in \Phi(f)$$

   Si l vérifie cette propriété alors $\mathcal{V}(l) \subset \Phi(f)$. En effet pour tout $V \in \mathcal{V}(l)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]l-\varepsilon \ , l+\varepsilon[\subset V$, ainsi V , qui contient un élément du filtre $\Phi(f)$, appartient à ce filtre.
2. <u>Ensuite on montre $6 \Rightarrow 1$</u>
   Si 6 est vérifiée pour $l \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a $]l-\varepsilon \ , \ l+\varepsilon[\in \Phi(f)$, le point $(viii)$ du théorème [10.6] page 757 montre alors que $\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$.

■

Dans les exemples « filtres associés à la topologie » on a vu qu'on pouvait caractériser les limites inférieures et supérieures en termes de convergence de suites (voir par exemple le point $(xiii)$ du lemme [10.26] page 726). Cela est lié au fait qu'on travaille sur des filtres à base dénombrable en un sens que nous précisons maintenant.

II *Le cas des filtres à base dénombrable*

Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ est le sous-ensemble d'entiers naturels de $\mathbb{R}$ l'application B de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$B_n =]x_0 - \frac{1}{n+1} \ , \ x_0 + \frac{1}{n+1}[$$

vérifie la propriété que $B(\mathbb{N})$ est une base de filtre engendrant le filtre $\mathcal{V}(x_0)$ des $\mathcal{T}$-voisinages de x_0 :

$$\mathcal{V}(x_0) = \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / \ \exists \ n \in \mathbb{N} : B_n \subset V\}$$

On dit que le filtre $\mathcal{V}(x_0)$ est à base dénombrable.

Définition 10.51 *On note X un ensemble non vide et Φ un filtre sur X, on dit que Φ est* ***à base finie ou dénombrable*** *si il existe un ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}, \ O)$ et une application $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \Phi)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *L'ensemble $B(\mathbb{N}) = \{V \in \Phi / \ \exists \ n \in \mathbb{N} : V = B_n\}$ est une base de filtre*
2. *$B(\mathbb{N})$ engendre Φ, ainsi $V \in \Phi$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_n \subset V$:*

$$\Phi = \{V \in \mathcal{P}(X) / \ \exists \ n \in \mathbb{N} : B_n \subset V\}$$

Lorsque le filtre Φ est à base dénombrable on peut caractériser les limites d'applications localement bornées au moyen de limites de suites en suivant par exemple le lemme [10.26] page 726 .

Théorème 10.8 *On note $(\mathbb{R} \ , \ + \ , \ . \ , \ \leq \ )$ un corps de réels , $(\mathbb{N} \ , \ O)$ un ensemble d'entiers naturels, X un ensemble non vide, Φ un filtre sur X à base finie ou dénombrable et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, \mathbb{R})$ une application de X dans $\mathbb{R}$ qui est localement bornée sur Φ.*

(i) Il existe une application $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \Phi)$ telle que $B(\mathbb{N})$ est une base de filtre engendrant Φ :

$$\Phi = \{V \in \mathcal{P}(X) / \ \exists \ n \in \mathbb{N} : B_n \subset V\}$$

(ii) Si $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \Phi)$ est une base dénombrable du filtre Φ, l'application U de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(X)$ définie par

$$U_n = \bigcap_{k=0}^{n} B_k$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \subset U_n$.*
2. *$U(\mathbb{N})$ est une base du filtre Φ :*

$$\Phi = \{V \in \mathcal{P}(X) / \ \exists \ n \in \mathbb{N} : U_n \subset V\}$$

3. *Pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ l'application $W \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \mathcal{P}(\omega))$ définie par*

$$W_n = U_n \cap \omega$$

vérifie les propriétés suivantes

(a) $W(\mathbb{N})$ est une base du filtre sur ω défini par $\mathcal{V}_\omega(\Phi) = \{V \in \Phi / V \subset \omega\}$

(b)

$$\limsup_{\Phi} f = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{x \in W_n} f(x))$$

En d'autres termes $\limsup_{\Phi} f$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda^*(f) = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists \ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{x \in W_n} f(x)\}$$

(c) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $\limsup\limits_{\Phi} f < \lambda$ il faut et il suffit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in W_n} f(x) < \lambda$$

(d)

$$\liminf_{\Phi} f = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{x \in W_n} f(x))$$

En d'autres termes $\liminf\limits_{\Phi} f$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*(f) = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists \ n \in \mathbb{N} : t = \inf_{x \in W_n} f(x)\}$$

(e) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $\liminf\limits_{\Phi} f > \lambda$ il faut et il suffit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf_{x \in W_n} f(x) > \lambda$$

(f)

$$\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{(x,y) \in W_n \times W_n} |f(x) - f(y)|)$$

En d'autres termes $\limsup\limits_{\Phi} f - \liminf\limits_{\Phi} f$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Gamma_b = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists \ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{(x,y) \in W_n \times W_n} |f(x) - f(y)|\}$$

(iii) Pour toute base dénombrable $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \Phi)$ du filtre Φ et pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ il existe une suite $y \in \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} (\bigcap\limits_{k=0}^{n} B_k \cap \omega)$ telle que la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ est convergente avec

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \liminf_{\Phi} f$$

(iv) Pour toute base dénombrable $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \Phi)$ du filtre Φ, pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ et pour toute suite $y \in \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} (\bigcap\limits_{k=0}^{n} B_k \cap \omega)$

$$\liminf_{\Phi} f \leq \liminf_{n \to +\infty} f(y_n)$$

(v) Pour toute base dénombrable $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \Phi)$ du filtre Φ et pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ il existe une suite $y \in \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} (\bigcap\limits_{k=0}^{n} B_k \cap \omega)$ telle que la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f(y_n)$ est convergente avec

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \limsup_{\Phi} f$$

(vi) Pour toute base dénombrable $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \Phi)$ du filtre Φ, pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ et pour toute suite $y \in \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} (\bigcap\limits_{k=0}^{n} B_k \cap \omega)$

$$\limsup_{n \to +\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\Phi} f$$

(vii) Si $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \Phi)$ est une base dénombrable du filtre Φ et $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ les conditions suivantes sont équivalentes

α $\liminf\limits_{\Phi} f = \limsup\limits_{\Phi} f$

β *pour toute suite* $y \in \prod_{n\in\mathbb{N}}(\bigcap_{k=0}^{n} B_k \cap \omega)$ *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\Phi} f$$

γ *pour toute suite* $y \in \prod_{n\in\mathbb{N}}(\bigcap_{k=0}^{n} B_k \cap \omega)$ *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\Phi} f$$

δ *Pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$[n \geq n_\varepsilon \quad \text{et} \quad (x, y) \in (\bigcap_{k=0}^{n} B_k \cap \omega) \times (\bigcap_{k=0}^{n} B_k \cap \omega)] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

(viii) Si $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \Phi)$ *est une base dénombrable du filtre* Φ *le réel* $\liminf_{\Phi} f$ *est le plus petit élément de l'ensemble* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n))$ *:*

$$\liminf_{\Phi} f = \min\{x : x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n))\}$$

(ix) Si $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \Phi)$ *est une base dénombrable du filtre* Φ *le réel* $\limsup_{\Phi} f$ *est le plus grand élément de l'ensemble* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n))$ *:*

$$\limsup_{\Phi} f = \max\{x : x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n))\}$$

(x) Si $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ *et* $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \Phi)$ *est une base dénombrable du filtre* Φ *et si* $W \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\omega))$ *est l'application définie par*

$$W_n = \bigcap_{k=0}^{n} B_k \cap \omega$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

a *f admet une Φ-limite*

b *pour toute suite* $y \in \prod_{n\in\mathbb{N}} W_n$ *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\Phi} f$$

c *pour toute suite* $y \in \prod_{n\in\mathbb{N}} W_n$ *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\Phi} f$$

d *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{(x,y)\in W_n\times W_n} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

e *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in W_n} |f(x) - \liminf_{\Phi} f| \leq \varepsilon$$

f *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in W_n} |f(x) - \limsup_{\Phi} f| \leq \varepsilon$$

g *l'ensemble* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n))$ *est un singleton*

h *l'ensemble* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n))$ *est un singleton*

i *le filtre image de* Φ *par* f *est convergeant : il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\mathcal{V}(l) \subset \Phi(f)$$

Preuve

(i)

Puisque Φ est à base dénombrable il existe un ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}', O')$ et une application $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}', \Phi)$ telle que $A(\mathbb{N}')$ est une base de Φ. Le théorème [4.4] page 83 permet d'affirmer qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}'$ on montre que l'application $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \Phi)$ définie par $B_n = A_{\varphi(n)}$ vérifie la propriété que $B(\mathbb{N})$ est une base du filtre Φ.

1. $\varnothing \notin B(\mathbb{N})$ puisque $B(\mathbb{N}) \subset \Phi$
2. Si $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alors, puisque $A(\mathbb{N}')$ est une base de filtre , il existe un entier $n' \in \mathbb{N}'$ tel que $A_{n'} \subset A_{\varphi(p)} \cap A_{\varphi(q)}$, ainsi l'entier $n = \varphi^{-1}(n')$ vérifie $B_n \subset B_p \cap B_q$.
3. Si $V \in \Phi$ alors , puisque $A(\mathbb{N}')$ engendre Φ , il existe $n' \in \mathbb{N}'$ tel que $A_{n'} \subset V$ ainsi l'entier $n = \varphi^{-1}(n')$ vérifie $B_n \subset V$. Inversement si $V \in \mathcal{P}(X)$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_n \subset V$ alors V contient un élément du filtre Φ, par suite $V \in \Phi$.

(ii)

1. Par définition $U_{n+1} = U_n \cap B_{n+1}$
2. $U(\mathbb{N})$ est une base de Φ

   α <u>On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \in \Phi$</u>

   Si
   $$H = \{n \in \mathbb{N} / U_n \in \Phi\}$$
   alors
   — $0 \in H$ puisque $U_0 = B_0$
   — Si $n \in H$ alors l'égalité $U_{n+1} = U_n \cap B_{n+1}$ montre que U_{n+1} est l'intersection de deux éléments de Φ par suite $U_{n+1} \in \Phi$.
   Ainsi $H = \mathbb{N}$ et $U(\mathbb{N}) \subset \Phi$.

   β <u>On montre que $U(\mathbb{N})$ est une base de filtre .</u>

   (a) $\varnothing \notin U(\mathbb{N})$ puisque $U(\mathbb{N}) \subset \Phi$

   (b) Si $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alors $U_{p+q} \subset U_p \cap U_q$

   γ <u>On montre que $U(\mathbb{N})$ engendre le filtre Φ .</u>

   Puisque $B(\mathbb{N})$ engendre Φ , pour tout $V \in \Phi$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_n \subset V$. L'inclusion $U_n \subset B_n$ montre alors que $U_n \subset V$. Inversement si $V \in \mathcal{P}(X)$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n \subset V$ alors V contient un élément du filtre Φ, par suite $V \in \Phi$.

3. (a) Pour tout $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ $W(\mathbb{N})$ est une base de $\mathcal{V}_\omega(\Phi)$

α On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n \in \mathcal{V}_\omega(\Phi)$

Puisque $\omega \in \Phi$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n \in \Phi$ l'ensemble $W_n = U_n \cap \omega$ est un élément de Φ inclus dans ω

β On montre que $W(\mathbb{N})$ est une base de filtre sur ω .

i. $\varnothing \notin W(\mathbb{N})$ puisque $W(\mathbb{N}) \subset \mathcal{V}_\omega(\Phi)$

ii. Si $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alors $W_{p+q} \subset W_p \cap W_q$

γ On montre que $W(\mathbb{N})$ engendre le filtre $\mathcal{V}_\omega(\Phi)$.

Puisque $U(\mathbb{N})$ engendre Φ et $\mathcal{V}_\omega(\Phi) \subset \Phi$, pour tout $V \in \mathcal{V}_\omega(\Phi)$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n \subset V \subset \omega$ par suite puisque $W_n = U_n \cap \omega = U_n$ on a $W_n \subset V$. Inversement si $V \in \mathcal{P}(\omega)$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset V$ alors V contient un élément du filtre $\mathcal{V}_\omega(\Phi)$, par suite $V \in \mathcal{V}_\omega(\Phi)$.

(b) On montre que $\limsup_\Phi f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{x\in W_n} f(x))$

Il s'agit de vérifier que la borne inférieure de l'ensemble

$$\Lambda^*(f,\Phi) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \sup_{x\in\pi} f(x)\}$$

est aussi la borne inférieure de l'ensemble $\Lambda^*(f)$.

α D'abord, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n \in \Omega_f(\Phi)$ on obtient $\Lambda^*(f) \subset \Lambda^*(f,\Phi)$ par suite $\inf\{t : t \in \Lambda^*(f,\Phi)\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(f)\}$ et $\limsup_\Phi f \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(f)\}$.

β Ensuite on montre que tout élément de $\Lambda^*(f,\Phi)$ est minoré par un élément de $\Lambda^*(f)$.

En effet, si $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ et $t = \sup_{x\in\pi} f(x)$ alors $\pi \cap \omega \in \mathcal{V}_\omega(\Phi)$, puisque $W(\mathbb{N})$ engendre $\mathcal{V}_\omega(\Phi)$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset \pi \cap \omega \subset \pi$, ainsi le réel $s = \sup_{x\in W_n} f(x)$ est un élément de $\Lambda^*(f)$ qui minore $t = \sup_{x\in\pi} f(x)$. Par suite tout minorant de $\Lambda^*(f)$ est un minorant de $\Lambda^*(f,\Phi)$ et $\inf\{t : t \in \Lambda^*(f)\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(f,\Phi)\}$. Ce qui montre que $\inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{x\in W_n} f(x)) \leq \limsup_\Phi f$

(c) Si $\limsup_\Phi f < \lambda$ alors d'après b le réel λ n'est pas un minorant de $\Lambda^*(f)$ par suite il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x\in W_n} f(x) < \lambda$$

(d) On montre que $\liminf_\Phi f = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{x\in W_n} f(x))$

Il s'agit de vérifier que la borne supérieure de l'ensemble

$$\Lambda_*(f,\Phi) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \inf_{x\in\pi} f(x)\}$$

est aussi la borne supérieure de l'ensemble $\Lambda_*(f)$.

α D'abord, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n \in \Omega_f(\Phi)$ on obtient $\Lambda_*(f) \subset \Lambda_*(f,\Phi)$ par suite $\sup\{t : t \in \Lambda_*(f,\Phi)\} \geq \sup\{t : t \in \Lambda_*(f)\}$ et $\liminf_\Phi f \geq \sup\{t : t \in \Lambda_*(f)\}$.

β Ensuite on montre que tout élément de $\Lambda_*(f,\Phi)$ est majoré par un élément de $\Lambda_*(f)$.

En effet, si $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ et $t = \inf_{x\in\pi} f(x)$ alors $\pi \cap \omega \in \mathcal{V}_\omega(\Phi)$, puisque $W(\mathbb{N})$ engendre $\mathcal{V}_\omega(\Phi)$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset \pi \cap \omega \subset \pi$, ainsi le réel $s = \inf_{x\in W_n} f(x)$ est un élément de $\Lambda_*(f)$ qui majore $t = \inf_{x\in\pi} f(x)$. Par suite tout majorant de $\Lambda_*(f)$ est un majorant de $\Lambda_*(f,\Phi)$ et $\sup\{t : t \in \Lambda_*(f)\} \geq \sup\{t : t \in \Lambda_*(f,\Phi)\}$. Ce qui montre que $\sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{x\in W_n} f(x)) \geq \liminf_\Phi f$

(e) Si $\liminf_{\Phi} f > \lambda$ alors d'après d le réel λ n'est pas un majorant de $\Lambda_*(f)$ par suite il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf_{x \in W_n} f(x) > \lambda$$

(f) On montre $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{(x,y) \in W_n \times W_n} |f(x) - f(y)|)$

D'après le point (iii) du théorème [10.6] page 757 $\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}_+ / \ \exists \ \pi \in \Omega_f(\Phi) : t = \sup_{(x,y) \in \pi \times \pi} |f(x) - f(y)|\}$$

il suffit donc de montrer que la borne inférieure de Γ_b est aussi la borne inférieure de Γ.

α D'abord puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \in \Omega_f(\Phi)$ on a $\Gamma_b \subset \Gamma$, ainsi

$$\inf\{t : t \in \Gamma\} \leq \inf\{t : t \in \Gamma_b\}$$

β Ensuite on montre que tout élément de Γ est minoré par un élément de Γ_b. Si $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ et $t = \sup_{(x,y) \in \pi \times \pi} |f(x) - f(y)|$ alors $\pi \cap \omega \in \mathcal{V}_\omega(\Phi)$, puisque $W(\mathbb{N})$ engendre $\mathcal{V}_\omega(\Phi)$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset \pi \cap \omega \subset \pi$, ainsi le réel $s = \sup_{(x,y) \in W_n \times W_n} |f(x) - f(y)|$ est un élément de Γ_b qui minore t . Par suite tout minorant de Γ_b est un minorant de Γ et $\inf\{t : t \in \Gamma_b\} \leq \inf\{t : t \in \Gamma\}$.

(iii)

On considère l'application W de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{V}_\omega(\Phi)$ définie par

$$W_n = \bigcap_{k=0}^{n} B_k \cap \omega = U_n \cap \omega$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$A_n = \left\{ k \in \mathbb{N}^* / k > n \quad \text{et} \quad \inf_{x \in W_k} f(x) > \liminf_{\Phi} f - \frac{1}{n} \right\}$$

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A_n \neq \varnothing$. En effet, puisque $\liminf_{\Phi} f > \liminf_{\Phi} f - \frac{1}{n}$ le point $(ii)3$ (e) montre qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf_{x \in W_p} f(x) > \liminf_{\Phi} f - \frac{1}{n}$$

mais pour tout $k > \max\{p \ , \ n+1\}$ on a $k > n$ et $W_k \subset W_p$ par suite

$$\inf_{x \in W_k} f(x) \geq \inf_{x \in W_p} f(x) > \liminf_{\Phi} f - \frac{1}{n}$$

ce qui montre que $A_n \neq \varnothing$. On considère l'application φ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\varphi(n) = \min\{k : k \in A_n\}$$

et on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble

$$\Gamma_n = W_{\varphi(n)} \cap f^{-1}(]\liminf_{\Phi} f - \frac{1}{n} \ , \ \liminf_{\Phi} f + \frac{1}{n}[) = \left\{ x \in W_{\varphi(n)} / \liminf_{\Phi} f - \frac{1}{n} < f(x) < \liminf_{\Phi} f + \frac{1}{n} \right\}$$

est non vide. En effet

— puisque $\inf_{x\in W_{\varphi(n)}} f(x) + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de $f(W_{\varphi(n)})$ il existe $y \in W_{\varphi(n)}$ tel que

$$\inf_{x\in W_{\varphi(n)}} f(x) \leq f(y) < \inf_{x\in W_{\varphi(n)}} f(x) + \frac{1}{n} \tag{10.110}$$

— puisque $W_{\varphi(n)} \in \Omega_f(\Phi)$ on a

$$\inf_{x\in W_{\varphi(n)}} f(x) + \frac{1}{n} \leq \liminf_{\Phi} f + \frac{1}{n}$$

— puisque $\varphi(n) \in A_n$ on a

$$\inf_{x\in W_{\varphi(n)}} f(x) > \liminf_{\Phi} f - \frac{1}{n}$$

Ainsi tout point y vérifiant (10.110) page 776 est un élément de Γ_n. En posant $\Gamma_0 = \omega$ l'axiome du choix montre que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n = \{y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \omega)/\forall\ n \in \mathbb{N} \quad y_n \in \Gamma_n\}$$

est non vide et par définition tout élément y de Π vérifie , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f(y_n) - \liminf_{\Phi} f| < \frac{1}{n}$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\Phi} f$$

Il reste à voir que $y \in \prod_{n\in\mathbb{N}} W_n$, mais puisque par définition on a $\varphi(n) \in A_n$ on obtient $\varphi(n) > n$ et $\Gamma_n \subset W_{\varphi(n)} \subset W_n$.

(iv)

Si $W_n = \bigcap_{k=0}^{n} B_k \cap \omega$ le point $(ii)3(d)$ permet d'affirmer que $\liminf_{\Phi} f$ est la borne supérieure de l'ensemble

$$\Lambda_*(f) = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ n \in \mathbb{N} : t = \inf_{x\in W_n} f(x)\}$$

et par définition $\liminf_{n\to\infty} f(y_n)$ est la borne supérieure de l'ensemble

$$\Lambda_*(f, y) = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ n \in \mathbb{N} : t = \inf_{k\geq n} f(y_k)\}$$

Il suffit donc de vérifier que tout point de $\Lambda_*(f)$ est majoré par un point de $\Lambda_*(f, y)$. Or si $t = \inf_{x\in W_n} f(x)$, et $k \geq n$ alors

— puisque par hypothèse $y_k \in W_k$ on a $\inf_{x\in W_k} f(x) \leq f(y_k)$

— puisque $W_k \subset W_n$ on obtient

$$\inf_{x\in W_n} f(x) \leq \inf_{x\in W_k} f(x) \leq f(y_k)$$

cette inégalité étant vérifiée pour tout $k \geq n$ on obtient $\inf_{x\in W_n} f(x) \leq \inf_{k\geq n} f(y_k)$ par suite t est majoré par un élément de $\Lambda_*(f, y)$. En particulier tout majorant de $\Lambda_*(f, y)$ est un majorant de $\Lambda_*(f)$ et

$$\liminf_{\Phi} f \leq \liminf_{n\to+\infty} f(y_n)\ .$$

(v)

On note g l'application de X dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = -f(x)$, puisque $x \in X \Rightarrow |f(x)| = |g(x)|$ on a $\Omega_f(\Phi) = \Omega_g(\Phi)$, ainsi le point (iii) montre qu'il existe une suite $y \in \prod_{n\in\mathbb{N}}(\bigcap_{k=0}^{n} B_k \cap \omega)$ telle que la suite $g(y_n)$ est convergente et $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \liminf_{\Phi} g$ mais d'après le théorème [10.6] page 757 on a $\liminf_{\Phi} g = -\limsup_{\Phi} f$ et d'après le lemme [10.3] page 610 on a $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = -\lim_{n\to\infty} f(y_n)$, ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \limsup_{\Phi} f \ .$$

(vi)

Si $W_n = \bigcap_{k=0}^{n} B_k \cap \omega$ le point $(ii)3(b)$ permet d'affirmer que $\limsup_{\Phi} f$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$\Lambda^*(f) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{x\in W_n} f(x)\}$$

et par définition $\limsup_{n\to\infty} f(y_n)$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$\Lambda^*(f, y) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{k\geq n} f(y_k)\}$$

Il suffit donc de vérifier que tout point de $\Lambda^*(f)$ est minoré par un point de $\Lambda^*(f, y)$. Or si $t = \sup_{x\in W_n} f(x)$, et $k \geq n$ alors

— puisque par hypothèse $y_k \in W_k$ on a $\sup_{x\in W_k} f(x) \geq f(y_k)$

— puisque $W_k \subset W_n$ on obtient

$$\sup_{x\in W_n} f(x) \geq \sup_{x\in W_k} f(x) \geq f(y_k)$$

cette inégalité étant vérifiée pour tout $k \geq n$ on obtient $\sup_{x\in W_n} f(x) \geq \sup_{k\geq n} f(y_k)$ par suite t est minoré par un élément de $\Lambda^*(f, y)$. En particulier tout minorant de $\Lambda^*(f, y)$ est un minorant de $\Lambda^*(f)$ et

$$\limsup_{\Phi} f \geq \limsup_{n\to+\infty} f(y_n) \ .$$

(vii)

On pose $W_n = \bigcap_{k=0}^{n} B_k \cap \omega$

I preuve de $\alpha \Leftrightarrow \beta$

1. <u>On montre $\alpha \Rightarrow \beta$</u>
   D'après (iv) et (vi) on a, pour tout $y \in \prod_{k\in\mathbb{N}} W_k$,

$$\liminf_{\Phi} f \leq \liminf_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\Phi} f$$

   ainsi l'hypothèse $\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$ entraîne

$$\liminf_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\Phi} f$$

   ce qui montre que la suite $f(y_n)$ est convergente de limite $\liminf_{\Phi} f$

2. <u>On montre $\beta \Rightarrow \alpha$</u>
   D'après (v) il existe une suite $y \in \prod_{k\in\mathbb{N}} W_k$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\Phi} f$ ainsi l'hypothèse β entraîne

$$\limsup_{\Phi} f = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\Phi} f \ .$$

II preuve de $\alpha \Leftrightarrow \gamma$

1. <u>On montre $\alpha \Rightarrow \gamma$</u>
   D'après (iv) et (vi) on a, pour tout $y \in \prod_{k\in\mathbb{N}} W_k$,

$$\liminf_{\Phi} f \leq \liminf_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\Phi} f$$

   ainsi l'hypothèse $\liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$ entraîne

$$\liminf_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\Phi} f$$

   ce qui montre que la suite $f(y_n)$ est convergente de limite $\limsup_{\Phi} f$

2. <u>On montre $\gamma \Rightarrow \alpha$</u>
   D'après (iii) il existe une suite $y \in \prod_{k\in\mathbb{N}} W_k$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\Phi} f$ ainsi l'hypothèse γ entraîne

$$\limsup_{\Phi} f = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\Phi} f \ .$$

III preuve $\alpha \Leftrightarrow \delta$

1. <u>On montre $\alpha \Rightarrow \delta$</u>
   D'après le point $[(ii)3(f)]$ on a

$$\limsup_{\Phi} f - \liminf_{\Phi} f = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{(x,y)\in W_n\times W_n} |f(x) - f(y)|)$$

   Ainsi l'hypothèse α entraîne que zéro est le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Gamma_b = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{(x,y)\in W_n\times W_n} |f(x) - f(y)|\} \ .$$

   En particulier si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors ε n'est pas un minorant de Γ_b et il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{(x,y)\in W_{n_\varepsilon}\times W_{n_\varepsilon}} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

   puisque $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow W_n \subset W_{n_\varepsilon}$ on obtient

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{(x,y)\in W_n\times W_n} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{(x,y)\in W_{n_\varepsilon}\times W_{n_\varepsilon}} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

2. <u>On montre $\delta \Rightarrow \alpha$</u>
   En effet l'assertion δ n'est que la traduction de l'égalité

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{(x,y)\in W_n\times W_n} |f(x) - f(y)|) = 0$$

   et $(ii)3(f)$ montre alors que $\limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f$

$(viii)$

D'après le point (v) du théorème [10.6] page 757 $\liminf_{\Phi} f$ est le plus petit élément de l'ensemble $\bigcap_{\pi \in \Omega_f(\Phi)} \operatorname{adh}(f(\pi))$ il suffit donc de montrer que $\bigcap_{\pi \in \Omega_f(\Phi)} \operatorname{adh}(f(\pi)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{adh}(f(B_n))$

1. D'abord si $\omega \in \Omega_f(\Phi)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $B_n \cap \omega \in \Omega_f(\Phi)$, par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{\pi \in \Omega_f(\Phi)} \operatorname{adh}(f(\pi)) \subset \operatorname{adh}(f(B_n \cap \omega)) \subset \operatorname{adh}(f(B_n))$$

2. Ensuite pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$ on a $\pi \in \Phi$, puisque $B(\mathbb{N})$ est une base de Φ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $B_p \subset \pi$, par suite, pour tout $\pi \in \Omega_f(\Phi)$,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{adh}(f(B_n)) \subset \operatorname{adh}(f(\pi))$$

(ix)

D'après le point (vi) du théorème [10.6] page 757 $\limsup_{\Phi} f$ est le plus grand élément de l'ensemble $\bigcap_{\pi \in \Omega_f(\Phi)} \operatorname{adh}(f(\pi))$ il suffit donc de montrer que $\bigcap_{\pi \in \Omega_f(\Phi)} \operatorname{adh}(f(\pi)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{adh}(f(B_n))$ et on vient de le faire en $(viii)$

(x)

Ce point est une application presque directe du théorème [10.7] page 768 mais il n'est peut-être pas inutile d'en remettre une couche. Les équivalences a $\Leftrightarrow$ b $\Leftrightarrow$ c $\Leftrightarrow$ d sont prouvées au point (vii)

I preuve de a $\Leftrightarrow$ e

1. <u>On montre a $\Rightarrow$ e</u>
   Posons $l = \liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors
   — puisque $\liminf_{\Phi} f > l - \varepsilon$ il existe (d'après $(ii)3(e)$) un certain $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf_{x \in W_p} f(x) > l - \varepsilon$$

   — puisque $\limsup_{\Phi} f < l + \varepsilon$ il existe (d'après $(ii)3(c)$) un certain $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in W_q} f(x) < l + \varepsilon$$

   ainsi, si $n \geq \max\{p, q\}$ on a, puisque $W_n \subset W_p \cap W_q$

$$l - \varepsilon < \inf_{x \in W_p} f(x) \leq \inf_{x \in W_n} f(x) \leq \sup_{x \in W_n} f(x) \leq \sup_{x \in W_q} f(x) < l + \varepsilon$$

   par suite, pour $n \geq \max\{p, q\}$

$$x \in W_n \Rightarrow l - \varepsilon < \inf_{x \in W_n} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in W_n} f(x) < l + \varepsilon\ .$$

   et

$$x \in W_n \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

   or par définition $l = \liminf_{\Phi} f$ ainsi on obtient

$$n \geq \max\{p, q\} \Rightarrow \sup_{x \in W_n} |f(x) - \liminf_{\Phi} f| \leq \varepsilon$$

2. <u>On montre e $\Rightarrow$ a</u>
   Il suffit de démontrer que e entraîne que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\limsup_{\Phi} f \leq \liminf_{\Phi} f + \varepsilon \ .$$

   Or e implique que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in W_p} f(x) \leq \liminf_{\Phi} f + \varepsilon$$

   par suite

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{x \in W_n} f(x)) \leq \liminf_{\Phi} f + \varepsilon$$

   et d'après le point $(ii)3(b)$ $\limsup_{\Phi} f = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{x \in W_n} f(x))$

II preuve de a $\Leftrightarrow$ f

D'après le point *3* du théorème [10.7] page 768 l'assertion a est équivalente à la propriété :
$\forall \ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(\Phi)$ tel que

$$\sup_{x \in \omega_\varepsilon} |f(x) - \limsup_{\Phi} f| \leq \varepsilon \tag{10.111}$$

Or

- Si f est vérifiée alors (10.111) page 780 est vérifiée puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n \in \Omega_f(\Phi)$. Ainsi on obtient f $\Rightarrow$ a.
- Si (10.111) est vérifiée alors

$$\sup_{x \in \omega \cap \omega_\varepsilon} |f(x) - \limsup_{\Phi} f| \leq \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |f(x) - \limsup_{\Phi} f| \leq \varepsilon$$

  et le point $(ii)3(a)$ permet d'affirmer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $W_p \subset \omega \cap \omega_\varepsilon$ par suite

$$\sup_{x \in W_p} |f(x) - \limsup_{\Phi} f| \leq \sup_{x \in \omega_\varepsilon} |f(x) - \limsup_{\Phi} f| \leq \varepsilon$$

  la décroissance de W_n montre alors que

$$n \geq p \Rightarrow \sup_{x \in W_n} |f(x) - \limsup_{\Phi} f| \leq \varepsilon$$

  ce qui montre a $\Rightarrow$ f.

III preuve de a $\Leftrightarrow$ g

D'après les points $(viii)$ et (ix) le réel $\liminf_{\Phi} f$ est le plus petit élément de l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n))$ et $\limsup_{\Phi} f$ est le plus grand élément de l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n))$ par suite

- si $\limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f$ le plus petit élément de l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n))$ est aussi le plus grand
- si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n)) = \{l\}$ est un singleton alors $l = \limsup_{\Phi} f = \liminf_{\Phi} f$

IV preuve de a $\Leftrightarrow$ h

D'après l'équivalence a $\Leftrightarrow$ g il suffit de montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n))$, or

— puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n \subset B_n$ on obtient $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n)) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n))$

— puisque pour tout $p \in \mathbb{N}$ $W_p \in \Phi$ et $B(\mathbb{N})$ engendre Φ, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_n \subset W_p$, ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$ on obtient $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n)) \subset \mathrm{adh}(f(W_p))$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(B_n)) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n))$

V preuve de a $\Leftrightarrow$ i

1. <u>On montre a $\Rightarrow$ i</u>
D'après l'équivalence a $\Leftrightarrow$ e qui est prouvée en I il suffit de voir e $\Rightarrow$ i. Il suffit par exemple de montrer que si e est vérifiée alors
$$\mathcal{V}(\liminf_{\Phi} f) \subset \Phi(f)$$
en d'autres termes il faut voir
$$V \in \mathcal{V}(\liminf_{\Phi} f) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \Phi.$$
Or si $V \in \mathcal{V}(\liminf_{\Phi} f)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]\liminf_{\Phi} f - \varepsilon, \liminf_{\Phi} f + \varepsilon[\subset V$. Mais la propriété e montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$W_n \subset f^{-1}(]\liminf_{\Phi} f - \frac{\varepsilon}{2}, \liminf_{\Phi} f + \frac{\varepsilon}{2}[) \subset f^{-1}(V)\ .$$
Ainsi $f^{-1}(V)$ contient un élément du filtre Φ par suite $f^{-1}(V) \in \Phi$.

2. <u>On montre i $\Rightarrow$ a</u>
On vérifie si $l \in \mathbb{R}$ satisfait
$$\mathcal{V}(l) \subset \Phi(f)$$
alors $l = \liminf_{\Phi} f = \limsup_{\Phi} f$. Il suffit de voir que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
$$l - \varepsilon \leq \liminf_{\Phi} f \leq \limsup_{\Phi} f \leq l + \varepsilon\ .$$
Or si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\in \mathcal{V}(l)$ et i entraîne donc que $f^{-1}(]l-\varepsilon, l+\varepsilon[) \in \Phi$ ainsi l'ensemble $\omega_\varepsilon = \omega \cap f^{-1}(]l-\varepsilon, l+\varepsilon[)$ est un élément de $\Omega_f(\Phi)$ qui vérifie
$$l - \varepsilon \leq \inf_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \leq \sup_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \leq l + \varepsilon$$
ainsi
$$l - \varepsilon \leq \inf_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \leq \liminf_{\Phi} f \leq \limsup_{\Phi} f \leq \sup_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \leq l + \varepsilon$$

■

10.9 *Premières notions de continuités*

10.9.1 *Continuité en un point.*

Lorsque f est une application bornée de K dans $\mathbb{R}$ qui admet une $\imath(K, \mathcal{T})$-limite en un point $x_0 \in K$ l'égalité $\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ entraîne, par le point (ii) du lemme [10.26] page 726,
$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$
On dit alors que f est continue en x_0. La définition qui suit utilise les résultats et notations du lemme [10.26] page 726.

Définition 10.52 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,*$\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in K$ *,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *est* ***continue en*** x_0 *si elle vérifie les propriétés suivantes*

1. f *est localement bornée au voisinage de* x_0 *c'est à dire qu'il existe un* $\imath(K,\mathcal{T})$*-voisinage de* x_0 *sur lequel* f *est bornée : l'ensemble*

$$\Omega_f(x_0) = \{\omega \in \mathcal{V}_K(x_0)/\ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}$$

est non vide.

2. f *admet une limite le long du filtre* $\mathcal{V}_K(x_0)$ *:*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$

Concrètement , pour montrer qu'une fonction localement bornée au voisinage de x_0 est continue en x_0 on peut piocher dans les équivalences du point $(xiii)$ du lemme [10.26] page 726 dont on utilise les résultats dans la preuve du lemme suivant. D'autre part puisque le filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$ est à base dénombrable la plupart des résultats sur les applications continues sont des conséquences directes du point (x) du théorème [10.8] page 770 on en remet quand même une couche pour préciser comment ce théorème s'applique dans certain cas particulier.

Lemme 10.33 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in K$*,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée au voisinage de* x_0 *.*

(i) $\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq f(x_0) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f > \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que l'ensemble* ω_η *défini par* $\omega_\eta =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap K$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. $\omega_\eta \in \Omega_f(x_0)$
2. $\inf_{x \in \omega_\eta} f(x) > \lambda$

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f < \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que l'ensemble* ω_η *défini par* $\omega_\eta =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap K$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. $\omega_\eta \in \Omega_f(x_0)$
2. $\sup_{x \in \omega_\eta} f(x) < \lambda$

(iv) Il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que l'ensemble* ω_μ *défini par* $\omega_\mu =]x_0 - \mu, x_0 + \mu[\cap K$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. $\omega_\mu \in \Omega_f(x_0)$
2. $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - 1 < \inf_{x \in \omega_\mu} f(x) \leq \sup_{x \in \omega_\mu} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f + 1 \tag{10.112}$$

(v) Pour tout μ *vérifiant (10.112) page 782 l'application* $W \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \Omega_f(x_0))$ *définie par*

$$W_n =]x_0 - \frac{\mu}{n+1}\ ,\ x_0 + \frac{\mu}{n+1}[\cap K$$

vérifie les propriétés suivantes

1. $W(\mathbb{N})$ *est une base du filtre* $\mathcal{V}_K(x_0)$

2.

$$\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{x\in W_n} f(x) \big)$$

En d'autres termes $\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ *est le plus grand minorant de l'ensemble*

$$\Lambda^*(f) = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{x\in W_n} f(x)\}$$

3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f < \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\sup_{x\in W_n} f(x) < \lambda$$

4.

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(\inf_{x\in W_n} f(x) \big)$$

En d'autres termes $\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ *est le plus petit majorant de l'ensemble*

$$\Lambda_*(f) = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \inf_{x\in W_n} f(x)\}$$

5. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f > \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\inf_{x\in W_n} f(x) > \lambda$$

6.

$$\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{(x,y)\in W_n\times W_n} |f(x) - f(y)| \big)$$

En d'autres termes $\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ *est le plus grand minorant de l'ensemble*

$$\Gamma_c = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{(x,y)\in W_n\times W_n} |f(x) - f(y)|\}$$

7. $\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ *est le plus petit élément de l'ensemble* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n))$ *:*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \min\{t : t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n))\}$$

8. $\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ *est le plus grand élément de l'ensemble* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n))$ *:*

$$\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \max\{t : t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n))\}$$

(vi) Il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ *qui converge vers* x_0 *telle que la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente avec*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$

(vii) Si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ *est une suite qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est bornée et*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \le \liminf_{n\to+\infty} f(y_n)$$

(viii) Il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ *qui converge vers* x_0 *telle que la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente avec*

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$

(ix) Si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ *est une suite qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est bornée et*

$$\limsup_{n \to +\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$

(x) L'application f *est continue en* x_0 *si et seulement si*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$

(xi) Avec les notations du point (v) *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a *f est continue en x_0.*

b *pour toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ K)$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = f(x_0)$$

c *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{(x,y) \in W_n \times W_n} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

d *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap K \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

e *l'ensemble* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n))$ *est un singleton*

f *le filtre image de* $\mathcal{V}_K(x_0)$ *par* f *converge vers* $f(x_0)$ *:*

$$V \in \mathcal{V}(f(x_0)) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_K(x_0)$$

(xii) Si $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *est un couple d'applications continues en* x_0 *alors l'application* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *définie par* $u(x) = f(x) + g(x)$ *est continue en* x_0

(xiii) Si $a \in \mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *est une application continue en* x_0*, l'application* $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *définie par* $v(x) = af(x)$ *est continue en* x_0

(xiv) Si $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *est un couple d'applications continues en* x_0 *alors l'application* $w \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *définie par* $w(x) = f(x)g(x)$ *est continue en* x_0

Preuve

(i)

Il s'agit de montrer que $f(x_0)$ est un majorant de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ \pi \in \Omega_f(x_0) : t = \inf_{x \in \pi} f(x)\}$$

et est un minorant de l'ensemble

$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ \omega \in \Omega_f(x_0) : t = \sup_{x \in \omega} f(x)\}$$

or si $(\pi,\omega)\in\Omega_f(x_0)\times\Omega_f(x_0)$ alors, puisque $\pi\cap\omega\in\mathcal{V}_K(x_0)$ et $x_0\in K$ on a $x_0\in\pi\cap\omega$ et

$$\inf_{x\in\pi} f(x)\leq f(x_0)\leq \sup_{x\in\omega} f(x)\ .$$

(ii)

Si $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f>\lambda$ alors λ n'est pas un majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*=\{t\in\mathbb{R}/\exists\ \pi\in\Omega_f(x_0):t=\inf_{x\in\pi} f(x)\}$$

ainsi il existe $\pi\in\Omega_f(x_0)$ tel que $\inf\limits_{x\in\pi} f(x)>\lambda$. Puisque $\pi\in\mathcal{V}_K(x_0)$ il existe un certain $\eta\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0-\eta\ ,\ x_0+\eta[\cap K\subset\pi$, pour un tel η l'ensemble $\omega_\eta=]x_0-\eta\ ,\ x_0+\eta[\cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x_0)$ qui vérifie

1. $\omega_\eta\in\Omega_f(x_0)$ puisque $\omega_\eta\subset\pi$
2. $$\inf_{x\in\omega_\eta} f(x)\geq\inf_{x\in\pi} f(x)>\lambda$$

Inversement si ω_η vérifie *1* et *2* alors $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f\geq\inf\limits_{x\in\omega_\eta} f(x)>\lambda$.

(iii)

Si $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f<\lambda$ alors λ n'est pas un minorant de l'ensemble

$$\Lambda^*=\{t\in\mathbb{R}/\exists\ \pi\in\Omega_f(x_0):t=\sup_{x\in\pi} f(x)\}$$

ainsi il existe $\pi\in\Omega_f(x_0)$ tel que $\sup\limits_{x\in\pi} f(x)<\lambda$. Puisque $\pi\in\mathcal{V}_K(x_0)$ il existe un certain $\eta\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0-\eta\ ,\ x_0+\eta[\cap K\subset\pi$, pour un tel η l'ensemble $\omega_\eta=]x_0-\eta\ ,\ x_0+\eta[\cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x_0)$ qui vérifie

1. $\omega_\eta\in\Omega_f(x_0)$ puisque $\omega_\eta\subset\pi$
2. $$\sup_{x\in\omega_\eta} f(x)\leq\sup_{x\in\pi} f(x)<\lambda$$

Inversement si ω_η vérifie *1* et *2* alors $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f\leq\sup\limits_{x\in\omega_\eta} f(x)<\lambda$.

(iv)

D'après *(ii)* et *(iii)* il existe $\eta_0\in\mathbb{R}_+^*$ et $\eta_1\in\mathbb{R}_+^*$ tels que les ensembles $\omega_{\eta_0}=]x_0-\eta_0,x_0+\eta_0[\cap K$ et $\omega_{\eta_1}=]x_0-\eta_1,x_0+\eta_1[\cap K$ appartiennent à $\Omega_f(x_0)$ et vérifient

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f-1<\inf_{x\in\omega_{\eta_0}} f(x)\quad\text{et}\quad\sup_{x\in\omega_{\eta_1}} f(x)<\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f+1$$

Si $\mu=\min\{\eta_0,\eta_1\}$ alors l'ensemble $\omega_\mu=]x_0-\mu,x_0+\mu[\cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x_0)$ tel que $\omega_\mu\subset\omega_{\eta_0}\cap\omega_{\eta_1}$ par suite $\omega_\mu\in\Omega_f(x_0)$ et

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f-1<\inf_{x\in\omega_{\eta_0}} f(x)\leq\inf_{x\in\omega_\mu} f(x)\leq\sup_{x\in\omega_\mu} f(x)\leq\sup_{x\in\omega_{\eta_1}} f(x)<\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f+1$$

ainsi μ vérifie (10.112) page 782 .

(v)

D'abord il est clair que par construction pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $W_n\in\Omega_f(x_0)$ ainsi $W\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\Omega_f(x_0))$.

1. $W(\mathbb{N})$ est une base de $\mathcal{V}_K(x_0)$

   α <u>On montre que $W(\mathbb{N})$ est une base de filtre .</u>

   (a) $\varnothing \notin W(\mathbb{N})$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in W_n$

   (b) Si $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alors $W_{\max\{p,q\}} = W_p \cap W_q$

   γ <u>On montre que $W(\mathbb{N})$ engendre le filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$.</u>

   Si $V \in \mathcal{V}_K(x_0)$ alors il existe par définition un certain $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap K \subset V$$
   Si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $(n+1)\eta \geq \mu$ alors
$$W_n \subset]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap K \subset V$$
   Inversement si $V \in \mathcal{P}(K)$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset V$ alors V contient un élément du filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$, par suite $V \in \mathcal{V}_K(x_0)$.

2. On montre que $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(\sup\limits_{x\in W_n} f(x))$

   Il s'agit de vérifier que la borne inférieure de l'ensemble
$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f(x_0) : t = \sup_{x\in\pi} f(x)\}$$
   est aussi la borne inférieure de l'ensemble $\Lambda^*(f)$.

   α D'abord, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n \in \Omega_f(x_0)$ on obtient $\Lambda^*(f) \subset \Lambda^*$ par suite on obtient $\inf\{t : t \in \Lambda^*\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(f)\}$ et $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(f)\}$.

   β Ensuite on montre que tout élément de Λ^* est minoré par un élément de $\Lambda^*(f)$.

   En effet, si $\pi \in \Omega_f(x_0)$ et $t = \sup\limits_{x\in\pi} f(x)$ alors $\pi \in \mathcal{V}_K(x_0)$, puisque $W(\mathbb{N})$ engendre $\mathcal{V}_K(x_0)$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset \pi$, ainsi le réel $s = \sup\limits_{x\in W_n} f(x)$ est un élément de $\Lambda^*(f)$ qui minore $t = \sup\limits_{x\in\pi} f(x)$. Par suite tout minorant de $\Lambda^*(f)$ est un minorant de Λ^* ce qui entraîne $\inf\{t : t \in \Lambda^*(f)\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*\}$. Ce qui montre que $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(\sup\limits_{x\in W_n} f(x)) \leq \limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$

3. Si $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f < \lambda$ alors d'après *2* le réel λ n'est pas un minorant de $\Lambda^*(f)$ par suite il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$\sup_{x\in W_n} f(x) < \lambda$$

4. On montre que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\inf\limits_{x\in W_n} f(x))$

   Il s'agit de vérifier que la borne supérieure de l'ensemble
$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f(x_0) : t = \inf_{x\in\pi} f(x)\}$$
   est aussi la borne supérieure de l'ensemble $\Lambda_*(f)$.

   α D'abord, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n \in \Omega_f(x_0)$ on obtient $\Lambda_*(f) \subset \Lambda_*$ par suite on obtient $\sup\{t : t \in \Lambda_*\} \geq \sup\{t : t \in \Lambda_*(f)\}$ et $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \geq \sup\{t : t \in \Lambda_*(f)\}$.

   β Ensuite on montre que tout élément de Λ_* est majoré par un élément de $\Lambda_*(f)$.

   En effet, si $\pi \in \Omega_f(x_0)$ et $t = \inf\limits_{x\in\pi} f(x)$ alors $\pi \in \mathcal{V}_K(x_0)$, puisque $W(\mathbb{N})$ engendre $\mathcal{V}_K(x_0)$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset \pi$, ainsi le réel $s = \inf\limits_{x\in W_n} f(x)$ est un élément de $\Lambda_*(f)$ qui majore $t = \inf\limits_{x\in\pi} f(x)$. Par suite tout majorant de $\Lambda_*(f)$ est un majorant de Λ_* et on obtient $\sup\{t : t \in \Lambda_*(f)\} \geq \sup\{t : t \in \Lambda_*\}$. Ce qui montre que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\inf\limits_{x\in W_n} f(x)) \geq \liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$

5. Si $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f > \lambda$ alors d'après *4* le réel λ n'est pas un majorant de $\Lambda_*(f)$ par suite il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf_{x \in W_n} f(x) > \lambda$$

6. On montre $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} (\sup\limits_{(x,y) \in W_n \times W_n} |f(x) - f(y)|)$

   D'après le point (iii) du théorème [10.6] page 757 $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}_+ / \ \exists \ \pi \in \Omega_f(x_0) : t = \sup_{(x,y) \in \pi \times \pi} |f(x) - f(y)|\}$$

   il suffit donc de montrer que la borne inférieure de Γ_c est aussi la borne inférieure de Γ.

   α D'abord puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \in \Omega_f(x_0)$ on a $\Gamma_c \subset \Gamma$, ainsi

$$\inf\{t : t \in \Gamma\} \leq \inf\{t : t \in \Gamma_c\}$$

   β Ensuite on montre que tout élément de Γ est minoré par un élément de Γ_c. Si $\pi \in \Omega_f(x_0)$ et $t = \sup\limits_{(x,y) \in \pi \times \pi} |f(x) - f(y)|$ alors $\pi \in \mathcal{V}_K(x_0)$, puisque $W(\mathbb{N})$ engendre $\mathcal{V}_K(x_0)$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset \pi$, ainsi le réel $s = \sup\limits_{(x,y) \in W_n \times W_n} |f(x) - f(y)|$ est un élément de Γ_c qui minore t . Par suite tout minorant de Γ_c est un minorant de Γ et $\inf\{t : t \in \Gamma_c\} \leq \inf\{t : t \in \Gamma\}$.

7. (a) <u>D'abord on montre que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n)$</u>

   D'après le lemme [10.13] page 677 il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \varepsilon \ , \ \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f + \varepsilon[\cap f(W_n) \neq \varnothing \ .$$

   Or si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

   — d'après *5* il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf_{x \in W_p} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \varepsilon$$

   ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient, puisque $W_p \cap W_n \in \Omega_f(x_0)$

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \varepsilon < \inf_{x \in W_p} f(x) \leq \inf_{x \in W_p \cap W_n} f(x) \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$

   et

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \varepsilon < \inf_{x \in W_p \cap W_n} f(x) \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \tag{10.113}$$

   — puisque par définition le réel $\inf\limits_{x \in W_p \cap W_n} f(x)$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$f(W_p \cap W_n) = \{t \in \mathbb{R} / \exists \ x \in W_p \cap W_n : t = f(x)\}$$

   il existe $y_0 \in W_p \cap W_n$ tel que $\inf\limits_{x \in W_p \cap W_n} f(x) \leq f(y_0) < \inf\limits_{x \in W_p \cap W_n} f(x) + \varepsilon$ et (10.113) montre que

$$f(y_0) \in]\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \varepsilon \ , \ \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f + \varepsilon[\cap f(W_n)$$

(b) <u>Ensuite on montre que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ est un minorant de $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \text{adh}(f(W_n))$</u>

Si $a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \text{adh}(f(W_n))$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$]a-\varepsilon \ , \ a+\varepsilon[\cap f(W_n) \neq \varnothing$$

cela montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\inf_{x\in W_n} f(x) < a+\varepsilon$$

en effet, si $t \in]a-\varepsilon \ , \ a+\varepsilon[\cap f(W_n)$ alors
— puisque $t \in f(W_n)$ il existe $x_n \in W_n$ tel que $t = f(x_n)$
— puisque $t < a+\varepsilon$ on obtient $f(x_n) < a+\varepsilon$ et

$$\inf_{x\in W_n} f(x) \leq f(x_n) < a+\varepsilon$$

ainsi $a+\varepsilon$ est un majorant de $\Lambda_*(f)$ et *4* permet d'affirmer que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ est le plus petit majorant de cet ensemble, par suite

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq a+\varepsilon$$

cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq a \ .$$

8. D'après le point (vi) du théorème [10.6] page 757 le réel $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ est le plus grand élément de l'ensemble $\bigcap\limits_{\pi\in\Omega_f(x_0)} \text{adh}(f(\pi))$ il suffit donc de montrer

$$\bigcap_{\pi\in\Omega_f(x_0)} \text{adh}(f(\pi)) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \text{adh}(f(W_n)) \ ,$$

or
— puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n \in \Omega_f(x_0)$ on obtient

$$\bigcap_{\pi\in\Omega_f(x_0)} \text{adh}(f(\pi)) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \text{adh}(f(W_n))$$

— inversement si $\pi \in \Omega_f(x_0)$ alors *1* montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset \pi$ par suite

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \text{adh}(f(W_n)) \subset \bigcap_{\pi\in\Omega_f(x_0)} \text{adh}(f(\pi))$$

(vi)

Les notations sont celles de (v) pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$A_n = \left\{ k \in \mathbb{N}^*/k > n \quad \text{et} \quad \inf_{x\in W_k} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \frac{1}{n} \right\}$$

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A_n \neq \varnothing$. En effet, puisque $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f > \liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \dfrac{1}{n}$ le point $(v)(5)$ montre qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf_{x \in W_p} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \frac{1}{n}$$

mais pour tout $k > \max\{p\ ,\ n+1\}$ on a $k > n$ et $W_k \subset W_p$ par suite

$$\inf_{x \in W_k} f(x) \geq \inf_{x \in W_p} f(x) > \liminf_{\Phi} f - \frac{1}{n}$$

ce qui montre que $A_n \neq \varnothing$. On considère l'application φ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\varphi(n) = \min\{k : k \in A_n\}$$

et on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble

$$\Gamma_n = W_{\varphi(n)} \cap f^{-1}(]\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \frac{1}{n}\ ,\ \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f + \frac{1}{n}[) = \left\{x \in W_{\varphi(n)} / \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \frac{1}{n} < f(x) < \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f + \frac{1}{n}\right\}$$

est non vide. En effet

— puisque $\inf\limits_{x \in W_{\varphi(n)}} f(x) + \dfrac{1}{n}$ n'est pas un minorant de $f(W_{\varphi(n)})$ il existe $y \in W_{\varphi(n)}$ tel que

$$\inf_{x \in W_{\varphi(n)}} f(x) \leq f(y) < \inf_{x \in W_{\varphi(n)}} f(x) + \frac{1}{n} \tag{10.114}$$

— puisque $W_{\varphi(n)} \in \Omega_f(x_0)$ on a

$$\inf_{x \in W_{\varphi(n)}} f(x) + \frac{1}{n} \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f + \frac{1}{n}$$

— puisque $\varphi(n) \in A_n$ on a

$$\inf_{x \in W_{\varphi(n)}} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \frac{1}{n}$$

Ainsi tout point y vérifiant (10.114) page 789 est un élément de Γ_n. En posant $\Gamma_0 = W_0$ l'axiome du choix montre que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n = \{y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ K) / \forall\ n \in \mathbb{N} \quad y_n \in \Gamma_n\}$$

est non vide et par définition tout élément y de Π vérifie , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|y_n - x_0| < \frac{\mu}{\varphi(n)+1} < \frac{\mu}{n+1} \quad \text{et} \quad |f(y_n) - \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f| < \frac{1}{n}$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$

(vii)

I On montre que u est bornée

En effet, d'après (iv) Il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble ω_μ défini par $\omega_\mu =]x_0 - \mu, x_0 + \mu[\cap K$ est un élément de $\Omega_f(x_0)$. Puisque la suite y tend vers x_0 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in \omega_\mu$$

ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n| \leq \max\{|u_0|\ , \cdots\ , |u_{n_0}|\} + \sup_{x \in \omega_\mu} |f(x)|$$

II On montre $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \liminf\limits_{n\to\infty} f(y_n)$

$\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ est la borne supérieure de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f(x_0) : t = \inf_{x\in\pi} f(x)\}$$

et par définition $\liminf\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ est la borne supérieure de l'ensemble

$$\Lambda_*(y) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \inf_{k\geq n} f(y_k)\}$$

Il suffit donc de vérifier que tout point de Λ_* est majoré par un point de $\Lambda_*(y)$. Or si $t = \inf\limits_{x\in\pi} f(x)$, alors

— puisque $\pi \in \mathcal{V}_K(x_0)$ il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap K \subset \pi$$

— puisque y tend vers x_0 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq n_0 \Rightarrow y_k \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap K$$

en particulier on obtient

$$k \geq n_0 \Rightarrow y_k \in \pi \quad \text{et} \quad \inf_{x\in\pi} f(x) \leq \inf_{k\geq n_0} f(y_k)$$

Par suite t est majoré par un élément de $\Lambda_*(y)$. En particulier tout majorant de $\Lambda_*(y)$ est un majorant de Λ_* ainsi

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \liminf_{n\to+\infty} f(y_n)\ .$$

$(viii)$

On note g l'application de K dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = -f(x)$, puisque $x \in K \Rightarrow |f(x)| = |g(x)|$ on a $\Omega_f(x_0) = \Omega_g(x_0)$, ainsi le point (vi) montre qu'il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ qui tend vers x_0 telle que la suite $g(y_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = \liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} g$ mais d'après le théorème [10.6] page 757 on a $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} g = -\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ et d'après le lemme [10.3] page 610 on a $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$, ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f\ .$$

(ix)

D'après le point (vii) la suite u est bornée il suffit donc de montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f\ .$$

$\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f(x_0) : t = \sup_{x\in\pi} f(x)\}$$

et par définition $\limsup\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$\Lambda^*(y) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{k\geq n} f(y_k)\}$$

Il suffit donc de vérifier que tout point de Λ^* est minoré par un point de $\Lambda^*(y)$. Or si $t = \sup\limits_{x\in\pi} f(x)$, alors

— puisque $\pi \in \mathcal{V}_K(x_0)$ il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap K \subset \pi$$

— puisque y tend vers x_0 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq n_0 \Rightarrow y_k \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap K$$

en particulier on obtient

$$k \geq n_0 \Rightarrow y_k \in \pi \quad \text{et} \quad \sup_{k \geq n_0} f(y_k) \leq \sup_{x \in \pi} f(x)$$

Par suite t est minoré par un élément de $\Lambda^*(y)$. En particulier tout minorant de $\Lambda^*(y)$ est un minorant de Λ^* ainsi

$$\limsup_{n \to +\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \ .$$

(x)

Dire que f est continue en x_0 c'est dire que $\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ par suite (i) entraîne

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$

(xi)

I preuve de a $\Leftrightarrow$ b

1. <u>On montre a $\Rightarrow$ b</u>
   D'après (x) si f est continue en x_0 alors

   $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$

   et les points (vii) et (ix) montre que

   $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \liminf_{n \to +\infty} f(y_k) \leq \limsup_{n \to +\infty} f(y_k) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$

   par suite a entraîne

   $$\liminf_{n \to +\infty} f(y_k) = \limsup_{n \to +\infty} f(y_k) = f(x_0) \ .$$

2. <u>On montre b $\Rightarrow$ a</u>
   D'après (vi) il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ qui converge vers x_0 telle que $\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ ainsi b entraîne $f(x_0) = \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$. De même d'après $(viii)$ il existe une suite $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ qui converge vers x_0 tel que $\lim_{n \to +\infty} f(z_n) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ ainsi b entraîne $f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$. Par suite on obtient

   $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \ .$$

II preuve de a $\Leftrightarrow$ c

1. <u>On montre a $\Rightarrow$ c</u>
   D'après le point *(v) 6* le réel $\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Gamma_c = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{(x,y) \in W_n \times W_n} |f(x) - f(y)|\}\ .$$

   en particulier si $\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ aucun réel strictement positif n'est un minorant de Γ_c, par suite pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{(x,y) \in W_{n_\varepsilon} \times W_{n_\varepsilon}} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

   puisque $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow W_n \subset W_{n_\varepsilon}$ on obtient

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{(x,y) \in W_n \times W_n} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

2. <u>On montre c $\Rightarrow$ a</u>
   L'assertion c est la traduction de l'égalité

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{(x,y) \in W_n \times W_n}) |f(x) - f(y)|) = 0$$

   il suffit donc d'appliquer *(v) 6*

III preuve de a $\Leftrightarrow$ d

1. <u>On montre a $\Rightarrow$ d</u>
   Si a est vérifié alors (x) montre que $f(x_0)$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ \pi \in \Omega_f(x_0) : t = \inf_{x \in \pi} f(x)\}$$

   et le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ \pi \in \Omega_f(x_0) : t = \sup_{x \in \pi} f(x)\}\ .$$

   En particulier, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $f(x_0) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de Λ_* et il existe $\pi_\varepsilon \in \Omega_f(x_0)$ tel que $f(x_0) - \varepsilon < \inf_{y \in \pi_\varepsilon} f(y)$, de même $f(x_0) + \varepsilon$ n'est pas un minorant de Λ^* et il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(x_0)$ tel que $\sup_{y \in \omega_\varepsilon} f(y) < f(x_0) + \varepsilon$. En posant $V_\varepsilon = \pi_\varepsilon \cap \omega_\varepsilon$ on obtient, pour tout $x \in V_\varepsilon$,

$$f(x_0) - \varepsilon < \inf_{y \in \pi_\varepsilon} f(y) \leq \inf_{y \in V_\varepsilon} f(y) \leq f(x) \leq \sup_{y \in V_\varepsilon} f(y) \leq \sup_{y \in \omega_\varepsilon} f(y) < f(x_0) + \varepsilon$$

   en particulier

$$x \in V_\varepsilon \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

   Mais puisque V_ε est l'intersection de deux éléments du filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$ on a $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_K(x_0)$ et il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta[\cap K \subset V_\varepsilon$, pour un tel η on obtient

$$x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap K \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ .$$

2. <u>On montre d $\Rightarrow$ a</u>
   Il suffit de montrer que sous l'hypothèse d pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq f(x_0) + \varepsilon\ .$$

   Mais l'hypothèse d entraîne que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ qu'il existe $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble ω_ε défini par $\omega_\varepsilon =]x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon[\cap K$ vérifie

$$x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

   un tel ensemble est un élément de $\mathcal{V}_K(x_0)$ tel que

— $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(x_0)$ puisque $x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x_0)| + \varepsilon$

— $\inf\limits_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$ puisque

$$x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

— $\sup\limits_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$ puisque

$$x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

ainsi on obtient

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \inf_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \sup_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

IV preuve de a $\Leftrightarrow$ e

D'après le point *(ii) 7* le réel $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ est le plus petit élément de l'ensemble $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n))$ et d'après le point *(ii) 8* le réel $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ est le plus grand élément de l'ensemble $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n))$, par suite

- si $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ le plus petit et le plus grand élément de $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n))$ sont égaux et cet ensemble est un singleton.
- si $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n)) = \{l\}$ on obtient $l = \liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$

V preuve de a $\Leftrightarrow$ f

1. <u>On montre a $\Rightarrow$ f</u>
   Si $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]f(x_0) - \varepsilon\ ,\ f(x_0) + \varepsilon[\subset V$, or d'après (x) l'hypothèse a entraîne
   $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$
   — puisque $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f > f(x_0) - \varepsilon$ il existe d'après le point *(ii) 5* un certain $p \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\inf_{x\in W_p} f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$
   — puisque $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f < f(x_0) + \varepsilon$ il existe d'après le point *(ii) 3* un certain $q \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\sup_{x\in W_q} f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$
   ainsi $W_p \cap W_q$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x_0)$ qui vérifie
   $$W_p \cap W_q \subset f^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon\ ,\ f(x_0) + \varepsilon[) \subset f^{-1}(V)$$
   par suite $f^{-1}(V)$ qui contient un élément du filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x_0)$.
2. <u>On montre f $\Rightarrow$ a</u>
   Il suffit de montrer que l'hypothèse f entraîne que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a
   $$f(x_0) - \varepsilon \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq f(x_0) + \varepsilon\ .$$
   Or puisque $]f(x_0)-\varepsilon\ ,\ f(x_0)+\varepsilon[\in \mathcal{V}(f(x_0))$ on a (d'après f) $f^{-1}(]f(x_0)-\varepsilon\ ,\ f(x_0)+\varepsilon[) \in \mathcal{V}_K(x_0)$. En particulier l'ensemble $\omega_\varepsilon = f^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon\ ,\ f(x_0) + \varepsilon[)$ vérifie

— $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(x_0)$ puisque $\omega_\varepsilon \in \mathcal{V}(f(x_0))$ et $[x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < |f(x_0)| + \varepsilon]$

—

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \inf_{y \in \omega_\varepsilon} f(y) \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \sup_{y \in \omega_\varepsilon} f(y) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

(xii)

D'après le théorème [10.6] page 757 (voir 10.103 page 759) si

$$\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} g = \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} g$$

alors $\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)}(f+g) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)}(f+g)$ ainsi la continuité de f et g en x_0 entraîne la continuité de $f+g$ en x_0

$(xiii)$

D'après le théorème [10.6] page 757 la continuité de f en x_0 entraîne

1. si $a \geq 0$ alors (voir 10.104 page 759)

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} af = a \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = a \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} af$$

2. si $a \leq 0$ alors (voir 10.105 page 759)

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} af = a \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = a \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} af$$

(xiv)

On utilise l'équivalence a $\Leftrightarrow$ d du point (xi). Si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors

— puisque f est continue en x_0 il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)| + \varepsilon)}\} \tag{10.115}$$

— puisque g est continue en x_0 il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leq \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2(|f(x_0)| + \varepsilon)}\} \tag{10.116}$$

L'égalité $f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$ montre que

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |g(x)||f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| \tag{10.117}$$

Or si $\mu = \min\{\eta \ , \ \delta\}$

— par (10.116) on a

$$|x - x_0| \leq \mu \Rightarrow |g(x)| \leq |g(x_0)| + \varepsilon$$

et (10.115) montre alors que

$$|x - x_0| \leq \mu \Rightarrow |g(x)||f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

— Enfin (10.116) montre que

$$|x - x_0| \leq \mu \Rightarrow |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi par (10.117) on obtient

$$|x - x_0| \leq \mu \Rightarrow |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq \varepsilon \ .$$

ce qui montre que l'application $x \mapsto f(x)g(x)$ est continue en x_0. ■

L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0 puisque

$$\liminf_{\mathcal{V}(0)} f = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{V}(0)} f = 1$$

Cependant si on considère le filtre à gauche en 0 :

$$\mathcal{V}^{-}(0) = \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / \ \exists \ \varepsilon \in \mathbb{R}_{+}^{*} :] - \varepsilon \ , \ 0[\subset V\}$$

et le filtre à droite en zéro

$$\mathcal{V}^{+}(0) = \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / \ \exists \ \varepsilon \in \mathbb{R}_{+}^{*} :]0 \ , \ \varepsilon \ [\subset V\}$$

alors f possède une limite le long de ces filtres avec

$$\liminf_{\mathcal{V}^{-}(0)} f = 0 = f(0) = \limsup_{\mathcal{V}^{-}(0)} f \quad \text{et} \quad \liminf_{\mathcal{V}^{+}(0)} f = 1 = \limsup_{\mathcal{V}^{+}(0)} f$$

On résume le fait que f a une limite le long du filtre $\mathcal{V}^{-}(0)$ qui vérifie

$$\lim_{\mathcal{V}^{-}(0)} f = f(0)$$

en disant que f est continue à gauche en zéro.

10.9.2 *Continuité à gauche et à droite en un point.*

I *Continuité à gauche*

Définition 10.53 *On note $(\mathbb{R} \ , \ + \ , \ . \ , \ \leq \ )$ un corps de réels, K un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in K$ un point accessible à gauche, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K \ , \ \mathbb{R})$ est une application de K dans $\mathbb{R}$. On dit que f est* ***continue à gauche en*** *x_0 si elle vérifie les propriétés suivantes*

1. *f est localement bornée sur le filtre*

$$\mathcal{V}_K^{-}(x_0) = \{V \in \mathcal{P}(K) / \ \exists \ \eta \in \mathbb{R}_{+}^{*} :]x_0 - \eta \ , \ x_0[\cap K \subset V\}$$

des voisinages à gauche de x_0 : l'ensemble

$$\Omega_f^{-}(x_0) = \{\omega \in \mathcal{V}_K^{-}(x_0) / \ \exists \ m \in \mathbb{R}_{+} : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}$$

est non vide.

2. *f admet une limite le long du filtre $\mathcal{V}_K^{-}(x_0)$:*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^{-}(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K^{-}(x_0)} f$$

3. *cette limite est $f(x_0)$:*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^{-}(x_0)} f = f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K^{-}(x_0)} f$$

En déroulant bêtement les théorèmes [10.6] à [10.8] on obtient pour les applications continues à gauche le lemme suivant :

Lemme 10.34 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in K$ *un point accessible à gauche,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée sur le filtre*

$$\mathcal{V}_K^-(x_0) = \{V \in \mathcal{P}(K) /\ \exists\ \eta \in \mathbb{R}_+^* :]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K \subset V\}$$

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f > \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que l'ensemble* ω_η *défini par* $\omega_\eta =]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. $\omega_\eta \in \Omega_f^-(x_0)$
2. $\inf\limits_{x \in \omega_\eta} f(x) > \lambda$

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f < \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que l'ensemble* ω_η *défini par* $\omega_\eta =]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. $\omega_\eta \in \Omega_f^-(x_0)$
2. $\sup\limits_{x \in \omega_\eta} f(x) < \lambda$

(iii) Il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que l'ensemble* ω_μ *défini par* $\omega_\mu =]x_0 - \mu\ ,\ x_0[\cap K$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. $\omega_\mu \in \Omega_f^-(x_0)$
2. $$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - 1 < \inf_{x \in \omega_\mu} f(x) \leq \sup_{x \in \omega_\mu} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f + 1 \tag{10.118}$$

(iv) Pour tout μ *vérifiant (* 10.118 *) page* 796 *l'application* $W^- \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \Omega_f^-(x_0))$ *définie par*

$$W_n^- =]x_0 - \frac{\mu}{n+1}\ ,\ x_0[\cap K$$

vérifie les propriétés suivantes

1. $W^-(\mathbb{N})$ *est une base du filtre* $\mathcal{V}_K^-(x_0)$
2. $$\limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{x \in W_n^-} f(x))$$
   En d'autres termes $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ *est le plus grand minorant de l'ensemble*
   $$\Lambda^*(f) = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{x \in W_n^-} f(x)\}$$
3. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f < \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*
   $$\sup_{x \in W_n^-} f(x) < \lambda$$
4. $$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{x \in W_n^-} f(x))$$
   En d'autres termes $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ *est le plus petit majorant de l'ensemble*
   $$\Lambda_*(f) = \{t \in \mathbb{R} /\ \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \inf_{x \in W_n^-} f(x)\}$$

5. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f > \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\inf_{x \in W_n^-} f(x) > \lambda$$

6.

$$\limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \inf_{n \in \mathbb{N}} \Big(\sup_{(x,y) \in W_n^- \times W_n^-} |f(x) - f(y)| \Big)$$

En d'autres termes $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ *est le plus grand minorant de l'ensemble*

$$\Gamma_{cg} = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists \ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{(x,y) \in W_n^- \times W_n^-} |f(x) - f(y)|\}$$

7. $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ *est le plus petit élément de l'ensemble* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-))$ *:*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \min\{t : t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-))\}$$

8. $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ *est le plus grand élément de l'ensemble* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-))$ *:*

$$\limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \max\{t : t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-))\}$$

(v) Il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, (] \leftarrow \ , \ x_0[\cap K))$ *qui converge vers* x_0 *vérifiant la propriété que la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente avec*

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$

(vi) Si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, (] \leftarrow, \ x_0[\cap K))$ *est une suite qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est bornée et*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \le \liminf_{n \to +\infty} f(y_n)$$

(vii) Il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, (] \leftarrow, \ x_0[\cap K))$ *qui converge vers* x_0 *vérifiant la propriété que la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente avec*

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$

(viii) Si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, (] \leftarrow, \ x_0[\cap K))$ *est une suite qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est bornée et*

$$\limsup_{n \to +\infty} f(y_n) \le \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$

(ix) Avec les notations du point (iv) les conditions suivantes sont équivalentes :

a *f est continue à gauche en* x_0.

b *pour toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ (] \leftarrow, \ x_0[\cap K)))$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = f(x_0)$$

c *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{(x,y)\in W_n^- \times W_n^-} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

d *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$x \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

e *l'ensemble* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-))$ *est un singleton*

f *le filtre image de* $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ *par* f *converge vers* $f(x_0)$ *:*

$$V \in \mathcal{V}(f(x_0)) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$$

(x) Si $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *est un couple d'applications continues à gauche en* x_0 *alors l'application* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *définie par* $u(x) = f(x) + g(x)$ *est continue à gauche en* x_0

(xi) Si $a \in \mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *est une application continue à gauche en* x_0*, l'application* $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *définie par* $v(x) = af(x)$ *est continue à gauche en* x_0

(xii) Si $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *est un couple d'applications continues à gauche en* x_0 *alors l'application* $w \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *définie par* $w(x) = f(x)g(x)$ *est continue à gauche en* x_0

Preuve

(i)

Si $\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f > \lambda$ alors λ n'est pas un majorant de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ \pi \in \Omega_f^-(x_0) : t = \inf_{x\in\pi} f(x)\}$$

ainsi il existe $\pi \in \Omega_f^-(x_0)$ tel que $\inf_{x\in\pi} f(x) > \lambda$. Puisque $\pi \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$ il existe un certain $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K \subset \pi$, pour un tel η l'ensemble $\omega_\eta =]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ qui vérifie

1. $\omega_\eta \in \Omega_f^-(x_0)$ puisque $\omega_\eta \subset \pi$
2. $$\inf_{x\in\omega_\eta} f(x) \geq \inf_{x\in\pi} f(x) > \lambda$$

Inversement si ω_η vérifie *1* et *2* alors $\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \geq \inf_{x\in\omega_\eta} f(x) > \lambda$.

(ii)

Si $\limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f < \lambda$ alors λ n'est pas un minorant de l'ensemble

$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ \pi \in \Omega_f^-(x_0) : t = \sup_{x\in\pi} f(x)\}$$

ainsi il existe $\pi \in \Omega_f^-(x_0)$ tel que $\sup_{x\in\pi} f(x) < \lambda$. Puisque $\pi \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$ il existe un certain $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K \subset \pi$, pour un tel η l'ensemble $\omega_\eta =]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ qui vérifie

1. $\omega_\eta \in \Omega_f^-(x_0)$ puisque $\omega_\eta \subset \pi$
2. $$\sup_{x\in\omega_\eta} f(x) \leq \sup_{x\in\pi} f(x) < \lambda$$

Inversement si ω_η vérifie *1* et *2* alors $\limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \leq \sup_{x\in\omega_\eta} f(x) < \lambda$.

(iii)

D'après (i) et (ii) il existe des réels $\eta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que les ensembles $\omega_{\eta_0} =]x_0 - \eta_0, x_0[\cap K$ et $\omega_{\eta_1} =]x_0 - \eta_1, x_0[\cap K$ appartiennent à $\Omega_f^-(x_0)$ et vérifient

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - 1 < \inf_{x\in\omega_{\eta_0}} f(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\omega_{\eta_1}} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f + 1$$

Si $\mu = \min\{\eta_0, \eta_1\}$ alors l'ensemble $\omega_\mu =]x_0 - \mu, x_0[\cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ tel que $\omega_\mu \subset \omega_{\eta_0} \cap \omega_{\eta_1}$ par suite $\omega_\mu \in \Omega_f^-(x_0)$ et

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - 1 < \inf_{x\in\omega_{\eta_0}} f(x) \leq \inf_{x\in\omega_\mu} f(x) \leq \sup_{x\in\omega_\mu} f(x) \leq \sup_{x\in\omega_{\eta_1}} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f + 1$$

ainsi μ vérifie (10.118) page 796 .

(iv)

D'abord il est clair que par construction pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n^- \in \Omega_f^-(x_0)$ ainsi $W \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \Omega_f^-(x_0))$.

1. $W^-(\mathbb{N})$ est une base de $\mathcal{V}_K^-(x_0)$
   - α <u>On montre que $W^-(\mathbb{N})$ est une base de filtre .</u>
     - (a) $\varnothing \notin W^-(\mathbb{N})$ par définition d'un point accessible à gauche
     - (b) Si $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alors $W_{\max\{p,q\}}^- = W_p^- \cap W_q^-$
   - γ <u>On montre que $W^-(\mathbb{N})$ engendre le filtre $\mathcal{V}_K^-(x_0)$.</u>

     Si $V \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$ alors il existe par définition un certain $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

     $$]x_0 - \eta, x_0[\cap K \subset V$$

     Si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $(n+1)\eta \geq \mu$ alors

     $$W_n^- \subset]x_0 - \eta, x_0[\cap K \subset V$$

     Inversement si $V \in \mathcal{P}(K)$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n^- \subset V$ alors V contient un élément du filtre $\mathcal{V}_K^-(x_0)$, par suite $V \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$.
2. On montre que $\limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{x\in W_n^-} f(x))$

   Il s'agit de vérifier que la borne inférieure de l'ensemble

   $$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f^-(x_0) : t = \sup_{x\in\pi} f(x)\}$$

   est aussi la borne inférieure de l'ensemble $\Lambda^*(f)$.
   - α D'abord, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n^- \in \Omega_f^-(x_0)$ on obtient $\Lambda^*(f) \subset \Lambda^*$ par suite on obtient $\inf\{t : t \in \Lambda^*\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(f)\}$ et $\limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(f)\}$.
   - β Ensuite on montre que tout élément de Λ^* est minoré par un élément de $\Lambda^*(f)$.

     En effet, si $\pi \in \Omega_f^-(x_0)$ et $t = \sup_{x\in\pi} f(x)$ alors $\pi \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$, puisque $W^-(\mathbb{N})$ engendre $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n^- \subset \pi$, ainsi le réel $s = \sup_{x\in W_n^-} f(x)$ est un élément de $\Lambda^*(f)$ qui minore $t = \sup_{x\in\pi} f(x)$. Par suite tout minorant de $\Lambda^*(f)$ est un minorant de Λ^* ce qui entraîne $\inf\{t : t \in \Lambda^*(f)\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*\}$. Ce qui montre que $\inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{x\in W_n^-} f(x)) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$

3. Si $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f < \lambda$ alors d'après *2* le réel λ n'est pas un minorant de $\Lambda^*(f)$ par suite il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$\sup_{x\in W_n^-} f(x) < \lambda$$

4. On montre que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\inf\limits_{x\in W_n^-} f(x))$

Il s'agit de vérifier que la borne supérieure de l'ensemble
$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ \pi \in \Omega_f^-(x_0) : t = \inf_{x\in\pi} f(x)\}$$
est aussi la borne supérieure de l'ensemble $\Lambda_*(f)$.

α D'abord, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n^- \in \Omega_f^-(x_0)$ on obtient $\Lambda_*(f) \subset \Lambda_*$ par suite on obtient $\sup\{t : t \in \Lambda_*\} \geq \sup\{t : t \in \Lambda_*(f)\}$ et $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \geq \sup\{t : t \in \Lambda_*(f)\}$.

β Ensuite on montre que tout élément de Λ_* est majoré par un élément de $\Lambda_*(f)$.

En effet, si $\pi \in \Omega_f^-(x_0)$ et $t = \inf\limits_{x\in\pi} f(x)$ alors $\pi \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$, puisque $W^-(\mathbb{N})$ engendre $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n^- \subset \pi$, ainsi le réel $s = \inf\limits_{x\in W_n^-} f(x)$ est un élément de $\Lambda_*(f)$ qui majore $t = \inf\limits_{x\in\pi} f(x)$. Par suite tout majorant de $\Lambda_*(f)$ est un majorant de Λ_* et on obtient $\sup\{t : t \in \Lambda_*(f)\} \geq \sup\{t : t \in \Lambda_*\}$. Ce qui montre que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\inf\limits_{x\in W_n^-} f(x)) \geq \liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$

5. Si $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f > \lambda$ alors d'après *4* le réel λ n'est pas un majorant de $\Lambda_*(f)$ par suite il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$\inf_{x\in W_n^-} f(x) > \lambda$$

6. On montre $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(\sup\limits_{(x,y)\in W_n^-\times W_n^-} |f(x) - f(y)|)$

D'après le point (iii) du théorème [10.6] page 757 $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ est la borne inférieure de l'ensemble
$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}_+/\ \exists\ \pi \in \Omega_f^-(x_0) : t = \sup_{(x,y)\in\pi\times\pi} |f(x) - f(y)|\}$$
il suffit donc de montrer que la borne inférieure de Γ_{cg} est aussi la borne inférieure de Γ.

α D'abord puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n^- \in \Omega_f^-(x_0)$ on a $\Gamma_{cg} \subset \Gamma$, ainsi
$$\inf\{t : t \in \Gamma\} \leq \inf\{t : t \in \Gamma_{cg}\}$$

β Ensuite on montre que tout élément de Γ est minoré par un élément de Γ_{cg}. Si $\pi \in \Omega_f^-(x_0)$ et $t = \sup\limits_{(x,y)\in\pi\times\pi} |f(x) - f(y)|$ alors $\pi \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$, puisque $W^-(\mathbb{N})$ engendre $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n^- \subset \pi$, ainsi le réel $s = \sup\limits_{(x,y)\in W_n^-\times W_n^-} |f(x) - f(y)|$ est un élément de Γ_{cg} qui minore t . Par suite tout minorant de Γ_{cg} est un minorant de Γ et on obtient $\inf\{t : t \in \Gamma_{cg}\} \leq \inf\{t : t \in \Gamma\}$.

7. (a) <u>D'abord on montre que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-)$</u>

D'après le lemme [10.13] page 677 il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
$$]\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \varepsilon\ ,\ \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f + \varepsilon[\cap f(W_n^-) \neq \varnothing\ .$$

Or si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

— d'après *5* il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf_{x \in W_p^-} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \varepsilon$$

ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient, puisque $W_p^- \cap W_n^- \in \Omega_f^-(x_0)$

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \varepsilon < \inf_{x \in W_p^-} f(x) \leq \inf_{x \in W_p^- \cap W_n^-} f(x) \leq \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$

et

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \varepsilon < \inf_{x \in W_p^- \cap W_n^-} f(x) \leq \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \tag{10.119}$$

— puisque par définition le réel $\inf_{x \in W_p^- \cap W_n^-} f(x)$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$f(W_p^- \cap W_n^-) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\, x \in W_p^- \cap W_n^- : t = f(x)\}$$

il existe $y_0 \in W_p^- \cap W_n^-$ tel que $\inf_{x \in W_p^- \cap W_n^-} f(x) \leq f(y_0) < \inf_{x \in W_p^- \cap W_n^-} f(x) + \varepsilon$ et (10.119) montre que

$$f(y_0) \in \left]\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \varepsilon \ , \ \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f + \varepsilon\right[\cap f(W_n^-)$$

(b) Ensuite on montre que $\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ est un minorant de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{adh}(f(W_n^-))$

Si $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{adh}(f(W_n^-))$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$]a - \varepsilon \ , \ a + \varepsilon[\cap f(W_n^-) \neq \varnothing$$

cela montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\inf_{x \in W_n^-} f(x) < a + \varepsilon$$

en effet, si $t \in]a - \varepsilon \ , \ a + \varepsilon[\cap f(W_n^-)$ alors

— puisque $t \in f(W_n^-)$ il existe $x_n \in W_n^-$ tel que $t = f(x_n)$

— puisque $t < a + \varepsilon$ on obtient $f(x_n) < a + \varepsilon$ et

$$\inf_{x \in W_n^-} f(x) \leq f(x_n) < a + \varepsilon$$

ainsi $a + \varepsilon$ est un majorant de $\Lambda_*(f)$ et *4* permet d'affirmer que $\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ est le plus petit majorant de cet ensemble, par suite

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \leq a + \varepsilon$$

cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \leq a \ .$$

8. D'après le point (vi) du théorème [10.6] page 757 le réel $\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$ est le plus grand élément de l'ensemble $\bigcap_{\pi \in \Omega_f^-(x_0)} \operatorname{adh}(f(\pi))$ il suffit donc de montrer

$$\bigcap_{\pi \in \Omega_f^-(x_0)} \operatorname{adh}(f(\pi)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{adh}(f(W_n^-)) \ ,$$

or

— puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n^- \in \Omega_f^-(x_0)$ on obtient

$$\bigcap_{\pi \in \Omega_f^-(x_0)} \mathrm{adh}(f(\pi)) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-))$$

— inversement si $\pi \in \Omega_f^-(x_0)$ alors *1* montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n^- \subset \pi$ par suite

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-)) \subset \bigcap_{\pi \in \Omega_f^-(x_0)} \mathrm{adh}(f(\pi))$$

(v)

Les notations sont celles de (iv) pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$A_n = \left\{ k \in \mathbb{N}^* / k > n \quad \text{et} \quad \inf_{x \in W_k^-} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \frac{1}{n} \right\}$$

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A_n \neq \varnothing$. En effet, puisque $\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f > \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \dfrac{1}{n}$ le point $(iv)(5)$ montre qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf_{x \in W_p^-} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f - \frac{1}{n}$$

mais pour tout $k > \max\{p\ ,\ n+1\}$ on a $k > n$ et $W_k^- \subset W_p^-$ par suite

$$\inf_{x \in W_k^-} f(x) \geq \inf_{x \in W_p^-} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \frac{1}{n}$$

ce qui montre que $A_n \neq \varnothing$. On considère l'application φ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\varphi(n) = \min\{k : k \in A_n\}$$

et on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble

$$\Gamma_n = W_{\varphi(n)}^- \cap f^{-1}(]\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \frac{1}{n}\ ,\ \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f + \frac{1}{n}[) = \left\{ x \in W_{\varphi(n)}^- / \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \frac{1}{n} < f(x) < \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f + \frac{1}{n} \right\}$$

est non vide. En effet

— puisque $\displaystyle\inf_{x \in W_{\varphi(n)}^-} f(x) + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de $f(W_{\varphi(n)}^-)$ il existe $y \in W_{\varphi(n)}^-$ tel que

$$\inf_{x \in W_{\varphi(n)}^-} f(x) \leq f(y) < \inf_{x \in W_{\varphi(n)}^-} f(x) + \frac{1}{n} \tag{10.120}$$

— puisque $W_{\varphi(n)}^- \in \Omega_f^-(x_0)$ on a

$$\inf_{x \in W_{\varphi(n)}^-} f(x) + \frac{1}{n} \leq \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f + \frac{1}{n}$$

— puisque $\varphi(n) \in A_n$ on a

$$\inf_{x \in W_{\varphi(n)}^-} f(x) > \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \frac{1}{n}$$

Ainsi tout point y vérifiant (10.120) page 802 est un élément de Γ_n. En posant $\Gamma_0 = W_0^-$ l'axiome du choix montre que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n = \{y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ K)/\forall\ n \in \mathbb{N} \quad y_n \in \Gamma_n\}$$

est non vide et par définition tout élément y de Π vérifie , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < x_0 - y_n < \frac{\mu}{\varphi(n)+1} < \frac{\mu}{n+1} \quad \text{et} \quad |f(y_n) - \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f| < \frac{1}{n}$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$

(vi)

I On montre que u est bornée

En effet, d'après (iii) Il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble ω_μ défini par $\omega_\mu =]x_0-\mu, x_0[\cap K$ est un élément de $\Omega_f^-(x_0)$. Puisque la suite y tend vers x_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $y_n < x_0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in \omega_\mu$$

ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n| \leq \max\{|u_0|\ ,\cdots\ ,|u_{n_0}|\} + \sup_{x\in\omega_\mu} |f(x)|$$

II On montre $\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \leq \liminf_{n\to\infty} f(y_n)$

$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ est la borne supérieure de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ \pi \in \Omega_f^-(x_0) : t = \inf_{x\in\pi} f(x)\}$$

et par définition $\liminf_{n\to\infty} f(y_n)$ est la borne supérieure de l'ensemble

$$\Lambda_*(y) = \{t \in \mathbb{R}/\exists\ n \in \mathbb{N} : t = \inf_{k\geq n} f(y_k)\}$$

Il suffit donc de vérifier que tout point de Λ_* est majoré par un point de $\Lambda_*(y)$. Or si $t = \inf_{x\in\pi} f(x)$, alors

— puisque $\pi \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$ il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]x_0 - \eta, x_0[\cap K \subset \pi$$

— puisque y tend vers x_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $y_n < x_0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq n_0 \Rightarrow y_k \in]x_0 - \eta, x_0[\cap K$$

en particulier on obtient

$$k \geq n_0 \Rightarrow y_k \in \pi \quad \text{et} \quad \inf_{x\in\pi} f(x) \leq \inf_{k\geq n_0} f(y_k)$$

Par suite t est majoré par un élément de $\Lambda_*(y)$. En particulier tout majorant de $\Lambda_*(y)$ est un majorant de Λ_* ainsi

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \leq \liminf_{n\to+\infty} f(y_n) \ .$$

(vii)

On note g l'application de K dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = -f(x)$, puisque $x \in K \Rightarrow |f(x)| = |g(x)|$ on a $\Omega_f(x_0) = \Omega_g(x_0)$, ainsi le point (v) montre qu'il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ qui tend vers x_0 telle que la suite $g(y_n)$ est convergente et $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} g$ mais d'après le théorème [10.6] page 757 on a $\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} g = -\limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ et d'après le lemme [10.3] page 610 on a $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = -\lim_{n\to\infty} f(y_n)$, ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \ .$$

$(viii)$

D'après le point (vi) la suite u est bornée il suffit donc de montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \ .$$

$\limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f^-(x_0) : t = \sup_{x\in\pi} f(x)\}$$

et par définition $\limsup_{n\to\infty} f(y_n)$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$\Lambda^*(y) = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{k\geq n} f(y_k)\}$$

Il suffit donc de vérifier que tout point de Λ^* est minoré par un point de $\Lambda^*(y)$. Or si $t = \sup_{x\in\pi} f(x)$, alors

— puisque $\pi \in \mathcal{V}_K(x_0)$ il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]x_0 - \eta, x_0[\cap K \subset \pi$$

— puisque y tend vers x_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $y_n < x_0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq n_0 \Rightarrow y_k \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap K$$

en particulier on obtient

$$k \geq n_0 \Rightarrow y_k \in \pi \quad \text{et} \quad \sup_{k\geq n_0} f(y_k) \leq \sup_{x\in\pi} f(x)$$

Par suite t est minoré par un élément de $\Lambda^*(y)$. En particulier tout minorant de $\Lambda^*(y)$ est un minorant de Λ^* ainsi

$$\limsup_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \ .$$

(ix)

I preuve de a $\Leftrightarrow$ b

1. <u>On montre a $\Rightarrow$ b</u>
   Par définition si f est continue en x_0 alors

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$

   et les points (vi) et $(viii)$ montre que

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \leq \liminf_{n\to+\infty} f(y_k) \leq \limsup_{n\to+\infty} f(y_k) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$

   par suite a entraîne

$$\liminf_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{n\to+\infty} f(y_n) = f(x_0)\ .$$

2. <u>On montre b $\Rightarrow$ a</u>
   D'après (v) il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, (] \leftarrow, x_0[\cap K))$ qui converge vers x_0 telle que

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$

   ainsi b entraîne $f(x_0) = \liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$. De même le point (vii) permet d'affirmer qu'il existe une suite $z \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, (] \leftarrow, x_0[\cap K))$ qui converge vers x_0 telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n) = \limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ ainsi b entraîne $f(x_0) = \limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$. Par suite on obtient

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f\ .$$

II preuve de a $\Leftrightarrow$ c

1. <u>On montre a $\Rightarrow$ c</u>
   D'après le point *(iv) 6* le réel $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - \liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Gamma_{cg} = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{(x,y)\in W_n^- \times W_n^-} |f(x) - f(y)|\}\ .$$

   en particulier si $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ aucun réel strictement positif n'est un minorant de Γ_{cg}, par suite pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{(x,y)\in W_{n_\varepsilon}^- \times W_{n_\varepsilon}^-} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

   puisque $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow W_n^- \subset W_{n_\varepsilon}^-$ on obtient

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{(x,y)\in W_n^- \times W_n^-} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

2. <u>On montre c $\Rightarrow$ a</u>
   L'assertion c est la traduction de l'égalité

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{(x,y)\in W_n \times W_n}) |f(x) - f(y)|) = 0$$

   il suffit donc d'appliquer *(iv) 6*

III preuve de a $\Leftrightarrow$ d

1. <u>On montre a $\Rightarrow$ d</u>
Si a est vérifié alors par définition $f(x_0)$ est le plus petit majorant de l'ensemble
$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists \ \pi \in \Omega_f^-(x_0) : t = \inf_{x\in\pi} f(x)\}$$
et le plus grand minorant de l'ensemble
$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists \ \pi \in \Omega_f^-(x_0) : t = \sup_{x\in\pi} f(x)\} \ .$$
En particulier, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $f(x_0)-\varepsilon$ n'est pas un majorant de Λ_* et il existe $\pi_\varepsilon \in \Omega_f^-(x_0)$ tel que $f(x_0)-\varepsilon < \inf\limits_{y\in\pi_\varepsilon} f(y)$, de même $f(x_0)+\varepsilon$ n'est pas un minorant de Λ^* et il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f^-(x_0)$ tel que $\sup\limits_{y\in\omega_\varepsilon} f(y) < f(x_0)+\varepsilon$. En posant $V_\varepsilon = \pi_\varepsilon \cap \omega_\varepsilon$ on obtient, pour tout $x \in V_\varepsilon$,
$$f(x_0)-\varepsilon < \inf_{y\in\pi_\varepsilon} f(y) \le \inf_{y\in V_\varepsilon} f(y) \le f(x) \le \sup_{y\in V_\varepsilon} f(y) \le \sup_{y\in\omega_\varepsilon} f(y) < f(x_0)+\varepsilon$$
en particulier
$$x \in V_\varepsilon \Rightarrow f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$
Mais puisque V_ε est l'intersection de deux éléments du filtre $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ on a $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$ et il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0-\eta \ , \ x_0[\cap K \subset V_\varepsilon$, pour un tel η on obtient
$$x \in]x_0-\eta \ , \ x_0[\cap K \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \ .$$

2. <u>On montre d $\Rightarrow$ a</u>
Il suffit de montrer que sous l'hypothèse d pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a
$$f(x_0)-\varepsilon \le \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \le \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \le f(x_0)+\varepsilon \ .$$
Mais l'hypothèse d entraîne que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ qu'il existe $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble ω_ε défini par $\omega_\varepsilon =]x_0-\eta_\varepsilon, x_0[\cap K$ vérifie
$$x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$
un tel ensemble est un élément de $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ tel que
— $\omega_\varepsilon \in \Omega_f^-(x_0)$ puisque $x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| \le |f(x_0)| + \varepsilon$
— $\inf\limits_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \ge f(x_0)-\varepsilon$ puisque
$$x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow f(x) > f(x_0)-\varepsilon$$
— $\sup\limits_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \le f(x_0)+\varepsilon$ puisque
$$x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow f(x) < f(x_0)+\varepsilon$$
ainsi on obtient
$$f(x_0)-\varepsilon \le \inf_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \le \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \le \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \le \sup_{x\in\omega_\varepsilon} f(x) \le f(x_0)+\varepsilon$$

IV preuve de a $\Leftrightarrow$ e

D'après le point *(iv) 7* le réel $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ est le plus petit élément de l'ensemble $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-))$ et d'après le point *(iv) 8* le réel $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ est le plus grand élément de l'ensemble $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-))$, par suite

— si $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$ le plus petit et le plus grand élément de $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-))$ sont égaux et cet ensemble est un singleton.

— si $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^-)) = \{l\}$ on obtient $l = \liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$

V preuve de a $\Leftrightarrow$ f

1. <u>On montre a $\Rightarrow$ f</u>
   Si $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]f(x_0) - \varepsilon\ ,\ f(x_0) + \varepsilon[\subset V$, or l'hypothèse a entraîne
   $$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f$$
   — puisque $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f > f(x_0) - \varepsilon$ il existe d'après le point *(iv) 5* un certain $p \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\inf_{x\in W_p^-} f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$
   — puisque $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} < f(x_0) + \varepsilon$ il existe d'après le point *(iv) 3* un certain $q \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\sup_{x\in W_q^-} f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$
   ainsi $W_p \cap W_q$ est un élément de $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ qui vérifie
   $$W_p \cap W_q \subset f^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon\ ,\ f(x_0) + \varepsilon[) \subset f^{-1}(V)$$
   par suite $f^{-1}(V)$ qui contient un élément du filtre $\mathcal{V}_K^-(x_0)$ est un élément de $\mathcal{V}_K^-(x_0)$.
2. <u>On montre f $\Rightarrow$ a</u>
   Il suffit de montrer que l'hypothèse f entraîne que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a
   $$f(x_0) - \varepsilon \leq \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \leq f(x_0) + \varepsilon\ .$$
   Or puisque $]f(x_0)-\varepsilon\ ,\ f(x_0)+\varepsilon[\in \mathcal{V}(f(x_0))$ on a (d'après f) $f^{-1}(]f(x_0)-\varepsilon\ ,\ f(x_0)+\varepsilon[) \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$.
   En particulier l'ensemble $\omega_\varepsilon = f^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon\ ,\ f(x_0) + \varepsilon[)$ vérifie
   — $\omega_\varepsilon \in \Omega_f^-(x_0)$ puisque $\omega_\varepsilon \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$ et $[x \in \omega_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < |f(x_0)| + \varepsilon]$
   —
   $$f(x_0) - \varepsilon \leq \inf_{y\in\omega_\varepsilon} f(y) \leq \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \leq \sup_{y\in\omega_\varepsilon} f(y) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

(x)

D'après le théorème [10.6] page 757 (voir 10.103 page 759) si

$$\limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} g = \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} g$$

alors $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} (f+g) = \limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} (f+g)$ ainsi la continuité à gauche de f et g en x_0 entraîne la continuité à gauche de $f+g$ en x_0

(xi)

D'après le théorème [10.6] page 757 la continuité de f en x_0 entraîne

1. si $a \geq 0$ alors (voir 10.104 page 759)

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} af = a \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = a \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} af$$

2. si $a \leq 0$ alors (voir 10.105 page 759)

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} af = a \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = a \liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} af$$

(xii)

On utilise l'équivalence a $\Leftrightarrow$ d du point (ix). Si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors

— puisque f est continue en x_0 il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)| + \varepsilon)}\} \tag{10.121}$$

— puisque g est continue en x_0 il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leq \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2(|f(x_0)| + \varepsilon)}\} \tag{10.122}$$

L'égalité $f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$ montre que

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |g(x)||f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| \tag{10.123}$$

Or si $\mu = \min\{\eta \ , \ \delta\}$

— par (10.122) on a

$$0 < x_0 - x < \mu \Rightarrow |g(x)| \leq |g(x_0)| + \varepsilon$$

et (10.121) montre alors que

$$0 < x_0 - x < \mu \Rightarrow |g(x)||f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

— Enfin (10.122) montre que

$$0 < x_0 - x < \mu \Rightarrow |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi par (10.123) on obtient

$$0 < x_0 - x < \mu \Rightarrow |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq \varepsilon \ .$$

ce qui montre que l'application $x \mapsto f(x)g(x)$ est continue à gauche en x_0. ■

On a des énoncés botaniques similaires pour la limite à droite.

II *Continuité à droite*

Définition 10.54 *On note* $(\mathbb{R} \ , \ + \ , \ . \ , \ \leq \ )$ *un corps de réels ,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in K$ *un point accessible à droite ,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K \ , \ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *est* ***continue à droite en*** x_0 *si elle vérifie les propriétés suivantes*

1. f *est localement bornée sur le filtre*

$$\mathcal{V}_K^+(x_0) = \{V \in \mathcal{P}(K)/ \ \exists \ \eta \in \mathbb{R}_+^* :]x_0, \ x_0 + \eta[\cap K \subset V\}$$

des voisinages à droite de x_0 *: l'ensemble*

$$\Omega_f^+(x_0) = \{\omega \in \mathcal{V}_K^+(x_0)/ \ \exists \ m \in \mathbb{R}_+ : x \in \omega \Rightarrow |f(x)| \leq m\}$$

est non vide.

2. f admet une limite le long du filtre $\mathcal{V}_K^+(x_0)$ *:*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$$

3. cette limite est $f(x_0)$ *:*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f = f(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$$

En déroulant bêtement les théorèmes [10.6] à [10.8] on obtient pour les applications continues à droite le lemme suivant :

Lemme 10.35 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in K$ *un point accessible à droite,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$ *qui est localement bornée sur le filtre*

$$\mathcal{V}_K^+(x_0) = \{V \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ \eta \in \mathbb{R}_+^* :]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K \subset V\}$$

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f > \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que l'ensemble* ω_η *défini par* $\omega_\eta =]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. $\omega_\eta \in \Omega_f^+(x_0)$
2. $\inf\limits_{x \in \omega_\eta} f(x) > \lambda$

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f < \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que l'ensemble* ω_η *défini par* $\omega_\eta =]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. $\omega_\eta \in \Omega_f^+(x_0)$
2. $\sup\limits_{x \in \omega_\eta} f(x) < \lambda$

(iii) Il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que l'ensemble* ω_μ *défini par* $\omega_\mu =]x_0\ ,\ x_0 + \mu[\cap K$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. $\omega_\mu \in \Omega_f^+(x_0)$
2. $$\liminf_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f - 1 < \inf_{x \in \omega_\mu} f(x) \leq \sup_{x \in \omega_\mu} f(x) < \limsup_{\mathcal{V}_K^-(x_0)} f + 1 \qquad (10.124)$$

(iv) Pour tout μ *vérifiant (10.124) page 809 l'application* $W^+ \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \Omega_f^+(x_0))$ *définie par*

$$W_n^+ =]x_0\ ,\ x_0 + \frac{\mu}{n+1}[\cap K$$

vérifie les propriétés suivantes

1. $W^+(\mathbb{N})$ *est une base du filtre* $\mathcal{V}_K^+(x_0)$
2. $$\limsup_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{x \in W_n^+} f(x))$$

   En d'autres termes $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$ *est le plus grand minorant de l'ensemble*

   $$\Lambda^*(f) = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{x \in W_n^+} f(x)\}$$

3. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f < \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

   $$\sup_{x \in W_n^+} f(x) < \lambda$$

4.

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{x\in W_n^+} f(x))$$

En d'autres termes $\liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$ *est le plus petit majorant de l'ensemble*

$$\Lambda_*(f) = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \inf_{x\in W_n^+} f(x)\}$$

5. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que* $\liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f > \lambda$ *il faut et il suffit qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\inf_{x\in W_n^+} f(x) > \lambda$$

6.

$$\limsup_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{(x,y)\in W_n^+\times W_n^+} |f(x) - f(y)|)$$

En d'autres termes $\limsup_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f - \liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$ *est le plus grand minorant de l'ensemble*

$$\Gamma_{cg} = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ n \in \mathbb{N} : t = \sup_{(x,y)\in W_n^+\times W_n^+} |f(x) - f(y)|\}$$

7. $\liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$ *est le plus petit élément de l'ensemble* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^+))$ *:*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f = \min\{t : t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^+))\}$$

8. $\limsup_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$ *est le plus grand élément de l'ensemble* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^+))$ *:*

$$\limsup_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f = \max\{t : t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^+))\}$$

(v) Il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, (]x_0\ , \to [\cap K))$ *qui converge vers* x_0 *vérifiant la propriété que la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente avec*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$$

(vi) Si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, (]x_0\ , \to [\cap K))$ *est une suite qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est bornée et*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f \leq \liminf_{n\to+\infty} f(y_n)$$

(vii) Il existe une suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, (]x_0\ , \to [\cap K))$ *qui converge vers* x_0 *vérifiant la propriété que la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente avec*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \limsup_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$$

(viii) Si $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, (]x_0\ , \to [\cap K))$ *est une suite qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est bornée et*

$$\limsup_{n\to+\infty} f(y_n) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K^+(x_0)} f$$

(ix) Avec les notations du point (iv) les conditions suivantes sont équivalentes :

a f *est continue à droite en* x_0.

b *pour toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ (]x_0\ ,\to[\cap K))$ *qui converge vers* x_0 *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(x_0)$$

c *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{(x,y)\in W_n^+\times W_n^+} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

d *pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$x \in]x_0\ ,\ x_0+\eta[\cap K \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

e *l'ensemble* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(f(W_n^+))$ *est un singleton*

f *le filtre image de* $\mathcal{V}_K^+(x_0)$ *par* f *converge vers* $f(x_0)$ *:*

$$V \in \mathcal{V}(f(x_0)) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_K^-(x_0)$$

(x) Si $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ *est un couple d'applications continues à droite en* x_0 *alors l'application* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ *définie par* $u(x) = f(x) + g(x)$ *est continue en* x_0

(xi) Si $a \in \mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ *est une application continue à droite en* x_0*, l'application* $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ *définie par* $v(x) = af(x)$ *est continue à droite en* x_0

(xii) Si $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ *est un couple d'applications continues à droite en* x_0 *alors l'application* $w \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ *définie par* $w(x) = f(x)g(x)$ *est continue à droite en* x_0

Preuve C'est encore de la botanique autours des théorèmes [10.6] à [10.8], on peut aussi remarquer que si $-K = \{x \in \mathbb{R}/ -x \in K\}$ la continuité à droite de f en x_0 est équivalente à la continuité à gauche en $-x_0$ de l'application $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(-K,\mathbb{R})$ définie par $g(x) = f(-x)$ et appliquer le lemme [10.34] page 796 , on peut aussi changer les $-$ en $+$ dans la preuve du lemme [10.34]. ■

Lorsqu'une application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ est continue en chaque point de K on dit qu'elle est continue sur K.

10.9.3 *Application continue sur un ensemble*

Définition 10.55 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$*,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *est* ***continue sur*** K *si pour tout* $x \in K$ *l'application* f *est continue en* x*. Autrement dit elle vérifie, pour tout* $x \in K$*, les propriétés suivantes*

1. f *est localement bornée sur le filtre*

$$\mathcal{V}_K(x) = \{V \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ \eta \in \mathbb{R}_+^* :]x-\eta\ ,\ x+\eta[\cap K \subset V\}$$

c'est à dire qu'il existe un $\imath(K,\mathcal{T})$*-voisinage de* x *sur lequel* f *est bornée : l'ensemble*

$$\Omega_f(x) = \{\omega \in \mathcal{V}_K(x)/\ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : y \in \omega \Rightarrow |f(y)| \leq m\}$$

est non vide.

2. f *admet une limite le long du filtre* $\mathcal{V}_K(x)$ *:*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$$

Le lemme suivant qu'on a sans doute déjà prouvé un bonne centaine de fois permet de lier la continuité globale aux notions topologiques sur $\mathbb{R}$ qui sont étudiées et définies entre la définition [10.16] page 677 et le lemme [10.16] page 687

Lemme 10.36 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$*,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*.*

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes

a f *est continue sur* K

b *Pour tout* $x \in K$ *l'application* f *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}_K(x)$ *et*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = f(x) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$$

c *Pour tout* $x \in K$ *l'image réciproque de tout voisinage de* $f(x)$ *est un* $\imath(K, \mathcal{T})$*-voisinage de* x *:*

$$V \in \mathcal{V}(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_K(x)$$

d *L'image réciproque de tout ouvert de* $\mathbb{R}$ *est* $\imath(K, \mathcal{T})$*-ouverte :*

$$O \in \mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}(O) \in \imath(K, \mathcal{T})$$

e *L'image réciproque de tout intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *est* $\imath(K, \mathcal{T})$*-ouverte .*

(ii) Pour que f *soit continue sur* K *il faut et il suffit que pour tout* $x \in K$ *et tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $O \in \mathcal{T}$ *tel que* $x \in O$ *et*

$$(u, v) \in (O \cap K) \times (O \cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon \tag{10.125}$$

(iii) Les conditions suivantes sont équivalentes

A f *est continue sur* K

B *Pour tout* $x \in K$ *et tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$(u, v) \in (]x - \eta\ ,\ x + \eta[\cap K) \times (]x - \eta\ ,\ x + \eta[\cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

C *Pour tout* $x \in K$ *et tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$y \in]x - \eta\ ,\ x + \eta[\cap K \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

D *Pour tout* $x \in K$ *et pour toute suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ *qui converge vers* x *la suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *définie par* $u_n = f(y_n)$ *est convergente et*

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = f(x)\ .$$

(iv) Pour tout $A \subset K$ *la restriction* f_A *de* f *à* A *est continue.*

(v) Si $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est un couple d'applications continues sur* K *alors l'application* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *définie par*

$$u(x) = f(x) + g(x)$$

est continue sur K*.*

Preuve

(i)

I Preuve de a $\Rightarrow$ b

Soit $x \in K$ par définition si f est continue sur K alors f est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_K(x)$ et

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f \tag{10.126}$$

mais puisque $x \in K$ on a $\omega \in \Omega_f(x) \Rightarrow x \in \omega$ par suite pour tout $(\pi\ ,\ \omega) \in \Omega_f(x) \times \Omega_f(x)$ on obtient

$$\inf_{y\in\omega} f(y) \leq f(x) \leq \sup_{y\in\pi} f(y)$$

et

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq f(x) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$$

ainsi l'égalité (10.126) montre que

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = f(x) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$$

II Preuve de b $\Rightarrow$ c

Soit $x \in K$ et $V \in \mathcal{V}(f(x))$ par définition il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]f(x)-\varepsilon\ ,\ f(x)+\varepsilon[\subset V$ or l'hypothèse b implique que $f(x)$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ \omega \in \Omega_f(x) : t = \inf_{y\in\omega} f(y)\}$$

et le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ \pi \in \Omega_f(x) : t = \sup_{y\in\pi} f(y)\}\ .$$

En particulier $f(x)-\varepsilon$ n'est pas un majorant de Λ_* et il existe $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(x)$ tel que

$$f(x)-\varepsilon < \inf_{y\in\omega_\varepsilon} f(y)$$

de même $f(x)+\varepsilon$ n'est pas un minorant de Λ^* et il existe $\pi_\varepsilon \in \Omega_f(x)$ tel que

$$\sup_{y\in\pi_\varepsilon} f(y) < f(x)+\varepsilon$$

ainsi l'ensemble $V_\varepsilon = \omega_\varepsilon \cap \pi_\varepsilon$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x)$ qui vérifie pour tout $u \in V_\varepsilon$

$$f(x)-\varepsilon < \inf_{y\in\omega_\varepsilon} f(y) \leq \inf_{y\in V_\varepsilon} f(y) \leq f(u) \leq \sup_{y\in V_\varepsilon} f(y) \leq \sup_{y\in\pi_\varepsilon} f(y) < f(x)+\varepsilon$$

par suite

$$u \in V_\varepsilon \Rightarrow f(x)-\varepsilon < f(u) < f(x)+\varepsilon$$

et

$$V_\varepsilon \subset f^{-1}(]f(x)-\varepsilon\ ,\ f(x)+\varepsilon[) \subset f^{-1}(V)\ .$$

L'ensemble $f^{-1}(V)$ contient donc un élément du filtre $\mathcal{V}_K(x)$ et on obtient $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_K(x)$.

III Preuve de c $\Rightarrow$ d

D'après le point (ii) du lemme [10.15] page 685 il s'agit de montrer

$$x \in f^{-1}(O) \Rightarrow\ \exists\ \eta \in \mathbb{R}_+^* :]x-\eta\ ,\ x+\eta[\cap K \subset f^{-1}(O)\ .$$

mais si $x \in f^{-1}(O)$ alors $O \in \mathcal{V}(f(x))$ et c entraîne que $f^{-1}(O) \in \mathcal{V}_K(x)$ par suite il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\eta\ ,\ x+\eta[\cap K \subset f^{-1}(O)$

IV Preuve de d $\Rightarrow$ e

Tout intervalle ouvert est un ouvert de $\mathbb{R}$.

V preuve de e $\Rightarrow$ a

1. D'abord on montre que sous l'hypothèse e pour tout $x \in K$ l'application f est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_K(x)$.
   En effet e implique que pour tout $x \in K$ l'ensemble $\omega = f^{-1}]f(x) - 1\ ,\ f(x) + 1[$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x)$ or
   $$u \in \omega \Rightarrow |f(u)| \leq |f(x)| + 1$$
   ainsi ω est un élément de $\mathcal{V}_K(x)$ sur lequel f est bornée.
2. Ensuite on montre que sous l'hypothèse e pour tout $x \in K$
   $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$$
   Il suffit de voir que e implique que pour tout $x \in K$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
   $$f(x) - \varepsilon \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq f(x) + \varepsilon\ .$$
   Or e implique que pour tout $x \in K$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble $\omega_\varepsilon = f^{-1}]f(x) - \varepsilon\ ,\ f(x) + \varepsilon[$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x)$ or
   — $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(x)$ puisque
   $$y \in \omega_\varepsilon \Rightarrow |f(y)| \leq |f(x)| + \varepsilon$$
   — $\inf_{y \in \omega_\varepsilon} f(y) \geq f(x) - \varepsilon$ puisque
   $$y \in \omega_\varepsilon \Rightarrow f(y) > f(x) - \varepsilon$$
   — $\sup_{y \in \omega_\varepsilon} f(y) \leq f(x) + \varepsilon$ puisque
   $$y \in \omega_\varepsilon \Rightarrow f(y) < f(x) + \varepsilon$$
   ainsi on obtient
   $$f(x) - \varepsilon \leq \inf_{y \in \omega_\varepsilon} f(y) \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq \sup_{y \in \omega_\varepsilon} f(y) \leq f(x) + \varepsilon$$

(ii)

On montre la partie « il faut »

D'après l'équivalence a $\Leftrightarrow$ e prouvée au point (i) si f est continue sur K alors pour tout $x \in K$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble $U = f^{-1}(]f(x) - \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ f(x) + \frac{\varepsilon}{2}[)$ est $\imath(K, \mathcal{T})$-ouvert ainsi il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $U = O \cap K$

— puisque $x \in U$ on a $x \in O$

— puisque
$$u \in U \Rightarrow |f(u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
on obtient
$$(u, v) \in U \times U \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq |f(u) - f(x)| + |f(x) - f(v)| < \varepsilon$$
et (10.125) page 812 est vérifiée.

On montre la partie « il suffit »

1. D'abord on montre que si (10.125) est vérifiée alors pour tout $x \in K$ l'application f est localement bornée sur $\mathcal{V}_K(x)$.
   En effet si $x \in K$ alors (10.125) entraîne qu'il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O$ et
   $$(u,v) \in (O \cap K) \times (O \cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < 1$$
   puisque $x \in O \cap K$ on obtient
   $$u \in O \cap K \Rightarrow |f(u) - f(x)| < 1 \Rightarrow |f(u)| < |f(x)| + 1$$
   ainsi $O \cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x)$ sur lequel f est bornée.
2. Ensuite on montre que si (10.125) est vérifiée alors pour tout $x \in K$
   $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$$
   En effet si $x \in K$ alors (10.125) entraîne que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $O_\varepsilon \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O_\varepsilon$ et
   $$(u,v) \in (O_\varepsilon \cap K) \times (O_\varepsilon \cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$
   ainsi l'ensemble $\omega_\varepsilon = O_\varepsilon \cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x)$ qui vérifie , puisque $x \in \omega_\varepsilon$,
   $$u \in \omega_\varepsilon \Rightarrow |f(u) - f(x)| < \varepsilon \ .$$
   De plus on a
   — $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(x)$ puisque $u \in \omega_\varepsilon \Rightarrow |f(u)| < |f(x)| + \varepsilon$
   — $\inf_{u \in \omega_\varepsilon} f(u) \geq f(x) - \varepsilon$ puisque $u \in \omega_\varepsilon \Rightarrow f(u) > f(x) - \varepsilon$
   — $\sup_{u \in \omega_\varepsilon} f(u) \leq f(x) + \varepsilon$ puisque $u \in \omega_\varepsilon \Rightarrow f(u) < f(x) + \varepsilon$
   Ainsi on obtient
   $$f(x) - \varepsilon \leq \inf_{u \in \omega_\varepsilon} f(u) \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq \sup_{u \in \omega_\varepsilon} f(u) \leq f(x) + \varepsilon$$
   Ces inégalités étant vérifiées pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ elles impliquent
   $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = f(x) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$$

(iii)

Preuve de $A \Rightarrow B$

D'après le point (ii) si f est continue il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O$ et
$$(u,v) \in (O \cap K) \times (O \cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$
puisque $x \in O$ il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x - \eta \ , \ x + \eta[\subset O$, ainsi
$$(u,v) \in (]x - \eta \ , \ x + \eta[\cap K) \times (]x - \eta \ , \ x + \eta[\cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

Preuve de $B \Rightarrow C$

Si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie
$$(u,v) \in (]x - \eta \ , \ x + \eta[\cap K) \times (]x - \eta \ , \ x + \eta[\cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$
alors puisque $x \in]x - \eta \ , \ x + \eta[\cap K$ on obtient
$$u \in]x - \eta \ , \ x + \eta[\cap K \Rightarrow |f(u) - f(x)| < \varepsilon$$

Preuve de $C \Rightarrow D$

Soit $x \in K$ et $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , K)$ une suite qui converge vers x si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie

$$u \in]x-\eta\ ,\ x+\eta[\cap K \Rightarrow |f(u)-f(x)| < \varepsilon \tag{10.127}$$

alors

— puisque y tend vers x il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in]x-\eta\ ,\ x+\eta[\cap K$$
ainsi (10.127) page 816 montre que
$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(y_n)-f(x)| < \varepsilon\ ,$$
et $f(y_n)$ tend vers $f(x)$.

Preuve de $D \Rightarrow A$

1. D'abord on montre que sous l'hypothèse D pour tout $x \in K$ l'application f est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_K(x)$.
   (a) On montre que sous l'hypothèse D l'ensemble
   $$\Gamma_- = \{\eta \in \mathbb{R}_+^* /]x-\eta\ ,\ x+\eta[\cap K \subset f^{-1}]f(x)-1\ , \rightarrow [\}$$
   est non vide. En effet si $\Gamma_- = \varnothing$ alors pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $u \in]x-\eta\ ,\ x+\eta[\cap K$ tel que $f(u) \leq f(x)-1$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble
   $$A_n = \{u \in]x - \frac{1}{n+1}\ ,\ x + \frac{1}{n+1}[\cap K / f(u) \leq f(x)-1\}$$
   est non vide. L'axiome du choix entraîne que l'ensemble
   $$\Pi_- = \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)/\forall\ n \in \mathbb{N} : y_n \in A_n\}$$
   est non vide . Or tout élément de Π_- est une suite qui tend vers x et vérifie $\sup_{n\in\mathbb{N}} f(y_n) \leq f(x)-1$, ce qui contredit l'hypothèse D. Ainsi $\Gamma_- \neq \varnothing$ et il existe $\eta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
   $$u \in]x-\eta_0\ ,\ x+\eta_0[\cap K \Rightarrow f(u) > f(x)-1$$
   (b) On montre que sous l'hypothèse D l'ensemble
   $$\Gamma_+ = \{\eta \in \mathbb{R}_+^* /]x-\eta\ ,\ x+\eta[\cap K \subset f^{-1}] \leftarrow\ , f(x)+1[\}$$
   est non vide. En effet si $\Gamma_+ = \varnothing$ alors pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $u \in]x-\eta\ ,\ x+\eta[\cap K$ tel que $f(u) \geq f(x)+1$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble
   $$B_n = \{u \in]x - \frac{1}{n+1}\ ,\ x + \frac{1}{n+1}[\cap K / f(u) \geq f(x)+1\}$$
   est non vide. L'axiome du choix entraîne que l'ensemble
   $$\Pi_+ = \prod_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)/\forall\ n \in \mathbb{N} : y_n \in B_n\}$$
   est non vide . Or tout élément de Π_+ est une suite qui tend vers x et vérifie $\inf_{n\in\mathbb{N}} f(y_n) \geq f(x)+1$, ce qui contredit l'hypothèse D. Ainsi $\Gamma_+ \neq \varnothing$ et il existe $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
   $$u \in]x-\eta_1\ ,\ x+\eta_1[\cap K \Rightarrow f(u) < f(x)+1$$

Par suite si $\mu = \min\{\eta_0, \eta_1\}$ l'ensemble $\omega_\mu =]x - \mu\ ,\ x + \mu[\cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x)$ qui vérifie

$$u \in \omega_\mu \Rightarrow |f(u)| \leq |f(x)| + 1$$

2. Ensuite on montre que sous l'hypothèse D pour tout $x \in K$

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$$

   (a) On montre que sous l'hypothèse D pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble

$$\Gamma_-(\varepsilon) = \{\eta \in \mathbb{R}_+^* /]x - \eta\ ,\ x + \eta[\cap K \subset f^{-1}]f(x) - \varepsilon\ , \rightarrow [\}$$

   est non vide. En effet si $\Gamma_-(\varepsilon) = \varnothing$ alors pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $u \in]x - \eta\ ,\ x + \eta[\cap K$ tel que $f(u) \leq f(x) - \varepsilon$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$A_n(\varepsilon) = \{u \in]x - \frac{1}{n+1}\ ,\ x + \frac{1}{n+1}[\cap K / f(u) \leq f(x) - \varepsilon\}$$

   est non vide. L'axiome du choix entraîne que l'ensemble

$$\Pi_-(\varepsilon) = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n(\varepsilon) = \{y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K) / \forall\ n \in \mathbb{N} : y_n \in A_n(\varepsilon)\}$$

   est non vide . Or tout élément de $\Pi_-(\varepsilon)$ est une suite qui tend vers x et vérifie

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f(y_n) \leq f(x) - \varepsilon\ ,$$

   ce qui contredit l'hypothèse D. Ainsi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\Gamma_-(\varepsilon) \neq \varnothing$ et il existe $\eta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$u \in]x - \eta_0(\varepsilon)\ ,\ x + \eta_0(\varepsilon)[\cap K \Rightarrow f(u) > f(x) - \varepsilon \tag{10.128}$$

   (b) On montre que sous l'hypothèse D pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble

$$\Gamma_+(\varepsilon) = \{\eta \in \mathbb{R}_+^* /]x - \eta\ ,\ x + \eta[\cap K \subset f^{-1}] \leftarrow\ ,\ f(x) + \varepsilon[\}$$

   est non vide. En effet si $\Gamma_+(\varepsilon) = \varnothing$ alors pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $u \in]x - \eta\ ,\ x + \eta[\cap K$ tel que $f(u) \geq f(x) + \varepsilon$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$B_n(\varepsilon) = \{u \in]x - \frac{1}{n+1}\ ,\ x + \frac{1}{n+1}[\cap K / f(u) \geq f(x) - \varepsilon\}$$

   est non vide. L'axiome du choix entraîne que l'ensemble

$$\Pi_+(\varepsilon) = \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n(\varepsilon) = \{y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K) / \forall\ n \in \mathbb{N} : y_n \in B_n(\varepsilon)\}$$

   est non vide . Or tout élément de $\Pi_+(\varepsilon)$ est une suite qui tend vers x et vérifie

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} f(y_n) \geq f(x) + \varepsilon\ ,$$

   ce qui contredit l'hypothèse D. Ainsi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\Gamma_+(\varepsilon) \neq \varnothing$ et il existe $\eta_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$u \in]x - \eta_1(\varepsilon)\ ,\ x + \eta_1(\varepsilon)[\cap K \Rightarrow f(u) < f(x) + \varepsilon \tag{10.129}$$

Par suite si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\eta_0(\varepsilon)$, $\eta_1(\varepsilon)$ vérifient (10.128) et (10.129) page 817 et si on pose $\mu(\varepsilon) = \min\{\eta_0(\varepsilon), \eta_1(\varepsilon)\}$ l'ensemble $\omega_\varepsilon =]x - \mu(\varepsilon)\ ,\ x + \mu(\varepsilon)[\cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x)$ qui vérifie

— $\omega_\varepsilon \in \Omega_f(x)$ puisque $u \in \omega_\varepsilon \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f(u) < f(x) + \varepsilon \Rightarrow |f(u)| \leq |f(x)| + \varepsilon$

— $\inf_{u \in \omega_\varepsilon} f(u) \geq f(x) - \varepsilon$ puisque $u \in \omega_\varepsilon \Rightarrow f(u) > f(x) - \varepsilon$

— $\sup_{u \in \omega_\varepsilon} f(u) \leq f(x) + \varepsilon$ puisque $u \in \omega_\varepsilon \Rightarrow f(u) < f(x) + \varepsilon$

on obtient donc

$$f(x) - \varepsilon \leq \inf_{u \in \omega_\varepsilon} f(u) \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq \sup_{u \in \omega_\varepsilon} f(u) \leq f(x) + \varepsilon \ .$$

Ces inégalités étant vérifiées pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ elles impliquent

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = f(x) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$$

(iv)

D'après (iii) il suffit de montrer que pour tout $a \in A$ et pour toute suite $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ A)$ qui converge vers a la suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ \mathbb{R})$ définie par $u_n = f_A(y_n)$ converge vers $f_A(a)$, ce qui est une conséquence de la continuité de f est des égalités $f(y_n) = f_A(y_n)$ et $f_A(a) = f(a)$.

(v)

C'est une conséquence immédiate du point (xii) du lemme [10.33] page 782 ■

Lorsque $f : K \mapsto \mathbb{R}$ est une application continue on est souvent amené à montrer qu'elle possède un prolongement continue à l'ensemble $\mathrm{adh}(K)$.

Définition 10.56 *On note* $(\mathbb{R} \ , \ + \ , \ . \ , \ \leq \ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$*,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K \ , \ \mathbb{R})$ *est une application continue de* K *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *possède un prolongement continue à* $\mathrm{adh}(K)$ *si il existe une application* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathrm{adh}(K) \ , \ \mathbb{R})$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. g *est continue sur* $\mathrm{adh}(K)$
2. $x \in K \Rightarrow \ g(x) = f(x)$.

Le lemme suivant donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'un tel prolongement. On rappelle que si $(\mathbb{R} \ , \ + \ , \ . \ , \ \leq \ )$ est un corps de réels et $\mathcal{T}$ la topologie standard sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $\mathcal{O}(x)$ l'ensemble des voisinages ouverts de x :

$$\mathcal{O}(x) = \{O \in \mathcal{T} / x \in O\}$$

Lemme 10.37 *On note* $(\mathbb{R} \ , \ + \ , \ . \ , \ \leq \ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$*,* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K \ , \ \mathbb{R})$ *est une application continue de* K *dans* $\mathbb{R}$*. Enfin pour* $x \in \mathrm{adh}(K)$

— *l'ensemble* $\Omega_f^o(x)$ *est l'ensemble des voisinages ouverts* O *de* x *tels que* f *est bornée sur* $O \cap K$ *:*

$$\Omega_f^o(x) = \{O \in \mathcal{O}(x) / \ \exists \ m \in \mathbb{R}_+ : y \in O \cap K \Rightarrow |f(y)| \leq m\}$$

— *l'ensemble* $\Omega_f(x)$ *est l'ensemble des* $\imath(K, \mathcal{T})$ *voisinages de* x *sur lesquels* f *est bornée :*

$$\Omega_f(x) = \{\omega \in \mathcal{V}_K(x) / \ \exists \ m \in \mathbb{R}_+ : y \in \omega \Rightarrow |f(y)| \leq m\}$$

(i) Si f *admet un prolongement continu à* $\mathrm{adh}(K)$ *alors*

1. *Pour tout* $x \in \mathrm{adh}(K)$ *l'application* f *est localement bornée sur le filtre*

$$\mathcal{V}_K(x) = \{V \in \mathcal{P}(K) / \exists \ O \in \mathcal{O}(x) : O \cap K \subset V\}$$

2. Pour tout $x \in \mathrm{adh}(K)$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $O \in \mathcal{O}(x)$ tel que

$$(u, v) \in (O \cap K) \times (O \cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

(ii) Si $x \in \mathrm{adh}(K)$ et f est localement bornée sur $\mathcal{V}_K(x)$ alors $\Omega_f^o(x) \neq \varnothing$ et

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = \sup_{O \in \Omega_f^o(x)} (\inf_{y \in O \cap K} f(y))$$

Autrement dit $\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*(f, x) = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists\ O \in \Omega_f^o(x) : t = \inf_{y \in O \cap K} f(y)\}$$

(iii) Si $x \in \mathrm{adh}(K)$ et f est localement bornée sur $\mathcal{V}_K(x)$, pour que $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f > \lambda$$

il faut et il suffit qu'il existe $O \in \Omega_f^o(x)$ tel que

$$\inf_{y \in O \cap K} f(y) > \lambda$$

(iv) Si $x \in \mathrm{adh}(K)$ et f est localement bornée sur $\mathcal{V}_K(x)$ alors $\Omega_f^o(x) \neq \varnothing$ et

$$\limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f = \inf_{O \in \Omega_f^o(x)} (\sup_{y \in O \cap K} f(y))$$

Autrement dit $\limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda^*(f, x) = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists\ O \in \Omega_f^o(x) : t = \sup_{y \in O \cap K} f(y)\}$$

(v) Si $x \in \mathrm{adh}(K)$ et f est localement bornée sur $\mathcal{V}_K(x)$, pour que $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie

$$\limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f < \lambda$$

il faut et il suffit qu'il existe $O \in \Omega_f^o(x)$ tel que

$$\sup_{y \in O \cap K} f(y) < \lambda$$

(vi) Si pour tout $x \in \mathrm{adh}(K)$ l'application f est localement bornée sur $\mathcal{V}_K(x)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$U_*(\lambda) = \{x \in \mathrm{adh}(K) / \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f > \lambda\}$$

est $\imath(\mathrm{adh}(K), \mathcal{T})$-ouvert

(vii) Si pour tout $x \in \mathrm{adh}(K)$ l'application f est localement bornée sur $\mathcal{V}_K(x)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$U^*(\lambda) = \{x \in \mathrm{adh}(K) / \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f < \lambda\}$$

est $\imath(\mathrm{adh}(K), \mathcal{T})$-ouvert

(viii) Une condition nécessaire et suffisante pour que f admette un prolongement continu à $\mathrm{adh}(K)$ est que pour tout $x \in \mathrm{adh}(K)$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $O \in \mathcal{O}(x)$ tel que

$$(u, v) \in (O \cap K) \times (O \cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon \tag{10.130}$$

Preuve

(i)

Soit g un prolongement continu de f à $\mathrm{adh}(K)$,

1. puisque g est continue sur $\mathrm{adh}(K)$, pour tout $x \in \mathrm{adh}(K)$ l'application g est localement bornée sur le filtre
$$\mathcal{V}_{\mathrm{adh}(K)}(x) = \{V \in \mathcal{P}(\mathrm{adh}(K)) / \exists\, O \in \mathcal{O}(x) : O \cap \mathrm{adh}(K) \subset V\}$$
ainsi il existe $O \in \mathcal{O}(x)$ et $m \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$u \in O \cap \mathrm{adh}(K) \Rightarrow |g(u)| \leq m$$
en particulier puisque pour tout $u \in K$ on a $g(u) = f(u)$ on obtient
$$u \in O \cap K \Rightarrow |f(u)| \leq m\ .$$
ce qui montre que pour tout $x \in \mathrm{adh}(K)$ l'application f est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_K(x)$.
2. d'après le point (ii) du lemme [10.36] page 812 (voir (10.125) page 812) pour tout $x \in \mathrm{adh}(K)$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $O \in \mathcal{O}(x)$ tel que
$$(u, v) \in (O \cap \mathrm{adh}(K)) \times (O \cap \mathrm{adh}(K)) \Rightarrow |g(u) - g(v)| < \varepsilon$$
en particulier puisque pour tout $u \in K$ on a $g(u) = f(u)$ on obtient
$$(u, v) \in (O \cap K) \times (O \cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

(ii)

I preuve de $x \in \mathrm{adh}(K) \Rightarrow \Omega_f^o(x) \neq \varnothing$

Puisque f est localement bornée sur $\mathcal{V}_K(x)$ il existe $\omega \in \mathcal{V}_K(x)$ sur lequel f est bornée, et puisque $\omega \in \mathcal{V}_K(x)$ il existe $O \in \mathcal{O}(x)$ tel que $O \cap K \subset \omega$, un tel ouvert appartient à $\Omega_f^o(x)$.

II preuve de $x \in \mathrm{adh}(K) \Rightarrow \liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x)} f = \sup\limits_{O \in \Omega_f^o(x)} (\inf\limits_{y \in O \cap K} f(y))$

Il s'agit de vérifier que pour tout $x \in \mathrm{adh}(K)$ la borne supérieure de l'ensemble
$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\, \pi \in \Omega_f(x) : t = \inf_{y \in \pi} f(y)\}$$
est aussi la borne supérieure de l'ensemble $\Lambda_*(f, x)$.

α D'abord, puisque pour tout $O \in \Omega_f^o(x)$ on a $O \cap K \in \Omega_f(x)$ on obtient $\Lambda_*(f, x) \subset \Lambda_*$ par suite on a $\sup\{t : t \in \Lambda_*(f, x)\} \leq \sup\{t : t \in \Lambda_*\}$ et $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x)} f \geq \sup\{t : t \in \Lambda_*(f, x)\}$.

β Ensuite on montre que tout élément de Λ_* est majoré par un élément de $\Lambda_*(f, x)$.

En effet, si $\pi \in \Omega_f(x)$ et $t = \inf\limits_{y \in \pi} f(y)$ alors $\pi \in \mathcal{V}_K(x)$, ainsi il existe $O \in \mathcal{O}(x)$ tel que $O \cap K \subset \pi$, puisque $\pi \in \Omega_f(x)$ on a $O \in \Omega_f^o(x)$ et le réel $s = \inf\limits_{y \in O \cap K} f(y)$ est un élément de $\Lambda_*(f, x)$ qui majore $t = \inf\limits_{y \in \pi} f(y)$. Par suite tout majorant de $\Lambda_*(f, x)$ est un majorant de Λ_* et on obtient $\sup\{t : t \in \Lambda_*(f, x))\} \geq \sup\{t : t \in \Lambda_*\}$. Ce qui montre que $\sup\limits_{O \in \Omega_f^o(x)} (\inf\limits_{y \in O \cap K} f(y)) \geq \liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x)} f$

(iii)

Soit $x \in \mathrm{adh}(K)$, si $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x)} f > \lambda$ alors (d'après (ii)) λ n'est pas un majorant de $\Lambda_*(f, x)$ ainsi il existe $O \in \Omega_f^o(x)$ tel que

$$\inf_{y \in O \cap K} f(y) > \lambda \ .$$

(iv)

D'après le point (ii) pour tout $x \in \mathrm{adh}(K)$ on a $\Omega_f^o(x) \neq \varnothing$ il suffit donc de montrer

$$x \in \mathrm{adh}(K) \Rightarrow \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f = \inf_{O \in \Omega_f^o(x)} (\sup_{y \in O \cap K} f(y))$$

Il s'agit de vérifier que pour tout $x \in \mathrm{adh}(K)$ la borne inférieure de l'ensemble

$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R} / \exists\ \pi \in \Omega_f(x) : t = \sup_{y \in \pi} f(y)\}$$

est aussi la borne inférieure de l'ensemble $\Lambda^*(f, x)$.

α D'abord, puisque pour tout $O \in \Omega_f^o(x)$ on a $O \cap K \in \Omega_f(x)$ on obtient $\Lambda^*(f, x) \subset \Lambda^*$ par suite on a $\inf\{t : t \in \Lambda^*(f, x)\} \geq \inf\{t : t \in \Lambda^*\}$ et $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq \inf\{t : t \in \Lambda^*(f, x)\}$.

β Ensuite on montre que tout élément de Λ^* est minoré par un élément de $\Lambda^*(f, x)$.

En effet, si $\pi \in \Omega_f(x)$ et $t = \sup\limits_{y \in \pi} f(y)$ alors $\pi \in \mathcal{V}_K(x)$, ainsi il existe $O \in \mathcal{O}(x)$ tel que $O \cap K \subset \pi$, puisque $\pi \in \Omega_f(x)$ on a $O \in \Omega_f^o(x)$ et le réel $s = \sup\limits_{y \in O \cap K} f(y)$ est un élément de $\Lambda^*(f, x)$ qui minore $t = \sup\limits_{y \in \pi} f(y)$. Par suite tout minorant de $\Lambda^*(f, x)$ est un minorant de Λ^* et on obtient $\inf\{t : t \in \Lambda_*(f, x))\} \leq \inf\{t : t \in \Lambda_*\}$. Ce qui montre que $\inf\limits_{O \in \Omega_f^o(x)} (\sup\limits_{y \in O \cap K} f(y)) \leq \liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x)} f$

(v)

Si $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x)} f < \lambda$ alors d'après (iv) λ n'est pas un minorant de l'ensemble $\Lambda^*(f, x)$ par suite il existe $O \in \Omega_f^o(x)$ tel que

$$\sup_{y \in O \cap K} f(y) < \lambda \ .$$

(vi)

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in U_*(\lambda)$ il existe $O \in \mathcal{O}(x)$ tel que

$$O \cap \mathrm{adh}(K) \subset U_*(\lambda) \ .$$

Or, si $x \in U_*(\lambda)$, le point (iii) montre qu'il existe $O_x \in \Omega_f^o(x)$ tel que

$$\inf_{u \in O_x \cap K} f(u) > \lambda$$

on montre que $O_x \cap \mathrm{adh}(K) \subset U_*(\lambda)$. En effet si $y \in O_x \cap \mathrm{adh}(K)$ alors

— puisque $y \in O_x$ on a $O_x \in \mathcal{O}(y)$

— puisque f est bornée sur $O_x \cap K$ on a $O_x \in \Omega_f^o(y)$

Ainsi le point (ii) montre que

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(y)} f \geq \inf_{u \in O_x \cap K} f(u) > \lambda$$

et $O_x \cap \mathrm{adh}(K) \subset U_*(\lambda)$.

(vii)

Il s'agit de montrer que pour tout $x \in U^*(\lambda)$ il existe $O \in \mathcal{O}(x)$ tel que

$$O \cap \text{adh}(K) \subset U^*(\lambda) \; .$$

Or, si $x \in U^*(\lambda)$, le point (v) montre qu'il existe $O_x \in \Omega^o_f(x)$ tel que

$$\sup_{u \in O_x \cap K} f(u) < \lambda$$

on montre que $O_x \cap \text{adh}(K) \subset U^*(\lambda)$. En effet si $y \in O_x \cap \text{adh}(K)$ alors
- — puisque $y \in O_x$ on a $O_x \in \mathcal{O}(y)$
- — puisque f est bornée sur $O_x \cap K$ on a $O_x \in \Omega^o_f(y)$

Ainsi le point (iv) montre que

$$\limsup_{\mathcal{V}_K(y)} f \leq \sup_{u \in O_x \cap K} f(u) < \lambda$$

et $O_x \cap \text{adh}(K) \subset U^*(\lambda)$.

$(viii)$

La nécessité de la condition est prouvée en (i) . Pour voir que la condition (10.130) page 819 est suffisante on montre successivement que cette condition entraîne les points suivants :

1. pour tout $x \in \text{adh}(K)$ l'application f est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_K(x)$
2. pour tout $x \in \text{adh}(K)$ on a
$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$$
3. l'application $g : \text{adh}(K) \mapsto \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f$$
est un prolongement continu de f à $\text{adh}(K)$.

1. <u>On montre que pour tout $x \in \text{adh}(K)$ l'application f est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_K(x)$.</u>

   En effet (10.130) page 819 entraîne qu'il existe $O \in \mathcal{O}(x)$ tel que
$$(u,v) \in (O \cap K) \times (O \cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < 1$$
   Ainsi pour tout $v \in O \cap K$ on a
$$u \in O \cap K \Rightarrow |f(u)| < |f(v)| + 1$$
   et $O \cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x)$ sur lequel f est bornée.
2. <u>On montre que pour tout $x \in \text{adh}(K)$ l'égalité $\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$ est vérifiée .</u>

   Il suffit de voir que pour tout $x \in \text{adh}(K)$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$
$$\limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f + \varepsilon$$
   Or si $x \in \text{adh}(K)$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ la condition (10.130) page 819 entraîne qu'il existe $O \in \mathcal{O}(x)$ tel que
$$(u,v) \in (O \cap K) \times (O \cap K) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$
   ainsi l'ensemble $\omega = O \cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x)$ qui vérifie
   — $\omega \in \Omega_f(x)$ puisque si $y \in \omega$ on a $u \in \omega \Rightarrow |f(u)| < |f(y)| + \varepsilon$
   — pour tout $v \in \omega$ on a $\sup_{u \in \omega} f(u) \leq f(v) + \varepsilon$ puisque $u \in \omega \Rightarrow f(u) < f(v) + \varepsilon$

— $\inf\limits_{v\in\omega} f(v) \geq \sup\limits_{u\in\omega} f(u) - \varepsilon$ puisque $v \in \omega \Rightarrow f(v) > \sup\limits_{u\in\omega} f(u) - \varepsilon$

par suite

$$\limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f \leq \sup_{u\in\omega} f(u) \leq \inf_{v\in\omega} f(v) + \varepsilon \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f + \varepsilon \ .$$

3. l'application $g : \mathrm{adh}(K) \mapsto \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x)} f$ est un prolongement continu de f à $\mathrm{adh}(K)$.

I D'abord on montre que g est continue sur $\mathrm{adh}(K)$.

D'après le point (i) du lemme [10.36] page 812 il suffit de montrer que l'image réciproque de tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est $\imath(\mathrm{adh}(K), \mathcal{T})$-ouverte. Soit I un intervalle ouvert :

— si $I = \mathbb{R}$ alors $g^{-1}(I) = \mathrm{adh}(K)$

— si I est minoré et non majoré alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $I =]\lambda\ , \rightarrow[$ par suite

$$g^{-1}(I) = \{x \in \mathrm{adh}(K) / \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f > \lambda\}$$

et (vi) montre que cet ensemble est $\imath(\mathrm{adh}(K), \mathcal{T})$-ouvert

— si I est majoré et non minoré alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $I =]\leftarrow, \lambda[$ par suite

$$g^{-1}(I) = \{x \in \mathrm{adh}(K) / \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f < \lambda\}$$

mais d'après 2 on a aussi $g(x) = \limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x)} f$ par suite

$$g^{-1}(I) = \{x \in \mathrm{adh}(K) / \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f < \lambda\}$$

et (vii) montre que cet ensemble est $\imath(\mathrm{adh}(K), \mathcal{T})$-ouvert

— si $I =]\lambda\ ,\ \mu[$ est borné alors

$$g^{-1}(I) = \{x \in \mathrm{adh}(K) / g(x) > \lambda\} \cap \{x \in \mathrm{adh}(K) / g(x) < \mu\}$$

est l'intersection de deux ensembles $\imath(\mathrm{adh}(K), \mathcal{T})$-ouverts.

Ce qui montre que g est continue sur $\mathrm{adh}(K)$.

■

On montre « à la main » les deux théorèmes de base concernant les applications continues sur des sous-ensembles de réels qui s'énoncent grosso-modo

— l'image d'un fermé borné par une application continue est un fermé borné.

— l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

10.9.4 *Deux théorèmes de base sur la continuité*

I *Applications continues sur les fermés bornés d'un corps de réels .*

Si K est un sous-ensemble d'un corps de réels $\mathbb{R}$ et si on applique bêtement le théorème [10.6] page 757 à l'application $id_K \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ définie par

$$id_K(x) = x$$

alors, pour tout filtre Φ sur K dire que id_K est localement borné sur Φ, c'est dire que Φ contient un ensemble borné par suite si $\Omega(\Phi)$ est la famille des éléments bornés de Φ et $\Omega(\Phi) \neq \varnothing$ on a

$$\liminf_{\Phi} id_K = \sup_{\pi\in\Omega(\Phi)} (\inf_{x\in\pi} x) \quad \text{et} \quad \limsup_{\Phi} id_K = \inf_{\pi\in\Omega(\Phi)} (\sup_{x\in\pi} x)$$

De plus on sait que

$$\sup_{\pi\in\Omega(\Phi)}(\inf_{x\in\pi} x) = \min\{t : t \in \bigcap_{\pi\in\Omega(\Phi)} \mathrm{adh}(\pi)\} \quad \text{et} \quad \inf_{\pi\in\Omega(\Phi)}(\sup_{x\in\pi} x) = \max\{t : t \in \bigcap_{\pi\in\Omega(\Phi)} \mathrm{adh}(\pi)\}$$

par suite si K est fermé on a $\sup_{\pi\in\Omega(\Phi)}(\inf_{x\in\pi} x) \in K$ et $\inf_{\pi\in\Omega(\Phi)}(\sup_{x\in\pi} x) \in K$. En particulier lorsque K est fermé et borné on a un boulevard permettant d'appliquer les théorèmes [10.6] (page 757) à [10.8] (page 770)

Théorème 10.9 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *qui est* ***fermé*** *et* ***borné****, on note de plus* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\ \mathbb{R})$ *est une application continue de* K *dans* $\mathbb{R}$*.*

(i) Tout sous-ensemble A *de* K *possède une borne inférieure et supérieure qui sont notées respectivement*

$$\inf_{x\in A} x \quad \text{et} \quad \sup_{x\in A} x$$

de plus pour tout $A \in \mathcal{P}(K)$ *on a*

$$\inf_{x\in A} x \in K \quad \text{et} \quad \sup_{x\in A} x \in K$$

(ii) Si Φ *est un filtre sur* K *alors*

1. *tout élément* π *de* Φ *possède une borne inférieure et supérieure qui sont notées respectivement*

$$\inf_{x\in\pi} x \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\pi} x$$

   de plus pour tout $\pi \in \Phi$ *on a*

$$\inf_{x\in\pi} x \in K \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\pi} x \in K$$

2. *l'ensemble*

$$\Lambda_* = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ \pi \in \Phi : t = \inf_{x\in\pi} x\}$$

   est un sous-ensemble de K *qui possède une borne supérieure qu'on note indifféremment*

$$l_*(\Phi) = \sup_{\pi\in\Phi}(\inf_{x\in\pi} x) = \sup\{t : t \in \Lambda_*\}$$

3. $l_*(\Phi) \in K$ *et* $l_*(\Phi)$ *est le plus petit élément de l'ensemble* $\bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)$ *:*

$$l_*(\Phi) = \min\{t : t \in \bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)\}$$

   En particulier $\bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi) \neq \varnothing$*.*

4. *l'ensemble*

$$\Lambda^* = \{t \in \mathbb{R}/\ \exists\ \pi \in \Phi : t = \sup_{x\in\pi} x\}$$

   est un sous-ensemble de K *qui possède une borne inférieure qu'on note indifféremment*

$$l^*(\Phi) = \inf_{\pi\in\Phi}(\sup_{x\in\pi} x) = \inf\{t : t \in \Lambda^*\}$$

5. $l^*(\Phi) \in K$ *et* $l^*(\Phi)$ *est le plus grand élément de l'ensemble* $\bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)$ *:*

$$l^*(\Phi) = \max\{t : t \in \bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)\}$$

(iii) Pour toute suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ *l'ensemble* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(u([n, \rightarrow [)$ *est non vide*

(iv) Pour toute suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ *il existe une sous-suite de* u *qui converge vers un point de* K *: il existe une application* $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ *telle que*

1. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) \geq n$
2. *la suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ *définie par* $y_n = u_{\varphi(n)}$ *converge vers un point de* K*.*

(v) Pour toute suite $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, f(K))$ *il existe une sous-suite de* x *qui converge vers un point de* $f(K)$ *: il existe une application* $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ *telle que*

1. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) \geq n$
2. *la suite* $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, f(K))$ *définie par* $y_n = x_{\varphi(n)}$ *converge vers un point de* $f(K)$*.*

(vi) l'ensemble $f(K)$ *est fermé.*

(vii) l'ensemble $f(K)$ *est borné*

(viii) il existe $x_0 \in K$ *et* $x_1 \in K$ *tels que*

$$f(x_0) = \inf_{y\in K} f(y) \quad \text{et} \quad f(x_1) = \sup_{y\in K} f(y)\ .$$

Preuve

(i)

puisque K est borné tout sous-ensemble de K est borné ainsi la définition d'un corps de réels entraîne que tout sous-ensemble A de K possède une borne inférieure et supérieure. Il reste à voir que $\inf_{x\in A} x \in K$ et $\sup_{x\in A} x \in K$. K étant fermé par hypothèse il suffit de montrer $\inf_{x\in A} x \in \mathrm{adh}(K)$ et $\sup_{x\in A} x \in \mathrm{adh}(K)$, le point (ii) du lemme [10.13] page 677 montre qu'il suffit de vérifier que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$]\inf_{x\in A} x - \varepsilon\ ,\ \inf_{x\in A} x + \varepsilon[\cap K \neq \varnothing \quad \text{et} \quad]\sup_{x\in A} x - \varepsilon\ ,\ \sup_{x\in A} x + \varepsilon[\cap K \neq \varnothing$$

Or,

- puisque $\inf_{x\in A} x$ est le plus grand minorant de A le réel $\inf_{x\in A} x + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A ainsi il existe $y \in A$ tel que $\inf_{x\in A} x \leq y < \inf_{x\in A} x + \varepsilon$ et tout élément de A vérifiant cette inégalité appartient à $]\inf_{x\in A} x - \varepsilon\ ,\ \inf_{x\in A} x + \varepsilon[\cap K$
- puisque $\sup_{x\in A} x$ est le plus petit majorant de A le réel $\sup_{x\in A} x - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A ainsi il existe $y \in A$ tel que $\sup_{x\in A} x - \varepsilon < y \leq \sup_{x\in A} x$ et tout élément de A vérifiant cette inégalité appartient à $]\sup_{x\in A} x - \varepsilon\ ,\ \sup_{x\in A} x + \varepsilon[\cap K$

(ii)

Soit Φ un filtre sur K :

1. puisque tout élément de Φ est un sous-ensemble de K le point *(ii)1* est une conséquence directe du point (i).
2. D'après *1* pour tout $\pi \in \Phi$ on a $\inf_{x\in\pi} x \in K$ par suite Λ_* est un sous-ensemble de K, ainsi (i) montre qu'il possède une borne supérieure

3. puisque $l_*(\Phi)$ est la borne supérieure d'un sous-ensemble de K le point (i) montre que $l_*(\Phi) \in K$. On montre que
$$l_*(\Phi) = \min\{t : t \in \bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)\}$$

   (a) <u>D'abord on montre que $l_*(\Phi) \in \bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)$</u>

   D'après le lemme [10.13] page 677 il faut montrer que pour tout $\pi \in \Phi$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
$$]l_*(\Phi) - \varepsilon\ ,\ l_*(\Phi) + \varepsilon[\cap \pi \neq \varnothing\ .$$

   Or si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
   — puisque $l_*(\Phi)$ est le plus petit majorant de Λ_* le réel $l_*(\Phi) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de Λ_* et il existe $\omega_\varepsilon \in \Phi$ tel que
$$\inf_{x\in\omega_\varepsilon} x > l_*(\Phi) - \varepsilon$$
   ainsi pour tout $\pi \in \Phi$ on obtient, puisque $\pi \cap \omega_\varepsilon \in \Phi$
$$l_*(\Phi) - \varepsilon < \inf_{x\in\omega_\varepsilon} x \leq \inf_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} x \leq l_*(\Phi)$$
   et
$$l_*(\Phi) - \varepsilon < \inf_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} x \leq l_*(\Phi) \tag{10.131}$$
   — puisque par définition le réel $\inf_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} x$ est le plus grand minorant de l'ensemble $\pi \cap \omega_\varepsilon$ il existe $x_0 \in \pi\cap\omega_\varepsilon$ tel que $\inf_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} x \leq x_0 < \inf_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} x + \varepsilon$ et (10.131) page 826 montre que
$$x_0 \in]l_*(\Phi) - \varepsilon\ ,\ l_*(\Phi) + \varepsilon[\cap \pi$$

   (b) <u>Ensuite on montre que $l_*(\Phi)$ est un minorant de $\bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)$</u>

   Si $a \in \bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\pi \in \Phi$
$$]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap \pi \neq \varnothing$$
   cela montre que pour tout $\pi \in \Phi$ on a
$$\inf_{x\in\pi} x < a + \varepsilon$$
   en effet, si $t \in]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap \pi$ alors puisque $t < a + \varepsilon$ et $t \in \pi$
$$\inf_{x\in\pi} x \leq t < a + \varepsilon$$
   ainsi $a + \varepsilon$ est un majorant strict de Λ_* et par définition $l_*(\Phi)$ est le plus petit majorant de cet ensemble, par suite
$$l_*(\Phi) < a + \varepsilon$$
   cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient
$$l_*(\Phi) \leq a\ .$$

4. D'après *1* pour tout $\pi \in \Phi$ on a $\sup_{x\in\pi} x \in K$ par suite Λ^* est un sous-ensemble de K, ainsi (i) montre qu'il possède une borne inférieure

5. puisque $l^*(\Phi)$ est la borne inférieure d'un sous-ensemble de K le point (i) montre que $l^*(\Phi) \in K$. On montre que
$$l^*(\Phi) = \max\{t : t \in \bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)\}$$

   (a) <u>D'abord on montre que $l^*(\Phi) \in \bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)$</u>

   D'après le lemme [10.13] page 677 il faut montrer que pour tout $\pi \in \Phi$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
$$]l^*(\Phi) - \varepsilon\ ,\ l^*(\Phi) + \varepsilon[\cap \pi \neq \varnothing\ .$$

   Or si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
   — puisque $l^*(\Phi)$ est le plus grand minorant de Λ^* le réel $l^*(\Phi) + \varepsilon$ n'est pas un minorant de Λ^* et il existe $\omega_\varepsilon \in \Phi$ tel que
$$\sup_{x\in\omega_\varepsilon} x < l^*(\Phi) + \varepsilon$$
   ainsi pour tout $\pi \in \Phi$ on obtient, puisque $\pi \cap \omega_\varepsilon \in \Phi$
$$l^*(\Phi) \leq \sup_{x\in\omega_\varepsilon\cap\pi} x \leq \sup_{x\in\omega_\varepsilon} x < l^*(\Phi) + \varepsilon$$
   et
$$l^*(\Phi) \leq \sup_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} x < l^*(\Phi) + \varepsilon \tag{10.132}$$
   — puisque par définition le réel $\sup_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} x$ est le plus petit majorant de l'ensemble $\pi \cap \omega_\varepsilon$ il existe $x_0 \in \pi \cap \omega_\varepsilon$ tel que $\sup_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} x - \varepsilon < x_0 \leq \sup_{x\in\pi\cap\omega_\varepsilon} x$ et (10.132) page 827 montre que
$$x_0 \in]l^*(\Phi) - \varepsilon\ ,\ l^*(\Phi) + \varepsilon[\cap \pi$$

   (b) <u>Ensuite on montre que $l^*(\Phi)$ est un majorant de $\bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)$</u>

   Si $a \in \bigcap_{\pi\in\Phi} \mathrm{adh}(\pi)$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\pi \in \Phi$
$$]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap \pi \neq \varnothing$$
   cela montre que pour tout $\pi \in \Phi$ on a
$$\sup_{x\in\pi} x > a - \varepsilon$$
   en effet, si $t \in]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap \pi$ alors puisque $t > a - \varepsilon$ et $t \in \pi$
$$\sup_{x\in\pi} x \geq t > a - \varepsilon$$
   ainsi $a - \varepsilon$ est un minorant strict de Λ^* et par définition $l^*(\Phi)$ est le plus grand minorant de cet ensemble, par suite
$$l^*(\Phi) > a - \varepsilon$$
   cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient
$$l^*(\Phi) \geq a\ .$$

$$(iii)$$

Si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ on considère le sous-ensemble de $\mathcal{P}(K)$ défini par

$$\Phi(u) = \{\pi \in \mathcal{P}(K)/ \ \exists \ n \in \mathbb{N} : u([n, \rightarrow [) \subset \pi\}$$

et on montre que $\Phi(u)$ est un filtre sur K

1. $\varnothing \notin \Phi(u)$ puisque pour tout $\pi \in \Phi(u)$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in \pi$.
2. si $(\pi, A) \in \Phi(u) \times \mathcal{P}(K)$ et $\pi \subset A$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$u([n, \rightarrow [) \subset \pi \subset A$$

   par suite $A \in \Phi(u)$
3. si $(\pi, \omega) \in \Phi(u) \times \Phi(u)$ alors il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $u([p, \rightarrow [) \subset \pi$ et $u([q, \rightarrow [) \subset \omega$ par suite

$$u([\max\{p, q\}, \rightarrow [) \subset \pi \cap \omega$$

   et $\pi \cap \omega \in \Phi(u)$.

Ainsi (ii) montre que $\bigcap\limits_{\pi \in \Phi(u)} \mathrm{adh}(\pi) \neq \varnothing$, or puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u([n, \rightarrow [) \in \Phi(u)$ on obtient $\bigcap\limits_{\pi \in \Phi} \mathrm{adh}(\pi) \subset \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(u[n, \rightarrow [)$ (on peut vérifier que ces ensembles sont égaux mais ceci est inutile) par suite

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(u[n, \rightarrow [) \neq \varnothing \ .$$

$$(iv)$$

Si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ alors (iii) montre que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(u[n, \rightarrow [) \neq \varnothing \ .$$

On montre que pour tout $y \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{adh}(u[n, \rightarrow [)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ le sous-ensemble A_n de $\mathbb{N}$ défini par

$$A_n = \{k \in [n, \rightarrow [/ \ |u_k - y| \leq \frac{1}{n+1}\}$$

est non vide. En effet , puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $y \in \mathrm{adh}(u([n, \rightarrow [))$ le lemme [10.13] page 677 montre que

$$]y - \frac{1}{n+1} \ , \ y + \frac{1}{n+1}[\cap u([n, \rightarrow [) \neq \varnothing$$

mais si $v \in]y - \frac{1}{n+1} \ , \ y + \frac{1}{n+1}[\cap u([n, \rightarrow [)$ alors

— puisque $v \in u([n, \rightarrow [)$ il existe $k \geq n$ tel que $v = u_k$

— puisque $v \in]y - \frac{1}{n+1} \ , \ y + \frac{1}{n+1}[$ on a $|u_k - y| < \frac{1}{n+1}$

par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n \neq \varnothing$ et si φ est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\varphi(n) = \min\{k : k \in A_n\}$$

alors

1. $\varphi(n) \geq n$ puisque $\varphi(n) \in A_n$
2. $|u_{\varphi(n)} - y| \leq \dfrac{1}{n+1}$ ce qui montre que la suite $u_{\varphi(n)}$ converge vers y.

(v)

Si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, f(K))$ alors par hypothèse pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $f^{-1}(x_n) = \{y \in K/f(y) = x_n\}$ est non vide. Ainsi l'axiome du choix entraîne que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(x_n) = \{u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)/f(u_n) = x_n\}$$

est non vide. Mais si $u \in \Pi$ il existe (d'après le point (iv)) une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \geq n$ et telle que la suite $y_n = u_{\varphi(n)}$ converge vers un point $y \in K$

— puisque $u_{\varphi(n)}$ tend vers y et f est continue le point (iii) du lemme [10.36] page 812 montre que

$$\lim_{n\to\infty} f(u_{\varphi(n)}) = f(y)$$

— puisque $f(u_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} f(u_{\varphi(n)}) = f(y)$$

— puisque $y \in K$ on a

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} \in f(K) \ .$$

(vi)

Il suffit de montrer que $\mathrm{adh}(f(K)) \subset f(K)$. Or si $t \in \mathrm{adh}(f(K))$ il existe d'après le lemme [10.13] page 677 une suite $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, f(K))$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = t$. Mais d'après le point (v) il existe une sous-suite de x qui converge vers un point de $f(K)$, puisque toute sous-suite de x converge vers t on obtient $t \in f(K)$.

(vii)

I On montre que $f(K)$ est majoré.

En effet dans le cas contraire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $L_n^+ = \{x \in f(K)/x \geq n\}$ est non vide. Ainsi l'axiome du choix entraîne que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n\in\mathbb{N}} L_n^+ = \{u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, f(K))/ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n \in L_n^+\}$$

est non vide. Or (v) montre que pour tout $u \in \Pi$ il existe une application $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ telle que $\varphi(n) \geq n$ et $u_{\varphi(n)}$ converge, mais une telle suite n'est pas bornée puisque $u_{\varphi(n)} \geq \varphi(n) \geq n$, ainsi elle n'est pas convergente .

II On montre que $f(K)$ est minoré.

En effet dans le cas contraire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $L_n^- = \{x \in f(K)/x \leq -n\}$ est non vide. Ainsi l'axiome du choix entraîne que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n\in\mathbb{N}} L_n^- = \{u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, f(K))/ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n \in L_n^-\}$$

est non vide. Or (v) montre que pour tout $u \in \Pi$ il existe une application $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ telle que $\varphi(n) \geq n$ et $u_{\varphi(n)}$ converge, mais une telle suite n'est pas bornée puisque $u_{\varphi(n)} \leq -\varphi(n) \leq -n$, ainsi elle n'est pas convergente .

$(viii)$

Puisque $f(K)$ est fermé borné le point (i) montre que les bornes supérieure et inférieure de $f(K)$ sont des éléments de $f(K)$ par suite

$$\sup_{x\in K} f(x) \in f(K) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in K} f(x) \in f(K)$$

et il existe $(x_0, x_1) \in K \times K$ tel que

$$\inf_{x\in K} f(x) = f(x_0) \quad \text{et} \quad \sup_{x\in K} f(x) = f(x_1)$$

■

Le point (iv) qui dit que toute suite à valeurs dans un fermé borné de $\mathbb{R}$ possède une sous-suite convergente est le théorème de Bolzano-Weierstrass. On s'intéresse maintenant au théorème dit des valeurs intermédiaires.

Théorème 10.10 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K, \mathbb{R})$ *une application continue de* K *dans* $\mathbb{R}$*.*

(i) Si U *est un sous-ensemble de* $f(K)$ *qui est à la fois* $\imath(f(K)\ , \mathcal{T})$*-ouvert et* $\imath(f(K)\ , \mathcal{T})$*-fermé alors* $f^{-1}(U)$ *est* $\imath(K\ , \mathcal{T})$*-ouvert et* $\imath(K\ , \mathcal{T})$*-fermé.*

(ii) Pour tout intervalle $I \subset K$ *l'ensemble* $f(I)$ *est un intervalle.*

(iii) Pour tout intervalle fermé borné $I \subset K$ *l'ensemble* $f(I)$ *est fermé borné et*

$$f(I) = [\inf_{x\in I} f(x)\ ,\ \sup_{x\in I} f(x)]$$

Ainsi pour tout $t \in [\inf_{x\in I} f(x)\ ,\ \sup_{x\in I} f(x)]$ *il existe* $x \in I$ *tel que* $f(x) = t$*.*

Preuve

(i)

Si U est $\imath(f(K)\ , \mathcal{T})$-ouvert il existe $O_0 \in \mathcal{T}$ tel que $U = O_0 \cap f(K)$, de même puisque U est $\imath(f(K)\ , \mathcal{T})$-fermé il existe $O_1 \in \mathcal{T}$ tel que $U^c \cap f(K) = O_1 \cap f(K)$. Or :

1. d'abord d'après le point (i) du lemme [10.36] page 812 l'ensemble $f^{-1}(O_0)$ est $\imath(K\ , \mathcal{T})$-ouvert or

   $$f^{-1}(O_0) = f^{-1}(U)$$

   puisque $x \in f^{-1}(O_0) \Leftrightarrow f(x) \in O_0 \cap f(K) \Leftrightarrow f(x) \in U$ ce qui montre que $f^{-1}(U)$ est $\imath(K\ , \mathcal{T})$-ouvert

2. Ensuite on montre que $(f^{-1}(U))^c \cap K = f^{-1}(O_1)$.

   en effet si $x \in (f^{-1}(U))^c \cap K$ alors $x \notin f^{-1}(U)$ par suite $f(x) \notin U$ et $f(x) \in U^c \cap f(K) = O_1 \cap f(K)$ ce qui montre que

   $$(f^{-1}(U))^c \cap K \subset f^{-1}(O_1)$$

   d'autre part si $x \in f^{-1}(O_1)$ alors $x \in K$ et $f(x) \in O_1 \cap f(K)$ et puisque $O_1 \cap f(K) = U^c \cap f(K)$ on a $f(x) \notin U$ et $x \notin f^{-1}(U)$ ainsi on obtient

   $$f^{-1}(O_1) \subset (f^{-1}(U))^c \cap K$$

   Puisque d'après le point (i) du lemme [10.36] page 812 l'ensemble $f^{-1}(O_1)$ est $\imath(K\ , \mathcal{T})$-ouvert cela montre que $f^{-1}(U)$ est aussi $\imath(K\ , \mathcal{T})$-fermé .

(ii)

D'après le lemme [10.17] page 691 il suffit de montrer que $f(I)$ ne contient pas d'ensemble à la fois $\imath(f(I)\ , \mathcal{T})$ ouvert et fermé. Or si U est $\imath(f(I)\ , \mathcal{T})$ ouvert et fermé et g est la restriction de f à I alors g est continue et le point (i) montre alors que $g^{-1}(U)$ est $\imath(I\ , \mathcal{T})$ ouvert et fermé, ce qui contredit le fait que I est un intervalle (encore le lemme [10.17]).

(iii)

On note g la restriction de f à I . Il suffit de montrer que

$$g(I) = [\inf_{x \in I} g(x)\ ,\ \sup_{x \in I} g(x)]$$

Or :

1. Puisque g est continue sur I (voir lemme [10.36] page 812) et I est fermé boné le théorème [10.9] page 824 montre que $g(I)$ est fermé borné et que

$$\inf_{x \in I} g(x) \in g(I) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in I} g(x) \in g(I)$$

2. puisque I est un intervalle le point (ii) montre que $g(I)$ est un intervalle, ainsi :
   — puisque $\inf_{x \in I} g(x) \in g(I)$ et $\sup_{x \in I} g(x) \in g(I)$ on obtient

$$[\inf_{x \in I} g(x)\ ,\ \sup_{x \in I} g(x)] \subset g(I)$$

   — puisque $\inf_{x \in I} g(x)$ est un minorant de $g(I)$ et $\sup_{x \in I} g(x)$ un majorant de $g(I)$ on a

$$g(I) \subset [\inf_{x \in I} g(x)\ ,\ \sup_{x \in I} g(x)]$$

■

Le théorème [10.9] page 824 montre que si K est un fermé borné d'un corps de réels tout filtre Φ sur K possède un ≪ point adhérent ≫ au sens oû

$$\bigcap_{\pi \in \Phi} \mathrm{adh}(\pi) \neq \varnothing\ ,$$

Il est facile de voir que cette propriété est caractéristique des fermés bornés des corps de réels . Les propriétés permettant de caractériser les fermés bornés des corps de réels sont rentrées sous le terme de ≪ compacité ≫ sur les corps de réels.

10.10 *Compacité sur les corps de réels*

10.10.1 *Compacité et convergence de filtres*

La définition qui suit utilise les notations et résultats préliminaires sur la topologie induite (voir définition [10.19] page 684 , définition [10.20] page 687 , lemme [10.15] page 685 et lemme [10.16] page 687) .

Définition 10.57 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$*. Enfin* Φ *est un filtre sur* K*.*

1. *On dit que* Φ *possède des points adhérents pour la topologie* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$ *si*

$$\bigcap_{\pi \in \Phi} \mathrm{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T})) \neq \varnothing\ .$$

   Si $x \in \bigcap_{\pi \in \Phi} \mathrm{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T}))$ *on dit que* x *est* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-adhérent à* Φ*.*

2. *On dit qu'un réel* $l \in \mathrm{adh}(K)$ *est une limite de* Φ *pour la topologie* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$ *si*

$$\mathcal{V}_K(l) \subset \Phi\ .$$

D'après le lemme [10.16] page 687) on a

$$\operatorname{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T}))=\operatorname{adh}(\pi)\cap K$$

ainsi tout point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent à Φ est un point de K. Le théorème [10.9] page 824 montre que si K est un fermé borné de $\mathbb{R}$ alors tout filtre sur K possède un point adhérent, on montre maintenant la réciproque.

Définition 10.58 *On note $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ un corps de réels, $\mathcal{T}$ la topologie standard sur $\mathbb{R}$, un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ est dit* ***compact*** *si tout filtre sur K possède un point $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-adhérent.*

On montre qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est compact si et seulement si il est fermé et borné.

Théorème 10.11 *On note $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ un corps de réels, $\mathcal{T}$ la topologie standard sur $\mathbb{R}$, K un compact de $\mathbb{R}$*

(i) Si Φ est un filtre sur K et x est un point $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-adhérent à Φ alors $x\in K$

(ii) Si $t\in\operatorname{adh}(K)$ et y est un point $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-adhérent à $\mathcal{V}_K(t)$ alors $y=t$.

(iii) K est fermé.

(iv) K est majoré.

(v) K est minoré.

(vi) Pour qu'un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ soit compact il faut et il suffit qu'il soit fermé et borné.

Preuve

(i)

D'après le lemme [10.16] page 687 on a

$$\operatorname{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T}))=\operatorname{adh}(\pi)\cap K$$

en particulier pour tout $\pi\in\Phi$ on a $\operatorname{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T}))\subset K$ et

$$x\in\bigcap_{\pi\in\Phi}\operatorname{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T}))\Rightarrow x\in K\ .$$

(ii)

On montre

$$\bigcap_{\pi\in\mathcal{V}_K(t)}\operatorname{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T}))=\{t\}\quad\text{si}\quad t\in K$$

et

$$\bigcap_{\pi\in\mathcal{V}_K(t)}\operatorname{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T}))=\varnothing\quad\text{si}\quad t\notin K$$

1. <u>On montre $\{t\}^c\subset\bigcup_{\pi\in\mathcal{V}_K(t)}(\operatorname{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T})))^c$</u>

   Si $y\neq t$ et $\varepsilon=\dfrac{|t-y|}{4}$ Alors l'ensemble $\pi=]t-\varepsilon\ ,\ t+\varepsilon[\cap K$ est un élément de $\mathcal{V}_K(t)$ tel que $\pi\cap]y-\varepsilon\ ,\ y+\varepsilon[=\varnothing$. En effet si $u\in]t-\varepsilon\ ,\ t+\varepsilon[\cap]y-\varepsilon\ ,\ y+\varepsilon[$ alors

$$|y-t|\leq|y-u|+|u-t|\leq 2\varepsilon$$

et par construction $|y-t| > 2\varepsilon$. Par suite $y \notin \mathrm{adh}(\pi)$, $y \notin \mathrm{adh}(\pi) \cap K$ et $y \notin \mathrm{adh}(\pi\ ,\imath(K\ ,\mathcal{T}))$. Ceci montre que

$$\bigcap_{\pi \in \mathcal{V}_K(t)} \mathrm{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T})) \subset \{t\}\ .$$

en particulier si $t \notin K$ alors d'après (i)

$$\bigcap_{\pi \in \mathcal{V}_K(t)} \mathrm{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T})) = \varnothing\ .$$

2. On montre $t \in K \Rightarrow \{t\} = \displaystyle\bigcap_{\pi \in \mathcal{V}_K(t)} (\mathrm{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T}))$

   En effet si $t \in K$ alors pour tout $\pi \in \mathcal{V}_K(t)$ on a $t \in \pi$ par suite $t \in \mathrm{adh}(\pi) \cap K$ pour tout $\pi \in \mathcal{V}_K(t)$ ainsi t est un point $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-adhérent au filtre $\mathcal{V}_K(t)$, et 1 montre que c'est le seul point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent à ce filtre.

(iii)

Il s'agit de montrer $t \in \mathrm{adh}(K) \Rightarrow t \in K$. Or la compacité de K entraîne que pour tout $t \in \mathrm{adh}(K)$ le filtre $\mathcal{V}_K(t)$ possède un point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent et (ii) montre alors que ce point est t, (i) entraîne donc que $t \in K$.

(iv)

On montre que si K n'est pas majoré le sous-ensemble $\mathcal{V}_K(+\infty)$ de $\mathcal{P}(K)$ défini par

$$\mathcal{V}_K(+\infty) = \{V \in \mathcal{P}(K) / \ \exists\ \lambda \in \mathbb{R} : [\lambda\ , \rightarrow [\cap K \subset V\}$$

est un filtre sur K sans point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent.

1. $\varnothing \notin \mathcal{V}_K(+\infty)$, en effet puisque K n'est pas majoré pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $x \in K$ tel que $x \geq \lambda$ par suite pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $[\lambda\ , \rightarrow [\cap K \neq \varnothing$ ainsi tout élément de $\mathcal{V}_K(+\infty)$ contient un ensemble non vide.
2. si $(V, A) \in \mathcal{V}_K(+\infty) \times \mathcal{P}(K)$ et $V \subset A$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$[\lambda\ , \rightarrow [\cap K \subset V \subset A$$

   par suite $A \in \mathcal{V}_K(+\infty)$
3. si $(V_0, V_1) \in \mathcal{V}_K(+\infty) \times \mathcal{V}_K(+\infty)$ il existe $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que

$$[\lambda_0\ , \rightarrow [\cap K \subset V_0 \quad \text{et} \quad [\lambda_1\ , \rightarrow [\cap K \subset V_1$$

   ainsi

$$[\max\{\lambda_0\ , \lambda_1\}\ , \rightarrow [\cap K \subset V_0 \cap V_1$$

   et $V_0 \cap V_1 \in \mathcal{V}_K(+\infty)$.
4. enfin $\mathcal{V}_K(+\infty)$ n'a pas de point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent . En effet si x est un point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent à $\mathcal{V}_K(+\infty)$ alors
   — puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $[\lambda, \rightarrow [\cap K \in \mathcal{V}_K(+\infty)$ on obtient

$$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathrm{adh}([\lambda, \rightarrow [\cap K\ , \imath(K,\mathcal{T}))$$

   — puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{adh}([\lambda, \rightarrow [\cap K, \imath(K,\mathcal{T})) = [\lambda, \rightarrow [\cap K$$

   tout point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent à $\mathcal{V}_K(+\infty)$ vérifie

$$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x \geq \lambda$$

   or pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < x+1$

Ainsi $\mathcal{V}_K(+\infty)$ est sans point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent et un ensemble non majoré n'est pas compact.

(v)

On montre que si K n'est pas minoré le sous-ensemble $\mathcal{V}_K(-\infty)$ de $\mathcal{P}(K)$ défini par

$$\mathcal{V}_K(-\infty) = \{V \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ \lambda \in \mathbb{R} :] \leftarrow,\ \lambda] \cap K \subset V\}$$

est un filtre sur K sans point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent.

1. $\varnothing \notin \mathcal{V}_K(-\infty)$, en effet puisque K n'est pas minoré pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $x \in K$ tel que $x \leq \lambda$ par suite pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $] \leftarrow,\ \lambda] \cap K \neq \varnothing$ ainsi tout élément de $\mathcal{V}_K(-\infty)$ contient un ensemble non vide.
2. si $(V,A) \in \mathcal{V}_K(-\infty) \times \mathcal{P}(K)$ et $V \subset A$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$] \leftarrow,\ \lambda] \cap K \subset V \subset A$$
par suite $A \in \mathcal{V}_K(-\infty)$
3. si $(V_0,V_1) \in \mathcal{V}_K(-\infty) \times \mathcal{V}_K(-\infty)$ il existe $(\lambda_0,\lambda_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que
$$] \leftarrow,\ \lambda_0] \cap K \subset V_0 \quad \text{et} \quad] \leftarrow,\ \lambda_1] \cap K \subset V_1$$
ainsi
$$] \leftarrow,\ \min\{\lambda_0,\lambda_1\}] \cap K \subset V_0 \cap V_1$$
et $V_0 \cap V_1 \in \mathcal{V}_K(-\infty)$.
4. enfin $\mathcal{V}_K(-\infty)$ n'a pas de point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent . En effet si x est un point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent à $\mathcal{V}_K(-\infty)$ alors
   — puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $] \leftarrow,\ \lambda] \cap K \in \mathcal{V}_K(-\infty)$ on obtient
   $$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \text{adh}(] \leftarrow,\ \lambda] \cap K\ ,\imath(K,\mathcal{T}))$$
   — puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
   $$\text{adh}(] \leftarrow,\ \lambda] \cap K,\imath(K,\mathcal{T})) =] \leftarrow,\ \lambda] \cap K$$
   tout point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent à $\mathcal{V}_K(-\infty)$ vérifie
   $$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq \lambda$$
   or pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x > x-1$

   Ainsi $\mathcal{V}_K(-\infty)$ est sans point $\imath(K,\mathcal{T})$-adhérent et un ensemble non minoré n'est pas compact.

(vi)

D'une part la partie ≪ il faut ≫ provient des points (iii), (iv) et (v), d'autre part la partie ≪ il suffit ≫ provient du théorème [10.9] page 824 . ■

On caractérise aussi les fermé-bornés en termes de recouvrement

10.10.2 *Compacité et recouvrement ouvert*

I *Recouvrement ouvert d'ordre quelconque*

On introduit une définition.

Définition 10.59 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $K \subset \mathbb{R}$ *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *une famille de sous-ensembles de* $\mathbb{R}$*. Un sous-ensemble* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{E}$ *est appelé un* $\mathcal{E}$***-recouvrement*** *de* K *si*

$$\varnothing \notin \mathcal{R} \quad \text{et} \quad K \subset \bigcup_{A \in \mathcal{R}} A$$

Le théorème qui suit utilise la définition [10.24] page 693 d'une famille centrée

Théorème 10.12 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a *Toute sous-famille centrée de* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-fermés est d'intersection non vide : si*

$$\mathcal{F}_K = \{F \in \mathcal{P}(K)/\ F^c \cap K \in \imath(K\ ,\mathcal{T})\}$$

et si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_K$ *est centrée alors*

$$\bigcap_{F\in\mathcal{E}} F \neq \varnothing\ .$$

b *Si* $\mathcal{R}$ *est un* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*- recouvrement de* K *il existe un sous-ensemble fini* $\mathcal{R}'$ *de* $\mathcal{R}$ *tel que*

$$K = \bigcup_{U\in\mathcal{R}'} U$$

c *Si* $\mathcal{R}$ *est un* $\mathcal{T}$*- recouvrement de* K *il existe un sous-ensemble fini* $\mathcal{R}'$ *de* $\mathcal{R}$ *tel que*

$$K \subset \bigcup_{O\in\mathcal{R}'} O$$

d *Tout filtre sur* K *possède un point* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-adhérent .*

e K *est fermé et borné.*

Preuve D'après le théorème [10.11] page 832 on a d $\Leftrightarrow$ e il suffit donc de montrer

$$\text{a} \Rightarrow \text{b} \Rightarrow \text{c} \Rightarrow \text{d} \Rightarrow \text{a}$$

I preuve de a $\Rightarrow$ b

Soit $\mathcal{R}$ un $\imath(K,\mathcal{T})$-recouvrement de K , on montre que sous l'hypothèse a le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}_K$ défini par

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(K)/F^c \cap K \in \mathcal{R}\}$$

n'est pas centré. D'après a il suffit de montrer que

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing$$

ou encore

$$\mathbb{R} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F^c$$

or si $x \in \mathbb{R}$ alors

1. si $x \in K^c$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ on a $x \in F^c$ puisque $F \subset K$
2. si $x \in K$ alors puisque $\mathcal{R}$ est un $\imath(K\ ,\mathcal{T})$- recouvrement de K il existe $U \in \mathcal{R}$ tel que $x \in U$, l'ensemble $F = U^c \cap K$ est un élément de $\mathcal{F}$ vérifiant $F^c \cap K = U$ par suite $x \in F^c$

Ainsi $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing$, ceci montre que $\mathcal{F}$ n'est pas centrée puisque a entraîne que toute famille centrée de $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-fermé est d'intersection non vide. Il résulte du non centrage de $\mathcal{F}$ que pour tout ensemble d'entiers naturels $(\mathbb{N}, O)$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et une application $E \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{F})$ tel que

$$\bigcap_{k=0}^{n} E_k = \varnothing\ .$$

Si $U \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{P}(K))$ est l'application définie par

$$U_k = E_k^c \cap K$$

alors par définition de $\mathcal{F}$ l'ensemble $U(\mathbb{N}_n)$ est un sous-ensemble fini de $\mathcal{R}$ qui vérifie

$$\bigcup_{k=0}^{n} U_k = (\bigcap_{k=0}^{n} E_k)^c \cap K = K \ .$$

II preuve de b $\Rightarrow$ c

Soit $\mathcal{R}$ un $\mathcal{T}$-recouvrement de K alors l'ensemble

$$\mathcal{R}_K = \{U \in \mathcal{P}(K)/\ \exists\ O \in \mathcal{R} : U = O \cap K\}$$

est un $\imath(K\ , \mathcal{T})$-recouvrement de K, ainsi b entraîne qu'il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{R}'_K \subset \mathcal{R}_K$ tel que

$$K = \bigcup_{U \in \mathcal{R}'_K} U \ . \tag{10.133}$$

On va montrer que $\mathcal{R}'_K$ permet de choisir un sous-ensemble fini $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}$ tel que

$$K \subset \bigcup_{O \in \mathcal{R}'} O \ .$$

Considérons l'application L de $\mathcal{R}'_K$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(K))$ définie par

$$L_U = \{O \in \mathcal{R}/U = O \cap K\}$$

par définition de $\mathcal{R}_K$ pour tout $U \in \mathcal{R}'_K$ on a $L_U \neq \varnothing$ on va montrer que si h est une fonction de choix pour $\mathcal{P}(K)$ l'application φ de $\mathcal{R}'_K$ dans $\mathcal{R}$ définie par

$$\varphi(U) = h(L_U)$$

vérifie

1. l'ensemble $\mathcal{R}' = \varphi(\mathcal{R}'_K) = \mathrm{im}(\varphi) = \{O \in \mathcal{R}/\ \exists\ U \in \mathcal{R}'_K : O = \varphi(U)\}$ est fini
2. $$K \subset \bigcup_{O \in \mathcal{R}'} O$$

1. En tant qu'image d'un ensemble fini par une application $\mathcal{R}'$ est fini (voir le point (xi) du théorème [6.3] page 128)
2. Si $x \in K$ alors (10.133) page 836 permet d'affirmer qu'il existe $U \in \mathcal{R}'_K$ tel que $x \in U$, par suite $\varphi(U) \in \mathcal{R}'$ et puisque par construction $\varphi(U) \in L_U$ on a $U = \varphi(U) \cap K$ ce qui montre que $x \in \varphi(U)$ et
$$K \subset \bigcup_{O \in \mathcal{R}'} O \ .$$

III preuve de c $\Rightarrow$ d

Soit Φ un filtre sur K on montre que sous l'hypothèse c le sous-ensemble $\mathcal{O}(\Phi)$ de $\mathcal{T}$ défini par

$$\mathcal{O}(\Phi) = \{O \in \mathcal{T}/\ \ \exists\ \pi \in \Phi : O = (\mathrm{adh}(\pi))^c\}$$

n'est pas un recouvrement de K. En effet si $\mathcal{O}(\Phi)$ est un recouvrement de K alors c permet d'affirmer qu'il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}(\Phi)$ tel que

$$K \subset \bigcup_{O \in \mathcal{O}'} O$$

ainsi

$$K \cap \left(\bigcap_{O \in \mathcal{O}'} O^c \right) = \varnothing \ . \tag{10.134}$$

Si φ est l'application de $\mathcal{O}'$ dans $\mathcal{P}(K)$ définie par

$$\varphi(O) = O^c \cap K$$

on montre que l'ensemble $\varphi(\mathcal{O}')$ défini par

$$\varphi(\mathcal{O}') = \{\omega \in \mathcal{P}(K) / \ \exists \ O \in \mathcal{O}' : \omega = \varphi(O)\}$$

est une sous-famille finie de Φ d'intersection vide, ce qui donne une contradiction avec le fait que tout filtre est centré.

1. En tant qu'image d'un ensemble fini par une application $\varphi(\mathcal{O}')$ est fini (voir le point (xi) du théorème [6.3] page 128)
2. Si $\omega \in \varphi(\mathcal{O}')$ il existe $O \in \mathcal{O}(\Phi)$ tel que $\omega = O^c \cap K$, par définition de $\mathcal{O}(\Phi)$ il existe $\pi \in \Phi$ tel que $O = (\mathrm{adh}(\pi))^c$ par suite $\omega = (\mathrm{adh}(\pi)) \cap K$ contient π qui est un élément de Φ, ainsi $\omega \in \Phi$
3. Enfin on montre que $\displaystyle\bigcap_{\omega \in \varphi(\mathcal{O}')} \omega = \varnothing$. En effet si $x \in \displaystyle\bigcap_{\omega \in \varphi(\mathcal{O}')} \omega$ alors pour tout $O \in \mathcal{O}'$ on a $x \in O^c \cap K$ ce qui contredit l'égalité (10.134) page 837

Ainsi $\mathcal{O}(\Phi)$ n'est pas un recouvrement de K et

$$K \cap \bigcap_{O \in \mathcal{O}(\Phi)} O^c \neq \varnothing \ .$$

Il suffit donc de vérifier que tout point de cet ensemble est $\imath(K \ , \mathcal{T})$-adhérent à Φ. En d'autres termes il faut voir que pour tout $\pi \in \Phi$

$$K \cap \bigcap_{O \in \mathcal{O}(\Phi)} O^c \subset \mathrm{adh}(\pi \ , \imath(K, \mathcal{T}))$$

Or d'après le lemme [10.16] page 687 on a $\mathrm{adh}(\pi \ , \imath(K, \mathcal{T})) = \mathrm{adh}(\pi) \cap K$ ainsi il suffit de voir

$$\bigcap_{O \in \mathcal{O}(\Phi)} O^c \subset \mathrm{adh}(\pi)$$

or pour tout $\pi \in \Phi$ on a $(\mathrm{adh}(\pi))^c \in \mathcal{O}(\Phi)$ par suite

$$\bigcap_{O \in \mathcal{O}(\Phi)} O^c \subset ((\mathrm{adh}(\pi))^c)^c$$

et puisque $((\mathrm{adh}(\pi))^c)^c = \mathrm{adh}(\pi)$ on obtient

$$\bigcap_{O \in \mathcal{O}(\Phi)} O^c \subset \mathrm{adh}(\pi) \ .$$

IV preuve de d $\Rightarrow$ a

Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_K$ une famille centrée de $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-fermés, le point (iv) du lemme [10.18] page 694 montre qu'il existe un filtre sur K, $\Phi(\mathcal{E}_p)$ tel que $\mathcal{E} \subset \Phi(\mathcal{E}_p)$. L'hypothèse d entraîne que

$$\bigcap_{\pi \in \Phi(\mathcal{E}_p)} \operatorname{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T})) \neq \varnothing$$

or l'inclusion $\mathcal{E} \subset \Phi(\mathcal{E}_p)$ montre que

$$\bigcap_{\pi \in \Phi(\mathcal{E}_p)} \operatorname{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T})) \subset \bigcap_{E \in \mathcal{E}} \operatorname{adh}(E\ ,\imath(K,\mathcal{T}))$$

mais puisque chaque élément de $\mathcal{E}$ est $\imath(K\,\mathcal{T})$-fermé le point (i) du lemme [10.16] page 687 montre que pour tout $E \in \mathcal{E}$ on a $\operatorname{adh}(E\ ,\imath(K,\mathcal{T})) = E$ par suite

$$\bigcap_{\pi \in \Phi(\mathcal{E}_p)} \operatorname{adh}(\pi\ ,\imath(K,\mathcal{T})) \subset \bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$$

ce qui montre que $\mathcal{E}$ est d'intersection non vide. ■

Il résulte du fait que la topologie $\mathcal{T}$ est « à base dénombrable » qu'il suffit de vérifier le point c seulement pour les $\mathcal{T}$-recouvrement dénombrable pour voir qu'un ensemble est fermé-borné.

II *Recouvrement ouvert dénombrable*

Le théorème qui suit montre comment on passe du non-dénombrable au dénombrable.

Théorème 10.13 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathbb{Q}$ *son sous corps d'entiers rationnels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$.

(i) Si $(t,\varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $q \in \mathbb{Q}$ *tel que*

$$t \in]q - \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ q + \frac{\varepsilon}{2}[\quad \text{et} \quad]q - \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ q + \frac{\varepsilon}{2}[\subset]t - \varepsilon\ ,\ t + \varepsilon[$$

(ii) Il existe une application $E \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\mathcal{T})$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout ouvert non vide* $O \in \mathcal{T}$ *et* $x \in O$ *il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in E_k$ *et* $E_k \subset O$
2. *Pour tout ouvert non vide* $O \in \mathcal{T}$ *il existe un sous-ensemble* $D_O \subset \mathbb{N}$ *tel que*

$$O = \bigcup_{k \in D_0} E_k$$

3. *Pour tout sous-ensemble* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{T}$ *tel que* $\varnothing \notin \mathcal{R}$ *l'ensemble*

$$\Gamma = \{k \in \mathbb{N} /\ \exists\ O \in \mathcal{R} : E_k \subset O\}$$

vérifie

$$\bigcup_{k \in \Gamma} E_k = \bigcup_{O \in \mathcal{R}} O\ .$$

(iii) Pour tout sous-ensemble $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{T}$ *il existe un sous-ensemble au plus dénombrable* $\mathcal{R}_d$ *de* $\mathcal{R}$ *tel que*

$$\bigcup_{O \in \mathcal{R}_d} O = \bigcup_{O \in \mathcal{R}} O\ .$$

(iv) Si K *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a *Pour toute suite* $u \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K)$ *il existe une application* $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\varphi(n) \geq n$
2. *la suite* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K)$ *définie par* $x_n = u_{\varphi(n)}$ *converge vers un point de* K

b *Toute suite décroissante de* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-fermés non vide est d'intersection non vide. Cela signifie que si la suite* $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\mathcal{P}(K))$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. *por tout* $n \in \mathbb{N}$ $F_n \neq \varnothing$
2. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $F_n^c \cap K \in \imath(K\ ,\mathcal{T})$
3. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $F_{n+1} \subset F_n$

alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing\ .$$

c *Pour toute application* $O \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\mathcal{T})$ *vérifiant*

$$K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

il existe $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{n} O_k$$

d *Si* $\mathcal{R}$ *est un* $\mathcal{T}$*-recouvrement de* K *il existe un sous-ensemble fini* $\mathcal{R}'$ *de* $\mathcal{R}$ *tel que*

$$K \subset \bigcup_{O\in\mathcal{R}'} O$$

e K *est fermé et borné.*

Preuve

(i)

Soit $(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ d'après le point (vii) du lemme [10.13] page 677 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ainsi $\mathbb{Q}\cap]t-\frac{\varepsilon}{2}\ ,\ t+\frac{\varepsilon}{2}[\neq\varnothing$ mais tout rationnel de cet ensemble vérifie les propriétés voulues, en effet si $q\in\mathbb{Q}\cap]t-\frac{\varepsilon}{2}\ ,\ t+\frac{\varepsilon}{2}[$ alors

— puisque $|t-q|<\frac{\varepsilon}{2}$ on a $t\in]q-\frac{\varepsilon}{2}\ ,\ q+\frac{\varepsilon}{2}[$

— puisque $t<q+\frac{\varepsilon}{2}$ on a $t-\varepsilon<q-\frac{\varepsilon}{2}$ et puisque $t>q-\frac{\varepsilon}{2}$ on a $t+\varepsilon>q+\frac{\varepsilon}{2}$ ce qui montre que $]q-\frac{\varepsilon}{2}\ ,\ q+\frac{\varepsilon}{2}[\subset]t-\varepsilon\ ,\ t+\varepsilon[$.

(ii)

On considère l'application φ de $\mathbb{Q}\times\mathbb{N}$ dans $\mathcal{T}$ définie par

$$\varphi(q,n)=]q-\frac{1}{n+1}\ ,\ q+\frac{1}{n+1}[$$

α D'abord on montre que pour tout ouvert non vide $O\in\mathcal{T}$ et tout $x\in O$ il existe $(q,n)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}$ tel que $x\in\varphi(q,n)$ et $\varphi(q,n)\subset O$. Soit $O\in\mathcal{T}$ et $x\in O$, par le point (i) du lemme [10.13] page 677 il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O$. Ainsi pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ vérifiant $p\geq\frac{1}{\varepsilon}$ on a

$$]x-\frac{1}{p}\ ,\ x+\frac{1}{p}[\subset O$$

le point (i) montre alors qu'il existe $q\in\mathbb{Q}$ tel que $x\in]q-\frac{1}{2p}\ ,\ q+\frac{1}{2p}[$ avec de plus l'inclusion $]q-\frac{1}{2p}\ ,\ q+\frac{1}{2p}[\subset]x-\frac{1}{p}\ ,\ x+\frac{1}{p}[$ par suite $x\in\varphi(q,2p-1)$ et $\varphi(q,2p-1)\subset O$.

β Ensuite on montre que l'ensemble $\mathrm{im}(\varphi) = \{O \in \mathcal{T}/ \ \exists \ (q,n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N} : O = \varphi(q,n)\}$ est fini ou dénombrable. En effet le lemme [9.36] page 586 montre que $\mathbb{Q}$ est dénombrable ainsi une application directe du théorème [6.4] page 151 montre d'abord que $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ est dénombrable (voir le point (xi) du théorème [6.4]) et ensuite que $\mathrm{im}(\varphi)$ est fini ou dénombrable (voir le point (vi) du théorème [6.4])

γ Enfin on montre que l'ensemble $\mathrm{im}(\varphi) = \{O \in \mathcal{T}/ \ \exists \ (q,n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N} : O = \varphi(q,n)\}$ est dénombrable. D'après β il suffi de montrer que $\mathrm{im}(\varphi)$ n'est pas fini or l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{im}(\varphi)$ définie par $f(n) = \varphi(0,n) =]-\dfrac{1}{n+1} \ , \ \dfrac{1}{n+1}[$ est injective.

Ainsi $\mathrm{im}(\varphi)$ est dénombrable et il existe une bijection E de $\mathbb{N}$ dans $\mathrm{im}(\varphi)$. On montre que cette application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{T}$ possède les propriétés listées en (ii).

1. Si $O \in \mathcal{T}$ est un ouvert non vide et $x \in O$ d'après α il existe $(q,n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ tel que $x \in \varphi(q,n)$ et $\varphi(q,n) \subset O$, puisque E est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathrm{im}(\varphi)$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $E_k = \varphi(q,n)$ pour un tel k on obtient
$$x \in E_k \quad \text{et} \quad E_k \subset O \ .$$

2. Soit $O \in \mathcal{T}$ un ouvert non vide, on pose $D_O = \{k \in \mathbb{N}/E_k \subset O\}$ et on montre que
$$O = \bigcup_{k \in D_O} E_k$$

   (a) D'abord d'après *1* pour tout $x \in O$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_k$ et $E_k \subset O$ un tel k est un élément de D_O tel que $x \in E_k$ par suite
$$O \subset \bigcup_{k \in D_O} E_k$$

   (b) Ensuite puisque pour tout $k \in D_O$ on a $E_k \subset O$ on obtient
$$\bigcup_{k \in D_O} E_k \subset O \ .$$

3. On note $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{T}$ ne contenant pas l'ensemble vide et
$$\Gamma = \{k \in \mathbb{N}/ \ \exists \ O \in \mathcal{R} : E_k \subset O\} \ .$$

   (a) D'abord on montre que $\bigcup_{O \in \mathcal{R}} O \subset \bigcup_{k \in \Gamma} E_k$. En effet si $x \in \bigcup_{O \in \mathcal{R}} O$ il existe $O \in \mathcal{R}$ tel que $x \in O$ et *1* permet d'affirmer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_k$ et $E_k \subset O$ un tel k est un élément de Γ par suite $x \in \bigcup_{k \in \Gamma} E_k$

   (b) Ensuite on montre que $\bigcup_{k \in \Gamma} E_k \subset \bigcup_{O \in \mathcal{R}} O$, mais par définition de Γ pour tout $k \in \Gamma$ il existe $O \in \mathcal{R}$ tel que $E_k \subset O$.

(iii)

On note $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{T}$ ne contenant pas l'ensemble vide et, si E est une application vérifiant les propriétés de (ii), on note encore
$$\Gamma = \{k \in \mathbb{N}/ \ \exists \ O \in \mathcal{R} : E_k \subset O\} \ .$$

Si L est l'application de Γ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ définie par
$$L_k = \{O \in \mathcal{R}/E_k \subset O\}$$

par définition de Γ pour tout $k \in \Gamma$ on a $L_k \neq \varnothing$. On montre que si h est une fonction de choix pour $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et si φ est l'application de Γ dans $\mathcal{R}$ définie par

$$\varphi(k) = h(L_k)$$

alors l'ensemble $\mathcal{R}_d = \varphi(\Gamma) = \{O \in \mathcal{R} / \ \exists \ k \in \Gamma : O = \varphi(k)\}$ est fini ou dénombrable et vérifie

$$\bigcup_{O \in \mathcal{R}_d} O = \bigcup_{O \in \mathcal{R}} O$$

1. D'abord en tant qu'image d'un ensemble fini ou dénombrable $\mathcal{R}_d$ est fini ou dénombrable.
2. Ensuite puisque $\mathcal{R}_d \subset \mathcal{R}$ on a $\displaystyle\bigcup_{O \in \mathcal{R}_d} O \subset \bigcup_{O \in \mathcal{R}} O$
3. Enfin on montre que $\displaystyle\bigcup_{O \in \mathcal{R}} O \subset \bigcup_{O \in \mathcal{R}_d} O$. En effet, l'égalité $\displaystyle\bigcup_{O \in \mathcal{R}} O = \bigcup_{k \in \Gamma} E_k$ établie en *(ii) 3* montre que pour tout $x \in \displaystyle\bigcup_{O \in \mathcal{R}} O$ il existe $k \in \Gamma$ tel que $x \in E_k$, pour un tel k on a, par définition d'une fonction de choix , $h(L_k) \in L_k$, ainsi $h(L_k)$ est un élément de $\mathcal{R}_d$ qui contient E_k en particulier $x \in h(L_k)$, par suite $x \in \displaystyle\bigcup_{O \in \mathcal{R}_d} O$

(iv)

D'après le théorème [10.12] page 835 on a d $\Leftrightarrow$ e et d'après le théorème [10.9] page 824 on a e $\Rightarrow$ a il suffit donc de montrer

a $\Rightarrow$ b $\Rightarrow$ c $\Rightarrow$ d .

I preuve de a $\Rightarrow$ b

Soit $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , \mathcal{P}(K))$ une suite décroissante de $\imath(K\ , \mathcal{T})$-fermés non vide, l'axiome du choix entraîne que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , K) / \ \forall \ n \in \mathbb{N} \quad u_n \in F_n\}$$

est non vide. Or l'hypothèse a entraîne que pour tout $u \in \Pi$ il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(n) \geq n$ et la suite $u_{\varphi(n)}$ possède une limite $x \in K$. On va montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $x \in F_p$

— puisque par hypothèse $F_p = \mathrm{adh}(F_p\ , \imath(K, \mathcal{T})) = \mathrm{adh}(F_p) \cap K$ il suffit de montrer que $x \in \mathrm{adh}(F_p) \cap K$

— puisque $x \in K$ il suffit de montrer que $x \in \mathrm{adh}(F_p)$

En d'autres termes il s'agit de montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\cap F_p \neq \varnothing\ . \tag{10.135}$$

Or si $p \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors

— puisque $u_{\varphi(n)}$ converge vers x il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_{\varphi(n)} \in]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[$$

— puisque par construction $u_{\varphi(n)} \in F_{\varphi(n)}$ et $\varphi(n) \geq n$ il résulte de la décroissance de la suite F que $F_{\varphi(n)} \subset F_n$ et

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_{\varphi(n)} \in]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\cap F_n$$

— en particulier puisque $n \geq p \Rightarrow F_n \subset F_p$ on obtient

$$n \geq \max\{n_0\ ,\ p\} \Rightarrow u_{\varphi(n)} \in]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\cap F_p\ .$$

Ainsi (10.135) page 841 est vérifiée et

$$x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p \ .$$

II preuve de b $\Rightarrow$ c

Soit $O \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\mathcal{T})$ une suite d'ouverts vérifiant

$$K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

alors la suite

$$F_p = \bigcap_{k=0}^{p} O_k^c \cap K = (\bigcup_{k=0}^{p} O_k)^c \cap K$$

est une suite décroissante de $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-fermés vérifiant

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p = \varnothing$$

En effet

— si $x \in K^c$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $x \in F_p^c$ puisque $K^c \subset F_p^c$,

— si $x \in K$ par hypothèse il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \in O_p$ puisque $F_p \subset O_p^c$ on a $x \notin F_p$.

Ainsi l'hypothèse b entraîne qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = \varnothing$ pour un tel n on obtient

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{n} O_k \ .$$

III preuve de c $\Rightarrow$ d

Soit $\mathcal{R}$ un $\mathcal{T}$-recouvrement de K, le point (iii) montre qu'il existe un sous-ensemble fini ou dénombrable $\mathcal{R}_d \subset \mathcal{R}$ qui vérifie

$$\bigcup_{O\in\mathcal{R}_d} O = \bigcup_{O\in\mathcal{R}} O$$

Si $\mathcal{R}_d$ est fini alors $\mathcal{R}_d$ est un sous-ensemble fini de $\mathcal{R}$ vérifiant

$$K \subset \bigcup_{O\in\mathcal{R}_d} O$$

si $\mathcal{R}_d$ n'est pas fini alors il est dénombrable et il existe une bijection U de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{R}_d$. On a alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{O\in\mathcal{R}_d} O = \bigcup_{O\in\mathcal{R}} O$$

et

$$K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

l'hypothèse c entraîne alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{n} U_k$$

l'ensemble $\mathcal{R}' = U(\mathbb{N}_n) = \{O \in \mathcal{R} /\ \exists\ k \in \mathbb{N}_n : O = U_k\}$ est donc un sous-ensemble de $\mathcal{R}$ de cardinal $n+1$ qui vérifie

$$K \subset \bigcup_{O\in\mathcal{R}'} O \ .$$

■

On entend quelquefois « tout sous-ensemble infini d'un fermé borné de $\mathbb{R}$ possède un point d'accumulation ». La traduction de cette assertion nécessite au moins la définition d'un point d'accumulation.

10.10.3 *Compacité et points d'accumulations.*

On introduit la définition d'un point d'accumulation.

Définition 10.60 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$*. Si* A *est un sous-ensemble non vide de* K *alors*

1. *Un point* $a \in \mathrm{adh}(A\ , \imath(K,\mathcal{T}))$ *est appelé un* ***point d'accumulation*** *de* A *pour la topologie* $\imath(K,\mathcal{T})$ *(ou un* $\imath(K,\mathcal{T})$*-point d'accumulation de* A *) si*
$$a \in \mathrm{adh}(A \cap \{a\}^c\ , \imath(K,\mathcal{T}))$$
On note
$$A'_K = \{a \in \mathrm{adh}(A\ , \imath(K,\mathcal{T}))/a \in \mathrm{adh}(A \cap \{a\}^c\ , \imath(K,\mathcal{T}))\}$$
l'ensemble des $\imath(K,\mathcal{T})$*-point d'accumulations de* A*. Lorsque* $K = \mathbb{R}$ *on note* A' *l'ensemble des* $\mathcal{T}$*-points d'accumulations de* A*.*
2. *Un point* $a \in \mathrm{adh}(A\ , \imath(K,\mathcal{T}))$ *est appelé un* ***point frontière externe*** *de* A *pour la topologie* $\imath(K,\mathcal{T})$ *si*
$$a \in \mathrm{adh}(A\ , \imath(K,\mathcal{T})) \cap A^c$$
l'ensemble $\mathrm{adh}(A\ , \imath(K,\mathcal{T})) \cap A^c$ *est souvent noté* $\partial^e_K(A)$*. Lorsque* $K = \mathbb{R}$ *on note* $\partial^e(A)$ *l'ensemble des* $\mathcal{T}$*-points frontière externes de* A*.*
3. *Un point* $a \in A$ *est appelé un* ***point isolé*** *de* A *si il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ *tel que*
$$]a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon[\cap A = \{a\}$$
On note $\mathrm{isol}(A)$ *l'ensemble des points isolés de* A *:*
$$\mathrm{isol}(A) = \{a \in A/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ :\quad]a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon[\cap A = \{a\}\}$$

Le théorème suivant est une application directe des définitions.

Théorème 10.14 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* A *est un sous-ensemble non vide de* K*.*

(i) L'ensemble des points isolés de A *est le complémentaire dans* A *de l'ensemble des points d'accumulations de* A *:*
$$\mathrm{isol}(A) = A \cap (A'_K)^c\ .$$
(ii) Tout point frontière externe de A *pour la topologie* $\imath(K,\mathcal{T})$ *est un* $\imath(K,\mathcal{T})$*-point d'accumulation :*
$$\partial^e_K(A) \subset A'_K\ .$$
(iii) Tout sous-ensemble de K *qui ne possède pas de* $\imath(K,\mathcal{T})$*-point d'accumulation est* $\imath(K,\mathcal{T})$*-fermé.*

(iv) Si A *est borné et sans* $\mathcal{T}$*-points d'accumulations alors pour toute suite* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , A)$ *il existe* $a \in A$ *et une application* $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ *vérifiant les propriétés suivantes*

1. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\varphi(n) \geq n$
2. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_{\varphi(n)} = a$

(v) Si $B \subset A$ *alors* $B'_K \subset A'_K$*, en particulier tout sous-ensemble d'un sous-ensemble* A *de* K *qui ne possède pas de* $\imath(K,\mathcal{T})$*-point d'accumulation est un* $\imath(K,\mathcal{T})$*-fermé sans point d'accumulation.*

(vi) Si A *est un sous-ensemble fini de* $\mathbb{R}$*,* A *ne possède pas de point d'accumulation :*
$$A' = \varnothing$$
En particulier A *est* $\mathcal{T}$*-fermé.*

(vii) Si (X, O_X) *est un ensemble totalement ordonné et* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , X)$ *est une suite telle que* $u(\mathbb{N})$ *est fini alors*

1. l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} u([n\ ,\to[)$ *est non vide*

2. il existe $k\in\mathbb{N}$ *et une application* $\varphi:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ *vérifiant les propriétés suivantes*

(a) pour tout $n\in\mathbb{N}$ *on a* $\varphi(n)\geq n$

(b) pour tout $n\in\mathbb{N}$ *on a* $u_{\varphi(n)}=u_k$

(viii) Pour que $a\in\operatorname{adh}(A\ ,\imath(K,\mathcal{T}))$ *ne soit pas un point d'accumulation de* A *il faut et il suffit qu'il existe* $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ *tel que* $]a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon[\cap A$ *soit fini.*

(ix) Soit $u\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K)$ *une suite à valeurs dans* K*, si* y *est un* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-point d'accumulation de* $u(\mathbb{N})$ *alors*

1. $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{adh}(u([n,\to[)\ ,\imath(K,\mathcal{T}))$

2. il existe une application $\varphi:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ *vérifiant les propriétés suivantes*

(a) pour tout $n\in\mathbb{N}$ *on a* $\varphi(n)\geq n$

(b) la suite $x\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K)$ *définie par* $x_n=u_{\varphi(n)}$ *converge vers* y*.*

(x) Les conditions suivantes sont équivalentes

a *Tout sous-ensemble infini de point de* K *possède un* $\imath(K,\mathcal{T})$*-point d'accumulation*

b *Toute suite décroissante de* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-fermés non vide est d'intersection non vide. Cela signifie que si la suite* $F\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\mathcal{P}(K))$ *vérifie les propriétés suivantes*

1. por tout $n\in\mathbb{N}$ $F_n\neq\varnothing$

2. pour tout $n\in\mathbb{N}$ $F_n^c\cap K\in\imath(K\ ,\mathcal{T})$

3. pour tout $n\in\mathbb{N}$ $F_{n+1}\subset F_n$

alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n\neq\varnothing\ .$$

c *Pour toute suite* $u\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K)$ *il existe une application* $\varphi:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ *vérifiant les propriétés suivantes*

1. pour tout $n\in\mathbb{N}$ *on a* $\varphi(n)\geq n$

2. la suite $x\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K)$ *définie par* $x_n=u_{\varphi(n)}$ *converge vers un point de* K*.*

d K *est fermé borné.*

Preuve

(i)

1. D'abord on montre $\operatorname{isol}(A)\subset A\cap(A'_K)^c$

   Par définition si $a\in\operatorname{isol}(A)$ alors $a\in A$ il suffit donc de montrer que $\operatorname{isol}(A)\subset(A'_K)^c$. Or si $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ vérifie $]a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon[\cap A=\{a\}$ alors $]a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon[\cap(A\cap\{a\}^c)=\varnothing$ par suite

$$a\notin\operatorname{adh}(A\cap\{a\}^c\ ,\imath(K,\mathcal{T}))$$

2. Ensuite on montre $A\cap(A'_K)^c\subset\operatorname{isol}(A)$

   En effet, si $a\in A\cap(A'_K)^c$ alors
   — puisque $a\notin A'_K$ il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $]a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon[\cap(A\cap\{a\}^c)=\varnothing$,
   — pour un tel ε on obtient, puisque $a\in A$, $]a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon[\cap A=\{a\}$
   Ainsi tout point de $A\cap(A'_K)^c$ est isolé.

(ii)

Si $a\in\operatorname{adh}(A\ ,\imath(K,\ \mathcal{T}))\cap A^c$ alors

— puisque $a \in A^c$ on a $A \cap \{a\}^c = A$

— puisque $a \in \text{adh}(A\ , \imath(K, \mathcal{T}))$ et $A = A \cap \{a\}^c$ on obtient $a \in \text{adh}(A \cap \{a\}^c\ , \imath(K, \mathcal{T}))$

Ce qui montre que $\partial_K^e(A) \subset A'_K$.

(iii)

Si $A \subset K$ ne possède pas de $\imath(K, \mathcal{T})$-point d'accumulation alors $A'_K = \varnothing$ par suite (ii) montre $\partial_K^e(A) = \varnothing$ et

$$\text{adh}(A, \imath(K, \mathcal{T})) = A\ .$$

(iv)

Si A est borné sans $\mathcal{T}$-point d'accumulation alors d'après (iii) A est fermé borné, ainsi le point (iv) du théorème [10.13] page 838 montre qu'il existe une application $\lambda : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\lambda(n) \geq n$
2. la suite $u_{\lambda(n)}$ converge vers un point de A

On montre que si $a = \lim\limits_{n \to \infty} u_{\lambda(n)}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_{\lambda(n)} = a\ .$$

En effet

— puisque $A' = \varnothing$ le point (i) montre que tout élément de A est isolé ainsi il existe un certain $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap A = \{a\}$

— puisque $u_{\lambda(n)}$ converge vers a il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_{\lambda(n)} \in]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[$$

— puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in A$ on obtient

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_{\lambda(n)} \in]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap A$$

Le choix de ε montre donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_{\lambda(n)} = a\ .$$

Par suite si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est définie par $\varphi(n) = \lambda(n_0 + n)$ l'application φ vérifie les propriétés enoncées en (iv).

(v)

Si $b \in \text{adh}(B \cap \{b\}^c\ , \imath(K, \mathcal{T}))$ alors puisque $B \subset A$ on obtient $b \in \text{adh}(A \cap \{b\}^c\ , \imath(K, \mathcal{T}))$ ce qui montre que $B'_K \subset A'_K$. En particulier si $A'_K = \varnothing$ alors $B'_K = \varnothing$ et (iii) montre que B est $\imath(K\ , \mathcal{T})$-fermé.

(vi)

Soit A un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, on pose

$$\Delta_A^c = \{(x, y) \in A \times A /\ x \neq y\}$$

et on considère l'application $f : \Delta_A^c \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = |x - y|\ .$$

Puisque Δ_A^c est fini comme sous-ensemble de l'ensemble fini $A \times A$ le point (v) du lemme [6.1] page 133 et le fait que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné montre que f atteint son minimum sur Δ_A^c, ainsi puisque $(x, y) \in \Delta_A^c \Rightarrow f(x, y) > 0$ on obtient

$$\min_{(u,t) \in \Delta_A^c} f(u, t) > 0$$

Ceci permet de montrer que A est sans point d'accumulation , en effet si on note $\delta = \min\limits_{(u,t)\in\Delta_A^c} f(u,t)$ alors pour tout $x \in A$

$$y \in]x - \frac{\delta}{2}\ ,\ x + \frac{\delta}{2}[\cap A \Rightarrow f(x,y) < \min_{(u,t)\in\Delta_A^c} f(u,t) \Rightarrow (x,y) \notin \Delta_A^c \Rightarrow y = x\ .$$

Ainsi $]x - \frac{\delta}{2}\ ,\ x + \frac{\delta}{2}[\cap A = \{x\}$, par suite $\mathrm{adh}(A) = A$ et $]x - \frac{\delta}{2}\ ,\ x + \frac{\delta}{2}[\cap (A \cap \{x\})^c = \varnothing$ ce qui montre que $A' = \varnothing$.

(vii)

I On montre que $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} u([p, \rightarrow [) \neq \varnothing$

Puisque $u(\mathbb{N})$ est un sous-ensemble fini d'un ensemble totalement ordonné d'après le point (i) du lemme [6.1] page 133 l'ensemble $u(\mathbb{N})$ est bien ordonné pour l'ordre induit et possède de plus un plus grand élément. La même propriété étant vrai pour tout ces sous-ensembles puisqu'ils sont aussi finis d'après le point (i) du théorème [6.3] page 128. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\Gamma_n = \{k \in [n, \rightarrow [/\ \forall\ j \in [n, \rightarrow [\ (u_k, u_j) \in O_X\}$$

Ainsi $k \in \Gamma_n$ si et seulement si $k \geq n$ et u_k est le minimum pour l'ordre O_X de l'ensemble $u[n\ , \rightarrow [$, ce qu'on note $u_k = \min_{O_X}\{x : x \in u[n, \rightarrow [\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\Gamma_n \neq \varnothing$, en effet $u[n, \rightarrow [$ est un sous-ensemble non vide de l'ensemble bien ordonné $(u(\mathbb{N})\ , O_X \cap (u(\mathbb{N}) \times u(\mathbb{N})))$ par suite il possède un plus petit élément pour l'ordre O_X. Si $\lambda : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est l'application définie par

$$\lambda(n) = \min\{k : k \in \Gamma_n\}$$

et $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , X)$ est l'application définie par

$$v_n = u_{\lambda(n)}$$

Alors la suite v possède les propriétés suivantes :

1. v est une suite croissante
2. $v(\mathbb{N})$ est un sous-ensemble fini de X et $v(\mathbb{N})$ possède un plus grand élément pour l'ordre O_X : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_0} = \max_{O_X}\{x : x \in v(\mathbb{N})\}$
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ on a $v_n = v_{n_0}$
4. pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $v_{n_0} \in u([p\ , \rightarrow [)$

Preuve de 1 à 4

1. Par définition de λ v_n est un minorant de l'ensemble $u([n\ , \rightarrow [)$ pour l'ordre O_X et par définition d'un minimum $v_{n+1} \in u[n+1\ , \rightarrow [$ par suite, puisque $u([n+1\ , \rightarrow [) \subset u([n\ , \rightarrow [)$, on obtient $(v_n, v_{n+1}) \in O_X$
2. puisque $v(\mathbb{N}) \subset u(\mathbb{N})$ et $u(\mathbb{N})$ est fini le point (i) du théorème [6.3] page 128 montre que $v(\mathbb{N})$ est un sous-ensemble fini d'un ensemble totalement ordonné ainsi le point (i) du lemme [6.1] page 133 montre que $v(\mathbb{N})$ possède un plus grand élément $v_{n_0} = \max_{O_X}\{x : x \in v(\mathbb{N})\}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$
   — puisque v est O_X-croissante $(v_{n_0}, v_n) \in O_X$
   — puisque v_{n_0} est un O_X-majorant de $v(\mathbb{N})$ on a $(v_n, v_{n_0}) \in O_X$
   ainsi l'antisymétrie de O_X montre que $v_n = v_{n_0}$
4. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \geq \max\{p, n_0\}$ alors
   — puisque $\lambda(k) \geq k \geq p$ on a $v_k \in u([p, \rightarrow [)$

— puisque $\lambda(k) \geq k \geq n_0$ 3 montre que $v_k = u_{\lambda(k)} = v_{n_0}$
ainsi $v_{n_0} \in u([p, \to [)$.

Ceci montre que $v_{n_0} \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} u([p, \to [)$

II preuve de l'existence de φ.

D'après ce qu'on vient de voir il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$v_{n_0} \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} u([p, \to [)$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$ l'ensemble A_p défini par

$$A_p = \{k \in [p, \to [/u_k = v_{n_0}\}$$

est non vide. Si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est définie par

$$\varphi(n) = \min\{k : k \in A_n\}$$

alors puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \in A_n$ on obtient $\varphi(n) \geq n$ et $u_{\varphi(n)} = v_{n_0} = u_{\varphi(0)}$. Ce qui montre qu'en posant $k = \varphi(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_k = u_{\varphi(n)}$.

$(viii)$

1. D'abord on montre que si il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap A$ est fini alors $a \notin A'_K$.

   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap A$ est fini, alors l'ensemble $F =]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap(A \cap \{a\}^c)$ est un sous-ensemble fini de K, ainsi il est $\imath(K, \mathcal{T})$-fermé, puisque $a \in F^c \cap K$ il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a - \eta\ ,\ a + \eta[\cap K \subset F^c \cap K$. Ainsi il résulte de l'inclusion $A \cap \{a\}^c \subset F$ que

   $$]a - \eta\ ,\ a + \eta[\cap(A \cap \{a\}^c) = \varnothing$$

   ce qui montre que $a \notin \text{adh}(A \cap \{a\}^c\ , \imath(K, \mathcal{T}))$
2. Ensuite on montre que si $a \notin A'_K$ alors $a \in A$ et il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap A = \{a\}$
   (a) d'abord on montre que $a \in A$

   en effet l'inclusion (ii) montre que $a \notin \partial^e_K(A)$ par suite

   $$a \in \text{adh}(A\ , \imath(K, \mathcal{T})) \cap (\partial^e_K(A))^c$$

   or $\text{adh}(A\ , \imath(K, \mathcal{T})) \cap (\partial^e_K(A))^c = A$

   (b) par suite $a \in A \cap (A'_K)^c$ et l'égalité (i) montre que a est un point isolé de A ainsi il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[\cap A = \{a\}$

(ix)

Soit $u \in \text{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ , K)$ une suite à valeurs dans K

1. On montre que si $y \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \text{adh}(u([n, \to [)\ , \imath(K, \mathcal{T}))$ alors y n'est pas un $\imath(K\ , \mathcal{T})$- point d'accumulation de $u(\mathbb{N})$.

   En effet si $y \notin \text{adh}(u([n, \to [)\ , \imath(K, \mathcal{T}))$ alors il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]y-\eta\ ,\ y+\eta[\cap\, u([n, \to [) = \varnothing$. Ainsi $]y - \eta\ ,\ y + \eta[\cap\, u(\mathbb{N}) =]y - \eta\ ,\ y + \eta[\cap\, u([0\ , n[)$ est un ensemble fini de cardinal inférieur à n et $(viii)$ montre que y n'est pas un $\imath(K\ , \mathcal{T})$-point d'accumulation de $u(\mathbb{N})$.

2. Si y est un $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-point d'accumulation de $u(\mathbb{N})$ alors 1 montre que

$$y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(u[n,\to[)\ ,\imath(K,\mathcal{T}))\ .$$

On montre que pour tout $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{adh}(u[n,\to[)\ ,\imath(K,\mathcal{T}))$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ le sous-ensemble A_n de $\mathbb{N}$ défini par

$$A_n = \{k \in [n,\to[/\ |u_k - y| \leq \frac{1}{n+1}\}$$

est non vide. En effet , puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $y \in \mathrm{adh}(u([n,\to[))\ ,\imath(K,\mathcal{T}))$ d'après le lemme [10.16] page 687 on a

$$]y-\frac{1}{n+1}\ ,\ y+\frac{1}{n+1}[\cap u([n,\to[) \neq \varnothing$$

mais si $v \in]y-\frac{1}{n+1}\ ,\ y+\frac{1}{n+1}[\cap u([n,\to[)$ alors
— puisque $v\in u([n,\to[)$ il existe $k\geq n$ tel que $v = u_k$
— puisque $v \in]y-\frac{1}{n+1}\ ,\ y+\frac{1}{n+1}[$ on a $|u_k - y| < \frac{1}{n+1}$
par suite pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $A_n\neq\varnothing$ et si φ est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\varphi(n) = \min\{k : k\in A_n\}$$

alors
(a) $\varphi(n)\geq n$ puisque $\varphi(n)\in A_n$
(b) $|u_{\varphi(n)} - y| \leq \frac{1}{n+1}$ ce qui montre que la suite $u_{\varphi(n)}$ converge vers y.

(x)

D'après le point (iv) du théorème [10.13] page 838 on a b $\Leftrightarrow$ c $\Leftrightarrow$ d il suffit donc de montrer a $\Rightarrow$ c et b $\Rightarrow$ a.

I preuve de a $\Rightarrow$ c

Soit $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ une suite à valeurs dans K, on examine l'alternative suivante
1. $u(\mathbb{N})$ est fini
2. $u(\mathbb{N})$ est infini

1. Si $u(\mathbb{N})$ est fini le point (vii) montre qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ et $\varphi : \mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)\geq n$ et $u_{\varphi(n)} = u_k$. ainsi la suite constante $u_{\varphi(n)}$ converge vers u_k.
2. si $u(\mathbb{N})$ est infini l'hypothèse a entraîne que $u(\mathbb{N})$ possède un $\imath(K,\mathcal{T})$-point d'accumulation et le point (ix) montre que pour tout $\imath(K,\mathcal{T})$-point d'accumulation y de $u(\mathbb{N})$ il existe une application $\varphi : \mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes
   (a) pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $\varphi(n)\geq n$
   (b) la suite $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,K)$ définie par $x_n = u_{\varphi(n)}$ converge vers y.

II preuve de b $\Rightarrow$ a

On montre que s'il existe un sous-ensemble infini de K sans $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-point d'accumulation alors b n'est pas vérifiée. Soit A un sous-ensemble infini de K sans $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-point d'accumulation, puisque A est infini le point $(viii)$ du théorème [6.3] page 128 montre qu'il existe une application injective u de $\mathbb{N}$ dans A. On montre que la suite décroissante de $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-fermé définie par

$$F_n = \mathrm{adh}(u([n\ ,\to[)\ ,\imath(K\ ,\mathcal{T}))$$

est d'intersection vide : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$. En effet

— puisque $u([n\ ,\rightarrow [)$ est un sous-ensemble d'un ensemble sans $\imath(K,\mathcal{T})$-point d'accumulation le point (v) montre que $u([n\ ,\rightarrow [)$ est $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-fermé par suite

$$F_n = \operatorname{adh}(u([n\ ,\rightarrow [)\ ,\imath(K\ ,\mathcal{T})) = u([n\ ,\rightarrow [)$$

— puisque u est injective $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} u([n\ ,\rightarrow [) = \varnothing$

Ainsi on obtient

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} u([n\ ,\rightarrow [) = \varnothing.$$

■

Soit $f : K \mapsto \mathbb{R}$ le lemme [10.37] page 818 montre que si pour tout $x \in \operatorname{adh}(K)$ l'application f est localement bornée sur $\mathcal{V}_K(x)$ alors l'application $g : \operatorname{adh}(K) \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f$$

vérifie la propriété suivante : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$U_*(\lambda) = \{x \in \operatorname{adh}(K)/g(x) > \lambda\} = \{x \in \operatorname{adh}(K)/\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f > \lambda\}$$

est $\imath(\operatorname{adh}(K),\mathcal{T})$-ouvert, ce genre d'application mérite une petite étude.

10.10.4 *Compacité et applications semi-continues*

I *Définition de la semi-continuité .*

Définition 10.61 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$.

(i) On dit que f *est* ***semi-continue inférieurement*** *sur* K *pour la topologie* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$ *(en abrégé* $\imath(K,\mathcal{T})$*-sci) si :*

1. *pour tout* $x \in K$ f *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}_K(x)$
2. *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *l'ensemble*
$$U_*(\lambda) = \{x \in K/f(x) > \lambda\}$$
est $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-ouvert.*

(ii) Si $x_0 \in K$ *on dit que* f *est* ***semi-continue inférieurement*** *en* x_0 *pour la topologie* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$ *(en abrégé* $\imath(K,\mathcal{T})$*-sci en* x_0*) si :*

1. f *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}_K(x_0)$
2. $f(x_0)$ *est la limite inférieure de* f *le long du filtre* $\mathcal{V}_K(x_0)$ *:*

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0)$$

(iii) On dit que f *est* ***semi-continue supérieurement*** *sur* K *pour la topologie* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$ *(en abrégé* $\imath(K,\mathcal{T})$*-scs) si :*

1. *pour tout* $x \in K$ f *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}_K(x)$
2. *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *l'ensemble*
$$U^*(\lambda) = \{x \in K/f(x) < \lambda\}$$
est $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-ouvert.*

(iv) Si $x_0 \in K$ *on dit que* f *est* ***semi-continue supérieurement*** *en* x_0 *pour la topologie* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$ *(en abrégé* $\imath(K,\mathcal{T})$*-scs en* x_0*) si :*

1. f *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}_K(x_0)$
2. $f(x_0)$ *est la limite supérieure de* f *le long du filtre* $\mathcal{V}_K(x_0)$ *:*

$$\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0)$$

Le lemme qui suit est une application directe des définitions.

Lemme 10.38 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in K$ *l'application* f *est* <u>localement bornée</u> *sur le filtre* $\mathcal{V}_K(x)$*.*

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a f *est* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-sci*

b *Pour tout* $x_0 \in K$ *l'application* f *est* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-sci en* x_0

c *Le sous-ensemble* Y *de* $K \times \mathbb{R}$ *défini par*

$$Y = \{(x, \lambda) \in K \times \mathbb{R}/f(x) > \lambda\}$$

est $\imath(K, \mathcal{T}) \otimes \mathcal{T}$*-ouvert : si* $(x_0\ ,\ \lambda_0) \in Y$ *il existe* $(\eta\ ,\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$(]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta| \cap K) \times]\lambda_0 - \varepsilon\ ,\ \lambda_0 + \varepsilon[\subset Y$$

d *L'application* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *définie par*

$$g(x) = -f(x)$$

est $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-scs*

(ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

e f *est* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-scs*

f *Pour tout* $x_0 \in K$ *l'application* f *est* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-scs en* x_0*.*

g *Le sous-ensemble* Z *de* $K \times \mathbb{R}$ *défini par*

$$Z = \{(x, \lambda) \in K \times \mathbb{R}/f(x) < \lambda\}$$

est $\imath(K, \mathcal{T}) \otimes \mathcal{T}$*-ouvert : si* $(x_0\ ,\ \lambda_0) \in Z$ *il existe* $(\eta\ ,\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$(]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta| \cap K) \times]\lambda_0 - \varepsilon\ ,\ \lambda_0 + \varepsilon[\subset Z$$

(iii) Pour que f *soit* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-sci il faut et il suffit que pour tout* $x_0 \in K$ *et pour toute suite* u *à valeurs dans* K *qui tend vers* x_0

$$\liminf_{n\to\infty} f(u_n) \geq f(x_0)$$

(iv) Pour que f *soit* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-scs il faut et il suffit que pour tout* $x_0 \in K$ *et pour toute suite* u *à valeurs dans* K *qui tend vers* x_0

$$\limsup_{n\to\infty} f(u_n) \leq f(x_0)$$

(v) Si K *est fermé borné alors* f *est bornée, en d'autres termes si pour tout* $x \in K$ *l'application* f *est* <u>localement bornée</u> *sur le filtre* $\mathcal{V}_K(x)$ *elle est bornée sur* K*.*

(vi) Si K *est fermé borné et* f *est* $\imath(K\ ,\mathcal{T})$*-sci alors* f *est minorée sur* K *et il existe* $x_0 \in K$ *tel que*

$$f(x_0) = \min_{x\in K} f(x)$$

(vii) Si K est fermé borné et f est $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-scs alors f est majorée sur K et il existe $x_0 \in K$ tel que

$$f(x_0) = \max_{x \in K} f(x)$$

(viii)Si $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ est un couple d'applications $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-sci en x_0 alors l'application $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ définie par $u(x) = f(x) + g(x)$ est $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-sci en x_0

(ix) Si $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ est un couple d'applications $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-scs en x_0 alors l'application $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ définie par $u(x) = f(x) + g(x)$ est $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-scs en x_0

(x) Pour que f soit continue sur K il faut et il suffit que f soit à la fois $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-sci et $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-scs .

Preuve La preuve utilise les notations et résultats du lemme [10.37] page 818 et les notations de la définition [10.61] page 849 . En particulier pour tout $x \in K$

$$\Omega_f(x) = \{\omega \in \mathcal{V}_K(x) /\ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : y \in \omega \Rightarrow |f(y)| \leq m\}$$

est l'ensemble des $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-voisinages de x sur lesquels f est bornée . De plus pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $U_*(\lambda)$ est défini par

$$U_*(\lambda) = \{x \in K / f(x) > \lambda\}$$

et $U^*(\lambda)$ est l'ensemble défini par

$$U^*(\lambda) = \{x \in K / f(x) < \lambda\}\ .$$

(i)

I preuve de a $\Leftrightarrow$ b

1. On montre a $\Rightarrow$ b
   Il s'agit de montrer que si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble

   $$U_*(\lambda) = \{x \in K / f(x) > \lambda\}$$

   est $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-ouvert alors pour tout $x_0 \in K$

   $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0)$$

   (a) D'abord on montre $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq f(x_0)$

   En effet puisque $x_0 \in K$ on a $\omega \in \Omega_f(x_0) \Rightarrow x_0 \in \omega$ par suite

   $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \sup_{\omega \in \Omega_f(x_0)} (\inf_{x \in \omega} f(x)) \leq f(x_0)$$

   (b) Ensuite on montre que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \geq f(x_0)$

   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, par hypothèse l'ensemble

   $$U_* = \{x \in K / f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$$

   est $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-ouvert et puisque $x_0 \in U_*$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K \subset U_*$ si $V_\delta =]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K$ et $\omega \in \Omega_f(x_0)$ alors l'ensemble $\pi = \omega \cap V_\delta$ est un élément de $\Omega_f(x_0)$ tel que $\inf\limits_{x \in \pi} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$ ainsi

   $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \geq \inf_{x \in \pi} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

   cette inégalité étant vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on obtient

   $$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \geq f(x_0)$$

2. On montre b $\Rightarrow$ a
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U_*(\lambda) = \{x \in K/f(x) > \lambda\}$ l'hypothèse b entraîne que pour tout $x \in K$ on a $f(x) = \liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f$ ainsi $f(x)$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*(f,x) = \{t \in \mathbb{R}/ \exists\ \omega \in \Omega_f(x) : t = \inf_{y\in\omega} f(y)\}$$

en particulier si $x_0 \in U_*(\lambda)$ alors λ n'est pas un majorant de l'ensemble $\Lambda_*(f,x_0)$ ainsi il existe $\omega \in \Omega_f(x_0)$ tel que

$$\inf_{y\in\omega} f(y) > \lambda$$

Puisque $\omega \in \mathcal{V}_K(x_0)$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\cap K \subset \omega$, or pour un tel δ on a

$$]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\cap K \subset U_*(\lambda)$$

en effet

$$z \in]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\cap K \Rightarrow z \in \omega \Rightarrow f(z) \geq \inf_{y\in\omega} f(y) \Rightarrow f(z) > \lambda$$

ce qui montre que $U_*(\lambda)$ est $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-ouvert.

II preuve de a $\Leftrightarrow$ c

1. On montre a $\Rightarrow$ c
Si $(x_0,\lambda_0) \in Y$ alors $f(x_0) > \lambda_0$ ainsi il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varepsilon < f(x_0) - \lambda_0$, or si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie cette inégalité on a $x_0 \in U_*(\lambda_0+\varepsilon)$ par suite l'hypoyhèse a entraîne qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\cap K \subset U_*(\lambda_0+\varepsilon)$. Si $(x,\mu) \in (]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\cap K)\times]\lambda_0-\varepsilon\ ,\ \lambda_0+\varepsilon[$ alors $x \in U_*(\lambda_0+\varepsilon)$ ainsi

$$f(x) > \lambda_0+\varepsilon > \mu$$

par suite $(x,\mu) \in Y$.
2. On montre c $\Rightarrow$ a
Il s'agit de montrer que si $x_0 \in U_*(\lambda)$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\cap K \subset U_*(\lambda)$. Or dire que $x_0 \in U_*(\lambda)$ c'est dire que $(x_0,\lambda) \in Y$ ainsi l'hypothèse c montre qu'il existe $(\delta,\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\cap K)\times]\lambda-\varepsilon\ ,\ \lambda+\varepsilon[\subset Y$$

ainsi on obtient

$$x \in]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\cap K \Rightarrow (x,\lambda) \in (]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\cap K)\times]\lambda-\varepsilon\ ,\ \lambda+\varepsilon[\Rightarrow (x,\lambda) \in Y \Rightarrow f(x) > \lambda \Rightarrow x \in U_*(\lambda),$$

par suite $]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\cap K \subset U_*(\lambda)$.

III preuve de a $\Leftrightarrow$ d

Si $g(x) = -f(x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\{x \in K/f(x) > \lambda\} = \{x \in K/g(x) < -\lambda\}$ par suite

1. Si f est $\imath(K,\mathcal{T})$-sci alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{x \in K/g(x) < \lambda\} = \{x \in K/f(x) > -\lambda\}$$

est $\imath(K,\mathcal{T})$-ouvert ainsi g est $\imath(K,\mathcal{T})$-scs
2. Si g est $\imath(K,\mathcal{T})$-scs alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{x \in K/f(x) > \lambda\} = \{x \in K/g(x) < -\lambda\}$$

est $\imath(K,\mathcal{T})$-ouvert ainsi f est $\imath(K,\mathcal{T})$-sci .

(ii)

En (i) l'équivalence a $\Leftrightarrow$ d montre que sous l'hypothèse de (ii) l'application $h(x) = -f(x)$ est $\imath(K, \mathcal{T})$-sci et les énoncés de (ii) ne sont que les énoncés de (i) appliqués à h. Un copier-coller des preuves de (i) permet de se familiariser avec le jeu des inf-sup.

I preuve de e $\Leftrightarrow$ f

1. On montre e $\Rightarrow$ f
   Il s'agit de montrer que si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble
   $$U^*(\lambda) = \{x \in K / f(x) < \lambda\}$$
   est $\imath(K\ , \mathcal{T})$-ouvert alors pour tout $x_0 \in K$
   $$\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0)$$
   (a) $\underline{\text{D'abord on montre } f(x_0) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f}$

   En effet puisque $x_0 \in K$ on a $\omega \in \Omega_f(x_0) \Rightarrow x_0 \in \omega$ par suite
   $$\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = \inf_{\omega \in \Omega_f(x_0)} (\sup_{x \in \omega} f(x)) \geq f(x_0)$$
   (b) $\underline{\text{Ensuite on montre que } \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq f(x_0)}$

   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, par hypothèse l'ensemble
   $$U^* = \{x \in K / f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}$$
   est $\imath(K\ , \mathcal{T})$-ouvert et puisque $x_0 \in U^*$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K \subset U^*$ si $V_\delta =]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K$ et $\omega \in \Omega_f(x_0)$ alors l'ensemble $\pi = \omega \cap V_\delta$ est un élément de $\Omega_f(x_0)$ tel que $\sup_{x \in \pi} f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$ ainsi
   $$\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \sup_{x \in \pi} f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$
   cette inégalité étant vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on obtient
   $$\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq f(x_0)$$
2. On montre f $\Rightarrow$ e
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U^*(\lambda) = \{x \in K / f(x) < \lambda\}$ l'hypothèse f entraîne que pour tout $x \in K$ on a $f(x) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$ ainsi $f(x)$ est le plus grand minorant de l'ensemble
   $$\Lambda^*(f, x) = \{t \in \mathbb{R} / \ \exists\ \omega \in \Omega_f(x) : t = \sup_{y \in \omega} f(y)\}$$
   en particulier si $x_0 \in U^*(\lambda)$ alors λ n'est pas un minorant de l'ensemble $\Lambda^*(f, x_0)$ ainsi il existe $\omega \in \Omega_f(x_0)$ tel que
   $$\sup_{y \in \omega} f(y) < \lambda$$
   Puisque $\omega \in \mathcal{V}_K(x_0)$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K \subset \omega$, or pour un tel δ on a
   $$]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K \subset U^*(\lambda)$$

en effet

$$z \in]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K \Rightarrow z \in \omega \Rightarrow f(z) \leq \sup_{y \in \omega} f(y) \Rightarrow f(z) < \lambda$$

ce qui montre que $U^*(\lambda)$ est ouvert.

II preuve de e $\Leftrightarrow$ g

1. On montre e $\Rightarrow$ g
Si $(x_0, \lambda_0) \in Z$ alors $f(x_0) < \lambda_0$ ainsi il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varepsilon < \lambda_0 - f(x_0)$, or si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie cette inégalité on a $x_0 \in U^*(\lambda_0 - \varepsilon)$ par suite l'hypoyhèse e entraîne qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K \subset U^*(\lambda_0 - \varepsilon)$. Si $(x, \mu) \in (]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K) \times]\lambda_0 - \varepsilon\ ,\ \lambda_0 + \varepsilon[$ alors $x \in U^*(\lambda_0 - \varepsilon)$ ainsi
$$f(x) < \lambda_0 - \varepsilon < \mu$$
par suite $(x, \mu) \in Z$.
2. On montre g $\Rightarrow$ e
Il s'agit de montrer que si $x_0 \in U^*(\lambda)$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K \subset U^*(\lambda)$. Or dire que $x_0 \in U^*(\lambda)$ c'est dire que $(x_0, \lambda) \in Z$ ainsi l'hypothèse g montre qu'il existe $(\delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$(]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K) \times]\lambda - \varepsilon\ ,\ \lambda + \varepsilon[\subset Z$$
ainsi on obtient
$$x \in]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K \Rightarrow (x, \lambda) \in (]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K) \times]\lambda - \varepsilon\ ,\ \lambda + \varepsilon[\Rightarrow (x, \lambda) \in Z \Rightarrow f(x) < \lambda \Rightarrow x \in U^*(\lambda),$$
par suite $]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\cap K \subset U^*(\lambda)$.

(iii)

1. D'abord on montre la partie « il faut »
Il s'agit de montrer que si f est $\imath(K\ , \mathcal{T})$-sci alors pour tout $x_0 \in K$ et pour toute suite u à valeurs dans K qui tend vers x_0
$$\liminf_{n \to \infty} f(u_n) \geq f(x_0)\ .$$
Or d'après le point (vii) du lemme [10.33] page 782 pour une telle suite
$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq \liminf_{n \to +\infty} f(u_n)$$
et la semicontinuité inférieure de f en x_0 montre que
$$f(x_0) = \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$
2. Ensuite on montre la partie « il suffit »
D'après (i) il suffit de montrer que pour tout $x_0 \in K$ on a
$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0)$$
d'abord puisque $x_0 \in K$ on a $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \leq f(x_0)$ il suffit donc de montrer que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \geq f(x_0)$. Or le point (vi) du lemme [10.33] page 782 montre qu' il existe une suite $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, K)$ qui converge vers x_0 telle que la suite $f(u_n)$ est convergente avec
$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f$$
ainsi l'hypothèse de (iii) entraîne
$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) \geq f(x_0)$$
ce qui montre que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f \geq f(x_0)$.

(iv)

Il est clair que f vérifie (iv) si et seulement si $-f$ vérifie (iii), la preuve est donc laissée au soin du lecteur.

(v)

On montre que si f n'est pas bornée alors f n'est pas localement bornée sur le fermé borné K. En effet si f n'est pas bornée sur K alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$L_n = \{x \in K / \ |f(x)| \geq n\}$$

n'est pas vide, ainsi l'axiome du choix entraîne que l'ensemble

$$\Pi = \prod_{n \in \mathbb{N}} L_n = \{u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ K) / \ \forall \ n \in \mathbb{N}, u_n \in L_n\}$$

est non vide. Puisque K est fermé borné le point (x) du théorème [10.14] page 843 montre que pour tout $u \in \Pi$ il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \geq n$
2. la suite $u_{\varphi(n)}$ converge vers un point de K

On montre que si $x_0 = \lim_{n \to \infty} u_{\varphi(n)}$ alors f n'est borné sur aucun voisinage de x_0, il s'agit de montrer que pour tout $\omega \in \mathcal{V}_K(x_0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x \in \omega$ tel que $|f(x)| \geq n$. En effet fixons $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \mathcal{V}_K(x_0)$ alors :

— puisque $\omega \in \mathcal{V}_K(x_0)$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta[\cap K \subset \omega$,

— puisque $u_{\varphi(n)}$ tend vers x_0 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n_0 \Rightarrow u_{\varphi(p)} \in]x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta[\cap K$$

— par définition de la suite u et de φ on a, puisque $u_{\varphi(p)} \in L_{\varphi(p)}$,

$$|f(u_{\varphi(p)})| \geq \varphi(p) \geq p$$

ainsi pour tout $p \geq \max\{ \ n, n_0\}$ on a $u_{\varphi(p)} \in \omega$ et

$$|f(u_{\varphi(p)})| \geq n \ .$$

(vi)

Puisque f est $\imath(K, \mathcal{T})$-sci , pour tout $x \in K$ l'application f est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_K(x)$, ainsi le point (v) montre que f est bornée sur le fermé borné K. Si $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \mathcal{P}(K))$ est l'application définie par

$$A_n = \{x \in K / f(x) \leq \inf_{y \in K} f(y) + \frac{1}{n+1}\}$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n \neq \varnothing$. En effet, puisque $\inf_{y \in K} f(y)$ est le plus grand minorant de $f(K)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ le réel $\inf_{y \in K} f(y) + \dfrac{1}{n+1}$ n'est pas un minorant de $f(K)$ ainsi il existe $x \in K$ tel que $f(x) < \inf_{y \in K} f(y) + \dfrac{1}{n+1}$. L'axiome du choix entraîne que l'ensemble

$$\Pi_i = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ K) / \ \forall \ n \in \mathbb{N}, u_n \in A_n\}$$

est non vide. Puisque K est fermé borné le point (x) du théorème [10.14] page 843 montre que pour tout $u \in \Pi_i$ il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \geq n$
2. la suite $u_{\varphi(n)}$ converge vers un point de K

On montre que si $x_0 = \lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)}$ alors

$$f(x_0) = \inf_{y\in K} f(y) \ .$$

Puisque $x_0 \in K$ l'inégalité $f(x_0) \geq \inf_{y\in K} f(y)$ est vérifiée et il suffit de montrer $f(x_0) \leq \inf_{y\in K} f(y)$. Mais d'après le point (iii) la semi-continuité inférieure de f entraîne que $f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(u_{\varphi(n)})$ il suffit donc de montrer

$$\liminf_{n\to\infty} f(u_{\varphi(n)}) \leq \inf_{y\in K} f(y) \ ,$$

or par définition de u et φ

$$\inf_{y\in K} f(y) \leq f(u_{\varphi(n)}) \leq \inf_{y\in K} f(y) + \frac{1}{\varphi(n)+1} \leq \inf_{y\in K} f(y) + \frac{1}{n+1}$$

ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} f(u_{\varphi(n)}) = \inf_{y\in K} f(y)$ par suite $\liminf_{n\to\infty} f(u_{\varphi(n)}) = \inf_{y\in K} f(y)$

(vii)

Il suffit encore de remplacer f par $-f$ dans la preuve de (vi), un copier coller de cette preuve peut aussi s'organiser de la manière suivante. Puisque f est $\imath(K,\mathcal{T})$-scs , pour tout $x \in K$ l'application f est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_K(x)$, ainsi le point (v) montre que f est bornée sur le fermé borné K. Notons $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \mathcal{P}(K))$ l'application définie par

$$B_n = \{x \in K / \sup_{y\in K} f(y) - \frac{1}{n+1} \leq f(x)\}$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B_n \neq \varnothing$. En effet, puisque $\sup_{y\in K} f(y)$ est le plus petit majorant de $f(K)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ le réel $\sup_{y\in K} f(y) - \dfrac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de $f(K)$ ainsi il existe $x \in K$ tel que $f(x) > \sup_{y\in K} f(y) - \dfrac{1}{n+1}$. L'axiome du choix entraîne que l'ensemble

$$\Pi_s = \prod_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N} \ , \ K) / \ \forall \ n \in \mathbb{N}, v_n \in B_n\}$$

est non vide. Puisque K est fermé borné le point (x) du théorème [10.14] page 843 montre que pour tout $v \in \Pi_s$ il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \geq n$
2. la suite $v_{\varphi(n)}$ converge vers un point de K

On montre que si $x_0 = \lim_{n\to\infty} v_{\varphi(n)}$ alors

$$f(x_0) = \sup_{y\in K} f(y) \ .$$

Puisque $x_0 \in K$ l'inégalité $f(x_0) \leq \sup_{y\in K} f(y)$ est vérifiée et il suffit de montrer $f(x_0) \geq \sup_{y\in K} f(y)$. Mais d'après le point (iv) la semi-continuité supérieure de f entraîne que $f(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} f(v_{\varphi(n)})$ il suffit donc de montrer

$$\limsup_{n\to\infty} f(v_{\varphi(n)}) \geq \sup_{y\in K} f(y) \ ,$$

or par définition de v et φ

$$\sup_{y\in K} f(y) - \frac{1}{n+1} \leq f(v_{\varphi(n)}) \leq \sup_{y\in K} f(y)$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to\infty} f(v_{\varphi(n)}) = \sup\limits_{y\in K} f(y)$ par suite $\limsup\limits_{n\to\infty} f(v_{\varphi(n)}) = \sup\limits_{y\in K} f(y)$

$(viii)$

D'abord u est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$ puisque si $\omega \in \Omega_f(x_0)$ et $\pi \in \Omega_g(x_0)$ alors $\pi\cap\omega$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x_0)$ sur lequel u est bornée, ainsi $\omega \cap \pi \in \Omega_u(x_0)$. Ensuite on montre que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} u = u(x_0)$

1. D'abord puisque $x_0 \in K$
$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} u \leq u(x_0)$$
2. Ensuite d'après l'inégalité (10.100) page 759 du théorème [10.6] on a
$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} f + \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} g \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} u$$
et la semi-continuité inférieure de f et g entraîne $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0)$ et $\liminf\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} g = g(x_0)$ ce qui montre que
$$u(x_0) \leq f(x_0) + g(x_0) \leq \liminf_{\mathcal{V}_K(x_0)} u$$

(ix)

D'abord u est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_K(x_0)$ puisque si $\omega \in \Omega_f(x_0)$ et $\pi \in \Omega_g(x_0)$ alors $\pi\cap\omega$ est un élément de $\mathcal{V}_K(x_0)$ sur lequel u est bornée, ainsi $\omega \cap \pi \in \Omega_u(x_0)$. Ensuite on montre que $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} u = u(x_0)$

1. D'abord puisque $x_0 \in K$
$$u(x_0) \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} u$$
2. Ensuite d'après l'inégalité (10.101) page 759 du théorème [10.6] on a
$$\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} u \leq \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} f + \limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} g$$
et la semi-continuité supérieure de f et g entraîne $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} f = f(x_0)$ et $\limsup\limits_{\mathcal{V}_K(x_0)} g = g(x_0)$ ce qui montre que
$$\limsup_{\mathcal{V}_K(x_0)} u \leq f(x_0) + g(x_0) \leq u(x_0)$$

(x)

D'après le lemme [10.36] page 812 f est continue sur K si et seulement si pour tout $x \in K$ l'application f est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_K(x)$ et

$$\liminf_{\mathcal{V}_K(x)} f = f(x) = \limsup_{\mathcal{V}_K(x)} f$$

ainsi

— si f est continue sur K alors les points (i) et (ii) montrent que f est à la fois $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-sci et $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-scs

— si f soit à la fois $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-sci et $\imath(K\ ,\mathcal{T})$-scs alors les points (i) et (ii) montrent que f est continue.

■

Le lemme [10.37] page 818 donne des conditions nécessaires et suffisantes de prolongement continue d'une application continue à l'adhérence de son domaine de définition, en appliquant ce lemme à un type particulier de fonction Riesz et Lebesgue on construit la théorie de la dérivation .

10.11 *Premières notions sur la dérivation*

10.11.1 *Dérivation en un point*

I ***Notations et définitions***

On note $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ un corps de réels, $\mathcal{T}$ la topologie standard sur $\mathbb{R}$, K un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ une application continue de K dans $\mathbb{R}$. Si $x_0 \in K$ est un point d'accumulation de K, $K_0 = K \cap \{x_0\}^c = \{x \in K / x \neq x_0\}$ l'application $\tau_{x_0}(f)$ de K_0 dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\tau_{x_0}(f)(t) = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$$

est $\imath(K_0, \mathcal{T})$-continue, l'objet de la théorie de la dérivation est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\tau_{x_0}(f)$ possède une limite le long du filtre

$$\mathcal{V}'(x_0) = \mathcal{V}_{K_0}(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(K_0)/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K_0 \subset A\}$$

et de voir ce que l'existence d'une telle limite implique. On rappelle que si K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in K$ est un point d'accumulation de K et $K_0 = K \cap \{x_0\}^c$ alors

1. On dit que $x_0 \in K$ est accessible à gauche si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

   $$]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K \neq \varnothing\ ,$$

   K'_g est l'ensemble des points de K accessibles à gauche. Si $x_0 \in K'_g$ il résulte de l'égalité

   $$]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K =]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K_0$$

   que le sous-ensemble de $\mathcal{P}(K_0)$ défini par

   $$\mathcal{V}'_g(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(K_0)/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :\ \ ]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0[\cap K_0 \subset A\}$$

   est un filtre sur K_0
2. On dit que $x_0 \in K$ est accessible à droite si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

   $$]x_0\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K \neq \varnothing\ ,$$

   K'_d est l'ensemble des points de K accessibles à droite. Si $x_0 \in K'_d$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(K_0)$ défini par

   $$\mathcal{V}'_d(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(K_0)/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :\ \ ]x_0\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K_0 \subset A\}$$

   est un filtre sur K_0

Une application f est dite dérivable en x_0 si $\tau_{x_0}(f)$ possède une limite le long du filtre $\mathcal{V}'(x_0)$.

Définition 10.62 *On note $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ un corps de réels, $\mathcal{T}$ la topologie standard sur $\mathbb{R}$, K un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ une application de K dans $\mathbb{R}$. Si $x_0 \in K$ est un point d'accumulation de K, l'ensemble K_0 est défini par $K_0 = K \cap \{x_0\}^c = \{x \in K / x \neq x_0\}$ et l'application $\tau_{x_0}(f)$ de K_0 dans $\mathbb{R}$ est définie par*

$$\tau_{x_0}(f)(t) = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$$

(i)

1. *On dit que f est **dérivable** en x_0 si $\tau_{x_0}(f)$ possède une limite le long du filtre*

   $$\mathcal{V}'(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(K_0)/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K_0 \subset A\}$$

   cela signifie que $\tau_{x_0}(f)$ possède les propriétés suivantes

(a) *$\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}'(x_0)$ ce qui signifie qu'il existe $\omega' \in \mathcal{V}'(x_0)$ sur lequel $\tau_{x_0}(f)$ est bornée : l'ensemble*

$$\Omega'(x_0) = \{\omega' \in \mathcal{V}'(x_0)/ \ \exists \ M \in \mathbb{R}_+ : t \in \omega' \Rightarrow |\tau_{x_0}(f)(t)| \leq M\}$$

est non vide

(b)

$$\sup_{\omega' \in \Omega'(x_0)} (\inf_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t)) = \liminf_{\mathcal{V}'(x_0)} \tau_{x_0}(f) = \limsup_{\mathcal{V}'(x_0)} f = \inf_{\omega' \in \Omega'(x_0)} (\sup_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t))$$

2. *Si $x_0 \in K'_g$ on dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 si $\tau_{x_0}(f)$ possède une limite le long du filtre*

$$\mathcal{V}'_g(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(K_0)/ \ \exists \ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x_0 - \varepsilon \ , \ x_0[\cap K_0 \subset A\}$$

cela signifie que $\tau_{x_0}(f)$ possède les propriétés suivantes

(a) *$\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}'_g(x_0)$: l'ensemble*

$$\Omega'_g(x_0) = \{\omega' \in \mathcal{V}'_g(x_0)/ \ \exists \ M \in \mathbb{R}_+ : t \in \omega' \Rightarrow |\tau_{x_0}(f)(t)| \leq M\}$$

est non vide

(b)

$$\sup_{\omega' \in \Omega'_g(x_0)} (\inf_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t)) = \liminf_{\mathcal{V}'_g(x_0)} \tau_{x_0}(f) = \limsup_{\mathcal{V}'_g(x_0)} \tau_{x_0}(f) = \inf_{\omega' \in \Omega'_g(x_0)} (\sup_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t))$$

3. *Si $x_0 \in K'_d$ on dit que f est **dérivable à droite** en x_0 si $\tau_{x_0}(f)$ possède une limite le long du filtre*

$$\mathcal{V}'_d(x_0) = \{A \in \mathcal{P}(K_0)/ \ \exists \ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x_0, \ x_0 + \varepsilon[\cap K_0 \subset A\}$$

cela signifie que $\tau_{x_0}(f)$ possède les propriétés suivantes

(a) *$\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}'_d(x_0)$: l'ensemble*

$$\Omega'_d(x_0) = \{\omega' \in \mathcal{V}'_g(x_0)/ \ \exists \ M \in \mathbb{R}_+ : t \in \omega' \Rightarrow |\tau_{x_0}(f)(t)| \leq M\}$$

est non vide

(b)

$$\sup_{\omega' \in \Omega'_d(x_0)} (\inf_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t)) = \liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f) = \limsup_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f) = \inf_{\omega' \in \Omega'_d(x_0)} (\sup_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t))$$

(ii)

1. *Si $\tau_{x_0}(f)$ est localement borné sur le filtre $\mathcal{V}'(x_0)$ on appelle*

(a) ***Dérivée inférieure** de f en x_0 le nombre réel $\lambda_*(f, x_0)$ défini par*

$$\lambda_*(f, x_0) = \liminf_{\mathcal{V}'(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

(b) ***Dérivée supérieure** de f en x_0 le nombre réel $\lambda^*(f, x_0)$ défini par*

$$\lambda^*(f, x_0) = \limsup_{\mathcal{V}'(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

2. *Si $x_0 \in K'_g$ et $\tau_{x_0}(f)$ est localement borné sur le filtre $\mathcal{V}'_g(x_0)$ on appelle*

(a) ***Dérivée inférieure gauche** de f en x_0 le nombre réel $\lambda_*^g(f, x_0)$ défini par*

$$\lambda_*^g(f, x_0) = \liminf_{\mathcal{V}'_g(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

(b) ***Dérivée supérieure gauche*** *de f en x_0 le nombre réel $\lambda_g^*(f,x_0)$ défini par*

$$\lambda_g^*(f,x_0) = \limsup_{\mathcal{V}'_g(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

3. *Si $x_0 \in K'_d$ et $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}'_d(x_0)$ on appelle*

   (a) ***Dérivée inférieure droite*** *de f en x_0 le nombre réel $\lambda_*^d(f,x_0)$ défini par*

   $$\lambda_*^d(f,x_0) = \liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

   (b) ***Dérivée supérieure droite*** *de f en x_0 le nombre réel $\lambda_d^*(f,x_0)$ défini par*

   $$\lambda_d^*(f,x_0) = \limsup_{\mathcal{V}'_g(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

On introduit quelques notations usuelles.

Notation 10.4 *On note $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ un corps de réels, $\mathcal{T}$ la topologie standard sur $\mathbb{R}$, K un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ une application de K dans $\mathbb{R}$. Si $x_0 \in K$ est un point d'accumulation de K, l'ensemble K_0 est défini par $K_0 = K \cap \{x_0\}^c = \{t \in K / t \neq x_0\}$ et l'application $\tau_{x_0}(f)$ de K_0 dans $\mathbb{R}$ est définie par*

$$\tau_{x_0}(f)(t) = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$$

1. *Si f est dérivable en x_0 on note $f'(x_0)$ la limite de $\tau_{x_0}(f)$ le long du filtre $\mathcal{V}'(x_0)$:*

$$f'(x_0) = \liminf_{\mathcal{V}'(x_0)} \tau_{x_0}(f) = \limsup_{\mathcal{V}'(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

2. *Si $x_0 \in K'_g$ et f est dérivable à gauche en x_0 on note $f'_g(x_0)$ la limite de $\tau_{x_0}(f)$ le long du filtre $\mathcal{V}'_g(x_0)$:*

$$f'_g(x_0) = \liminf_{\mathcal{V}'_g(x_0)} \tau_{x_0}(f) = \limsup_{\mathcal{V}'_g(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

3. *Si $x_0 \in K'_d$ et f est dérivable à droite en x_0 on note $f'_d(x_0)$ la limite de $\tau_{x_0}(f)$ le long du filtre $\mathcal{V}'_d(x_0)$:*

$$f'_d(x_0) = \liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f) = \limsup_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathbb{R}$ avec

$$f'_d(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

et

$$f'_g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ -1 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Cependant f n'est pas dérivable en zéro puisque

$$\liminf_{\mathcal{V}'(0)} \tau_0(f) = -1 \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{V}'(0)} \tau_0(f) = 1$$

Le théorème suivant qui donne les propriétés les plus élémentaires (et les plus utiles) de la dérivation utilise les notations de la définition [10.62] page 858 et de [10.4] page 860

Théorème 10.15 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. Si* $x_0 \in K$ *est un point d'accumulation de* K*, l'ensemble* K_0 *est défini par* $K_0 = K \cap \{x_0\}^c = \{t \in K/t \neq x_0\}$ *et l'application* $\tau_{x_0}(f)$ *de* K_0 *dans* $\mathbb{R}$ *est définie par*

$$\tau_{x_0}(f)(t) = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$$

(i) les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *Si* $\tau_{x_0}(f)$ *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}'(x_0)$ *alors* f *est continue en* x_0*.*
2. *Si* $x_0 \in K'_g$ *et* $\tau_{x_0}(f)$ *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}'_g(x_0)$ *alors* f *est continue à gauche en* x_0*.*
3. *Si* $x_0 \in K'_d$ *et* $\tau_{x_0}(f)$ *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}'_d(x_0)$ *alors* f *est continue à droite en* x_0*.*
4. *Si* $x_0 \in K'_d \cap K'_g$ *pour que* $\tau_{x_0}(f)$ *soit localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}'(x_0)$ *il faut et il suffit qu'elle soit localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}'_d(x_0)$ *et localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}'_g(x_0)$*.*

(ii)

Dérivée supérieure droite

Si $x_0 \in K'_d$ *et* $\tau_{x_0}(f)$ *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}'_d(x_0)$ *et* W_d *est l'application de* $\mathbb{R}^*_+$ *dans* $\mathcal{P}(K_0)$ *définie par*

$$W_d(\eta) =]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0$$

alors

1. *L'ensemble*
$$\Gamma_d = \{\eta \in \mathbb{R}^*_+ / W_d(\eta) \in \Omega'_d(x_0)\}$$
est non vide, de plus pour tout $\omega' \in \Omega'_d(x_0)$ *il existe* $\eta \in \Gamma_d$ *tel que* $W_d(\eta) \subset \omega'$*.*
2. $\lambda^*_d(f, x_0)$ *est le plus grand minorant de l'ensemble*
$$\Lambda^*_d = \{y \in \mathbb{R}/\ \exists\ \eta \in \Gamma_d : y = \sup_{t \in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\ \}$$
ce qu'on note
$$\lambda^*_d(f, x_0) = \inf_{\eta \in \Gamma_d} (\sup_{t \in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t))$$
3. *Pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}^*_+$ *tel que*
$$t \in]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow f(t) - f(x_0) < (\lambda^*_d(f, x_0) + \varepsilon)(t - x_0) \tag{10.136}$$
En particulier si $\lambda^*_d(f, x_0) < 0$ *alors* x_0 *est un maximum local strict à droite : il existe* $\eta \in \mathbb{R}^*_+$ *tel que*
$$t \in]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow f(t) < f(x_0)$$

(iii)

Dérivée inférieure droite

Si $x_0 \in K'_d$ *et* $\tau_{x_0}(f)$ *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}'_d(x_0)$ *et* W_d *est l'application de* $\mathbb{R}^*_+$ *dans* $\mathcal{P}(K_0)$ *définie par*

$$W_d(\eta) =]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0$$

alors

1. *L'ensemble*
$$\Gamma_d = \{\eta \in \mathbb{R}_+^* / W_d(\eta) \in \Omega_d'(x_0)\}$$
est non vide , de plus pour tout $\omega' \in \Omega_d'(x_0)$ *il existe* $\eta \in \Gamma_d$ *tel que* $W_d(\eta) \subset \omega'$.
2. $\lambda_*^d(f, x_0)$ *est le plus petit majorant de l'ensemble*
$$\Lambda_*^d = \{y \in \mathbb{R}/ \; \exists \; \eta \in \Gamma_d : y = \inf_{t \in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$
ce qu'on note
$$\lambda_*^d(f, x_0) = \sup_{\eta \in \Gamma_d} (\inf_{t \in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t))$$
3. *Pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x_0 \; , \; x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow f(t) - f(x_0) > (\lambda_*^d(f, x_0) - \varepsilon)(t - x_0) \tag{10.137}$$
En particulier si $\lambda_*^d(f, x_0) > 0$ *alors* x_0 *est un minimum local strict à droite : il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x_0 \; , \; x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow f(t) > f(x_0)$$

(iv) Si $x_0 \in K_d'$ *et* $\tau_{x_0}(f)$ *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}_d'(x_0)$ *alors pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x_0 \; , \; x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow (\lambda_*^d(f, x_0) - \varepsilon)(t - x_0) < f(t) - f(x_0) < (\lambda_d^*(f, x_0) + \varepsilon)(t - x_0) \tag{10.138}$$
En particulier si f *est dérivable à droite en* x_0 *alors pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x_0 \; , \; x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0) - f_d'(x_0)(t - x_0)| < \varepsilon \; (t - x_0) \tag{10.139}$$

(v)

Dérivée supérieure gauche

Si $x_0 \in K_g'$ *et* $\tau_{x_0}(f)$ *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}_g'(x_0)$ *et* W_g *est l'application de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathcal{P}(K_0)$ *définie par*
$$W_g(\eta) =]x_0 - \eta \; , \; x_0[\cap K_0$$
alors

1. *L'ensemble*
$$\Gamma_g = \{\eta \in \mathbb{R}_+^* / W_g(\eta) \in \Omega_g'(x_0)\}$$
est non vide , de plus pour tout $\omega' \in \Omega_g'(x_0)$ *il existe* $\eta \in \Gamma_g$ *tel que* $W_g(\eta) \subset \omega'$.
2. $\lambda_g^*(f, x_0)$ *est le plus grand minorant de l'ensemble*
$$\Lambda_g^* = \{y \in \mathbb{R}/ \; \exists \; \eta \in \Gamma_g : y = \sup_{t \in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$
ce qu'on note
$$\lambda_g^*(f, x_0) = \inf_{\eta \in \Gamma_g} (\sup_{t \in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t))$$
3. *Pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x_0 - \eta \; , \; x_0[\cap K_0 \Rightarrow f(x_0) - f(t) < (\lambda_g^*(f, x_0) + \varepsilon)(x_0 - t) \tag{10.140}$$
En particulier si $\lambda_g^*(f, x_0) < 0$ *alors* x_0 *est un minimum local strict à gauche : il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x_0 - \eta \; , \; x_0[\cap K_0 \Rightarrow f(x_0) < f(t)$$

(vi)

Dérivée inférieure gauche

Si $x_0 \in K'_g$ *et* $\tau_{x_0}(f)$ *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}'_g(x_0)$ *et* W_g *est l'application de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathcal{P}(K_0)$ *définie par*

$$W_g(\eta) =]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K_0$$

alors

1. *L'ensemble*
$$\Gamma_g = \{\eta \in \mathbb{R}_+^* / W_g(\eta) \in \Omega'_g(x_0)\}$$
est non vide , de plus pour tout $\omega' \in \Omega'_g(x_0)$ *il existe* $\eta \in \Gamma_g$ *tel que* $W_g(\eta) \subset \omega'$.

2. $\lambda_*^g(f, x_0)$ *est le plus petit majorant de l'ensemble*
$$\Lambda_*^g = \{y \in \mathbb{R} / \ \exists\ \eta \in \Gamma_g : y = \inf_{t \in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$
ce qu'on note
$$\lambda_*^g(f, x_0) = \sup_{\eta \in \Gamma_g} (\inf_{t \in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t))$$

3. *Pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K_0 \Rightarrow f(x_0) - f(t) > (\lambda_*^g(f, x_0) - \varepsilon)(x_0 - t) \tag{10.141}$$
En particulier si $\lambda_*^g(f, x_0) > 0$ *alors* x_0 *est un maximum local strict à gauche : il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K_0 \Rightarrow f(t) < f(x_0)$$

(vii) Si $x_0 \in K'_g$ *et* $\tau_{x_0}(f)$ *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}'_g(x_0)$ *alors pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$t \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K_0 \Rightarrow (\lambda_*^g(f, x_0) - \varepsilon)(x_0 - t) < f(x_0) - f(t) < (\lambda_g^*(f, x_0) + \varepsilon)(x_0 - t) \tag{10.142}$$

En particulier si f *est dérivable à gauche en* x_0 *alors pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$t \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0) - f'_g(x_0)(t - x_0)| < \varepsilon\ (x_0 - t) \tag{10.143}$$

(viii)

Dérivée supérieure et inférieure

Si $\tau_{x_0}(f)$ *est localement bornée sur le filtre* $\mathcal{V}'(x_0)$ *et* W *est l'application de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathcal{P}(K_0)$ *définie par*

$$W(\eta) =]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0$$

alors

1. *L'ensemble*
$$\Gamma = \{\eta \in \mathbb{R}_+^* / W(\eta) \in \Omega'(x_0)\}$$
est non vide , de plus pour tout $\omega' \in \Omega'(x_0)$ *il existe* $\eta \in \Gamma$ *tel que* $W(\eta) \subset \omega'$.

2. $\lambda^*(f, x_0)$ *est le plus grand minorant de l'ensemble*
$$\Lambda^* = \{y \in \mathbb{R} / \ \exists\ \eta \in \Gamma : y = \sup_{t \in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$
ce qu'on note
$$\lambda^*(f, x_0) = \inf_{\eta \in \Gamma} (\sup_{t \in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t))$$

3. $\lambda_*(f,x_0)$ *est le plus petit majorant de l'ensemble*

$$\Lambda_* = \{y \in \mathbb{R}/ \ \exists\ \eta \in \Gamma : y = \inf_{t\in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$

ce qu'on note

$$\lambda_*(f,x_0) = \sup_{\eta\in\Gamma}(\inf_{t\in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t))$$

4. *Si* $x_0 \in K'_g$ *alors*

$$\lambda_*(f,x_0) \le \lambda_*^g(f,x_0) \le \lambda_g^*(f,x_0) \le \lambda^*(f,x_0) \tag{10.144}$$

En particulier si f *est dérivable en* x_0 *alors* f *est dérivable à gauche en* x_0 *et*

$$f'_g(x_0) = f'(x_0)\ .$$

5. *Si* $x_0 \in K'_d$ *alors*

$$\lambda_*(f,x_0) \le \lambda_*^d(f,x_0) \le \lambda_d^*(f,x_0) \le \lambda^*(f,x_0) \tag{10.145}$$

En particulier si f *est dérivable en* x_0 *alors* f *est dérivable à droite en* x_0 *et*

$$f'_d(x_0) = f'(x_0)\ .$$

6. *Si* $x_0 \in K'_g \cap K'_d$ *et* f *est dérivable en* x_0 *alors* f *est dérivable à droite et à gauche en* x_0 *et*

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$

7. *Si* $x_0 \in K'_g \cap K'_d$ *alors pour tout* $\eta \in \Gamma$ *on a* $W(\eta) = W_g(\eta) \cup W_d(\eta)$, *de plus*

$$\inf_{t\in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) = \min\{\inf_{t\in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\ ,\ \inf_{t\in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\} \tag{10.146}$$

et

$$\sup_{t\in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) = \max\{\sup_{t\in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\ ,\ \sup_{t\in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\} \tag{10.147}$$

8. *Si* $x_0 \in K'_g \cap K'_d$

$$\lambda_*(f\ ,x_0) = \min\{\lambda_*^d(f\ ,x_0)\ ,\ \lambda_*^g(f\ ,x_0)\} \quad \text{et} \quad \lambda^*(f\ ,x_0) = \max\{\lambda_d^*(f\ ,x_0)\ ,\ \lambda_g^*(f\ ,x_0)\} \tag{10.148}$$

En particulier pour que f *soit dérivable en* x_0 *il faut et il suffit que* f *soit dérivable à droite et à gauche en* x_0 *et que* $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

9. *Si* $x_0 \in K'_g \cap K'_d$ *et* f *est dérivable en* x_0 *alors pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$t \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0) - f'(x_0)(t - x_0)| < \varepsilon\ |t - x_0|. \tag{10.149}$$

(ix) Si $x_0 \in K'_d$ *pour que* f *soit dérivable à droite en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $a_d \in \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$t \in]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0) - a_d(t - x_0)| < \varepsilon\ (t - x_0) \tag{10.150}$$

On a alors $a_d = f'_d(x_0)$

(x) Si $x_0 \in K'_g$ *pour que* f *soit dérivable à gauche en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $a_g \in \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$t \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0) - a_g(t - x_0)| < \varepsilon\ (x_0 - t) \tag{10.151}$$

On a alors $a_g = f'_g(x_0)$

(xi) Si $x_0 \in K'_g \cap K'_d$ *pour que* f *soit dérivable en* x_0 *il faut et il suffit qu'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$t \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0) - a(t - x_0)| < \varepsilon\ |x_0 - t| \tag{10.152}$$

On a alors $a = f'(x_0)$

Preuve

(i)

1. Dire que $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur $\mathcal{V}'(x_0)$ c'est dire qu'il existe $\omega' \in \mathcal{V}'(x_0)$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$t \in \omega' \Rightarrow \left| \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \right| \leq M \ .$$
Puisque $\omega' \in \mathcal{V}'(x_0)$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta[\cap K_0 \subset \omega'$ en particulier on obtient
$$t \in]x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq M \ |t - x_0|$$
ainsi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ si $\eta = \min\{\delta \ , \ \dfrac{\varepsilon}{M}\}$ on obtient
$$t \in]x_0 - \eta \ , \ x_0 + \eta[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$
et le point (xi) du lemme [10.33] page 782 montre alors que f est continue en x_0.
2. Dire que $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur $\mathcal{V}_g'(x_0)$ c'est dire qu'il existe $\omega' \in \mathcal{V}_g'(x_0)$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$t \in \omega' \Rightarrow \left| \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \right| \leq M \ .$$
Puisque $\omega' \in \mathcal{V}_g'(x_0)$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \delta \ , \ x_0[\cap K_0 \subset \omega'$ en particulier on obtient
$$t \in)x_0 - \delta \ , \ x_0[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq M \ |t - x_0|$$
ainsi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ si $\eta = \min\{\delta \ , \ \dfrac{\varepsilon}{M}\}$ on obtient
$$t \in]x_0 - \eta \ , \ x_0[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$
et le point (ix) du lemme [10.34] page 796 montre alors que f est continue à gauche en x_0.
3. Dire que $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur $\mathcal{V}_d'(x_0)$ c'est dire qu'il existe $\omega' \in \mathcal{V}_g'(x_0)$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$t \in \omega' \Rightarrow \left| \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \right| \leq M \ .$$
Puisque $\omega' \in \mathcal{V}_d'(x_0)$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 \ , \ x_0 + \delta[\cap K_0 \subset \omega'$ en particulier on obtient
$$t \in)x_0 \ , \ x_0 + \delta[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq M \ |t - x_0|$$
ainsi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ si $\eta = \min\{\delta \ , \ \dfrac{\varepsilon}{M}\}$ on obtient
$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$
et le point (ix) du lemme [10.35] page 809 montre alors que f est continue à droite en x_0.
4. Soit $x_0 \in K_g' \cap K_d'$
   (a) Si $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur $\mathcal{V}'(x_0)$ alors il existe $\omega' \in \mathcal{V}'(x_0)$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
   $$t \in \omega' \Rightarrow \ |\tau_{x_0}(f)(t)| \leq M \ .$$
   Puisque $\omega' \in \mathcal{V}'(x_0)$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta[\cap K_0 \subset \omega'$ en particulier on obtient
   $$t \in]x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta[\cap K_0 \Rightarrow |\tau_{x_0}(f)(t)| \leq M$$
   Ainsi l'ensemble $\pi_0 =]x_0 - \delta \ , \ x_0[\cap K_0$ est un élément de $\mathcal{V}_g'(x_0)$ sur lequel $\tau_{x_0}(f)$ est bornée et l'ensemble $\pi_1 =]x_0 \ , x_0 + \delta[\cap K_0$ est un élément de $\mathcal{V}_d'(x_0)$ sur lequel $\tau_{x_0}(f)$ est bornée

(b) Si $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur $\mathcal{V}'_g(x_0)$ et $\mathcal{V}'_g(x_0)$ alors il existe $(\pi_0,\pi_1) \in \mathcal{V}'_g(x_0) \times \mathcal{V}'_d(x_0)$ et $(M_0, M_1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in \pi_0 \Rightarrow \ |\tau_{x_0}(f)(t)| \leq M_0 \quad \text{et} \quad t \in \pi_1 \Rightarrow \ |\tau_{x_0}(f)(t)| \leq M_1.$$

Puisque $(\pi_0,\pi_1) \in \mathcal{V}'_g(x_0) \times \mathcal{V}'_d(x_0)$ il existe $(\delta_0,\delta_1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]x_0-\delta_0 \ , \ x_0[\cap K_0 \subset \pi_0 \quad \text{et} \quad]x_0 \ , \ x_0+\delta_1[\cap K_0 \subset \pi_1$$

ainsi on obtient

$$t \in (]x_0-\delta_0 \ , \ x_0[\ \cup \ ]x_0 \ , \ x_0+\delta_1[) \cap K_0 \Rightarrow |\tau_{x_0}(f)(t)| \leq \max\{M_0, M_1\}$$

en particulier en posant par exemple $\eta = \min\{\delta_0 \ , \ \delta_1\}$ on obtient, puisque $x_0 \notin K_0$,

$$t \in]x_0-\eta \ , \ x_0+\eta[\cap K_0 \Rightarrow |\tau_{x_0}(f)(t)| \leq \max\{M_0, M_1\}$$

Ainsi l'ensemble $\omega' =]x_0-\eta \ , \ x_0+\eta[\cap K_0$ est un élément de $\mathcal{V}'(x_0)$ sur lequel $\tau_{x_0}(f)$ est bornée

(ii)

Dérivée supérieure droite

1. Puisque $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur $\mathcal{V}'_d(x_0)$ on a $\Omega'_d(x_0) \neq \varnothing$. Or si $\omega' \in \Omega'_d(x_0)$ alors ω' est un élément de $\mathcal{V}'_d(x_0)$, par suite il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $W_d(\eta) \subset \omega'$, ainsi $\tau_{x_0}(f)$ qui est bornée sur ω' est bornée sur $W_d(\eta)$ par suite $W_d(\eta) \in \Omega'_d(x_0)$ et $\eta \in \Gamma_d$.
2. Par définition $\lambda_d^*(f,x_0) = \inf\limits_{\omega' \in \Omega'_d(x_0)} (\sup\limits_{t\in\omega'} \tau_{x_0}(f)(t))$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$U_d^* = \{y \in \mathbb{R} / \ \exists \ \omega' \in \Omega'_d(x_0) : y = \sup_{t\in\omega'} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$

il s'agit donc de montrer $\inf\{y : y \in U_d^*\} = \inf\{y : y \in \Lambda_d^*\}$

(a) D'abord il résulte du fait que pour tout $\eta \in \Gamma_d$ on a $W_d(\eta) \in \Omega'_d(x_0)$ que $\Lambda_d^* \subset U_d^*$ par suite

$$\inf\{y : y \in U_d^*\} \leq \inf\{y : y \in \Lambda_d^*\}$$

(b) Ensuite on montre que tout élément de U_d^* est minoré par un élément de Λ_d^*. En effet si $\omega' \in \Omega'_d(x_0)$ et $y = \sup\limits_{t\in\omega'} \tau_{x_0}(f)(t)$ alors puisque $\omega' \in \Omega'_d(x_0)$ il existe $\eta \in \Gamma_d$ tel que $W_d(\eta) \subset \omega'$, pour un tel η le réel $z = \sup\limits_{t\in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)$ est un élément de Λ_d^* qui minore y. Ainsi tout minorant de Λ_d^* est un minorant de U_d^* et

$$\inf\{y : y \in \Lambda_d^*\} \leq \inf\{y : y \in U_d^*\}$$

3. Puisque $\lambda_d^*(f,x_0)$ est le plus grand minorant de Λ_d^* le réel $\lambda_d^*(f,x_0)+\varepsilon$ n'est pas un minorant de Λ_d^* par suite il existe $\eta \in \Gamma_d$ tel que

$$\sup_{t\in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) < \lambda_d^*(f,x_0)+\varepsilon$$

puisque $t \in W_d(\eta) \Rightarrow t > x_0$ on obtient

$$t \in W_d(\eta) \Rightarrow f(t)-f(x_0) < (\lambda_d^*(f,x_0)+\varepsilon)(t-x_0)$$

Ceci est l'inégalité (10.136) page 861 . Enfin si $\lambda_d^*(f,x_0) < 0$ il existe un certain $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda_d^*(f,x_0)+\varepsilon < 0$ et l'inégalité précédente montre qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0 \ , \ x_0+\eta[\cap K_0 \Rightarrow f(t)-f(x_0) < (\lambda_d^*(f,x_0)+\varepsilon)(t-x_0) < 0$$

(iii)

En remarquant que

$$\tau_{x_0}(-f) = \frac{f(x_0) - f(t)}{t - x_0} = -\tau_{x_0}(f)$$

on voit qu'on obtient (iii) en appliquant (ii) à l'application $-f$, sinon un copier-coller pas forcément inutile peut s'organiser de la manière suivante.

Dérivée inférieure droite

1. Ce point est prouvé en (ii)
2. Par définition $\lambda_*^d(f, x_0) = \sup_{\omega' \in \Omega_d'(x_0)} (\inf_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t))$ est la borne supérieure de l'ensemble

$$V_*^d = \{y \in \mathbb{R} / \ \exists \ \omega' \in \Omega_d'(x_0) : y = \inf_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$

   il s'agit donc de montrer $\sup\{y : y \in V_*^d\} = \sup\{y : y \in \Lambda_*^d\}$

   (a) D'abord il résulte du fait que pour tout $\eta \in \Gamma_d$ on a $W_d(\eta) \in \Omega_d'(x_0)$ que $\Lambda_*^d \subset V_*^d$ par suite

$$\sup\{y : y \in V_*^d\} \geq \sup\{y : y \in \Lambda_*^d\}$$

   (b) Ensuite on montre que tout élément de V_*^d est majoré par un élément de Λ_*^d. En effet si $\omega' \in \Omega_d'(x_0)$ et $y = \inf_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t)$ alors puisque $\omega' \in \Omega_d'(x_0)$ il existe $\eta \in \Gamma_d$ tel que $W_d(\eta) \subset \omega'$, pour un tel η le réel $z = \inf_{t \in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)$ est un élément de Λ_*^d qui majore y. Ainsi tout majorant de Λ_*^d est un majorant de V_*^d et

$$\sup\{y : y \in \Lambda_*^d\} \geq \sup\{y : y \in V_*^d\}$$

3. Puisque $\lambda_*^d(f, x_0)$ est le plus petit majorant de Λ_*^d le réel $\lambda_*^d(f, x_0) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de Λ_*^d par suite il existe $\eta \in \Gamma_d$ tel que

$$\inf_{t \in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) > \lambda_d^*(f, x_0) - \varepsilon$$

   puisque $t \in W_d(\eta) \Rightarrow t > x_0$ on obtient

$$t \in W_d(\eta) \Rightarrow f(t) - f(x_0) > (\lambda_*^d(f, x_0) - \varepsilon)(t - x_0)$$

   Ceci est l'inégalité (10.137) page 862 . Enfin si $\lambda_*^d(f, x_0) > 0$ il existe un certain $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda_*^d(f, x_0) - \varepsilon > 0$ et l'inégalité précédente montre qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow f(t) - f(x_0) > (\lambda_*^d(f, x_0) - \varepsilon)(t - x_0) > 0$$

(iv)

Les inégalités (10.136) page 861 et (10.137) page 862 montrent que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $(\eta_0, \eta_1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta_0[\cap K_0 \Rightarrow f(t) - f(x_0) < (\lambda_d^*(f, x_0) + \varepsilon)(t - x_0)$$

et

$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta_1[\cap K_0 \Rightarrow (\lambda_*^d(f, x_0) - \varepsilon)(t - x_0) < f(t) - f(x_0)$$

En particulier si $\eta = \min\{\eta_0 \ , \ \eta_1\}$ on obtient

$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta[\Rightarrow (\lambda_*^d(f, x_0) - \varepsilon)(t - x_0) < f(t) - f(x_0) < (\lambda_d^*(f, x_0) + \varepsilon)(t - x_0)$$

Dire que f est dérivable à droite en x_0 c'est dire que

$$\lambda_*^d(f,x_0)=\lambda_d^*(f,x_0)=f'_d(x_0)$$

ainsi l'inégalité (10.138) page 862 montre qu'il existe $\eta\in\mathbb{R}_+^*$

$$t\in]x_0\ ,\ x_0+\eta[\Rightarrow (f'_d(x_0)-\varepsilon)(t-x_0)<f(t)-f(x_0)<(f'_d(x_0)+\varepsilon)(t-x_0)$$

ce qui est une façon d'écrire l'inégalité (10.139) page 862

(v)

Dérivée supérieure gauche

1. Puisque $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur $\mathcal{V}'_g(x_0)$ on a $\Omega'_g(x_0)\neq\varnothing$. Or si $\omega'\in\Omega'_g(x_0)$ alors ω' est un élément de $\mathcal{V}'_g(x_0)$, par suite il existe $\eta\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $W_g(\eta)\subset\omega'$, ainsi $\tau_{x_0}(f)$ qui est bornée sur ω' est bornée sur $W_g(\eta)$ par suite $W_g(\eta)\in\Omega'_g(x_0)$ et $\eta\in\Gamma_g$.
2. Par définition $\lambda_g^*(f,x_0)=\inf\limits_{\omega'\in\Omega'_g(x_0)}(\sup\limits_{t\in\omega'}\tau_{x_0}(f)(t))$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$U_g^*=\{y\in\mathbb{R}/\ \exists\ \omega'\in\Omega'_g(x_0):y=\sup_{t\in\omega'}\tau_{x_0}(f)(t)\}$$

   il s'agit donc de montrer $\inf\{y:y\in U_g^*\}=\inf\{y:y\in\Lambda_g^*\}$
   (a) D'abord il résulte du fait que pour tout $\eta\in\Gamma_g$ on a $W_g(\eta)\in\Omega'_d(x_0)$ que $\Lambda_g^*\subset U_g^*$ par suite

$$\inf\{y:y\in U_g^*\}\leq\inf\{y:y\in\Lambda_g^*\}$$

   (b) Ensuite on montre que tout élément de U_g^* est minoré par un élément de Λ_g^*. En effet si $\omega'\in\Omega'_d(x_0)$ et $y=\sup\limits_{t\in\omega'}\tau_{x_0}(f)(t)$ alors puisque $\omega'\in\Omega'_g(x_0)$ il existe $\eta\in\Gamma_g$ tel que $W_g(\eta)\subset\omega'$, pour un tel η le réel $z=\sup\limits_{t\in W_d(\eta)}\tau_{x_0}(f)(t)$ est un élément de Λ_g^* qui minore y. Ainsi tout minorant de Λ_g^* est un minorant de U_g^* et

$$\inf\{y:y\in\Lambda_g^*\}\leq\inf\{y:y\in U_g^*\}$$

3. Puisque $\lambda_g^*(f,x_0)$ est le plus grand minorant de Λ_g^* le réel $\lambda_g^*(f,x_0)+\varepsilon$ n'est pas un minorant de Λ_g^* par suite il existe $\eta\in\Gamma_g$ tel que

$$\sup_{t\in W_g(\eta)}\tau_{x_0}(f)(t)<\lambda_d^*(f,x_0)+\varepsilon$$

   puisque $t\in W_g(\eta)\Rightarrow x_0>t$ on obtient , en remarquant que $\tau_{x_0}(f)(t)=\dfrac{f(x_0)-f(t)}{x_0-t}$,

$$t\in W_g(\eta)\Rightarrow f(x_0)-f(t)<(\lambda_g^*(f,x_0)+\varepsilon)(x_0-t)$$

   Ceci est l'inégalité (10.140) page 862 . Enfin si $\lambda_g^*(f,x_0)<0$ il existe un certain $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda_g^*(f,x_0)+\varepsilon<0$ et l'inégalité précédente montre qu'il existe $\eta\in\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t\in]x_0-\eta\ ,\ x_0[\cap K_0\Rightarrow f(x_0)-f(t)<(\lambda_d^*(f,x_0)+\varepsilon)(x_0-t)<0$$

(vi)

Dérivée inférieure gauche

1. Ce point est prouvé en (v)

2. Par définition $\lambda_*^g(f,x_0)=\sup_{\omega'\in\Omega'_g(x_0)}(\inf_{t\in\omega'}\tau_{x_0}(f)(t))$ est la borne supérieure de l'ensemble

$$V_*^g=\{y\in\mathbb{R}/\ \exists\ \omega'\in\Omega'_g(x_0):y=\inf_{t\in\omega'}\tau_{x_0}(f)(t)\}$$

il s'agit donc de montrer $\sup\{y:y\in V_*^g\}=\sup\{y:y\in\Lambda_*^g\}$

(a) D'abord il résulte du fait que pour tout $\eta\in\Gamma_g$ on a $W_g(\eta)\in\Omega'_g(x_0)$ que $\Lambda_*^g\subset V_*^g$ par suite

$$\sup\{y:y\in V_*^g\}\geq\sup\{y:y\in\Lambda_*^g\}$$

(b) Ensuite on montre que tout élément de V_*^g est majoré par un élément de Λ_*^g. En effet si $\omega'\in\Omega'_g(x_0)$ et $y=\inf_{t\in\omega'}\tau_{x_0}(f)(t)$ alors puisque $\omega'\in\Omega'_g(x_0)$ il existe $\eta\in\Gamma_g$ tel que $W_g(\eta)\subset\omega'$, pour un tel η le réel $z=\inf_{t\in W_g(\eta)}\tau_{x_0}(f)(t)$ est un élément de Λ_*^g qui majore y. Ainsi tout majorant de Λ_*^g est un majorant de V_*^g et

$$\sup\{y:y\in\Lambda_*^g\}\geq\sup\{y:y\in V_*^g\}$$

3. Puisque $\lambda_*^g(f,x_0)$ est le plus petit majorant de Λ_*^g le réel $\lambda_*^g(f,x_0)-\varepsilon$ n'est pas un majorant de Λ_*^g par suite il existe $\eta\in\Gamma_g$ tel que

$$\inf_{t\in W_g(\eta)}\tau_{x_0}(t)>\lambda_*^g(f,x_0)-\varepsilon$$

puisque $t\in W_g(\eta)\Rightarrow t<x_0$ on obtient

$$t\in W_g(\eta)\Rightarrow f(x_0)-f(t)>(\lambda_*^g(f,x_0)-\varepsilon)(x_0-t)$$

Ceci est l'inégalité (10.141) page 863 . Enfin si $\lambda_*^g(f,x_0)>0$ il existe un certain $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda_*^d(f,x_0)-\varepsilon>0$ et l'inégalité précédente montre qu'il existe $\eta\in\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t\in]x_0\ ,\ x_0+\eta[\cap K_0\Rightarrow f(x_0)-f(t)>(\lambda_*^d(f,x_0)-\varepsilon)(x_0-t)>0$$

(vii)

Les inégalités (10.140) page 862 et (10.141) page 863 montrent que pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ il existe $(\eta_0,\eta_1)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ tels que

$$t\in]x_0-\eta_0\ ,\ x_0[\cap K_0\Rightarrow f(x_0)-f(t)<(\lambda_g^*(f,x_0)+\varepsilon)(x_0-t)$$

et

$$t\in]x_0-\eta_1\ ,\ x_0[\cap K_0\Rightarrow(\lambda_*^g(f,x_0)-\varepsilon)(x_0-t)<f(x_0)-f(t)$$

En particulier si $\eta=\min\{\eta_0\ ,\ \eta_1\}$ on obtient

$$t\in]x_0-\eta\ ,\ x_0[\cap K_0\Rightarrow(\lambda_*^g(f,x_0)-\varepsilon)(x_0-t)<f(x_0)-f(t)<(\lambda_g^*(f,x_0)+\varepsilon)(x_0-t)$$

Dire que f est dérivable à gauche en x_0 c'est dire que

$$\lambda_*^g(f,x_0)=\lambda_g^*(f,x_0)=f'_d(x_0)$$

ainsi l'inégalité (10.142) page 863 montre qu'il existe $\eta\in\mathbb{R}_+^*$

$$t\in]x_0-\eta\ ,\ x_0[\cap K_0\Rightarrow(f'_g(x_0)-\varepsilon)(x_0-t)<f(x_0)-f(t)<(f'_g(x_0)+\varepsilon)(x_0-t)$$

ce qui est une façon d'écrire l'inégalité (10.143) page 863

(viii)

1. Puisque $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur $\mathcal{V}'(x_0)$ on a $\Omega'(x_0) \neq \varnothing$. Or si $\omega' \in \Omega'(x_0)$ alors ω' est un élément de $\mathcal{V}'(x_0)$, par suite il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $W(\eta) \subset \omega'$, ainsi $\tau_{x_0}(f)$ qui est bornée sur ω' est bornée sur $W(\eta)$ par suite $W(\eta) \in \Omega'(x_0)$ et $\eta \in \Gamma$.
2. Par définition $\lambda^*(f,x_0) = \inf\limits_{\omega' \in \Omega'(x_0)} (\sup\limits_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t))$ est la borne inférieure de l'ensemble
$$U^* = \{y \in \mathbb{R} / \exists\ \omega' \in \Omega'(x_0) : y = \sup_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$
il s'agit donc de montrer $\inf\{y : y \in U^*\} = \inf\{y : y \in \Lambda^*\}$
   (a) D'abord il résulte du fait que pour tout $\eta \in \Gamma$ on a $W(\eta) \in \Omega'(x_0)$ que $\Lambda^* \subset U^*$ par suite
   $$\inf\{y : y \in U^*\} \leq \inf\{y : y \in \Lambda^*\}$$
   (b) Ensuite on montre que tout élément de U^* est minoré par un élément de Λ^*. En effet si $\omega' \in \Omega'(x_0)$ et $y = \sup\limits_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t)$ alors puisque $\omega' \in \Omega'(x_0)$ il existe $\eta \in \Gamma$ tel que $W(\eta) \subset \omega'$, pour un tel η le réel $z = \sup\limits_{t \in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)$ est un élément de Λ^* qui minore y. Ainsi tout minorant de Λ^* est un minorant de U^* et
   $$\inf\{y : y \in \Lambda^*\} \leq \inf\{y : y \in U^*\}$$
3. Par définition $\lambda_*(f,x_0) = \sup\limits_{\omega' \in \Omega'(x_0)} (\inf\limits_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t))$ est la borne supérieure de l'ensemble
$$V_* = \{y \in \mathbb{R} / \exists\ \omega' \in \Omega'_d(x_0) : y = \inf_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$
il s'agit donc de montrer $\sup\{y : y \in V_*\} = \sup\{y : y \in \Lambda_*\}$
   (a) D'abord il résulte du fait que pour tout $\eta \in \Gamma$ on a $W(\eta) \in \Omega'(x_0)$ que $\Lambda_* \subset V_*$ par suite
   $$\sup\{y : y \in V_*\} \geq \sup\{y : y \in \Lambda_*\}$$
   (b) Ensuite on montre que tout élément de V_* est majoré par un élément de Λ_*. En effet si $\omega' \in \Omega'(x_0)$ et $y = \inf\limits_{t \in \omega'} \tau_{x_0}(f)(t)$ alors puisque $\omega' \in \Omega'(x_0)$ il existe $\eta \in \Gamma$ tel que $W(\eta) \subset \omega'$, pour un tel η le réel $z = \inf\limits_{t \in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)$ est un élément de Λ_* qui majore y. Ainsi tout majorant de Λ_* est un majorant de V_* et
   $$\sup\{y : y \in \Lambda_*\} \geq \sup\{y : y \in V_*\}$$
4. D'abord si $x_0 \in K'_g$ alors puisque par hypothèse $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}'(x_0)$ le point (i) montre que $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}'_g(x_0)$.
   (a) <u>On montre $\lambda_*(f,x_0) \leq \lambda_*^g(f,x_0)$</u>

   Il suffit de montrer que tout élément de Λ_* est majoré par un élément de Λ_*^g. Or si $\eta \in \Gamma$ et $y = \inf\limits_{t \in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)$ alors
   — Puisque $\tau_{x_0}(f)$ est bornée sur $W(\eta)$ elle est bornée sur l'ensemble $W_g(\eta)$ défini par
   $$W_g(\eta) =]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K_0 = W(\eta) \cap]x_0 - \eta\ ,\ x_0[$$
   par suite $\eta \in \Gamma_g$
   — puisque $W_g(\eta) \subset W(\eta)$ le réel $z = \inf\limits_{t \in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)$ est un élément de Λ_*^g qui majore y.

(b) <u>On montre $\lambda_*^g(f,x_0) \le \lambda_g^*(f,x_0)$</u>

C'est l'inégalité

$$\liminf_{\mathcal{V}'_g(x_0)} \tau_{x_0}(f) \le \limsup_{\mathcal{V}'_g(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

qui est prouvée par exemple au théorème [10.6] page 757.

(c) <u>On montre $\lambda_g^*(f,x_0) \le \lambda^*(f,x_0)$</u>

Il suffit de montrer que tout élément de Λ^* est minoré par un élément de Λ_g^*. Or si $\eta \in \Gamma$ et $y = \sup_{t \in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)$ alors

— Puisque $\tau_{x_0}(f)$ est bornée sur $W(\eta)$ elle est bornée sur l'ensemble $W_g(\eta)$ défini par

$$W_g(\eta) =]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K_0 = W(\eta) \cap]x_0 - \eta\ ,\ x_0[$$

par suite $\eta \in \Gamma_g$

— puisque $W_g(\eta) \subset W(\eta)$ le réel $z = \sup_{t \in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)$ est un élément de Λ_g^* qui minore y.

Enfin dire que f est dérivable en x_0 c'est dire que $\lambda_*(f,x_0) = \lambda^*(f,x_0)$ ainsi on obtient des inégalités (10.144) page 864 que $\lambda_*(f,x_0) = \lambda_*^g(f,x_0) = \lambda_g^*(f,x_0) = \lambda^*(f,x_0)$ par suite f est dérivable à gauche en x_0 et

$$f'(x_0) = f'_g(x_0)\ .$$

5. La preuve des inégalités (10.145) page 864, qui est similaire à celle des inégalités (10.144) page 864 , est laissée au soin du lecteur.
6. Soit $x_0 \in K'_g \cap K'_d$, dire que f est dérivable en x_0 c'est dire que $\lambda_*(f,x_0) = \lambda^*(f,x_0)$ ainsi les inégalités (10.144) page 864 que $\lambda_*(f,x_0) = \lambda_*^g(f,x_0) = \lambda_g^*(f,x_0) = \lambda^*(f,x_0)$ par suite f est dérivable à gauche en x_0 et

$$f'(x_0) = f'_g(x_0)\ .$$

De même les inégalités (10.145) page 864 montrent que

$$\lambda_*(f,x_0) = \lambda_*^d(f,x_0) = \lambda_d^*(f,x_0) = \lambda^*(f,x_0)$$

par suite f est dérivable à droite en x_0 et

$$f'(x_0) = f'_d(x_0)\ .$$

7. l'égalité $W(\eta) = W_d(\eta) \cup W_g(\eta)$ est l'égalité

$$(]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K_0) \cup (]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0) =]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0$$

qui résulte du fait que $x_0 \notin K_0$ d'autre part

— Puisque $W_g(\eta) \subset W(\eta)$ et $W_d(\eta) \subset W(\eta)$ on a

$$\inf_{t \in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \le \inf_{t \in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \quad \text{et} \quad \inf_{t \in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \le \inf_{t \in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)$$

ainsi

$$\inf_{t \in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \le \min\{\inf_{t \in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\ ,\ \inf_{t \in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$

— si $t \in W(\eta)$ on a $t \in W_g(\eta)$ ou $t \in W_d(\eta)$ or

$$\tau_{x_0}(f)(t) \ge \inf_{t \in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \quad \text{si} \quad t \in W_g(\eta)$$

et

$$\tau_{x_0}(f)(t) \geq \inf_{t\in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \quad \text{si} \quad t \in W_d(\eta)$$

et en particulier

$$\inf_{t\in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \geq \min\{\inf_{t\in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\ ,\ \inf_{t\in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$

— Puisque $W_g(\eta) \subset W(\eta)$ et $W_d(\eta) \subset W(\eta)$ on a

$$\sup_{t\in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \leq \sup_{t\in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \quad \text{et} \quad \sup_{t\in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \leq \sup_{t\in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)$$

ainsi

$$\sup_{t\in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \geq \max\{\sup_{t\in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\ ,\ \sup_{t\in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$

— si $t \in W(\eta)$ on a $t \in W_g(\eta)$ ou $t \in W_d(\eta)$ or

$$\tau_{x_0}(f)(t) \leq \sup_{t\in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \quad \text{si} \quad t \in W_g(\eta)$$

et

$$\tau_{x_0}(f)(t) \leq \sup_{t\in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \quad \text{si} \quad t \in W_d(\eta)$$

et en particulier

$$\sup_{t\in W(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \leq \max\{\sup_{t\in W_g(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\ ,\ \sup_{t\in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$

8. D'abord si $x_0 \in K'_g \cap K'_d$ alors puisque par hypothèse $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}'(x_0)$ le point (i) montre que $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur les filtres $\mathcal{V}'_g(x_0)$ et $\mathcal{V}'_d(x_0)$

I Preuve de $\lambda_*(f, x_0) = \min\{\lambda^d_*(f, x_0), \lambda^g_*(f, x_0)\}$

(a) On montre $\lambda_*(f, x_0) \leq \min\{\lambda^d_*(f, x_0), \lambda^g_*(f, x_0)\}$

C'est une conséquence directe des inégalités (10.144) page 864 et (10.145) page 864

(b) On montre $\min\{\lambda^d_*(f, x_0), \lambda^g_*(f, x_0)\} \leq \lambda_*(f, x_0)$

Puisque $\lambda^d_*(f, x_0)$ est le plus petit majorant de Λ^d_* pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ il existe $\eta_0 \in \Gamma_d$ tel que

$$\lambda^d_*(f, x_0) - \varepsilon < \inf_{t\in W_d(\eta_0)} \tau_{x_0}(f)(t)$$

De même il existe $\eta_1 \in \Gamma_g$ tel que

$$\lambda^g_*(f, x_0) - \varepsilon < \inf_{t\in W_g(\eta_1)} \tau_{x_0}(f)(t)$$

en particulier

$$\min\{\lambda^d_*(f, x_0)\ ,\ \lambda^g_*(f, x_0)\} - \varepsilon < \inf_{t\in W_d(\eta_0)} \tau_{x_0}(f)(t)$$

et

$$\min\{\lambda^d_*(f, x_0)\ ,\ \lambda^g_*(f, x_0)\} - \varepsilon < \inf_{t\in W_d(\eta_1)} \tau_{x_0}(f)(t)$$

par suite en posant $\delta = \min\{\eta_0\ ,\ \eta_1\}$ on obtient, puisque $W_d(\delta) \subset W_d(\eta_0)$ et $W_g(\delta) \subset W_g(\eta_0)$, les inégalités $\inf_{t\in W_d(\eta_0)} \tau_{x_0}(f)(t) \leq \inf_{t\in W_d(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t)$ et $\inf_{t\in W_d(\eta_1)} \tau_{x_0}(f)(t) \leq \inf_{t\in W_d(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t)$ par suite

$$\min\{\lambda^d_*(f, x_0)\ ,\ \lambda^g_*(f, x_0)\} - \varepsilon < \min\{\inf_{t\in W_d(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t)\ ,\ \inf_{t\in W_g(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t)\}$$

Or d'après l'égalité (10.146) page 864 on a

$$\min\{\inf_{t\in W_d(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t) \ , \ \inf_{t\in W_g(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t)\} = \inf_{t\in W(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t)$$

Ainsi, puisque $\inf_{t\in W(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t) \in \Lambda_*$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ le réel $\min\{\lambda_*^d(f,x_0) \ , \ \lambda_*^g(f,x_0)\} - \varepsilon$ n'est pas un majorant de Λ_* par suite

$$\min\{\lambda_*^d(f,x_0) \ , \ \lambda_*^g(f,x_0)\} - \varepsilon < \lambda_*(f,x_0)$$

Les points (a) et (b) montrent donc que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lambda_*(f,x_0) - \varepsilon \leq \min\{\lambda_*^d(f,x_0) \ , \ \lambda_*^g(f,x_0)\} - \varepsilon < \lambda_*(f,x_0)$$

II Preuve de $\lambda^*(f,x_0) = \max\{\lambda_d^*(f,x_0), \lambda_g^*(f,x_0)\}$

(a) On montre $\max\{\lambda_d^*(f,x_0), \lambda_g^*(f,x_0)\} \leq \lambda^*(f,x_0)$

C'est une conséquence directe des inégalités (10.144) page 864 et (10.145) page 864

(b) On montre $\lambda^*(f,x_0) \leq \max\{\lambda_d^*(f,x_0), \lambda_g^*(f,x_0)\}$

Puisque $\lambda_d^*(f,x_0)$ est le plus grand minorant de Λ_d^* pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\eta_0 \in \Gamma_d$ tel que

$$\sup_{t\in W_d(\eta_0)} \tau_{x_0}(f)(t) < \lambda_d^*(f,x_0) + \varepsilon$$

De même il existe $\eta_1 \in \Gamma_g$ tel que

$$\sup_{t\in W_g(\eta_1)} \tau_{x_0}(f)(t) < \lambda_g^*(f,x_0) + \varepsilon$$

en particulier

$$\sup_{t\in W_d(\eta_0)} \tau_{x_0}(f)(t) < \max\{\lambda_d^*(f,x_0) \ , \ \lambda_g^*(f,x_0)\} + \varepsilon$$

et

$$\sup_{t\in W_g(\eta_1)} \tau_{x_0}(f)(t) < \max\{\lambda_d^*(f,x_0) \ , \ \lambda_g^*(f,x_0)\} + \varepsilon$$

par suite en posant $\delta = \min\{\eta_0 \ , \ \eta_1\}$ on obtient, puisque $W_d(\delta) \subset W_d(\eta_0)$ et $W_g(\delta) \subset W_g(\eta_0)$, les inégalités $\sup_{t\in W_d(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t) \leq \sup_{t\in W_d(\eta_0)} \tau_{x_0}(f)(t)$ et $\sup_{t\in W_d(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t) \leq \sup_{t\in W_d(\eta_1)} \tau_{x_0}(f)(t)$ par suite

$$\max\{\sup_{t\in W_d(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t) \ , \ \sup_{t\in W_g(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t)\} < \max\{\lambda_d^*(f,x_0) \ , \ \lambda_g^*(f,x_0)\} + \varepsilon$$

Or d'après l'égalité (10.147) page 864 on a

$$\max\{\sup_{t\in W_d(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t) \ , \ \sup_{t\in W_g(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t)\} = \sup_{t\in W(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t)$$

Ainsi, puisque $\sup_{t\in W(\delta)} \tau_{x_0}(f)(t) \in \Lambda^*$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ le réel $\max\{\lambda_d^*(f,x_0) \ , \ \lambda_g^*(f,x_0)\} + \varepsilon$ n'est pas un minorant de Λ^* par suite

$$\lambda^*(f,x_0) < \max\{\lambda_d^*(f,x_0) \ , \ \lambda_g^*(f,x_0)\} + \varepsilon$$

Les points (a) et (b) montrent donc que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\max\{\lambda_d^*(f,x_0) \ , \ \lambda_g^*(f,x_0)\} \leq \lambda^*(f,x_0) < \max\{\lambda_d^*(f,x_0) \ , \ \lambda_g^*(f,x_0)\} + \varepsilon$$

9. Si $x_0 \in K'_g \cap K'_d$ et f est dérivable en x_0 alors *6* montre que f est dérivable à droite et à gauche en x_0 , ainsi d'après l'inégalité (10.139) page 862 pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\eta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0\ ,\ x_0 + \eta_0[\cap K_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0) - f'_d(x_0)(t - x_0)| < \varepsilon\ (t - x_0)$$

puisque $f'_d(x_0) = f'(x_0)$ on obtient

$$t \in]x_0\ ,\ x_0 + \eta_0[\cap K_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0) - f'(x_0)(t - x_0)| < \varepsilon\ (t - x_0). \tag{10.153}$$

De même l'inégalité (10.143) page 863 montre qu'il existe $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0 - \eta_1\ ,\ x_0[\cap K_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0) - f'_g(x_0)(t - x_0)| < \varepsilon\ (x_0 - t).$$

puisque $f'_g(x_0) = f'(x_0)$ on obtient

$$t \in]x_0 - \eta_1\ ,\ x_0[\cap K_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - t)| < \varepsilon\ (x_0 - t). \tag{10.154}$$

On montre que si $\eta = \min\{\eta_0, \eta_1\}$ alors

$$t \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow |f(t) - f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - t)| < \varepsilon\ |t - x_0|.$$

En effet,
— si $t \in]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K_0$ alors $|t - x_0| = x_0 - t$ et (10.154) permet de conclure
— si $t \in]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0$ alors $|t - x_0| = t - x_0$ et (10.153) page 874 permet de conclure

(ix)

D'abord si f est dérivable à droite en x_0 il résulte de l'inégalité (10.139) page 862 que l'inégalité enoncée en (ix) (voir (10.150) page 864) est vérifiée avec $a_d = f'_d(x_0)$. Il suffit donc de montrer que si l'inégalité (10.150) page 864 est vérifiée l'application $\tau_{x_0}(f)$ est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}'_d(x_0)$ et

$$a_d = \liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f) = \limsup_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

Or il résulte de (10.150) et de l'égalité

$$(t - x_0)(\tau_{x_0}(f)(t) - a_d) = f(t) - f(x_0) - a_d(t - x_0)$$

que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow |(t - x_0)(\tau_{x_0}(f)(t) - a_d)| < \varepsilon\ (t - x_0)$$

puisque $t \in]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow t > x_0$ on obtient

$$t \in]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0 \Rightarrow |\tau_{x_0}(f)(t) - a_d)| < \varepsilon \tag{10.155}$$

ainsi l'ensemble $W_d(\eta) =]x_0\ ,\ x_0 + \eta[\cap K_0$ est un élément de $\mathcal{V}'_d(x_0)$ sur lequel $\tau_{x_0}(f)$ est bornée puisque

$$t \in W_d(\eta) \Rightarrow |\tau_{x_0}(f)(t)| \leq |a_d| + \varepsilon\ .$$

et (10.155) entraîne

$$a_d - \varepsilon \leq \inf_{t \in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \leq \liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f) \leq \limsup_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f) \leq \sup_{t \in W_d(\eta)} \tau_{x_0}(f)(t) \leq a_d + \varepsilon\ ,$$

ainsi les inégalités

$$a_d - \varepsilon \leq \liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f) \leq \limsup_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f) \leq a_d + \varepsilon$$

sont vérifiées pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ par suite

$$a_d = \limsup_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f) = \liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f)$$

(x)

La preuve de (x), qui est similaire à celle de (ix), est laissée au soin du lecteur.

(xi)

La preuve de (xi), qui est similaire à celle de (ix), est laissée au soin du lecteur. ■

II *Règles de calcul de la dérivation*

La plupart des fonctions usuelles sont des sommes, des produits, des composés de fonctions élémentaires dérivables, dans le lemme qui suit si K est un sous-ensemble non vide d'un corps de réels on note

— $K' = \{x \in K / x \in \text{adh}(K \cap \{x\}^c)\}$ l'ensemble des points de K qui sont des points d'accumulations de K

— $K'_g = \{x \in K' / \ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad]x - \varepsilon\ ,\ x[\cap K \neq \varnothing\}$ l'ensemble des points K-accessibles à gauche

— $K'_d = \{x \in K' / \ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad]x\ ,\ x + \varepsilon[\cap K \neq \varnothing\}$ l'ensemble des points K-accessibles à droite

Lemme 10.39 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$, K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$, $f \in \text{Hom}_{\textbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *et* $h \in \text{Hom}_{\textbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *sont des applications de* K *dans* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in K'$. *Enfin* H *est un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $\gamma \in \text{Hom}_{\textbf{ens}}(H\ ,K)$ *est une application de* H *dans* K.

(i)

1. *Si* $x_0 \in K'_d$ *et si* f *et* h *sont dérivables à droite en* x_0 *alors*
   (a) *l'application* $f + h \in \text{Hom}_{\textbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *définie par* $(f + h)(t) = f(t) + h(t)$ *est dérivable à droite en* x_0 *et*
   $$(f + h)'_d(x_0) = f'_d(x_0) + h'_d(x_0)$$
   (b) *l'application* $fh \in \text{Hom}_{\textbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *définie par* $fh(t) = f(t)h(t)$ *est dérivable à droite en* x_0 *et*
   $$(fh)'_d(x_0) = f'_d(x_0)h(x_0) + f(x_0)h'_d(x_0)$$

(ii)

1. *Si* $x_0 \in K'_g$ *et si* f *et* h *sont dérivables à gauche en* x_0 *alors*
   (a) *l'application* $f + h \in \text{Hom}_{\textbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *définie par* $(f + h)(t) = f(t) + h(t)$ *est dérivable à gauche en* x_0 *et*
   $$(f + h)'_g(x_0) = f'_g(x_0) + h'_g(x_0)$$
   (b) *l'application* $fh \in \text{Hom}_{\textbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *définie par* $(fh)(t) = f(t)h(t)$ *est dérivable à gauche en* x_0 *et*
   $$(fh)'_g(x_0) = f'_g(x_0)h(x_0) + f(x_0)h'_g(x_0)$$

(iii)

1. *Si* f *et* h *sont dérivables en* x_0 *alors*
   (a) *l'application* $f + h \in \text{Hom}_{\textbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *définie par* $(f + h)(t) = f(t) + h(t)$ *est dérivable en* x_0 *et*
   $$(f + h)'(x_0) = f'(x_0) + h'(x_0)$$

(b) l'application $fh \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *définie par* $(fh)(t) = f(t)h(t)$ *est dérivable en* x_0 *et*

$$(fh)'(x_0) = f'(x_0)h(x_0) + f(x_0)h'(x_0)$$

2. *Si* $y_0 \in H'_d \cap H'_g$ *vérifie les propriétés suivantes*
   — γ *est dérivable en* y_0
   — $\gamma(y_0) \in K'_d \cap K'_g$ *et* f *est dérivable en* $\gamma(y_0)$
   alors l'application $w \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(H\ ,\mathbb{R})$ *définie par* $w(t) = f \circ \gamma(t)$ *est dérivable en* y_0 *et*

$$w'(y_0) = f'(\gamma(y_0))\gamma'(y_0)$$

(iv) Si z *est l'application de* $\mathbb{R}^*$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $z(t) = \dfrac{1}{t}$ *alors pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ z *est dérivable en* x_0 *et*

$$z'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

(v) On suppose $f(x_0) \neq 0$ *, si* $U = \{x \in K/f(x) \neq 0\}$ *alors* $U' \subset K'$*. De plus l'application* u *de* U *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $u(t) = \dfrac{1}{f(t)}$ *possède la propriétés suivantes : si* $x_0 \in U'_d \cap U'_g$ *et* f *est dérivable en* x_0 *alors* u *est dérivable en* x_0 *et*

$$u'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

(vi) On suppose $f(x_0) \neq 0$ *, si* $U = \{x \in K/f(x) \neq 0\}$ *alors* $U' \subset K'$*. De plus l'application* v *de* U *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $v(t) = \dfrac{h(t)}{f(t)}$ *possède les propriétés suivantes : si* $x_0 \in U'_g \cap U'_d$ *et* f *et* h *sont dérivables en* x_0 *alors* v *est dérivable en* x_0 *et*

$$v'(x_0) = \frac{h'(x_0)f(x_0) - f'(x_0)h(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

Preuve

(i)

1. Puisque f et h sont dérivables à droite en x_0 on a

$$\liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f) = \limsup_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f) = f'_d(x_0) \quad \text{et} \quad \liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(h) = \limsup_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(h) = h'_d(x_0)\ .$$

   Ainsi le point (xii) du théorème [10.6] page 757 montre que

$$\liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)}(\tau_{x_0}(f)+\tau_{x_0}(h)) = \liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f)+\liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(h) = f'_d(x_0)+h'_d(x_0) = \limsup_{\mathcal{V}'_d(x_0)}(\tau_{x_0}(f)+\tau_{x_0}(h))$$

   et l'égalité $\tau_{x_0}(f+h) = \tau_{x_0}(f) + \tau_{x_0}(h)$ donne alors

$$\liminf_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f+h) = \limsup_{\mathcal{V}'_d(x_0)} \tau_{x_0}(f+h) = f'_d(x_0) + h'_d(x_0)$$

   ce qui montre que $f+h$ est dérivable à droite en x_0 et

$$(f+h)'_d(x_0) = f'_d(x_0) + h'_d(x_0)$$

2. D'après le point (ix) du théorème [10.15] page 861 il s'agit d'évaluer l'expression

$$A(t,x_0) = f(t)h(t) - f(x_0)h(x_0) - [f'_d(x_0)h(x_0) + h'_d(x_0)f(x_0)](t-x_0)$$

sur un voisinage à droite de x_0 . On pose

$$\Delta'_h(t,x_0) = h(t) - h(x_0) - h'_d(x_0)(t-x_0)$$

et

$$\Delta'_f(t,x_0) = f(t) - f(x_0) - f'_d(x_0)(t-x_0) \ ,$$

les égalités

$$f(t)\Delta'_h(t,x_0) = f(t)h(t) - f(t)h(x_0) - f(t)h'_d(x_0)(t-x_0)$$

et

$$h(x_0)\Delta'_f(t,x_0) = h(x_0)f(t) - h(x_0)f(x_0) - h(x_0)f'_d(x_0)(t-x_0)$$

montrent que

$$f(t)\Delta'_h(t,x_0) + h(x_0)\Delta'_f(t,x_0) = f(t)h(t) - f(x_0)h(x_0) - (t-x_0)(f(t)h'_d(x_0) + h(x_0)f'_d(x_0)) \ .$$

Puisque $f(t)h(t) - f(x_0)h(x_0) = A(t,x_0) + (t-x_0)(f'_d(x_0)h(x_0) + h'_d(x_0)f(x_0))$ on obtient

$$f(t)\Delta'_h(t,x_0) + h(x_0)\Delta'_f(t,x_0) = A(t,x_0) - (t-x_0)h'_d(x_0)(f(t) - f(x_0))$$

ainsi

$$A(t,x_0) = f(t)\Delta'_h(t,x_0) + h(x_0)\Delta'_f(t,x_0) + (t-x_0)(f(t) - f(x_0)) \tag{10.156}$$

On montre maintenant que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

(a) il existe $\eta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta_0[\cap K_0 \Rightarrow (t-x_0)|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \ (t-x_0)$$

(b) il existe $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta_1[\cap K_0 \Rightarrow |h(x_0)\Delta'_f(t,x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \ (t-x_0)$$

(c) il existe $\eta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta_2[\cap K_0 \Rightarrow |f(t)\Delta'_h(t,x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \ (t-x_0)$$

(a) Preuve de (a) : D'après le point (i) du théorème [10.15] page 861 la dérivabilité à droite de f en x_0 entraîne sa continuité à droite en x_0 par suite il existe $\eta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta_0[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ainsi

$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta_0[\cap K \Rightarrow (t-x_0)|f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}(t-x_0)$$

(b) Preuve de (b) : D'après le point (iv) du théorème [10.15] page 861 la dérivabilité à droite de f en x_0 entraîne l'existence de $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta_1[\Rightarrow |\Delta'_f(t,x_0)| < \frac{\varepsilon}{3(|h(x_0)|+1)}(t-x_0)$$

ainsi

$$t \in]x_0 \ , \ x_0 + \eta_1[\cap K_0 \Rightarrow |h(x_0)\Delta'_f(t,x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \ (t-x_0)$$

(c) Preuve de (c) : D'après le point (i) du théorème [10.15] page 861 la dérivabilité à droite de f en x_0 entraîne sa continuité à droite en x_0 par suite f est localement borné sur le filtre $\mathcal{V}_K^+(x_0)$ et il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0\ ,\ x_0 + \rho[\cap K \Rightarrow |f(t)| \leq M\ .$$

D'après le point (iv) du théorème [10.15] page 861 la dérivabilité à droite de h en x_0 entraîne l'existence de $\rho' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0\ ,\ x_0 + \rho'[\Rightarrow |\Delta_h'(t, x_0)| < \frac{\varepsilon}{3(M+1)}(t - x_0)$$

par suite en posant $\eta_2 = \min\{\rho, \rho'\}$ on obtient

$$t \in]x_0\ ,\ x_0 + \eta_2[\cap K_0 \Rightarrow |f(t)\Delta_h'(t, x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\ (t - x_0)$$

Posons $\delta = \min\{\eta_0\ ,\ \eta_1\ , \eta_2\}$ alors l'égalité (10.156) page 877 et les points (a) , (b) et (c) montrent que

$$t \in]x_0\ ,\ x_0 + \delta[\Rightarrow |A(t, x_0)| < \varepsilon\ (t - x_0)$$

et le point (xi) du théorème [10.15] page 861 montre que fh est dérivable en x_0 et

$$(fh)_d'(x_0) = f_d'(x_0)h(x_0) + f(x_0)h_d'(x_0)$$

(ii)

La preuve qui est similaire à celle de (i) est laissée au soin du lecteur

(iii)

D'après (i) et (ii) il suffit de montrer *2*. D'après le point (xi) du théorème [10.15] page 861 il s'agit d'évaluer l'expression

$$B(t, y_0) = f(\gamma(t)) - f(\gamma(x_0)) - f'(\gamma(x_0))\gamma'(y_0)(t - y_0)$$

sur un voisinage de y_0 pour établir que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]y_0 - \delta\ ,\ y_0 + \delta[\cap (H \cap \{y_0\}^c) \Rightarrow |B(t, y_0)| < \varepsilon\ |t - y_0|\ .$$

Dans la suite on pose

$$H_0 = H \cap \{y_0\}^c \quad \text{et} \quad K_0 = K \cap \{\gamma(y_0)\}^c$$

Puisque γ est dérivable en y_0 l'application $\tau_{y_0}(\gamma)$ est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}'(y_0)$ ainsi il existe un couple $(M, \eta_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]y_0 - \eta_0\ ,\ y_0 + \eta_0[\cap H \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(y_0)| \leq M\ |t - y_0| \tag{10.157}$$

Dans la suite (M, η_0) désigne un couple vérifiant (10.157) page 878 . Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, puisque f est dérivable en $\gamma(y_0)$ le point (xi) du théorème [10.15] page 861 montre qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$u \in]\gamma(y_0) - \rho\ ,\ \gamma(y_0) + \rho[\cap K_0 \Rightarrow |f(u) - f(\gamma(y_0)) - f'(\gamma(y_0))(u - \gamma(y_0))| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}|u - \gamma(y_0))| \tag{10.158}$$

Enfin le point (i) du théorème [10.15] page 861 montre que la dérivabilité de γ en y_0 entraîne sa continuité en y_0, ainsi il existe $\eta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]y_0 - \eta_1\ ,\ y_0 + \eta_1[\cap H \Rightarrow \gamma(t) \in]\gamma(y_0) - \rho\ ,\ \gamma(y_0) + \rho[\cap K \tag{10.159}$$

Si on pose $\delta_0 = \min\{\eta_0 \ , \ \eta_1\}$ les inégalités (10.157) page 878 , (10.158) page 878 et (10.159) page 878 montrent

$$t \in]y_0 - \delta_0 \ , \ y_0 + \delta_0[\cap H_0 \Rightarrow |f(\gamma(t)) - f(\gamma(y_0)) - f'(\gamma(y_0))(\gamma(t) - \gamma(y_0))| < \frac{\varepsilon}{2}|t - y_0| \tag{10.160}$$

puisque γ est dérivable en y_0 le point (xi) du théorème [10.15] page 861 montre qu'il existe $\delta_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]y_0 - \delta_1 \ , \ y_0 + \delta_1[\cap H_0 \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(y_0) - \gamma'(y_0)(t - y_0)| < \frac{\varepsilon}{2(|f'(\gamma(y_0))| + 1)}|t - y_0| \tag{10.161}$$

en particulier si $C(t, y_0) = f'(\gamma(y_0))(\gamma(t) - \gamma(y_0)) - f'(\gamma(y_0))\gamma'(y_0)(t - y_0)$ on obtient

$$t \in]y_0 - \delta_1 \ , \ y_0 + \delta_1[\cap H \Rightarrow |C(t, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \ |t - y_0| \ . \tag{10.162}$$

L'égalité $B(t, y_0) = f(\gamma(t)) - f(\gamma(y_0)) - f'(\gamma(y_0))(\gamma(t) - \gamma(y_0)) + C(t, y_0)$ montre que

$$|B(t, y_0)| \leq |f(\gamma(t)) - f(\gamma(y_0)) - f'(\gamma(y_0))(\gamma(t) - \gamma(y_0))| + |C(t, y_0)|$$

ainsi les inégalités (10.160) page 879 et (10.162) page 879 entraînent , en posant $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$,

$$t \in]y_0 - \delta \ , \ y_0 + \delta[\cap H_0 \Rightarrow |B(t, y_0)| < \varepsilon \ |t - y_0|$$

(iv)

En suivant le point (xi) du théorème [10.15] page 861 il s'agit d'évaluer l'expression

$$B(t, x_0) = \frac{1}{t} - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}(t - x_0)$$

sur un voisinage de x_0 pour établir que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta[\cap \mathbb{R}^* \Rightarrow |B(t, x_0)| < \varepsilon \ |t - x_0| \ .$$

Puisque

$$B(t, x_0) = (x_0 - t)\left(\frac{1}{tx_0} - \frac{1}{x_0^2}\right)$$

il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta[\cap \mathbb{R}^* \Rightarrow \left|\frac{1}{tx_0} - \frac{1}{x_0^2}\right| < \varepsilon \ . \tag{10.163}$$

Or

$$\left|\frac{1}{tx_0} - \frac{1}{x_0^2}\right| = \frac{|t - x_0|}{|tx_0^2|}$$

par suite

— si $x_0 > 0$, $\delta = \min\{\frac{x_0}{2} \ , \varepsilon\frac{x_0^3}{2}\}$ on obtient

$$t \in]x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta[\Rightarrow t > \frac{x_0}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{tx_0} - \frac{1}{x_0^2}\right| < \frac{2|t - x_0|}{x_0^3} < \varepsilon$$

— si $x_0 < 0$, $\delta = \min\{\frac{-x_0}{2} \ , -\varepsilon\frac{x_0^3}{2}\}$ on obtient

$$t \in]x_0 - \delta \ , \ x_0 + \delta[\Rightarrow |t| > -\frac{x_0}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{tx_0} - \frac{1}{x_0^2}\right| < \frac{2|t - x_0|}{-x_0^3} < \varepsilon$$

Ainsi (10.163) page 879 est vérifiée et on a vu que cette inégalité entraîne $z'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$

(*v*)

Avec les notations de (*iv*) on a $u = z \circ f$ ainsi (*iii*) montre que

$$u'(x_0) = z'(f(x_0))f'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

(*vi*)

En posant $u(t) = \dfrac{1}{f(t)}$ on a $v(t) = h(t)u(t)$ ainsi (*iii*) montre que

$$v'(x_0) = h'(x_0)u(x_0) + h(x_0)u'(x_0)$$

or (*v*) montre que $u'(x_0) = -\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$, par suite

$$v'(x_0) = \frac{h'(x_0)}{f(x_0)} - \frac{h(x_0)f'(x_0)}{f(x_0)^2} = \frac{h'(x_0)f(x_0) - h(x_0)f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

■

On étudie maintenant les applications dérivable sur un ensemble.

10.11.2 *Applications dérivables sur un ensemble*

Une application f définie sur un sous-ensemble K d'un corps de réels est dérivable sur K si elle est
- — dérivable en tout point K-accessible à droite et à gauche
- — dérivable à gauche en les points K-accessible à gauche qui ne sont pas K-accessible à droite
- — dérivable à droite en les points K-accessible à droite qui ne sont pas K-accessible à gauche .

Dans la définition qui suit les notations sont celles utilisées au théorème [10.15] page 861 et au lemme [10.39] page 875

Définition 10.63 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$.

(i)

1. *On dit que* f *est* ***dérivable à droite*** *sur* K *si* f *est dérivable à droite en tout point de* K'_d.
2. *On dit que* f *est* ***dérivable à gauche*** *sur* K *si* f *est dérivable à gauche en tout point de* K'_g.
3. *On dit que* f *est* ***dérivable*** *sur* K *si* f *vérifie les propriétés suivantes :*
   - *(a)* f *est dérivable à gauche en tout point de* $K'_g \cap (K'_d)^c$
   - *(b)* f *est dérivable à droite en tout point de* $K'_d \cap (K'_g)^c$
   - *(c)* f *est dérivable en tout point de* $K'_g \cap K'_d$

(ii) On appelle taux d'accroissement de f *en* x *l'application* $t \mapsto \tau_x(f)(t)$ *de* $K \cap \{x\}^c$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$\tau_x(f)(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

(iii) On dit que f *est* ***à taux d'accroissements localement bornés*** *sur* K *si pour tout* $x \in K'$ *l'application* $t \mapsto \tau_x(f)(t)$ *est localement bornée sur le filtre*

$$\mathcal{V}'(x) = \{\omega \in \mathcal{P}(K \cap \{x\}^c)/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\cap(K \cap \{x\}^c) \subset \omega\}\ .$$

Cela signifie qu'il existe $\omega \in \mathcal{V}'(x)$ sur lequel $\tau_x(f)$ est bornée : l'ensemble

$$\Omega'(x) = \{\omega \in \mathcal{V}'(x) / \ \exists \ M \in \mathbb{R}^+ : t \in \omega \Rightarrow |\tau_x(f)(t)| \leq M\}$$

est non vide.

(iii) Si f est à taux d'accroissements localement bornés sur K on appelle ***application dérivée supérieure*** *de f l'application de K' dans $\mathbb{R}$ notée $x \mapsto \lambda^*(f,x)$ et définie par*

$$\lambda^*(f,x) = \limsup_{\mathcal{V}'(x)} \tau_x(f) = \inf_{\omega \in \Omega'(x)} (\sup_{t \in \omega} \tau_x(f)(t))$$

(iv) Si f est à taux d'accroissements localement bornés sur K on appelle ***application dérivée inférieure*** *de f l'application de K' dans $\mathbb{R}$ notée $x \mapsto \lambda_*(f,x)$ et définie par*

$$\lambda_*(f,x) = \liminf_{\mathcal{V}'(x)} \tau_x(f) = \sup_{\omega \in \Omega'(x)} (\inf_{t \in \omega} \tau_x(f)(t))$$

(v) On dit que f est ***à taux d'accroissements gauches localement bornés*** *sur K si pour tout $x \in K'_g$ l'application $t \mapsto \tau_x(f)(t)$ de $K \cap \{x\}^c$ dans $\mathbb{R}$ est localement bornée sur le filtre*

$$\mathcal{V}'_g(x) = \{\omega \in \mathcal{P}(K \cap \{x\}^c) / \ \exists \ \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ :]x - \varepsilon \ , \ x[\cap K \subset \omega\} \ .$$

Cela signifie qu'il existe $\omega \in \mathcal{V}'_g(x)$ sur lequel $\tau_x(f)$ est bornée : l'ensemble

$$\Omega'_g(x) = \{\omega \in \mathcal{V}'_g(x) / \ \exists \ M \in \mathbb{R}^+ : t \in \omega \Rightarrow |\tau_x(f)(t)| \leq M\}$$

est non vide.

(vi) Si f est à taux d'accroissements gauches localement bornés sur K on appelle ***application dérivée supérieure gauche*** *de f l'application de K'_g dans $\mathbb{R}$ notée $x \mapsto \lambda^*_g(f,x)$ et définie par*

$$\lambda^*_g(f,x) = \limsup_{\mathcal{V}'_g(x)} \tau_x(f) = \inf_{\omega \in \Omega'_g(x)} (\sup_{t \in \omega} \tau_x(f)(t))$$

(vii) Si f est à taux d'accroissements gauches localement bornés sur K on appelle ***application dérivée inférieure gauche*** *de f l'application de K'_g dans $\mathbb{R}$ notée $x \mapsto \lambda^g_*(f,x)$ et définie par*

$$\lambda^g_*(f,x) = \liminf_{\mathcal{V}'_g(x)} \tau_x(f) = \sup_{\omega \in \Omega'_g(x)} (\inf_{t \in \omega} \tau_x(f)(t))$$

(viii) On dit que f est ***à taux d'accroissements droits localement bornés*** *sur K si pour tout $x \in K'_d$ l'application $t \mapsto \tau_x(f)(t)$ de $K \cap \{x\}^c$ dans $\mathbb{R}$ est localement bornée sur le filtre*

$$\mathcal{V}'_d(x) = \{\omega \in \mathcal{P}(K \cap \{x\}^c) / \ \exists \ \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ :]x \ , \ x + \varepsilon[\cap K \subset \omega\} \ .$$

Cela signifie qu'il existe $\omega \in \mathcal{V}'_d(x)$ sur lequel $\tau_x(f)$ est bornée : l'ensemble

$$\Omega'_d(x) = \{\omega \in \mathcal{V}'_d(x) / \ \exists \ M \in \mathbb{R}^+ : t \in \omega \Rightarrow |\tau_x(f)(t)| \leq M\}$$

est non vide.

(ix) Si f est à taux d'accroissements droits localement bornés sur K on appelle ***application dérivée supérieure droite*** *de f l'application de K'_d dans $\mathbb{R}$ notée $x \mapsto \lambda^*_d(f,x)$ et définie par*

$$\lambda^*_d(f,x) = \limsup_{\mathcal{V}'_d(x)} \tau_x(f) = \inf_{\omega \in \Omega'_d(x)} (\sup_{t \in \omega} \tau_x(f)(t))$$

(x) Si f est à taux d'accroissements droits localement bornés sur K on appelle ***application dérivée inférieure droite*** *de f l'application de K'_d dans $\mathbb{R}$ notée $x \mapsto \lambda^d_*(f,x)$ et définie par*

$$\lambda^d_*(f,x) = \liminf_{\mathcal{V}'_d(x)} \tau_x(f) = \sup_{\omega \in \Omega'_d(x)} (\inf_{t \in \omega} \tau_x(f)(t))$$

Par exemple si $K = [0\ ,\ 1] \cup \{2\}$ dire que f est dérivable sur K c'est dire qu'elle est dérivable sur $]0\ ,\ 1[$ et dérivable à gauche en 1 et à droite en 0.

Les résultats du théorème qui suit sont souvent rentrés comme « théorème des accroissements finis » .

Théorème 10.16 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*.*

(i) Si f *vérifie les propriétés suivantes :*

1. f *est* $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$*-continue*
2. f *est dérivable à droite sur* K *et il existe* $\lambda_d \in \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$x \in K'_d \Rightarrow |f'_d(x)| \leq \lambda_d$$

Alors pour tout $(a,b) \in K \times K$ *tels que* $a < b$ *et* $[a\ ,\ b[\subset K'_d$ *on a*

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow |f(t) - f(a)| \leq \lambda_d\ (t-a)$$

En particulier si pour tout $x \in K'_d$ *on a* $f'_d(x) = 0$ *alors pour tout* $(a,b) \in K \times K$ *tels que* $a < b$ *et* $[a\ ,\ b[\subset K'_d$ *on a*

$$x \in [a,b] \Rightarrow f(a) = f(x) = f(b)$$

(ii) Si f *vérifie les propriétés suivantes :*

1. f *est* $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$*-continue*
2. f *est dérivable à gauche sur* K *et il existe* $\lambda_g \in \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$x \in K'_g \Rightarrow |f'_g(x)| \leq \lambda_g$$

Alors pour tout $(a,b) \in K \times K$ *tels que* $a < b$ *et* $]a\ ,\ b] \subset K'_g$ *on a*

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow |f(b) - f(t)| \leq \lambda_g\ (b-t)$$

En particulier si pour tout $x \in K'_g$ *on a* $f'_g(x) = 0$ *alors pour tout* $(a,b) \in K \times K$ *tels que* $a < b$ *et* $]a\ ,\ b] \subset K'_g$ *on a*

$$x \in [a,b] \Rightarrow f(a) = f(x) = f(b)$$

(iii) Si f *est dérivable sur* K *et s'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$x \in K'_d \Rightarrow |f'_d(x)| \leq \lambda$$

Alors

1. *pour tout* $(a,b) \in K \times K$ *tels que* $[a\ ,\ b] \subset K$ *on a*

$$(x,y) \in [a\ ,\ b] \times [a\ ,\ b] \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \lambda\ |y-x|$$

2. *Si* K *est d'intérieur non vide alors* $\mathrm{int}(K)$ *est somme directe d'une famille finie ou dénombrable d'intervalles ouverts* $(I_q)_{q\in D}$ *vérifiant, pour tout* $q \in D$*,*

$$(x,y) \in I_q \times I_q \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \lambda\ |y-x|\ .$$

(iv) Si f *est dérivable sur* K *et s'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*

$$x \in K'_g \Rightarrow |f'_g(x)| \leq \lambda$$

Alors

1. pour tout $(a,b) \in K \times K$ tels que $[a\ ,\ b] \subset K$ on a

$$(x,y) \in [a\ ,\ b] \times [a\ ,\ b] \Rightarrow |f(y) - f(x)| \le \lambda\ |y - x|$$

2. Si K est d'intérieur non vide alors $\mathrm{int}(K)$ est somme directe d'une famille finie ou dénombrable d'intervalles ouverts $(I_q)_{q\in D}$ vérifiant, pour tout $q \in D$,

$$(x,y) \in I_q \times I_q \Rightarrow |f(y) - f(x)| \le \lambda\ |y - x|\ .$$

Preuve

(i)

On remarque d'abord que l'inclusion $[a\ ,\ b[\subset K'_d$ entraîne

$$x \in [a\ ,\ b[\Rightarrow |f'_d(x)| \le \lambda_d\ .$$

On va montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ et $t \in [a\ ,\ b]$

$$|f(t) - f(a)| \le (\lambda_d + \varepsilon)(t - a)\ .$$

Pour cela on pose

$$U = \{t \in [a\ ,\ b] /\ |f(t) - f(a)| \le (\lambda_d + \varepsilon)(t - a)\}$$

et

$$U^* = \{x \in [a\ ,\ b] / [a\ ,\ x] \subset U\}\ .$$

Puisque $a \in U^*$ on a $U^* \ne \varnothing$ et puisque b est un majorant de U^* l'ensemble U^* possède une borne supérieure

$$x^* = \sup\{x : x \in U^*\}\ .$$

On montre successivement

1. $x^* > a$
2. U^* est un intervalle
3. $U^* = [a\ ,\ x^*]$
4. $x^* = b$

1. <u>On montre $x^* > a$</u>
En effet , puisque f est dérivable à droite en a le point (iv) du théorème [10.15] page 861 (voir (10.139) page 862) montre qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}^*_+$ tel que

$$t \in]a\ ,\ a + \eta[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(a) - f'_d(a)(t - a)| \le \varepsilon\ (t - a)$$

par suite

$$t \in]a\ ,\ a + \eta[\cap [a\ ,\ b[\Rightarrow |f(t) - f(a)| \le (|f'_d(a)| + \varepsilon)\ (t - a)$$

ainsi, puisque par hypothèse $|f'_d(a)| \le \lambda_d$ on obtient

$$t \in]a\ ,\ a + \eta[\cap [a\ ,\ b[\Rightarrow |f(t) - f(a)| \le (\lambda_d + \varepsilon)\ (t - a) \tag{10.164}$$

en particulier si $x = a + \dfrac{1}{2}(\min\{\eta\ ,\ b - a\})$, il résulte de l'inclusion $]a\ ,\ x] \subset]a\ ,\ a + \eta[\cap [a\ ,\ b[$, du fait que $a \in U^*$ et de l'inégalité (10.164) que x est un élément de U^*. Le point x^* étant un majorant de U^* on obtient

$$x^* \ge x > a\ .$$

2. <u>On montre que U^* est un intervalle .</u>

   D'après le point (v) du lemme [10.11] page 656 il suffit d'établir

   $$(x\ ,y) \in U^* \times U^* \quad \text{et} \quad x \le y \quad \Rightarrow [x\ ,\ y] \subset U^*$$

   Or si $t \in [x\ ,\ y]$ alors $[a\ ,\ t] \subset [a\ ,\ y] \subset U$.

3. <u>On montre $U^* = [a\ ,\ x^*]$</u>

   Puisque U^* est un intervalle contenant a et de borne supérieure x^* on a

   $$[a\ ,\ x^*[\subset U^* \subset [a\ ,\ x^*]\ . \tag{10.165}$$

   Il suffit donc d'établir que $x^* \in U$. Or pour tout $n \ge \dfrac{1}{x^* - a}$ les inclusions (10.165) montrent que le réel $x^* - \dfrac{1}{n}$ est un élément de U , ainsi

   $$-(\lambda_d + \varepsilon)(x^* - a - \frac{1}{n}) \le f(x^* - \frac{1}{n}) - f(a) \le (\lambda_d + \varepsilon)(x^* - a - \frac{1}{n})\ . \tag{10.166}$$

   La continuité de f en x^* entraîne (voir par exemple le point (xi) du lemme [10.33] page 782)

   $$\lim_{n\to\infty} f(x^* - \frac{1}{n}) - f(a) = f(x^*) - f(a)$$

   ainsi la conservation des inégalités à la limite (voir par exemple le point (v) du lemme [10.3] page 610) et les inégalités (10.166) page 884; montrent que

   $$-(\lambda_d + \varepsilon)(x^* - a) \le f(x^*) - f(a) \le (\lambda_d + \varepsilon)(x^* - a)\ .$$

   Par suite on obtient $x^* \in U$ et $U^* = [a\ ,\ x^*]$

4. <u>On montre $x^* = b$</u>

   Il s'agit de montrer que l'assertion $x^* < b$ entraîne une assertion fausse. Or , si $x^* < b$ l'inclusion $[a\ ,\ b[\subset K'_d$ montre que x^* est K-accessible à droite, ainsi par hypothèse f est dérivable à droite en x^* et $|f'_d(x^*)| \le \lambda_d$. Il résulte de plus du point (iv) du théorème [10.15] page 861 en regardant par exemple (10.139) page 862 qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

   $$t \in]x^*\ ,\ x^* + \eta[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(x^*) - f'_d(x^*)(t - x^*)| \le \varepsilon\ (t - x^*)$$

   ainsi on obtient

   $$t \in]x^*\ ,\ x^* + \eta[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(x^*)| \le (|f'_d(x^*)| + \varepsilon)\ (t - x^*) \le (\lambda_d + \varepsilon)\ (t - x^*)\ . \tag{10.167}$$

   Or d'après 3 on a $x^* \in U$ par suite

   $$|f(x^*) - f(a)| \le (\lambda_d + \varepsilon)\ (x^* - a)$$

   ainsi l'inégalité

   $$|f(t) - f(a)| \le |f(t) - f(x^*)| + |f(x^*) - f(a)|$$

   et l'inégalité (10.167) montrent

   $$t \in]x^*\ ,\ x^* + \eta[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(a)| \le (\lambda_d + \varepsilon)\ (t - x^*) + (\lambda_d + \varepsilon)\ (x^* - a)\ .$$

   et puisque le second terme de cette inégalité est égal à $(\lambda_d + \varepsilon)\ (t - a)$ on obtient

   $$t \in]x^*\ ,\ x^* + \eta[\cap K \Rightarrow |f(t) - f(a)| \le (\lambda_d + \varepsilon)\ (t - a)\ . \tag{10.168}$$

Mais cette inégalité entraîne que x^* n'est pas un majorant de U^* contrairement à la définition d'une borne supérieure . En effet, si $y = x^* + \frac{1}{2}(\min\{\eta\ ,\ b - x^*\})$ alors $]x^*\ ,\ y] \subset]x^*\ ,\ x^* + \eta[\cap K$ et par (10.168) page 884 on obtient $]x^*\ ,\ y] \subset U$. Par suite

$$[a\ ,\ y] = [a\ ,\ x^*] \cup]x^*\ ,\ y] \subset U\ ,$$

ainsi y est un élément de U^* strictement supérieur à x^* , ce qui donne la contradiction cherchée. Ainsi $x^* = b$ et $U^* = [a\ ,\ b]$, par suite pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on obtient

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow |f(t) - f(a)| \leq (\lambda_d + \varepsilon)\ (t - a)$$

ce qui entraîne

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow |f(t) - f(a)| \leq \lambda_d\ (t - a)$$

(ii)

En posant

$$V = \{t \in [a\ ,\ b]/\ |f(b) - f(t)| \leq (\lambda_g + \varepsilon)\ (b - t)\}$$

et

$$V^* = \{x \in [a\ ,\ b]/[x\ ,\ b] \subset V\}$$

une preuve similaire à celle de (i) et laissée au soin du lecteur montre que $V^* = [a\ ,\ b]$. Par suite on obtient, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow t \in V \Rightarrow |f(b) - f(t)| \leq (\lambda_g + \varepsilon)\ (b - t)$$

et

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow |f(b) - f(t)| \leq \lambda_g\ (b - t)$$

(iii)

1. Sans perdre de généralité on peut supposer $x < y$. D'après le théorème [10.15] page 861 la dérivabilité de f entraîne qu'elle est $\imath(K\ ,\ \mathcal{T})$-continue. Mais par hypothèse pour tout $u \in K'_d$ on a $|f'_d(u)| \leq \lambda$, par suite puisque pour tout $(x, y) \in [a\ ,\ b] \times [a\ ,\ b]$ tel que $x < y$ l'inclusion $[a\ ,\ b] \subset K$ entraîne que $[x\ ,\ y[\subset K'_d$ le point (i), qu'on applique à l'intervalle $[x\ ,\ y[$, montre que

$$t \in [x\ ,\ y] \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leq \lambda\ (t - x) \leq \lambda\ (y - x)$$

par suite :

$$(x\ ,\ y) \in [a\ ,\ b] \times [a\ ,\ b] \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \lambda\ |y - x|$$

2. Puisque $\mathrm{int}(K)$ est ouvert il est somme fini ou dénombrable d'une famille $(I_q)_{q \in D}$ d'intervalles ouverts (c'est la définition d'un ouvert mais pour ce genre de résultat on peut voir par exemple le point $(viii)$ du théorème [10.4] page 670). Il résulte alors des inclusions

$$I_q \subset \mathrm{int}(K) \subset K'_d$$

et de 1 que

$$(x, y) \in I_q \times I_q \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \lambda\ |y - x|$$

(iv)

La preuve, similaire à celle de (iii) , est laissée au soin du lecteur. ■

Il existe des fonctions non continues qui sont dérivables à droite en tout point de leur domaine de définition, c'est par exemple le cas de l'application f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = n \quad \text{si} \quad x \in [n\ ,\ n + 1[\ .$$

Cette application est dérivable à droite en tout point de $\mathbb{R}^+$ et $f'_d(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Cet exemple montre aussi que la continuité dans le point (i) du théorème [10.16] page 882 est nécessaire .

10.11.3 *Dérivation et étude de fonctions*

I ***Sens de variation des fonctions***

Le théorème qui suit est un classique. On y utilise les notations de la définition [10.63] page 880.

Théorème 10.17 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application* continue *de* K *dans* $\mathbb{R}$*.*

(i) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et*

a $[a\ ,\ b[\subset K'_d$

b *f est à taux d'accroissement droit localement borné sur* $[a\ ,\ b[$ *et il existe* $\lambda^d_* \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $t \in [a\ ,\ b[$ *la dérivée inférieure droite de f en t est strictement supérieure à* λ^d_* *:*

$$t \in [a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda^d_*(f,t) > \lambda^d_*$$

.

Alors pour tout $t \in [a\ ,\ b]$ *on a* $f(t) \geq f(a) + \lambda^d_*\ (t-a)$ *:*

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow f(t) - f(a) \geq \lambda^d_*\ (t-a)\ . \tag{10.169}$$

(ii) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et*

α $[a\ ,\ b[\subset K'_d$

β *f est à taux d'accroissement droit localement borné sur* $[a\ ,\ b[$

γ *Il existe* $\lambda^d_* \in \mathbb{R}^*_+$ *tel que pour tout* $t \in |a\ ,\ b[$ *la dérivée inférieure droite de f en t est supérieure à* λ^d_* *:*

$$t \in [a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda^d_*(f,t) \geq \lambda^d_* > 0\ . \tag{10.170}$$

Alors f est strictement croissante sur $[a\ ,\ b]$*.*

(iii) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et*

a $[a\ ,\ b[\subset K'_d$

b *f est à taux d'accroissement droit localement borné sur* $[a\ ,\ b[$ *et il existe* $\lambda^*_d \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $t \in [a\ ,\ b[$ *la dérivée supérieure droite de f en t est strictement inférieure à* λ^*_d *:*

$$t \in [a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda^*_d(f,t) < \lambda^*_d$$

..

Alors pour tout $t \in [a\ ,\ b]$ *on a* $f(t) \leq f(a) + \lambda^*_d\ (t-a)$ *:*

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow f(t) - f(a) \leq \lambda^*_d\ (t-a) \tag{10.171}$$

(iv) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et*

α $[a\ ,\ b[\subset K'_d$

β *f est à taux d'accroissement droit localement borné sur* $[a\ ,\ b[$

γ *il existe* $\lambda^*_d \in \mathbb{R}^*_-$ *tel que pour tout* $t \in |a\ ,\ b|$ *la dérivé supérieure droite de f en t vérifie :*

$$t \in [a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda^*_d(f,t) \leq \lambda^*_d < 0\ . \tag{10.172}$$

Alors f est strictement décroissante sur $[a\ ,\ b]$*.*

(v) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et*

δ $[a\ ,\ b[\subset K'_d$

ϵ *f est dérivable à droite sur $[a\ ,\ b[$ et*

$$x \in [a\ ,\ b[\Rightarrow f'_d(x) = 0$$

alors f est constante sur $[a\ ,\ b]$:

$$x \in [a\ ,\ b[\Rightarrow f(x) = f(a)\ .$$

Preuve

(i)

On pose

$$F = \{t \in [a\ ,\ b] / f(t) - f(a) \geq \lambda^d_*\ (t-a)\}$$

et

$$F^* = \{x \in [a\ ,\ b] /\ [a\ ,\ x] \subset F\}\ .$$

Puisque $a \in F^*$ on a $F^* \neq \varnothing$ et puisque b est un majorant de F^* l'ensemble F^* possède une borne supérieure

$$x^m = \sup\{t : t \in F^*\}$$

on montre successivement :

1. $x^m > a$: il existe $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $a + \delta \in F^*$.
2. F^* est un intervalle borné
3. $x^m \in]a\ , b]$ et
$$[a\ , x^m[\subset F^* \subset [a\ ,\ x^m]$$
4. $x^m \in F^*\ ,\ F^* = [a\ ,\ x^m]$
5. $x^m = b$ et $F^* = [a\ ,\ b]$

I preuve de l'existence de $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $a + \delta \in F^*$

Par définition $\lambda^d_*(f\ ,\ a) = \liminf\limits_{\mathcal{V}'_d(a)} \tau_a f$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda^d_*(f, a) = \{x \in \mathbb{R} /\ \exists\ \omega \in \Omega'_d(a) : x = \inf_{t \in \omega} \tau_a(f)(t)\}\ .$$

Or par hypothèse $\lambda^d_*(f, a) > \lambda^d_*$ ainsi λ^d_* n'est pas un majorant de $\Lambda^d_*(f, a)$ et il existe $\omega \in \Omega'_d(a)$ tel que $\inf\limits_{t \in \omega} \tau_a f(t) > \lambda^d_*$, ainsi on obtient

$$t \in \omega \Rightarrow \frac{f(t) - f(a)}{t - a} > \lambda^d_*\ .$$

Puisque $\omega \in \mathcal{V}'_d(a)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $]a\ ,\ a + \varepsilon[\cap K \subset \omega$, par suite

$$t \in]a\ ,\ a + \varepsilon[\cap [a\ ,\ b[\Rightarrow f(t) - f(a) > \lambda^d_*\ (t - a)$$

Si on pose $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b-a}{2}\}$ l'inclusion $]a\ ,\ a + \delta] \subset]a\ ,\ a + \varepsilon[\cap]a\ ,\ b]$ montre

$$t \in]a\ ,\ a + \delta] \Rightarrow f(t) - f(a) > \lambda^d_*\ (t - a)$$

ainsi $]a\ ,\ a + \delta] \subset F$ et et puisque $a \in F$ on obtient $[a\ ,\ a + \delta] \subset F$, ainsi $a + \delta \in F^*$ et puisque x^m est un majorant de F^* on obtient

$$x^m \geq a + \delta > a\ .$$

II On montre que F^* est un intervalle borné.

D'abord F^* est par définition minoré par a et majoré par b, par suite $x^m \leq b$. Il suffit donc de voir que F^* est un intervalle. D'après le point (v) du lemme [10.11] page 656 il suffit de vérifier :

$$(x,y) \in F^* \times F^* \quad \text{et} \quad x \leq y \Rightarrow [x\ ,\ y] \subset F^*$$

Or si $t \in [x\ ,\ y]$ alors $[a\ ,\ t] \subset [a\ ,\ y] \subset F$ par suite $t \in F^*$.

III On montre $[a\ ,\ x^m[\subset F^* \subset [a\ ,\ x^m]$

1. On montre $[a\ ,\ x^m[\subset F^*$

   Cela provient du fait que F^* est un intervalle . En effet : si $t \in [a\ ,\ x^m[$ puisque x^m est le plus petit majorant de F^* t n'est pas un majorant de F^* , ainsi il existe $s \in F^*$ tel que $t < s$, par suite

   $$[a\ ,\ t] \subset [a\ ,\ s] \subset F$$

   et $t \in F^*$. Ceci montre que $[a\ ,\ x^m[\subset F^*$.
2. On montre $F^* \subset [a\ ,\ x^m]$

   Si $t \in F^*$ alors puisque $F^* \subset [a\ ,\ b]$ on a $t \geq a$, puisque x^m est un majorant de F^* on a $t \leq x^m$, par suite $F^* \subset [a\ ,\ x^m]$

IV On montre $x^m \in F^*$ et $F^* = [a\ ,\ x^m]$

D'après III il suffit de montrer que $x^m \in F^*$. Or pour tout $n \geq \dfrac{1}{x^m - a}$ l' inclusion $[a\ ,\ x^m[\subset F^*$ montre que le réel $x^m - \dfrac{1}{n}$ est un élément de F^* donc de F , ainsi

$$f(x^m - \frac{1}{n}) - f(a) \geq \lambda_*^d\ (x^m - a - \frac{1}{n})\ . \tag{10.173}$$

La continuité de f en x^m entraîne (voir par exemple le point (xi) du lemme [10.33] page 782)

$$\lim_{n\to\infty} f(x^m - \frac{1}{n}) - f(a) = f(x^m) - f(a)$$

ainsi la conservation des inégalités à la limite (on peut voir par exemple le point (v) du lemme [10.3] page 610) et l' inégalité (10.173) page 888 montrent que

$$f(x^m) - f(a) \geq \lambda_*^d\ (x^m - a)\ .$$

Par suite on obtient $x^m \in F$ et $F^* = [a\ ,\ x^m]$

V On montre $x^m = b$

On montre que l'assertion $x^m < b$ contredit la maximalité de x^m . En effet, si $x^m \in [a\ ,\ b[$ alors par hypothèse x^m est K-accessible à droite et f est à taux d'accroissements droit localement borné en x^m, de plus on a $\lambda_*^d(f, x^m) > \lambda_*^d$. Par définition $\lambda_*^d(f\ ,\ x^m) = \liminf_{\mathcal{V}_d'(x^m)} \tau_{x^m} f$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*^d(f, x^m) = \{x \in \mathbb{R} /\ \exists\ \omega \in \Omega_d'(x^m) : x = \inf_{t\in\omega} \tau_{x^m}(f)(t)\}\ .$$

Or par hypothèse $\lambda_*^d(f, x^m) > \lambda_*^d$ ainsi λ_*^d n'est pas un majorant de $\Lambda_*^d(f, x^m)$ et il existe $\omega \in \Omega_d'(x^m)$ tel que $\inf_{t\in\omega} \tau_{x^m} f(t) > \lambda_*^d$, ainsi on obtient

$$t \in \omega \Rightarrow \frac{f(t) - f(x^m)}{t - x^m} > \lambda_*^d\ .$$

Puisque $\omega \in \mathcal{V}'_d(x^m)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $]x^m\ ,\ x^m+\varepsilon[\cap K \subset \omega$, et

$$t \in]x^m\ ,\ x^m+\varepsilon[\cap[a\ ,\ b[\Rightarrow f(t)-f(x^m) > \lambda^d_*\ (t-x^m)$$

Si on pose $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b-x^m}{2}\}$ l'inclusion $]x^m\ ,\ x^m+\delta] \subset]x^m\ ,\ x^m+\varepsilon[\cap[a\ ,\ b[$ montre

$$t \in]x^m\ ,\ x^m+\delta] \Rightarrow f(t)-f(x^m) > \lambda^d_*\ (t-x^m)\ . \tag{10.174}$$

Puisque d'après IV on a $x^m \in F^*$ on obtient

$$t \in [a\ ,\ x^m] \Rightarrow f(t)-f(a) \geq \lambda^d_*\ (t-a) \tag{10.175}$$

cela permet de montrer que $[a\ ,\ x^m+\delta] \subset F$. En effet pour $t \in [a\ ,\ x^m+\delta] = [a\ ,x^m]\cup]x^m\ ,\ x^m+\delta]$ alors

— si $t \in [a\ ,\ x^m]$ l'inégalité (10.175) page 889 montre que $t \in F$

— si $t \in]x^m\ ,\ x^m+\delta]$ alors l'inégalité

$$f(t)-f(a) \geq f(t)-f(x^m)+f(x^m)-f(a)$$

et les inégalités (10.174) page 889 et (10.175) page 889 montrent que

$$f(t)-f(a) > \lambda^d_*\ (t-x^m)+\lambda^d_*\ (x^m-a)$$

et puisque le deuxième terme de cette inégalité est égal à $\lambda^d_*\ (t-a)$ on obtient aussi

$$t \in]x^m\ ,\ x^m+\delta] \Rightarrow t \in F$$

Ainsi $[a\ ,\ x^m+\delta] \subset F$ et ceci contredit la maximalité de x^m, par suite $x^m = b$ et $F^* = [a\ ,\ b]$. Ainsi on obtient

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow t \in F^* \Rightarrow t \in F \Rightarrow f(t)-f(a) \geq \lambda^d_*\ (t-a)$$

(ii)

Soit $(x,y) \in [a\ ,\ b]\times[a\ ,b]$ tel que $x<y$ alors $[x\ ,y[\subset [a\ ,\ b[\subset K'_d$, or par hypothèse f est à taux d'accroissement droit localement borné sur $[a\ ,\ b[$ et

$$t \in [x\ ,y[\Rightarrow \lambda^d_*(f,t) > \frac{\lambda^d_*}{2} > 0$$

ainsi l'application de (i) à l'intervalle $[x\ ,\ y]$ montre :

$$t \in [x\ ,\ y] \Rightarrow f(t)-f(x) \geq \frac{\lambda^d_*}{2}\ (t-x)\ .$$

et en particulier $f(y)-f(x) \geq \frac{\lambda^d_*}{2}\ (y-x) > 0$ et $f(y) > f(x)$.

(iii)

Si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K,\mathbb{R})$ est définie par $g(t) = -f(t)$ l'hypothèse entraîne que

$$t \in [a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda^d_*(g,t) > -\lambda^*_d$$

ainsi le point (iii) résulte du point (i) appliqué à g . Sinon le copier-coller de la preuve peut s'organiser de la manière suivante . On pose

$$G = \{t \in [a\ ,\ b]/f(t)-f(a) \leq \lambda^d_*\ (t-a)\}$$

et
$$G^* = \{x \in [a\ ,\ b]/\ [a\ ,\ x] \subset G\}\ .$$
Puisque $a \in G^*$ on a $G^* \neq \varnothing$ et puisque b est un majorant de G^* l'ensemble G^* possède une borne supérieure
$$x^m = \sup\{t : t \in G^*\}$$
on montre successivement :

1. $x^m > a$: il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a + \delta \in G^*$.
2. G^* est un intervalle borné
3. $x^m \in]a\ ,b]$ et
$$[a\ ,x^m[\subset G^* \subset [a\ ,\ x^m]$$
4. $x^m \in G^*$, $G^* = [a\ ,\ x^m]$
5. $x^m = b$ et $G^* = [a\ ,\ b]$

I preuve de l'existence de $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a + \delta \in G^*$

Par définition $\lambda_d^*(f\ ,\ a) = \limsup\limits_{\mathcal{V}'_d(a)} \tau_a f$ est le plus grand minorant de l'ensemble
$$\Lambda_d^*(f, a) = \{x \in \mathbb{R}/\ \exists\ \omega \in \Omega'_d(a) : x = \sup_{t \in \omega} \tau_a(f)(t)\}\ .$$
Or par hypothèse $\lambda_d^*(f, a) < \lambda_d^*$ ainsi λ_d^* n'est pas un minorant de $\Lambda_d^*(f, a)$ et il existe $\omega \in \Omega'_d(a)$ tel que $\sup\limits_{t\in\omega} \tau_a f(t) < \lambda_d^*$, ainsi on obtient
$$t \in \omega \Rightarrow \frac{f(t) - f(a)}{t - a} < \lambda_d^*\ .$$
Puisque $\omega \in \mathcal{V}'_d(a)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a\ ,\ a + \varepsilon[\cap K \subset \omega$, et
$$t \in]a\ ,\ a + \varepsilon[\cap[a\ ,\ b[\Rightarrow f(t) - f(a) < \lambda_d^*\ (t - a)$$
Si on pose $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b - a}{2}\}$ l'inclusion $]a\ ,\ a + \delta] \subset]a\ ,\ a + \varepsilon[\cap]a\ ,\ b]$ montre
$$t \in]a\ ,\ a + \delta] \Rightarrow f(t) - f(a) < \lambda_d^*\ (t - a)$$
ainsi $]a\ ,\ a + \delta] \subset G$ et et puisque $a \in G$ on obtient $[a\ ,\ a + \delta] \subset G$, par suite $a + \delta \in G^*$ et puisque x^m est un majorant de G^* on obtient
$$x^m \geq a + \delta > a\ .$$

II On montre que G^* est un intervalle borné.

D'abord G^* est par définition minoré par a et majoré par b, par suite $x^m \leq b$. Il suffit donc de voir que G^* est un intervalle. D'après le point (v) du lemme [10.11] page 656 il suffit de vérifier :
$$(x, y) \in G^* \times G^* \quad \text{et} \quad x \leq y \Rightarrow [x\ ,\ y] \subset G^*$$
Or si $t \in [x\ ,\ y]$ alors $[a\ ,\ t] \subset [a\ ,\ y] \subset G$ par suite $t \in G^*$.

III On montre $[a\ ,\ x^m[\subset G^* \subset [a\ ,\ x^m]$

1. On montre $[a\ ,\ x^m[\subset G^*$

   Cela provient du fait que G^* est un intervalle . En effet : si $t \in [a\ ,\ x^m[$ puisque x^m est le plus petit majorant de G^* t n'est pas un majorant de G^* , ainsi il existe $s \in G^*$ tel que $t < s$, par suite
$$[a\ ,\ t] \subset [a\ ,\ s] \subset G$$
   et $t \in G^*$. Ceci montre que $[a\ ,\ x^m[\subset G^*$.

2. On montre $G^* \subset [a\ ,\ x^m]$

   Si $t \in G^*$ alors puisque $G^* \subset [a\ ,\ b]$ on a $t \geq a$, puisque x^m est un majorant de G^* on a $t \leq x^m$, par suite $G^* \subset [a\ ,\ x^m]$

   IV On montre $x^m \in G^*$ et $G^* = [a\ ,\ x^m]$

   D'après III il suffit de montrer que $x^m \in G^*$. Or pour tout $n \geq \dfrac{1}{x^m - a}$ l' inclusion $[a\ ,\ x^m[\subset F^*$ montre que le réel $x^m - \dfrac{1}{n}$ est un élément de G^* donc de G , ainsi

$$f(x^m - \frac{1}{n}) - f(a) \leq \lambda_*^d\ (x^m - a - \frac{1}{n})\ . \tag{10.176}$$

   La continuité de f en x^m entraîne (voir par exemple le point (xi) du lemme [10.33] page 782)

$$\lim_{n\to\infty} f(x^m - \frac{1}{n}) - f(a) = f(x^m) - f(a)$$

   ainsi la conservation des inégalités à la limite (voir par exemple le point (v) du lemme [10.3] page 610) et l' inégalité (10.176) page 891 montrent que

$$f(x^m) - f(a) \leq \lambda_*^d\ (x^m - a)\ .$$

   Par suite on obtient $x^m \in G$ et $G^* = [a\ ,\ x^m]$

V On montre $x^m = b$

On montre que l'assertion $x^m < b$ contredit la maximalité de x^m . En effet, si $x^m \in [a\ ,\ b[$ alors par hypothèse x^m est K-accessible à droite et f est à taux d'accroissements droit localement borné en x^m, de plus on a $\lambda_d^*(f, x^m) < \lambda_d^*$. Par définition $\lambda_d^*(f\ ,\ x^m) = \limsup\limits_{\mathcal{V}'_d(x^m)} \tau_{x^m} f$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda_d^*(f, x^m) = \{x \in \mathbb{R}/\ \exists\ \omega \in \Omega'_d(x^m) : x = \sup_{t\in\omega} \tau_{x^m}(f)(t)\}\ .$$

Or par hypothèse $\lambda_d^*(f, x^m) < \lambda_d^*$ ainsi λ_d^* n'est pas un minorant de $\Lambda_d^*(f, x^m)$ et il existe $\omega \in \Omega'_d(x^m)$ tel que $\sup\limits_{t\in\omega} \tau_{x^m} f(t) < \lambda_*^d$, ainsi on obtient

$$t \in \omega \Rightarrow \frac{f(t) - f(x^m)}{t - x^m} < \lambda_*^d\ .$$

Puisque $\omega \in \mathcal{V}'_d(x^m)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x^m\ ,\ x^m + \varepsilon[\cap K \subset \omega$, et

$$t \in]x^m\ ,\ x^m + \varepsilon[\cap[a\ ,\ b[\Rightarrow f(t) - f(x^m) < \lambda_*^d\ (t - x^m)$$

Si on pose $\delta = \min\{\dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{b - x^m}{2}\}$ l'inclusion $]x^m\ ,\ x^m + \delta] \subset]x^m\ ,\ x^m + \varepsilon[\cap[a\ ,\ b[$ montre

$$t \in]x^m\ ,\ x^m + \delta] \Rightarrow f(t) - f(x^m) < \lambda_*^d\ (t - x^m)\ . \tag{10.177}$$

Puisque d'après IV on a $x^m \in F^*$ on obtient

$$t \in [a\ ,\ x^m] \Rightarrow f(t) - f(a) \leq \lambda_*^d\ (t - a) \tag{10.178}$$

cela permet de montrer que $[a\ ,\ x^m + \delta] \subset G$. En effet pour $t \in [a\ ,\ x^m + \delta] = [a\ , x^m]\cup]x^m\ ,\ x^m + \delta]$ alors

— si $t \in [a\ ,\ x^m]$ l'inégalité (10.178) page 891 montre que $t \in G$

— si $t \in]x^m\ ,\ x^m+\delta]$ alors l'inégalité

$$f(t)-f(a) \leq f(t)-f(x^m)+f(x^m)-f(a)$$

et les inégalités (10.177) page 891 et (10.178) page 891 montrent que

$$f(t)-f(a) < \lambda_d^*\ (t-x^m)+\lambda_d^*\ (x^m-a)$$

et puisque le deuxième terme de cette inégalité est égal à $\lambda_d^*\ (t-a)$ on obtient aussi

$$t \in]x^m\ ,\ x^m+\delta] \Rightarrow t \in G$$

Ainsi $[a\ ,\ x^m+\delta] \subset G$ et ceci contredit la maximalité de x^m, par suite $x^m = b$ et $G^* = [a\ ,\ b]$. Ainsi on obtient

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow t \in G^* \Rightarrow t \in G \Rightarrow f(t)-f(a) \leq \lambda_*^d\ (t-a)$$

(iv)

Soit $(x,y) \in [a\ ,\ b] \times [a\ ,b]$ tel que $x < y$ alors $[x\ ,y[\subset [a\ ,\ b[\subset K'_d$, or par hypothèse f est à taux d'accroissement droit localement borné sur $[a\ ,\ b[$ et

$$t \in [x\ ,y[\Rightarrow \lambda_d^*(f,t) < \frac{\lambda_d^*}{2} < 0$$

ainsi l'application de *(iii)* à l'intervalle $[x\ ,\ y]$ montre :

$$t \in [x\ ,\ y] \Rightarrow f(t)-f(x) \leq \frac{\lambda_d^*}{2}\ (t-x)\ .$$

et en particulier $f(y)-f(x) \leq \dfrac{\lambda_d^*}{2}\ (y-x) < 0$ et $f(y) < f(x)$.

(v)

Dire que f est dérivable à droite en tout point de $[a\ ,\ b[$ et que $t \in [a\ ,\ b[\Rightarrow f'_d(t) = 0$ c'est dire que

$$t \in [a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda_*^d(f,t) = \lambda_d^*(f,t) = 0$$

par suite pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$t \in [a\ ,\ b[\Rightarrow -\varepsilon < \lambda_*^d(f,t) \leq \lambda_d^*(f,t) < \varepsilon$$

ainsi les inégalités (10.169) page 886 et (10.171) page 886 montrent

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow -\varepsilon\ (t-a) \leq f(t)-f(a) \leq \varepsilon\ (t-a)$$

par suite pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$t \in]a\ ,\ b] \Rightarrow |\frac{f(t)-f(a)}{t-a}| \leq \varepsilon\ .$$

cette inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on obtient $t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow f(t) = f(a)$. ■

On a une « version à gauche » du théorème [10.17] page 886 qu'on énonce sans preuve.

Théorème 10.18 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application* continue *de* K *dans* $\mathbb{R}$.

(i) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et*

a $]a\ ,\ b[\subset K'_g$

b *f est à taux d'accroissement gauche localement borné sur* $]a\ ,\ b]$ *et il existe* $\lambda_*^g \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $t \in]a\ ,\ b]$ *la dérivée inférieure droite de* f *en* t *est strictement supérieure à* λ_*^g *:*

$$t \in]a\ ,\ b] \Rightarrow \lambda_*^g(f,t) > \lambda_*^g$$

.

Alors pour tout $t \in [a\ ,\ b]$ *on a* $f(t) \geq f(a) + \lambda_*^g\ (t-a)$ *:*

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow f(t) - f(a) \geq \lambda_*^g\ (t-a)\ . \tag{10.179}$$

(ii) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et*

α $]a\ ,\ b] \subset K_g'$

β *f est à taux d'accroissement gauche localement borné sur* $]a\ ,\ b]$

γ *Il existe* $\lambda_*^g \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que pour tout* $t \in]a\ ,\ b]$ *la dérivée inférieure gauche de* f *en* t *est supérieure à* λ_*^g *:*

$$t \in]a\ ,\ b] \Rightarrow \lambda_*^g(f,t) \geq \lambda_*^g > 0\ . \tag{10.180}$$

Alors f *est strictement croissante sur* $[a\ ,\ b]$.

(iii) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et*

a $]a\ ,\ b] \subset K_g'$

b *f est à taux d'accroissement gauche localement borné sur* $]a\ ,\ b]$ *et il existe* $\lambda_g^* \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $t \in]a\ ,\ b]$ *la dérivée supérieure gauche de* f *en* t *est strictement inférieure à* λ_g^* *:*

$$t \in]a\ ,\ b] \Rightarrow \lambda_g^*(f,t) < \lambda_g^*$$

..

Alors pour tout $t \in [a\ ,\ b]$ *on a* $f(t) \leq f(a) + \lambda_d^*\ (t-a)$ *:*

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow f(t) - f(a) \leq \lambda_g^*\ (t-a) \tag{10.181}$$

(iv) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et*

α $]a\ ,\ b] \subset K_g'$

β *f est à taux d'accroissement gauche localement borné sur* $]a\ ,\ b]$

γ *il existe* $\lambda_g^* \in \mathbb{R}_-^*$ *tel que pour tout* $t \in]a\ ,\ b]$ *la dérivé supérieure gauche de* f *en* t *vérifie :*

$$t \in [a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda_g^*(f,t) \leq \lambda_g^* < 0\ . \tag{10.182}$$

Alors f *est strictement décroissante sur* $[a\ ,\ b]$.

(v) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et*

δ $]a\ ,\ b] \subset K_g'$

ϵ *f est dérivable à gauche sur* $]a\ ,\ b]$ *et*

$$x \in]a\ ,\ b] \Rightarrow f_g'(x) = 0$$

alors f *est constante sur* $[a\ ,\ b]$ *:*

$$x \in [a\ ,\ b[\Rightarrow f(x) = f(a)\ .$$

Les preuves des théorèmes [10.16] page 882 à [10.18] page 892 n'utilisent qu'un seul type de raisonnement qui permet de passer du local au global. En continuant dans cette veine on obtient des résultats un peu plus conséquents.

Définition 10.64 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$.

1. *On dit que* f *est localement croissante à droite sur un sous-ensemble* I *de* K *si pour tout* $x \in I'_d$ *il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap I \Rightarrow f(t) \geq f(x)$$
2. *On dit que* f *est localement strictement croissante à droite sur un sous-ensemble* I *de* K *si pour tout* $x \in I'_d$ *il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap I \Rightarrow f(t) > f(x)$$
3. *On dit que* f *est localement décroissante à droite sur un sous-ensemble* I *de* K *si pour tout* $x \in I'_d$ *il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap I \Rightarrow f(t) \leq f(x)$$
4. *On dit que* f *est localement strictement décroissante à droite sur un sous-ensemble* I *de* K *si pour tout* $x \in I'_d$ *il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap I \Rightarrow f(t) < f(x)$$
5. *On dit que* f *est localement croissante à gauche sur un sous-ensemble* I *de* K *si pour tout* $x \in I'_g$ *il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x-\varepsilon\ ,\ x[\cap I \Rightarrow f(t) \leq f(x)$$
6. *On dit que* f *est localement strictement croissante à gauche sur un sous-ensemble* I *de* K *si pour tout* $x \in I'_g$ *il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x-\varepsilon\ ,\ x[\cap I \Rightarrow f(t) < f(x)$$
7. *On dit que* f *est localement décroissante à gauche sur un sous-ensemble* I *de* K *si pour tout* $x \in I'_g$ *il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x-\varepsilon\ ,\ x[\cap I \Rightarrow f(t) \geq f(x)$$
8. *On dit que* f *est localement strictement décroissante à gauche sur un sous-ensemble* I *de* K *si pour tout* $x \in I'_g$ *il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que*
$$t \in]x-\varepsilon\ ,\ x[\cap I \Rightarrow f(t) > f(x)$$

Le jeu consiste à montrer que la croissance locale sur un intervalle entraîne la croissance globale sur cet intervalle.

Théorème 10.19 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* K *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *et* f *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$.

(i) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et si* f *est continue à gauche sur* $[a\ ,\ b]$ *et localement croissante à droite sur* $[a\ ,\ b]$ *alors* f *est croissante sur* $[a\ ,\ b]$

(ii) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et si* f *est continue à gauche sur* $[a\ ,\ b]$ *et localement strictement croissante à droite sur* $[a\ ,\ b]$ *alors* f *est strictement croissante sur* $[a\ ,\ b]$

(iii) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et si* f *est continue sur* $[a\ ,\ b]$ *et localement croissante à droite sur l'intervalle ouvert* $]a\ ,\ b[$ *alors* f *est croissante sur* $[a\ ,\ b]$

(iv) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et si* f *est continue sur* $[a\ ,\ b]$ *et localement strictement croissante à droite sur l'intervalle ouvert* $]a\ ,\ b[$ *alors* f *est strictement croissante sur* $[a\ ,\ b]$

(v) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et les propriétés suivantes :*

a *f est continue sur $[a\ ,\ b]$*

b *f est à taux d'accroissement droit localement borné sur $]a\ ,\ b[$ et la dérivée inférieure droite de f est strictement positive sur $]a\ ,\ b[$:*

$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda_*^d(f,x) > 0$$

alors f est strictement croissante sur $[a\ ,\ b]$.

(vi) Si $(a,b) \in K \times K$ vérifie $a < b$, $[a\ ,\ b] \subset K$ et les propriétés suivantes :

c *f est continue sur $[a\ ,\ b]$*

d *f est à taux d'accroissement droit localement borné sur $]a\ ,\ b[$ et la dérivée inférieure droite de f est positive sur $]a\ ,\ b[$:*

$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda_*^d(f,x) \geq 0$$

e *$f(b) \leq f(a)$*

alors il existe $t \in]a\ ,\ b[$ tel que $\lambda_*^d(f,t) = 0$

(vii) Si $(a,b) \in K \times K$ vérifie $a < b$, $[a\ ,\ b] \subset K$ et f est continue à gauche et localement décroissante à droite sur $[a,b]$ alors f est décroissante sur $[a\ ,\ b]$

(viii) Si $(a,b) \in K \times K$ vérifie $a < b$, $[a\ ,\ b] \subset K$ et si f est continue à gauche et localement strictement décroissante à droite sur $[a,b]$ alors f est strictement décroissante sur $[a\ ,\ b]$

(ix) Si $(a,b) \in K \times K$ vérifie $a < b$, $[a\ ,\ b] \subset K$ et si f est continue sur $[a\ ,\ b]$ et localement décroissante à droite sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$ alors f est croissante sur $[a\ ,\ b]$

(x) Si $(a,b) \in K \times K$ vérifie $a < b$, $[a\ ,\ b] \subset K$ et si f est continue sur $[a\ ,\ b]$ et localement strictement décroissante à droite sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$ alors f est strictement décroissante sur $[a\ ,\ b]$

(xi) Si f est définie sur $[a\ ,\ b]$ et vérifie les propriétés suivantes :

f *f est continue sur $[a\ ,\ b]$*

g *f est à taux d'accroissement droit localement borné sur $]a\ ,\ b[$ et la dérivée supérieure droite de f est strictement négative sur $]a\ ,\ b[$:*

$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda_d^*(f,x) < 0$$

alors f est strictement décroissante sur $[a\ ,\ b]$.

(xii) Si $(a,b) \in K \times K$ vérifie $a < b$, $[a\ ,\ b] \subset K$ et les propriétés suivantes :

h *f est continue sur $[a\ ,\ b]$*

i *f est à taux d'accroissement droit localement borné sur $]a\ ,\ b[$ et la dérivée supérieure droite de f est négative sur $]a\ ,\ b[$:*

$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda_d^*(f,x) \leq 0$$

j *$f(a) \leq f(b)$*

alors il existe $t \in]a\ ,\ b[$ tel que $\lambda_d^*(f,t) = 0$

Preuve

$$(i)$$

Pour tout $x \in [a\ ,\ b[$ on pose

$$F(x) = \{t \in [x\ ,\ b]/f(t) \geq f(x)\}$$

et

$$F^*(x) = \{t \in [x\ ,\ b]/[x\ ,\ t] \subset F(x)\}\ .$$

Puisque $x \in F^*(x)$ et b est un majorant de $F^*(x)$ cet ensemble possède une borne supérieure qu'on note $m(x)$:

$$m(x) = \sup\{t : t \in F^*(x)\}$$

On montre les points suivants

1. pour tout $x \in [a\ ,\ b[$ on a $m(x) > x$: Il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x + \delta \in F^*(x)$
2. pour tout $x \in [a\ ,\ b[$ l'ensemble $F^*(x)$ est un intervalle
3. $[x\ ,\ m(x)[\subset F^*(x) \subset [x\ , m(x)]$
4. $m(x) \in F(x)$ et $F^*(x) = [x\ ,\ m(x)]$
5. $m(x) = b$ et $F^*(x) = [x\ ,\ b]$
6. f est croissante sur $[a\ ,\ b]$

I On montre que pour $x \in [a\ , b[$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x + \delta \in F^*(x)$.

Si $x \in [a\ ,\ b[$, alors il résulte de la croissance locale à droite de f qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x\ ,\ x + \varepsilon[\cap[a\ ,\ b] \Rightarrow f(t) \geq f(x)$$

ainsi, si $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b-x}{2}\}$ l'inclusion

$$]x\ ,\ x + \delta] \subset]x\ ,\ x + \varepsilon[\cap[a\ ,\ b[$$

montre

$$t \in [x\ ,\ x + \delta] \Rightarrow f(t) \geq f(x)$$

ainsi $[x\ ,\ x + \delta] \subset F(x)$ et $x + \delta \in F^*(x)$.

II on montre que $F^*(x)$ est un intervalle

D'après le point (v) du lemme [10.11] page 656 il suffit de vérifier :

$$(u, v) \in F^*(x) \times F^*(x) \quad \text{et} \quad u \leq v \Rightarrow [u\ ,\ v] \subset F^*(x)$$

Or si $t \in [u\ ,\ v]$ alors $[x\ ,\ t] \subset [x\ ,\ v] \subset F(x)$ par suite $t \in F^*(x)$.

III On montre que $[x\ ,\ m(x)[\subset F^*(x) \subset]x\ ,\ m(x)]$

1. On montre $]x\ ,\ m(x)[\subset F^*(x)$
   Cela provient du fait que $F^*(x)$ est un intervalle. En effet si $x \leq t < m(x)$ alors puisque $m(x)$ est le plus petit majorant de $F^*(x)$ le réel t n'est pas un majorant de $F^*(x)$ ainsi il existe $y \in F^*(x)$ tel que $t < y$ par suite
   $$[x\ ,\ t] \subset [x\ ,\ y] \subset F(x)$$
   et $t \in F^*(x)$
2. On montre $F^*(x) \subset [x\ ,\ m(x)]$
   En effet si $t \in F^*(x)$ alors $t \geq x$ puisque $F^*(x) \subset [x\ ,\ b]$ et $t \leq m(x)$ puisque $m(x)$ est un majorant de $F^*(x)$.

IV On montre $m(x) \in F(x)$ et $F^*(x) = [x\ ,\ m(x)]$

D'après III il suffit de montrer $m(x) \in F(x)$. Pour tout $n \geq \frac{1}{m(x) - x}$ l' inclusion $[x\ ,\ m(x)[\subset F^*(x)$ montre que le réel $m(x) - \frac{1}{n}$ est un élément de $F^*(x)$ donc de $F(x)$, ainsi

$$f(m(x) - \frac{1}{n}) \geq f(x)\ . \tag{10.183}$$

La continuité à gauche de f en $m(x)$ entraîne (voir par exemple le point (ix) du lemme [10.34] page 796)

$$\lim_{n\to\infty} f(m(x)-\frac{1}{n}) = f(m(x))$$

ainsi la conservation des inégalités à la limite (voir par exemple le point (v) du lemme [10.3] page 610) et l' inégalité (10.183) page 896 montrent que

$$f(m(x)) \geq f(x).$$

Par suite on obtient $m(x) \in F(x)$ et $F^*(x) = [x\ ,\ m(x)]$

V On montre $m(x) = b$ et $F^*(x) = [x\ ,\ b]$

D'après IV il suffit de montrer $m(x) = b$. On montre que l'assertion $m(x) < b$ contredit la maximalité de $m(x)$. Si $m(x) \in [a\ ,\ b[$, alors il résulte de la croissance locale à droite de f qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]m(x)\ ,\ m(x)+\varepsilon[\cap [a\ ,\ b] \Rightarrow f(t) \geq f(m(x))$$

ainsi, si $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b-m(x)}{2}\}$ l'inclusion

$$]m(x)\ ,\ m(x)+\delta] \subset]m(x)\ ,\ m(x)+\varepsilon[\cap [a\ ,\ b]$$

montre que

$$t \in]m(x)\ ,\ m(x)+\delta] \Rightarrow t \in F(x) \tag{10.184}$$

puisque IV montre que $m(x) \in F^*(x)$ on a aussi

$$t \in [x\ ,\ m(x)] \Rightarrow t \in F(x) \tag{10.185}$$

Cela permet de montrer que $[x\ ,\ m(x)+\delta] \subset F(x)$, en effet

— si $t \in [x\ ,\ m(x)]$ alors (10.185) page 897 montre que $t \in F(x)$

— si $t \in]m(x)\ ,\ m(x)+\delta]$ alors (10.184) page 897 montre que $t \in F(x)$

Ainsi $m(x)+\delta \in F^*(x)$ et ceci contredit la définition de $m(x)$ comme borne supérieure de $F^*(x)$. Par suite $m(x) = b$ et $F^*(x) = [x\ ,\ b]$.

VI On montre que f est croissante sur $[a\ ,\ b]$.

Si $(x, y) \in [a\ ,\ b] \times [a\ ,\ b]$ et $x \leq y$ alors $y \in [x\ ,\ b]$ et on vient de voir que $[x\ ,\ b] = F^*(x)$ par suite $y \in F(x)$ et $f(y) \geq f(x)$.

(ii)

Puisque toute application localement strictement croissante à droite est localement croissante à droite le point (i) montre que f est croissante sur $[a\ ,\ b]$, il suffit donc de montrer que f est injective. Or si f n'est pas injective il existe $(x_0, y_0) \in [a\ ,\ b] \times [a\ ,\ b]$ tel que $x_0 < y_0$ et $f(x_0) = f(y_0)$ la croissance de f montre alors

$$t \in]x_0\ ,\ y_0[\Rightarrow f(x_0) \leq f(t) \leq f(y_0) \leq f(x_0)\ .$$

par suite

$$t \in [x_0\ ,\ y_0[\Rightarrow f(x_0) = f(t) = f(y_0)$$

ainsi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $t \in]x_0\ ,\ x_0+\varepsilon[\cap [a\ ,\ b]$ tel que $f(t) = f(x_0)$, ce qui contredit la stricte croissance locale à droite de f. f étant croissante et injective elle est strictement croissante.

(iii)

On montre que f est croissante sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$ et que toute application continue sur $[a\ ,\ b]$ et croissante sur $]a\ ,\ b[$ est croissante sur $[a\ ,\ b]$.

I On montre que f est croissante sur $]a\ ,\ b[$

Si $(x,y)\in]a\ ,\ b[\times]a\ ,\ b[$ alors $[x,y]\subset]a\ ,\ b[\subset K$ et f est localement croissante sur $[x\ ,\ y]$. en effet, puisque f est localement croissante à droite sur $]a\ ,\ b[$ pour tout $t\in[x\ ,\ y[$ il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$u\in]t\ ,\ t+\varepsilon[\cap]a\ ,\ b[\Rightarrow f(t)\leq f(u)$$

par suite

$$u\in]t\ ,\ t+\varepsilon[\cap[x\ ,\ y[\Rightarrow f(t)\leq f(u)$$

ainsi f est localement croissante à droite sur $[x\ ,\ y]$ et (i) montre que f est croissante sur $[x\ ,\ y]$ par suite $f(x)\leq f(y)$

II On montre que f est croissante sur $[a\ ,\ b]$

il reste à montrer

$$x\in]a\ ,\ b[\Rightarrow f(a)\leq f(x)\leq f(b)\ .$$

1. On montre $f(a)\leq f(x)$.
   Si $k>\dfrac{1}{x-a}$ alors la suite $a_n=a+\dfrac{1}{n+k}$ vérifie $n\in\mathbb{N}\Rightarrow a_n\in]a\ ,\ x[$ et a_n est une suite décroissante qui tend vers a, de plus
   — puisque f est croissante sur $]a\ ,\ b[$ et $a<a_n\leq x<b$ la suite $f(a_n)$ est décroissante et
   $$f(a_n)\leq f(x) \tag{10.186}$$
   — puisque f est continue en a on obtient
   $$f(a)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)$$
   Ainsi la conservation des inégalités à la limite (voir le point (v) du lemme [10.3] page 610) et l'inégalité (10.186) page 898 entraînent
   $$f(a)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\leq f(x)$$
2. On montre $f(x)\leq f(b)$.
   Si $k>\dfrac{1}{b-x}$ alors la suite $b_n=b-\dfrac{1}{n+k}$ vérifie $n\in\mathbb{N}\Rightarrow b_n\in]x\ ,\ b[$ et b_n est une suite croissante qui tend vers b, de plus
   — puisque f est croissante sur $]a\ ,\ b[$ et $a<x\leq b_n<b$ la suite $f(b_n)$ est croissante et
   $$f(b_n)\geq f(x) \tag{10.187}$$
   — puisque f est continue en b on obtient voir par exemple le point (xi) du lemme [10.33] page 782
   $$f(b)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)$$
   Ainsi la conservation des inégalités à la limite (voir le point (v) du lemme [10.3] page 610) et l'inégalité (10.187) page 898 entraînent
   $$f(b)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)\geq f(x)$$

(iv)

On montre que f est strictement croissante sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$ et que toute application continue sur $[a\ ,\ b]$ et strictement croissante sur $]a\ ,\ b[$ est strictement croissante sur $[a\ ,\ b]$.

I On montre que f est strictement croissante sur $]a\ ,\ b[$

Si $(x,y) \in]a\ ,\ b[\times]a\ ,\ b[$ et $x < y$ alors $[x,y] \subset]a\ ,\ b[\subset K$ et f est localement strictement croissante sur $[x\ ,\ y]$. en effet, puisque f est localement strictement croissante à droite sur $]a\ ,\ b[$ pour tout $t \in [x\ ,\ y[$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$u \in]t\ ,\ t+\varepsilon[\cap]a\ ,\ b[\Rightarrow f(t) < f(u)$$

par suite

$$u \in]t\ ,\ t+\varepsilon[\cap[x\ ,\ y[\Rightarrow f(t) < f(u)$$

ainsi f est localement strictement croissante à droite sur $[x\ ,\ y]$ et (ii) montre que f est strictement croissante sur $[x\ ,\ y]$ par suite $f(x) < f(y)$

II On montre que f est croissante sur $[a\ ,\ b]$

il reste à montrer

$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow f(a) < f(x) < f(b)\ .$$

1. On montre $f(a) < f(x)$.
   Si $k > \dfrac{1}{x-a}$ alors la suite $a_n = a + \dfrac{1}{n+k}$ vérifie $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \in]a\ ,\ x[$ et a_n est une suite strictement décroissante qui tend vers a, de plus
   — puisque f est strictement croissante sur $]a\ ,\ b[$ et $a < a_n < x < b$ la suite $f(a_n)$ est strictement décroissante et
   $$f(a_n) < f(a_0) < f(x) \tag{10.188}$$
   — puisque f est continue en a on obtient voir par exemple le point (xi) du lemme [10.33] page 782
   $$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$
   Ainsi la conservation des inégalités à la limite (voir le point (v) du lemme [10.3] page 610) et l'inégalité (10.188) page 899 entraînent
   $$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq f(a_0) < f(x)$$
2. On montre $f(x) < f(b)$.
   Si $k > \dfrac{1}{b-x}$ alors la suite $b_n = b - \dfrac{1}{n+k}$ vérifie $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n \in]x\ ,\ b[$ et b_n est une suite strictement croissante qui tend vers b, de plus
   — puisque f est strictement croissante sur $]a\ ,\ b[$ et $a < x < b_n < b$ la suite $f(b_n)$ est strictement croissante et
   $$f(b_n) > f(b_0) > f(x) \tag{10.189}$$
   — puisque f est continue en b on obtient voir par exemple le point (xi) du lemme [10.33] page 782
   $$f(b) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$
   Ainsi la conservation des inégalités à la limite (voir le point (v) du lemme [10.3] page 610) et l'inégalité (10.189) page 899 entraînent
   $$f(b) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq f(b_0) > f(x)$$

(v)

D'après (iv) il suffit de montrer que f est localement strictement croissante à droite sur $]a\ ,\ b[$: pour tout $x \in]a\ ,\ b[$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap[a\ ,\ b] \Rightarrow f(x) < f(t)\ .$$

Si $x \in]a\ ,\ b[$, puisque $\lambda_*^d(f,x)$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*^d(f,x) = \{y \in \mathbb{R}/\ \exists\ \omega \in \Omega_d'(x) : y = \inf_{t\in\omega} \tau_x f(t)\}$$

l'hypothèse $\lambda_*^d(f,x) > 0$ entraîne que 0 n'est pas un majorant de $\Lambda_*^d(f,x)$ par suite il existe $\omega \in \Omega_d'(x)$ tel que $\inf_{t\in\omega} \tau_x f(t) > 0$ ainsi on obtient

$$t \in \omega \Rightarrow \frac{f(t) - f(x)}{t - x} > 0\ .$$

Puisque $\omega \in \mathcal{V}_d'(x)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap K \subset \omega$ par suite

$$t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap]a\ ,\ b[\Rightarrow \frac{f(t) - f(x)}{t - x} > 0 \Rightarrow f(t) > f(x)\ .$$

Ainsi f est localement strictement croissante à droite sur $]a\ ,\ b[$ et continue, (iv) montre alors qu'elle est strictement croissante sur $[a\ ,\ b]$

(vi)

Si $\lambda_*^d(f,x) > 0$ pour tout $x \in]a\ ,\ b[$ alors d'après (v) l'application f est strictement croissante sur $[a\ ,\ b]$, par suite $f(a) < f(b)$.

(vii)

Si g est l'application de K dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = -f(t)$ alors

- par le point (xi) du lemme [10.34] page 796 g est continue à gauche
- g est localement croissante à droite sur $[a\ ,\ b]$. En effet, puisque f est localement décroissante à droite sur $[a\ ,\ b]$ pour tout $x \in [a\ ,\ b[$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap[a\ ,\ b] \Rightarrow f(t) \leq f(x)$$

par suite

$$t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap[a\ ,\ b] \Rightarrow g(x) \leq g(t)$$

ainsi le point (i) montre que g est croissante sur $[a\ ,\ b]$, par suite f est décroissante sur $[a\ ,\ b]$.

$(viii)$

L'application g de K dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = -f(t)$ est continue à gauche et localement strictement croissante à droite sur $[a\ ,\ b]$ par suite le point (ii) montre qu'elle est strictement croissante sur $[a\ ,\ b]$, ainsi f est strictement décroissante sur $[a\ ,\ b]$.

(ix)

L'application g de K dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = -f(t)$ est continue sur $[a\ ,\ b]$ et localement croissante à droite sur $]a\ ,\ b[$ par suite le point (iii) montre qu'elle est croissante sur $[a\ ,\ b]$, ainsi f est décroissante sur $[a\ ,\ b]$.

(x)

L'application g de K dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = -f(t)$ est continue sur $[a\ ,\ b]$ et localement strictement croissante à droite sur $]a\ ,\ b[$ par suite le point (iv) montre qu'elle est strictement croissante sur $[a\ ,\ b]$, ainsi f est strictement décroissante sur $[a\ ,\ b]$.

(xi)

D'après (x) il suffit de montrer que f est localement strictement décroissante à droite sur $]a\ ,\ b[$: pour tout $x \in]a\ ,\ b[$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap[a\ ,\ b] \Rightarrow f(t) < f(x)\ .$$

Si $x \in]a\ ,\ b[$, puisque $\lambda_d^*(f,x)$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda_d^*(f,x) = \{y \in \mathbb{R} /\ \exists\ \omega \in \Omega_d'(x) : y = \sup_{t\in\omega} \tau_x f(t)\}$$

l'hypothèse $\lambda_d^*(f,x) < 0$ entraîne que 0 n'est pas un minorant de $\Lambda_d^*(f,x)$ par suite il existe $\omega \in \Omega_d'(x)$ tel que $\sup_{t\in\omega} \tau_x f(t) < 0$ ainsi on obtient

$$t \in \omega \Rightarrow \frac{f(t)-f(x)}{t-x} < 0\ .$$

Puisque $\omega \in \mathcal{V}_d'(x)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap K \subset \omega$ par suite

$$t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[\cap]a\ ,\ b[\Rightarrow \frac{f(t)-f(x)}{t-x} < 0 \Rightarrow f(t) < f(x)\ .$$

Ainsi f est localement strictement décroissante à droite sur $]a\ ,\ b[$ et continue, (x) montre alors qu'elle est strictement décroissante sur $[a\ ,\ b]$

(xii)

D'après (xi) si $\lambda_d^*(f,t) < 0$ pour tout $t \in]a\ ,\ b[$ alors f est strictement décroissante sur $[a\ ,\ b]$ par suite $f(b) < f(a)$. ■

On rappelle qu'une application $f : K \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable à droite si f est à taux d'accroissement droit localement borné sur K et si en tout point de K_d' la dérivée inférieure droite de f est égale à la dérivée supérieure droite de f :

$$x \in K_d' \Rightarrow \lambda_*^d(f,x) = \lambda_d^*(f,x)$$

on note alors $f_d'(x)$ cette valeur commune :

$$f_d'(x) = \lambda_*^d(f,x) = \lambda_d^*(f,x)$$

Lorsque f est dérivable à droite on a des conditions suffisantes très simples qui lient le sens de variation de f au signe de la dérivée à droite.

Théorème 10.20 *On note $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ un corps de réels, $\mathcal{T}$ la topologie standard sur $\mathbb{R}$, K un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ une application de K dans $\mathbb{R}$. Si $(a,b) \in K \times K$ vérifie $a < b$ et $[a\ ,\ b] \subset K$ et les propriété* **a** *et* **b** *suivantes*

a *f est continue sur $[a\ ,\ b]$*

b *f est dérivable à droite sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$*

Alors :

1. *Si la dérivée à droite de f ne prend que des valeurs strictement positives sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$:*

   $$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow f_d'(x) > 0$$

   alors f est strictement croissante sur l'intervalle fermé $[a\ ,\ b]$.

2. *Si la dérivée à droite de f ne prend que des valeurs strictement négatives sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$:*

   $$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow f_d'(x) < 0$$

   alors f est strictement décroissante sur l'intervalle fermé $[a\ ,\ b]$.

3. *Si la dérivée à droite de f ne prend que la valeur zéro sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$:*

   $$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow f_d'(x) = 0$$

   alors f est constante sur l'intervalle fermé $[a\ ,\ b]$.

Preuve

1. Puisque pour tout $t \in]a\ ,\ b[$ on a $f'_d(t) = \lambda^d_*(f,t)$ la dérivée inférieure droite de f est strictement positive sur $]a\ ,\ b[$ et il suffit d'appliquer le point (v) du théorème [10.19] page 894
2. Puisque pour tout $t \in]a\ ,\ b[$ on a $f'_d(t) = \lambda^*_d(f,t)$ la dérivée supérieure droite de f est strictement négative sur $]a\ ,\ b[$ et il suffit d'appliquer le point (xi) du théorème [10.19] page 894
3. D'après le point (v) du théorème [10.17] page 886 on a, puisque pour tout $x_0 \in]a\ ,\ b[$ la dérivée à droite est nulle sur $[x_0\ ,\ b[$
$$t \in [x_0\ ,\ b[\Rightarrow f(t) = f(x_0)$$
la continuité à gauche de f en b montre alors que
$$x_0 \in]a\ ,\ b[\Rightarrow f(x_0) = f(b)$$
et la continuité à droite de f en a montre
$$x_0 \in [a\ ,\ b] \Rightarrow f(a) = f(x_0) = f(b)\ .$$

■

Les énoncés du théorème [10.20] page 901 sont à fortiori vèrifiés lorsque f est dérivable , ce qui donne le théorème suivant.

Théorème 10.21 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. Si* $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et les propriété* **a** *et* **b** *suivantes*

a *f est continue sur $[a\ ,\ b]$*

b *f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$*

Alors :

1. *Si la dérivée de f ne prend que des valeurs strictement positives sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$:*
$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow f'(x) > 0$$
alors f est strictement croissante sur l'intervalle fermé $[a\ ,\ b]$.
2. *Si la dérivée de f ne prend que des valeurs strictement négatives sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$:*
$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow f'(x) < 0$$
alors f est strictement décroissante sur l'intervalle fermé $[a\ ,\ b]$.
3. *Si la dérivée de f ne prend que la valeur zéro sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$:*
$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow f'(x) = 0$$
alors f est constante sur l'intervalle fermé $[a\ ,\ b]$.

On a une « version à gauche » du théorème [10.19] page 894 qu'on énonce sans preuve.

Théorème 10.22 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *et* f *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*.*

(i) Si $(a,b) \in K \times K$ vérifie $a < b$, $[a\ ,\ b] \subset K$ et si f est continue à droite sur $[a\ ,\ b]$ et localement croissante à gauche sur $[a\ ,\ b]$ alors f est croissante sur $[a\ ,\ b]$

(ii) Si $(a,b) \in K \times K$ vérifie $a < b$, $[a\ ,\ b] \subset K$ et si f est continue à droite sur $[a\ ,\ b]$ et localement strictement croissante à gauche sur $[a\ ,\ b]$ alors f est strictement croissante sur $[a\ ,\ b]$

(iii) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et si* f *est continue sur* $[a\ ,\ b]$ *et localement croissante à gauche sur l'intervalle ouvert* $]a\ ,\ b[$ *alors* f *est croissante sur* $[a\ ,\ b]$

(iv) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et si* f *est continue sur* $[a\ ,\ b]$ *et localement strictement croissante à gauche sur l'intervalle ouvert* $]a\ ,\ b[$ *alors* f *est strictement croissante sur* $[a\ ,\ b]$

(v) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et les propriétés suivantes :*

a f *est continue sur* $[a\ ,\ b]$

b f *est à taux d'accroissement gauche localement borné sur* $]a\ ,\ b[$ *et la dérivée inférieure gauche de* f *est strictement positive sur* $]a\ ,\ b[$ *:*

$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda_*^g(f,x) > 0$$

alors f *est strictement croissante sur* $[a\ ,\ b]$.

(vi) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et les propriétés suivantes :*

c f *est continue sur* $[a\ ,\ b]$

d f *est à taux d'accroissement gauche localement borné sur* $]a\ ,\ b[$ *et la dérivée inférieure gauche de* f *est positive sur* $]a\ ,\ b[$ *:*

$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda_*^d(f,x) \geq 0$$

e $f(b) \leq f(a)$

alors il existe $t \in]a\ ,\ b[$ *tel que* $\lambda_*^g(f,t) = 0$

(vii) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et* f *est continue à droite et localement décroissante à gauche sur* $[a,b]$ *alors* f *est décroissante sur* $[a\ ,\ b]$

(viii) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et si* f *est continue à droite et localement strictement décroissante à gauche sur* $[a,b]$ *alors* f *est strictement décroissante sur* $[a\ ,\ b]$

(ix) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et si* f *est continue sur* $[a\ ,\ b]$ *et localement décroissante à gauche sur l'intervalle ouvert* $]a\ ,\ b[$ *alors* f *est croissante sur* $[a\ ,\ b]$

(x) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et si* f *est continue sur* $[a\ ,\ b]$ *et localement strictement décroissante à gauche sur l'intervalle ouvert* $]a\ ,\ b[$ *alors* f *est strictement décroissante sur* $[a\ ,\ b]$

(xi) Si f *est définie sur* $[a\ ,\ b]$ *et vérifie les propriétés suivantes :*

f f *est continue sur* $[a\ ,\ b]$

g f *est à taux d'accroissement gauche localement borné sur* $]a\ ,\ b[$ *et la dérivée supérieure gauche de* f *est strictement négative sur* $]a\ ,\ b[$ *:*

$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda_g^*(f,x) < 0$$

alors f *est strictement décroissante sur* $[a\ ,\ b]$.

(xii) Si $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *,* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et les propriétés suivantes :*

h f *est continue sur* $[a\ ,\ b]$

i f *est à taux d'accroissement droit localement borné sur* $]a\ ,\ b[$ *et la dérivée supérieure gauche de* f *est négative sur* $]a\ ,\ b[$ *:*

$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow \lambda_d^*(f,x) \leq 0$$

j $f(a) \leq f(b)$

alors il existe $t \in]a\ ,\ b[$ *tel que* $\lambda_g^*(f,t) = 0$

On a une « version à gauche » du théorème [10.20] page 901 qu'on énonce sans preuve.

Théorème 10.23 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. Si* $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et les propriété* **a** *et* **b** *suivantes*

a *f est continue sur* $[a\ ,\ b]$

b *f est dérivable à gauche sur l'intervalle ouvert* $]a\ ,\ b[$

Alors :

1. *Si la dérivée à gauche de f ne prend que des valeurs strictement positives sur l'intervalle ouvert* $]a\ ,\ b[$ *:*
$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow f'_g(x) > 0$$
alors f est strictement croissante sur l'intervalle fermé $[a\ ,\ b]$*.*
2. *Si la dérivée à gauche de f ne prend que des valeurs strictement négatives sur l'intervalle ouvert* $]a\ ,\ b[$ *:*
$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow f'_g(x) < 0$$
alors f est strictement décroissante sur l'intervalle fermé $[a\ ,\ b]$*.*
3. *Si la dérivée à droite de f ne prend que la valeur zéro sur l'intervalle ouvert* $]a\ ,\ b[$ *:*
$$x \in]a\ ,\ b[\Rightarrow f'_g(x) = 0$$
alors f est constante sur l'intervalle fermé $[a\ ,\ b]$ *.*

Pour les applications dérivables l'étude de la dérivée permet d'identifier certains extremums.

II *Application aux extrémums*

On introduit une définition.

Définition 10.65 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*.*

1. *On dit qu'un point $x_0 \in K$ est un maximum local de f si il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que*
$$t \in]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K \Rightarrow f(t) \leq f(x_0)$$
2. *On dit qu'un point $x_0 \in K$ est un minimum local de f si il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que*
$$t \in]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\cap K \Rightarrow f(t) \geq f(x_0)$$

Le théorème qui suit n'est qu'un jeu d'écritures.

Théorème 10.24 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* K *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(K\ ,\mathbb{R})$ *une application de* K *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose que* $(a,b) \in K \times K$ *vérifie* $a < b$ *et* $[a\ ,\ b] \subset K$ *et que f est à taux d'accroissement localement borné sur* $[a\ ,\ b]$*.*

(i) Si $x_0 \in]a\ ,\ b[$ est un maximum local de f alors

$$\lambda_d^*(f, x_0) \leq 0 \leq \lambda_*^g(f, x_0) \tag{10.190}$$

(ii) Si $x_0 \in]a\ ,\ b[$ est un maximum local de f et si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 alors

$$f'_d(x_0) \leq 0 \leq f'_g(x_0) \tag{10.191}$$

(iii) Si $x_0 \in]a\ ,\ b[$ est un maximum local de f et si f est dérivable en x_0 on a $f'(x_0) = 0$

(iv) Si a est un maximum local de f alors

$$\lambda_d^*(f,a) \leq 0 \tag{10.192}$$

(v) Si b est un maximum local de f alors

$$\lambda_*^g(f,b) \geq 0 \tag{10.193}$$

(vi) Si $x_0 \in]a\ ,\ b[$ est un minimum local de f alors

$$\lambda_g^*(f,x_0) \leq 0 \leq \lambda_*^d(f,x_0) \tag{10.194}$$

(vii) Si $x_0 \in]a\ ,\ b[$ est un minimum local de f et si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 alors

$$f_g'(x_0) \leq 0 \leq f_d'(x_0) \tag{10.195}$$

(viii) Si $x_0 \in]a\ ,\ b[$ est un minimum local de f et si f est dérivable en x_0 on a $f'(x_0) = 0$
(ix)

Théorème de Rolle

Si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a\ ,\ b[$ tel que $f'(c) = 0$
(x)

Formule de Taylor

Si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$ il existe $c \in]a\ ,\ b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\ .$$

Preuve

(i)

Puisque f est à taux d'accroissement localement borné en x_0 il existe un réel $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble $]x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta[\cap(K\cap\{x_0\}^c)$ est un ensemble sur lequel $\tau_{x_0}f$ est borné. On se fixe un tel δ.

I On montre $\lambda_d^*(f,x_0) \leq 0$.

Puisque x_0 est un maximum local il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0+\varepsilon[\cap K \Rightarrow f(t) \leq f(x_0)$$

en particulier

$$t \in]x_0\ ,\ x_0+\varepsilon[\cap\ K \Rightarrow \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} \leq 0$$

par suite si $\eta = \min\{\varepsilon,\delta\}$ l'ensemble $\pi =]x_0\ ,\ x_0+\eta[\cap K$ est un élément de $\Omega_d'(x_0)$ qui vérifie l'inégalité $\sup\limits_{t\in\pi} \tau_{x_0}f(t) \leq 0$ et

$$\lambda_d^*(f,x_0) = \inf_{\pi\in\Omega_d'(x_0)} (\sup_{t\in\pi} \tau_{x_0}f(t)) \leq 0\ .$$

II On montre $\lambda_*^g(f,x_0) \geq 0$.

Puisque x_0 est un maximum local il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0+\varepsilon[\cap K \Rightarrow f(t) \leq f(x_0)$$

en particulier

$$t \in]x_0-\varepsilon\ ,\ x_0[\cap\ K \Rightarrow \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} \geq 0$$

par suite si $\eta = \min\{\varepsilon, \delta\}$ l'ensemble $\pi =]x_0 - \eta\ ,\ x_0[\cap K$ est un élément de $\Omega'_g(x_0)$ qui vérifie l'inégalité $\inf\limits_{t\in\pi} \tau_{x_0} f(t) \geq 0$ et

$$\lambda^g_*(f, x_0) = \sup_{\pi\in\Omega'_g(x_0)} (\inf_{t\in\pi} \tau_{x_0} f(t)) \geq 0\ .$$

(ii)

C'est un énoncé sémantique qui suit directement de (i) puisque dire que f est dérivable à droite de dérivée $f'_d(x_0)$ c'est dire que les égalités

$$f'_d(x_0) = \lambda^d_*(f, x_0) = \lambda^*_d(f, x_0)$$

sont vérifiées et dire que f est dérivable à gauche de dérivée $f'_g(x_0)$ c'est dire que les égalités

$$f'_g(x_0) = \lambda^g_*(f, x_0) = \lambda^*_g(f, x_0)$$

sont vérifiées . Ainsi les inégalités (10.191) page 904 suivent des inégalités (10.190) page 904 .

(iii)

D'après le théorème (10.15) page 861 f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ ainsi l'égalité $f'(x_0) = 0$ suit des inégalités (10.191) page 904 qui s'écrivent alors

$$f'(x_0) \leq 0 \leq f'(x_0)\ .$$

(iv)

Puisque f est à taux d'accroissement localement borné en a il existe un réel $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ tel que l'ensemble $]a\ ,\ a+\delta[\cap K$ est un ensemble sur lequel $\tau_a f$ est borné. On se fixe un tel δ.Puisque a est un maximum local il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tel que

$$t \in]a - \varepsilon\ , a + \varepsilon[\cap K \Rightarrow f(t) \leq f(a)$$

en particulier

$$t \in]a\ ,\ a + \varepsilon[\cap\ K \Rightarrow \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \leq 0$$

par suite si $\eta = \min\{\varepsilon, \delta\}$ l'ensemble $\pi =]a\ ,\ a + \eta[\cap K$ est un élément de $\Omega'_d(a)$ qui vérifie l'inégalité $\sup\limits_{t\in\pi} \tau_a f(t) \leq 0$ et

$$\lambda^*_d(f, a) = \inf_{\pi\in\Omega'_d(a)} (\sup_{t\in\pi} \tau_a f(t)) \leq 0\ .$$

(v)

Puisque f est à taux d'accroissement localement borné en b il existe un réel $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ tel que l'ensemble $]b - \delta\ ,\ b[\cap K$ est un ensemble sur lequel $\tau_b f$ est borné. On se fixe un tel δ.Puisque b est un maximum local il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tel que

$$t \in]b - \varepsilon\ ,\ b + \varepsilon[\cap K \Rightarrow f(t) \leq f(b)$$

en particulier

$$t \in]b - \varepsilon\ ,\ b[\cap\ K \Rightarrow \frac{f(t) - f(b)}{t - b} \geq 0$$

par suite si $\eta = \min\{\varepsilon, \delta\}$ l'ensemble $\pi =]b - \eta\ ,\ b[\cap K$ est un élément de $\Omega'_g(b)$ qui vérifie l'inégalité $\inf\limits_{t\in\pi} \tau_b f(t) \geq 0$ et

$$\lambda^g_*(f, b) = \sup_{\pi\in\Omega'_g(a)} (\inf_{t\in\pi} \tau_b f(t)) \geq 0\ .$$

(vi)

Si h est l'application de K dans $\mathbb{R}$ définie par $h(t) = -f(t)$ alors $\tau_x h = -\tau_x f$ par suite g est à taux d'accroissement localement borné et

$$\lambda_*^g(h, x_0) = -\lambda_g^*(f, x_0) \quad \text{et} \quad \lambda_*^d(h, x_0) = -\lambda_d^*(f, x_0) \tag{10.196}$$

et tout minimum local de f est un maximum local de h ainsi par (10.190) page 904 on obtient

$$\lambda_d^*(h, x_0) \leq 0 \leq \lambda_*^g(h, x_0)$$

ce qui s'écrit d'après (10.196)

$$-\lambda_*^d(f, x_0) \leq 0 \leq -\lambda_g^*(f, x_0)$$

(vii)

Il suffit d'appliquer *(ii)* à l'application de K dans $\mathbb{R}$ définie par $h(t) = -f(t)$

(viii)

Il suffit d'appliquer *(iii)* à l'application de K dans $\mathbb{R}$ définie par $h(t) = -f(t)$

(ix)

Théorème de Rolle

Puisque f est à taux d'accroissement localement borné sur $[a\ ,\ b]$ elle est continue sur $[a\ ,\ b]$, ainsi le point *(viii)* du théorème [10.9] page 824 montre qu'il existe $(x_0, x_1) \in [a\ ,\ b] \times [a\ ,\ b]$ tel que

$$f(x_0) = \inf_{t \in [a\ ,\ b]} f(t) \quad \text{et} \quad f(x_1) = \sup_{t \in [a\ ,\ b]} f(t)$$

en particulier

$$t \in [a\ ,\ b] \Rightarrow f(x_0) \leq f(t) \leq f(x_1)$$

On examine l'alternative suivante

a1 pour tout $t \in [a\ ,\ b]$ on a $f(t) = f(x_0)$

a2 il existe $t \in [a\ ,\ b]$ tel que $f(x_0) < f(t)$

Si **a1** est vérifié alors f est constante sur $[a\ ,\ b]$ et pour tout $t \in]a\ ,\ b[$ on a $f'(t) = 0$. Il suffit donc de voir que si **a2** est vérifié il existe $c \in]a\ ,\ b[$ tel que $f'(c) = 0$. On remarque que **a2** entraîne $f(x_0) < f(x_1)$ puisque

$$f(x_0) < f(t) \leq f(x_1)$$

par suite $x_0 \neq x_1$ et on examine l'alternative $x_0 \in \{a, b\}$ et $x_0 \notin \{a, b\}$

- si $x_0 = a$ alors $x_1 \notin \{a, b\}$, puisque $x_1 \in \{a, b\} \Rightarrow f(a) = f(x_0) = f(x_1) = f(b)$ par suite $x_1 \in]a\ ,\ b[$ et x_1 est un maximum local de f. Le point *(iii)* montre alors que $f'(x_1) = 0$
- si $x_0 = b$ alors $x_1 \notin \{a, b\}$, puisque $x_1 \in \{a, b\} \Rightarrow f(b) = f(x_0) = f(x_1) = f(a)$ par suite $x_1 \in]a\ ,\ b[$ et x_1 est un maximum local de f. Le point *(iii)* montre alors que $f'(x_1) = 0$
- si $x_0 \notin \{a, b\}$ alors $x_0 \in]a\ ,\ b[$ et x_0 est un minimum local de f. Le point *(viii)* montre alors que $f'(x_0) = 0$

Ainsi $\{x_0, x_1\} \cap]a\ ,\ b[\neq \varnothing$ et si $c \in \{x_0, x_1\} \cap]a\ ,\ b[$ on a $f'(c) = 0$

(x)

Formule de Taylor

Comme somme d'application continue sur $[a\ ,\ b]$ et dérivale sur $]a\ ,\ b[$ l'application h de $[a\ ,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a)$$

est continue sur $[a\ ,\ b]$ et dérivable sur $]a\ ,\ b[$ de dérivée (voir le lemme [10.39] page 875)

$$h'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Puisque $h(a) = h(b) = 0$ le théorème de Rolle montre qu'il existe $c \in]a\ ,\ b[$ tel que $h'(c) = 0$ par suite

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

Le théorème de Riesz-Lebesgue montre que toute fonction monotone sur un intervalle $[a\ ,\ b]$ admet presque sûrement une dérivée.

10.12 *Riesz, Lebesgue et la dérivation*

10.12.1 *Fonction monotone .*

I ***Fonction croissante***

On commence par montrer qu'une fonction monotone est continue sur le complémentaire d'un sous-ensemble fini ou dénombrable.

Lemme 10.40 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels et* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I\ ,\mathbb{R})$ *une application* croissante *de* I *dans* $\mathbb{R}$*.*

(i) Pour tout $x \in \mathrm{int}(I)$ f *est localement borné sur le filtre*

$$\mathcal{V}_I(x) = \{\omega \in \mathcal{P}(I)/\exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :\quad]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\cap I \subset \omega\}$$

de plus

$$\liminf_{\mathcal{V}_I(x)} f = \sup\{f(t) : t \in]\leftarrow\ ,\ x[\cap I\} \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{V}_I(x)} f = \inf\{f(t) : t \in]x,\ \rightarrow[\cap I\}$$

ainsi $\liminf\limits_{\mathcal{V}_I(x)} f$ *est le plus petit majorant de l'ensemble*

$$f(]\leftarrow\ ,\ x[\cap I) = \{y \in \mathbb{R}/\ \exists\ t \in]\leftarrow\ ,\ x[\cap I : y = f(t)\}$$

et $\limsup\limits_{\mathcal{V}_I(x)} f$ *est le plus grand minorant de l'ensemble*

$$f(]x\ ,\rightarrow[\cap I) = \{y \in \mathbb{R}/\ \exists\ t \in]x\ ,\rightarrow[\cap I : y = f(t)\}$$

(ii) Si $(\alpha, \beta) \in I \times I$ *et* $\alpha < \beta$ *alors pour tout* $x \in]\alpha\ ,\ \beta[$

$$0 \leq \limsup_{\mathcal{V}_I(x)} f - \liminf_{\mathcal{V}_I(x)} f \leq f(\beta) - f(\alpha) \tag{10.197}$$

(iii) L'application f_* *de* $\mathrm{int}(I)$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$f_*(x) = \liminf_{\mathcal{V}_I(x)} f$$

est croissante et continue à gauche.

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute application strictement croissante $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathrm{int}(I))$

$$\sum_{k=0}^{n}(f(x_k) - f_*(x_k)) \leq f(x_n) - f_*(x_0) \tag{10.198}$$

(v) Soit $(a,b) \in I \times I$ vérifiant $a < b$ alors l'ensemble

$$D_* = \{x \in]a\ ,\ b[/f(x) \neq f_*(x)\}$$

est au plus dénombrable (vide , fini ou dénombrable). Ainsi il existe une application croissante continue à gauche qui coïncide avec f sur le complémentaire dans $]a\ ,\ b[$ d'un ensemble au plus dénombrable

(vi) L'application f^* de $\mathrm{int}(I)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f^*(x) = \limsup_{\mathcal{V}_I(x)} f$$

est croissante et continue à droite.

(vii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute application strictement croissante $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathrm{int}(I))$

$$\sum_{k=0}^{n}(f^*(x_k) - f(x_k)) \leq f^*(x_n) - f(x_0) \tag{10.199}$$

(viii) Soit $(a,b) \in I \times I$ vérifiant $a < b$ alors l'ensemble

$$D^* = \{x \in]a\ ,\ b[/f(x) \neq f^*(x)\}$$

est au plus dénombrable (vide , fini ou dénombrable). Ainsi il existe une application croissante continue à droite qui coïncide avec f sur le complémentaire dans $]a\ ,\ b[$ d'un ensemble au plus dénombrable .

(ix) Si $I = \mathbb{R}$ l'ensemble

$$D = \{x \in \mathbb{R}/ \liminf_{\mathcal{V}(x)} f \neq \limsup_{\mathcal{V}(x)} f\}$$

est au plus dénombrable et

$$x \in D^c \Rightarrow \liminf_{\mathcal{V}(x)} f = f(x) = \limsup_{\mathcal{V}(x)} f$$

Ainsi la restriction de f à D^c est $\imath(D^c, \mathcal{T})$ -continue.

(x) Si I est fermé il existe un sous-ensemble au plus dénombrable D de $\mathbb{R}$ qui vérifie la propriété que la restriction de f à $D^c \cap I$ est $\imath(D^c \cap I, \mathcal{T})$ -continue.

Preuve

(i)

I On montre que pour tout $x \in \mathrm{int}(I)$ f est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}_I(x)$

Puisque $x \in \mathrm{int}(I)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset I$ ainsi la croissance de f montre que l'ensemble $\omega = [x - \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ x + \frac{\varepsilon}{2}] = [x - \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ x + \frac{\varepsilon}{2}] \cap I$ est un élément de $\mathcal{V}_I(x)$ qui vérifie

$$t \in \omega \Rightarrow f(x - \frac{\varepsilon}{2}) \leq f(t) \leq f(x + \frac{\varepsilon}{2})$$

par suite

$$t \in \omega \Rightarrow |f(t)| \leq \max\{f(x + \frac{\varepsilon}{2}), -f(x - \frac{\varepsilon}{2})\}$$

II On montre $\liminf\limits_{\mathcal{V}_I(x)} f = \sup\{f(t) : t \in]\leftarrow, x[\cap I\}$

1. On montre que $\liminf\limits_{\mathcal{V}_I(x)} f \leq \sup\{f(t) : t \in]\leftarrow,\ x[\cap I\}$
   Puisque $\liminf\limits_{\mathcal{V}_I(x)} f = \sup\limits_{\omega\in\Omega(x)} (\inf\limits_{t\in\omega} f(t))$ il s'agit de montrer que pour tout $\omega \in \Omega(x)$ il existe $t \in]\leftarrow, x[\cap I$ tel que $\inf\limits_{u\in\omega} f(u) \leq f(t)$. Or si $\omega \in \Omega(x)$ alors
   — $\omega \in \mathcal{V}_I(x)$ par suite il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap I \subset \omega$
   — puisque $x \in \mathrm{int}(I)$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\delta\ ,\ x+\delta[\subset I$
   Par suite si $\eta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\}$ on a $[x-\eta\ ,\ x+\eta] \subset \omega$ et
   $$\inf_{u\in\omega} f(u) \leq \inf_{u\in[x-\eta\ ,\ x+\eta]} f(u) \leq f(x-\eta)$$
   et $x-\eta \in]\leftarrow, x[\cap I$
2. On montre $\sup\{f(t) : t \in]\leftarrow, x[\cap I\} \leq \liminf\limits_{\mathcal{V}_I(x)} f$
   Il s'agit de montrer que pour tout $t \in]\leftarrow, x[\cap I$ il existe $\omega \in \Omega(x)$ tel que
   $$f(t) \leq \inf_{u\in\omega} f(u)$$
   or si $t \in]\leftarrow, x[\cap I$ alors $(t,x) \in I\times I$ et puisque I est un intervalle on a $[t\ ,\ x] \subset I$ par suite si $\varepsilon = x-t$ l'ensemble $\omega_0 =]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap I$ est un élément de $\mathcal{V}_I(x)$ qui vérifie
   $$u \in \omega_0 \Rightarrow u \geq x-\varepsilon \Rightarrow u \geq t \Rightarrow f(u) \geq f(t)$$
   et
   $$\inf_{u\in\omega_0} f(u) \geq f(t)$$
   par suite pour tout $\pi \in \Omega(x)$ l'ensemble $\omega = \pi\cap\omega_0$ est un élément de $\Omega(x)$ qui vérifie
   $$\inf_{u\in\omega} f(u) \geq \inf_{u\in\omega_0} f(u) \geq f(t)\ .$$

III On montre $\limsup\limits_{\mathcal{V}_I(x)} f = \inf\{f(t) : t \in]x\ ,\rightarrow[\cap I\}$

1. On montre que $\limsup\limits_{\mathcal{V}_I(x)} f \leq \inf\{f(t) : t \in]x\ ,\rightarrow[\cap I\}$
   Puisque $\limsup\limits_{\mathcal{V}_I(x)} f = \inf\limits_{\omega\in\Omega(x)} (\sup\limits_{t\in\omega} f(t))$ il s'agit de montrer que pour tout $t \in]x,\rightarrow[\cap I$ il existe un certain $\omega \in \Omega(x)$ tel que
   $$\sup_{u\in\omega} f(u) \leq f(t)$$
   or si $t \in]x,\rightarrow[\cap I$ alors $(t,x) \in I\times I$ et puisque I est un intervalle on a $[x\ ,\ t] \subset I$ par suite si $\varepsilon = t-x$ l'ensemble $\omega_0 =]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap I$ est un élément de $\mathcal{V}_I(x)$ qui vérifie
   $$u \in \omega_0 \Rightarrow u \leq x+\varepsilon \Rightarrow u \leq t \Rightarrow f(u) \leq f(t)$$
   et
   $$\sup_{u\in\omega_0} f(u) \leq f(t)$$
   par suite pour tout $\pi \in \Omega(x)$ l'ensemble $\omega = \pi\cap\omega_0$ est un élément de $\Omega(x)$ qui vérifie
   $$\sup_{u\in\omega} f(u) \leq \sup_{u\in\omega_0} f(u) \leq f(t)\ .$$

2. On montre $\inf\{f(t) : t \in]x, \to [\cap I\} \leq \limsup_{\mathcal{V}_I(x)} f$

   il s'agit de montrer que pour tout $\omega \in \Omega(x)$ il existe $t \in]x, \to [\cap I$ tel que $\sup_{u \in \omega} f(u) \geq f(t)$. Or si $\omega \in \Omega(x)$ alors
   — $\omega \in \mathcal{V}_I(x)$ par suite il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\cap I \subset \omega$
   — puisque $x \in \mathrm{int}(I)$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x - \delta\ ,\ x + \delta[\subset I$
   Par suite si $\eta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\}$ on a $[x - \eta\ ,\ x + \eta] \subset \omega$ et

$$\sup_{u \in \omega} f(u) \geq \sup_{u \in [x-\eta\ ,\ x+\eta]} f(u) \geq f(x + \eta)$$

   et $x + \eta \in]x, \to [\cap I$

(ii)

Puisque I est un intervalle $[\alpha\ ,\ \beta] \subset I$ d'autre part, si $x \in]\alpha\ ,\ \beta[$ alors $\beta \in]x\ , \to [\cap I$ et (i) montre que

$$\limsup_{\mathcal{V}_I(x)} f \leq f(\beta)$$

et $\alpha \in] \leftarrow, x[\cap I$ et (i) montre que

$$f(\alpha) \leq \liminf_{\mathcal{V}_I(x)} f$$

ainsi $\limsup_{\mathcal{V}_I(x)} f - \liminf_{\mathcal{V}_I(x)} f \leq f(\beta) - f(\alpha)$. D'autre part le point (i) du théorème [10.6] page 757 montre que $\liminf_{\mathcal{V}_I(x)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}_I(x)} f$.

(iii)

I On montre que f_* est croissante sur $\mathrm{int}(I)$

Si $(x, y) \in \mathrm{int}(I) \times \mathrm{int}(I)$ et $x < y$ alors

$$] \leftarrow, x[\cap I \subset] \leftarrow, y[\cap I$$

par suite $\sup\{f(t) : t \in] \leftarrow, x[\cap I\} \leq \sup\{f(t) : t \in] \leftarrow, y[\cap I\}$

II On montre que f_* est continue à gauche sur $\mathrm{int}(I)$

Si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, puisque $f_*(x)$ est le plus petit majorant de $f(] \leftarrow,\ x[\cap I)$ le réel $f_*(x) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de cet ensemble, ainsi il existe $t_0 \in] \leftarrow,\ x[\cap I$ tel que $f_*(x) - \varepsilon < f(t_0)$ mais pour tout $u \in]t_0\ ,\ x[$ on a $t_0 \in] \leftarrow,\ u[\cap I$ ainsi (i) montre que $f(t_0) \leq f_*(u)$ et on obtient

$$u \in]t_0\ ,\ x[\Rightarrow f_*(x) - \varepsilon < f_*(u)$$

et la croissance de f_* montre

$$u \in]t_0\ ,\ x[\Rightarrow 0 \leq f_*(x) - f_*(u) < \varepsilon\ .$$

(iv)

On pose

$$U = \{k \in \mathbb{N}_n / \sum_{j=0}^{k} (f(x_j) - f_*(x_j)) \leq f(x_k) - f_*(x_0)\}$$

En suivant le lemme [5.10] page 111 on montre que $U = \mathbb{N}_n$ en vérifiant

1. $0 \in U$
2. $[k < n \quad \text{et} \quad k \in U] \Rightarrow k + 1 \in U$

1. L'assertion $0 \in U$ provient de l'égalité $\sum_{j=0}^{0}(f(x_j) - f_*(x_j)) = f(x_0) - f_*(x_0)$

2. si $k < n$ et $k \in U$ alors

$$\sum_{j=0}^{k}(f(x_j) - f_*(x_j)) \leq f(x_k) - f_*(x_0)$$

par suite

$$\sum_{j=0}^{k+1}(f(x_j) - f_*(x_j)) \leq f(x_{k+1}) - f_*(x_{k+1}) + (f(x_k) - f_*(x_0))$$

or la croissance stricte de x montre que $x_k \in]\leftarrow, x_{k+1}[\cap I$ et (i) entraîne $f(x_k) \leq f_*(x_{k+1})$ ainsi $f(x_{k+1}) - f_*(x_{k+1}) + (f(x_k) - f_*(x_0)) \leq f(x_{k+1}) - f_*(x_0)$ et

$$\sum_{j=0}^{k+1}(f(x_j) - f_*(x_j)) \leq f(x_{k+1}) - f_*(x_{k+1}) + (f(x_k) - f_*(x_0)) \leq f(x_{k+1}) - f_*(x_0)$$

et $k+1 \in U$.

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et en particulier

$$\sum_{j=0}^{n}(f(x_j) - f_*(x_j)) \leq f(x_n) - f_*(x_0)$$

(v)

D'abord si $f(a) = f(b)$ alors D est vide puisque pour tout $x \in]a\ ,\ b[$ on a $f(a) = f(x) = f(b)$. On peut donc supposer $f(b) > f(a)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_p = \{x \in]a\ ,\ b[/ f(x) - f_*(x) > \frac{f(b) - f(a)}{p+1}\}$$

et on montre que D_p est fini. En effet si D_p n'est pas fini le point (iii) du lemme [6.1] page 133 montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une application strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans D_p. Ainsi pour démontrer que D_p est fini il suffit de montrer qu'il n'existe pas d'application strictement croissante de $\mathbb{N}_{p+1}$ dans D_p. Or si x est une application strictement croissante de $\mathbb{N}_{p+1}$ dans D_p alors d'après (iv) on a

$$\sum_{j=0}^{p+1}(f(x_j) - f_*(x_j)) \leq f(x_{p+1}) - f_*(x_0) \tag{10.200}$$

mais puisque $a \in]\leftarrow, x_0[\cap I$ on a $f(a) \leq f_*(x_0)$ et puisque $x_{p+1} < b$ on a $f(x_{p+1}) \leq f(b)$ ainsi l'inégalité (10.200) page 912 entraîne

$$\sum_{j=0}^{p+1}(f(x_j) - f_*(x_j)) \leq f(b) - f(a) \tag{10.201}$$

mais

$$j \in \mathbb{N}_{p+1} \Rightarrow f(x_j) - f_*(x_j) > \frac{f(b) - f(a)}{p+1} \Rightarrow \sum_{j=0}^{p+1}(f(x_j) - f_*(x_j)) > \frac{p+2}{p+1}(f(b) - f(a))$$

ce qui contredit l'inégalité (10.201) page 912. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$ l'ensemble D_p est fini et le point (x) du théorème [6.4] page 151 montre que l'ensemble $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p$ est au plus dénombrable or

$$D = \{x \in]a\ ,\ b[/f(x) \neq f_*(x)\} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p\ .$$

(vi)

I On montre que f^* est croissante sur $\mathrm{int}(I)$

Si $(x, y) \in \mathrm{int}(I) \times \mathrm{int}(I)$ et $x < y$ alors

$$]y, \to [\cap I \subset]x, \to [\cap I$$

par suite $\inf\{f(t) : t \in]x, \to [\cap I\} \leq \inf\{f(t) : t \in]y, \to [\cap I\}$

II On montre que f^* est continue à droite sur $\mathrm{int}(I)$

Si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, puisque $f^*(x)$ est le plus grand minorant de $f(]x, \to [\cap I)$ le réel $f^*(x) + \varepsilon$ n'est pas un minorant de cet ensemble, ainsi il existe $t_0 \in]x, \to [\cap I$ tel que $f^*(x)+\varepsilon > f(t_0)$ mais pour tout $u \in]x\ ,\ t_0[$ on a $t_0 \in]u, \to [\cap I$ ainsi (i) montre que $f(t_0) \geq f^*(u)$ et on obtient

$$u \in]x\ ,\ t_0[\Rightarrow f^*(x) + \varepsilon > f^*(u)$$

et la croissance de f^* montre

$$u \in]x\ ,\ t_0[\Rightarrow 0 \leq f^*(u) - f^*(x) < \varepsilon\ .$$

(vii)

On pose

$$U' = \{k \in \mathbb{N}_n / \sum_{j=0}^{k} (f^*(x_j) - f(x_j)) \leq f^*(x_k) - f(x_0)\}$$

En suivant le lemme [5.10] page 111 on montre que $U' = \mathbb{N}_n$ en vérifiant

1. $0 \in U'$
2. $[k < n \quad \text{et} \quad k \in U'] \Rightarrow k + 1 \in U'$

1. L'assertion $0 \in U'$ provient de l'égalité $\sum_{j=0}^{0} (f^*(x_j) - f(x_j))) = f^*(x_0) - f(x_0)$
2. si $k < n$ et $k \in U'$ alors
$$\sum_{j=0}^{k} (f^*(x_j) - f(x_j)) \leq f^*(x_k) - f(x_0)$$
par suite
$$\sum_{j=0}^{k+1} (f^*(x_j) - f(x_j)) \leq f^*(x_{k+1}) - f(x_{k+1}) + (f^*(x_k) - f(x_0))$$
or la croissance stricte de x montre que $x_{k+1} \in]x_k\ , \to [\cap I$ et (i) entraîne $f^*(x_k) \leq f(x_{k+1})$ ainsi $f^*(x_{k+1}) - f(x_{k+1}) + (f^*(x_k) - f(x_0)) \leq f^*(x_{k+1}) - f(x_0)$ et
$$\sum_{j=0}^{k+1} (f^*(x_j) - f(x_j)) \leq f^*(x_{k+1}) - f(x_{k+1}) + (f^*(x_k) - f(x_0)) \leq f^*(x_{k+1}) - f(x_0)$$
et $k + 1 \in U'$.

Ainsi $U' = \mathbb{N}_n$ et en particulier

$$\sum_{j=0}^{n}(f^*(x_j) - f(x_j)) \leq f^*(x_n) - f(x_0)$$

$(viii)$

D'abord si $f(a) = f(b)$ alors D est vide puisque pour tout $x \in]a\ ,\ b[$ on a $f(a) = f(x) = f(b)$. On peut donc supposer $f(b) > f(a)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_p = \{x \in]a\ ,\ b[/f^*(x) - f(x) > \frac{f(b) - f(a)}{p+1}\}$$

et on montre que D_p est fini. En effet si D_p n'est pas fini le point (iii) du lemme [6.1] page 133 montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une application strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans D_p. Ainsi pour démontrer que D_p est fini il suffit de montrer qu'il n'existe pas d'application strictement croissante de $\mathbb{N}_{p+1}$ dans D_p. Or si x est une application strictement croissante de $\mathbb{N}_{p+1}$ dans D_p alors d'après (vii) on a

$$\sum_{j=0}^{p+1}(f^*(x_j) - f(x_j)) \leq f^*(x_{p+1}) - f(x_0) \tag{10.202}$$

mais puisque $b \in]x_{p+1}\ , \rightarrow [\cap I$ on a $f^*(x_{p+1}) \leq f(b)$ et puisque $x_0 > a$ on a $f(x_0) \geq f(a)$ ainsi l'inégalité (10.202) page 914 entraîne

$$\sum_{j=0}^{p+1}(f^*(x_j) - f(x_j)) \leq f(b) - f(a) \tag{10.203}$$

mais

$$j \in \mathbb{N}_{p+1} \Rightarrow f^*(x_j) - f(x_j) > \frac{f(b) - f(a)}{p+1} \Rightarrow \sum_{j=0}^{p+1}(f(x_j) - f_*(x_j)) > \frac{p+2}{p+1}(f(b) - f(a))$$

ce qui contredit l'inégalité (10.203). Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$ l'ensemble D_p est fini le point (x) du théorème [6.4] page 151 montre que l'ensemble $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p$ est au plus dénombrable or

$$\{x \in]a\ ,\ b[/f(x) \neq f^*(x)\} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p\ .$$

(ix)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$D_*^n = \{x \in]-n\ ,\ n[/f_*(x) \neq f(x)\} \quad \text{et} \quad D_n^* = \{x \in]-n\ ,\ n[/f^*(x) \neq f(x)\}\ .$$

D'après (v) et $(viii)$ ces ensembles sont au plus dénombrables et le point (x) du théorème [6.4] page 151 montre que l'ensemble $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_*^n \cup D_n^*$ est au plus dénombrable or

$$D_n^* =]-n\ ,\ n[\cap\{x \in \mathbb{R}/f^*(x) \neq f(x)\} \quad \text{et} \quad D_*^n =]-n\ ,\ n[\cap\{x \in \mathbb{R}/f_*(x) \neq f(x)\}$$

par suite

$$D = \{x \in \mathbb{R}/f^*(x) \neq f(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R}/f_*(x) \neq f(x)\} = \{x \in \mathbb{R}/\liminf_{\mathcal{V}(x)} f \neq \limsup_{\mathcal{V}(x)} f\}$$

et

$$D^c = \{x \in \mathbb{R}/f^*(x) = f(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R}/f_*(x) = f(x)\} = \{x \in \mathbb{R}/f_*(x) = f(x) = f^*(x)\} \ .$$

Ainsi

$$D^c = \{x \in \mathbb{R}/ \liminf_{\mathcal{V}(x)} f = f(x) = \limsup_{\mathcal{V}(x)} f\}$$

$$(x)$$

On distingue les cas $I = \mathbb{R}$, $I = [a \ , \ b]$, $I =]\leftarrow \ , \ a]$ et $I = [b \ , \ \rightarrow [$.

— Si $I = \mathbb{R}$ le point (ix) donne le résultat .

— Si $I = [a \ , \ b]$ on considère l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(a) & si \quad x \leq a \\ f(x) & si \quad x \in [a \ , \ b] \\ f(b) & si \quad x \geq b \end{cases}$$

Puisque g est croissante sur $\mathbb{R}$ le point (ix) montre que l'ensemble

$$D = \{x \in \mathbb{R}/ \liminf_{\mathcal{V}(x)} g \neq \liminf_{\mathcal{V}(x)} g\}$$

est au plus dénombrable. Ainsi puisque g est continue sur D^c et puisque la restriction de g à $D^c \cap I$ est égale à la restriction de f à $D^c \cap I$, f est continue sur $D^c \cap I$.

— Si $I =]\leftarrow \ , \ a]$ on considère le prolongement croissant de f à $\mathbb{R}$ défini par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in I \\ f(a) & si \quad x \geq a \end{cases}$$

qui est aussi continue sur le complémentaire d'un ensemble dénombrable.

— Si $I = [b \ , \rightarrow [$ on considère le prolongement croissant de f à $\mathbb{R}$ défini par

$$g(x) = \begin{cases} f(b) & si \quad x \leq b \\ f(x) & si \quad x \in I \end{cases}$$

qui est aussi continue sur le complémentaire d'un ensemble dénombrable.

■

On énonce la version décroissante du lemme [10.40] page 908 sans preuve.

II ***fonction décroissante***

Lemme 10.41 *On note* $(\mathbb{R} \ , \ + \ , \ . \ , \ \leq \ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels et* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *,* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(I \ ,\mathbb{R})$ *une application* décroissante *de* I *dans* $\mathbb{R}$.

(i) Pour tout $x \in \mathrm{int}(I)$ f *est localement borné sur le filtre*

$$\mathcal{V}_I(x) = \{\omega \in \mathcal{P}(I)/\exists \ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \quad]x - \varepsilon \ , \ x + \varepsilon[\cap I \subset \omega\}$$

de plus

$$\liminf_{\mathcal{V}_I(x)} f = \sup\{f(t) : t \in]x \ , \ \rightarrow [\cap I\} \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{V}_I(x)} f = \inf\{f(t) : t \in]\leftarrow, \ x[\cap I\}$$

ainsi $\liminf_{\mathcal{V}_I(x)} f$ *est le plus petit majorant de l'ensemble*

$$f(]x \ , \ \rightarrow [\cap I) = \{y \in \mathbb{R}/ \ \exists \ t \in]x \ , \ \rightarrow [\cap I : y = f(t)\}$$

et $\limsup_{\mathcal{V}_I(x)} f$ *est le plus grand minorant de l'ensemble*

$$f(] \leftarrow\ ,\ x[\cap I) = \{y \in \mathbb{R} / \ \exists\ t \in] \leftarrow\ ,\ x[\cap I : y = f(t)\}$$

(ii) Si $(\alpha, \beta) \in I \times I$ *et* $\alpha < \beta$ *alors pour tout* $x \in]\alpha\ ,\ \beta[$

$$0 \leq \limsup_{\mathcal{V}_I(x)} f - \liminf_{\mathcal{V}_I(x)} f \leq f(\alpha) - f(\beta) \tag{10.204}$$

(iii) L'application f_* *de* $\mathrm{int}(I)$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$f_*(x) = \liminf_{\mathcal{V}_I(x)} f$$

est décroissante et continue à droite.

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et pour toute application strictement croissante* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathrm{int}(I))$

$$\sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - f_*(x_k)) \leq f(x_0) - f_*(x_n) \tag{10.205}$$

(v) Soit $(a, b) \in I \times I$ *vérifiant* $a < b$ *alors l'ensemble*

$$D_* = \{x \in]a\ ,\ b[/ f(x) \neq f_*(x)\}$$

est au plus dénombrable (vide , fini ou dénombrable). Ainsi il existe une application décroissante continue à droite qui coïncide avec f *sur le complémentaire dans* $]a\ ,\ b[$ *d'un ensemble au plus dénombrable*

(vi) L'application f^* *de* $\mathrm{int}(I)$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$f^*(x) = \limsup_{\mathcal{V}_I(x)} f$$

est décroissante et continue à gauche.

(vii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et pour toute application strictement croissante* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathrm{int}(I))$

$$\sum_{k=0}^{n} (f^*(x_k) - f(x_k)) \leq f^*(x_0) - f(x_n) \tag{10.206}$$

(viii) Soit $(a, b) \in I \times I$ *vérifiant* $a < b$ *alors l'ensemble*

$$D^* = \{x \in]a\ ,\ b[/ f(x) \neq f^*(x)\}$$

est au plus dénombrable (vide , fini ou dénombrable). Ainsi il existe une application croissante continue à gauche qui coïncide avec f *sur le complémentaire dans* $]a\ ,\ b[$ *d'un ensemble au plus dénombrable .*

(ix) Si $I = \mathbb{R}$ *l'ensemble*

$$D = \{x \in \mathbb{R} / \liminf_{\mathcal{V}(x)} f \neq \limsup_{\mathcal{V}(x)} f\}$$

est au plus dénombrable et

$$x \in D^c \Rightarrow \liminf_{\mathcal{V}(x)} f = f(x) = \limsup_{\mathcal{V}(x)} f$$

Ainsi la restriction de f *à* D^c *est* $\imath(D^c, \mathcal{T})$ *-continue.*

(x) Si I *est fermé il existe un sous-ensemble au plus dénombrable* D *de* $\mathbb{R}$ *qui vérifie la propriété que la restriction de* f *à* $D^c \cap I$ *est* $\imath(D^c \cap I, \mathcal{T})$ *-continue.*

Ainsi toute fonction monotone sur un intervalle fermé est continue sur le complémentaire d'un ensemble d'intérieur vide. Riesz et Lebesgue ont montré que ce genre d'application est aussi dérivable sur le complémentaire d'un ensemble d'intérieur vide.

10.12.2 *Préliminaire au théorème de Riesz-Lebesgue, exemples d'ensembles négligeables et nécessité de la mesure de Lebesgue*

La nécessité de la mesure de Lebesgue s'impose lorsqu'on attaque bille en tête l'étude de l'ensemble des points où une fonction croissante est dérivable. Le théorème de Riesz-Lebesgue énonce que l'ensemble des points où une fonction monotone n'est pas dérivable est un ensemble « de mesure de Lebesgue nulle ». La preuve est fondée sur le lemme suivant qui utilise les résultats et notations du lemme [10.40] page 908

I ***Le lemme de base***

Lemme 10.42 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels et* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*, et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{R}\ ,\mathbb{R})$ *une application* croissante *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Enfin pour* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ *l'application* $g_\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{R}\ ,\mathbb{R})$ *est définie par*

$$g_\lambda(t) = f(t) - \lambda t$$

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ g_λ *est localement bornée sur le filtre*

$$\mathcal{V}(x) = \{\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset \omega\}$$

avec

$$\liminf_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda = \liminf_{\mathcal{V}(x)} f - \lambda x = \sup\{f(t) : t \in]\leftarrow, x[\} - \lambda x = f_*(x) - \lambda x$$

et

$$\limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda = \limsup_{\mathcal{V}(x)} f - \lambda x = \inf\{f(t) : t \in]x, \rightarrow[\} - \lambda x = f^*(x) - \lambda x$$

(ii) L'application g_λ^* *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $g_\lambda^*(x) = \limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda$ *possède les propriétés suivantes :*

1. g_λ^* *est semi-continue supérieurement : pour tout* $u \in \mathbb{R}$ *l'ensemble*

$$U^*(u) = \{x \in \mathbb{R} / g_\lambda^*(x) < u\}$$

   est un ouvert de $\mathbb{R}$

2. g_λ^* *est continue à droite sur* $\mathbb{R}$*.*
3. *L'ensemble* $O_0 = \{x \in \mathbb{R} / \exists\ y \in]x\ , \rightarrow | : g_\lambda^*(x) < g_\lambda(y)\}$ *est ouvert.*
4. *L'ensemble* $\Delta_0 = \{x \in \mathbb{R} / g_\lambda^*(x) \neq g_\lambda(x)\}$ *est au plus dénombrable.*
5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour toute application strictement croissante* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{R})$

$$\sum_{k=0}^{n} (g_\lambda^*(x_k) - g_\lambda(x_k)) \leq f^*(x_n) - f(x_0) \tag{10.207}$$

   En particulier pour tout sous-ensemble fini F *de* $\mathbb{R}$

$$\sum_{x \in F} (g_\lambda^*(x) - g_\lambda(x)) \leq f^*(\max\{t : t \in F\}) - f(\min\{t : t \in F\}) \tag{10.208}$$

6. *pour toute application strictement croissante* majorée $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *les suites* u_n *et* v_n *définies par* $u_n = g_\lambda^*(x_n)$ *et* $v_n = g_\lambda(x_n)$ *sont convergente et*

$$\lim_{n\to\infty} g_\lambda^*(x_n) = \lim_{n\to\infty} g_\lambda(x_n)$$

(iii) L'application g_*^λ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $g_*^\lambda(x) = \liminf_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda$ *possède les propriétés suivantes :*

1. g_*^λ *est semi-continue inférieurement : pour tout* $u \in \mathbb{R}$ *l'ensemble*

$$U_*(u) = \{x \in \mathbb{R}/g_*^\lambda(x) > u\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$

2. g_*^λ *est continue à gauche sur* $\mathbb{R}$.

3. L'ensemble $O_1 = \{x \in \mathbb{R}/\exists\ y \in]\leftarrow, x| : g_*^\lambda(x) > g_\lambda(y)\}$ *est ouvert.*

4. L'ensemble $\Delta_1 = \{x \in \mathbb{R}/g_*^\lambda(x) \neq g_\lambda(x)\}$ *est au plus dénombrable.*

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et pour toute application strictement croissante* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathbb{R})$

$$\sum_{k=0}^{n}(g_\lambda(x_k) - g_*^\lambda(x_k)) \leq f(x_n) - f_*(x_0) \tag{10.209}$$

En particulier pour tout sous-ensemble fini F *de* $\mathbb{R}$

$$\sum_{x\in F}(g_\lambda(x) - g_*^\lambda(x)) \leq f(\max\{t : t \in F\}) - f_*(\min\{t : t \in F\}) \tag{10.210}$$

6. pour toute application strictement croissante majorée $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *les suites* u'_n *et* v'_n *définies par* $u'_n = g_*^\lambda(x_n)$ *et* $v'_n = g(x_n)$ *sont convergente et*

$$\lim_{n\to\infty} g_*^\lambda(x_n) = \lim_{n\to\infty} g_\lambda(x_n)$$

(iv) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$ *l'ensemble*

$$O_d = O_d(\lambda) = \{x \in]a\ ,\ b[/\ \exists\ y \in]x\ ,\ b[\quad : \quad \limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda < g_\lambda(y)\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$ *et si* O_d *est non vide* O_d *est somme disjointe d'une famille* $(I_q)_{q\in D}$ *finie ou dénombrable d'intervalles ouverts bornés qui vérifie : si pour tout* $q \in D$ *on note*

$$a_q = \inf\{t : t \in I_q\} \quad \text{et} \quad b_q = \sup\{t : t \in I_q\}$$

$$f_*(b_q) - f^*(a_q) \leq \lambda\ (b_q - a_q) \leq f^*(b_q) - f_*(a_q)$$

de plus si $b_q < b$ *on a*

$$f(b_q) - f^*(a_q) \leq \lambda\ (b_q - a_q) \leq f^*(b_q) - f_*(a_q)$$

en particulier, si f *est continue alors*

$$f(\sup\{t : t \in I_q\}) - f(\inf\{t : t \in I_q\}) = \lambda\ (\sup\{t : t \in I_q\} - \inf\{t : t \in I_q\})$$

(v) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$ *l'ensemble*

$$O_g = O_g(\lambda) = \{x \in]a\ ,\ b[/\ \exists\ y \in]a\ ,\ x[\quad : \quad \limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda < g_\lambda(y)\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$ *et si* O_g *est non vide* O_g *est somme disjointe d'une famille* $(I'_q)_{q\in D}$ *finie ou dénombrable d'intervalles ouverts bornés qui vérifie :si pour tout* $q \in D$ *on note*

$$a'_q = \inf\{t : t \in I'_q\} \quad \text{et} \quad b'_q = \sup\{t : t \in I'_q\}$$

$$f_*(b'_q) - f^*(a'_q) \leq \lambda\ (b'_q - a'_q) \leq f^*(b'_q) - f_*(a'_q)$$

de plus si $a'_q > a$ *on a*

$$f_*(b'_q) - f(a'_q) \leq \lambda\ (b'_q - a'_q) \leq f^*(b'_q) - f_*(a'_q)$$

en particulier, si f est continue alors

$$f(\sup\{t : t \in I'_q\}) - f(\inf\{t : t \in I'_q\}) = \lambda\ (\sup\{t : t \in I'_q\} - \inf\{t : t \in I'_q\})$$

*(vii) (**variation des applications croissantes**) Si O est un ouvert borné de $\mathbb{R}$ et $(I_q)_{q\in D}$ est une partition finie ou dénombrable de O en intervalles ouverts les applications α et β de D dans $\mathbb{R}$ définies par*

$$\alpha_q = \inf\{t : t \in I_q\} \quad \text{et} \quad \beta_q = \sup\{t : t \in I_q\}$$

vérifient les propriétés suivantes :

1. *α et β sont injectives*
2. *pour tout sous-ensemble fini F de D et pour toute application croissante h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$*

$$\sum_{q\in F}(h(\beta_q) - h(\alpha_q)) \leq \max_{q\in F} h(\beta_q) - \inf_{q\in F} h(\alpha_q)$$

En particulier si $O \subset [m\ ,\ M]$

$$\sum_{q\in F}(\beta_q - \alpha_q) \leq M - m$$

(vii)

Majoration du taux d'accroissement droit.

L'ensemble N_λ défini par

$$N_\lambda = \{x \in]a\ ,\ b[/\ \exists t \in]x\ ,b[: f(t) - f(x) > \lambda(t - x)\}$$

possède la propriété suivante : il existe une partition $(I_q)_{q\in D}$ finie ou dénombrale d'intervalles ouverts bornés inclus dans $]a\ ,\ b[$ et un ensemble fini ou dénombrable Δ_0 qui vérifient :

1. *$N_\lambda \subset \bigcup_{q\in D} I_q \cup \Delta_0$ et pour tout $q \in D$*

$$\lambda\ (\sup\{t : t \in I_q\} - \inf\{t : t \in I_q\}) \leq f^*(\sup\{t : t \in I_q\}) - f_*(\inf\{t : t \in I_q\})$$

2. *pour tout sous ensemble fini F de D :*

$$\sum_{q\in F}(\sup\{t : t \in I_q\} - \inf\{t : t \in I_q\}) \leq 3\ \frac{f^*(b) - f_*(a)}{\lambda}$$

(viii)

Majoration du taux d'accroissement gauche.

L'ensemble N'_λ défini par

$$N'_\lambda = \{x \in]a\ ,\ b[/\ \exists\ t \in]a\ ,x[: f(x) - f(t) > \lambda(x - t)\}$$

possède la propriété suivante : il existe une partition $(I'_q)_{q\in D}$ finie ou dénombrable d'intervalles ouverts bornés inclus dans $]a\ ,\ b[$ et un ensemble fini ou dénombrable Δ_0 qui vérifient :

1. *$N'_\lambda \subset \bigcup_{q\in D} I'_q \cup \Delta_0$ et pour tout $q \in D$*

$$\lambda\ (\sup\{t : t \in I'_q\} - \inf\{t : t \in I'_q\}) \leq f^*(\sup\{t : t \in I'_q\}) - f_*(\inf\{t : t \in I'_q\})$$

2. pour tout sous ensemble fini F de D :

$$\sum_{q\in F}(\sup\{t : t\in I'_q\} - \inf\{t : t \in I'_q\}) \leq 3\ \frac{f^*(b)-f_*(a)}{\lambda}$$

Preuve

(i)

I On montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application g_λ est localement bornée sur $\mathcal{V}(x)$

D'après le lemme [10.40] page 908 l'application f est localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}(x)$, ainsi il existe $\omega \in \mathcal{V}(x)$ et $m \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$t \in \omega \Rightarrow |f(t)| \leq m\ .$$

Puisque $\omega \in \mathcal{V}(x)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset \omega$ par suite

$$t \in]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\Rightarrow |g_\lambda(t)| \leq m + \lambda(|x|+\varepsilon)\ .$$

Ainsi $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[$ est un élément de $\mathcal{V}(x)$ sur lequel g_λ est bornée.

II On montre $\liminf_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda = \liminf_{\mathcal{V}(x)} f - \lambda x$

1. On montre $\liminf_{\mathcal{V}(x)} f - \lambda x \leq \liminf_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda$
   Puisque l'application u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(t) = -\lambda t$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ on a $\liminf_{\mathcal{V}(x)} u = -\lambda x = \limsup_{\mathcal{V}(x)} u$. Il résulte alors de l'égalité évidente $g_\lambda = f + u$ et du point (ix) du théorème [10.6] page 757 que (voir l'inégalité [10.100] page 759)

   $$\liminf_{\mathcal{V}(x)} f + \liminf_{\mathcal{V}(x)} u \leq \liminf_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda$$

   ainsi

   $$\liminf_{\mathcal{V}(x)} f - \lambda x \leq \liminf_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda\ .$$

2. On montre $\liminf_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda \leq \liminf_{\mathcal{V}(x)} f - \lambda x$
   Puisque l'application v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $v(t) = \lambda t$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ on a $\liminf_{\mathcal{V}(x)} v = \lambda x = \limsup_{\mathcal{V}(x)} v$. Il résulte alors de l'égalité évidente $f = g_\lambda + v$ et du point (ix) du théorème [10.6] page 757 que (voir l'inégalité [10.100] page 759)

   $$\liminf_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda + \liminf_{\mathcal{V}(x)} v \leq \liminf_{\mathcal{V}(x)} f$$

   ainsi

   $$\liminf_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda + \lambda x \leq \liminf_{\mathcal{V}(x)} f\ .$$

Enfin le lemme [10.40] page 908 montre que

$$\liminf_{\mathcal{V}(x)} f = \sup\{f(t) : t \in]\leftarrow, x[\}$$

III On montre $\limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda = \limsup_{\mathcal{V}(x)} f - \lambda x$

1. On montre $\limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda \leq \limsup_{\mathcal{V}(x)} f - \lambda x$
   Puisque l'application u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(t) = -\lambda t$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ on a $\liminf_{\mathcal{V}(x)} u = -\lambda x = \limsup_{\mathcal{V}(x)} u$. Il résulte alors de l'égalité évidente $g_\lambda = f + u$ et du point (x) du théorème [10.6] page 757 que (voir l'inégalité [10.101] page 759)

$$\limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda \leq \limsup_{\mathcal{V}(x)} f + \limsup_{\mathcal{V}(x)} u$$

   ainsi

$$\limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda \leq \limsup_{\mathcal{V}(x)} f - \lambda x \ .$$

2. On montre $\limsup_{\mathcal{V}(x)} f - \lambda x \leq \limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda$
   Puisque l'application v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $v(t) = \lambda t$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ on a $\liminf_{\mathcal{V}(x)} v = \lambda x = \limsup_{\mathcal{V}(x)} v$. Il résulte alors de l'égalité évidente $f = g_\lambda + v$ et du point (x) du théorème [10.6] page 757 que (voir l'inégalité [10.101] page 759)

$$\limsup_{\mathcal{V}(x)} f \leq \limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda + \limsup_{\mathcal{V}(x)} v$$

   ainsi

$$\limsup_{\mathcal{V}(x)} f - \lambda x \leq \limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda \ .$$

Enfin le lemme [10.40] page 908 montre que

$$\limsup_{\mathcal{V}(x)} f = \inf\{f(t) : t \in]x, \to [\}$$

(ii)

1. g_λ^* est semi-continue supérieurement.
   Il s'agit de montrer que pour tout $x \in U^*(u)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x - \varepsilon \ , \ x + \varepsilon[\subset U^*(u)$. Puisque $g_\lambda^*(x) = \limsup_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$\Lambda^*(x) = \{y \in \mathbb{R} / \ \exists \ \omega \in \Omega(x) : y = \sup_{t \in \omega} g_\lambda(t)\}$$

   l'assertion $x \in U^*(u)$ entraîne que u n'est pas un minorant de cet ensemble, ainsi il existe $\omega \in \Omega(x)$ tel que

$$\sup_{t \in \omega} g_\lambda(t) < u \ .$$

   Puisque $\omega \in \mathcal{V}(x)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon \ , \ x+\varepsilon[\subset \omega$, on montre que pour tout $z \in]x-\varepsilon \ , \ x+\varepsilon[$ on a $\limsup_{\mathcal{V}(z)} g_\lambda < u$. Il s'agit de montrer que pour tout $z \in]x-\varepsilon \ , \ x+\varepsilon[$ il existe $\omega(z) \in \Omega(z)$ tel que $\sup_{t \in \omega(z)} g_\lambda(t) < u$. Si $z \in]x-\varepsilon \ , \ x+\varepsilon[$ on pose $\delta = \min\{\dfrac{z+\varepsilon-x}{2}, \dfrac{x+\varepsilon-z}{2}\}$ et $\omega_\delta(z) =]z-\delta \ , \ z+\delta[$.
   Les inclusions $\omega_\delta(z) \subset]x - \varepsilon \ , \ x + \varepsilon[\subset \omega$ montrent
   (a) puisque g_λ est bornée sur ω, g_λ est bornée sur $\omega_\delta(z)$, par suite $\omega_\delta(z) \in \Omega(z)$.
   (b)

$$\sup_{t \in \omega_\delta(z)} g_\lambda(t) \leq \sup_{t \in \omega} g_\lambda(t) < u$$

Ainsi, pour tout $z \in]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[$ on obtient

$$\limsup_{\mathcal{V}(z)} g_\lambda = \inf_{\omega\in\Omega(z)} (\sup_{t\in\omega} g_\lambda(t)) \leq \sup_{t\in\omega_\delta(z)} g_\lambda(t) < u$$

et $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset U^*(u)$

2. g^*_λ est continue à droite.
   D'après (i) on a $g^*_\lambda(t) = f^*(t) - \lambda t$ et d'après le lemme [10.40] page 908 f^* est continue à droite.
3. O_0 est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Il s'agit de montrer que pour tout $x \in O_0$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O_0$. Si $x \in O_0$ il existe $y \in]x, \to [$ tel que $g^*_\lambda(x) < g_\lambda(y)$, la semi-continuitée supérieure de g^*_λ montre qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}^*_+$ tel que

$$]x-\eta\ ,\ x+\eta[\subset \{z \in \mathbb{R}/g^*_\lambda(z) < g_\lambda(y)\}\ .$$

   On montre que si $\varepsilon = \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{y-x}{2}\}$ alors $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O_0$. En effet d'abord pour tout $z \in]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[$ on a $z < x+\varepsilon < y$, ensuite puisque $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset]x-\eta\ ,\ x+\eta[$ on a $g^*_\lambda(z) < g_\lambda(y)$.
4. On montre que l'ensemble $\Delta_0 = \{x \in \mathbb{R}/g^*_\lambda(x) \neq g_\lambda(x)\}$ est au plus dénombrable.
   D'après (i) on a $\Delta_0 = \{x \in \mathbb{R}/f^*(x) \neq f(x)\}$ il suffit donc d'appliquer le lemme [10.40] page 908.
5. On montre que si x est strictement croissante $\sum_{k=0}^{n}(g^*_\lambda(x_k) - g_\lambda(x_k)) \leq f^*(x_n) - f(x_0)$

   D'après (i) on a

$$\sum_{k=0}^{n} g^*_\lambda(x_k) - g_\lambda(x_k) = \sum_{k=0}^{n}(f^*(x_k) - \lambda x_k) - (f(x_k) - \lambda x_k) = \sum_{k=0}^{n} f^*(x_k) - f(x_k)$$

   Il suffit donc d'appliquer l'inégalité (10.199) page 909 .
6. On montre que pour toute suite strictement croissante majorée $\lim_{n\to\infty} g^*_\lambda(x_n) = \lim_{n\to\infty} g_\lambda(x_n)$

I On montre que ces suites ont une limite

D'aprés le lemme [10.40] page 908 f^* est une application croissante ainsi la suite y définie par $y_n = f^*(x_n)$ est croissante et si b est un majorant de x la suite y_n est majorée par $f^*(b)$. Comme suite croissante majorée y possède une limite et

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} y_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f^*(x_n)$$

De même puisque $\lambda \in \mathbb{R}_+$ la suite z définie par $z_n = \lambda x_n$ est croissante et si b est un majorant de x la suite z_n est majorée par λb. Comme suite croissante majorée z possède une limite et

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} z_n = \lambda \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n\ .$$

L'égalité $g^*_\lambda(x_n) = y_n - z_n$ montre alors que

$$\lim_{n\to\infty} g^*_\lambda(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} z_n$$

De même la suite $g_\lambda(x_n) = f(x_n) - \lambda x_n$ est différence de deux suites croissantes majorées, ainsi elle converge et

$$\lim_{n\to\infty} g_\lambda(x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) - \lambda \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n\ .$$

II on montre que ces limites sont égales

Pour cela on remarque d'abord que la suite S de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(g^*_\lambda(x_k) - g_\lambda(x_k))$$

est croissante majorée.

(a) S est croissante.
En effet ,

$$S_{n+1} = S_n + g^*_\lambda(x_{n+1}) - g_\lambda(x_{n+1})$$

et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g^*_\lambda(x) \geq g_\lambda(x)$ on obtient $S_n \leq S_{n+1}$

(b) S est majorée.
D'après l'inégalité (10.207) page 917 on a $S_n \leq f^*(x_n) - f(x_0)$, par suite si b est un majorant de la suite x on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n \leq f^*(b) - f(x_0)$$

Comme suite croissante majorée S possède une limite l'égalité $g^*_\lambda(x_n) - g_\lambda(x_n) = S_n - S_{n-1}$ entraîne

$$\lim_{n\to\infty}(g^*_\lambda(x_n) - g_\lambda(x_n)) = 0$$

et l'existence de limites pour les suites $n \mapsto g^*_\lambda(x_n)$ et $n \mapsto g_\lambda(x_n)$ montre alors

$$\lim_{n\to\infty} g^*_\lambda(x_n) = \lim_{n\to\infty} g_\lambda(x_n)$$

(iii)

1. g^λ_* est semi-continue inférieurement.
Il s'agit de montrer que pour tout $x \in U_*(u)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset U_*(u)$. Puisque $g^\lambda_*(x) = \liminf_{\mathcal{V}(x)} g_\lambda$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*(x) = \{y \in \mathbb{R} /\ \exists\ \omega \in \Omega(x) : y = \inf_{t\in\omega} g_\lambda(t)\}$$

l'assertion $x \in U_*(u)$ entraîne que u n'est pas un majorant de cet ensemble, ainsi il existe $\omega \in \Omega(x)$ tel que

$$\inf_{t\in\omega} g_\lambda(t) > u\ .$$

Puisque $\omega \in \mathcal{V}(x)$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset \omega$, on montre que pour tout $z \in]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[$ on a $\liminf_{\mathcal{V}(z)} g_\lambda > u$. Il s'agit de montrer que pour tout $z \in]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[$ il existe $\omega(z) \in \Omega(z)$ tel que $\inf_{t\in\omega(z)} g_\lambda(t) > u$. Si $z \in]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[$ on pose $\delta = \min\{\frac{z+\varepsilon-x}{2}, \frac{x+\varepsilon-z}{2}\}$ et $\omega_\delta(z) =]z-\delta\ ,\ z+\delta[$. Les inclusions $\omega_\delta(z) \subset]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset \omega$ montrent

(a) puisque g_λ est bornée sur ω, g_λ est bornée sur $\omega_\delta(z)$, par suite $\omega_\delta(z) \in \Omega(z)$.

(b)
$$\inf_{t\in\omega_\delta(z)} g_\lambda(t) \geq \inf_{t\in\omega} g_\lambda(t) > u$$

Ainsi, pour tout $z \in]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[$ on obtient

$$\liminf_{\mathcal{V}(z)} g_\lambda = \sup_{\omega\in\Omega(z)}(\inf_{t\in\omega} g_\lambda(t)) \geq \inf_{t\in\omega_\delta(z)} g_\lambda(t) > u$$

et $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset U_*(u)$

2. g_*^λ est continue à gauche .
   D'après (i) on a $g_*^\lambda(t) = f_*(t) - \lambda t$ et d'après le lemme [10.40] page 908 f_* est continue à gauche.
3. O_1 est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Il s'agit de montrer que pour tout $x \in O_1$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset O_1$. Si $x \in O_1$ il existe $y \in]\leftarrow, x[$ tel que $g_*^\lambda(x) > g_\lambda(y)$, la semi-continuitée inférieure de g_*^λ montre qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
   $$]x - \eta\ ,\ x + \eta[\subset \{z \in \mathbb{R}/g_*^\lambda(z) > g_\lambda(y)\}\ .$$
   On montre que si $\varepsilon = \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{x-y}{2}\}$ alors $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset O_1$. En effet d'abord pour tout $z \in]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[$ on a $z > x - \varepsilon > y$, ensuite puisque $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset]x - \eta\ ,\ x + \eta[$ on a $g_*^\lambda(z) > g_\lambda(y)$.
4. On montre que l'ensemble $\Delta_1 = \{x \in \mathbb{R}/g_*^\lambda(x) \neq g_\lambda(x)\}$ est au plus dénombrable.
   D'après (i) on a $\Delta_1 = \{x \in \mathbb{R}/f_*(x) \neq f(x)\}$ il suffit donc d'appliquer le lemme [10.40] page 908.
5. On montre que si x est strictement croissante $\sum_{k=0}^{n}(g_\lambda(x_k) - g_*^\lambda(x_k)) \leq f(x_n) - f_*(x_0)$

   D'après (i) on a
   $$\sum_{k=0}^{n} g_\lambda(x_k) - g_*^\lambda(x_k) = \sum_{k=0}^{n}(f(x_k) - \lambda x_k) - (f_*(x_k) - \lambda x_k) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) - f_*(x_k)$$
   Il suffit donc d'appliquer l'inégalité (10.198) page 909 .
6. On montre que pour toute suite strictement croissante majorée $\lim_{n\to\infty} g_*^\lambda(x_n) = \lim_{n\to\infty} g_\lambda(x_n)$

   I On montre que ces suites ont une limite

   D'aprés le lemme [10.40] page 908 f_* est une application croissante ainsi la suite y définie par $y_n = f_*(x_n)$ est croissante et si b est un majorant de x la suite y_n est majorée par $f_*(b)$. Comme suite croissante majorée y possède une limite et
   $$\lim_{n\to\infty} y_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} y_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_*(x_n)$$
   De même puisque $\lambda \in \mathbb{R}_+$ la suite z définie par $z_n = \lambda x_n$ est croissante et si b est un majorant de x la suite z_n est majorée par λb. Comme suite croissante majorée z possède une limite et
   $$\lim_{n\to\infty} z_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} z_n = \lambda \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n\ .$$
   L'égalité $g_*^\lambda(x_n) = y_n - z_n$ montre alors que
   $$\lim_{n\to\infty} g_*^\lambda(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} z_n$$
   De même la suite $g_\lambda(x_n) = f(x_n) - \lambda x_n$ est différence de deux suites croissantes majorées, ainsi elle converge et
   $$\lim_{n\to\infty} g_\lambda(x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) - \lambda \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n\ .$$
   II on montre que ces limites sont égales

   Pour cela on remarque d'abord que la suite S de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n}(g_\lambda(x_k) - g_*^\lambda(x_k))$$
   est croissante majorée.

(a) S est croissante.
En effet ,
$$S_{n+1} = S_n + g_\lambda(x_{n+1}) - g_*^\lambda(x_{n+1})$$
et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g_\lambda(x) \geq g_*^\lambda(x)$ on obtient $S_n \leq S_{n+1}$

(b) S est majorée.
D'après l'inégalité (10.208) page 917 on a $S_n \leq f(x_n) - f_*(x_0)$, par suite si b est un majorant de la suite x on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$S_n \leq f(b) - f_*(x_0)$$

Comme suite croissante majorée S possède une limite l'égalité $g_\lambda(x_n) - g_*^\lambda(x_n) = S_n - S_{n-1}$ entraîne
$$\lim_{n\to\infty} (g_\lambda(x_n) - g_*^\lambda(x_n)) = 0$$
et l'existence de limite pour les suites $n \mapsto g_\lambda(x_n)$ et $n \mapsto g_*^\lambda(x_n)$ montre alors
$$\lim_{n\to\infty} g_\lambda(x_n) = \lim_{n\to\infty} g_*^\lambda(x_n)$$

(iv)

On montre que l'ensemble $O_d = \{x \in]a\ ,\ b[/\ \exists\ y \in]x\ ,\ b[: g_\lambda^*(x) < g_\lambda(y)\}$ est ouvert . Il s'agit de montrer que pour tout $x \in O_d$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset O_d$. Si $x \in O_d$ il existe $y \in]x,\ b[$ tel que $g_\lambda^*(x) < g_\lambda(y)$, la semi-continuitée supérieure de g_λ^* montre qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$]x - \eta\ ,\ x + \eta[\subset \{z \in \mathbb{R}/g_\lambda^*(z) < g_\lambda(y)\}\ .$$
On montre que si $\varepsilon = \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{y-x}{2}, \frac{x-a}{2}\}$ alors $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset O_d$. En effet d'abord pour tout $z \in]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[$ on a $a < x - \varepsilon < z < x + \varepsilon < y < b$, ensuite puisque $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset]x - \eta\ ,\ x + \eta[$ on a $g_\lambda^*(z) < g_\lambda(y)$. Comme ouvert de $\mathbb{R}$, l'ensemble O_d est somme disjointe finie ou dénombrable d'intervalles ouverts (c'est la définition d'un ouvert mais pour ce genre de résultat voir aussi le point $(viii)$ du théorème [10.4] page 670) . On note $(I_q)_{q\in D}$ une partition finie ou dénombrable de O_d en intervalles ouverts . Puisque pour tout $q \in D$ $I_q \subset]a\ ,\ b[$ on a $I_q =]a_q\ ,\ b_q[$ avec
$$a_q = \inf\{t : t \in I_q\} \quad \text{et} \quad b_q = \sup\{t : t \in I_q\}$$

I On montre $g_*^\lambda(b_q) \leq g_\lambda^*(a_q)$

En effet puisque par construction $a_q \notin O_d$ pour tout $t \in]a_q\ ,\ b[$ on a $g_\lambda(t) \leq g_\lambda^*(a_q)$ par suite

— si $b_q < b$ alors $g_\lambda(b_q) \leq g_\lambda^*(a_q)$ et (i) montre que cette inégalité s'écrit
$$f(b_q) - \lambda b_q \leq f^*(a_q) - \lambda a_q$$
ainsi $f(b_q) - f^*(a_q) \leq \lambda\ (b_q - a_q)$

— si $b_q = b$ et $x \in \mathrm{Hom}(\mathbb{N},]a_q\ ,\ b[)$ est une suite convergeant vers b les inégalités
$$g_*^\lambda(x_n) \leq g_\lambda(x_n) \leq g_\lambda^*(a_q)$$
et la continuité à gauche de g_*^λ montrent que
$$g_*^\lambda(b) = \lim_{n\to\infty} g_*^\lambda(x_n) \leq g_\lambda^*(a_q)$$
et (i) montre que cette inégalité s'écrit
$$f_*(b) - \lambda b \leq f^*(a_q) - \lambda a_q$$
ainsi $f_*(b) - f^*(a_q) \leq \lambda\ (b - a_q)$

II On montre que $g_*^\lambda(a_q) \le g_\lambda^*(b_q)$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on pose

$$\Gamma_\varepsilon = \{t \in [a_q\ ,\ b_q]/g_*^\lambda(a_d) - \varepsilon \le g_\lambda^*(t)\}$$

et on montre

1. pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $\Gamma_\varepsilon \neq \varnothing$ et il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a_q\ ,\ a_q+\delta[\subset \Gamma_\varepsilon$.
2. si m est la borne supérieure de Γ_ε alors $m \in \Gamma_\varepsilon$
3. enfin on montre que l'assertion $g_\lambda^*(b_q) < g_*^\lambda(a_q)$ entraîne une contradiction.

1. Puisque $g_*^\lambda(a_q) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*(a_q) = \{y \in \mathbb{R}/\ \exists\ \omega \in \Omega(a_q) : y = \inf_{t\in\omega} g_\lambda(t)\}$$

il existe $\omega \in \Omega(a_q)$ tel que

$$\inf_{t\in\omega} g_\lambda(t) > g_*^\lambda(a_q) - \varepsilon$$

ainsi il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \in]a_q - \eta\ ,\ a_q + \eta[\Rightarrow g_\lambda(t) > g_*^\lambda(a_q) - \varepsilon$$

par suite si $\delta = \min\{\eta, b_q - a_q\}$ on obtient

$$]a_q\ ,\ a_q + \delta[\subset \Gamma_\varepsilon$$

2. Puisque $g_\lambda^*(t)$ est semi-continue supérieurement pour tout $u \in \mathbb{R}$ l'ensemble $F = \{t \in \mathbb{R}/g_\lambda^*(t) \ge u\}$ est fermé, par suite Γ_ε est fermé comme intersection de fermés , ainsi $m \in \Gamma_\varepsilon$ et $g_\lambda^*(m) \ge g_*^\lambda(a_a) - \varepsilon$
3. Supposons $g_\lambda^*(b_q) < g_*^\lambda(a_q)$, on montre que pour tout $\varepsilon < g_*^\lambda(a_q) - g_\lambda^*(b_q)$ on a

$$m_\varepsilon = \sup\{t : t \in \Gamma_\varepsilon\} = b_q \tag{10.211}$$

en effet d'après 2 on a $g_\lambda^*(m_\varepsilon) \ge g_*^\lambda(a_q) - \varepsilon$ et le choix de ε donne alors $g_\lambda^*(m_\varepsilon) \ge g_\lambda^*(b_q)$. Or si $m_\varepsilon < b_q$ alors puisque d'après 1 on a $m_\varepsilon > a_q$ on obtient $m_\varepsilon \in]a_q\ ,\ b_q[$ et $m_\varepsilon \in O_d$. Par suite il existe $t \in]m_\varepsilon\ , b[$ tel que $g_\lambda(t) > g_\lambda^*(m_\varepsilon) \ge g_\lambda^*(b_q)$ puisque par construction $b_q \notin O_d$, un tel t ne peut être supérieure à b_q par suite $t \le b_q$ et $g_\lambda^*(t) \ge g_\lambda(t) > g_\lambda^*(m_\varepsilon) \ge g_*^\lambda(a_q) - \varepsilon$ ainsi t est un élément de Γ_ε strictement supérieur à m_ε, ce qui contredit la définition de m_ε, par suite $m_\varepsilon = b_q$ et $g_\lambda^*(b_q) \ge g_*^\lambda(a_q) - \varepsilon > g_\lambda^*(b_q)$, ce qui donne la contradiction cherchée.

Ainsi pour tout $q \in D$ on a

$$g_*^\lambda(a_q) \le g_\lambda^*(b_q)$$

et le point (i) montre que cette inégalité s'écrit

$$f_*(a_a) - \lambda a_q \le f^*(b_q) - \lambda b_q$$

ainsi

$$\lambda(b_q - a_q) \le f^*(b_q) - f_*(a_q)\ .$$

(v)

On montre que l'ensemble $O_g = \{x \in]a\ ,\ b[/\ \exists\ y \in]a\ ,\ x[: g_\lambda^*(x) < g_\lambda(y)\}$ est ouvert . Il s'agit de montrer que pour tout $x \in O_g$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x - \varepsilon\ ,\ x + \varepsilon[\subset O_g$. Si $x \in O_g$ il existe $y \in]a,\ x[$ tel que $g_\lambda^*(x) < g_\lambda(y)$, la semi-continuitée supérieure de g_λ^* montre qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$]x - \eta\ ,\ x + \eta[\subset \{z \in \mathbb{R}/g_\lambda^*(z) < g_\lambda(y)\}\ .$$

On montre que si $\varepsilon = \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{x-y}{2}, \frac{b-x}{2}\}$ alors $]x-\varepsilon \ , \ x+\varepsilon[\subset O_g$. En effet d'abord pour tout $z \in]x-\varepsilon \ , \ x+\varepsilon[$ on a $a < y < x-\varepsilon < z < x+\varepsilon < b$, ensuite puisque $]x-\varepsilon \ , \ x+\varepsilon[\subset]x-\eta \ , \ x+\eta[$ on a $g^*_\lambda(z) < g_\lambda(y)$. Comme ouvert de $\mathbb{R}$, l'ensemble O_g est somme disjointe finie ou dénombrable d'intervalles ouverts (c'est la définition d'un ouvert mais pour ce genre de résultat voir aussi le point $(viii)$ du théorème [10.4] page 670) . On note $(I'_q)_{q\in D}$ une partition dénombrable de O_g en intervalles ouverts .
Puisque pour tout $q \in D$ $I'_q \subset]a \ , \ b[$ on a $I'_q =]a'_q \ , \ b'_q[$ avec

$$a'_q = \inf\{t : t \in I'_q\} \quad \text{et} \quad b'_q = \sup\{t : t \in I'_q\}$$

I On montre $g^\lambda_*(a'_q) \leq g^*_\lambda(b'_q)$

Puisque par construction $b'_q \notin O_g$ pour tout $t \in]a \ , \ b'_q[$ on a $g_\lambda(t) \leq g^*_\lambda(b'_q)$ par suite

— si $a < a'_q$ alors $g_\lambda(a'_q) \leq g^*_\lambda(b'_q)$ ainsi $f(a'_q) - \lambda a'_q \leq f^*(b'_q) - \lambda b'_q$ et

$$\lambda \ (b'_q - a'_q) \leq f^*(b'_q) - f(a'_q)$$

— si $a'_q = a$ et $g^*_\lambda(b'_q) < g^\lambda_*(a)$ alors $g^*_\lambda(b'_q)$ n'est pas un majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*(a) = \{y \in \mathbb{R} / \ \exists \ \omega \in \Omega(a) : y = \inf_{t\in\omega} g_\lambda(t)\}$$

ainsi il existe $\omega \in \Omega(a)$ tel que $\inf_{t\in\omega} g_\lambda(t) > g^*_\lambda(b'_q)$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ tel que

$$t \in]a-\varepsilon \ , \ a+\varepsilon[\Rightarrow g_\lambda(t) > g^*_\lambda(b'_q) \ .$$

Si $\eta = \min\{\varepsilon, b'_q - a\}$ alors tout élément t de $]a \ , \ a+\eta[$ vérifie

$$t \in]a \ , \ b'_q[\quad \text{et} \quad g_\lambda(t) > g^*_\lambda(b'_q)$$

ce qui contredit le fait que $b'_q \notin O_g$. Ainsi on obtient $g^\lambda_*(a) \leq g^*_\lambda(b'_q)$ et (i) montre que cette inégalité s'écrit

$$f_*(a) - \lambda a \leq f^*(b'_q) - \lambda b'_q$$

ainsi $\lambda \ (b'_q - a) \leq f^*(b'_q) - f_*(a)$

II On montre $g^\lambda_*(b'_q) \leq g^*_\lambda(a'_q)$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ on pose

$$\Gamma_\varepsilon = \{t \in [a'_q \ , \ b'_q] / g^\lambda_*(b'_d) - \varepsilon \leq g^*_\lambda(t)\}$$

et on montre

1. pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ $\Gamma_\varepsilon \neq \varnothing$ et il existe $\delta \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $]b'_q - \delta \ , \ b'_q[\subset \Gamma_\varepsilon$.
2. si m est la borne inférieure de Γ_ε alors $m \in \Gamma_\varepsilon$
3. enfin on montre que l'assertion $g^*_\lambda(a'_q) < g^\lambda_*(b'_q)$ entraîne une contradiction.

1. Puisque $g^\lambda_*(b'_q) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de l'ensemble

$$\Lambda_*(b'_q) = \{y \in \mathbb{R} / \ \exists \ \omega \in \Omega(b'_q) : y = \inf_{t\in\omega} g_\lambda(t)\}$$

il existe $\omega \in \Omega(b'_q)$ tel que

$$\inf_{t\in\omega} g_\lambda(t) > g^\lambda_*(b'_q) - \varepsilon$$

ainsi il existe $\eta \in \mathbb{R}^*_+$ tel que

$$t \in]b'_q - \eta \ , \ b'_q + \eta[\Rightarrow g_\lambda(t) > g^\lambda_*(b'_q) - \varepsilon$$

par suite si $\delta = \min\{\eta, b'_q - a'_q\}$ on obtient

$$]b'_q - \delta \ , \ b'_q[\subset \Gamma_\varepsilon$$

2. Puisque $g^*_\lambda(t)$ est semi-continue supérieurement pour tout $u \in \mathbb{R}$ l'ensemble $F = \{t \in \mathbb{R} / g^*_\lambda(t) \geq u\}$ est fermé, par suite Γ_ε est fermé comme intersection de fermés , ainsi $m \in \Gamma_\varepsilon$ et $g^*_\lambda(m) \geq g^\lambda_*(b'_q) - \varepsilon$
3. Supposons $g^*_\lambda(a'_q) < g^\lambda_*(b'_q)$, on montre que pour tout $\varepsilon < g^\lambda_*(b'_q) - g^*_\lambda(a'_q)$ on a

$$m_\varepsilon = \inf\{t : t \in \Gamma_\varepsilon\} = a'_q$$

en effet d'après 2 on a $g^*_\lambda(m_\varepsilon) \geq g^\lambda_*(b'_q) - \varepsilon$ et le choix de ε donne alors $g^*_\lambda(m_\varepsilon) \geq g^*_\lambda(a'_q)$. Or si $m_\varepsilon > a'_q$ alors puisque d'après 1 on a $m_\varepsilon < b'_q$ on obtient $m_\varepsilon \in]a'_q\ ,\ b'_q[$ et $m_\varepsilon \in O_g$. Par suite il existe $t \in]a\ ,\ m_\varepsilon[$ tel que $g_\lambda(t) > g^*_\lambda(m_\varepsilon) \geq g^*_\lambda(a'_q)$ puisque par construction $a'_q \notin O_g$, un tel t ne peut être inférieure à a'_q par suite $t \geq a'_q$ et $g^*_\lambda(t) \geq g_\lambda(t) > g^*_\lambda(m_\varepsilon) \geq g^\lambda_*(b'_q) - \varepsilon$ ainsi t est un élément de Γ_ε strictement inférieur à m_ε, ce qui contredit la définition de m_ε, par suite $m_\varepsilon = a'_q$ et $g^*_\lambda(a'_q) \geq g^\lambda_*(b'_q) - \varepsilon > g^*_\lambda(a'_q)$, ce qui donne la contradiction cherchée.

Ainsi pour tout $q \in D$ on a

$$g^\lambda_*(b'_q) \leq g^*_\lambda(a'_q)$$

et le point (i) montre que cette inégalité s'écrit

$$f_*(b'_q) - \lambda b'_q \leq f^*(a'_q) - \lambda a'_q$$

ainsi

$$f_*(b'_q) - f^*(a'_q) \leq \lambda\ (b'_q - a'_q)\ .$$

(vi)

1. α et β sont injectives.
Si $\alpha_q = \alpha_{q'}$ alors $\alpha_q < \min\{\beta_q, \beta_{q'}\}$ et pour tout $\varepsilon < \min\{\beta_q, \beta_{q'}\} - \alpha_q$ on a (puisque pour tout $q \in D$ $I_q =]\alpha_q\ ,\ \beta_q[$) $\alpha_q + \varepsilon \in I_q \cap I_{q'}$, $(I_q)_{q\in D}$ étant une partition cela entraîne $q = q'$
De même si $\beta_q = \beta_{q'}$ alors $\max\{\alpha_q, \alpha_{q'}\} < \beta_q$ et pour tout $\varepsilon < \beta_q - \max\{\alpha_q, \alpha_{q'}\}$ on a $\beta_q - \varepsilon \in I_q \cap I_{q'}$, $(I_q)_{q\in D}$ étant une partition cela entraîne $q = q'$
2. On montre que pour tout sous-ensemble fini F de D et pour toute application croissante h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\sum_{q\in F}(h(\beta_q) - h(\alpha_q)) \leq \max_{q\in F} h(\beta_q) - \min_{q\in F} h(\alpha_q) \tag{10.212}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ On note $\mathcal{F}_n$ la famille des sous-ensembles finis de D de cardinal $n+1$ et

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \ \forall F \in \mathcal{F}_n \quad \sum_{q\in F}(h(\beta_q) - h(\alpha_q)) \leq \max_{q\in F} h(\beta_q) - \min_{q\in F} h(\alpha_q)\}$$

Ainsi H est l'ensemble des entiers naturels tels que tout sous-ensemble fini F de D qui est de cardinal $n+1$ vérifie l'inégalité (10.212) . On montre que H est héréditaire

(a) d'abord l'assertion $0 \in H$ est claire puisque si $F = \{q_0\}$ alors

$$\sum_{q\in F}(h(\beta_q) - h(\alpha_q)) = h(\beta_{q_0}) - h(\alpha_{q_0}) = \max_{q\in F} h(\beta_q) - \min_{q\in F} h(\alpha_q)$$

(b) ensuite on montre $n \in H \Rightarrow n+1 \in H$.
On suppose $n \in H$ et on considère un sous-ensemble fini F de D de cardinal $n+2$.On montre qu'il existe un couple $(q_0, q_1) \in F \times F$ qui vérifie $q_1 \in F \cap \{q_0\}^c$ et pour tout $q \in F \cap \{q_0, q_1\}^c$

$$\alpha_q < \beta_q \leq \alpha_{q_1} < \beta_{q_1} \leq \alpha_{q_0} < \beta_{q_0} \tag{10.213}$$

En effet d'après le point (vi) du lemme [6.1] page 133 il existe $q_0 \in F$ tel que $\alpha_{q_0} = \max_{q\in F} \alpha_q$.
On montre que pour tout $q \in F \cap \{q_0\}^c$ on a $\beta_q \leq \alpha_{q_0}$, en effet, s'il existe $q \in F \cap \{q_0\}^c$ tel que

$\alpha_{q_0} < \beta_q$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varepsilon < \min\{\beta_q - \alpha_{q_0}, \beta_{q_0} - \alpha_{q_0}\}$ on a $\alpha_q + \varepsilon \in I_q \cap I_{q_0}$ et par hypothèse $I_q \cap I_{q_0} = \varnothing$.
De même il existe $q_1 \in F \cap \{q_0\}^c$ tel que $\alpha_{q_1} = \max_{q \in F \cap \{q_O\}^c} \alpha_q$. On montre que pour tout $q \in F \cap \{q_0, q_1\}^c$ on a $\beta_q \leq \alpha_{q_1}$, en effet, s'il existe $q \in F \cap \{q_0, q_1\}^c$ tel que $\alpha_{q_1} < \beta_q$ alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varepsilon < \min\{\beta_q - \alpha_{q_1}, \beta_{q_1} - \alpha_{q_1}\}$ on a $\alpha_{q_1} + \varepsilon \in I_q \cap I_{q_1}$ et par hypothèse $I_q \cap I_{q_1} = \varnothing$. Ainsi (q_0, q_1) vérifie (10.213) page 928 et la croissance de h entraîne

$$h(\beta_{q_0}) = \max_{q \in F} h(\beta_q) \ , \ h(\beta_{q_1}) = \max_{q \in F \cap \{q_0\}^c} h(\beta_q) \quad \text{et} \quad h(\alpha_{q_0}) \geq h(\beta_{q_1}) \tag{10.214}$$

Cela permet de montrer que

$$\sum_{q \in F} (h(\beta_q) - h(\alpha_q)) \leq \max_{q \in F} h(\beta_q) - \min_{q \in F} h(\alpha_q)$$

En effet d'après le théorème [8.1] page 211

$$\sum_{q \in F} (h(\beta_q) - h(\alpha_q)) = \sum_{q \in F \cap \{q_0\}^c} (h(\beta_q) - h(\alpha_q)) + h(\beta_{q_0}) - h(\alpha_{q_0}) \tag{10.215}$$

— puisque $F \cap \{q_0\}^c \in \mathcal{F}_n$ et $n \in H$ on a

$$\sum_{q \in F \cap \{q_0\}^c} (h(\beta_q) - h(\alpha_q)) \leq \max_{q \in F \cap \{q_0\}^c} h(\beta_q) - \min_{q \in F \cap \{q_0\}^c} h(\alpha_q)$$

et (10.214) montre alors que

$$\sum_{q \in F \cap \{q_0\}^c} (h(\beta_q) - h(\alpha_q)) \leq h(\beta_{q_1}) - \min_{q \in F \cap \{q_0\}^c} h(\alpha_q)$$

par (10.215) on obtient donc

$$\sum_{q \in F} (h(\beta_q) - h(\alpha_q)) \leq h(\beta_{q_1}) - \min_{q \in F \cap \{q_0\}^c} h(\alpha_q) + h(\beta_{q_0}) - h(\alpha_{q_0})$$

et l'inégalité $h(\beta_{q_1}) \leq h(\alpha_{q_0})$ qui est assurée par (10.214) montre alors que

$$\sum_{q \in F} (h(\beta_q) - h(\alpha_q)) \leq h(\beta_{q_0}) - \min_{q \in F \cap \{q_0\}^c} h(\alpha_q) \leq \max_{q \in F} h(\beta_q) - \min_{q \in F} h(\alpha_q)$$

Ainsi H est héréditaire et pour tout sous -ensemble fini F de D l'inégalité (10.212) page 928 est vérifiée .

(vi)

1. On pose $\Delta_0 = \{x \in \mathbb{R} / g_\lambda(x) \neq g_\lambda^*(x)\}$ et $O_d = \{x \in]a\ ,\ b[\} /\ \exists\ y \in]x\ ,\ b[\colon g_\lambda^*(x) < g_\lambda(y)\}$, (ii) permet d'affirmer que Δ_0 est au plus dénombrable, on montre que

$$N_\lambda \cap \Delta_0^c \subset O_d\ .$$

Or si $x \in N_\lambda \cap \Delta_0^c$ alors
— puisque $x \in N_\lambda$ il existe $t \in]x\ , b[$ tel que $f(t) - f(x) > \lambda\ (t - x)$ ainsi $f(t) - \lambda t > f(x) - \lambda x$ et $g_\lambda(t) > g_\lambda(x)$
— puisque $x \in \Delta_0^c$ on a $g_\lambda(x) = g_\lambda^*(x)$

Ainsi on obtient

$$x \in N_\lambda \cap \Delta_0^c \Rightarrow \ \exists\ t \in]x\ ,\ b[\quad \text{tel que} \quad g_\lambda(t) > g_\lambda^*(x) \Rightarrow x \in O_d$$

Or d'après (iv) l'ouvert O_d est somme disjointe d'une famille $(I_q)_{q\in D}$ finie ou dénombrale d'intervalles ouverts bornés qui vérifie pour tout $q \in D$:

$$\lambda\ (\sup\{t : t \in I_q\} - \inf\{t : t \in I_q\}) \leq f^*(\sup\{t : t \in I_q\}) - f_*(\inf\{t : t \in I_q\}) \tag{10.216}$$

Ainsi $N_\lambda \subset \bigcup_{q\in D} I_q \cup \Delta_0$ ou $(I_q)_{q\in D}$ et Δ_0 vérifie les propriétés de *1* du point (vi)

2. 0n montre que l'inégalité (10.216) page 930 entraîne que pour tout sous-ensemble fini F de D on a

$$\sum_{q\in F}(\sup\{t : t \in I_q\} - \inf\{t : t \in I_q\}) \leq 3\ \frac{f^*(b) - f_*(a)}{\lambda} \tag{10.217}$$

Or le point (iii) du lemme [8.6] page 217 montre que l'inégalité (10.216) page 930 entraîne

$$\sum_{q\in F}(\sup\{t : t \in I_q\} - \inf\{t : t \in I_q\}) \leq \frac{1}{\lambda}(\sum_{q\in F}(f^*(\sup\{t : t \in I_q\}) - f_*(\inf\{t : t \in I_q\})\ )$$

il suffit donc de montrer

$$\sum_{q\in F}(f^*(\sup\{t : t \in I_q\}) - f_*(\inf\{t : t \in I_q\}) \leq 3(f^*(b) - f_*(a))$$

On note α et β les applications de D dans $[a\ ,\ b]$ définies par

$$\alpha_q = \inf\{t : t \in I_q\} \quad \text{et} \quad \beta_q = \sup\{t : t \in I_q\}$$

et on montre que pour tout sous-ensemble fini F de D on a

$$\sum_{q\in F}(f^*(\beta_q) - f_*(\alpha_q)) \leq 3(f^*(b) - f_*(a))\ . \tag{10.218}$$

pour cela on décompose la somme $\sum_{q\in F}(f^*(\beta_q) - f_*(\alpha_q))$ en trois sommes

$$S_0 = \sum_{q\in F}(f^*(\beta_q) - f(\beta_q))\ ,\ S_1 = \sum_{q\in F}(f(\beta_q) - f(\alpha_q))\ , S_2 = \sum_{q\in F}(f(\alpha_q) - f_*(\alpha_q))$$

I On montre $S_0 \leq f^*(b) - f_*(a)$

Puisque l'application $q \to \beta_q$ est injective (voir (v) par exemple) par changement de variable (voir le point (vi) du théorème [8.1] page 211) on obtient

$$S_0 = \sum_{q\in F}(f^*(\beta_q) - f(\beta_q)) = \sum_{t\in\beta(F)}(f^*(t) - f(t))$$

D'après le lemme [6.1] page 133 si $\mathrm{Card}(\beta(F)) = n + 1$ il existe une bijection strictement croissante x de $\mathbb{N}_n$ dans $\beta(F)$ par suite

$$\sum_{t\in\beta(F)}(f^*(t) - f(t)) = \sum_{k=0}^{n} f^*(x_k) - f(x_k)$$

l'inégalité (10.199) page 909 montre alors que

$$S_0 = \sum_{k=0}^{n}(f^*(x_k) - f(x_k)) \leq f^*(x_n) - f(x_0) \leq f^*(b) - f_*(a)\ .$$

II On montre $S_1 \leq f^*(b) - f_*(a)$

Puisque f est croissante le point (v) montre que

$$\sum_{q\in F}(f(\beta_q) - f(\alpha_q)) \leq \max_{q\in F} f(\beta_q) - \min_{q\in F} f(\alpha_q) \leq f^*(b) - f_*(a)$$

III On montre $S_2 \leq f^*(b) - f_*(a)$

Puisque l'application $q \to \alpha_q$ est injective (voir (v) par exemple) par changement de variable (voir le point (vi) du théorème [8.1] page 211) on obtient

$$S_2 = \sum_{q\in F}(f(\alpha_q) - f_*(\alpha_q)) = \sum_{t\in\alpha(F)}(f(t) - f_*(t))$$

D'après le lemme [6.1] page 133 si $\mathrm{Card}(\alpha(F)) = n+1$ il existe une bijection strictement croissante x de $\mathbb{N}_n$ dans $\alpha(F)$ par suite

$$\sum_{t\in\beta(F)}(f(t) - f_*(t)) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) - f_*(x_k)$$

l'inégalité (10.198) page 909 montre alors que

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n}(f(x_k) - f_*(x_k)) \leq f(x_n) - f_*(x_0) \leq f^*(b) - f_*(a) \ .$$

Ainsi puisque $\sum_{q\in F}(f^*(\beta_q) - f_*(\alpha_q)) = S_0 + S_1 + S_2$ on obtient

$$\sum_{q\in F}(f^*(\beta_q) - f_*(\alpha_q)) \leq 3(f^*(b) - f_*(a))$$

et l'inégalité (10.216) entraîne donc

$$\sum_{q\in F}(\beta_q - \alpha_q) \leq 3\ \frac{f^*(b) - f_*(a)}{\lambda}$$

$(viii)$

1. On pose $\Delta_0 = \{x \in \mathbb{R}/g_\lambda(x) \neq g^*_\lambda(x)\}$ et $O_g = \{x \in]a\ ,\ b[/\ \exists\ y \in]a\ ,\ x[:\ g^*_\lambda(x) < g_\lambda(y)\}$, (ii) permet d'affirmer que Δ_0 est au plus dénombrable, on montre que

$$N'_\lambda \cap \Delta_0^c \subset O_g \ .$$

Or si $x \in N'_\lambda \cap \Delta_0^c$ alors
— puisque $x \in N'_\lambda$ il existe $t \in]a\ ,x[$ tel que $f(x) - f(t) < \lambda\ (x-t)$ ainsi $f(t) - \lambda t > f(x) - \lambda x$ et $g_\lambda(t) > g_\lambda(x)$
— puisque $x \in \Delta_0^c$ on a $g_\lambda(x) = g^*_\lambda(x)$
Ainsi on obtient

$$x \in N'_\lambda \cap \Delta_0^c \Rightarrow\ \exists\ t \in]a\ ,\ x[\quad \text{tel que}\quad g_\lambda(t) > g^*_\lambda(x) \Rightarrow x \in O_g$$

Or d'après (vii) l'ouvert O_g est somme disjointe d'une famille $(I'_q)_{q\in D}$ finie ou dénombrale d'intervalles ouverts bornés qui vérifie pour tout $q \in D$:

$$\lambda\ (\sup\{t : t \in I'_q\} - \inf\{t : t \in I'_q\}) \leq f^*(\sup\{t : t \in I'_q\}) - f_*(\inf\{t : t \in I'_q\}) \tag{10.219}$$

Ainsi $N_\lambda \subset \bigcup_{q\in D} I'_q \cup \Delta_0$ ou $(I'_q)_{q\in D}$ et Δ_0 vérifie les propriétés de *1* du point $(viii)$

2. 0n montre que l'inégalité (10.219) page 931 entraîne que pour tout sous-ensemble fini F de D on a

$$\sum_{q\in F}(\sup\{t : t\in I'_q\} - \inf\{t : t\in I'_q\}) \leq 3\ \frac{f^*(b)-f_*(a)}{\lambda}$$

Or le point (iii) du lemme [8.6] page 217 montre que l'inégalité (10.219) page 931 entraîne

$$\sum_{q\in F}(\sup\{t : t\in I'_q\} - \inf\{t : t\in I'_q\}) \leq \frac{1}{\lambda}(\sum_{q\in F}(f^*(\sup\{t : t\in I'_q\}) - f_*(\inf\{t : t\in I'_q\})\ ) \quad (10.220)$$

il suffit donc de montrer

$$\sum_{q\in F}(f^*(\sup\{t : t\in I'_q\}) - f_*(\inf\{t : t\in I'_q\}) \leq 3(f^*(b)-f_*(a))$$

On note α' et β' les applications de D dans $[a\ ,\ b]$ définies par

$$\alpha'_q = \inf\{t : t\in I'_q\} \quad \text{et} \quad \beta'_q = \sup\{t : t\in I'_q\}$$

et on montre que pour tout sous-ensemble fini F de D on a

$$\sum_{q\in F}(f^*(\beta'_q) - f_*(\alpha'_q)) \leq 3(f^*(b)-f_*(a))\ . \quad (10.221)$$

pour cela on décompose la somme $\sum_{q\in F}(f^*(\beta'_q) - f_*(\alpha'_q))$ en trois sommes

$$S_0 = \sum_{q\in F}(f^*(\beta'_q) - f(\beta'_q))\ ,\ S_1 = \sum_{q\in F}(f(\beta'_q) - f(\alpha'_q))\ , S_2 = \sum_{q\in F}(f(\alpha'_q) - f_*(\alpha'_q))$$

I On montre $S_0 \leq f^*(b) - f_*(a)$

Puisque l'application $q\to\beta'_q$ est injective (voir (v) par exemple) par changement de variable (voir le point (vi) du théorème [8.1] page 211) on obtient

$$S_0 = \sum_{q\in F}(f^*(\beta'_q) - f(\beta'_q)) = \sum_{t\in\beta'(F)}(f^*(t)-f(t))$$

D'après le lemme [6.1] page 133 si $\mathrm{Card}(\beta'(F)) = n+1$ il existe une bijection strictement croissante x de $\mathbb{N}_n$ dans $\beta'(F)$ par suite

$$\sum_{t\in\beta'(F)}(f^*(t)-f(t)) = \sum_{k=0}^{n} f^*(x_k) - f(x_k)$$

l'inégalité (10.199) page 909 montre alors que

$$S_0 = \sum_{k=0}^{n}(f^*(x_k) - f(x_k)) \leq f^*(x_n) - f(x_0) \leq f^*(b) - f_*(a)\ .$$

II On montre $S_1 \leq f^*(b) - f_*(a)$

Puisque f est croissante le point (v) montre que

$$\sum_{q\in F}(f(\beta'_q) - f(\alpha'_q)) \leq \max_{q\in F} f(\beta'_q) - \min_{q\in F} f(\alpha'_q) \leq f^*(b) - f_*(a)$$

III On montre $S_2 \leq f^*(b) - f_*(a)$

Puisque l'application $q \to \alpha'_q$ est injective (voir (v) par exemple) par changement de variable (voir le point (vi) du théorème [8.1] page 211) on obtient

$$S_2 = \sum_{q\in F}(f(\alpha'_q) - f_*(\alpha'_q)) = \sum_{t\in\alpha'(F)}(f(t) - f_*(t))$$

D'après le lemme [6.1] page 133 si $\mathrm{Card}(\alpha'(F)) = n+1$ il existe une bijection strictement croissante x de $\mathbb{N}_n$ dans $\alpha'(F)$ par suite

$$\sum_{t\in\alpha'(F)}(f(t) - f_*(t)) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) - f_*(x_k)$$

l'inégalité (10.198) page 909 montre alors que

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n}(f(x_k) - f_*(x_k)) \leq f(x_n) - f_*(x_0) \leq f^*(b) - f_*(a) \ .$$

Ainsi puisque $\sum_{q\in F}(f^*(\beta'_q) - f_*(\alpha'_q)) = S_0 + S_1 + S_2$ on obtient

$$\sum_{q\in F}(f^*(\beta'_q) - f_*(\alpha'_q)) \leq 3(f^*(b) - f_*(a))$$

et l'inégalité (10.220) page 932 entraîne donc

$$\sum_{q\in F}(\beta'_q - \alpha'_q) \leq 3\ \frac{f^*(b) - f_*(a)}{\lambda}$$

■

Le lemme [10.42] page 917 permet de mettre au jours une classe d'ensembles contenant les ensembles dénombrables.

II *Exemples d'ensembles négligeables*

Le lemme qui suit montre que l'ensemble des points x où une fonction monotone n'est pas à taux d'accroissement localement borné sur le le filtre

$$\mathcal{V}'(x) = \{\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R}\setminus\{x\})/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\cap(\mathbb{R}\setminus\{x\}) \subset \omega\}$$

peut être recouvert par une réunion d'intervalles de longueur aussi petite que l'on veut. On rappelle que le taux d'accroissement en x est l'application $\tau_x f$ de $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\tau_x f(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t-x}$$

que $\mathcal{V}'_d(x)$ est le filtre sur $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ défini par

$$\mathcal{V}'_d(x) = \{\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R}\setminus\{x\})/\ \exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x\ ,\ x+\varepsilon[\subset \omega\}$$

et

$$\Omega'_d(x) = \{\omega \in \mathcal{V}'_d(x)/\ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : t \in \omega \Rightarrow |\tau_x f(t)| \leq m\}$$

est l'ensemble des éléments de $\mathcal{V}'_d(x)$ sur lesquels $\tau_x f$ est bornée. Enfin $\mathcal{V}'_g(x)$ est le filtre sur $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ défini par

$$\mathcal{V}'_g(x) = \{\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R}\setminus\{x\})/\ \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* :]x-\varepsilon\ ,\ x[\subset \omega\}$$

et

$$\Omega'_g(x) = \{\omega \in \mathcal{V}'_g(x)/\ \exists\, m \in \mathbb{R}_+ : t \in \omega \Rightarrow |\tau_x f(t)| \le m\}$$

est l'ensemble des éléments de $\mathcal{V}'_g(x)$ sur lesquels $\tau_x f$ est bornée.

Lemme 10.43 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \le\ )$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels et* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$ *, et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{R}\ ,\mathbb{R})$ *une application* monotone *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *alors pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *vérifiant* $a<b$

1. *l'ensemble* $\Theta_d = \{x \in]a\ ,\ b[/\Omega'_d(x) = \varnothing\}$ *possède la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe une partition finie ou dénombrable* $(I_q^\varepsilon)_{q\in D_\varepsilon}$ *d'intervalles ouverts bornés inclus dans* $]a\ ,\ b[$ *et un ensemble fini ou dénombrable* Δ_0 *qui vérifient :*
   - *(a)* $\Theta_d \subset \bigcup_{q\in D_\varepsilon} I_q^\varepsilon \cup (\Delta_0 \cap]a\ ,\ b[)$
   - *(b) pour tout sous-ensemble fini* F *de* D_ε
   $$\sum_{q\in F}(\sup\{t : t\in I_q^\varepsilon\} - \inf\{t : t \in I_q^\varepsilon\}) < \varepsilon$$
2. *l'ensemble* $\Theta_g = \{x \in]a\ ,\ b[/\Omega'_g(x) = \varnothing\}$ *possède la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe une partition finie ou dénombrable* $(J_q^\varepsilon)_{q\in D_\varepsilon}$ *d'intervalles ouverts bornés inclus dans* $]a\ ,\ b[$ *et un ensemble fini ou dénombrable* Δ_0 *qui vérifient :*
   - *(a)* $\Theta_g \subset \bigcup_{q\in D_\varepsilon} J_q^\varepsilon \cup (\Delta_0 \cap]a\ ,\ b[)$
   - *(b) pour tout sous-ensemble fini* F *de* D_ε
   $$\sum_{q\in F}(\sup\{t : t\in J_q^\varepsilon\} - \inf\{t : t \in J_q^\varepsilon\}) < \varepsilon$$

Preuve

(i)

Si $N_\lambda = \{x \in]a\ ,\ b[/\ \exists\, t \in]x\ ,\ b[: f(t)-f(x) > \lambda\ (t-x)\}$ on montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\Theta'_d \subset N_\lambda$. En effet dire que $\tau_x f$ n'est pas localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}'_d(x)$ c'est dire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $V \in \mathcal{V}'_d(x)$ il existe $t \in V$ tel que $|\tau_x f(t)| > \lambda$. En particulier pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[$ tel que $|\tau_x f(t)| > \lambda$ puisque $\tau_x f$ est positive sur $]x\ ,\ x+\varepsilon[$ il existe $t \in]x\ ,\ x+\varepsilon[$ tel que $\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} > \lambda$, ainsi si ε vérifie $\varepsilon < b-x$ t est un élément de $]x\ ,\ b[$ tel que $f(t)-f(x) > \lambda\ (t-x)$,ce qui montre que pour tout $x \in \Theta'_d$ il existe $t \in]x\ ,\ b[$ tel que $f(t)-f(x) > \lambda\ (t-x)$, ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\Theta'_d \subset N_\lambda$. Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varepsilon > 3\dfrac{f^*(b)-f_*(a)}{\lambda}$ il existe une partition finie ou dénombrable de qu'on note $(I_q^\varepsilon)_{q\in D}$ et un ensemble fini ou dénombrable Δ_0 tel que

$$N_\lambda \subset \bigcup_{q\in D} I_q^\varepsilon \cup \Delta_0 \quad \text{et} \quad \sum_{q\in F}(\sup\{t : t\in I_q^\varepsilon\} - \inf\{t : t \in I_q^\varepsilon\}) < \varepsilon$$

mais le point (vii) du lemme [10.42] page 917 permet d'assuré l'existence d'une partition finie ou dénombrable $(I_q)_{q\in D}$ et d'un ensemble fini ou dénombrable Δ_0 tel que pour tout sous-ensemble fini F de D

$$N_\lambda \subset \bigcup_{q\in D} I_q \cup \Delta_0 \quad \text{et} \quad \sum_{q\in F}(\sup\{t : t\in I_q\} - \inf\{t : t \in I_q) < 3\frac{f^*(b)-f_*(a)}{\lambda} < \varepsilon$$

(ii)

Si $N'_\lambda = \{x \in]a\ ,\ b[/\ \exists\ t \in]a\ ,\ x[: f(x) - f(t) > \lambda\ (x-t)\}$ on montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\Theta'_g \subset N'_\lambda$. En effet dire que $\tau_x f$ n'est pas localement bornée sur le filtre $\mathcal{V}'_g(x)$ c'est dire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $V \in \mathcal{V}'_g(x)$ il existe $t \in V$ tel que $|\tau_x f(t)| > \lambda$. En particulier pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $t \in]x-\varepsilon\ ,\ x[$ tel que $|\tau_x f(t)| > \lambda$ puisque $\tau_x f$ est positive sur $]x-\varepsilon\ ,\ x[$ il existe $t \in]x-\varepsilon\ ,\ x[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t} > \lambda$, ainsi si ε vérifie $\varepsilon < x-a$ t est un élément de $]a\ ,\ x[$ tel que $f(x)-f(t) > \lambda\ (x-t)$,ce qui montre que pour tout $x \in \Theta'_g$ il existe $t \in]a\ ,\ x[$ tel que $f(x)-f(t) > \lambda\ (x-t)$, ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\Theta'_g \subset N_\lambda$. Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varepsilon > 3\dfrac{f^*(b)-f_*(a)}{\lambda}$ il existe une partition finie ou dénombrable de qu'on note $(J_q^\varepsilon)_{q\in D}$ et un ensemble fini ou dénombrable Δ_0 tel que

$$N'_\lambda \subset \bigcup_{q\in D} I_q^\varepsilon \cup \Delta_0 \quad \text{et} \quad \sum_{q\in F}(\sup\{t : t \in I_q^\varepsilon\} - \inf\{t : t \in I_q^\varepsilon\}) < \varepsilon$$

mais le point $(viii)$ du lemme [10.42] page 917 permet d'assuré l'existence d'une partition finie ou dénombrable $(I'_q)_{q\in D}$ et d'un ensemble fini ou dénombrable Δ_0 tel que pour tout sous-ensemble fini F de D

$$N'_\lambda \subset \bigcup_{q\in D} I'_q \cup \Delta_0 \quad \text{et} \quad \sum_{q\in F}(\sup\{t : t \in I'_q\} - \inf\{t : t \in I'_q) < 3\frac{f^*(b)-f_*(a)}{\lambda} < \varepsilon$$

■

On définit un germe de mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Définition 10.66 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$, $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_b$ *l'ensemble des ouverts bornés de* $\mathbb{R}$ *:*

$$\mathcal{T}_b = \{O \in \mathcal{T}/\ \exists\ (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : O \subset [a\ ,\ b]\}$$

Enfin pour tout ensemble D $\mathcal{F}(D)$ *la famille des sous-ensemble finis de* D *Une application* $m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{T}_b, \mathbb{R}_+)$ *est appelée un germe de mesure de lebesgue si :*

1. $m(\varnothing) = 0$
2. *si* $(O_0, O_1) \in \mathcal{T}_b \times \mathcal{T}_b$ *et* $O_0 \subset O_1$ *alors*
$$m(O_0) \leq m(O_1) \tag{10.222}$$
3. *pour tout intervalle ouvert borné*
$$m(I) = \sup\{t : t \in I\} - \inf\{t : t \in I\} \tag{10.223}$$
4. *Pour tout ensemble fini ou dénombrable* D *et pour toute application* $O \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(D, \mathcal{T}_b)$ *telle que l'ensemble* $\bigcup_{k\in D} O_k$ *est borné et l'ensemble*
$$U(O) = \{x \in \mathbb{R}_+/\ \exists\ F \in \mathcal{F}(D) : x = \sum_{k\in F} m(O_k)\}$$
est majoré alors
$$m(\bigcup_{k\in D} O_k) \leq \sup\{x : x \in U(O)\}$$
ce qu'on note
$$m(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} O_k) \leq \sup_{F\in\mathcal{F}(D)} \sum_{k\in F} m(O_k) \tag{10.224}$$

5. *Pour tout ensemble fini ou dénombrable D et pour toute* partition $O \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(D, \mathcal{T}_b)$ *tel que l'ensemble* $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} O_k$ *est borné*

$$m(\bigcup_{k\in D} O_k) = \sup_{F\in\mathcal{F}(D)} \sum_{k\in F} m(O_k) \tag{10.225}$$

On aura aussi besoin d'utiliser une notion de « mesure extérieure »

Définition 10.67 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* $\mathcal{T}_b$ *l'ensemble des ouverts bornés de* $\mathbb{R}$ *,* $\mathcal{P}_b(\mathbb{R})$ *la famille des sous-ensemble bornés de* $\mathbb{R}$ *et* m *un germe de mesure de Lebesgue. Enfin pour tout* $A \in \mathcal{P}_b(\mathbb{R})$ *on note* $e^*(A, \mathcal{T}_b)$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{T}_b$ *défini par*

$$e^*(A, \mathcal{T}_b) = \{O \in \mathcal{T}_b / A \subset O\}$$

et $U^*(A)$ *l'ensemble*

$$U^*(A) = \{x \in \mathbb{R}_+ /\ \exists\ O \in e^*(A, \mathcal{T}_b) : x = m(O)\}$$

On appelle m*-mesure extérieure de* A *la borne inférieure de* $U^*(A)$ *ce qu'on note*

$$m^*(A) = \inf\{m(O) : A \subset O\}$$

Le lemme [10.43] page 934 montre que si m est un germe de mesure de Lebesgue la mesure extérieure de l'ensemble des points ou le taux d'accroissement n'est pas borné est nulle. Le lemme qui suit permet d' énoncer les résultats du lemme [10.43] page 934 sous une forme plus compacte.

Lemme 10.44 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *,* $\mathcal{T}$ *la topologie standard sur* $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels de* $\mathbb{R}$*,* $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ *la famille des sous-ensemble finis de* $\mathbb{N}$ *et* $\mathcal{T}_b$ *l'ensemble des ouverts bornés de* $\mathbb{R}$ *,* $\mathcal{P}_b(\mathbb{R})$ *la famille des sous-ensemble bornés de* $\mathbb{R}$ *et* m *un germe de mesure de Lebesgue, l'application* m^* *de* $\mathcal{P}_b(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par*

$$m^*(A) = \inf\{m(O) : A \subset O\}$$

possède les propriétés suivantes :

1. *Pour tout ensemble dénombrable* Δ *et pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *vérifiant* $a < b$ *on a* $m^*(\Delta\cap]a\ ,\ b[) = 0$
2. *Si* $(A, B) \in \mathcal{P}_b(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_b(\mathbb{R})$ *alors*
$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$$
3. *Si* $(A, B) \in \mathcal{P}_b(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_b(\mathbb{R})$ *et* $A \subset B$ *alors*
$$m^*(A) \leq m^*(B)$$
4. *Pour toute application croissante* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$
$$m^*(\{x \in]a\ ,\ b[/\Omega'_d(x) = \varnothing\}) = 0$$
5. *Pour toute application croissante* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$
$$m^*(\{x \in]a\ ,\ b[/\Omega'_g(x) = \varnothing\}) = 0$$

Preuve

1. Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $O \in \mathcal{T}_b$ tel que $\Delta \cap]a\ ,\ b[\subset O$ et $m(O) \leq \varepsilon$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et φ une application surjective de $\mathbb{N}$ dans $\Delta \cap]a\ ,\ b[$ si

$$I_n =]\varphi(n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\ ,\ \varphi(n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[\cap]a\ ,\ b[$$

alors

$$\Delta \cap]a\ ,\ b[\subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$$

par suite, puisque $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ est un ouvert borné (inclus dans $]a\ ,\ b[$)

$$m^*(\Delta \cap]a\ ,\ b[) \leq m(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k)$$

et l'inégalité (10.224) page 935 entraîne

$$m^*(\Delta \cap]a\ ,\ b[) \leq \sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} (\sum_{k \in F} m(I_k))$$

de plus l'inégalité (10.222) page 935 entraîne

$$m(I_k) \leq m(]\varphi(k) - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\ ,\ \varphi(k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}[)$$

et par l'égalité (10.223) page 935 on obtient

$$m(I_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

ainsi puisque d'après le lemme (8.6) page 217

$$\sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} (\sum_{k \in F} m(I_k) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{k=0}^{n} m(I_k)) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) \leq \varepsilon$$

on obtient

$$m^*(\Delta \cap]a\ ,\ b[) \leq \sup_{F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} (\sum_{k \in F} m(I_k)) \leq \varepsilon$$

2. On montre que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $O \in e^*(A \cup B, \mathcal{T}_b)$ tel que $m(O) \leq m^*(A) + m^*(B) + \varepsilon$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, puisque $m^*(A)$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$U^*(A) = \{x \in \mathbb{R}_+ /\ \exists\ O \in e^*(A, \mathcal{T}_b) : x = m(O)\}$$

le réel $m^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant de cet ensemble, par suite il existe $O_0 \in \mathcal{T}_b$ tel que $A \subset O_0$ et

$$m^*(A) \leq m(O_0) < m^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

de même il existe $O_1 \in \mathcal{T}_b$ tel que $B \subset O_1$ et

$$m^*(B) \leq m(O_1) < m^*(B) + \frac{\varepsilon}{2}$$

puisque $A \cup B \subset O_0 \cup O_1$ on obtient

$$m^*(A \cup B) \leq m(O_0 \cup O_1) \leq m(O_0) + m(O_1) < m^*(A) + m^*(B) + \varepsilon\ ,$$

ce qui montre que $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$.

3. Si $A \subset B$ alors $e^*(B, \mathcal{T}_b) \subset e^*(A, \mathcal{T}_b)$ par suite $U^*(B) \subset U^*(A)$ et

$$\inf\{x : x \in U^*(A)\} \leq \inf\{x : x \in U^*(B)\}$$

4. Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $O \in \mathcal{T}_b$ tel que $\Theta_d \subset O$ et $m(O) < \varepsilon$ .D'après le lemme [10.43] page 934 l'ensemble $\Theta_d = \{x \in]a\ ,\ b[/\Omega'_d(x) = \varnothing\}$ possède la propriété suivante : pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe une partition finie ou dénombrable $(I_q^\varepsilon)_{q \in D_\varepsilon}$ d'intervalles ouverts bornés inclus dans $]a\ ,\ b[$ et un ensemble fini ou dénombrable Δ_0 qui vérifient :
   (a) $\Theta_d \subset \bigcup_{q \in D_\varepsilon} I_q^\varepsilon \cup (\Delta_0 \cap]a\ ,\ b[)$
   (b) pour tout sous-ensemble fini F de D_ε
$$\sum_{q \in F} (\sup\{t : t \in I_q^\varepsilon\} - \inf\{t : t \in I_q^\varepsilon\}) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.226}$$
   Puisque d'après *1* $m^*(\Delta_0 \cap]a\ ,\ b[) = 0$ il existe $O_0 \in \mathcal{T}_b$ tel que $m(O_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\Delta \cap]a\ ,\ b[\subset O_0$. Posons $O_1 = \bigcup_{q \in D_\varepsilon} I_q^\varepsilon$ les propriétés d'un germe de mesure de Lebesgue et l'inégalité (10.226) donnent
$$m(O_1) = \sup_{F \in \mathcal{F}(D_\varepsilon)} \sum_{k \in F} m(I_k^\varepsilon) = \sup_{F \in \mathcal{F}(D_\varepsilon)} \sum_{k \in F} (\sup\{t : t \in I_k^\varepsilon\} - \inf\{t : t \in I_k^\varepsilon\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Ainsi $O_0 \cup O_1$ est un ouvert borné vérifiant $\Theta_d \subset O_0 \cup O_1$ et
$$m(O_0 \cup O_1) \leq m(O_0) + m(O_1) < \varepsilon\ .$$

5. Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $O \in \mathcal{T}_b$ tel que $\Theta_g \subset O$ et $m(O) < \varepsilon$ .D'après le lemme [10.43] page 934 l'ensemble $\Theta_g = \{x \in]a\ ,\ b[/\Omega'_g(x) = \varnothing\}$ possède la propriété suivante : pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe une partition finie ou dénombrable $(J_q^\varepsilon)_{q \in D_\varepsilon}$ d'intervalles ouverts bornés inclus dans $]a\ ,\ b[$ et un ensemble fini ou dénombrable Δ_0 qui vérifient :
   (a) $\Theta_g \subset \bigcup_{q \in D_\varepsilon} J_q^\varepsilon \cup (\Delta_0 \cap]a\ ,\ b[)$
   (b) pour tout sous-ensemble fini F de D_ε
$$\sum_{q \in F} (\sup\{t : t \in J_q^\varepsilon\} - \inf\{t : t \in J_q^\varepsilon\}) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.227}$$
   Puisque d'après *1* $m^*(\Delta_0 \cap]a\ ,\ b[) = 0$ il existe $O_0 \in \mathcal{T}_b$ tel que $m(O_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\Delta \cap]a\ ,\ b[\subset O_0$. Posons $O_1 = \bigcup_{q \in D_\varepsilon} J_q^\varepsilon$ les propriétés d'un germe de mesure de Lebesgue et l'inégalité (10.227) donnent
$$m(O_1) = \sup_{F \in \mathcal{F}(D_\varepsilon)} \sum_{k \in F} m(J_k^\varepsilon) = \sup_{F \in \mathcal{F}(D_\varepsilon)} \sum_{k \in F} (\sup\{t : t \in J_k^\varepsilon\} - \inf\{t : t \in J_k^\varepsilon\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Ainsi $O_0 \cup O_1$ est un ouvert borné vérifiant $\Theta_g \subset O_0 \cup O_1$ et
$$m(O_0 \cup O_1) \leq m(O_0) + m(O_1) < \varepsilon\ .$$

■

On construit maintenant la mesure de Lebesgue.

10.13 *Mesure de Lebesgue*

10.13.1 *Introduction*

On ne peut plus bosser au $21^{\text{ième}}$ siècle sans essayer de comprendre un minimum de ce qu'a fait Lebesgue à la fin du $19^{\text{ième}}$ et au début du $20^{\text{ième}}$. La définition qui suit utilise les notions introduites par la définition [10.14] page 661

Définition 10.68 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq\ )$ *un corps de réels ,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *une famille non vide de sous-ensembles de* $\mathbb{R}$ *Une application* $m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{F} \cup \{\varnothing\}, \mathbb{R})$ *est dite* ***additive*** *sur* $\mathcal{F}$ *si* $m(\varnothing) = 0$ *et si pour toute partition finie* P *en éléments de* $\mathcal{F}$ *vérifiant* $\bigcup_{F \in \mathrm{P}} F \in \mathcal{F}$ *on a*

$$m(\bigcup_{F\in \mathrm{P}} F) = \sum_{F \in \mathrm{P}} m(F)$$

Dans cette section on utilise les notations suivantes :

Notation 10.5 *Si* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *est un corps de réels on note* $\mathcal{I}_b$ *la famille des intervalles bornés de* $\mathbb{R}$ *et* $\mathcal{I}_b^*$ *la famille des intervalles bornés de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point .*

— *L'application* α *de* $\mathcal{I}_b$ *dans* $\mathbb{R}$ *est définie par*

$$\alpha(I) = \inf\{t : t \in I\}$$

— *L'application* β *de* $\mathcal{I}_b$ *dans* $\mathbb{R}$ *est définie par*

$$\beta(I) = \sup\{t : t \in I\}$$

— *L'application* l *de* $\mathcal{I}_b \cup \{\varnothing\}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *est définie par*

$$l(\varnothing) = 0 \quad \text{et} \quad l(I) = \sup\{t : t \in I\} - \inf\{t : t \in I\} = \beta(I) - \alpha(I)$$

10.13.2 *Additivité de la longueur sur les intervalles bornés*

Le point délicat de la théorie de Lebesgue est de montrer que l est additive sur $\mathcal{I}_b \cup \{\varnothing\}$ au sens de la définition [10.68] page 939 , pour fixer le problème on commence par montrer que l est additive sur $\mathcal{I}_b^* \cup \{\varnothing\}$. Le lemme qui suit utilise les notations et résultats du lemme [10.12] page 662

Lemme 10.45 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{I}_b^*$ *l'ensemble des intervalles bornés de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point ,* $\mathbf{P}_f(\mathcal{I}_b^*)$ *l'ensemble des partitions finies en éléments de* $\mathcal{I}_b^*$ *.*

(i) Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbf{P}_f(\mathcal{I}_b^*)$ *l'application* α *de* P *dans* $\mathbb{R}$ *est injective sur* P *:*

$$[(I,J) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P} \quad \text{et} \quad \alpha(I) = \alpha(J)] \Rightarrow I = J$$

(ii) Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbf{P}_f(\mathcal{I}_b^*)$ *la relation*

$$O = \{(I,J) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P} / \alpha(I) \leq \alpha(J)\}$$

est un bon ordre sur P*. En particulier si* $\mathrm{Card}(\mathrm{P}) = n+1$ *il existe une unique bijection strictement croissante* $k \to I_k$ *de* $(\mathbb{N}_n, \leq)$ *dans* $(\mathrm{P}\ , O)$*. Cette application vérifie les propriétés suivantes :*

1. $$\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I = \bigcup_{k=0}^{n} I_k$$

2. *si $n \geq 1$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a*

$$\alpha(I_k) < \beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1}) < \beta(I_{k+1})$$

En particulier pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}_{n-1} \times \mathbb{N}_{n-1}$ vérifiant $0 < p < q$

$$\alpha(I_0) < \beta(I_0) \leq \alpha(I_p) < \beta(I_p) \leq \alpha(I_q) < \beta(I_q) \leq \alpha(I_n) < \beta(I_n) \tag{10.228}$$

3. $$\alpha(I_0) = \inf\{t : t \in \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I\} \quad \text{et} \quad \beta(I_n) = \sup\{t : t \in \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I\}$$

4. *s'il existe $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $\beta(I_k) < \alpha(I_{k+1})$ alors*

$$]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\subset \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_n} I_k\right)^c$$

5. *si $n \geq 1$ et si $\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I$ est un intervalle alors pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$*

$$\alpha(I_{k+1}) = \beta(I_k)$$

(iii) L'application l de $\mathcal{I}_b \cup \{\varnothing\}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$l(\varnothing) = 0 \quad \text{et} \quad l(I) = \sup\{t : t \in I\} - \inf\{t : t \in I\}$$

est additive sur $\mathcal{I}_b^* \cup \{\varnothing\}$

Preuve

(i)

On montre que si $\alpha(I) = \alpha(J)$ on a $I \cap J \neq \varnothing$. Puisque par hypothèse I et J ne sont pas réduit à un point on a $\alpha(I) < \beta(I)$ et $\alpha(J) < \beta(J)$ ainsi l'égalité $\alpha(I) = \alpha(J)$ montre que $\min\{\beta(I), \beta(J)\} > \alpha(I)$ et

$$]\alpha(I)\ ,\ \min\{\beta(I), \beta(J)\}[\subset]\alpha(I)\ ,\ \beta(I)[\cap]\alpha(J)\ ,\ \beta(J)[\subset I \cap J$$

ainsi $I \cap J \neq \varnothing$ et puisque P est une partition cela implique $I = J$.

(ii)

I On montre que O est un bon ordre sur P

1. La réflexivité s'écrit $\inf\{t : t \in I\} = \inf\{t : t \in I\}$
2. Transitivité : si $(I,J) \in O$ et $(J,L) \in O$ alors $\alpha(I) \leq \alpha(J) \leq \alpha(L)$ par suite $(I,L) \in O$
3. Antisymétrie : Si $(I,J) \in O$ et $(J,I) \in O$ alors $\alpha(I) = \alpha(J)$ et (i) montre que $I = J$

Ceci montre que O est un ordre sur P , pour montrer que c'est un bon ordre il faut encore montrer que tout sous-ensemble non vide de P possède un élément minimal pour cet ordre. Mais si $F \subset \mathrm{P}$ alors F est fini comme sous-ensemble d'un ensemble fini, ainsi le point (v) du lemme [6.1] page 133 montre que α atteint son minimum sur F : il existe $I_* \in F$ tel que

$$\alpha(I_*) = \min\{\alpha(I) : I \in F\}$$

Un tel I_* est le minimum de F pour l'ordre O. Puisque (P, O) est bien ordonné de cardinal $n+1$ le point (ii) du lemme [6.1] page 133 montre qu'il existe un unique bijection strictement croissante de $(\mathbb{N}_n, \leq)$ dans (P, O), qu'on note $k \to I_k$.

II On montre que $k \to I_k$ vérifie *1* à *4*

1. On montre que $\bigcup_{I\in \mathrm{P}} I = \bigcup_{k=0}^{n} I_k$

   (a) $\bigcup_{I\in \mathrm{P}} I \subset \bigcup_{k=0}^{n} I_k$

   Si $x \in \bigcup_{I\in \mathrm{P}} I$ il existe $I_x \in \mathrm{P}$ tel que $x \in I_x$, $k \to I_k$ étant bijective il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $I_x = I_k$ ainsi $x \in I_k$, par suite $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ et $\bigcup_{I\in \mathrm{P}} I \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$

   (b) On montre $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k \subset \bigcup_{I\in \mathrm{P}} I$

   Si $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ il existe $k_x \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in I_{k_x}$ puisque $I_{k_x} \in \mathrm{P}$ on a $x \in \bigcup_{I\in \mathrm{P}} I$.

2. On montre que pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $\alpha(I_k) < \beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1}) < \beta(I_{k+1})$
   D'abord puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ l'intervalle I_k n'est pas réduit à un élément on a $\alpha(I_k) < \beta(I_k)$, il suffit de montrer que $\beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1})$. D'abord puisque par construction $(I_k, I_{k+1}) \in O$ on a $\alpha(I_k) \leq \alpha(I_{k+1})$, par suite si $\alpha(I_{k+1}) < \beta(I_k)$ alors

   $$]\alpha(I_{k+1})\ ,\ \min\{\beta(I_k), \beta(I_{k+1})\}[\subset I_k \cap I_{k+1}$$

   et par construction $I_k \cap I_{k+1} = \varnothing$.

3. On montre $\alpha(I_0) = \inf\{t : t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k\}$ et $\beta(I_n) = \sup\{t : t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k\}$

   — $\alpha(I_0)$ est un minorant de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ puisque si $t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $t \in I_k$ la croissance de $k \to I_k$ pour l'ordre O montre que $(I_0, I_k) \in O$ par suite $\alpha(I_0) \leq \alpha(I_k) \leq t$
   — $\alpha(I_0)$ est le plus grand minorant de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ puisque si $t > \alpha(I_0)$ alors t n'est pas un minorant de I_0
   — $\beta(I_n)$ est un majorant de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ puisque si $t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $t \in I_k$, si $k = n$ on a $t \leq \beta(I_n)$ et si $k < n$ alors 2 montre que $t \leq \beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1}) < \beta(I_n)$
   — $\beta(I_n)$ est le plus petit majorant de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ puisque si $t < \beta(I_n)$ alors t n'est pas un majorant de I_n

4. On montre que si $\beta(I_k) < \alpha(I_{k+1})$ alors pour tout $q \in \mathbb{N}_n$ on a $]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\cap I_q = \varnothing$. Ceci est une conséquence directe des inégalités [10.228] page 940 En effet
   — si $q < k$ on a $\alpha(I_q) < \beta(I_q) \leq \alpha(I_k) < \beta(I_k)$ par suite

   $$t \in]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\Rightarrow t > \beta(I_q) \Rightarrow t \in I_q^c$$

   — si $q = k$ on a

   $$t \in]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\Rightarrow t > \beta(I_k) \Rightarrow t \in I_k^c$$

   — si $q = k + 1$ on a

   $$t \in]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\Rightarrow t < \alpha(I_{k+1}) \Rightarrow t \in I_{k+1}^c$$

— si $q > k+1$ alors $\alpha(I_{k+1}) < \beta(I_{k+1}) \leq \alpha(I_q)$ par suite

$$t \in]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\Rightarrow t < \alpha(I_q) \Rightarrow t \in I_q^c$$

5. On montre que si $\bigcup_{k=0}^{n} I_k$ est un intervalle alors pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $\alpha(I_{k+1}) = \beta(I_k)$

   On pose $J = \bigcup_{k=0}^{n} I_k$. D'abord d'après les inégalités [10.228] page 940 on a $\beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1})$, mais si l'inégalité $\beta(I_k) < \alpha(I_{k+1})$ est vérifiée alors le point *4* montre que $]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\subset J^c$, ce qui contredit la convexité de J . En effet si J est convexe alors
   - Pour tout $(s,t) \in I_k \times I_{k+1}$ on a $[s\ ,\ t] \subset J$, en particulier pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'inégalité $\varepsilon < \min\{\beta(I_k) - \alpha(I_k), \beta(I_{k+1}) - \alpha(I_{k+1})\}$ on a $[\beta(I_k) - \varepsilon\ ,\ \alpha(I_{k+1}) + \varepsilon] \subset J$ ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $(\beta(I_k), \alpha(I_{k+1})) \in J \times J$
   - puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $(\beta(I_k), \alpha(I_{k+1})) \in J \times J$ on obtient $]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\subset J$

   Ainsi l'assertion $\beta(I_k) < \alpha(I_{k+1})$ entraîne que J n'est pas un intervalle. Par suite si J est un intervalle on obtient

$$\beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1}) \leq \beta(I_k)\ .$$

(iii)

Il s'agit de montrer que si $\mathrm{P} \subset \mathcal{I}_b^*$ est une partition finie tel que $\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I \in \mathcal{I}_b^*$ alors

$$l(\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I) = \sum_{I \in \mathrm{P}} l(I)$$

mais d'après *(ii)* si P est une partition de cardinal $n+1$ tel que $\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I \in \mathcal{I}_b^*$ il existe une bijection $k \to I_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans P qui vérifie

$$\alpha(I_{k+1}) = \inf\{t : t \in I_{k+1}\} = \beta(I_k) = \sup\{t : t \in I_k\} \tag{10.229}$$

avec

$$\alpha(I_0) = \inf\{t : t \in \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I\} \quad \text{et} \quad \beta(I_n) = \sup\{t : t \in \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I\}\ . \tag{10.230}$$

Puisque par définition d'une somme finie (voir lemme [8.5] page 209)

$$\sum_{I \in \mathrm{P}} l(I) = \sum_{k=0}^{n} l(I_k)$$

il suffit de montrer

$$\sum_{k=0}^{n} (\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_n) - \alpha(I_0) = \beta(J) - \alpha(J) = l(J).$$

Pour cela on pose

$$U = \{j \in \mathbb{N}_n / \sum_{k=0}^{j} (\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_j) - \alpha(I_0)\}$$

et en suivant le lemme [5.10] page 111 On montre que $U = \mathbb{N}_n$ en vérifiant

1. $0 \in U$
2. $[j \in U \quad \text{et} \quad j < n] \Rightarrow j+1 \in U$

1. L'assertion $0 \in U$ provient de l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_0) - \alpha(I_0)$

2. si $j \in U$ alors

$$\sum_{k=0}^{j}(\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_j) - \alpha(I_0)$$

par suite

$$\sum_{k=0}^{j+1}(\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_j) - \alpha(I_0) + \beta(I_{j+1}) - \alpha(I_{j+1})$$

et l'égalité (10.229) page 942 $(\alpha(I_{j+1}) = \beta(I_j))$ donne

$$\sum_{k=0}^{j+1}(\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_{j+1}) - \alpha(I_0)$$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et l est additive sur $\mathcal{I}_b^*$ ■

Ainsi la seule difficulté consiste à exhiber une procédure logique permettant de classer une famille d'intervalles ≪ du plus à gauche au plus à droite ≫. la définition suivante permet d'alléger les énoncés.

Définition 10.69 *Si* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *est un corps de réels on note* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{I}_b$ *la famille des intervalles bornés de* $\mathbb{R}$*. Un sous-ensemble fini* $\mathrm{F} \subset \mathcal{I}_b$ *est dit* ***admissible*** *si* $\mathrm{Card}(F) = 1$ *ou s'il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *et une bijection* $I \in \mathrm{B}(\mathbb{N}_n, \mathrm{F})$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

$$k \in \mathbb{N}_{n-1} \Rightarrow \alpha(I_{k+1}) = \inf\{t : t \in I_{k+1}\} = \beta(I_k) = \sup\{t : t \in I_k\} \tag{10.231}$$

et

$$\alpha(I_0) = \inf\{t : t \in I_0\} = \inf\{t : t \in \bigcup_{I \in \mathrm{F}} I\} \quad \text{et} \quad \beta(I_n) = \sup\{t : t \in I_n\} = \sup\{t : t \in \bigcup_{I \in \mathrm{F}} I\}\ . \tag{10.232}$$

Le lemme [10.45] page 939 montre que si P est une partition finie en éléments de $\mathcal{I}_b^*$ qui vérifie $\displaystyle\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I \in \mathcal{I}_b$ alors P est admissible, le théorème qui suit montre que c'est aussi vrai si P est une partition finie en élément de $\mathcal{I}_b$ qui vérifie $\displaystyle\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I \in \mathcal{I}_b$. On y utilise encore les notations [10.5] page 939 .

Théorème 10.25 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{I}_b$ *l'ensemble des intervalles bornés de* $\mathbb{R}$*,* $\mathbf{P}(\mathcal{I}_b)$ *l'ensemble des partitions en éléments de* $\mathcal{I}_b$*,* $\mathbf{P}_f(\mathcal{I}_b)$ *l'ensemble des partitions finies en éléments de* $\mathcal{I}_b$ *.*

(i) La relation $O_{\mathbf{lex}}$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$O_{\mathbf{lex}} = \{[(a,b),(c,d)] \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 / a < c \quad \text{ou} \quad [a = c \quad \text{et} \quad b \leq d]\}$$

est un ordre total sur $\mathbb{R}^2$ *(appelé l'ordre lexicographique)*

(ii) Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbf{P}(\mathcal{I}_b)$ *l'application* φ *de* P *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\varphi(I) = (\alpha(I), \beta(I))$$

est injective sur P *:*

$$[(I,J) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P} \quad \text{et} \quad \varphi(I) = \varphi(J)] \Rightarrow I = J$$

(iii) Si $\mathrm{P} \subset \mathcal{I}_b$ *est une partition la relation* O *sur* P *définie par*

$$O = \{(I,J) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P} / [(\alpha(I), \beta(I)), (\alpha(J), \beta(J))] \in O_{\mathbf{lex}}\}$$

est un ordre total sur P *. De plus si* P *est finie* O *est un bon ordre sur* P*. En particulier pour toute partition finie* $\mathrm{P} \subset \mathcal{I}_b$ *de cardinal* $n+1$ *il existe une unique bijection* $k \to I_k$ *de* $\mathbb{N}_n$ *dans* P *qui vérifie : pour tout* $(p,q) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ *tel que* $p < q$

$$[(\alpha(I_p), \beta(I_p)), (\alpha(I_q), \beta(I_q)] \in O_{\mathbf{lex}} \tag{10.233}$$

(iv) Si $\mathrm{P} \subset \mathcal{I}_b$ *est une partition finie et si* $\mathrm{Card}(\mathrm{P}) = n+1$ *l'unique bijection strictement croissante* $k \to I_k$ *de* $(\mathbb{N}_n, \leq)$ *dans* $(\mathrm{P}\ , O)$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1. $$\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I = \bigcup_{k=0}^{n} I_k$$

2. *si* $n \geq 1$ *alors pour tout* $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ *on a*

$$\alpha(I_k) \leq \beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1}) \leq \beta(I_{k+1})$$

En particulier pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}_{n-1} \times \mathbb{N}_{n-1}$ *vérifiant* $0 < p < q$

$$\alpha(I_0) \leq \beta(I_0) \leq \alpha(I_p) \leq \beta(I_p) \leq \alpha(I_q) \leq \beta(I_q) \leq \alpha(I_n) \leq \beta(I_n) \tag{10.234}$$

3. $$\alpha(I_0) = \inf\{t : t \in \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I\} \quad \text{et} \quad \beta(I_n) = \sup\{t : t \in \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I\}$$

4. *s'il existe* $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ *tel que* $\beta(I_k) < \alpha(I_{k+1})$ *alors*

$$]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\subset \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_n} I_k \right)^c$$

5. *si* $n \geq 1$ *et si* $\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I$ *est un intervalle alors pour tout* $k \in \mathbb{N}_{n-1}$

$$\alpha(I_{k+1}) = \beta(I_k)$$

6. *si* $\mathrm{P} \subset \mathcal{I}_b$ *est une partition finie telle que* $\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I$ *est un intervalle alors* P *est admissible*

(v) L'application l *de* $\mathcal{I}_b \cup \{\varnothing\}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par*

$$l(\varnothing) = 0 \quad \text{et} \quad l(I) = \sup\{t : t \in I\} - \inf\{t : t \in I\}$$

est additive sur $\mathcal{I}_b \cup \{\varnothing\}$

Preuve

(i)

On montre que $O_{\mathbf{lex}}$ est un ordre.

1. La réflexivité est claire ($a = a$ et $b \leq b$).
2. transitivité : si $[(a,b),(c,d)] \in O_{\mathbf{lex}}$ et $[(c,d),(e,f)] \in O_{\mathbf{lex}}$ alors
   — si $a < c$ et $c < e$ alors $a < e$ par suite $[(a,b),(e,f)] \in O_{\mathbf{lex}}$
   — si $a = c$ et $c < e$ alors $a < e$ par suite $[(a,b),(e,f)] \in O_{\mathbf{lex}}$
   — si $a = c = e$ alors $b \leq d \leq f$ et $[(a,b),(e,f)] \in O_{\mathbf{lex}}$
3. antisymétrie : il s'agit de montrer que si $[(a,b),(c,d)] \in O_{\mathbf{lex}}$ et $[(c,d),(a,b)] \in O_{\mathbf{lex}}$ alors $a = c$ et $b = d$.

— puisque l'assertion $[(a,b),(c,d)] \in O_{\mathbf{lex}}$ entraîne $a \leq c$ on a

$$[(a,b),(c,d)] \in O_{\mathbf{lex}} \quad \text{et} \quad [(c,d),(a,b)] \in O_{\mathbf{lex}} \Rightarrow a \leq c \leq a \Rightarrow a = c$$

il suffit donc de montrer que si $[(a,b),(a,d)] \in O_{\mathbf{lex}}$ et $[(a,d),(a,b)] \in O_{\mathbf{lex}}$ alors $b = d$

— puisque l'assertion $[(a,b),(a,d)] \in O_{\mathbf{lex}}$ entraîne $b \leq d$ on a

$$[(a,b),(a,d)] \in O_{\mathbf{lex}} \quad \text{et} \quad [(a,d),(a,b)] \in O_{\mathbf{lex}} \Rightarrow b \leq d \leq b \Rightarrow b = d$$

Ceci montre que $O_{\mathbf{lex}}$ est un ordre, pour montrer qu'il est total il faut encore montrer que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ alors $[(a,b),(c,d)] \in O_{\mathbf{lex}}$ ou $[(c,d),(a,b)] \in O_{\mathbf{lex}}$ or :

— si $a < c$ alors $[(a,b),(c,d)] \in O_{\mathbf{lex}}$

— si $c < a$ alors $[(c,d),(a,b)] \in O_{\mathbf{lex}}$

— si $a = c$ et $b \leq d$ alors $[(a,b),(c,d)] \in O_{\mathbf{lex}}$

— si $a = c$ et $d \leq b$ alors $[(c,d),(a,b)] \in O_{\mathbf{lex}}$

On vient donc de voir que l'ordre lexicographique est un ordre total.

(ii)

Il s'agit de montrer que si $(I,J) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}$ vérifie

$$\alpha(I) = \alpha(J) \quad \text{et} \quad \beta(I) = \beta(J) \tag{10.235}$$

alors $I = J$ or :

— si I et J sont réduit à un seul élément les égalités (10.235) page 945 montrent que

$$I = \{\alpha(I)\} = \{\beta(I)\} = \{\alpha(J)\} = J = \{\beta(J)\}$$

— si I n'est pas réduit à un élément alors $\alpha(I) < \beta(I)$ et égalités (10.235) page 945 montrent que J n'est pas réduit à un élément et que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varepsilon < \beta(I) - \alpha(I)$ on a $]\alpha(J)\ ,\ \alpha(J) + \varepsilon[\subset I \cap J$. P étant une partition, l'assertion $I \cap J \neq \varnothing$ implique $I = J$

— si J n'est pas réduit à un élément alors $\alpha(J) < \beta(J)$ et égalités (10.235) page 945 montrent que I n'est pas réduit à un élément et il suffit de revenir à l'épisode précédent.

(iii)

1. La réflexivité de O provient de la réflexivité de $O_{\mathbf{lex}}$
2. La transitivité de O provient de la transitivité de $O_{\mathbf{lex}}$
3. L'antisymétrie de O provient de l'antisymétrie de $O_{\mathbf{lex}}$ et de l'injectivité de φ.
4. La totalité de l'ordre O provient de la totalité de l'ordre $O_{\mathbf{lex}}$

Ceci montre que O est un ordre total sur P, le point (i) du lemme [6.1] page 133 montre que si P est fini alors (P, O) est bien ordonné. En particulier si $\mathrm{Card}(\mathrm{P}) = n + 1$ le point (ii) du lemme [6.1] page 133 montre qu'il existe une unique bijection strictement croissante $k \to I_k$ de $(\mathbb{N}_n, \leq)$ dans (P, O) et (10.233) page 944 n'est que la traduction de cette croissance.

(iv)

1. On montre que $\displaystyle\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I = \bigcup_{k=0}^{n} I_k$

   (a) $\displaystyle\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I \subset \bigcup_{k=0}^{n} I_k$

   Si $x \in \displaystyle\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I$ il existe $I_x \in \mathrm{P}$ tel que $x \in I_x$, $k \to I_k$ étant bijective il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $I_x = I_k$ ainsi $x \in I_k$, par suite $x \in \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}_n} I_k$ et $\displaystyle\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}_n} I_k$

(b) On montre $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k \subset \bigcup_{I\in\mathrm{P}} I$

Si $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ il existe $k_x \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in I_{k_x}$ puisque $I_{k_x} \in \mathrm{P}$ on a $x \in \bigcup_{I\in\mathrm{P}} I$.

2. On montre que pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $\alpha(I_k) \leq \beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1}) \leq \beta(I_{k+1})$
Il suffit de montrer que $\beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1})$. Puisque $I_k \neq I_{k+1}$ d'après (ii) on a

$$\alpha(I_k) \neq \alpha(I_{k+1}) \quad \text{ou} \quad \beta(I_k) \neq \beta(I_{k+1})$$

(a) Si $\alpha(I_{k+1}) \neq \alpha(I_k)$ il résulte de l'inégalité $(I_k, I_{k+1}) \in O$ que $\alpha(I_k) < \alpha(I_{k+1})$ ainsi l'inégalité $\alpha(I_{k+1}) < \beta(I_k)$ entraîne $\alpha(I_{k+1}) \in]\alpha(I_k)\ ,\ \beta(I_k)[$ par suite $\alpha(I_{k+1}) \in I_k$ et puisque par construction $I_k \cap I_{k+1} = \varnothing$ on a $\alpha(I_{k+1}) \notin I_{k+1}$ ainsi l'intervalle I_{k+1} est de l'une des formes $I_{k+1} =]\alpha(I_{k+1})\ ,\ \beta(I_{k+1})]$ ou $I_{k+1} =]\alpha(I_{k+1})\ ,\ \beta(I_{k+1})[$ en particulier si $\alpha(I_{k+1}) < \beta(I_k)$ alors

$$]\alpha(I_{k+1})\ ,\ \beta(I_k)[\subset I_k \cap I_{k+1}$$

et par construction $I_k \cap I_{k+1} = \varnothing$. Ainsi l'assertion $\alpha(I_{k+1}) \neq \alpha(I_k)$ entraîne $\beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1})$.

(b) si $\alpha(I_{k+1}) = \alpha(I_k)$ alors $\beta(I_k) \neq \beta(I_{k+1})$ (sinon $I_k = I_{k+1}$) et il résulte de l'inégalité $(I_k, I_{k+1}) \in O$ que $\beta(I_k) < \beta(I_{k+1})$ ainsi l'inégalité $\alpha(I_{k+1}) < \beta(I_k)$ entraîne que $\beta(I_k) \in]\alpha(I_{k+1})\ ,\ \beta(I_{k+1})[$ par suite $\beta(I_k) \in I_{k+1}$ et puisque par construction $I_k \cap I_{k+1} = \varnothing$ on a $\beta(I_k) \notin I_k$ ainsi l'intervalle I_k est de la forme $I_k =]\alpha(I_k)\ ,\ \beta(I_k)[$ ou $I_k = [\alpha(I_k)\ ,\ \beta(I_k)[$. en particulier si $\alpha(I_{k+1}) < \beta(I_k)$ alors

$$]\alpha(I_{k+1})\ ,\ \beta(I_k)[\subset I_k \cap I_{k+1}$$

et par construction $I_k \cap I_{k+1} = \varnothing$. Ainsi l'assertion $\alpha(I_{k+1}) = \alpha(I_k)$ entraîne aussi l'inégalité $\beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1})$.

3. On montre $\alpha(I_0) = \inf\{t : t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k\}$ et $\beta(I_n) = \sup\{t : t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k\}$

— $\alpha(I_0)$ est un minorant de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ puisque si $t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $t \in I_k$ la croissance de $k \to I_k$ pour l'ordre O montre que $(I_0, I_k) \in O$ par suite $\alpha(I_0) \leq \alpha(I_k) \leq t$

— $\alpha(I_0)$ est le plus grand minorant de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ puisque si $t > \alpha(I_0)$ alors t n'est pas un minorant de I_0

— $\beta(I_n)$ est un majorant de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ puisque si $t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $t \in I_k$, si $k = n$ on a $t \leq \beta(I_n)$ et si $k < n$ alors 2 montre que $t \leq \beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1}) \leq \beta(I_n)$

— $\beta(I_n)$ est le plus petit majorant de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} I_k$ puisque si $t < \beta(I_n)$ alors t n'est pas un majorant de I_n

4. On montre que si $\beta(I_k) < \alpha(I_{k+1})$ alors pour tout $q \in \mathbb{N}_n$ on a $]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\cap I_q = \varnothing$. Ceci est une conséquence directe des inégalités [10.234] page 944 En effet

— si $q < k$ on a $\alpha(I_q) \leq \beta(I_q) \leq \alpha(I_k) \leq \beta(I_k)$ par suite

$$t \in]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\Rightarrow t > \beta(I_q) \Rightarrow t \in I_q^c$$

— si $q = k$ on a

$$t \in]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\Rightarrow t > \beta(I_k) \Rightarrow t \in I_k^c$$

— si $q = k+1$ on a

$$t \in]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\Rightarrow t < \alpha(I_{k+1}) \Rightarrow t \in I_{k+1}^c$$

— si $q > k+1$ alors $\alpha(I_{k+1}) \leq \beta(I_{k+1}) \leq \alpha(I_q)$ par suite

$$t \in]\beta(I_k) \ , \ \alpha(I_{k+1})[\Rightarrow t < \alpha(I_q) \Rightarrow t \in I_q^c$$

5. On montre que si $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} I_k$ est un intervalle alors pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $\alpha(I_{k+1}) = \beta(I_k)$

   On pose $J = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} I_k$. D'abord d'après les inégalités [10.234] page 944 on a $\beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1})$, mais si l'inégalité $\beta(I_k) < \alpha(I_{k+1})$ est vérifiée alors le point *4* montre que $]\beta(I_k) \ , \ \alpha(I_{k+1})[\subset J^c$, ce qui contredit la convexité de J . Il suffit d'établir que la convexité de J entraîne que pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $(\alpha(I_{k+1}), \beta(I_k)) \in J \times J$. il est clair que si $\alpha(I_{k+1}) \in I_{k+1}$ et $\beta(I_k) \in I_k$ on a $(\alpha(I_{k+1}), \beta(I_k)) \in J \times J$ il suffit donc de montrer les points suivants

   (a) $\alpha(I_{k+1}) \notin I_{k+1} \Rightarrow \alpha(I_{k+1}) \in J$

   (b) $\beta(I_k) \notin I_k \Rightarrow \beta(I_k) \in J$

   (a) si $\alpha(I_{k+1}) \notin I_{k+1}$ alors l'intervalle I_{k+1} est de l'une des formes $I_{k+1} =]\alpha(I_{k+1}) \ , \ \beta(I_{k+1})]$ ou $I_{k+1} =]\alpha(I_{k+1}) \ , \ \beta(I_{k+1})[$ en particulier I_{k+1} n'est pas réduit à un élément et

   $$]\alpha(I_{k+1}) \ , \ \beta(I_{k+1})[\subset I_{k+1} \subset J \tag{10.236}$$

   par suite

   — si I_k est réduit à un seul élément alors $I_k = \{\beta(I_k)\}$ et l'inclusion $I_k \subset J$ montre que $\beta(I_k) \in J$ et les inclusions (10.236) montrent que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varepsilon < \beta(I_{k+1}) - \alpha(I_{k+1})$ on a $\alpha(I_{k+1}) + \varepsilon \in J$ et puisque J est un intervalle cela entraîne $[\beta(I_k) \ , \ \alpha(I_{k+1}) + \varepsilon] \subset J$ et en particulier $\alpha(I_{k+1}) \in J$.

   — si I_k n'est pas réduit à un élément pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'inégalité

   $$\varepsilon < \min\{\beta(I_k) - \alpha(I_k), \beta(I_{k+1}) - \alpha(I_{k+1})\}$$

   on a, puisque $\beta(I_k) - \varepsilon \in I_k$ et $\alpha(I_{k+1}) + \varepsilon \in I_{k+1}$ et J est un intervalle,

   $$[\beta(I_k) - \varepsilon \ , \ \alpha(I_{k+1}) + \varepsilon] \subset J$$

   ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $(\beta(I_k), \alpha(I_{k+1})) \in J \times J$

   (b) si $\beta(I_k) \notin I_k$ alors l'intervalle I_k est de la forme $I_k = [\alpha(I_k) \ , \ \beta(I_k)[$ ou $I_k =]\alpha(I_k) \ , \ \beta(I_k)[$ en particulier I_k n'est pas réduit à un élément et

   $$]\alpha(I_k) \ , \ \beta(I_k)[\subset I_k \subset J \tag{10.237}$$

   par suite

   — si I_{k+1} est réduit à un seul élément alors $I_{k+1} = \{\alpha(I_{k+1})\}$ et l'inclusion $I_{k+1} \subset J$ montre que $\alpha(I_{k+1}) \in J$ et les inclusions (10.237) montrent que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'inégalité $\varepsilon < \beta(I_k) - \alpha(I_k)$ on a $\beta(I_k) - \varepsilon \in J$ et puisque J est un intervalle cela entraîne

   $$[\beta(I_k) - \varepsilon \ , \ \alpha(I_{k+1})] \subset J$$

   et en particulier $\beta(I_k) \in J$.

   — si I_{k+1} n'est pas réduit à un élément pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'inégalité

   $$\varepsilon < \min\{\beta(I_k) - \alpha(I_k), \beta(I_{k+1}) - \alpha(I_{k+1})\}$$

   on a, puisque $\beta(I_k) - \varepsilon \in I_k$ et $\alpha(I_{k+1}) + \varepsilon \in I_{k+1}$ et J est un intervalle,

   $$[\beta(I_k) - \varepsilon \ , \ \alpha(I_{k+1}) + \varepsilon] \subset J$$

   ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $(\beta(I_k), \alpha(I_{k+1})) \in J \times J$

puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ on a $(\beta(I_k), \alpha(I_{k+1})) \in J \times J$ on obtient $[\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})] \subset J$ ce qui contredit l'assertion $]\beta(I_k)\ ,\ \alpha(I_{k+1})[\subset J^c$ Ainsi l'assertion $\beta(I_k) < \alpha(I_{k+1})$ entraîne que J n'est pas un intervalle. Par suite si J est un intervalle on obtient

$$\beta(I_k) \leq \alpha(I_{k+1}) \leq \beta(I_k)\ .$$

6. Les égalités (10.231) page 943 sont établies en *5* et Les égalités (10.232) page 943 sont établies en *3*.

(v)

Il s'agit de montrer que si $\mathrm{P} \subset \mathcal{I}_b$ est une partition finie telle que $\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I \in \mathcal{I}_b$ alors

$$l(\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I) = \sum_{I \in \mathrm{P}} l(I)$$

mais d'après (iv) si P est une partition de cardinal $n+1$ tel que $\bigcup_{I \in \mathrm{P}} I \in \mathcal{I}_b$ il existe une bijection $k \to I_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans P qui vérifie

$$\alpha(I_{k+1}) = \inf\{t : t \in I_{k+1}\} = \beta(I_k) = \sup\{t : t \in I_k\} \tag{10.238}$$

avec

$$\alpha(I_0) = \inf\{t : t \in \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I\} \quad \text{et} \quad \beta(I_n) = \sup\{t : t \in \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I\}\ . \tag{10.239}$$

Puisque par définition d'une somme finie (voir lemme [8.5] page 209)

$$\sum_{I \in \mathrm{P}} l(I) = \sum_{k=0}^{n} l(I_k)$$

il suffit de montrer

$$\sum_{k=0}^{n} (\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_n) - \alpha(I_0) = \beta(J) - \alpha(J) = l(J).$$

Pour cela on pose

$$U = \{j \in \mathbb{N}_n / \sum_{k=0}^{j} (\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_j) - \alpha(I_0)\}$$

et en suivant le lemme [5.10] page 111 on montre que $U = \mathbb{N}_n$ en vérifiant

1. $0 \in U$
2. $[j \in U \quad \text{et} \quad j < n] \Rightarrow j+1 \in U$

1. L'assertion $0 \in U$ provient de l'égalité $\sum_{k=0}^{0} (\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_0) - \alpha(I_0)$
2. si $j \in U$ alors

$$\sum_{k=0}^{j} (\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_j) - \alpha(I_0)$$

par suite

$$\sum_{k=0}^{j+1} (\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_j) - \alpha(I_0) + \beta(I_{j+1}) - \alpha(I_{j+1})$$

et l'égalité (10.238) page 948 $(\alpha(I_{j+1}) = \beta(I_j))$ donne

$$\sum_{k=0}^{j+1}(\beta(I_k) - \alpha(I_k)) = \beta(I_{j+1}) - \alpha(I_0)$$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et l est additive sur $\mathcal{I}_b$ ■

Le théorème [10.25] page 943 permet d'aborder sereinement la construction de la mesure de Lebesgue. En effet on peut facilement prolonger toute application additive sur $\mathcal{I}_b \cup \{\varnothing\}$ en une application additive sur la famille $\mathfrak{a}(\mathcal{I}_b)$ des sommes disjointes finies d'intervalles bornés (pour les définitions et notations on peut se reporter à [10.14] page 661). Il est naturel d'étendre la fonction l à des ensembles plus généraux que les réunions finies d'intervalles sans violer l'additivité de l sur la classe d'ensembles sur lequel le prolongement est fait. Les méthodes de prolongement d'une fonction additive à des classes d'ensembles suffisamment vastes sont rentrées sous le terme de « théorie de la mesure » .

10.13.3 *Extension additive de la longueur au semi-anneau de Boole engendré par les intervalles bornés*

Le théorème qui suit permettra de prolonger la fonction l en une fonction additive sur une vaste classe d'ensembles bornés de $\mathbb{R}$. On y utilise les résultats et notations du lemme [10.12] page 662.

Théorème 10.26 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{I}_b$ *l'ensemble des intervalles bornés de* $\mathbb{R}$*,* $\mathbf{P}(\mathcal{I}_b)$ *l'ensemble des partitions en éléments de* $\mathcal{I}_b$*,* $\mathbf{P}_f(\mathcal{I}_b)$ *l'ensemble des partitions finies en éléments de* $\mathcal{I}_b$*. Enfin* $\mathfrak{a}(\mathcal{I}_b)$ *sera l'ensemble des sommes disjointes finies d'intervalles bornés : le sous-ensemble de* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *défini par*

$$\mathfrak{a}(\mathcal{I}_b) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) /\ \exists\ \mathrm{P} \in \mathbf{P}_f(\mathcal{I}_b) : A = \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I\}$$

de plus $\mathcal{P}_b(\mathbb{R})$ *sera la famille des sous-ensembles bornés de* $\mathbb{R}$ *et* $\mathcal{S} = \mathfrak{a}(\mathcal{I}_b) \cup \{\varnothing\}$ *l'ensemble des sommes disjointes finies d'intervalles bornés auquel on a rajouté l'ensemble vide.*

(i) La relation m_0 *de* $\mathfrak{a}(\mathcal{I}_b)$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par*

$$m_0 = \{(A, y) \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}_b) \times \mathbb{R}_+ /\ \exists\ \mathrm{P} \in \mathbf{P}_f(\mathcal{I}_b) : A = \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I \quad \text{et} \quad y = \sum_{I \in \mathrm{P}} (\sup\{t : t \in I\} - \inf\{t : t \in I\})\}$$

est une application qu'on prolonge à $\mathcal{S}$ *en posant* $m_0(\varnothing) = 0$

(ii) La famille d'ensembles $\mathcal{S}$ *possède les propriétés suivantes :*

1. *Pour qu'un sous-ensemble non vide* A *soit un élément de* $\mathcal{S}$ *il faut et il suffit qu'il soit borné et somme disjointe finie d'intervalles :*

$$A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow A \in \mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\} \quad \text{et} \quad A \quad \text{borné}$$

En d'autre termes

$$\mathcal{S} = (\mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\}) \cap \mathcal{P}_b(\mathbb{R})\ .$$

2. *si* $(A, B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ *alors* $A \cap B \in \mathcal{S}$ *:*

$$(A, B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$$

3. *si* $\mathrm{F} \subset \mathcal{S}$ *est une famille finie d'éléments de* $\mathcal{S}$ *alors*

$$\bigcap_{S \in \mathrm{F}} S \in \mathcal{S} \tag{10.240}$$

4. si $(A,B)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ alors
$$A\cap B^c\in\mathcal{S}$$

5. si $(A,B)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ alors
$$A\cup B\in\mathcal{S}$$

6. Si $\mathrm{F}\subset\mathcal{S}$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{S}$ alors
$$\bigcup_{S\in\mathrm{F}} S\in\mathcal{S}\ .$$

7. si $A\Delta B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$ alors
$$(A,B)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}\Rightarrow A\Delta B\in\mathcal{S}$$

(iii) Si $(A,B)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ et $A\cap B=\varnothing$ alors
$$m_0(A\cup B)=m_0(A)+m_0(B)$$

(iv) L'application m_0 est additive sur $\mathcal{S}$ et c'est l'unique application additive sur $\mathcal{S}$ qui vérifie
$$I\in\mathcal{I}_b\Rightarrow m_0(I)=l(I)=\sup\{t:t\in I\}-\inf\{t:t\in I\}$$

(v) m_0 possède les propriétés suivantes

a *Si $(A,B)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ et $A\subset B$ alors*
$$m_0(A)\leq m_0(B) \tag{10.241}$$

b *Si $(A,B)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ et $A\cap B=\varnothing$ alors*
$$m_0(A\cup B)=m_0(A)+m_0(B) \tag{10.242}$$

c *Si $n\in\mathbb{N}$ et $S\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n,\mathcal{S})$ est une partition finie en éléments de $\mathcal{S}$ alors*
$$m_0(\bigcup_{k=0}^{n} S_k)=\sum_{k=0}^{n} m_0(S_k)\ . \tag{10.243}$$

d *Si $(A,B)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ alors*
$$m_0(A\cap B^c)+m_0(A\cap B)=m_0(A)\quad\text{et}\quad m_0(A\cap B)+m_0(A\cup B)=m_0(A)+m_0(B) \tag{10.244}$$

En particulier $m_0(A\cup B)\leq m_0(A)+m_0(B)$.

e *Si $A\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathcal{S})$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $\bigcup_{k=0}^{n} A_k\in\mathcal{S}$ et*
$$m_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k)\leq\sum_{k=0}^{n} m_0(A_k) \tag{10.245}$$

f *(Tension de m_0 sur $\mathcal{S}$)*
Si $A\in\mathcal{S}$ et $A\neq\varnothing$ pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ il existe un fermé borné non vide $K_\varepsilon\in\mathcal{S}$ tel que
$$K_\varepsilon\subset A\quad\text{et}\quad m_0(A)\leq m_0(K_\varepsilon)+\varepsilon$$

g *Si $A\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N},\mathcal{S})$ est une suite d'ensembles de $\mathcal{S}$ vérifiant les propriétés 1 et 2 suivantes :*
1. A est décroissante : pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $A_{n+1}\subset A_n$

2.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$$

alors

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} m_0(A_n) = 0 \tag{10.246}$$

h *Si* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{S})$ *est une suite d'ensembles de* $\mathcal{S}$ *vérifiant les propriétés 1 et 2 suivantes :*

1. A *est croissante : pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $A_n \subset A_{n+1}$

2.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$$

alors l'ensemble

$$U = \{y \in \mathbb{R}_+ / \exists\ n \in \mathbb{N} : y = m_0(A_n)\}$$

est majoré et

$$m_0(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sup\{y : y \in U\}$$

ce qu'on note :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(A_n) = m_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \tag{10.247}$$

i *(σ-additivité sur $\mathcal{S}$) Si* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{S})$ *est une partition en éléments de* $\mathcal{S}$ *vérifiant* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$ *alors l'ensemble*

$$V = \{y \in \mathbb{R}_+ / \exists\ n \in \mathbb{N} : y = \sum_{k=0}^{n} m_0(A_k)\}$$

est majoré et

$$m_0(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sup\{y : y \in V\}$$

ce qu'on note :

$$m_0(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{k=0}^{n} m_0(A_k)) \ . \tag{10.248}$$

Preuve

(i)

Il s'agit de montrer que $\mathrm{dom}(m_0) = \mathfrak{a}(\mathcal{I}_b)$ et que m_0 est une fonction.

1. $\mathrm{dom}(m_0) = \mathfrak{a}(\mathcal{I}_b)$
   - Si $A \in \mathrm{dom}(m_0)$ alors il existe $y \in \mathbb{R}_+$ tel que $(A, y) \in m_0$ par suite il existe $\mathrm{P} \in \mathbf{P}_f(\mathcal{I}_b)$ tel que
   $$A = \bigcup_{I\in\mathrm{P}} I$$
   ainsi $\mathrm{dom}(m_0) \subset \mathfrak{a}(\mathcal{I}_b)$.
   - Si $A \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}_b)$ il existe $\mathrm{P} \in \mathbf{P}_f(\mathcal{I}_b)$ tel que $A = \bigcup_{I\in\mathrm{P}} I$ ainsi
   $$(A\ ,\ \sum_{I\in\mathrm{P}} l(I)) \in m_0$$
   et $\mathfrak{a}(\mathcal{I}_b) \subset \mathrm{dom}(m_0)$.

2. m_0 est une fonction.

   Il s'agit de montrer
   $$[(A,y)\in m_0 \quad \text{et} \quad (A,y')\in m_0] \Rightarrow y=y'$$
   Or si $(A,y)\in m_0$ il existe $\mathrm{P}\in\mathbf{P}_f(\mathcal{I}_b)$ tel que
   $$A=\bigcup_{I\in\mathrm{P}} I \quad \text{et} \quad y=\sum_{I\in\mathrm{P}} l(I)$$
   et si $(A,y')\in m_0$ il existe $\mathrm{Q}\in\mathbf{P}_f(\mathcal{I}_b)$ tel que
   $$A=\bigcup_{J\in\mathrm{Q}} J \quad \text{et} \quad y'=\sum_{J\in\mathrm{Q}} l(J)$$
   On montre
   $$y=\sum_{(I,J)\in\mathrm{P}\times\mathrm{Q}} l(I\cap J)=y'$$

   (a) D'abord on montre $y=\sum_{(I,J)\in\mathrm{P}\times\mathrm{Q}} l(I\cap J)$.

   D'après le point (v) du théorème [8.1] page 211 (voir (8.21) page 212) on a
   $$\sum_{(I,J)\in\mathrm{P}\times\mathrm{Q}} l(I\cap J)=\sum_{I\in\mathrm{P}}(\sum_{J\in\mathrm{Q}} l(I\cap J))$$
   Puisque $y=\sum_{I\in\mathrm{P}} l(I)$ il suffit donc de montrer que pour tout $I\in\mathrm{P}$
   $$l(I)=\sum_{J\in\mathrm{Q}} l(I\cap J)\ .$$
   Si $I\in\mathrm{P}$ on considère l'ensemble $\mathrm{Q}^*=\{J\in\mathrm{Q}/I\cap J\neq\varnothing\}$ l'application $\varphi:\mathrm{Q}^*\mapsto\mathcal{I}_b\cup\{\varnothing\}$ est définie par
   $$\varphi(J)=I\cap J$$
   et on montre que $\mathrm{im}(\varphi)=\{L\in\mathcal{I}_b/\ \exists\ J\in\mathrm{Q}^*: L=I\cap J\}$ est une partition de I en intervalles bornés :
   $$I=\bigcup_{L\in\mathrm{im}(\varphi)} L=\bigcup_{J\in\mathrm{Q}^*} I\cap J$$
   — Puisque pour tout $J\in\mathrm{Q}^*$ on a $I\cap J\neq\varnothing$ l'ensemble $I\cap J$ est un intervalle borné.
   — puisque Q est une partition on a $J\neq J'\Rightarrow(I\cap J)\cap(I\cap J')=\varnothing$
   — si $x\in I$ alors puisque $I\subset A$ et $A=\bigcup_{J\in\mathrm{Q}} J$ il existe $J\in\mathrm{Q}$ tel que $x\in J$ par suite $x\in I\cap J=\varphi(J)$. Si $x\in\bigcup_{L\in\mathrm{im}(\varphi)} L$ alors il existe $J\in\mathrm{Q}$ tel que $x\in I\cap J$ par suite $x\in I$

     Ainsi
   $$I=\bigcup_{J\in\mathrm{Q}^*} I\cap J\ .$$
   D'après le point (v) du théorème [10.25] page 943 l est additive sur $\mathcal{I}_b\cup\{\varnothing\}$ ainsi
   $$l(I)=\sum_{J\in\mathrm{Q}} l(I\cap J)\ .$$

(b) Ensuite on montre $y' = \sum_{(I,J)\in \mathrm{P}\times\mathrm{Q}} l(I\cap J)$.

D'après le point (v) du théorème [8.1] page 211 (voir (8.21) page 212) on a

$$\sum_{(I,J)\in \mathrm{P}\times\mathrm{Q}} l(I\cap J) = \sum_{J\in\mathrm{Q}}(\sum_{I\in\mathrm{P}} l(I\cap J))$$

il suffit donc de montrer que pour tout $J \in \mathrm{Q}$

$$l(J) = \sum_{I\in\mathrm{P}} l(I\cap J)\ .$$

Si $J \in \mathrm{P}$ on considère l'ensemble $\mathrm{P}^* = \{I \in \mathrm{P}/I\cap J \neq \varnothing\}$ l'application $\varphi' : \mathrm{P}^* \mapsto \mathcal{I}_b \cup \{\varnothing\}$ est définie par

$$\varphi'(I) = I\cap J$$

et on montre que $\mathrm{im}(\varphi') = \{L \in \mathcal{I}_b/ \ \exists\ I \in \mathrm{P}^* : L = I\cap J\}$ est une partition de J en intervalles bornés :

$$J = \bigcup_{L\in\mathrm{im}(\varphi')} L$$

— Puisque pour tout $I \in \mathrm{P}^*$ on a $I\cap J \neq \varnothing$ l'ensemble $I\cap J$ est un intervalle borné.
— puisque P est une partition on a $I \neq I' \Rightarrow (I\cap J)\cap(I'\cap J) = \varnothing$
— si $x \in J$ alors puisque $J \subset A$ et $A = \bigcup_{I\in\mathrm{P}} I$ il existe $I \in \mathrm{P}$ tel que $x \in I$ par suite $x \in I\cap J = \varphi(J)$. Si $x \in \bigcup_{L\in\mathrm{im}(\varphi')} L$ alors il existe $I \in \mathrm{P}$ tel que $x \in I\cap J$ par suite $x \in J$ Ainsi

$$J = \bigcup_{I\in\mathrm{im}(\varphi')} L = \bigcup_{I\in\mathrm{P}^*} I\cap J\ .$$

D'après le point (v) du théorème [10.25] page 943 l est additive sur $\mathcal{I}_b \cup \{\varnothing\}$ ainsi

$$l(J) = \sum_{I\in\mathrm{P}} l(I\cap J)\ .$$

(ii)

1. On montre $A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow A \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \cup \{\varnothing\}$ et A borné.

I On montre $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \cup \{\varnothing\}$ et A borné.

si $A \neq \varnothing$ et $A \in \mathcal{S}$ alors il existe une partition finie $\mathrm{P} \subset \mathcal{I}_b$ tel que

$$A = \bigcup_{I\in\mathrm{P}} I$$

par suite A est somme disjointe finie d'intervalles, il suffit donc de montrer que A est borné. Mais d'après le lemme [6.1] page 133 il résulte de la finitude de P que l'application α de P dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\alpha(I) = \inf\{t : t \in I\}$$

atteint son minimum : il existe $I_* \in \mathrm{P}$ tel que

$$\alpha(I_*) = \min\{\alpha(I) : I \in \mathrm{P}\}\ .$$

On montre que $\alpha(I_*)$ est un minorant de A. Si $t \in A$ alors il existe $I \in \mathrm{P}$ tel que $t \in I$ par suite $t \geq \alpha(I) \geq \alpha(I_*)$. De même il résulte de la finitude de P que l'application β de P dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\beta(I) = \sup\{t : t \in I\}$$

atteint son maximum : il existe $I^* \in \mathrm{P}$ tel que

$$\beta(I^*) = \max\{\beta(I) : I \in \mathrm{P}\} \ .$$

On montre que $\beta(I^*)$ est un majorant de A. Si $t \in A$ alors il existe $I \in \mathrm{P}$ tel que $t \in I$ par suite $t \leq \beta(I) \leq \beta(I^*)$.

II On montre $A \in \mathfrak{a}(\mathcal{I}) \cup \{\varnothing\}$ et A borné $\Rightarrow A \in \mathcal{S}$.

Si $A \neq \varnothing$ et $A \in \mathfrak{a}(\mathcal{I})$ il existe une partition finie $\mathrm{P} \subset \mathcal{I}$ tel que

$$A = \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I$$

puisque A est borné et pour tout $I \in \mathrm{P}$ on a $I \subset A$, tout élément de P est un intervalle borné, par suite A est somme disjointe finie d'intervalles bornés ainsi $A \in \mathcal{S}$.

2. D'après *1* il suffit de montrer $A \cap B \in \mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\}$ et $A \cap B \in \mathcal{P}_b(\mathbb{R})$. Puisque tout élément de $\mathcal{S}$ est borné et $A \cap B \subset A$ l'ensemble $A \cap B$ est borné et il suffit de voir $A \cap B \in \mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\}$ mais le point (ix) du lemme [10.12] page 662 permet d'affirmer

$$(A, B) \in (\mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\}) \times (\mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\}) \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\} \ .$$

Par suite, puisque $\mathcal{S} \subset \mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\}$ on obtient

$$(A, B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \Rightarrow (A, B) \in (\mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\}) \times (\mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\}) \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\} \ .$$

Ainsi l'ensemble $A \cap B$ est un élément borné de $\mathfrak{a}(I) \cup \{\varnothing\}$ et *1* montre alors que $A \cap B \in \mathcal{S}$

3. Si $\mathrm{Card}(\mathrm{F}) = n + 1$ et $k \to S_k$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans F on pose

$$U = \{p \in \mathbb{N}_n / \bigcap_{k=0}^{p} S_k \in \mathcal{S}\} \ .$$

En suivant le lemme [5.10] page 111 on montre que $U = \mathbb{N}_n$ en vérifiant :

(a) $0 \in U$

(b) $[p \in U \quad \text{et} \quad p < n] \Rightarrow p + 1 \in U$.

(a) puisque $S_0 \in \mathcal{S}$ on a $0 \in U$

(b) si $p \in U$ et $p < n$ alors l'égalité

$$\bigcap_{k=0}^{p+1} S_k = (\bigcap_{k=0}^{p} S_k) \cap S_{p+1}$$

montre que $\bigcap_{k=0}^{p+1} S_k$ est l'intersection de deux éléments de $\mathcal{S}$ et *2* entraîne que $p + 1 \in U$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et puisque $\bigcap_{S \in \mathrm{F}} S = \bigcap_{k=0}^{n} S_k$ on obtient $\bigcap_{S \in \mathrm{F}} S \in \mathcal{S}$

4. D'après *1* il suffit de montrer $A\cap B^c \in \mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\}$ et $A\cap B^c \in \mathcal{P}_b(\mathbb{R})$. Puisque tout élément de $\mathcal{S}$ est borné et $A\cap B^c \subset A$ l'ensemble $A\cap B^c$ est borné et il suffit de voir $A\cap B^c \in \mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\}$ mais le point (ix) du lemme [10.12] page 662 permet d'affirmer

$$(A,B) \in (\mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\})\times(\mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\}) \Rightarrow A\cap B \in \mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\} \ .$$

et

$$B \in \mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\} \Rightarrow B^c \in \mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\} \ .$$

Par suite, puisque $\mathcal{S}\subset \mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\}$ on obtient

$$(A,B)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S} \Rightarrow (A,B^c) \in (\mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\})\times(\mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\}) \Rightarrow A\cap B^c \in \mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\} \ .$$

Ainsi l'ensemble $A\cap B^c$ est un élément borné de $\mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\}$ et *1* montre alors que $A\cap B^c\in\mathcal{S}$

5. D'après *1* il suffit de montrer $A\cup B \in \mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\}$ et $A\cup B \in \mathcal{P}_b(\mathbb{R})$.
   — Puisque tout élément de $\mathcal{S}$ est borné si m_A et m_B sont des minorants de A et B l'ensemble $A\cup B$ est minoré par $\min\{m_A,m_B\}$ et si M_A et M_B sont des majorants de A et B l'ensemble $A\cup B$ est majoré par $\max\{M_A,M_B\}$ ainsi il suffit de voir $A\cup B\in\mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\}$
   — le point (ix) du lemme [10.12] page 662 permet d'affirmer

   $$(A,B) \in (\mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\})\times(\mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\}) \Rightarrow A\cup B \in \mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\} \ .$$

   Par suite, puisque $\mathcal{S}\subset \mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\}$ on obtient

   $$(A,B)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S} \Rightarrow A\cup B \in \mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\} \ .$$

   Ainsi l'ensemble $A\cup B$ est un élément borné de $\mathfrak{a}(I)\cup\{\varnothing\}$ et *1* montre alors que $A\cup B\in\mathcal{S}$

6. Si Card(F) $= n+1$ et $k\to S_k$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans F on pose

$$U=\{p\in\mathbb{N}_n / \bigcup_{k=0}^{p} S_k \in\mathcal{S}\} \ .$$

En suivant le lemme [5.10] page 111 on montre que $U=\mathbb{N}_n$ en vérifiant :

(a) $0\in U$

(b) $[p\in U \quad \text{et} \quad p<n] \Rightarrow p+1\in U$.

(a) puisque $S_0\in\mathcal{S}$ on a $0\in U$

(b) si $p\in U$ et $p<n$ alors l'égalité

$$\bigcup_{k=0}^{p+1} S_k = (\bigcup_{k=0}^{p} S_k)\cup S_{p+1}$$

montre que $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{p+1} S_k$ est la réunion de deux éléments de $\mathcal{S}$ et *5* entraîne que $p+1\in U$

Ainsi $U=\mathbb{N}_n$ et $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} S_k\in\mathcal{S}$

7. D'après *4* on a $A\cap B^c\in\mathcal{S}$ et $A^c\cap B\in\mathcal{S}$ et *5* montre alors que

$$A\Delta B = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\in\mathcal{S}$$

(iii)

D'abord d'après (ii) , $A \cup B \in \mathcal{S}$ ainsi $m_0(A \cup B)$ est défini. Si P est une partition finie de A en éléments de $\mathcal{I}_b$ et Q est une partition finie de B en éléments de $\mathcal{I}_b$ alors l'ensemble $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$ défini par

$$\mathrm{P} \cup \mathrm{Q} = \{I \in \mathcal{I}_b / I \in \mathrm{P} \quad \text{ou} \quad I \in \mathrm{Q}\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$ est une partition,
2. $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$ est une partition de $A \cup B$:
$$A \cup B = \bigcup_{I \in \mathrm{P} \cup \mathrm{Q}} I$$
3. $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q} = \varnothing$.

1. Il s'agit de montrer
$$[(I, J) \in (\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}) \times (\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}) \quad \text{et} \quad I \neq J] \Rightarrow I \cap J = \varnothing$$
Or :
— si $(I, J) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}$, puisque P est une partition $I \cap J = \varnothing$
— si $(I, J) \in \mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ alors $I \subset A$ et $J \subset B$ par suite $I \cap J \subset A \cap B$ et puisque $A \cap B = \varnothing$ on obtient $I \cap J = \varnothing$.
— si $(I, J) \in \mathrm{Q} \times \mathrm{Q}$, puisque Q est une partition $I \cap J = \varnothing$
— si $(I, J) \in \mathrm{Q} \times \mathrm{P}$ alors $I \subset B$ et $J \subset A$ par suite $I \cap J \subset A \cap B$ et puisque $A \cap B = \varnothing$ on obtient $I \cap J = \varnothing$.
2. (a) On montre
$$A \cup B \subset \bigcup_{I \in \mathrm{P} \cup \mathrm{Q}} I\ .$$
Si $x \in A \cup B$ alors
— si $x \in A$ alors il existe $I \in \mathrm{P}$ tel que $x \in I$, un tel intervalle est un élément de $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$
— si $x \in B$ alors il existe $J \in \mathrm{Q}$ tel que $x \in J$, un tel intervalle est un élément de $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$
(b) On montre
$$\bigcup_{I \in \mathrm{P} \cup \mathrm{Q}} I \subset A \cup B$$
cela provient du fait que $\forall I \in \mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$ on a $I \subset A \cup B$
3. si $I \in \mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ alors $I \subset A \cap B$ par suite $I = \varnothing$ ce qui contredit la définition d'un intervalle comme convexe non vide.

Ainsi le point (i) Du théorème [8.1] page 211 montre que

$$\sum_{I \in \mathrm{P} \cup \mathrm{Q}} l(I) = \sum_{I \in \mathrm{P}} l(I) + \sum_{I \in \mathrm{Q}} l(I) \tag{10.249}$$

et par définition $m_0(A \cup B) = \sum_{I \in \mathrm{P} \cup \mathrm{Q}} l(I)$, $m_0(A) = \sum_{I \in \mathrm{P}} l(I)$, $m_0(B) = \sum_{I \in \mathrm{Q}} l(I)$. Ainsi (10.249) s'écrit

$$m_0(A \cup B) = m_0(A) + m_0(B)\ .$$

(iv)

I on montre que m_0 est additive .

Remarquons d'abord que d'après le point *6* de (ii) si P est une partition finie en éléments de $\mathcal{S}$ alors $\bigcup_{S\in \mathrm{P}} S \in \mathcal{S}$, on montre :

$$m_0(\bigcup_{S\in \mathrm{P}} S) = \sum_{S\in \mathrm{P}} m_0(S) \ .$$

Si $\mathrm{Card}(\mathrm{P}) = n+1$ et $k \to S_k$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans P on pose

$$U = \{k \in \mathbb{N}_n / m_0(\bigcup_{j=0}^{k} S_j) = \sum_{j=0}^{k} m_0(S_j)\}$$

En suivant le lemme [5.10] page 111 on montre que $U = \mathbb{N}_n$ en vérifiant :

1. $0 \in U$
2. $[k \in U \quad \text{et} \quad k < n] \Rightarrow k+1 \in U$. Par suite
1. L'assertion $0 \in U$ est claire (elle s'écrit $m_0(S_0) = m_0(S_0)$)
2. Si $[k \in U \quad \text{et} \quad k < n]$ alors

$$m_0(\bigcup_{j=0}^{k} S_j) = \sum_{j=0}^{k} m_0(S_j) \tag{10.250}$$

de plus

— d'après *6* de (ii) on a $\bigcup_{j=0}^{k} S_j \in \mathcal{S}$

— puisque P est une partition et $k \to S_k$ bijective

$$\bigcup_{j=0}^{k} S_j \cap S_{k+1} = \varnothing$$

le point (iii) montre alors que

$$m_0(\bigcup_{j=0}^{k+1} S_j) = m_0(\bigcup_{j=0}^{k} S_j \cup S_{k+1}) = m_0(\bigcup_{j=0}^{k} S_j) + m_0(S_{k+1})$$

et (10.250) montre alors que

$$m_0(\bigcup_{j=0}^{k+1} S_j) = \sum_{j=0}^{k} m_0(S_j) + m_0(S_{k+1}) = \sum_{j=0}^{k+1} m_0(S_j) \ .$$

Ainsi $k+1 \in U$ et $U = \mathbb{N}_n$. Par suite $m_0(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} S_k) = \sum_{j=0}^{n} m_0(S_j)$ et puisque $k \to S_k$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans P

$$m_0(\bigcup_{S\in \mathrm{P}} S) = m_0(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} S_k) = \sum_{j=0}^{n} m_0(S_j) = \sum_{S\in \mathrm{P}} m_0(S) \ .$$

II On montre l'unicité .

Si m est additive sur $\mathcal{S}$ et si $m(I) = l(I)$ alors puisque pour tout $A \in \mathcal{S}$ tel que $A \neq \varnothing$ il existe une partition finie P en intervalles bornés telle que $A = \bigcup_{I\in \mathrm{P}} I$ on obtient

$$m(A) = \sum_{I\in \mathrm{P}} m(I) = \sum_{I\in \mathrm{P}} l(I) = m_0(A)$$

(v)

a Si $(A,B) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}$ et $A \subset B$ alors

— d'après le point *4* de (ii) on a $B\cap A^c \in \mathcal{S}$

— puisque $B = A\cup(B\cap A^c)$ et $A\cap(B\cap A^c) = \varnothing$ le point (iii) montre que

$$m_0(B) = m_0(A) + m_0(B\cap A^c)$$

ainsi $m_0(B) - m_0(A) = m_0(B\cap A^c) \geq 0$

b L'égalité (10.242) est celle prouvée en (iii)

c L'égalité (10.243) est une conséquence directe de l'additivité de m_0 sur $\mathcal{S}$ (prouvée en (iv))

d D'après (ii) on a $A\cap B \in \mathcal{S}$ et $A\cap B^c \in \mathcal{S}$. Ainsi puisque $A = (A\cap B^c)\cup(A\cap B)$ et $(A\cap B)\cap(A\cap B^c) = \varnothing$ le point (iii) montre que

$$m_0(A\cap B) + m_0(A\cap B^c) = m_0((A\cap B)\cup(A\cap B^c)) = m_0(A)$$

Enfin l'égalité

$$A\cup B = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$$

et l'additivité de m_0 sur $\mathcal{S}$ montre que

$$m_0(A\cup B) = m_0(A\cap B) + m_0(A\cap B^c) + m_0(A^c\cap B) \tag{10.251}$$

et on vient de voir que

$$m_0(A\cap B^c) = m_0(A) - m_0(A\cap B) \quad \text{et} \quad m_0(A^c\cap B) = m_0(B) - m_0(A\cap B)\ .$$

Ainsi l'égalité (10.251) s'écrit

$$m_0(A\cup B) = m_0(A\cap B) + (m_0(A) - m_0(A\cap B)) + (m_0(B) - m_0(A\cap B)) = m_0(A) + m_0(B) - m_0(A\cap B)$$

et

$$m_0(A\cup B) + m_0(A\cap B) = m_0(A) + m_0(B)$$

et puisque $m_0(A\cap B) \geq 0$ on obtient $m_0(A\cup B) \leq m_0(A) + m_0(B)$.

e Le fait que $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{S}$ provient du point *6* de (ii). On pose

$$H = \{n\in\mathbb{N}/ \quad m_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} m_0(A_k)\}$$

et on montre que H est héréditaire.

— l'assertion $0 \in H$ provient de $m_0(A_0) \leq m_0(A_0)$

— si $n \in H$ alors

$$m_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} m_0(A_k)\ . \tag{10.252}$$

l'égalité

$$m_0(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k) = m_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k \cup A_{n+1})$$

et le point **d** qu'on applique avec $A = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k$ et $B = A_{n+1}$ montrent que

$$m_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k \cup A_{n+1}) \leq m_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) + m_0(A_{n+1})$$

par suite l'inégalité (10.252) page 958 entraîne

$$m_0(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} m_0(A_k) + m_0(A_{n+1}) \leq \sum_{k=0}^{n+1} m_0(A_k)$$

Ainsi H est héréditaire et $H = \mathbb{N}$.

f Si $A \in \mathcal{S}$ et $A \neq \varnothing$ il existe une partition finie en intervalles bornés P telle que

$$A = \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I \ .$$

On note $\mathrm{P}^* = \{I \in \mathrm{P}/l(I) > 0\} = \{I \in \mathrm{P}/\alpha(I) < \beta(I)\}$ (P^* est l'ensemble des intervalles de P non réduit à un point). Si P^* est vide alors A est fini il suffit donc de prendre $K_\varepsilon = A$. Si $\mathrm{P}^* \neq \varnothing$ alors puisque l est nulle sur $\mathrm{P} \cap (\mathrm{P}^*)^c$ on a

$$m_0(A) = \sum_{I \in \mathrm{P}} l(I) = \sum_{I \in \mathrm{P}^*} l(I) \ .$$

Puisque $\mathrm{P}^* \subset \mathrm{P}$ la partition P^* est finie et le lemme [6.1] page 133 montre que l atteint son minimum sur P^* : il existe $I_* \in \mathrm{P}^*$ tel que

$$l(I_*) = \min\{l(I) : I \in \mathrm{P}^*\}$$

Puisque $I_* \in \mathrm{P}^*$ on a $l(I_*) > 0$ et pour tout $\varepsilon < \dfrac{l(I_*)}{2}$ et $I \in \mathrm{P}^*$ on a

$$\beta(I) - \alpha(I) \geq l(I_*) > 2\varepsilon \ ,$$

et en particulier

$$\beta(I) - \varepsilon - (\alpha(I) + \varepsilon) > 0$$

On montre que si $\mathrm{Card}(\mathrm{P}^*) = n + 1$ alors pour tout $\varepsilon < \dfrac{l(I_*)}{2}$ le compact

$$K_\varepsilon = \bigcup_{I \in \mathrm{P}^*} [\alpha(I) + \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \ , \ \beta(I) - \frac{\varepsilon}{2(n+1)}]$$

vérifie

— $K_\varepsilon \subset A$ puisque pour tout $I \in \mathrm{P}^*$ on a

$$[\alpha(I) + \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \ , \ \beta(I) - \frac{\varepsilon}{2(n+1)}] \subset I$$

— puisque $I \neq J \Rightarrow [\alpha(I)+\dfrac{\varepsilon}{2(n+1)} \ , \ \beta(I)-\dfrac{\varepsilon}{2(n+1)}] \cap [\alpha(J)+\dfrac{\varepsilon}{2(n+1)} \ , \ \beta(J)-\dfrac{\varepsilon}{2(n+1)}] = \varnothing$ l'ensemble K_ε est somme disjointe finie d'intervalles fermés bornés ainsi $K_\varepsilon \in \mathcal{S}$ et

$$m_0(K_\varepsilon) = \sum_{I \in \mathrm{P}^*} (\beta(I) - \alpha(I) - 2\frac{\varepsilon}{2(n+1)}) = m_0(A) - \varepsilon$$

en particulier

$$m_0(A) \leq m_0(K_\varepsilon) + \varepsilon \ .$$

Si $\varepsilon \geq \dfrac{l(I_*)}{2}$ on choisit $\eta < \dfrac{l(I_*)}{2}$ et on obtient

$$m_0(A) \leq m_0(K_\eta) + \eta \leq m_0(K_\eta) + \varepsilon$$

g Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m_0(A_n) < \varepsilon$, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A_n = \varnothing$ c'est clair, on peut donc supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n \neq \varnothing$. On note $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fermés bornés de $\mathbb{R}$ et

$$\mathcal{K}_n = \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S} / K \subset A_n \quad \text{et} \quad m_0(A_n) \leq m_0(K) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\}$$

D'après le point **f**, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathcal{K}_n$ est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, par suite si h est une fonction de choix pour $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (voir l'axiome [2.1] page 48) l'application K de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}$ définie par

$$K_n = h(\mathcal{K}_n)$$

est définie et on montre les points suivants :

1. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\bigcap_{p \leq N} K_p = \varnothing \quad \text{et} \quad A_N \subset \bigcup_{p \leq N} A_p \cap K_p^c$$
2. si N est ainsi défini alors $m_0(A_N) \leq \varepsilon$

1. — on pose $F_n = \bigcap_{p=0}^{n} K_p$ et on montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_N = \varnothing$. En effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $F_n \neq \varnothing$ alors F_n est une suite décroissante de fermés bornés non vide de de $\mathbb{R}$, le théorème [10.13] page 838 montre alors que $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} F_p \neq \varnothing$, or pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $F_p \subset K_p \subset A_p$ par suite $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} F_p = \varnothing$ puisque par hypothèse $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} A_p = \varnothing$

   — si $x \in A_N$ alors puisque $\mathbb{R} = \bigcup_{p=0}^{N} K_p^c$ il existe $p \leq N$ tel que $x \in K_p^c$, puisque $p \leq N$ on a $A_N \subset A_p$ par suite $x \in A_p \cap K_p^c$ et
$$A_N \subset \bigcup_{p=0}^{N} A_p \cap K_p^c \ .$$

2. d'après le point (ii) on a $A_p \cap K_p^c \in \mathcal{S}$ et $\bigcup_{p=0}^{n} A_p \cap K_p^c \in \mathcal{S}$ (voir *4* et *6* de (ii)). De plus

   — d'après (10.241) page 950 on a
$$m_0(A_N) \leq m_0(\bigcup_{p=0}^{N} A_p \cap K_p^c)$$

   — d'après (10.245) page 950 on a
$$m_0(\bigcup_{p=0}^{N} A_p \cap K_p^c) \leq \sum_{p=0}^{N} m_0(A_p \cap K_p^c)$$

   — d'après (10.244) page 950 on a, puisque $K_p \subset A_p$
$$m_0(A_p \cap K_p^c) = m_0(A_p) - m_0(K_p)$$

   — par définition de K_p on a
$$m_0(A_p) - m_0(K_p) \leq \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}$$

Ainsi on obtient

$$m_0(A_N) \leq \sum_{p=0}^{N}(m_0(A_p) - m_0(K_p)) \leq \sum_{p=0}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \leq \varepsilon \ .$$

h On pose $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, puisque par hypothèse $S \in \mathcal{S}$ le point *4* de (ii) montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S \cap A_n^c \in \mathcal{S}$

I On montre que $m_0(S)$ est un majorant de l'ensemble $U = \{y \in \mathbb{R}_+ / \exists\ n \in \mathbb{N} : y = m_0(A_n)\}$

En effet, si $y \in U$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y = m(A_n)$, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n \subset S$ l'inégalité (10.241) montre que

$$y \leq m_0(A_n) \leq m_0(S)$$

II On montre que $m_0(S)$ est le plus petit majorant de l'ensemble U

Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m_0(S) \leq m_0(A_n) + \varepsilon$. Mais la suite $n \to S_n$ défini je par

$$S_n = S \cap A_n^c$$

est une suite décroissante d'ensembles de $\mathcal{S}$ telle que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = S \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \varnothing \ .$$

Ainsi le point **g** montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m_0(S_n) \leq \varepsilon$ par suite pour un tel n, puisque $A_n \subset S$ on obtient (voir l'égalité (10.244) $m_0(S_n) = m_0(S) - m_0(A_n) \leq \varepsilon$ et

$$m_0(S) \leq m_0(A_n) + \varepsilon \ .$$

i On pose $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, par hypothèse $S \in \mathcal{S}$.

I On montre que $m_0(S)$ est un majorant de l'ensemble $V = \{y \in \mathbb{R}_+ / \exists\ n \in \mathbb{N} : y = \sum_{k=0}^{n} m_0(A_k)\}$

En effet, si $y \in V$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y = \sum_{k=0}^{n} m(A_k)$, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \subset S$ l'inégalité (10.241) montre que

$$m_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq m_0(S) \ ,$$

ainsi puisque d'après l'égalité (10.243) on a $m_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = \sum_{k=0}^{n} m_0(A_k)$ on obtient

$$y \leq \sum_{k=0}^{n} m_0(A_k)\} \leq m_0(S)$$

II On montre que $m_0(S)$ est le plus petit majorant de l'ensemble V

On pose $S_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ alors $n \to S_n$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{S}$ qui vérifie

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$$

Ainsi le point **h** montre que

$$m_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(S_n)$$

et l'égalité (10.243) montre que $m_0(S_n) = m_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = \sum_{k=0}^{n} m_0(A_k)$ par suite

$$m_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(S_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{k=0}^{n} m_0(A_k))$$

■

D'après le point (ii) du théorème (10.26) page 949 on a

$$(A,B) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S} \Rightarrow A\cap B \in \mathcal{S}\ ,\ A\cap B^c \in \mathcal{S}\ ,\ A\cup B \in \mathcal{S}$$

En particulier si $(A\,B) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}$ et $A\Delta B = A\cap B^c \cup B\cap A^c$ alors $A\Delta B \in \mathcal{S}$. Les familles de sous-ensembles vérifiant ce types de conditions ont droit à une définition.

Définition 10.70 *On note X un ensemble, une famille $\mathcal{S}$ de sous-ensembles de X est appelée un* ***semi-anneau de Boole*** *si $\varnothing \in \mathcal{S}$ et*

$$(A,B) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S} \Rightarrow A\cap B \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad A\Delta B \in \mathcal{S}$$

L'exercice qui suit permet de se familiariser avec cette notion ensembliste.

Lemme 10.46 ***(Propriétés des Semi-anneaux de boole)***
On note $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ un corps de réels , $\mathbb{N}$ son ensemble d'entiers naturels et X un ensemble.

(i) Si $(A\ ,\ B) \in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)$ alors

1.
$$(A\Delta B)^c = (A^c\cap B^c)\cup(A\cap B) \tag{10.253}$$

2.
$$A\cup B = (A\Delta B)\Delta(A\cap B) \tag{10.254}$$

3.
$$A\cap B^c = A\Delta(A\cap B) \tag{10.255}$$

(ii) Pour qu'une famille $\mathcal{S}$ de sous-ensembles de X soit un semi-anneau de Boole il faut et il suffit que $\varnothing \in \mathcal{S}$ et

$$(A,B) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S} \Rightarrow A\cap B \in \mathcal{S}\ ,\ A\cap B^c \in \mathcal{S}\ ,\ A\cup B \in \mathcal{S}$$

(iii) Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ est un semi-anneau de Boole et $\mathrm{F} \subset \mathcal{S}$ un sous-ensemble fini *non vide de $\mathcal{S}$ alors*

$$\bigcup_{S\in\mathrm{F}} S \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \bigcap_{S\in\mathrm{F}} S \in \mathcal{S}$$

(iv) Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ est un semi-anneau de Boole et $m \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{S}\ ,\ \mathbb{R}_+)$ est une application telle que $m(\varnothing) = 0$ les conditions suivantes sont équivalentes :

a *Pour tout* $(A\ ,\ B)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}$
$$m(A\cup B)+m(A\cap B)=m(A)+m(B) \tag{10.256}$$
b *si* $(A\ ,\ B)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ *vérifie* $A\cap B=\varnothing$ *alors*
$$m(A\cup B)=m(A)+m(B) \tag{10.257}$$
c m *est additive sur* $\mathcal{S}$.

(v) Si $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(X)$ *est un semi-anneau de Boole et* $m\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{S}\ ,\ \mathbb{R}_+)$ *est une application additive sur* $\mathcal{S}$ *alors pour toute suite* $A\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathcal{S})$
$$m(\bigcup_{k=0}^{n}A_k)\le\sum_{k=0}^{n}m(A_k)$$

Preuve

(i)

1. En utilisant les égalités établies au lemme (1.4) page 12 on obtient
$$(A\Delta B)^c=[(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c)=[A^c\cap(A\cup B^c)]\cup[B\cap(A\cup B^c)]=(A^c\cap B^c)\cup(A\cap B)$$
2. On a
$$(A\Delta B)\Delta(A\cap B)=[(A\Delta B)^c\cap(A\cap B)]\cup[(A\Delta B)\cap(A^c\cup B^c)]$$
   — par (10.253)
$$(A\Delta B)^c\cap(A\cap B)=A\cap B$$
   — puisque $A\Delta B\subset A^c\cup B^c$
$$(A\Delta B)\cap(A^c\cup B^c)=A\Delta B$$
   Ainsi on obtient
$$(A\Delta B)\Delta(A\cap B)=(A\cap B)\cup(A\cap B^c\cup A^c\cap B)=[A\cap B\cup A\cap B^c]\cup[A\cap B\cup A^c\cap B]=A\cup B\ .$$
3.
$$A\Delta(A\cap B)=A\cap(A^c\cup B^c)\cup A^c\cap(A\cap B)=A\cap B^c$$

(ii)

La suffisance de la condition est claire et la nécessité provient de (10.254) et (10.255) page 962 .

(iii)

Si Card(F) $=n+1$ on note $k\to S_k$ une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans F et on pose
$$U=\{k\in\mathbb{N}_n/\ \bigcup_{p=0}^{k}S_p\in\mathcal{S}\}$$
alors

— par hypothèse $0\in U$

— si $k\in U$ et $k<n$ alors l'ensemble $B_k=\bigcup_{p=0}^{k}S_p$ est un élément de $\mathcal{S}$ par suite l'ensemble $\bigcup_{p=0}^{k+1}S_p$ est la réunion de deux ensembles de $\mathcal{S}$ et (ii) montre alors que $k+1\in U$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ par suite $\bigcup\limits_{p=0}^{n} S_p \in \mathcal{S}$ et puisque $k \to S_k$ est bijective on obtient

$$\bigcup_{S\in \mathrm{F}} S = \bigcup_{p=0}^{n} S_p \in \mathcal{S} \ .$$

De même si on pose

$$V = \{k \in \mathbb{N}_n / \ \bigcap_{p=0}^{k} S_p \in \mathcal{S}\}$$

alors

— par hypothèse $0 \in U$

— si $k \in U$ et $k < n$ alors l'ensemble $B_k = \bigcap\limits_{p=0}^{k} S_p$ est un élément de $\mathcal{S}$ par suite l'ensemble $\bigcap\limits_{p=0}^{k+1} S_p$ est l'intersection de deux ensembles de $\mathcal{S}$ et (ii) montre alors que $k+1 \in U$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ par suite $\bigcap\limits_{p=0}^{n} S_k \in \mathcal{S}$ et puisque $k \to S_k$ est bijective on obtient

$$\bigcap_{S\in \mathrm{F}} S = \bigcap_{p=0}^{n} S_p \in \mathcal{S}$$

(iv)

I On montre **a** $\Leftrightarrow$ **b**

Puisque $m(\varnothing) = 0$ l'implication **a** $\Rightarrow$ **b** est claire, il suffit donc de montrer **b** $\Rightarrow$ **a** . Or c'est une conséquence des points suivants :

— puisque $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \Delta B)$ et $(A \cap B) \cap (A\Delta B) = \varnothing$ **b** implique

$$m(A \cup B) = m(A \cap B) + m(A\Delta B)$$

— puisque $A\Delta B$ est somme disjointe de $A \cap B^c$ et $B \cap A^c$ on a

$$m(A\Delta B) = m(A \cap B^c) + m(B \cap A^c)$$

— puisque A est somme disjointe de $A \cap B$ et $A \cap B^c$

$$m(A \cap B^c) = m(A) - m(A \cap B)$$

— puisque B est somme disjointe de $B \cap A$ et $B \cap A^c$

$$m(B \cap A^c) = m(B) - m(A \cap B)$$

Ainsi on obtient

$$m(A \cup B) = m(A \cap B) + (m(A) - m(A \cap B)) + (m(B) - m(A \cap B)) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

et

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

ce qui est une façon d'écrire **a**

II On montre **b** $\Leftrightarrow$ **c**

Il est clair que **c** $\Rightarrow$ **b** puisque si P $= \{A\ ,\ B\}$ est une partition en éléments de $\mathcal{S}$ l'additivité de m entraîne $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Il suffit donc de montrer **b** $\Rightarrow$ **c**. On remarque d'abord que d'après (ii) pour toute partition finie P en élément de $\mathcal{S}$ on a $\bigcup_{S \in \mathrm{P}} S \in \mathcal{S}$. Il s'agit donc de montrer que si P est une partition finie en éléments de $\mathcal{S}$ alors

$$m(\bigcup_{S \in \mathrm{P}} S) = \sum_{S \in \mathrm{P}} m(S)$$

Si Card(P) $= n + 1$ on note $k \to S_k$ une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans P et on pose

$$U = \{k \in \mathbb{N}_n /\ \sum_{p=0}^{k} m(S_p) = m(\bigcup_{p=0}^{k} S_p)\}$$

alors

— par hypothèse $0 \in U$

— si $k \in U$ et $k < n$ alors par (iii) l'ensemble $B_k = \bigcup_{p=0}^{k} S_p$ est un élément de $\mathcal{S}$ et puisque $k \in U$

$$\sum_{p=0}^{k} m(S_p) = m(\bigcup_{p=0}^{k} S_p)$$

par suite l'ensemble $\bigcup_{p=0}^{k+1} S_p = B_k \cup S_{k+1}$ est somme disjointe de deux ensembles de $\mathcal{S}$ et l'hypothèse **b** entraîne

$$m(\bigcup_{p=0}^{k+1} S_p) = m(B_k) + m(S_{k+1}) = \sum_{p=0}^{k} m(S_p) + m(S_{k+1}) = \sum_{p=0}^{k+1} m(S_p)$$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ par suite

$$\sum_{p=0}^{n} m(S_p) = m(\bigcup_{p=0}^{n} S_p)$$

et puisque $k \to S_k$ est bijective on obtient (par définition d'une somme finie)

$$m(\bigcup_{S \in \mathrm{P}} S) = \sum_{S \in \mathrm{P}} m(S)\ .$$

(v)

On remarque d'abord que l'égalité (10.256) page 963 montre que pour tout $(A\ ,\ B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ on a $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$ et que (iii) montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{S}$. On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} /\ m(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} m(A_k)\}$$

et on montre que H est héréditaire .

1. l'assertion $0 \in H$ s'écrit $m(A_0) \leq m(A_0)$

2. si $n \in H$ et $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ alors, puisque $n \in H$,

$$m(B_n) \leq \sum_{k=0}^{n} m(A_k)$$

et l'égalité (10.256) page 963 montre que

$$m(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k) = m(B_n \cup A_{n+1}) \leq m(B_n) + m(A_{n+1}) \leq \sum_{k=0}^{n+1} m(A_k) \ ,$$

ainsi $H = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$m(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} m(A_k) \ .$$

■

On aimerait prolonger la notion de longueur à une famille d'ensembles un peu plus consistante que la famille des sommes disjointes d'intervalles . Si on veut recopier bêtement le théorème [10.26] page 949 en changeant ≪ partitions finies ≫ par ≪ partitions dénombrables ≫ on peut essayer de développer une notion de somme infinie de réels qui posséderait le même genre de propriétés que celles des sommes finies étudiées au théorème [8.1] page 211 .

10.13.4 *Sommes infinies de réels positifs*

Dans ce paragraphe si X est un ensemble on note $\mathcal{F}(X)$ le semi-anneau de Boole des sous-ensembles finis de X. Puisque $\mathbb{R}_+$ est un monoïde commutatif le lemme [8.5] page 209 permet de définir une application ≪ sommes finies ≫ de $\mathcal{F}(X)$ dans $\mathbb{R}_+$ notée $\mu_f : F \to \mu_f(F)$ qui est (voir par exemple théorème [8.1] page 211) additive sur le semi-anneau de Boole des sous-ensembles finis de X . Le jeu consiste en le prolongement de μ_f à une famille plus vaste que celle des ensembles finis. On introduit une définition

Définition 10.71 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels,* X *un ensemble, si* $\Lambda \subset X$ *est un sous-ensemble de* X *une application* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X\ ,\ \mathbb{R}_+)$ *est dite* ***sommable*** *sur* Λ *si l'ensemble*

$$U_f(\Lambda) = \{x \in \mathbb{R}_+ / \ \exists F \in \mathcal{F}(\Lambda) : x = \mu_f(F)\}$$

est majoré. On note alors

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) = \sup\{x : x \in U_f(\Lambda)\} = \sup_{F \in \mathcal{F}(\Lambda)} \sum_{x \in F} f(x)$$

la borne supérieure de $U_f(\Lambda)$*, le réel* $\sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda)$ *est appelé la* ***somme*** *de* f *sur* Λ

Ainsi f est sommable sur Λ si l'ensemble des sommes de f prises sur les sous-ensembles finis de Λ est majoré. On a déjà vu quelques exemples d'applications sommables sur des ensembles infinis. Ainsi d'après le théorème [10.26] page 949 si P est une partition en éléments de $\mathcal{S}$ telle que $\bigcup_{S \in \mathrm{P}} S$ est borné l'application m_0 est sommable sur P. De même le lemme [10.4] page 614 montre que si $x \in [0\ ,\ 1[$ la suite $u_n = x^n$ est sommable et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \frac{1}{1-x}$$

On veut montrer que cette notion de somme infinie possède les propriétés énoncées au théorème [8.1] page 211 pour les sommes finies . Autrement dit on montre le théorème suivant :

Théorème 10.27 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels ,* X *un ensemble et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, \mathbb{R}_+)$ *une application de* X *dans* $\mathbb{R}_+$.

(i) L'application f *est sommable sur les sous-ensembles finis de* X *et pour tout* $\Lambda \in \mathcal{F}(X)$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) = \mu_f(\Lambda) \tag{10.258}$$

(ii) Si $(\Lambda_0, \Lambda_1) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ *vérifient* $\Lambda_0 \subset \Lambda_1$ *et si* f *est sommable sur* Λ_1 *alors* f *est sommable sur* Λ_0 *et*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_0} f(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_1} f(\lambda)\ . \tag{10.259}$$

(iii) Si $(\Lambda_0, \Lambda_1) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ *vérifient* $\Lambda_0 \cap \Lambda_1 = \varnothing$ *et si* f *est sommable sur* Λ_0 *et* Λ_1 *alors* f *est sommable sur* $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ *et*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_0 \cup \Lambda_1} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda_1} f(\lambda) \tag{10.260}$$

(iv) Si $(\Lambda_0, \Lambda_1) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ *et si* f *est sommable sur* Λ_0 *et* Λ_1 *alors* f *est sommable sur* $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ *et*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_0 \cup \Lambda_1} f(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_0} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda_1} f(\lambda) \tag{10.261}$$

(v) La famille $\mathcal{S}(f)$ *des sous-ensembles de* X *sur lequel* f *est sommable :*

$$\mathcal{S}(f) = \{\Lambda \in \mathcal{P}(X) /\ \exists\ m \in \mathbb{R}_+ : U_f(\Lambda) \subset [0\ ,\ m]\}$$

est un semi-anneau de Boole et pour tout $(\Lambda, \Lambda') \in \mathcal{S}(f)$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda \cup \Lambda'} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda \cap \Lambda'} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda'} f(\lambda) \tag{10.262}$$

(vi) L'application m_f *de* $\mathcal{S}(f)$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par*

$$m_f(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda)$$

possède les propriétés suivantes :

a m_f *est additive sur le semi-anneau* $\mathcal{S}(f)$

b *Si* $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}(f)$ *est une famille d'ensembles sur lesquels* f *est sommable et si* $\mathcal{G}$ *possède les propriétés suivantes :*

1. $\mathcal{G}$ *est filtrant à droite pour l'inclusion :*

$$(G_0\ ,\ G_1) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \Rightarrow [\exists\ G \in \mathcal{G} : G_0 \cup G_1 \subset G\ ]$$

2. *L'ensemble* U^∞ *défini par*

$$U^\infty = \{x \in \mathbb{R}_+ /\ \exists\ G \in \mathcal{G} : x = m_f(G)\}$$

est majoré

Alors f *est sommable sur* $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$ *et*

$$m_f(\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G) = \sup\{x : x \in U^\infty\} \tag{10.263}$$

ce qu'on note

$$m_f(\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G) = \sup\{m_f(G) : G \in \mathcal{G}\}\ .$$

c *Si* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathcal{S}(f))$ *est une suite d'ensembles sur lesquels* f *est sommable et si* A *vérifie les propriétés suivantes*

1. A *est croissante : pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $A_n \subset A_{n+1}$
2. *la suite* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\mathbb{R}_+)$ *définie par* $x_n = m_f(A_n)$ *est majorée*

Alors f *est sommable sur* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *et*

$$m_f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_f(A_n) = \lim_{n\to\infty} m_f(A_n) \tag{10.264}$$

d *Si* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathcal{S}(f))$ *est une suite d'ensembles sur lesquels l'application* f *est sommable et si la suite* $s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R}_+)$ *définie par*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} m_f(A_k)$$

est majoré alors f *est sommable sur* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *et*

$$m_f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} m_f(A_k) \tag{10.265}$$

(vii) ***Théorème de Fubini***

Si Y *est un ensemble et* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X \times Y, \mathbb{R}_+)$*, pour tout couple d'ensembles* $(\Lambda_0, \Lambda_1) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$ *les conditions suivantes sont équivalentes (avec les notations de (vi))*

1. g *est sommable sur* $\Lambda_0 \times \Lambda_1$
2. (a) *pour tout* $\lambda \in \Lambda_0$ *l'application* $h_\lambda : \gamma \to g(\lambda\ ,\ \gamma)$ *est sommable sur* Λ_1

   (b) *l'application* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda_0\ ,\ \mathbb{R}_+)$ *définie par*

   $$u(\lambda) = m_{h_\lambda}(\Lambda_1) = \sum_{\gamma\in\Lambda_1} h_\lambda(\gamma)$$

   est sommable sur Λ_0
3. (a) *pour tout* $\gamma \in \Lambda_1$ *l'application* $k_\gamma : \lambda \to g(\lambda\ ,\ \gamma)$ *est sommable sur* Λ_0

   (b) *l'application* $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\Lambda_1\ ,\ \mathbb{R}_+)$ *définie par*

   $$v(\gamma) = m_{k_\gamma}(\Lambda_0) = \sum_{\lambda\in\Lambda_0} k_\gamma(\lambda)$$

   est sommable sur Λ_1

Si l'une de ces conditions est vérifiée alors

$$m_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1) = m_u(\Lambda_0) = m_v(\Lambda_1)$$

$$m_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1) = \sum_{(\lambda,\gamma)\in\Lambda_0\times\Lambda_1} g(\lambda\ ,\ \gamma) = \sum_{\lambda\in\Lambda_0} u(\lambda) = m_u(\Lambda_0) = \sum_{\gamma\in\Lambda_1} v(\gamma) = m_v(\Lambda_1)$$

Ces égalités seront toujours notées

$$\sum_{(\lambda,\gamma)\in\Lambda_0\times\Lambda_1} g(\lambda,\gamma) = \sum_{\lambda,\in\Lambda_0} \left(\sum_{\gamma\in\Lambda_1} g(\lambda,\gamma) \right) = \sum_{\gamma,\in\Lambda_1} \left(\sum_{\lambda\in\Lambda_0} g(\lambda,\gamma) \right) \tag{10.266}$$

(viii) ***Changement de variable***

Soit Y est un ensemble et φ une application injective *de Y dans X si $\Lambda \subset Y$ alors pour que $f \circ \varphi$ soit sommable sur Λ il faut et il suffit que f soit sommable sur $\varphi(\Lambda)$. On a alors*

$$\sum_{\lambda \in \varphi(\Lambda)} f(\lambda) = \sum_{\gamma \in \Lambda} f \circ \varphi(\gamma) \tag{10.267}$$

(ix) Si $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, \mathbb{R}_+) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, \mathbb{R}_+)$ est un couple d'applications de X dans $\mathbb{R}_+$ et si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(X, \mathbb{R}_+)$ est définie par

$$h(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$$

alors pour tout $\Lambda \in \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{S}(g)$ on a $\Lambda \in \mathcal{S}(h)$ et

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} h(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda} g(\lambda) \tag{10.268}$$

Preuve

(i)

Si Λ est fini alors $\mu_f(\Lambda) \in U_f(\Lambda)$ et il suffit de montrer que $\mu_f(\Lambda)$ est un majorant de $U_f(\Lambda)$ et puisque $(\mathbb{R}_+ \ , \ +)$ est un monoïde ordonné le lemme [8.6] page 217 montre que

$$F \subset \Lambda \Rightarrow \mu_f(F) \leq \mu_f(\Lambda)$$

(ii)

Si $\Lambda_0 \subset \Lambda_1$ alors $\mathcal{F}(\Lambda_0) \subset \mathcal{F}(\Lambda_1)$ et $U_f(\Lambda_0) \subset U_f(\Lambda_1)$ ainsi tout majorant de $U_f(\Lambda_1)$ est un majorant de $U_f(\Lambda_0)$ et

$$\sup\{x : x \in U_f(\Lambda_0)\} \leq \sup\{x : x \in U_f(\Lambda_1)\}$$

ce qui montre que f est sommable sur Λ_0 et

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_0} f(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_1} f(\lambda) \ .$$

(iii)

1. On montre que f est sommable sur $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda_0 \cup \Lambda_1} f(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_0} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda_1} f(\lambda)$

   Il s'agit de montrer que $U_f(\Lambda_0 \cup \Lambda_1)$ est majoré par $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda_0} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda_1} f(\lambda)$. Or si F est un sous-ensemble fini de $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ alors $F \cap \Lambda_0$ est un sous-ensemble fini de Λ_0 par suite $\mu_f(F \cap \Lambda_0) \in U_f(\Lambda_0)$ et puisque $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda_0} f(\lambda)$ est un majorant de $U_f(\Lambda_0)$ on obtient $\mu_f(F \cap \Lambda_0) \leq \displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda_0} f(\lambda)$, de même $\mu_f(F \cap \Lambda_1) \leq \displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda_1} f(\lambda)$ ainsi

   $$\mu_f(F \cap \Lambda_0) + \mu_f(F \cap \Lambda_1) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_0} f(\lambda) + \sum_{\lambda_1 \in \Lambda} f(\lambda) \ .$$

   Il résulte alors des égalités $F = F \cap (\Lambda_0 \cup \Lambda_1) = (F \cap \Lambda_0) \cup (F \cap \Lambda_1)$ et $(F \cap \Lambda_0) \cap (F \cap \Lambda_1) = \varnothing$ et de l'égalité (8.15) page 211 que $\mu_f(F) = \mu_f(F \cap \Lambda_0) + \mu_f(F \cap \Lambda_1)$, par suite

   $$\mu_f(F) \leq \mu_f(F \cap \Lambda_0) + \mu_f(F \cap \Lambda_1) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_0} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda_1} f(\lambda) \ .$$

   Cette inégalité étant vérifiée pour tout sous-ensemble fini inclus dans $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ on obtient

   $$\sum_{\lambda \in \Lambda_0 \cup \Lambda_1} f(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_0} f(\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda_1} f(\lambda)$$

2. On montre que $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_1} f(\lambda)\leq \sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0\cup\Lambda_1} f(\lambda)$

Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ on a $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_1} f(\lambda)\leq \sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0\cup\Lambda_1} f(\lambda)+\varepsilon$. Cela provient des points suivants :

— puisque $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)$ est le plus petit majorant de $U_f(\Lambda_0)$ le réel $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)-\frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de $U_f(\Lambda_0)$, ainsi il existe un sous-ensemble fini F_0 de Λ_0 tel que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)<\mu_f(F_0)+\frac{\varepsilon}{2}$$

— de même il existe un sous-ensemble fini F_1 de Λ_1 tel que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_1} f(\lambda)<\mu_f(F_1)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Ces inégalités entraînent déjà

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)+\sum_{\lambda\in\Lambda_1} f(\lambda)<\mu_f(F_0)+\mu_f(F_1)+\varepsilon$$

Il suffit donc de montrer

$$\mu_f(F_0)+\mu_f(F_1)\leq\sum_{\lambda\in\Lambda_0\cup\Lambda_1} f(\lambda)\ .$$

Cela provient des points suivants

— puisque $F_0\cup F_1$ est un sous-ensemble fini de $\Lambda_0\cup\Lambda_1$ on a $\mu_f(F_0\cup F_1)\leq\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0\cup\Lambda_1} f(\lambda)$

— puisque $F_0\cap F_1\subset\Lambda_0\cap\Lambda_1$ et $\Lambda_0\cap\Lambda_1=\varnothing$ l'additivité de μ_f sur les sous-ensembles finis de X montre

$$\mu_f(F_0)+\mu_f(F_1)=\mu_f(F_0\cup F_1)\leq\sum_{\lambda\in\Lambda_0\cup\Lambda_1} f(\lambda)$$

(*iv*)

Il s'agit de montrer que $U_f(\Lambda_0\cup\Lambda_1)$ est majoré par $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_1} f(\lambda)$. Or si F est un sous-ensemble fini de $\Lambda_0\cup\Lambda_1$ alors $F\cap\Lambda_0$ est un sous-ensemble finie de Λ_0 par suite $\mu_f(F\cap\Lambda_0)\in U_f(\Lambda_0)$ et puisque $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)$ est un majorant de $U_f(\Lambda_0)$ on obtient $\mu_f(F\cap\Lambda_0)\leq\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)$, de même $\mu_f(F\cap\Lambda_1)\leq\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_1} f(\lambda)$ ainsi

$$\mu_f(F\cap\Lambda_0)+\mu_f(F\cap\Lambda_1)\leq\sum_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)+\sum_{\lambda_1\in\Lambda} f(\lambda)\ .$$

Mais il résulte des égalités $F=F\cap(\Lambda_0\cup\Lambda_1)=(F\cap\Lambda_0)\cup(F\cap\Lambda_1)$ et du fait que μ_f est additive sur le semi-anneau de Boole des sous-ensembles finis de X (voir l'égalité (8.15) page 211) que $\mu_f(F)\leq\mu_f(F\cap\Lambda_0)+\mu_f(F\cap\Lambda_1)$, par suite

$$\mu_f(F)\leq\mu_f(F\cap\Lambda_0)+\mu_f(F\cap\Lambda_1)\leq\sum_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)+\sum_{\lambda\in\Lambda_1} f(\lambda)\ .$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout sous-ensemble fini inclus dans $\Lambda_0\cup\Lambda_1$ on obtient

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0\cup\Lambda_1} f(\lambda)\leq\sum_{\lambda\in\Lambda_0} f(\lambda)+\sum_{\lambda\in\Lambda_1} f(\lambda)$$

(v)

Pour montrer que $\mathcal{S}(f)$ est un semi-anneau de Boole il s'agit de voir

$$(A\,B) \in \mathcal{S}(f) \times \mathcal{S}(f) \Rightarrow [A \cap B \in \mathcal{S}(f)\ ,\ A \cap B^c \in \mathcal{S}(f)\ ,\ A \cup B \in \mathcal{S}(f)]$$

Or le point (ii) montre $(A\ ,\ B) \in \mathcal{S}(f) \times \mathcal{S}(f) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}(f)\ ,\ A \cap B^c \in \mathcal{S}(f)$ et le point (iv) montre $(A\ ,\ B) \in \mathcal{S}(f) \times \mathcal{S}(f) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}(f)$. L'égalité (10.262) page 967 suit alors de l'égalité(10.260) et du fait que $\mathcal{S}(f)$ est un semi-anneau de Boole (voir le lemme [10.46] page 962)

(vi)

a L'additivité de m_f provient de l'égalité (10.260) page 967.

b On pose $B = \bigcup\limits_{G \in \mathcal{G}} G$ et on montre

$$F \in \mathcal{F}(B) \Rightarrow \exists\ G \in \mathcal{G} : F \subset G \tag{10.269}$$

Autrement dit on montre que si F est un sous-ensemble fini de B alors il existe $G \in \mathcal{G}$ tel que $F \subset G$. Si $\mathrm{Card}(F) = n+1$ et $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n\ ,\ F)$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ dans F on montre que l'ensemble

$$V = \{k \in \mathbb{N}_n /\ \exists\ G \in \mathcal{G} : x(\mathbb{N}_k) \subset G\}$$

vérifie $V = \mathbb{N}_n$.

1. D'abord $0 \in V$ puisque $x_0 \in F \Rightarrow x_0 \in B$ et la définition d'une réunion implique qu'il existe $G \in \mathcal{G}$ tel que $x_0 \in G$.
2. Si $k \in V$ et $k < n$ alors
   — puisque $k \in V$ il existe $G_0 \in \mathcal{G}$ tel que $x(\mathbb{N}_k) \subset G_0$
   — puisque $x_{k+1} \in F$ il existe $G_1 \in \mathcal{G}$ tel que $x_{k+1} \in G_1$
   Par suite $x(\mathbb{N}_{k+1}) \subset G_0 \cup G_1$. $\mathcal{G}$ étant filtrant à droite pour l'inclusion il existe $G \in \mathcal{G}$ tel que $G_0 \cup G_1 \subset G$ par suite $x(\mathbb{N}_{k+1}) \subset G$. Ainsi on obtient $[\ k \in V$ et $k < n] \quad \Rightarrow \quad k+1 \in V$

Par suite $V = \mathbb{N}_n$ et puisque $F = x(\mathbb{N}_n)$ il existe $G \in \mathcal{G}$ tel que $F \subset G$.Cela montre que tout majorant de U^∞ est un majorant de $U_f(B)$. En effet si $x \in U_f(B)$ il existe $F \in \mathcal{F}(B)$ tel que $x = \mu_f(F)$, or (10.269 page 971) montre qu'il existe $G \in \mathcal{G}$ tel que $F \subset G$. Pour un tel G on a $x \in U_f(G)$ par suite $x \leq m_f(G)$. Ainsi, puisque $m_f(G) \in U^\infty$, tout élément de $U_f(B)$ est majoré par un élément de U^∞ et puisque par hypothèse U^∞ est majoré on obtient

$$\sup\{x : x \in U_f(B)\} \leq \sup\{x : x \in U^\infty\}$$

ce qui montre que f est sommable sur B et

$$m_f(B) \leq \sup\{m_f(G) : G \in \mathcal{G}\}$$

Enfin puisque $G \in \mathcal{G} \Rightarrow G \subset B$, le point (ii) montre $G \in \mathcal{G} \Rightarrow m_f(G) \leq m_f(B)$ par suite

$$\sup\{m_f(G) : G \in \mathcal{G}\} \leq m_f(B) \leq \sup\{m_f(G) : G \in \mathcal{G}\}$$

c Puisque A est croissante $A(\mathbb{N})$ est filtrant à droite pour l'inclusion ainsi **b** montre que si l'ensemble $U^\infty = \{x \in \mathbb{R}_+ :\ \exists\ n \in \mathbb{N} : x = m_f(A_n)\}$ est majoré alors f est sommable sur $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et

$$m_f(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sup\{x : x \in U^\infty\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} m_f(A_n)$$

Enfin l'égalité $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} m_f(A_n) = \lim\limits_{n \to \infty} m_f(A_n)$ résulte de la croissance de $n \to m_f(A_n)$

d Posons $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ alors l'additivité de m_f sur le semi-anneau de Boole $\mathcal{S}(f)$ montre que

$$m_f(B_n) \leq \sum_{k=0}^{n} m_f(A_k) \leq s_n$$

par suite

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} m_f(B_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$$

et puisque $n \to B_n$ est croissante il résulte de **c** que f est sommable sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et

$$m_f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_f(B_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$$

la conclusion résulte alors de l'égalité $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

(vii)

Remarquons que d'après le théorème [8.1] page 211 les égalités (10.266) page 968 sont vérifiées lorsque Λ_0 et Λ_1 sont finis , il suffit donc de « passer au sup » .

A **preuve de** *1*$\Leftrightarrow$ *2* et $m_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1) = m_u(\Lambda_0)$

I On montre *1*$\Rightarrow$ *2*

Pour tout $\lambda \in X$ On considère l'application h_λ de Y dans $\mathbb{R}_+$ définie par $h_\lambda(\gamma) = g(\lambda\ ,\ \gamma)$ et on montre que si $\lambda \in \Lambda_0$ tout majorant de $U_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1)$ est un majorant $U_{h_\lambda}(\Lambda_1)$. Si F est un sous-ensemble fini de Λ_1 alors $\{\lambda\} \times F$ est un sous-ensemble fini de $\Lambda_0 \times \Lambda_1$ par suite on a $\mu_g(\{\lambda\}\times F) \in U_g(\Lambda_0\times\Lambda_1)$ or pour tout ensemble fini F , $\mu_g(\{\lambda\}\times F) = \mu_{h_\lambda}(F)$ ainsi tout majorant de $U_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1)$ est un majorant de $U_{h_\lambda}(\Lambda_1)$ et en particulier l'application h_λ est sommable sur Λ_1 et

$$m_{h_\lambda}(\Lambda_1) \leq \sum_{\gamma\in\Lambda_1} h_\lambda(\gamma) \leq \sum_{(\lambda\ ,\ \gamma)\in\Lambda_0\times\Lambda_1} g(\lambda\ ,\ \gamma) \leq m_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1) \tag{10.270}$$

On note u l'application de Λ_0 dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$u(\lambda) = m_{h_\lambda}(\Lambda_1)$$

Alors puisque pour tout sous-ensemble fini $F \subset \Lambda_1$ on a $\mu_g(\{\lambda\} \times F) = \mu_{h_\lambda}(F)$ (voir par exemple l'égalité (8.21) page 212) l'hypothèse *1* montre que

$$u(\lambda) = m_{h_\lambda}(\Lambda_1) = m_g(\{\lambda\} \times \Lambda_1)$$

On montre maintenant que $m_g(\Lambda_0\times\Lambda_1)$ est un majorant de $U_u(\Lambda_0)$. Si F est un sous-ensemble fini de Λ_0 alors $F\times\Lambda_1 \subset \Lambda_0\times\Lambda_1$ par suite (ii) montre que $F\times\Lambda_1 \in \mathcal{S}(g)$ et $m_g(F\times\Lambda_1) \leq m_g(\Lambda_0\times\Lambda_1)$ et l'additivité de m_g sur $\mathcal{S}(g)$ montre que

$$m_g(F \times \Lambda_1) = \sum_{\lambda\in F} m_g(\{\lambda\} \times \Lambda_1) = \sum_{\lambda\in F} u(\lambda) = \mu_u(F)$$

par suite

$$m_u(\Lambda_0) = \sup\{\mu_u(F) : F \in \mathcal{F}(\Lambda_0)\} \leq m_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1) \tag{10.271}$$

II On montre *2*⇒ *1*

Si F est un sous-ensemble fini de $\Lambda_0 \times \Lambda_1$ et si on note p_0 et p_1 les projections $p_0 : \Lambda_0 \times \Lambda_1 \to \Lambda_0$ et $p_1 : \Lambda_0 \times \Lambda_1 \to \Lambda_1$ ($p_0(\lambda\ ,\ \mu) = \lambda$ et $p_1(\lambda\ ,\ \mu) = \mu$) on montre que

$$\mu_g(F) \leq \mu_u(p_0(F))$$

en effet $p_0(F)$ et $p_1(F)$ sont finis comme image d'un ensemble fini (voir théorème [6.3] page 128) et vérifient $F \subset p_0(F) \times p_1(F)$. L'additivité de μ_g sur le semi-anneau de Boole des sous-ensembles finis de $X \times Y$ montre que $\mu_g(F) \leq \mu_g(p_0(F) \times p_1(F))$. Or l'égalité (8.21) page 212 montre que

$$\mu_g(p_0(F) \times p_1(F)) = \sum_{\lambda \in p_0(F)} (\sum_{\gamma \in p_1(F)} g(\lambda\ ,\ \gamma)) = \sum_{\lambda \in p_0(F)} \mu_{h_\lambda}(p_1(F)) = \mu_u(p_0(F))\ .$$

Ainsi pour tout sous-ensemble fini F de $\Lambda_0 \times \Lambda_1$ on obtient

$$\mu_g(F) \leq \mu_u(p_0(F)) \leq m_u(\Lambda_0)$$

ce qui montre que $m_u(\Lambda_0)$ est un majorant de $U_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1)$, par suite g est sommable sur $\Lambda_0 \times \Lambda_1$ et

$$m_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1) \leq m_u(\Lambda_0)\ . \tag{10.272}$$

Enfin l'égalité $m_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1) = m_u(\Lambda_0)$ provient des inégalité (10.271) page 972 et (10.272) page 973

B **preuve de** *1*⇔ *3* et $m_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1) = m_v(\Lambda_1)$

La preuve de cette équivalence et de l'égalité $m_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1) = m_v(\Lambda_1)$ est similaire à celle de *1* ⇔ *2* et de l'égalité $m_g(\Lambda_0 \times \Lambda_1) = m_u(\Lambda_0)$, elle est laissée au soin du lecteur .

(viii)

Remarquons que d'après l'égalité (8.22) page 212 l'égalité (10.267) page 969 est vraie pour les ensembles finis . On montre que $U_f(\varphi(\Lambda)) = U_{f\circ\varphi}(\Lambda)$.

1. Si $x \in U_{f\circ\varphi}(\Lambda)$ alors il existe un sous-ensemble fini F de Λ tel que $x = \mu_{f\circ\varphi}(F)$ et il résulte de l'égalité (8.22) page 212 que $\mu_{f\circ\varphi}(F) = \mu_f(\varphi(F))$ et puisque $\varphi(F)$ est fini on obtient $x \in U_f(\varphi(\Lambda))$ ce qui montre
$$U_{f\circ\varphi}(\Lambda) \subset U_f(\varphi(\Lambda))$$
2. Si $x \in U_f(\varphi(\Lambda))$ alors il existe un sous-ensemble fini F de $\varphi(\Lambda)$ tel que $x = \mu_f(F)$, puisque φ est injective $\varphi^{-1}(F)$ est un sous-ensemble fini de Λ et il résulte de l'égalité (8.22) page 212 que $\mu_{f\circ\varphi}(\varphi^{-1}(F)) = \mu_f(F)$ ainsi on obtient $x \in U_{f\circ\varphi}(\Lambda)$ ce qui montre
$$U_f(\varphi(\Lambda)) \subset U_{f\circ\varphi}(\Lambda)$$

Ceci montre que $U_f(\varphi(\Lambda)) = U_{f\circ\varphi}(\Lambda)$ par suite si l'un de ces ensembles est majoré l'autre aussi et

$$\sup\{x : x \in U_f(\varphi(\Lambda))\} = \sup\{x : x \in U_{f\circ\varphi}(\Lambda)\}$$

(ix)

l'égalité (10.268) page 969 est encore une conséquence du fait que cette égalité est vérifiée sur les ensembles finis (voir l'égalité (8.23) page 212) . ■

En appliquant le théorème [10.27] page 967 au cas ou X est le semi-anneau de Boole $\mathcal{S}$ des sommes disjointes finies d'intervalles et ou f est l'application m_0 de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par le théorème [10.26] page 949 on tombe directement sur une extension additive de m_0 à une famille d'ensembles qui contient les ouverts bornés.

10.13.5 *Extension additive de la longueur aux ouverts bornés de* $\mathbb{R}$

Le théorème qui suit permet de prolonger m_0 à un domaine contenant les ouverts bornés de $\mathbb{R}$. On y utilise les résultats et notations des théorèmes [10.26] page 949 et [10.27] page 967 .

Théorème 10.28 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{P}_b(\mathbb{R})$ *la famille des ensembles bornés de* $\mathbb{R}$ *,* $\mathcal{S}_b = \mathcal{P}_b(\mathbb{R}) \cup \{\varnothing\}$ *le semi-anneau de Boole des sous-ensembles bornés de* $\mathbb{R}$ *,* $\mathcal{S} = \mathfrak{a}(\mathcal{I}_b) \cup \{\varnothing\}$ *le semi-anneau de Boole des sommes disjointes finies d'intervalles bornés,* $\mathbf{P}(\mathcal{S})$ *l'ensemble des partitions en éléments de* $\mathcal{S}$ *et* $m_0 : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}_+$ *l'application définie au théorème [10.26] page 949 . Enfin* $\mathcal{S}(m_0)$ *désigne les familles de sous-ensembles de* $\mathcal{S}$ *sur lesquelles* m_0 *est sommable et* m *est l'application de* $\mathcal{S}(m_0)$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par*

$$m(\mathrm{F}) = \sum_{S \in \mathrm{F}} m_0(S)$$

De Plus

1. $\mathbf{P}_\sigma(\mathcal{S})$ *est l'ensemble des partitions finies ou dénombrables en éléments de* $\mathcal{S}$
2. $\mathcal{S}_\sigma(m_0)$ *désigne les éléments finis ou dénombrable de* $\mathcal{S}(m_0)$

(i) Si $\mathrm{P} \in \mathbf{P}(\mathcal{S})$ *et si* $\bigcup_{S \in \mathrm{P}} S$ *est borné alors* m_0 *est sommable sur* P

(ii) Si $\mathrm{P} \in \mathbf{P}_\sigma(\mathcal{S})$ *et si* $\bigcup_{S \in \mathrm{P}} S \in \mathcal{S}$ *alors*

$$\sum_{S \in \mathrm{P}} m_0(S) = m_0(\bigcup_{S \in \mathrm{P}} S) \tag{10.273}$$

(iii) Si $\Gamma = \{\mathrm{P} \in \mathbf{P}_\sigma(\mathcal{S}) / \bigcup_{S \in \mathrm{P}} S \in \mathcal{P}_b(\mathbb{R})\}$ *est l'ensemble des partitions finies ou dénombrables en éléments de* $\mathcal{S}$ *dont la réunion est borné la relation* μ_0 *de* $\mathcal{S}_b$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par*

$$\mu_0 = \{(A\ ,\ x) \in \mathcal{P}_b(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ /\ \exists\ \mathrm{P} \in \Gamma : A = \bigcup_{S \in \mathrm{P}} S\ ,\ x = \sum_{S \in \mathrm{P}} m_0(S)\} \cup \{(\varnothing\ ,\ 0)\}$$

est une fonction sur $\mathcal{S}_b$ *avec* $\mathrm{dom}(\mu_0) = \{A \in \mathcal{P}_b(\mathbb{R}) /\ \exists\ \mathrm{P} \in \Gamma : A = \bigcup_{S \in \mathrm{P}} S\} \cup \{\varnothing\}$ *et* $\mu_0(\varnothing) = 0$ *, en particulier* $\mathcal{S} \subset \mathrm{dom}(\mu_0)$*.*

(iv) Pour qu'un sous-ensemble borné A *soit un élément de* $\mathrm{dom}(\mu_0)$ *il faut et il suffit qu'il existe une suite finie ou dénombrable* $n \to S_n$ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathcal{S}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $n \to S_n$ *est croissante : pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $S_n \subset S_{n+1}$
2. $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$

Pour toute suite vérifiant 1 et 2 la suite $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R}_+)$ *définie par* $x_n = m_0(S_n)$ *est croissante majorée et*

$$\mu_0(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} m_0(S_n) = \lim_{n \to \infty} m_0(S_n) \tag{10.274}$$

(v) La fonction μ_0 *possède les propriétés suivantes :*

1. μ_0 *est un prolongement de* m_0 *à* $\mathrm{dom}(\mu_0)$ *: pour tout* $S \in \mathcal{S}$ *on a* $\mu_0(S) = m_0(S)$
2. *Si* $(A\ ,\ B) \in \mathrm{dom}(\mu_0) \times \mathrm{dom}(\mu_0)$ *et* $A \subset B$ *alors*

$$\mu_0(A) \leq \mu_0(B)\ . \tag{10.275}$$

3. *Si* $(A\ ,\ B) \in \mathrm{dom}(\mu_0) \times \mathrm{dom}(\mu_0)$ *alors* $A \cap B \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ *et* $A \cup B \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ *, de plus*

$$\mu_0(A \cup B) + \mu_0(A \cap B) = \mu_0(A) + \mu_0(B)\ . \tag{10.276}$$

   En particulier :
   — *si* $A \cap B = \varnothing$ *alors* $\mu_0(A \cup B) = \mu_0(A) + \mu_0(B)$
   — $\mu_0(A \cup B) \leq \mu_0(A) + \mu_0(B)$

4. $\mathrm{dom}(\mu_0)$ *est stable par réunions et intersections finies : si* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathrm{dom}(\mu_0))$ *est une suite d'éléments de* $\mathrm{dom}(\mu_0)$ *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathrm{dom}(\mu_0) \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=0}^{n} A_k \in \mathrm{dom}(\mu_0)\ .$$

   De plus

$$\mu_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k) \tag{10.277}$$

5. *si* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathrm{dom}(\mu_0))$ *est une suite croissante d'éléments de* $\mathrm{dom}(\mu_0)$ *telle que l'ensemble* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est borné alors* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ *et*

$$\mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_0(A_n)\ . \tag{10.278}$$

6. *si* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n\ ,\ \mathrm{dom}(\mu_0))$ *est une partition en éléments de* $\mathrm{dom}(\mu_0)$ *alors*

$$\mu_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k) \tag{10.279}$$

7. *si* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathrm{dom}(\mu_0))$ *est une partition en éléments de* $\mathrm{dom}(\mu_0)$ *telle que l'ensemble* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est borné alors* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ *et*

   (a) *l'ensemble* $U = \{x \in \mathbb{R}_+ /\ \exists\ n \in \mathbb{N} : x = \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k)\}$ *est majoré ,*

   (b)

$$\mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup\{x : x \in U\}$$

   ce qu'on note

$$\mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} m_0(A_k) \tag{10.280}$$

8. *si* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathrm{dom}(\mu_0))$ *est une suite d'éléments de* $\mathrm{dom}(\mu_0)$ *telle que l'ensemble* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est borné alors* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ *, de plus si la suite* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{R}_+)$ *définie par*

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k)$$

est majorée alors

$$\mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

ce qu'on note

$$\mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k) \tag{10.281}$$

9. *Si* $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ *est l'ensemble des compacts (les fermés bornés) de* $\mathbb{R}$ *alors : pour tout ensemble non vide* $A \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ *et tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe* $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}$ *tel que*

$$\mu_0(A) < m_0(K) + \varepsilon \tag{10.282}$$

ainsi pour tout ensemble $A \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ *le réel* $\mu_0(A)$ *est la borne supérieure de l'ensemble*

$$T = \{x \in \mathbb{R}_+ /\ \exists K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S} : K \subset A \quad \text{et} \quad x = m_0(K)\}$$

ce qu'on note

$$\mu_0(A) = \sup\{m_0(K) : K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S} \quad K \subset A\} \tag{10.283}$$

(vi) Si $\mathcal{T}_b = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}_b$ *est l'ensemble des ouverts bornés de* $\mathbb{R}$ *auquel on a rajouté l'ensemble vide :*

$$\mathcal{T}_b = \{O \in \mathcal{T} /\ \exists\ (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : O \subset [a\ ,\ b]\} \cup \{\varnothing\}$$

Alors $\mathcal{T}_b \subset \mathrm{dom}(\mu_0)$ *et l'application* $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{T}_b, \mathbb{R}_+)$ *définie comme la restriction de* μ_0 *à* $\mathcal{T}_b$ *est un germe de mesure de Lebesgue , cela signifie qu'elle possède les propriétés suivantes :*

a $\mu(\varnothing) = 0$

b *si* $(O_0, O_1) \in \mathcal{T}_b \times \mathcal{T}_b$ *alors*

$$O_0 \subset O_1 \Rightarrow \mu(O_0) \leq \mu(O_1) \quad \text{et} \quad \mu(O_0 \cap O_1) + \mu(O_0 \cup O_1) = \mu(O_0) + \mu(O_1) \tag{10.284}$$

c *pour tout intervalle ouvert borné*

$$\mu(I) = \sup\{t : t \in I\} - \inf\{t : t \in I\} \tag{10.285}$$

d *Si* D *est un sous-ensemble fini ou dénombrable de* $\mathcal{T}_b$ *tel que* μ *est sommable sur D*

$$\mu(\bigcup_{O\in \mathrm{D}} O) \leq \sum_{O\in \mathrm{D}} \mu(O) \tag{10.286}$$

e *Pour toute* partition *finie ou dénombrable* P *en éléments de* $\mathcal{T}_b$ *tel que l'ensemble* $\bigcup_{O\in \mathrm{P}} O$ *est borné* μ *est sommable sur* P *et*

$$\mu(\bigcup_{O\in \mathrm{P}} O) = \sum_{O\in \mathrm{P}} \mu(O) \tag{10.287}$$

f *si* $O \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathcal{T}_b)$ *est une suite croissante d'ouverts bornés telle que l'ensemble* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ *est borné alors la suite* $x_n = \mu(O_n)$ *est croissante majorée et*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(O_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(O_n)\ . \tag{10.288}$$

Preuve

(i)

Il s'agit de montrer que l'ensemble

$$U_{m_0}(\mathrm{P}) = \{x \in \mathbb{R}_+ / \ \exists\ F \in \mathcal{F}(\mathrm{P}) : x = \sum_{S \in F} m_0(S)\}$$

est majoré. Cela résulte des points suivants :

— puisque $\bigcup_{S \in \mathrm{P}} S$ est borné il existe $(a,\ b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $\bigcup_{S \in \mathrm{P}} S \subset [a\ ,\ b]$. En particulier pour tout sous-ensemble fini F de P l'inclusion $\bigcup_{S \in F} S \subset [a\ ,\ b]$ est vérifiée.

— puisque $\mathcal{S}$ est un semi-anneau de Boole pour tout sous ensemble fini F de P on a $\bigcup_{S \in F} S \in \mathcal{S}$

— puisque m_0 est additive sur $\mathcal{S}$ et P est une partition on obtient

$$\sum_{S \in F} m_0(S) = m_0(\bigcup_{S \in F} S) \leq m_0[a\ ,\ b] \leq b - a\ .$$

(ii)

Remarquons que si P est fini le résultat suit de l'additivité de m_0 sur le semi-anneau de Boole $\mathcal{S}$, on peut donc supposer P dénombrable . On pose $B = \bigcup_{S \in \mathrm{P}} S$, par hypothèse $B \in \mathcal{S}$ et il s'agit de montrer que $m_0(B)$ est le plus petit majorant de l'ensemble

$$U_{m_0}(\mathrm{P}) = \{x \in \mathbb{R}_+ / \ \exists\ F \in \mathcal{F}(\mathrm{P}) : x = \sum_{S \in F} m_0(S)\}$$

1. D'abord $m_0(B)$ est un majorant de $U_{m_0}(\mathrm{P})$ puisque pour tout sous-ensemble fini F de P

$$\sum_{S \in F} m_0(S) = m_0(\bigcup_{S \in F} S) \leq m_0(B)$$

ce qui montre que m_0 est sommable sur P et

$$\sum_{S \in \mathrm{P}} m_0(S) \leq m_0(B)$$

2. Ensuite on montre que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $x \in U_{m_0}(\mathrm{P})$ tel que $m_0(B) < x + \varepsilon$.

Puisque P est dénombrable il existe une bijection $k \to S_k$ de $\mathbb{N}$ dans P. La suite $n \to S_n$ est une partition en éléments de $\mathcal{S}$ qui vérifie $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \in \mathcal{S}$ puisque

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = B\ .$$

Ainsi (10.248) page 951 montre que

$$m_0(B) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{k=0}^{n} m_0(S_k))$$

par suite pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$m_0(B) < \sum_{k=0}^{n} m_0(S_k) + \varepsilon\ .$$

Puisque $k \to S_k$ est bijective on a $\sum_{k=0}^{n} m_0(S_k) = \sum_{S \in S(\mathbb{N}_n)} m_0(S)$ et le réel $x = \sum_{S \in S(\mathbb{N}_n)} m_0(S)$ est un élément de $U_{m_0}(\mathrm{P})$ tel que $m_0(B) < x + \varepsilon$, ce qui montre que $m_0(B)$ est le plus petit majorant de $U_{m_0}(\mathrm{P})$

(iii)

1. On montre $\mathrm{dom}(\mu_0) = \{A \in \mathcal{P}_b(\mathbb{R}) / \ \exists \ \mathrm{P} \in \Gamma : A = \bigcup_{S \in \mathrm{P}} S\} \cup \{\varnothing\}$

   D'abord $\varnothing \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ puisque $(\varnothing \ , \ 0) \in \mu_0$. Ensuite si $\mathrm{P} \in \Gamma$ et $A = \bigcup_{S \in \mathrm{P}} S$ alors le point (i) montre que m_0 est sommable sur P par suite

$$(A \ , \ \sum_{S \in \mathrm{P}} m_0(S) \ ) \in \mu_0$$

   et $A \in \mathrm{dom}(\mu_0)$.

2. On montre que μ_0 est une fonction

   Si $(A \ , \ x) \in \mu_0$ et $(A \ , \ y) \in \mu_0$ alors il existe $\mathrm{P} \in \Gamma$ et $\mathrm{P}' \in \Gamma$ tels que

$$A = \bigcup_{S \in \mathrm{P}} S \quad \text{et} \quad x = \sum_{S \in \mathrm{P}} m_0(S)$$

   avec

$$A = \bigcup_{S' \in \mathrm{P}'} S' \quad \text{et} \quad y = \sum_{S' \in \mathrm{P}'} m_0(S')$$

   On montre que

$$x = \sum_{(S \ , \ S') \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}'} m_0(S \cap S') = y$$

   En effet le théorème de Fubini (voir (10.266) page 968) montre que

$$\sum_{(S \ , \ S') \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}'} m_0(S \cap S') = \sum_{S \in \mathrm{P}} (\sum_{S' \in \mathrm{P}'} m_0(S \cap S'))$$

   or puisque pour tout $S \in \mathrm{P}$ on a $S = S \cap A = \bigcup_{S' \in \mathrm{P}'} S \cap S'$ le point (ii) montre que

$$m_0(S) = \sum_{S' \in \mathrm{P}'} m_0(S \cap S')$$

   par suite

$$\sum_{(S \ , \ S') \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}'} m_0(S \cap S') = \sum_{S \in \mathrm{P}} m_0(S) = x \ .$$

   De même l'égalité

$$\sum_{(S \ , \ S') \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}'} m_0(S \cap S') = \sum_{S' \in \mathrm{P}'} (\sum_{S \in \mathrm{P}} m_0(S \cap S'))$$

   montre que

$$\sum_{(S \ , \ S') \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}'} m_0(S \cap S') = \sum_{S' \in \mathrm{P}'} m_0(S') = y \ .$$

(iv)

1. On montre que pour tout $A \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ il existe une suite vérifiant *1* et *2*.

   Si $A \in \mathcal{S}$ on prend $S_n = A$, on peut donc supposer que $A = \bigcup_{S \in \mathrm{P}} S$ avec P partition dénombrable en éléments de $\mathcal{S}$. Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{P}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans P alors la suite

$$S_n = \bigcup_{S \in \varphi(\mathbb{N}_n)} S$$

   est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{S}$ (puisque $\varphi(\mathbb{N}_n)$ est fini et $\mathcal{S}$ est un semi-anneau de Boole) vérifiant

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \bigcup_{S \in \mathrm{P}} S = A$$

2. On montre que si A est borné et s'il existe une suite $n \to S_n$ vérifiant *1* et *2* alors $A \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ et $\mu_0(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} m_0(S_n)$.

   D'abord la suite $x_n = m_0(S_n)$ est majoré, en effet puisque A est borné il existe $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $A \subset [a\ ,\ b]$, il résulte des inclusions $S_n \subset A \subset [a\ ,\ b]$ et de l'inégalité (10.241) page 950 que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$m_0(S_n) \leq m_0[a\ ,\ b] \leq b - a\ .$$

   Si $n \to S_n$ est une suite croissante telle que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ on considère la suite $n \to B_n$ définie par

$$B_n = \begin{cases} S_0 & si \quad n = 0 \\ S_n \cap S_{n-1}^c & si \quad n \geq 1 \end{cases}$$

   Puisque $\mathcal{S}$ est un semi-anneau de Boole, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B_n = S_n \cap S_{n-1}^c \in \mathcal{S}$ par suite l'ensemble

$$B(\mathbb{N}) = \{\ U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) /\ \exists\ n \in \mathbb{N} : U = B_n\}$$

   est une famille de sous-ensembles de $\mathcal{S}$ et on montre qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

   (a) l'ensemble $B^*(\mathbb{N}) = \{S \in B(\mathbb{N}) /\ S \neq \varnothing\}$ est une partition finie ou dénombrable en éléments de $\mathcal{S}$

   (b) $A = \bigcup_{S \in B^*(\mathbb{N})} S$

   (c) $\mu_0(A) = \sum_{S \in B^*(\mathbb{N})} m_0(S) = \sup_{n \in \mathbb{N}} m_0(S_n)$

   (a) Si $(S\ ,\ S') \in B^*(\mathbb{N}) \times B^*(\mathbb{N})$ et $S \neq S'$ alors soit $S = S_0$ ou $S' = S_0$ soit il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $S = S_p \cap S_{p-1}^c$ et $S' = S_q \cap S_{q-1}^c$.
   - si $S = S_0$ alors puisque $S' \neq S_0$ il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $S' = S_q \cap S_{q-1}^c$, ainsi il résulte de l'inclusion $S_0 \subset S_{q-1}$ que $S \cap S' = \varnothing$
   - si $S' = S_0$ alors puisque $S \neq S_0$ il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $S = S_q \cap S_{q-1}^c$, ainsi il résulte de l'inclusion $S_0 \subset S_{q-1}$ que $S \cap S' = \varnothing$
   - si $S \neq S_0$ et $S' \neq S_0$ alors il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $S = S_p \cap S_{p-1}^c$ et $S' = S_q \cap S_{q-1}^c$. Puisque $S \neq S'$ on a $p \neq q$. Si $p < q$ l'inclusion $S_p \subset S_{q-1}$ montre que $S \cap S' = \varnothing$ et si $q < p$ l'inclusion $S_q \subset S_{p-1}$ montre que $S \cap S' = \varnothing$

(b) Puisque pour tout $S \in B^*(\mathbb{N})$ on a $S \subset A$ on obtient $\displaystyle\bigcup_{S \in B^*(\mathbb{N})} S \subset A$, par suite puisque A est borné et $B^*(\mathbb{N})$ est fini ou dénombrable on obtient déjà $B^*(\mathbb{N}) \in \Gamma$. Il reste à voir que si $x \in A$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_n$. Si $x \in A$ alors par définition d'une réunion il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in S_n$. Ainsi l'ensemble

$$U = \{n \in \mathbb{N} /\ x \in S_n\}$$

est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ et si on pose $p = \min\{k : k \in U\}$ alors $p \in U$ et $x \in S_p$ si $p = 0$ on a $x \in B_0$ et si $p \in \mathbb{N}^*$ on a $p - 1 \notin U$ par suite $x \notin S_{p-1}$ et $x \in S_p \cap S^c_{p-1}$ ainsi $x \in B_p$ ce qui montre que $A \subset \displaystyle\bigcup_{S \in B^*(\mathbb{N})} S$

(c) L'égalité $\mu_0(A) = \displaystyle\sum_{S \in B^*(\mathbb{N})} m_0(S)$ provient de la définition de μ_0 . D'autre part dire que l'égalité $\displaystyle\sum_{S \in B^*(\mathbb{N})} m_0(S) = \sup_{n \in \mathbb{N}} m_0(S_n)$ est vérifiée c'est dire que la borne supérieure de l'ensemble

$$U_{m_0}(B^*(\mathbb{N})) = \{x \in \mathbb{R}_+ /\ \exists\ F \in \mathcal{F}(B^*(\mathbb{N})) : x = \sum_{S \in F} m_0(S)\}$$

est égale à la borne supérieure de l'ensemble

$$U = \{x \in \mathbb{R}_+ /\ \exists\ n \in \mathbb{N} : x = m_0(S_n)\}$$

I On montre $\displaystyle\sum_{S \in B^*(\mathbb{N})} m_0(S) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} m_0(S_n)$

Pour cela on remarque que pour tout sous-ensemble fini F de $B^*(\mathbb{N})$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\bigcup_{S \in F} S \subset S_n\ .$$

Si F est fini de cardinal $n + 1$ alors il existe une bijection $k \to F_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans F . On pose

$$U = \{k \in \mathbb{N}_n /\ \exists\ p \in \mathbb{N} : \bigcup_{j=0}^{k} F_j \subset S_p\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$.

— D'abord on montre $0 \in U$. En effet, puisque $F_0 \in B^*(\mathbb{N})$ alors soit $F_0 = S_0$ soit il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_0 = S_p \cap S^c_{p-1}$, pour un tel p on a $F_0 \subset S_p$.
— Ensuite on montre [$k \in U$ et $k < n$] $\Rightarrow$ $k + 1 \in U$.
  Si $k \in U$ alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\bigcup_{j=0}^{k} F_j \subset S_p$ ainsi $\displaystyle\bigcup_{j=0}^{k+1} F_j \subset S_p \cup F_{k+1}$ puisque par construction $F_{k+1} \in B^*(\mathbb{N})$ alors soit $F_{k+1} = S_0$ soit il existe un entier strictement positif $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_{k+1} = S_q \cap S^c_{q-1}$, pour un tel q on a $F_{k+1} \subset S_q$. Si $F_{k+1} = S_0$ alors $\displaystyle\bigcup_{j=0}^{k+1} F_j \subset S_p$, si $F_{k+1} = S_q \cap S^c_{q-1}$ et $q \leq p$ alors $\displaystyle\bigcup_{j=0}^{k+1} F_j \subset S_p$ et si $p \leq q$ alors $\displaystyle\bigcup_{j=0}^{k+1} F_j \subset S_q$

Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\bigcup_{j=0}^{n} F_j \subset S_p$, l'égalité $\displaystyle\bigcup_{j=0}^{n} F_j = \bigcup_{S \in F} S$ montre alors qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\bigcup_{S \in F} S \subset S_p\ .$$

Puisque F est une partition finie en éléments de $\mathcal{S}$ l'additivité de m_0 sur $\mathcal{S}$ entraîne

$$\sum_{S\in F} m_0(S) = m_0(\bigcup_{S\in F} S) \leq m_0(S_p) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(S_n)$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout sous-ensemble fini de $B^*(\mathbb{N})$ on obtient

$$\sum_{S\in B^*(\mathbb{N})} m_0(S) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(S_n)$$

II On montre $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(S_n) \leq \sum_{S\in B^*(\mathbb{N})} m_0(S)$

Pour cela on montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe un sous-ensemble fini F de $B^*(\mathbb{N})$ tel que

$$S_n = \bigcup_{S\in F} S\ .$$

Or l' égalité $S_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ montre que si $U^n = \{k\in\mathbb{N}_n/B_k \neq \varnothing\}$

$$S_n = \bigcup_{S\in B(U^n)} S$$

par suite si $F_n = B(U^n)$

$$m_0(S_n) \leq \sum_{S\in F_n} m_0(S) \leq \sum_{S\in B^*(\mathbb{N})} m_0(S)\ .$$

l'inégalité

$$m_0(S_n) \leq \sum_{S\in B^*(\mathbb{N})} m_0(S)$$

est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Enfin l'égalité $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(S_n) = \lim_{n\to\infty} m_0(S_n)$ provient de la croissance de $n\to m_0(S_n)$

(v)

1. Si $S=\varnothing$ alors $\mu_0(\varnothing) = m_0(\varnothing) = 0$ sinon en considérant la partition finie $\mathrm{P} = \{S\}$ dont le seul élément est S on obtient
$$\mu_0(S) = \sum_{P\in\mathrm{P}} m_0(P) = m_0(S)\ .$$

2. Si A et B appartiennent à $\mathrm{dom}(\mu_0)$ et $A\subset B$ ils sont bornés et (iv) montre qu'il existe des suites croissantes à valeurs dans $\mathcal{S}$, $n\to A_n$ et $n\to B_n$ telles que
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$
avec
$$\mu_0(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(A_n) \quad \text{et} \quad \mu_0(B) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(B_n)\ . \tag{10.289}$$
Pour tout $p\in\mathbb{N}$ on considère la suite croissante $n\to S_n$ à valeurs dans $\mathcal{S}$ définie par $S_n = A_p\cap B_n$ alors il résulte des inclusions $A_p\subset A\subset B$ que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = A_p\cap B = A_p$ en particulier $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \in \mathcal{S}$ et

le théorème [10.26] page 949 (voir (10.247 page 951) et les égalités (10.289) montrent d'abord que pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$m_0(A_p) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(A_p \cap B_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(B_n) \leq \mu_0(B)$$

et ensuite

$$\mu_0(A) \leq \sup_{p\in\mathbb{N}} m_0(A_p) \leq \mu_0(B) \ .$$

3. Si A et B appartiennent à $\mathrm{dom}(\mu_0)$ ils sont vides ou bornés de même que les ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$. De plus (iv) montre qu'il existe des suites croissantes à valeurs dans $\mathcal{S}$, $n \to A_n$ et $n \to B_n$ telles que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

avec

$$\mu_0(A) = \lim_{n\to\infty} m_0(A_n) \quad \text{et} \quad \mu_0(B) = \lim_{n\to\infty} m_0(B_n) \ . \tag{10.290}$$

On montre que la croissance des suites $n \to A_n$ et $n \to B_n$ entraîne les points suivants :

(a)

$$A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n) \quad \text{et} \quad A \cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B_n)$$

(b)

$$\mu_0(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} m_0(A_n \cup B_n) \quad \text{et} \quad \mu_0(A \cap B) = \lim_{n\to\infty} m_0(A_n \cap B_n) \ .$$

(a) D'abord on remarque que puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n \cup B_n \subset A \cup B$ on obtient $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n) \subset A \cup B$. Ensuite si $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$

— si $x \in A$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$ par suite $x \in A_n \cup B_n$ et $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n)$.

— si $x \in B$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_n$ par suite $x \in A_n \cup B_n$ et $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup B_n$.

Ce qui montre que

$$A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n) \ .$$

Enfin puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inclusion $A_n \cap B_n \subset A \cap B$ est vérifiée on obtient d'abord $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B_n) \subset A \cap B$. Ensuite si $x \in A \cap B$ alors $x \in A$ et $x \in B$ par suite il existe $(p\ ,\ q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $x \in A_p \cap B_q$

— si $p \leq q$ la croissance de $n \to A_n$ montre que $x \in A_q \cap B_q$

— si $q \leq p$ la croissance de $n \to B_n$ montre que $x \in A_p \cap B_p$

Ce qui montre que

$$A \cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B_n) \ .$$

Ainsi $A \cup B$ et $A \cap B$ sont bornés et réunion de suites croissantes d'éléments de $\mathcal{S}$, le point (iv) permet alors d'affirmer que $A \cup B \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ et $A \cap B \in \mathrm{dom}(\mu_0)$.

(b) puisque les suites $n \to A_n \cup B_n$ et $n \to A_n \cap B_n$ sont des suites croissantes d'éléments de $\mathcal{S}$ vérifiant $A \cap B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B_n)$ et $A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n)$ le point (iv) montre que

$$\mu_0(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} m_0(A_n \cup B_n) \quad \text{et} \quad \mu_0(A \cap B) = \lim_{n\to\infty} m_0(A_n \cap B_n) \ . \tag{10.291}$$

L'égalité (10.244) page 950 montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$m_0(A_n \cap B_n) + m_0(A_n \cup B_n) = m_0(A_n) + m_0(B_n)$$

Ainsi en « passant à la limite » (voir le point (iv) du lemme [10.3] page 610) on obtient

$$\lim_{n\to\infty} m_0(A_n \cap B_n) + \lim_{n\to\infty} m_0(A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} m_0(A_n) + \lim_{n\to\infty} m_0(B_n)$$

et les égalités (10.290) page 982 et (10.291) page 982 montrent alors

$$\mu_0(A \cap B) + \mu_0(A \cup B) = \mu_0(A) + \mu_0(B) \ .$$

4. (a) On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N} / \ \bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathrm{dom}(\mu_0)\}$$

et on montre que H est héréditaire .

— l'assertion $0 \in H$ provient de $A_0 \in \mathrm{dom}(\mu_0)$

— si $n \in H$ alors $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ par suite $\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} A_k \cup A_{n+1}$ est réunion de deux éléments de $\mathrm{dom}(\mu_0)$ et *3* montre alors que $\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k \in \mathrm{dom}(\mu_0)$.

(b) On pose

$$H' = \{n \in \mathbb{N} / \ \bigcap_{k=0}^{n} A_k \in \mathrm{dom}(\mu_0)\}$$

et on montre que H' est héréditaire .

— l'assertion $0 \in H'$ provient de $A_0 \in \mathrm{dom}(\mu_0)$

— si $n \in H'$ alors $\bigcap_{k=0}^{n} A_k \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ par suite $\bigcap_{k=0}^{n+1} A_k = \bigcap_{k=0}^{n} A_k \cap A_{n+1}$ est intersection de deux éléments de $\mathrm{dom}(\mu_0)$ et *3* montre alors que $\bigcap_{k=0}^{n+1} A_k \in \mathrm{dom}(\mu_0)$.

(c) On pose

$$H" = \{n \in \mathbb{N} / \ \mu_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k)\}$$

et on montre que $H"$ est héréditaire .

— l'assertion $0 \in H"$ provient de $\mu_0(A_0) \leq \mu_0(A_0)$

— si $n \in H"$ alors $\mu_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k)$ or l'égalité (10.276) page 975 montre que $\mu_0(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k) \leq \mu_0(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) + \mu_0(A_{n+1})$ par suite

$$\mu_0(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k) + \mu_0(A_{n+1}) \leq \sum_{k=0}^{n+1} \mu_0(A_k)$$

5. On pose $B = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p$. Puisque pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $A_p \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ le point (iv) montre qu'il existe une suite $k \to S_{p,k}$ à valeurs dans $\mathcal{S}$ telle que

$$[k \in \mathbb{N} \Rightarrow S_{p,k} \subset S_{p,k+1}] \quad \text{et} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_{p,k} = A_p$$

et

$$\mu_0(A_p) = \lim_{k\to\infty} m_0(S_{p,k})$$

On montre que la suite $n \to S_n$ définie par

$$S_n = \bigcup_{p=0}^{n} S_{p,n}$$

est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{S}$ qui vérifie

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \ .$$

(a) comme réunion finie d'ensembles du semi-anneau de Boole $\mathcal{S}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n \in \mathcal{S}$,

(b) la croissance de $k \to S_{p,k}$ montre que $\displaystyle\bigcup_{p=0}^{n} S_{p,n} \subset \bigcup_{p=0}^{n+1} S_{p,n+1}$ par suite $S_n \subset S_{n+1}$,

(c) **a** D'abord on montre $B \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

si $x \in B$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$ par suite il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in S_{n,k}$. Si $k \le n$ alors la croissance de $k \to S_{n,k}$ montre que $x \in S_{n,n}$ par suite $x \in S_n$ et si $n \le k$ alors $x \in \displaystyle\bigcup_{p=0}^{k} S_{p,k}$ par suite $x \in S_k$

b Ensuite on montre $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \subset B$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{p,n} \subset A_p$ la croissance de $p \to A_p$ montre que

$$S_n = \bigcup_{p=0}^{n} S_{p,n} \subset \bigcup_{p=0}^{n} A_p \subset A_n$$

par suite

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset B \ .$$

Ainsi B est borné (par hypothèse) et réunion de la suite croissante $n \to \displaystyle\bigcup_{p=0}^{n} S_{p,n}$ d'éléments de $\mathcal{S}$

Le point (iv) montre alors que $B \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ et

$$\mu_0(B) = \lim_{n\to\infty} m_0(S_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(S_n)$$

Il reste à voir

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(A_n) = \mu_0(B)$$

D'abord puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n \subset B$ l'inégalité (10.275) page 974 montre que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(A_n) \le \mu_0(B)$$

Ensuite il résulte de l'égalité $\mu_0(B) = \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(\bigcup_{p=0}^{n} S_{p,n})$ que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mu_0(B) < m_0(\bigcup_{p=0}^{n} S_{p,n}) + \varepsilon \ .$$

Ainsi , puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{p,n} \subset A_p$ on obtient $\bigcup_{p=0}^{n} S_{p,n} \subset \bigcup_{p=0}^{n} A_p \subset A_n$ par suite l'inégalité (10.275) page 974 montre que

$$\mu_0(B) < m_0(\bigcup_{p=0}^{n} S_{p,n}) + \varepsilon \leq \mu_0(A_n) + \varepsilon \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(A_n) + \varepsilon \ .$$

6. On pose

$$U = \{p \in \mathbb{N}_n / \ \mu_0(\bigcup_{k=0}^{p} A_k) = \sum_{k=0}^{p} \mu_0(A_k)\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$.
— l'assertion $0 \in U$ provient de $\mu_0(A_0) = \mu_0(A_0)$
— si $p \in U$ et $p < n$ alors $\mu_0(\bigcup_{k=0}^{p} A_k) = \sum_{k=0}^{p} \mu_0(A_k)$ or l'égalité (10.276) page 975 montre que $\mu_0(\bigcup_{k=0}^{p+1} A_k) = \mu_0(\bigcup_{k=0}^{p} A_k) + \mu_0(A_{p+1})$ par suite

$$\mu_0(\bigcup_{k=0}^{p+1} A_k) = \sum_{k=0}^{p} \mu_0(A_k) + \mu_0(A_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p+1} \mu_0(A_k)$$

7. Posons $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ alors puisque $\mathrm{dom}(\mu_0)$ est stable par réunions finies $n \to B_n$ est une suite croissante d'éléments de $\mathrm{dom}(\mu_0)$ et l'égalité

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

montre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est borné. Le point *5* (voir (10.278) page 975) montre alors que l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ appartient à $\mathrm{dom}(\mu_0)$ avec

$$\mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(B_n)$$

Or l'égalité (10.279) page 975 montre que

$$\mu_0(B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k) \ .$$

Ainsi on obtient

$$\mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k) \ .$$

8. Posons $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ alors puisque $\mathrm{dom}(\mu_0)$ est stable par réunions finies $n \to B_n$ est une suite croissante d'éléments de $\mathrm{dom}(\mu_0)$ et l'égalité

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

montre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est borné. Le point *5* (voir (10.278) page 975) montre alors que l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ appartient à dom(μ_0) avec

$$\mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(B_n)$$

Or l'inégalité (10.277) page 975 montre que

$$\mu_0(B_n) \le \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k) \ .$$

Ainsi on obtient

$$\mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(B_n) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \mu_0(A_k) \ .$$

(vi)

Par définition (voir la définition [10.16] page 677) tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est somme disjointe finie ou dénombrable d'intervalles ouverts, en particuliers tout ouvert borné de $\mathbb{R}$ est somme disjointe finie ou dénombrable d'intervalles ouverts bornés, donc somme disjointe d'éléments de $\mathcal{S}$ par suite $\mathcal{T}_b \subset \text{dom}(\mu_0)$. il suffit donc de voir que les points $\mathbf{a} \cdots \mathbf{f}$ sont des conséquences directes des points *1* $\cdots$ *8* de (v)

a Provient des égalités $\mu(\varnothing) = \mu_0(\varnothing) = 0$

b Provient de l'inégalité (10.275) page 974 et de l'égalité (10.276) page 975

c Par (v) *1* on a

$$\mu(I) = \mu_0(I) = m_0(I) = l(I) = \sup\{t : t \in I\} - \inf\{t : t \in I\}$$

d Si D est fini de cardinal $n+1$ alors il existe une bijection $k \to O_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans l'ensemble fini D et l'inégalité (10.284) page 976 provient de l'inégalité (10.277) page 975 puisque

$$\mu(\bigcup_{O\in \mathrm{D}} O) = \mu(\bigcup_{k=0}^{n} O_k)$$

Si D est dénombrable il existe une bijection $k \to O_k$ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble D, μ étant sommable sur D la suite $x_n = \sum_{k=0}^{n} \mu(O_k)$ est majoré par $\sum_{O\in D} \mu(O)$ et l'inégalité (10.281) page 976 montre que

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} O_k) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \mu(O_k) \le \sum_{O\in D} \mu(O) \ .$$

e Si P est une partition finie de cardinal $n+1$ il existe une bijection $k \to O_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans l'ensemble fini P ainsi

$$\mu(\bigcup_{O\in \mathrm{P}} O) = \mu(\bigcup_{k=0}^{n} O_k)$$

et l'égalité (10.279) page 975 montre que

$$\mu(\bigcup_{k=0}^{n} O_k) = \sum_{k=0}^{n} \mu(O_k) = \sum_{O\in \mathrm{P}} \mu(O)$$

Si P est une partition dénombrable on montre d'abord que μ est sommable sur P. Il s'agit de montrer que l'ensemble

$$U_\mu(\mathrm{P}) = \{x \in \mathbb{R}_+ / \ \exists\ F \in \mathcal{F}(\mathrm{P}) : x = \sum_{O\in F} \mu(O)\}$$

est majoré. Cela résulte des points suivants :

— puisque $\bigcup_{O\in \mathrm{P}} O$ est borné il existe $(a,\ b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $\bigcup_{O\in \mathrm{P}} O \subset]a\ ,\ b[$. En particulier pour tout sous-ensemble fini F de P l'inclusion $\bigcup_{O\in F} O \subset]a\ ,\ b[$ est vérifiée.

— Si F est un sous-ensemble fini de P de cardinal $n+1$ il existe une bijection $k \to O'_k$ de $\mathbb{N}_n$ dans F on a $\bigcup_{O\in F} O = \bigcup_{k=0}^{n} O'_k$ l'égalité (10.279) page 975 montre que

$$\sum_{k=0}^{n} \mu(O'_k) = \mu(\bigcup_{k=0}^{n} O'_k)$$

et (10.275) page 974 montre alors

$$\sum_{k=0}^{n} \mu(O'_k) \le \mu(\bigcup_{k=0}^{n} O'_k) \le \mu]a\ ,\ b[\le b-a$$

$k \to O'_k$ étant bijective on obtient

$$\sum_{O\in F} \mu(O) \le \sum_{k=0}^{n} \mu(O'_k) \le b-a$$

Ce qui montre que μ est sommable sur P et

$$\sum_{O\in \mathrm{P}} \mu(O) \le b-a\ .$$

Il reste à établir l'égalité

$$\mu(\bigcup_{O\in \mathrm{P}} O) = \sum_{O\in \mathrm{P}} \mu(O)\ .$$

D'abord l'inégalité (10.284) page 976 montre que

$$\mu(\bigcup_{O\in \mathrm{P}} O) \le \sum_{O\in \mathrm{P}} \mu(O)\ .$$

Ensuite puisque P est dénombrable il existe une bijection $k \to O_k$ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble P et l'égalité (10.280) page 975 montre que

$$\mu(\bigcup_{O\in \mathrm{P}} O) = \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} O_k) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{k=0}^{n} \mu(O_k))$$

il suffit donc de montrer que pour tout sous-ensemble fini F de P on a

$$\sum_{O\in F} \mu(O) \le \sup_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{k=0}^{n} \mu(O_k))$$

or si F est un sous-ensemble fini de P alors $O^{-1}(F) = \{k \in \mathbb{N} / O_k \in F\}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $O^{-1}(F) \subset [0\ ,\ n_0]$ par suite

$$\sum_{k \in O^{-1}(F)} \mu(O_k) \leq \sum_{k=0}^{n_0} \mu(O_k) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{k=0}^{n} \mu(O_k))$$

Or par changement de variable

$$\sum_{k \in O^{-1}(F)} \mu(O_k) = \sum_{O \in F} \mu(O)$$

ainsi on obtient

$$\sum_{O \in F} \mu(O) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{k=0}^{n} \mu(O_k))\ .$$

f l'égalité (10.286) page 976 est une conséquence directe de l'égalité (10.278) page 975

■

Au passage Le théorème (10.28) page 974 permet de construire un germe de mesure de Lebesgue , c'est à dire une application de l'ensemble des ouverts bornés dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés **a** $\cdots$ **f** du point (vi) de ce théorème-. On rappelle quand même la définition.

Définition 10.72 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels,* $\mathcal{T}_b = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}_b$ *la famille des ouverts bornés de* $\mathbb{R}$*, une application* $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{T}_b, \mathbb{R}_+)$ *est appelée un* ***germe de mesure de Lebesgue****, si elle possède les propriétés suivantes :*

a $\mu(\varnothing) = 0$

b *si* $(O_0, O_1) \in \mathcal{T}_b \times \mathcal{T}_b$ *alors*

$$O_0 \subset O_1 \Rightarrow \mu(O_0) \leq \mu(O_1) \quad \text{et} \quad \mu(O_0 \cap O_1) + \mu(O_0 \cup O_1) = \mu(O_0) + \mu(O_1) \tag{10.292}$$

c *pour tout intervalle ouvert borné*

$$\mu(I) = \sup\{t : t \in I\} - \inf\{t : t \in I\} \tag{10.293}$$

d *Si* D *est un sous-ensemble fini ou dénombrable de* $\mathcal{T}_b$ *tel que* μ *est sommable sur D*

$$\mu(\bigcup_{O \in \mathrm{D}} O) \leq \sum_{O \in \mathrm{D}} \mu(O) \tag{10.294}$$

e *Pour toute* partition *finie ou dénombrable* P *en éléments de* $\mathcal{T}_b$ *tel que l'ensemble* $\bigcup_{O \in \mathrm{P}} O$ *est borné* μ *est sommable sur* P *et*

$$\mu(\bigcup_{O \in \mathrm{P}} O) = \sum_{O \in \mathrm{P}} \mu(O) \tag{10.295}$$

f *si* $O \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\ ,\ \mathcal{T}_b)$ *est une suite croissante d'ouverts borné telle que l'ensemble* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ *est borné alors*

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(O_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(O_n)\ . \tag{10.296}$$

Le lemme simple suivant sera souvent utilisé .

Lemme 10.47 *Si* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels, Il existe un et un seul germe de mesure de Lebesgue.*

Preuve L'existence est prouvée au théorème (10.28) page 974 il suffit donc de prouver l'unicité . Soit $\mu_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{T}_b, \mathbb{R}_+)$ et $\mu_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathcal{T}_b, \mathbb{R}_+)$ des germes de mesure de Lebesgue , d'après le théorème (10.4) page 670 tout ouvert est réunion d'une partition P finie ou dénombrable d'intervalles ouverts, par suite tout ouvert borné est somme disjointe d'une famille finie ou dénombrable d'intervalles ouverts bornés, ainsi les égalités (10.293) et (10.291) montre que si $O = \bigcup_{I \in \mathrm{P}} I$

$$\mu_0(O) = \sum_{I \in \mathrm{P}} \mu_0(I) = \sum_{I \in \mathrm{P}} l(I) = \sum_{I \in \mathrm{P}} (\sup\{t : t \in I\} - \inf\{t : t \in I\}) = \sum_{I \in \mathrm{P}} \mu_1(I) = \mu_1(O)$$

■

Ainsi on peut parler « du » germe de mesure de Lebesgue associé à un corps de réel .

10.13.6 *Construction de la mesure de Lebesgue, suite et fin*

On aura besoin de la notion suivante :

Définition 10.73 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{P}_b(\mathbb{R})$ *la famille des ensembles bornés de* $\mathbb{R}$ *,* $\mathcal{S}_b = \mathcal{P}_b(\mathbb{R}) \cup \{\varnothing\}$ *le semi-anneau de Boole des sous-ensembles bornés de* $\mathbb{R}$*,* $\mathcal{S} = \mathfrak{a}(\mathcal{I}_b) \cup \{\varnothing\}$ *le semi-anneau de Boole des sommes disjointes finies d'intervalles bornés,* $\mathbf{P}(\mathcal{S})$ *l'ensemble des partitions en éléments de* $\mathcal{S}$*,* $m_0 : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}_+$ *l'application définie au théorème* [10.26] *page* 949 *et* μ_0 *la fonction définie au théorème* [10.28] *page* 974 *. Enfin pour tout* $A \in \mathcal{S}_b$ *on note* $e^*(A\ , \mathrm{dom}(\mu_0))$ *la famille de sous-ensembles de* $\mathrm{dom}(\mu_0)$ *définie par*

$$e^*(A, \mathrm{dom}(\mu_0)) = \{G \in \mathrm{dom}(\mu_0) / \ A \subset G\}$$

et $U^*(A)$ *l'ensemble*

$$U^*(A) = \{x \in \mathbb{R}_+ / \ \exists\ G \in e^*(A, \mathrm{dom}(\mu_0)) : x = \mu_0(G)\}$$

On appelle ***mesure extérieure*** *de* A *au dessus de* μ_0 *la borne inférieure de* $U^*(A)$ *on note* μ^* *l'application de* $\mathcal{S}_b$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par*

$$\mu^*(A) = \inf\{x : x \in U^*(A)\} = \inf\{\mu_0(G) : A \subset G\}$$

Le fait que $e^*(A, \mathrm{dom}(\mu_0)) \neq \varnothing$ est assuré par l'inclusion de tout ensemble borné dans un intervalle borné.

Théorème 10.29 *On note* $(\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ \leq)$ *un corps de réels,* $\mathbb{N}$ *son sous-ensemble d'entiers naturels,* $\mathcal{P}_b(\mathbb{R})$ *la famille des ensembles bornés de* $\mathbb{R}$ *,* $\mathcal{S}_b = \mathcal{P}_b(\mathbb{R}) \cup \{\varnothing\}$ *le semi-anneau de Boole des sous-ensembles bornés de* $\mathbb{R}$ *,* $\mathcal{S} = \mathfrak{a}(\mathcal{I}_b) \cup \{\varnothing\}$ *le semi-anneau de Boole des sommes disjointes finies d'intervalles bornés,* $\mathbf{P}(\mathcal{S})$ *l'ensemble des partitions en éléments de* $\mathcal{S}$ *et* $m_0 : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}_+$ *l'application définie au théorème* [10.26] *page* 949*. enfin* μ_0 *est la fonction définie au théorème* [10.28] *page* 974 *et* μ^* *la mesure extérieure au dessus de* μ_0 *.*

(i) L'application μ^* *vérifie les propriétés suivantes*

1. *Pour tout* $G \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ *on a* $\mu^*(G) = \mu_0(G)$ *en particulier pour tout* $S \in \mathcal{S}$ *on a* $\mu^*(S) = m_0(S)$*.*
2. *Pour tout* $(A\ ,\ B) \in \mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_b$

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)\ , \tag{10.297}$$

en particulier

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad \text{et} \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

3. Pour tout $(A\ ,\ B) \in \mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_b$ *tel que* $A \subset B$

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) \tag{10.298}$$

4. Si $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{S}_b)$ *est une famille finie à valeurs dans* $\mathcal{S}_b$ *alors*

$$\mu^*(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k)\ . \tag{10.299}$$

5. Si $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{S}_b)$ *est une suite croissante à valeurs dans* $\mathcal{S}_b$ *telle que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est borné alors*

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) \tag{10.300}$$

6. Si $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{S}_b)$ *est une suite à valeurs dans* $\mathcal{S}_b$ *telle que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est borné et telle que la suite* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathbb{R}_+)$ *définie par*

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k)$$

est majorée alors

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k) \tag{10.301}$$

(ii) Le sous-ensemble $\mathcal{L}$ *de* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *défini par*

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) /\ \forall\ S \in \mathcal{S} \quad \mu^*(A^c \cap S) + \mu^*(A \cap S) = m_0(S)\}$$

possède les propriétés suivantes

I $\mathcal{L}$ *est un anneau de Boole sur* $\mathbb{R}$ *contenant* $\mathcal{S}$ *de plus* μ^* *est additive sur les ensembles bornés de* $\mathcal{L}$ *ainsi :*

1. $\mathbb{R} \in \mathcal{L}$ *et* $\varnothing \in \mathcal{L}$.

2. Pour tout $A \in \mathcal{L}$ *on a* $A^c \in \mathcal{L}$

3. Si $(A\ , B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ *alors* $A \cap B \in \mathcal{L}$ *et* $A \cup B \in \mathcal{L}$

4. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$.

5. Si $(A\ , B) \in (\mathcal{L} \times \mathcal{L}))$ *alors pour tout* $S \in \mathcal{S}$

$$\mu^*(A \cup B \cap S) + \mu^*(A \cap B \cap S) = \mu^*(A \cap S) + \mu^*(B \cap S) \tag{10.302}$$

si de plus A et B sont bornés

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

II *Si* $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}_n, \mathcal{L})$ *est une suite finie à valeurs dans* $\mathcal{L}$ *alors*

1. $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{L}$

2. De plus si A est une partition telle que $\bigcup_{k=0}^{n} A_k$ *est borné*

$$\mu^*(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k) \tag{10.303}$$

III *$\mathcal{L}$ est stable par réunion croissante : Si $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{L})$ est une suite croissante à valeurs dans $\mathcal{L}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$.*

IV *$\mathcal{L}$ est stable par réunions dénombrable : Si $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{L})$ est une suite à valeurs dans $\mathcal{L}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$.*

V *$\mathcal{L}$ est stable par intersections dénombrable : Si $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{L})$ est une suite à valeurs dans $\mathcal{L}$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$.*

VI *L'ensemble $\mathcal{L}_b = \mathcal{L} \cap \mathcal{S}_b$ des éléments bornés ou vide de $\mathcal{L}$ est une* semi-tribu *: cela signifie que*

1. $\mathcal{L}_b$ est un semi-anneau : $\varnothing \in \mathcal{L}$ et

$$(A\ ,\ B) \in \mathcal{L}_b \times \mathcal{L}_b \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{L}_b\ ,\ A \cup B \in \mathcal{L}_b\ ,\ A \cap B^c \in \mathcal{L}_b$$

2. si $B \in \mathcal{L}_b$ et $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{L}_b)$ alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B \in \mathcal{L}_b$$

3. si $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{L}_b)$ alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}_b$$

VII *μ^* est σ-additive sur $\mathcal{L}_b$: Si $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}, \mathcal{L}_b)$ est une partition dénombrable à valeurs dans $\mathcal{L}_b$ telle que l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est borné alors l'ensemble*

$$U^\sigma = \{x \in \mathbb{R}_+ /\ \exists\ n \in \mathbb{N} : x = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k)\}$$

est majoré et

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup\{x : x \in U^\sigma\}$$

ce qu'on note :

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k))\ .$$

VIII *L'ensemble $\mathcal{T}$ des ouverts de $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathcal{L}$*

IX *L'ensemble $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ des fermés de $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathcal{L}$*

X *$\mathcal{L}$ est* complète *: si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $S \in \mathcal{S}$ $\mu^*(A \cap S) = 0$ alors $A \in \mathcal{L}$. En particulier tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ vérifiant $\mu^*(A) = 0$ est un élément de $\mathcal{L}_b$*

Preuve

(i)

1. Soit $G \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ Il s'agit de montrer que $\mu_0(G)$ est le plus grand minorant de l'ensemble

$$U^*(G) = \{x \in \mathbb{R}_+ /\ \exists\ G' \in e^*(G\ ,\ \mathrm{dom}(\mu_0)) : x = \mu_0(G')\}$$

Puisque $G \in e^*(G\ ,\ \mathrm{dom}(\mu_0))$ on a $\mu_0(G) \in U^*(G)$ et il suffit de montrer que $\mu_0(G)$ est un minorant de $U^*(G)$, or d'après (10.275) page 974 :

$$G' \in e^*(G\ ,\ \mathrm{dom}(\mu_0)) \Rightarrow G \subset G' \Rightarrow \mu_0(G) \leq \mu_0(G')\ .$$

2. On montre que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon \ .$$

En effet
— puisque $\mu^*(A)$ est le plus grand minorant de $U^*(A)$ le réel $\mu^*(A) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant de $U^*(A)$ par suite il existe $G \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ tel que $A \subset G$ et $\mu_0(G) < \mu^*(A) + \dfrac{\varepsilon}{2}$
— de même puisque $\mu^*(B)$ est le plus grand minorant de $U^*(B)$ le réel $\mu^*(B) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant de $U^*(B)$ par suite il existe $G' \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ tel que $B \subset G'$ et $\mu_0(G') < \mu^*(B) + \dfrac{\varepsilon}{2}$
Ainsi

$$\mu_0(G) + \mu_0(G') < \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon$$

et l'égalité (10.276) page 975 montre que

$$\mu_0(G) + \mu_0(G') = \mu_0(G \cap G') + \mu_0(G \cup G')$$

par suite

$$\mu_0(G \cap G') + \mu_0(G \cup G') < \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon$$

ainsi puisque $G \cap G' \in e^*(A \cap B \ , \mathrm{dom}(\mu_0))$ et $G \cup G' \in e^*(A \cup B \ , \ \mathrm{dom}(\mu_0))$ on obtient

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cup B) \leq \mu_0(G \cap G') + \mu_0(G \cup G') < \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon \ .$$

3. Si $A \subset B$ alors $e^*(B \ , \ \mathrm{dom}(\mu_0)) \subset e^*(A \ , \ \mathrm{dom}(\mu_0))$ par suite $U^*(B) \subset U^*(A)$ et

$$\inf\{x : x \in U^*(A)\} \leq \inf\{x : x \in U^*(B)\}$$

4. On pose

$$U = \{p \in \mathbb{N}_n / \ \mu^*(\bigcup_{k=0}^{p} A_k) \leq \sum_{k=0}^{p} \mu^*(A_k)\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$
— puisque $\mu^*(A_0) \leq \mu^*(A_0)$ on a $0 \in U$
— si $p \in U$ et $p < n$ alors l'ensemble $B_p = \bigcup_{k=0}^{p} A_k$ vérifie $\mu^*(B_p) \leq \sum_{k=0}^{p} \mu^*(A_k)$ et il résulte de l'égalité (10.297) page 989 que

$$\mu^*(\bigcup_{k=0}^{p+1} A_k) \leq \mu^*(B_p \cup A_{p+1}) \leq \mu^*(B_p) + \mu^*(A_{p+1}) \leq \sum_{k=0}^{p} \mu^*(A_k) + \mu^*(A_{p+1}) \leq \sum_{k=0}^{p+1} \mu^*(A_k)$$

Ainsi on obtient $U = \mathbb{N}_n$ et

$$\mu^*(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k) \ .$$

5. Posons $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ par hypothèse B est borné et l'inégalité (10.298) page 990 montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu^*(A_n) \leq \mu^*(B)$ par suite

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(B)$$

il suffit donc de montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $\mu^*(B) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon$. Puisque $\mu^*(A_n)$ est le plus grand minorant de $U^*(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ le sous-ensemble $\mathcal{G}_n$ de $\mathrm{dom}(\mu_0)$ défini par

$$\mathcal{G}_n = \{G \in e^*(A_n, \mathrm{dom}(\mu_0)) / \ \mu_0(G) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\}$$

est non vide. Si h est une fonction de choix pour $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ on montre que la suite $G' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{ens}}(\mathbb{N}\,, \mathrm{dom}(\mu_0))$ (on rappelle que $\mathrm{dom}(\mu_0)$ est stable par réunion finies) définie par

$$G'_n = \bigcup_{k=0}^{n} h(\mathcal{G}_k)$$

vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_0(G'_n) \leq \mu^*(A_n) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \ .$$

On pose

$$H = \{n \in \mathbb{N}/\ \mu_0(G'_n) \leq \mu^*(A_n) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\}$$

et on montre que H est héréditaire

(a) L'assertion $0 \in H$ provient du fait que $G'_0 = h(\mathcal{G}_0) \in \mathcal{G}_0$

(b) Si $n \in H$ alors d'aprés l'égalité (10.276) page 975

$$\mu_0(G'_{n+1}) = \mu_0(G'_n \cup h(\mathcal{G}_{n+1})) = \mu_0(G'_n) + \mu_0(h(\mathcal{G}_{n+1})) - \mu_0(G'_n \cap h(\mathcal{G}_{n+1}))$$

or

— puisque $n \in H$

$$\mu_0(G'_n) \leq \mu^*(A_n) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

— puisque $h(\mathcal{G}_{n+1}) \in \mathcal{G}_{n+1}$

$$\mu_0(h(\mathcal{G}_{n+1})) \leq \mu^*(A_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$$

ceci montre déjà que

$$\mu_0(G'_{n+1}) \leq \mu^*(A_{n+1}) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \mu^*(A_n) - \mu_0(G'_n \cap h(\mathcal{G}_{n+1})) \tag{10.304}$$

mais par construction $A_n \subset G'_n$ et $A_{n+1} \subset h(\mathcal{G}_{n+1})$ par suite $A_n \cap A_{n+1} \subset G'_n \cap h(\mathcal{G}_{n+1})$ et la croissance de $n \to A_n$ entraîne donc $\mu^*(A_n) \leq \mu_0(G'_n \cap h(\mathcal{G}_{n+1}))$. L'inégalité (10.304) montre alors que $n+1 \in H$.

Ainsi $H = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_0(G'_n) \leq \mu^*(A_n) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon \ .$$

Si $U \in \mathrm{dom}(\mu_0)$ vérifie $B \subset U$ alors par construction pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n \subset G'_n \cap U$ et la suite $n \to G^2_n$ définie par $G^2_n = G'_n \cap U$ est une suite croissante telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G^2_n$ est borné avec

$$B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G^2_n \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu_0(G^2_n) \leq \mu_0(G'_n) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

Ainsi (10.278) page 975 montre que

$$\mu^*(B) \leq \mu_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G^2_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(G^2_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon \ .$$

6. Pour $n \in \mathbb{N}$ posons $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est borné . Puisque $n \to B_n$ est croissante l'égalité (10.300) page 990 montre que

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n) \tag{10.305}$$

et l'inégalité (10.299) page 990 montre que

$$\mu^*(B_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k)$$

par suite l'égalité (10.305) page (994) montre

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k) \ .$$

(ii)

I On montre que $\mathcal{L}$ est un anneau de Boole

1. L'assertion $\varnothing \in \mathcal{L}$ et $\mathbb{R} \in \mathcal{L}$ provient de $\mu^*(\varnothing) = 0$ et de l'égalité $\mu^*(S) = m_0(S)$ pour tout $S \in \mathcal{S}$.
2. Il résulte de la définition même de $\mathcal{L}$ que

$$A \in \mathcal{L} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{L}$$

3. Il s'agit de montrer que pour tout $S \in \mathcal{S}$ et tout $(A\ ,\ B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$

$$\mu^*((A \cup B) \cap S) + \mu^*((A \cup B)^c \cap S) = m_0(S)$$

et

$$\mu^*((A \cap B) \cap S) + \mu^*((A \cap B)^c \cap S) = m_0(S) \ .$$

Or l'inégalité (10.297) page 989 entraîne les inégalités suivantes
   (a) $\mu^*((A \cup B) \cap S) + \mu^*((A \cap B) \cap S) \leq \mu^*(A \cap S) + \mu^*(B \cap S)$
   (b) $\mu^*((A \cup B)^c \cap S) + \mu^*((A \cap B)^c \cap S) \leq \mu^*(A^c \cap S) + \mu^*(B^c \cap S)$
   (c) $m_0(S) \leq \mu^*((A \cup B) \cap S) + \mu^*((A \cup B)^c \cap S)$
   (d) $m_0(S) \leq \mu^*((A \cap B) \cap S) + \mu^*((A \cap B)^c \cap S)$

Ainsi $A \cup B \in \mathcal{L}$ puisque si $\mu^*((A \cup B) \cap S) + \mu^*((A \cup B)^c \cap S) > m_0(S)$ en sommant les inégalités (a) et (b) on obtient grâce à (d)

$$[\mu^*(A \cap S) + \mu^*(A^c \cap S)] + [\mu^*(B \cap S) + \mu^*(B^c \cap S)] > 2m_0(S)$$

par suite l'un des ensembles A ou B n'appartient pas à $\mathcal{L}$. Enfin par exemple l'égalité

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$

montre que $A \cap B \in \mathcal{L}$.

4. Puisque $\mathcal{S}$ est un semi-anneau de Boole pour tout $A \in \mathcal{S}$ et $S \in \mathcal{S}$ on a $A \cap S \in \mathcal{S}$ et $A^c \cap S \in \mathcal{S}$ par suite

$$\mu^*(A \cap S) + \mu^*(A^c \cap S) = m_0(A \cap S) + m_0(A^c \cap S)$$

et l'additivité de m_0 sur $\mathcal{S}$ (voir théorème [10.26] page 949)montre alors que

$$\mu^*(A \cap S) + \mu^*(A^c \cap S) = m_0(S) \ .$$

5. D'après l'inégalité (10.297) page 989 il suffit de montrer que pour tout $S \in \mathcal{S}$

$$\mu^*(A \cap B \cap S) + \mu^*(A \cup B \cap S) \geq \mu^*(A \cap S) + \mu^*(B \cup S)$$

Or :
— puisque $A \cap B \in \mathcal{L}$ pour tout $S \in \mathcal{S}$

$$\mu^*(A \cap B \cap S) = m_0(S) - \mu^*(A^c \cup B^c \cap S)$$

— puisque $A \cup B \in \mathcal{L}$ pour tout $S \in \mathcal{S}$

$$\mu^*(A \cup B \cap S) = m_0(S) - \mu^*(A^c \cap B^c \cap S)$$

par suite

$$\mu^*(A \cap B \cap S) + \mu^*(A \cup B \cap S) = 2m_0(S) - [\mu^*(A^c \cap B^c \cap S) + \mu^*(A^c \cup B^c \cap S)]$$

l'inégalité (10.297) page 989 donne

$$\mu^*(A^c \cap B^c \cap S) + \mu^*(A^c \cup B^c \cap S) \leq \mu^*(A^c \cap S) + \mu^*(B^c \cap S)$$

ainsi on obtient

$$\mu^*(A \cap B \cap S) + \mu^*(A \cup B \cap S) \geq 2m_0(S) - [\mu^*(A^c \cap S) + \mu^*(B^c \cap S)]$$

et puisque $(A\ ,\ B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$

$$2m_0(S) - [\mu^*(A^c \cap S) + \mu^*(B^c \cap S)] = \mu^*(A \cap S) + \mu^*(B \cap S)\ .$$

Enfin lorsque A et B sont bornés il existe un intervalle S tel que $A \cup B \subset S$ et l'égalité (10.302) page 990 s'écrit

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)\ .$$

Preuve de II

1. On pose

$$U = \{p \in \mathbb{N}_n / \bigcup_{k=0}^{p} A_k \in \mathcal{L}\}$$

et on montre que $U = \mathbb{N}_n$.
   (a) Puisque $A_0 \in \mathcal{L}$ on a $0 \in U$
   (b) Si $p \in U$ et $p < n$ alors l'ensemble $\bigcup_{k=0}^{p} A_k \in \mathcal{L}$ par suite le point *3* de I montre $\bigcup_{k=0}^{p+1} A_k \in \mathcal{L}$ comme réunion de deux ensembles de $\mathcal{L}$

   Ainsi $U = \mathbb{N}_n$ et $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{L}$
2. On pose

$$U' = \{p \in \mathbb{N}_n / \mu^*(\bigcup_{k=0}^{p} A_k) = \sum_{k=0}^{p} \mu^*(A_k)\}$$

et on montre que $U' = \mathbb{N}_n$.
   (a) Puisque $\sum_{k=0}^{0} \mu^*(A_k) = \mu^*(A_0)$ on a $0 \in U$

(b) Si $p \in U'$ et $p < n$ alors $\mu^*(\bigcup_{k=0}^{p} A_k) = \sum_{k=0}^{p} \mu^*(A_k)$ et l'additivité de μ^* sur les ensembles bornés de $\mathcal{L}$ (voir le point *5* de I) montre que

$$\mu^*(\bigcup_{k=0}^{p+1} A_k) = \sum_{k=0}^{p} \mu^*(A_k) + \mu^*(A_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p+1} \mu^*(A_k)$$

Ainsi $U' = \mathbb{N}_n$ et $\mu^*(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k)$

Preuve de III

Il s'agit de montrer que pour tout $S \in \mathcal{S}$

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap S) + \mu^*(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \cap S) = m_0(S)$$

et l'inégalité (10.297) page 989 montre qu'il suffit d'établir

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap S) + \mu^*(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \cap S) \leq m_0(S) \ .$$

Or :

— puisque la suite $n \to A_n \cap S$ est une suite croissante dont la réunion est bornée l'égalité (10.300) page 990 montre que

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap S) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n \cap S)$$

il suffit donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mu^*(A_n \cap S) + \mu^*(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \cap S) \leq m_0(S)$$

— d'après l'inégalité (10.298) page 990 on a , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \cap S) \leq \mu^*(A_n^c \cap S)$$

par suite

$$\mu^*(A_n \cap S) + \mu^*(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \cap S) \leq \mu^*(A_n \cap S) + \mu^*(A_n^c \cap S)$$

— puisque $A_n \in \mathcal{L}$ on a

$$\mu^*(A_n \cap S) + \mu^*(A_n^c \cap S) \leq m_0(S) \ .$$

Preuve de IV

Posons $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ alors d'après II la suite $n \to B_n$ est une suite à valeurs dans $\mathcal{L}$ et puisqu'elle est croissante le point III montre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{L}$ la conclusion suit alors de l'égalité

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Preuve de V

D'après I la suite $n \to A_n^c$ est une suite à valeurs dans $\mathcal{L}$ ainsi IV montre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{L}$ et la stabilité de $\mathcal{L}$ par complémentation (voir I) entraîne alors que $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c \in \mathcal{L}$. La conclusion provient alors de l'égalité

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Ce qui montre que $\mathcal{L}$ est stable par intersections dénombrables .

Preuve de VI

1. Il est clair que l'ensemble vide appartient à $\mathcal{L}_b$ et que si A et B sont vides ou bornés et appartiennent à $\mathcal{L}$ alors $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \cap B^c$ sont vides ou bornés comme de plus I montre qu'ils appartiennent aussi à $\mathcal{L}$ on obtient
$$(A\ ,\ B) \in \mathcal{L} \cap \mathcal{S}_b \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{L}_b\ ,\ A \cup B \in \mathcal{L}_b\ ,\ A \cap B^c \in \mathcal{L}_b$$
2. Puisque B est vide ou borné est clair que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B$ est vide ou borné et puisque pour tout $B \in \mathcal{L}$ on a $A_n \cap B \in \mathcal{L}$ le point IV montre que
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B \in \mathcal{L}$$
par suite
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B \in \mathcal{L} \cap \mathcal{S}_b\ .$$
3. Il est clair que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est vide ou borné et le point V montre que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$$
par suite
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L} \cap \mathcal{S}_b\ .$$

Preuve de VII

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est borné . Puisque $n \to B_n$ est croissante l'égalité (10.300) page 990 montre que

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n) \tag{10.306}$$

et l'égalité (10.303) page 990 montre que

$$\mu^*(B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k)$$

par suite l'égalité (10.306) page (997) montre

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A_k)\ .$$

Preuve de VIII

Par définition tout ouvert de $\mathbb{R}$ est somme disjointe finie ou dénombrable d'intervalles ouverts , il suffit donc , d'après IV , de montrer que les intervalles sont dans $\mathcal{L}$ or

— si I est un intervalle borné alors $I \in \mathcal{S}$ et puisque $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ on obtient $I \in \mathcal{L}$

— si I est minoré ouvert à gauche et non majoré alors

$$I =]a \ , \rightarrow [= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a \ , \ a+n[$$

et I est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}$.

— si I est minoré fermé à gauche et non majoré alors

$$I = [a \ , \rightarrow [= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a \ , \ a+n]$$

et I est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}$.

— si I est majoré fermé à droite et non minoré alors

$$I =] \leftarrow, a] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a-n \ , \ a]$$

et I est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}$.

— si I est majoré ouvert à droite et non minoré alors

$$I =] \leftarrow, a[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a-n \ , \ a[$$

et I est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}$.

— si I n'est ni minoré ni majoré alors $I = \mathbb{R}$.

Preuve de IX

Si F est fermé alors F^c est ouvert et VIII montre que $F^c \in \mathcal{L}$, puisque $\mathcal{L}$ est stable par complémentation l'égalité $F = (F^c)^c$ montre que $F \in \mathcal{L}$.

Preuve de X

D'après l'inégalité (10.297) page 989 pour tout $S \in \mathcal{S}$

$$m_0(S) \leq \mu^*(A \cap S) + \mu^*(A^c \cap S)$$

par suite si $\mu^*(A \cap S) = 0$ on obtient

$$m_0(S) \leq \mu^*(A \cap S) + \mu^*(A^c \cap S) \leq \mu^*(A^c \cap S) \leq m_0(S) \ .$$

■