La transformation de Laplace

par

Yves Martinez-Maure

I. Introduction.

Les transformations de Fourier et de Laplace sont deux exemples importants de transformations intégrales de la forme

$$\mathcal{T} : A \to B, f \mapsto F(s) = \int_I K(s,t)\, f(t)\, dt,$$

où A et B désignent deux espaces fonctionnels, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $K(s,t)$ une fonction réelle ou complexe appelée **noyau de la transformation**. La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ correspond au choix suivant :

$$I = \mathbb{R}, \quad s = y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad K(s,t) = e^{-ist} \ ;$$

La transformation de Laplace $\mathcal{L}$ est quant à elle définie en prenant :

$$I = \mathbb{R}_+, \quad s = x + iy \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad K(s,t) = e^{-st}.$$

Si l'on fait le choix d'un espace fonctionnel A ne contenant que des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont **causales**, c'est-à-dire telles que $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$, la transformation de Laplace peut être considérée comme une extension de la transformation de Fourier. En effet, si elle existe, la transformée de Fourier d'une fonction causale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est donnée par la restriction de la transformée de Laplace à l'axe imaginaire par :

$$\boxed{\mathcal{L}[f](iy) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt} dt = \mathcal{F}[f](y)}.$$

Ces deux transformations ont de nombreuses applications pratiques (physique, économie, probabilités, sciences de l'ingénieur, etc). La transformation de Laplace est en particulier très utilisée pour résoudre des équations différentielles et pour déterminer la fonction de transfert d'un système linéaire.

[1] La transformation de Laplace par Y. Martinez-Maure

Les particularités de la transformation de Laplace et son utilité

Le passage de la variable réelle y à la variable complexe $x+iy$ (et donc l'ajout d'un facteur multiplicatif e^{-xt} dans l'intégrale) a pour conséquence immédiate que la classe des fonctions admettant une transformée de Laplace est beaucoup plus vaste que la classe des fonctions admettant une transformée de Fourier.

La restriction de l'espace fonctionnel A aux seules fonctions causales fait que **la transformation de Laplace est particulièrement adaptée à l'étude de la dynamique des systèmes dont on connait l'état à un instant donné** (pris comme instant initial en posant $t=0$ à cet instant). Étant donné un système dont on connait l'état initial et l'équation régissant son évolution, le problème est typiquement de déterminer, à chaque instant $t>0$, la valeur $f(t)$ que prend une variable f du système à laquelle on s'intéresse.

Pourquoi la transformation de Laplace est-elle si utile en pratique ? Dans les cours d'analyse de Licence, on apprend à résoudre les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants (telles que, $ay''+by'+cy=0$, où $a\neq 0$). La recherche des solutions de la forme $\varphi_\lambda(t)=e^{\lambda t}$, où $\lambda\in\mathbb{C}$, permet de démontrer que la résolution d'une telle équation se ramène à celle d'une équation algébrique dite caractéristique (à savoir $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ dans l'exemple considéré). La transformation de Laplace généralise cette idée : elle permet de ramener des problèmes d'analyse linéaire (par exemple, la résolution d'une équation différentielle linéaire) à des résolutions d'équations algébriques. Le point crucial est que, sous des hypothèses que nous préciserons plus tard, prendre la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction f revient essentiellement à multiplier la transformée de Laplace de cette fonction f par s :

$$\boxed{\mathcal{L}[f'](s)=s\mathcal{L}[f](s)-f(0^+)}\ ,\text{ où } f\left(0^+\right)=\lim_{t\downarrow 0}f(t)\,.$$

La transformation de Laplace étant bien sûr linéaire (par linéarité de l'intégrale), cette formule capitale explique à la fois que : (1) La transformation de Laplace transforme toute équation différentielle linéaire à coefficients constants, telle que $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=d(t)$, en une équation algébrique (en l'occurrence affine) $a(s)Y(s)=b(s)$, où $Y=\mathcal{L}[y]$; (2) Les conditions initiales (ici de la forme $y(0)=y_0$ et $y'(0)=y_0'$) sont automatiquement prises en compte dans le calcul.

[2] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

Dans la plupart des applications, la transformation de Laplace peut être considérée comme essentiellement bijective (les fonctions admettant la même transformée pouvant être considérées comme équivalentes d'un point de vue pratique) si bien qu'il nous est possible de définir une transformation de Laplace inverse. Nous pourrons ainsi envisager, par exemple, de déterminer la solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(E) \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = x}, \quad \text{où } (a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*,$$

qui vérifie les conditions initiales

$$(I) \qquad \boxed{\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, y^{(k)} = y_k}, \quad \text{où } (y_0, \ldots y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,$$

selon le schéma suivant :

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{Domaine dit temporel} \left\{ \right. & \boxed{\left\{ \begin{array}{c} \text{L'équation } (E) \\ \text{Les conditions initiales } (I) \end{array} \right.} & & - - -? - - > & & \boxed{\begin{array}{c} \text{La solution de } (E) \\ \text{qui vérifie } (I) \end{array}} \\
 & \downarrow \ \mathcal{L} & & & & \uparrow \ \mathcal{L}^{-1} \\
\text{Domaine dit symbolique} \left\{ \right. & \boxed{\begin{array}{c} \text{Une équation affine } (A) \ : \\ a(s)\, Y(s) = b(s), \text{ où } Y = \mathcal{L}[y] \end{array}} & \longrightarrow & \begin{array}{c} \text{Résolution} \\ \text{de } (A) \end{array} & \longrightarrow & \boxed{Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}}
\end{array}
$$

Pour les systèmes à temps discret, il existe un calcul symbolique analogue connu sous le nom de **transformée en z**.

II. La transformation de Laplace.

1. Définitions et exemples.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[3] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

Définition. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est dite **causale** si elle est telle que $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.*

Remarque. N'importe quelle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ peut-être envisagée comme une fonction causale. Il suffit pour cela de la multiplier par la **fonction échelon-unité** $\mathcal{U}(t)$ (également notée $\mathcal{H}(t)$ et alors appelée **fonction de Heaviside**), définie par :

$$\boxed{\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}}.$$

(On s'abstient très souvent de définir cette fonction en 0 car sa valeur en ce point n'a aucune importance en pratique).

Définition. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction causale localement intégrable sur $\mathbb{R}$. La **transformée de Laplace** de f, lorsqu'elle existe, est la fonction F de la variable (réelle ou complexe) s qui est définie par :*

$$\boxed{F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt}.$$

*On dit que $f(t)$ est **l'original** et que $F(s)$ est **l'image**. On écrit $F = \mathcal{L}[f]$ ou $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ ou encore $f(t) \sqsupset F(s)$ pour exprimer que F est la transformée de Laplace de f.*

Notons que la transformée de Laplace de f existe s'il existe au moins un $s \in \mathbb{C}$ tel que la fonction $t \mapsto f(t)\, e^{-st}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

Remarque. La transformée de Laplace de f n'existe pas toujours. Par exemple,
l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathcal{U}(t)\, e^{t^2}$ n'admet pas de transformée de Laplace. Lorsque la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f]$ existe, elle n'est généralement définie que sur une partie du plan complexe.

Remarque. Par souci de simplicité de l'écriture, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est une fonction donnée par une expression analytique, nous désignerons souvent par $\mathcal{L}[f(t)]$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)\mathcal{U}(t)$, c'est-à-dire la transformée de Laplace de la fonction f envisagée comme une fonction causale. Autrement dit, le facteur $\mathcal{U}(t)$ est sous-entendu.

[4] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

Remarque. Une fonction causale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sera dite continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$. Rappelons qu'une fonction f est dite continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ si elle est continue sur $[a, b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle admet des discontinuités de $1^{ère}$ espèce. Pour rester à un niveau élémentaire (auquel la majorité des résultats seraient admis), **on pourra se restreindre aux fonctions causales continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.**

Exemples.

$\boxed{\textbf{i.}}$ **La fonction-échelon unité $\mathcal{U}$.**

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}](s) = \int_0^{+\infty} \mathcal{U}(t)\, e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

En effet, nous avons alors $\lim_{t \to +\infty} e^{-st} = 0$ puisque $|e^{-st}| = e^{-\operatorname{Re}(s)t}$.

$\boxed{\textbf{ii.}}$ **Les fonctions exponentielles $\varphi_a(t) = e^{at}$, où $a \in \mathbb{C}$.**

$$\mathcal{L}[\varphi_a](s) = \int_0^{+\infty} \varphi_a(t)\, e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \mathcal{L}[\mathcal{U}](s-a),$$

soit

$$\mathcal{L}[\varphi_a](s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a),$$

d'après ce qui précède.

Existence de la transformée de Laplace

Proposition. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction causale localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Supposons que f soit à croissance au plus exponentielle, c'est-à-dire telle que :*

$$\exists (M, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ |f(t)| \leq M e^{\alpha t}.$$

Sa transformée de Laplace $F = \mathcal{L}[f]$ est alors définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > \alpha$.

[5] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

Démonstration. En effet, nous avons alors :

$$\forall (t,s) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}, \quad \left| f(t)\, e^{-st} \right| \leq M \left| e^{(\alpha - s)t} \right| = M e^{(\alpha - \mathrm{Re}(s))t}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \left| f(t)\, e^{-st} \right| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - \mathrm{Re}(s))t} dt = \frac{M}{\mathrm{Re}(s) - \alpha} < +\infty \quad \text{pour } \mathrm{Re}(s) > \alpha.$$

□

Remarque. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction causale localement intégrable sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe au moins un $s \in \mathbb{C}$ tel que la fonction $t \mapsto f(t)\, e^{-st}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Le nombre

$$s_0 = \inf \left(\left\{ s \in \mathbb{R} \,\middle|\, t \mapsto f(t)\, e^{-st} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \right\} \right) \in \overline{\mathbb{R}}$$

est appelé **abscisse d'intégrabilité de** f. La transformée de Laplace de f est naturellement définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > s_0$.

Remarque sur les notations. La variable de Laplace s est également notée p par de nombreux auteurs.

2. Les propriétés de la transformée de Laplace.

a. La $\mathbb{C}$-linéarité.

Proposition. *Soient (λ, μ) un couple de nombres complexes et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ deux fonctions causales localement intégrables sur $\mathbb{R}$. La transformée de Laplace de $\lambda f + \mu g$ est définie en tout point s de $\mathbb{C}$ où $\mathcal{L}[f]$ et $\mathcal{L}[g]$ sont toutes les deux définies, et en un tel s, nous avons :*

$$\boxed{\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{L}[f] + \mu \mathcal{L}[g]}.$$

Démonstration. Conséquence directe de la linéarité de l'intégrale. □

Application : Transformées de cos$[\omega t]\, \mathcal{U}(t)$ et sin$[\omega t]\, \mathcal{U}(t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}[\cos[\omega t]] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}\left[e^{i\omega t} \right] + \mathcal{L}\left[e^{-i\omega t} \right] \right),$$

[6] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

et donc

$$\mathcal{L}[\cos[\omega t]] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega}+\frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s)>0.$$

De la même manière

$$\mathcal{L}[\sin[\omega t]] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \text{ pour } \operatorname{Re}(s)>0.$$

b. **Image des dilatées : Transformée de $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.**

Proposition (Changement d'échelle). *La transformée de Laplace de f_λ est définie en s si, et seulement si, la transformée de Laplace de f est définie en $\frac{s}{\lambda}$, et nous avons alors :*

$$\boxed{\mathcal{L}[f_\lambda](s) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{\lambda}\right)}.$$

Démonstration. Effectuer le changement de variable défini par $x=\lambda t$.$\square$

c. **Image des translatées : Transformée de $\mathcal{T}_{t_0}(t) = f(t-t_0)$, où $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$.**

Proposition (Théorème du retard). *La transformée de Laplace de $\mathcal{T}_{t_0}$ est définie en s si, et seulement si, il en est de même de la transformée de Laplace de la fonction causale f, et nous avons alors :*

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathcal{T}_{t_0}](s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f](s)}.$$

Démonstration. Effectuer le changement de variable défini par $x=t-t_0$.$\square$

Exemple. Transformée d'une impulsion rectangulaire.

Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $0<a<b$. Considérons la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a<t<b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour presque tout t, $f(t)$ peut être écrit sous la forme $f(t) = \mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)$. Par linéarité de la tranformation de Laplace, nous avons donc :

[7]La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[\mathcal{U}(t-a)] - \mathcal{L}[\mathcal{U}(t-b)].$$

D'après le théorème du retard, nous avons par conséquent :

$$\mathcal{L}[f](s) = \left(e^{-as} - e^{-bs}\right)\mathcal{L}[\mathcal{U}](s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}.$$

d. La transformée de Laplace d'une dérivée.

Le résultat suivant est capital :

Théorème. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction causale de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que :*

(i) $f(0^+) = \lim_{t \downarrow 0} f(t)$ *existe (dans $\mathbb{C}$) ;*

(ii) $\exists (M, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

La transformée $\mathcal{L}[f'](s)$ est définie pour tout $s \in]\alpha, +\infty[$, et on a :

$$\boxed{\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+)}.$$

Démonstration. Sachant que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, l'hypothèse (ii) nous assure que la transformée $\mathcal{L}[f](s)$ est définie pour tout $s \in]\alpha, +\infty[$. Fixons $s \in]\alpha, +\infty[$. On a $|f(t)e^{-st}| \leq Me^{(\alpha - s)t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, et $\alpha - s < 0$ si bien que :

$$\left[f(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} = -f\left(0^+\right).$$

Une intégration par parties nous permet donc d'en déduire que

$$\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

est définie et telle que

$$\mathcal{L}[f'](s) = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = -f\left(0^+\right) + s\mathcal{L}[f](s).$$

□

Remarque. L'éventuelle discontinuité de f en 0 complique quelque peu la formule donnant la transformée de la dérivée de f. La dérivation

[8]La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

au sens des distributions prend en compte cette discontinuité éventuelle et permet d'écrire une formule plus épurée :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[T_f'\right](s) = s\mathcal{L}\left[T_f\right](s)\ ,}$$

où T_f désigne la distribution associée à f, T_f' sa dérivée au sens des distributions, $\mathcal{L}\left[T_f\right]$ et $\mathcal{L}\left[T_f'\right]$ leurs transformations de Laplace respectives.

Corollaire 1. *Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction causale de classe C^n sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad f^{(k)}\left(0^+\right) = \lim\limits_{t \downarrow 0} f^{(k)}(t)$ *existe (dans $\mathbb{C}$) ;*

(ii) $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \exists M_k \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|f^{(k)}(t)\right| \leq M_k e^{\alpha t}$.

La transformée $\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s)$ est alors définie pour tout $s \in \left]\alpha, +\infty\right[$, et on a :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) &= s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f\left(0^+\right) - \ldots - f^{(n-1)}\left(0^+\right) \\ &= s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}\left(0^+\right). \end{aligned}}$$

En particulier, si les dérivées successives de f vérifient $f^{(n-1)}\left(0^+\right) = \ldots = f\left(0^+\right) = 0$, alors $\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n \mathcal{L}[f](s)$ pour tout $s \in \left]\alpha, +\infty\right[$.

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. □

Application : Les transformées des fonctions puissances $f(t) = t^n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle vérifie :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k},$$

si bien que :

$$f\left(0^+\right) = \ldots = f^{(n-1)}\left(0^+\right) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(t) = n!\right).$$

Par application du corollaire précédent, nous avons donc :

[9]La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n \mathcal{L}[f](s).$$

Comme $f^{(n)}(t) = \mathcal{U}(t)\ n!$, on en déduit que :

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)\, n!]}{s^n}.$$

Or, nous avons $\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)\, n!] = n!\mathcal{L}[\mathcal{U}](s)$ par linéarité de $\mathcal{L}$ et nous savons que $\mathcal{L}[\mathcal{U}](s) = \dfrac{1}{s}$. Par conséquent, nous avons :

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}}.$$

$\boxed{\text{e.}}$ <u>Transformée d'une primitive.</u>

Corollaire 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction causale qui est continue sur $\mathbb{R}_+$. Supposons que la fonction causale donnée sur $\mathbb{R}_+$ par la primitive de f s'annulant en 0 est une fonction vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Dans ce cas, sa transformée de Laplace est définie pour tout $s \in \left]\alpha, +\infty\right[$, et nous avons alors :*

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\, du\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)}.$$

Démonstration. Le théorème précédent nous assure en effet que :

$$\mathcal{L}[f](s) = s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\, du\right].$$

□

$\boxed{\text{f.}}$ <u>Théorème de la valeur initiale.</u>

Théorème de la valeur initiale. *Soit f une fonction causale de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que :*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall k \in \{0,1\},\ \exists M_k \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|f^{(k)}(t)\right| \leq M_k e^{\alpha t}.$$

Si $f(0^+) := \lim_{t \to 0^+} f(t)$ existe (dans $\mathbb{C}$), alors $\boxed{f(0^+) = \lim_{s \to +\infty} s\mathcal{L}[f](s)}$.

[10] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

Démonstration. Sous ces hypothèses, nous savons que $\mathcal{L}[f](s)$ et $\mathcal{L}[f'](s)$ sont définies pour tout $s \in \left]\alpha, +\infty\right[$, et telles que :

$$s\mathcal{L}[f](s) - f\left(0^+\right) = \mathcal{L}[f'](s).$$

Par ailleurs, pour tout s fixé dans $\left]\alpha, +\infty\right[$, l'inégalité $|f'(t)\, e^{-st}| \leq M_1 e^{(\alpha - s)t}$, satisfaite pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, nous assure que :

$$|\mathcal{L}[f'](s)| = \left|\int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-st} dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|f'(t)\, e^{-st}\right| dt \leq M_1 \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - s)t} dt = \frac{M_1}{s - \alpha}.$$

Par conséquent :

$$\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}[f'](s) = 0 \quad \text{et donc} \quad f\left(0^+\right) = \lim_{s \to +\infty} s\mathcal{L}[f](s).$$

□

g. Théorème de la valeur finale.

Théorème de la valeur finale. *Soit f une fonction causale de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Nous avons alors :*

(i) $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$ *et* $f(+\infty) := \lim_{t \to +\infty} f(t)$ *existent (dans* $\mathbb{C}$*) ;*

(ii) $\mathcal{L}[f](s)$ (resp. $\mathcal{L}[f'](s)$) est définie pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ (resp. pour $\mathrm{Re}(s) \geq 0$) ;

(iii) $\boxed{f(+\infty) = \lim_{s \to 0^+} s\mathcal{L}[f](s).}$

Démonstration. (i) Pour tout $(t_1, t_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, nous avons :

$$\int_{t_1}^{t_2} f'(t)\, dt = f(t_2) - f(t_1).$$

Sachant que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$ et $f(+\infty) := \lim_{t \to +\infty} f(t)$ existent (dans $\mathbb{C}$).

(ii) Sachant que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$, c'est un exercice facile que de démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) Comme f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}[f'](s)$ est nécessairement définie pour $\mathrm{Re}(s) \geq 0$. Comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{L}[f](s)$ est nécessairement définie pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, et pour tout $s \in \left]0, +\infty\right[$:

[11] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

$$s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+) = \mathcal{L}[f'](s).$$

Par ailleurs, pour tout $s \in]0,+\infty[$, l'inégalité $|f'(t)e^{-st}| \leq |f'(t)|$, vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, nous assure (en vertu du théorème de la convergence dominée) que :

$$\lim_{s\to 0^+} \mathcal{L}[f'](s) = \int_0^{+\infty} \lim_{s\to 0^+} \left(f'(t)e^{-st}\right) dt = \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt = f(+\infty) - f(0^+).$$

Par conséquent :

$$\lim_{s\to 0^+} \left(s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+)\right) = f(+\infty) - f(0^+) \quad \text{et donc} \quad \lim_{s\to 0^+} s\mathcal{L}[f](s) = f(+\infty).$$

□

III. La transformation de Laplace inverse.

1. Définition.

Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème. *Soient f et g deux fonctions causales continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ dont les transformées de Laplace sont définies sur un même domaine de $\mathbb{C}$. S'il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$ pour tout $s \in]s_0,+\infty[$, alors les fonctions f et g sont égales sauf éventuellement aux points de discontinuités de l'une ou de l'autre.*

Prenons le parti de négliger les valeurs qu'une fonction causale continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ prend en ses points de discontinuités. Ce théorème nous permet de considérer alors qu'une fonction F est la transformée de Laplace d'au plus une fonction causale continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Si $f(t)$ est une fonction causale continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ dont F est la transformée de Laplace, nous dirons donc que f est la transformée de Laplace inverse, ou original, de F et l'on notera $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$ ou $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Remarque. Il existe plusieurs formules donnant explicitement l'original $f(t)$ en fonction de l'image $F(s)$ (dont la formule de Mellin-Fourier aussi appelée formule de Bromwich). Elles nécessitent des connaissances dépassant le cadre de ce cours et ne sont pas toujours d'un emploi très commode. Nous ne les utiliserons pas.

[12] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

2. Propriétés.

$\boxed{\text{a.}}$ La $\mathbb{C}$-linéarité.

Application : Original d'une fraction rationnelle.

Méthode générale. (1) Décomposition en éléments simples.
(2) Calcul de l'original élément simple par élément simple en utilisant la linéarité.

Exemple. Original de $F(s) = \dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$.

Nous avons :

$$F(s) = \frac{(1-s^2)(1+s^2)+s^4}{s^3(s^2+1)} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} .$$

Par linéarité de la transformée inverse, nous avons donc :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right].$$

Comme $\mathcal{L}[\cos t] = \dfrac{s}{s^2+1}$ et $\mathcal{L}\left[\dfrac{t^n}{n!}\right] = \dfrac{1}{s^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t.$$

$\boxed{\text{b.}}$ Original de $F(\lambda s)$, où $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ et $\lambda > 0$.

La proposition suivante résulte immédiatement du théorème de changement d'échelle :

Proposition. *La transformée de Laplace de $t \mapsto f\left(\dfrac{t}{\lambda}\right)$ est définie en s si, et seulement si, la transformée de Laplace F de f est définie en λs, et on a alors :*

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right] = \lambda F(\lambda s) \quad \textit{soit} \quad \boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(as)] = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{t}{\lambda}\right)}.$$

[13] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

$\boxed{\textbf{c.}}$ **Original de $F(s-a)$, où $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$.**

Pour tout $(s,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$, $e^{-st}\left(e^{at} f(t)\right) = e^{-(s-a)t} f(t)$. Par conséquent, la transformée de Laplace de $\mathcal{U}(t)\left(e^{at} f(t)\right)$ est définie en s si, et seulement si, la transformée de Laplace de f est définie en $s-a$, et nous avons alors :

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = \mathcal{L}[f](s-a).$$

En d'autres termes :

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t)}.$$

Exemples. i. Original de $F(s) = \dfrac{1}{(s-a)^{n+1}}$, où $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

Nous avons :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right] = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!}e^{at}.$$

Remarque. Cette formule est d'une très grande importance pratique puisqu'elle permet de calculer l'original de n'importe quelle fraction rationnelle décomposée en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

ii. Originaux de $F(s) = \dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ et $G(s) = \dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$.

Nous avons :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{-at}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\cos(\omega t)$$

et

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{-at}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\sin(\omega t).$$

Exercice. Déterminer l'original de $F(s) = \dfrac{s}{s^2+s+1}$ **.**

Réponse. $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \left[\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] e^{-\frac{t}{2}}$.

[14] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

$\boxed{\textbf{d.}}$ **Original d'une dérivée $F'(s)$, où $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$.**

Théorème. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction causale de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que :*

$$\exists (M, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad |f(t)| \leq M e^{\alpha t}.$$

Nous savons que sa transformée de Laplace $F = \mathcal{L}[f]$ est définie sur $]\alpha, +\infty[$. Elle y est en outre dérivable, et nous avons : $\forall s \in]\alpha, +\infty[$,

$$\boxed{F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)]} \quad \textit{soit} \quad \boxed{\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = -tf(t)}.$$

Démonstration. La fonction $h(s,t) = f(t) e^{-st}$ est dérivable par rapport à s en tout point de $]\alpha, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, et nous avons : $\forall (s,t) \in]\alpha, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s,t) = -tf(t) e^{-st}.$$

Soit $s_0 \in]\alpha, +\infty[$. Fixons $\beta \in]\alpha, s_0[$. Nous avons alors : $\forall (s,t) \in]\beta, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \frac{\partial h}{\partial s}(s,t) \right| = t|f(t)| e^{-st} \leq Mte^{(\alpha - s)t} = Mte^{(\alpha-\beta)t} e^{(\beta - s)t} \leq Mte^{(\alpha-\beta)t}.$$

Or, en intégrant par parties, nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} te^{(\alpha-\beta)t} = \left[t \frac{e^{(\alpha-\beta)t}}{\alpha - \beta} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{(\alpha-\beta)t}}{\alpha-\beta} dt = \left[-\frac{e^{(\alpha-\beta)t}}{(\alpha-\beta)^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} < +\infty.$$

Par conséquent, en vertu du théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction $F(s) = \int_0^{+\infty} h(s,t)\, dt$ est dérivable sur $]\beta, +\infty[$ (et donc en s_0), et : $\forall s \in]\beta, +\infty[$,

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\, dt = \int_0^{+\infty} (-tf(t)) e^{-st} dt.$$

□

Exemple. Original de $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$.

Nous avons :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t \quad \text{et} \quad \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$$

Et donc, d'après le résultat précédent :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right] = -t\sin t \quad \text{soit} \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{t}{2}\sin t.$$

À titre d'exercice, on pourra démontrer plus généralement que :

Théorème. *Sous les hypothèses du théorème précedent, la transformée de Laplace F de f est définie et indéfiniment dérivable sur $]\alpha, +\infty[$, et elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall s \in]\alpha, +\infty[$,*

$$\boxed{F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\left[(-1)^n t^n f(t)\right]} \quad \textit{soit} \quad \boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[F(n)(s)\right] = (-1)^n t^n f(t)}.$$

e. Original d'un produit $F(s)G(s)$, où $F = \mathcal{L}[f]$ et $G = \mathcal{L}[g]$.

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$. Le **produit de convolution de f par** g, noté $f * g$, est par définition la fonction définie par :

$$\boxed{(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\, g(u)\, du}.$$

Naturellement, cette fonction n'est définie au point t que si l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la fonction $u \mapsto f(t-u)g(u)$ a un sens. En considérant le changement de variable défini par $v = t - u$, on démontre que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $u \mapsto f(t-u)g(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, c'est la cas de la fonction $u \mapsto f(u)g(t-u)$, et que nous avons alors $(f * g)(t) = (g * f)(t)$.

Notons que, si f et g sont deux fonctions causales, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u \mapsto f(t-u)$ est nulle sur $]t, +\infty[$ et $u \mapsto g(u)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$, si bien que $u \mapsto f(t-u)g(u)$ est nulle si $t < 0$ et nulle en dehors du segment $[0, t]$ sinon. Par conséquent, $(f * g)$ est également une fonction causale, et elle vérifie :

[15] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \boxed{(f * g)(t) := \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du}.$$

Théorème. *Soient f et g fonctions causales continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, telles que :*

$\exists (M, N) \in \mathbb{R}_+^2$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad |f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad$ et $\quad |g(t)| \leq Ne^{\alpha t}$.

Nous savons que, sous ces hypothèses, $\mathcal{L}[f]$ et $\mathcal{L}[g]$ sont définies sur $]\alpha, +\infty[$. Par ailleurs, elles nous assurent que $\mathcal{L}[f * g]$ est également définie sur $]\alpha, +\infty[$, et que :

$$\forall s \in]\alpha, +\infty[, \quad \mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\, \mathcal{L}[g](s) = F(s)\, G(s) \ ;$$

c'est-à-dire que :

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(s)\, G(s)] = (f * g)(t)}.$$

En d'autres termes : *L'original du produit algébrique de deux transformées de Laplace est égal au produit de convolution des originaux.*

Démonstration. Sous ces hypothèses, $\mathcal{L}[f]$ et $\mathcal{L}[g]$ sont définies sur $]\alpha, +\infty[$. Par ailleurs, nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| f(t-u)\, g(u)\, e^{-st} \right| dudt = \int_D |f(t-u)\, g(u)|\, e^{-st} dudt,$$

où $D = \left\{ (u, t) \in \mathbb{R}_+^2 \,|\, 0 < u < t \right\}$. Or, nous avons : $\forall (u, t) \in D$,

$$|f(t-u)\, g(u)|\, e^{-st} \leq MNe^{\alpha(t-u)} e^{\alpha u} e^{-st} = MNe^{(\alpha - s)t}.$$

Et l'on vérifie aisément que :

$$\int_D MNe^{(\alpha - s)t} dudt = \frac{MN}{(s-\alpha)^2} < +\infty.$$

[16] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

Par conséquent, la fonction $(u,t) \mapsto f(t-u)\,g(u)\,e^{-st}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Fubini et écrire que : $\forall s \in \left]\alpha, +\infty\right[$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^{+\infty} (f * g)(t)\, e^{-st} dt = \int_D f(t-u)\, g(u)\, e^{-st} du dt \\
&= \int_0^{+\infty} g(u) \left[\int_u^{+\infty} f(t-u)\, e^{-st} dt \right] du.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable défini par $x = t - u$ dans l'intégrale par rapport à t, on en déduit alors que : $\forall s \in \left]\alpha, +\infty\right[$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^{+\infty} g(u) \left[\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-s(x+u)} dx \right] du \\
&= \int_0^{+\infty} g(u)\, e^{-su} \left[\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-s} dx \right] du = \mathcal{L}[f](s)\, \mathcal{L}[g](s).
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple : Retour à la transformée d'une dérivée.

Soit f une fonction causale de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(0^+) := \lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$ existe (dans $\mathbb{C}$). Supposons que f et sa dérivée f' vérifient les hypothèses du théorème précédent. Nous avons alors : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
f(t) = f(t)\,\mathcal{U}(t) &= f(0^+)\,\mathcal{U}(t) + \int_0^t f'(x)\,\mathcal{U}(t)\, dx \\
&= f(0^+)\,\mathcal{U}(t) + \int_0^t \mathcal{U}(t-x)\, f'(x)\, dx \\
&= f(0^+)\,\mathcal{U}(t) + (\mathcal{U} * f')(t).
\end{aligned}$$

Le théorème précédent nous permet donc d'écrire que : $\forall s \in \left]\alpha, +\infty\right[$,

[17] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure
[18] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s}\left(f\left(0^+\right) + \mathcal{L}[f'](s)\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f\left(0^+\right)}.$$

Exercice. Déterminer l'orginal de $F(s) = \dfrac{1}{\left(s^2+1\right)^2}$.

Réponse. $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (\sin * \sin)(t) = \dfrac{1}{2}(\sin(t) - t\cos(t))$.

IV. Applications.

Résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Soit (E) $\Sigma_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = x$, où $(a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$, une équation différentielle linéaire à coefficients constants et soit (I) $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, y^{(k)} = y_k$, où $(y_0, \ldots y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, un ensemble de conditions initiales. Supposons que (E) admette une solution particulière ψ. La théorie générale nous apprend que (E) admet alors une unique solution y qui vérifie les conditions initiales (I).

Supposons que cette solution y et ses dérivées $y^{(1)}$,...,$y^{(n)}$ (ou plus exactement leur produit par $\mathcal{U}$) admettent des transformées de Laplace telles que

$$\mathcal{L}\left[y^{(k)}\right](s) = s^k \mathcal{L}[y](s) - s^{k-1} y\left(0^+\right) - \ldots - y^{(k-1)}\left(0^+\right)$$

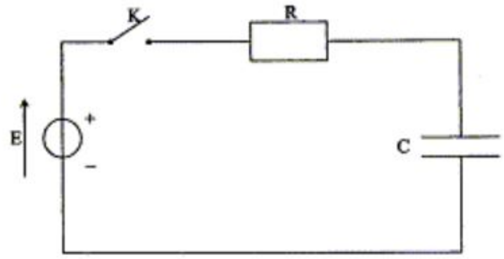
sur $]\alpha, +\infty[$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, et supposons que x admette également une transformée de Laplace définie sur cet intervalle. Posons $X = \mathcal{L}[x]$ et $Y = \mathcal{L}[y]$.

En prenant la transformée de Laplace de chaque membre de (E) en tenant compte des conditions initiales (I), on obtient par linéarité de $\mathcal{L}$ une équation affine de la forme suivante :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\right) Y(s) = X(s) + P(s),$$

où $P(s)$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n-1$. Il s'ensuit que :

$$Y(s) = \frac{X(s) + P(s)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} ;$$



et donc que $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{X(s)+P(s)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k s^k}\right]$.

Exemple. Un circuit RC est un circuit électrique composé d'une résistance et d'un condensateur généralement montés en série. Considérons un tel circuit branché à un générateur de tension continue et à un interrupteur (voir figure). Supposons qu'au départ, l'interrupteur est ouvert et le condensateur déchargé. En fermant l'interrupteur à l'instant $t = 0$, on soumet le circuit à un échelon de tension $e(t) := e\mathcal{U}(t)$, où $e =$ *constante*. La tension v aux bornes du condensateur vérifie alors l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{e}{\tau}\mathcal{U}(t)\,,\ \text{où } \tau = RC.$$

Il s'agit donc de déterminer la solution v de l'équation (1) qui vérifie $v(0) = 0$ Sa transformée de Laplace V vérifie :

$$\left(s + \frac{1}{\tau}\right) V(s) = \frac{e}{\tau s}\ .$$

On en tire :

$$V(s) = \frac{e}{(\tau s + 1)\, s} = \left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1}\right) e\ .$$

[19] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

Puis :

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(s)] = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] e \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Exercice. Déterminer la solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 3\,t\,e^{-t}$$

qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 2$.

Réponse : $y(t) = \left(\frac{t^3}{2} + 6t + 4\right) e^{-t}$.

Exercice. Intégrer les équations différentielles suivantes
(i)

$$y'(t) - ay(t) = 0,$$

(ii)

$$y'(t) - ay(t) = e^{bt},$$

où a et b sont deux nombres réels distincts.
Commenter les résultats obtenus.

Extension de la méthode à des systèmes d'équations différentielles.

La méthode précédente s'étend à des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Exercice. Déterminer la solution du système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} y_1' = 4(y_1 + y_2) \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

qui vérifie la condition initiale $(y_1(0), y_2(0)) = (0, 1)$.

[20] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

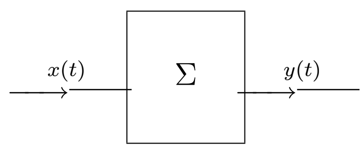
<u>Résolution d'équations intégrales.</u>

Exemple de l'équation de Volterra. Déterminer la solution de l'équation intégrale de Volterra

$$y\left(t\right)=t+\int_{0}^{t}\cos\left(t-u\right)y\left(u\right)du.$$

<u>Fonctions de transfert.</u>

Considérons un « système linéaire continu » à une entrée et une sortie :



où y est le signal de sortie associé au signal d'entrée x. On suppose que : (i) x et y sont des fonctions causales admettant des transformées de Laplace X et Y ; (ii) la relation entre l'entrée et la sortie est donnée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants ; (iii) toutes les conditions initiales sont nulles. La **fonction de transfert** $H\left(s\right)$ du système Σ est alors définie par la relation :

$$X\left(s\right)H\left(s\right)=Y\left(s\right).$$

Elle ne dépend ni de l'entrée, ni de la sortie. Elle caractérise le comportement intrinsèque du système. On déduit de l'équation précédente que :

$$y\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y\left(s\right)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[X\left(s\right)H\left(s\right)\right]=\left(x*h\right)\left(t\right),\quad \text{où}\quad h\left(t\right):=\mathcal{L}^{-1}\left[H\left(s\right)\right]\ .$$

En d'autres termes, *le signal de sortie y est égal à la convolée $x*h$ du signal d'entrée x par l'original h de la fonction de transfert.*

[21] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

Annexe : La transformation de Laplace d'une distribution

L'impulsion unité (encore appelée impulsion de Dirac) δ.

Considérons la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'impulsions rectangulaires définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = n\left(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}\left(t - \frac{1}{n}\right)\right) = \begin{cases} n \text{ si } & 0 \leq 1 < \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}.$$

Notons que : (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$; (ii) Pour toute fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, il vient : $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\,ndt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi\left(\frac{x}{n}\right) dx = \varphi(0)$ en vertu du théorème de la convergence dominée.

L'impulsion unité δ se conçoit intuitivement comme la « limite » de cette suite d'impulsions rectangulaires lorsque $n \to +\infty$. Plus précisément, elle se conçoit comme une « fonction généralisée » ou plutôt comme une « distribution » qui est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et d'une infinité telle en 0 que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$.

Nous savons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathcal{L}[f_n](s) = n\left(\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] - \mathcal{L}\left[\mathcal{U}\left(t - \frac{1}{n}\right)\right]\right) = \frac{n}{s}\left[1 - \exp\left(-\frac{s}{n}\right)\right].$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}[f_n](s) = 1$, ce qui amène assez naturellement à définir $\mathcal{L}[\delta](s)$ comme égal à 1.

Distributions.

D'un point de vue mathématique, on introduit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{S}$ de « fonctions tests » (qui sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et tendent vers 0 très rapidement lorsque $|t| \to +\infty$), on munit cet espace d'une topologie (c'est-à-dire d'une notion de convergence) et l'on définit alors une distribution comme une forme linéaire continue sur cet espace. Ainsi définies, les distributions sont donc les applications linéaires

$$\begin{aligned} T : \mathcal{S} &\to \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto T[\varphi] \end{aligned}$$

[22] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure
[23] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

qui sont continues. On vérifie qu'il est possible d'interpréter toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et qui ne croît pas trop vite à l'infini, comme une distribution $T_f : \mathcal{S} \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en posant : $\forall \varphi \in \mathcal{S}$,

$$\boxed{T_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt}.$$

L'impulsion de Dirac (ou « distribution de Dirac ») se conçoit alors comme « la limite de $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ au sens des distributions » d'après le (ii) : $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\delta[\varphi] = lim_{n\to+\infty} T_{f_n}(\varphi)$. On vérifie qu'il s'agit bien d'une distribution qui est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{S} &\to \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \boxed{\delta[\varphi] = \varphi(0)}. \end{aligned}$$

Étant donné une distribution $T : \mathcal{S} \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto T[\varphi]$, on vérifie que $T' : \mathcal{S} \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto -T[\varphi']$ est également une distribution. On dit que T' est **la dérivée de la distribution** T.

Exercice. $\boxed{1.}$ Afin d'expliquer la présence du signe « $-$ » dans la relation $T'(\varphi) = -T[\varphi']$, vérifier que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est une fonction de classe C^1 qui « ne croît pas trop vite à l'infini », alors :

$$(T_f)' = T_{f'} \ ;$$

Autrement dit, **la dérivée de f au sens des distributions correspond à la dérivée de f au sens des fonctions.**

$\boxed{2.}$ Vérifier que **la distribution de Dirac δ est la dérivée (au sens des distributions) de la fonction échelon unité $\mathcal{U}$** :

$$\boxed{(T_{\mathcal{U}})' = \delta}.$$

$\boxed{3.}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction causale de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, qui « ne croît pas trop vite à l'infini » et qui est telle que $f(0^+) := \lim_{t\to 0^+} f(t)$ existe (dans $\mathbb{C}$).

$\boxed{a.}$ Établir que : $(T_f)' = T_{f'} + f(0^+)\,\delta$.

$\boxed{b.}$ Exprimer $\mathcal{L}[f](s)$ à l'aide de T_f et de $\varphi_s(t) := e^{-st}$.

$\boxed{\text{c.}}$ Soit T une distribution « dont le support est contenu dans $\mathbb{R}_+$ » (c'est-à-dire qui est telle que $T(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ qui est nulle sur $\mathbb{R}_+$). On définit la transformée de Laplace de T par :

$$\mathcal{L}[T](s) := T(\varphi_s).$$

Est-ce raisonnable ? Vérifier qu'avec cette définition, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta](s) = 1}.$$

$\boxed{\text{d.}}$ Sous les mêmes hypothèses, vérifier que nous avons :

$$\boxed{\mathcal{L}[T'](s) = s\mathcal{L}[T](s)}.$$

[24]La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

Exercice. Déterminer l'original de $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ sans utiliser le produit de convolution.
Écrire que :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{1+s^2} \ ;$$

puis que :

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+s^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right].$$

En déduire que ;

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+s^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right]\right] = \frac{1}{2}[\sin(t) - t\cos(t)].$$

[24] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

La transformation en $\mathcal{z}$

par

Yves Martinez-Maure

I. La transformation en $\mathcal{Z}$.

La transformation en Z est une adaptation de la transformation de Laplace aux systèmes à temps discrets. En pratique, elle est donc très utilisée lorsque l'on a recours à des techniques d'échantillonnage. Elle peut être utilisée pour résoudre des équations aux différences linéaires de la même manière que la transformée de Laplace est utilisée pour résoudre des équations différentielles linéaires.

Échantillonnage d'un signal

Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $t \mapsto x(t)$ un signal (i.e. une fonction) causal (i.e. $x(t) = 0$ pour tout $t < 0$). Étant donné $T \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que le signal « discret »

$$x_e : \mathbb{N} \to \mathbb{K},\, n \mapsto x(nT)\,,$$

est déduit du signal « à temps continu » x par échantillonnage en prenant T comme période d'échantillonnage.

Idée. La transformée de Laplace du signal échantillonné $\sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)\,\delta_{nT}$ (où δ_a désigne la distribution définie par $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$) s'écrit :

$$\mathcal{L}[x_e](s) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)\,e^{-snT} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)\,z^{-n}, \quad \text{où} \quad z = e^{sT}.$$

Définition. *Soit $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ un signal causal discret, c'est-à-dire une suite réelle ou complexe $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$.* ***La transformée en $\mathcal{Z}$ de x****, lorsqu'elle existe, est la fonction X de la variable complexe z qui est définie par :*

[26] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)\,z^{-n}.$$

Cette transformée $X(s)$ se note généralement $(\mathcal{Z}x)(z)$ ou $\mathcal{Z}[x](z)$ ou $(\mathcal{Z}x(n))$ ou encore $\mathcal{Z}[x(n)]$ et on dit que x est l'original de X.

Remarque. La transformée en $\mathcal{Z}$ de x s'exprime comme la somme d'une série, ce qui pose donc le problème de la convergence de la série et donc de l'existence de $\mathcal{Z}x$. Si $R\in[0,+\infty]$ désigne le rayon de convergence de la série entière $\sum x(n)\,Z^n$ et si $R\neq 0$, alors en posant $Z=z^{-1}$ il apparaît que la série $\sum x(n)\,Z^n$ est (abso-lument) convergente pour $|z^{-1}|<R$, c'est-à-dire pour $|z|>R^{-1}$. Par conséquent, **la transformée $(\mathcal{Z}x)(z)$ est alors définie pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>R^{-1}$.**

Exemples. **i. Le signal échelon unité** $\mathcal{U}:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto 1$.

$$(\mathcal{Z}\mathcal{U})(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}\quad\text{pour tout } z\in\mathbb{C}\text{ tel que } |z|>1.$$

ii. Le signal de Dirac $d:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, définie par $d(0)=1$ et $d(n)=0$ si $n\neq 0$.

$$(\mathcal{Z}d)(z)=1\quad\text{pour tout } z\in\mathbb{C}.$$

iii. La « rampe » $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto n$.

$$(\mathcal{Z}n)=\frac{z}{(z-1)^2}\text{ pour tout } z\in\mathbb{C}\text{ tel que } |z|>1.$$

En effet, $\sum nZ^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à 1 (admis en STS) et, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>1$, il vient :

[27] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

$$(z-1)^2(\mathcal{Z}n) = z + \left(\sum_{n=2}^{+\infty} nz^{2-n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{1-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} nz^{-n}\right)$$

$$= z + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2) - 2(n+1) + n] z^{-n} = z.$$

iv. Les fonctions exponentielles $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a^n$, où $a \in \mathbb{C}^*$.

$$(\mathcal{Z}x)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a} \quad \text{pour } |z| > |a|.$$

Nota bene. Dans le cadre des STS, on se limite au cas où $a \in \mathbb{R}^*$. Ce cas peut toutefois être abordé en TP.

II. Les propriétés de la transformation en $\mathcal{Z}$.

Le lien que nous avons évoqué entre transformation de Laplace et transformée en $\mathcal{Z}$ fait que nous allons retrouver pour l'essentiel les propriétés de la transformée de Laplace.

a. La $\mathbb{C}$-linéarité.

Proposition. *Soient* (λ, μ) *un couple de nombres complexes et* $x, y : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *deux signaux causaux discrets. La transformée en* $\mathcal{Z}$ *de* $\lambda x + \mu y$ *est définie en tout point* z *de* $\mathbb{C}$ *où* $\mathcal{Z}[x]$ *et* $\mathcal{Z}[y]$ *sont toutes les deux définies, et en un tel* z*, nous avons :*

$$\boxed{\mathcal{Z}[\lambda x + \mu y](z) = \lambda \mathcal{Z}[x](z) + \mu \mathcal{Z}[y](z)}.$$

Démonstration. Cela résulte des règles d'opérations sur les séries convergentes.

□

[28] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

Application : Transformées de $x(n) := \cos[\omega n]$ et $y(n) := \sin[\omega n]$, où $\omega \in \mathbb{R}$.

Sachant que $x(n) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}\right)$ et que $\left(\mathcal{Z}a^n\right)(z) = \frac{z}{z-a}$ pour $|z| > |a|$, il vient :

$$\mathcal{Z}[x](z) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{Z}\left[e^{i\omega n}\right] + \mathcal{Z}\left[e^{-i\omega n}\right]\right),$$

et donc

$$\mathcal{Z}[x](z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega n}} + \frac{z}{z-e^{-i\omega n}}\right) = \frac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \quad \text{pour } |z| > 1$$

De la même manière

$$\mathcal{Z}[y](z) = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{Z}\left[e^{i\omega n}\right] - \mathcal{Z}\left[e^{-i\omega n}\right]\right),$$

et donc

$$\mathcal{Z}[y](z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega n}} - \frac{z}{z-e^{-i\omega n}}\right) = \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \quad \text{pour } |z| > 1.$$

b. **Effet de la multiplication par a^n, où $a \in \mathbb{C}^*$.**

Proposition. *Soit $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ un signal causal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ est définie pour $|z| > R^{-1}$, $(R \in]0,+\infty])$, et soit $a \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > |a| R^{-1}$, nous avons alors :*

$$\boxed{\mathcal{Z}[a^n x(n)] = \mathcal{Z}[x]\left(\frac{z}{a}\right)}.$$

Démonstration. Pour un tel z, nous avons alors en effet :

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\left(a^{-1}z\right)^{-n} = \mathcal{Z}[x]\left(\frac{z}{a}\right).$$

□

[29] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

c. **Le théorème du « retard ».**

Proposition. *Soit $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ un signal causal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ est définie pour $|z| > R^{-1}$, $(R \in]0,+\infty])$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal causal $(y_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $y_p(n) = x(n-p)$ pour $n \geq p$ et $y_p(n) = 0$ pour $n < p$, est également définie pour $|z| > R^{-1}$, et vérifie alors :*

$$\boxed{\mathcal{Z}[y_p](z) = z^{-p}\mathcal{Z}[x](z)}.$$

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que$|z| > R^{-1}$, nous avons alors en effet :

$$\mathcal{Z}[y_p](z) = z^{-p}\sum_{n=p}^{+\infty} x(n-p)\, z^{-(n-p)} = z^{-p}\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} = z^{-p}\mathcal{Z}[x](z).$$

□

d. **Le théorème de « l'avance ».**

Proposition. *Soit $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ un signal causal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ est définie pour $|z| > R^{-1}$, $(R \in]0,+\infty])$. La transformée en $\mathcal{Z}$ du signal causal $(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $y(n) = x(n+p)$ est également définie pour $|z| > R^{-1}$, et vérifie alors :*

$$\boxed{\mathcal{Z}[y](z) = z^{p}\left[\mathcal{Z}[x](z) - \sum_{k=0}^{p-1} x(k)\, z^{-k}\right]}.$$

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que$|z| > R^{-1}$, nous avons alors en effet :

$$\mathcal{Z}[y](z) = z^{p}\sum_{n=0}^{+\infty} x(n+p)\, z^{-(n+p)} = z^{p}\sum_{n=p}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} = z^{p}\left[\mathcal{Z}[x](z) - \sum_{k=0}^{p-1} x(k)\, z^{-k}\right].$$

□

$\boxed{\text{e.}}$ **Théorème de la valeur initiale.**

Proposition. *Soit* $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *un signal causal discret dont la transformée en* $\mathcal{Z}$ *est définie pour* $|z| > R^{-1}$, $(R \in \,]0,+\infty])$. *Nous avons alors :*

$$\boxed{x(0) = \lim_{|z|\to+\infty} \mathcal{Z}[x](z)}.$$

Démontration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R^{-1}$, nous avons alors en effet :

$$\lim_{|z|\to+\infty} \mathcal{Z}[x](z) = \lim_{Z\to 0} \mathcal{Z}[x]\left(\frac{1}{Z}\right) = \lim_{Z\to 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, Z^n\right) = x(0),$$

où $Z = \frac{1}{z}$, sachant que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, Z^n$ est continue sur le disque $|Z| < R$.

□

$\boxed{\text{f.}}$ **Théorème de la valeur finale.**

Proposition. *Soit* $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *un signal causal discret dont la transformée en* $\mathcal{Z}$ *est définie pour* $|z| > R^{-1}$, $(R \in [1,+\infty])$. *Si* $\lim_{n\to+\infty} x(n)$ *existe, alors :*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)\,\mathcal{Z}[x](z)}.$$

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R^{-1}$, nous avons alors en effet : $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}(z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} &= \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N+1} x(n)\, z^{1-n} - \sum_{n=0}^{N} x(n)\, z^{-n}\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(x(0)\, z + \sum_{n=0}^{N}[x(n+1) - x(n)]\, z^{-n}\right).\end{aligned}$$

[30] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

Dire que $\lim_{n\to+\infty} x(n)$ existe revient à dire que pour $z = 1$, la limite ci-dessus existe et vaut $\lim_{n\to+\infty} x(n)$. Or, un théorème d'Abel nous apprend que si Z_0 est un point du cercle de convergence de la série entière $\sum [x(n+1) - x(n)] Z^n$, alors :

$$\lim_{Z\to Z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} [x(n+1) - x(n)] Z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} [x(n+1) - x(n)] Z_0^n$$

(c'est a fortiori vrai si Z_0 appartient au disque de convergence). Par suite :

$$\lim_{z\to 1} (z-1)\, \mathcal{Z}[x](z) = \lim_{n\to+\infty} x(n).$$

□

Remarque. Ce théorème est naturellement admis en STS.

g. Transformée d'un produit de convolution.

Soient $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ deux signaux causaux discrets. Le **produit de convolution de x par y**, noté $x * y$, est par définition le signal causal défini par :

$$\boxed{(x*y)(n) := \sum_{k=0}^{n} x(n-k)\, y(k)}.$$

En considérant le changement d'indice défini par $l = n - k$, on vérifie que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(y*x)(n) = (x*y)(n)$. Ce produit de convolution est donc commutatif.

Théorème. *Soient $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ deux signaux causaux discrets dont les transformées en $\mathcal{Z}$, disons $X(z)$ et $Y(z)$, sont toutes les deux définies pour $|z| > c$, $\left(c \in \mathbb{R}_+^*\right)$. La transformée en $\mathcal{Z}$ de leur produit de convolution est également définie pour $|z| > R^{-1}$, et on a alors :*

$$\boxed{\mathcal{Z}[x*y](z) = \mathcal{Z}[x](z)\, \mathcal{Z}[y](z) = X(z)\, Y(z)}.$$

[31] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

En d'autres termes : *L'original du produit algébrique de deux transformées en $\mathcal{Z}$ est égal au produit de convolution des originaux.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du résultat suivant sur les séries : Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors il en va de même de la série $\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

□

II. Applications.

La transformation inverse est hors programme. En pratique, pour déterminer des originaux nous utiliserons des décompositions en éléments simples (et/ou) les résultats précédents résumés dans des tableaux récapitulatifs.

Exercice. Soit $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad x(n+2) = x(n+1) + x(n) \\ \\ x(0) = x(1) = 1 \end{cases}$$

(il s'agit de la suite de Fibonacci modélisant la croissance d'une population de lapins). Déterminer l'expression de $x(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de cette suite. En prenant la transformée en $\mathcal{Z}$ de chaque membre de l'équation de récurrence, on obtient en utilisant la linéarité de la transformation en $\mathcal{Z}$ et le théorème de « l'avance » :

$$z^2 \left(X(z) - \frac{x(1)}{z} - x(0) \right) = z\left(X(z) - x(0)\right) + X(z) \ ;$$

d'où l'on tire compte tenu des conditions initiales :

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} \ .$$

[32] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

On en déduit que :

$$X(z) = \frac{z}{(z_2 - z_1)} \left(\frac{z}{z - z_2} - \frac{z}{z - z_1} \right),$$

où $z_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ sont les deux racines du trinôme $X^2 - X - 1$.
Il s'ensuit que :

$$X(z) = \frac{z}{\sqrt{5}} \left[(\mathcal{Z} z_2^n)(z) - (\mathcal{Z} z_1^n)(z) \right] = \left(\mathcal{Z} \left[\frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{\sqrt{5}} \right] \right)(z).$$

Et l'on en conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x(n) = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Exercice. Soit $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$x(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad x(n+1) = \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{2^n} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer l'expression de $x(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(Voir le dossier du 15 juillet 2007 pour une étude de cette suite n'utilisant pas la transformation en $\mathcal{Z}$).

Exercice. Soit $x : \mathbb{N} \cup \{-1\} \to \mathbb{R}$ le signal causal discret tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$x(n) + 2x(n-1) = \mathcal{U}(n),$$

où $\mathcal{U}(n)$ désigne le signal échelon unité. Déterminer l'expression de $x(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. Soit $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

[33] La transformation de Laplace par Yves Martinez-Maure

$$x(0) = 1,\ x(1) = 0 \quad \text{et} \qquad x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 0 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer l'expression de $x(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. Soit $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$x(0) = 1,\ x(1) = 2 \quad \text{et} \qquad x(n+2) = x(n+1) - x(n) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer l'expression de $x(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.