Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

UNIVERSITÉ DE NANTES

Algèbre tensoriel

X3PM040 Anisotropie et composites

M2 Mécanique et Fiabilité des Structures

14 Septembre 2018

Marc François

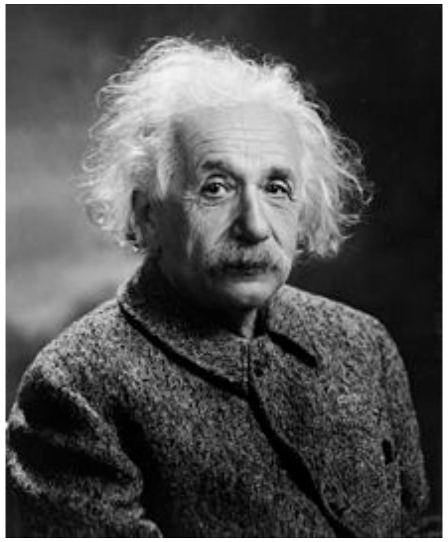
0 Rappels de conventions du calcul indiciel

0.1 Convention d'Einstein

Tout indice répété **deux fois** est un indice **muet, sommé**.

$$u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Tout indice n'apparaissant qu'**une fois** est un indice **franc, non sommé**.



$$u_i \in \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$u_i = v_i \Longleftrightarrow u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ u_3 = v_3$$

Les deux peuvent cohabiter :

$$A_{ij} v_j = \left| \begin{array}{l} A_{1j} v_j = A_{11} v_1 + A_{12} v_2 + A_{13} v_3 \\ A_{2j} v_j = A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + A_{23} v_3 \\ A_{3j} v_j = A_{31} v_1 + A_{32} v_3 + A_{33} v_3 \end{array} \right|$$

Un indice ne peux pas apparaitre plus de deux fois

$$\cancel{a_i b_i c_i}$$

0.2 Symbole de Kronecker $\boldsymbol{\delta}$

Définition :

$$\delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{si} \quad i = j \\ = 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Ex. l'identité du second ordre $\mathbf{I}$ a pour composantes δ_{ij}

$$\mathbf{I} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex. une base est orthonormée si :

$$\vec{e}_i . \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

0.3 Symbole de Levi-Civita

Le symbole de Levi-Civita (ou de permutation circulaire) :

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{ijk}} &= 1 \,\mathrm{si}\, (\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\
&= -1 \,\mathrm{si}\, (\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}) \in \{(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)\} \\
&= 0 \quad \mathrm{sinon}
\end{aligned}$$

Il sert pour le produit vectoriel, le déterminant, le rotationnel…

Remarque
Nous verrons que ces 3 conventions sont associées au calcul tensoriel, plus précisément au principe d'objectivité.

I Tenseurs en bases canonique

1.1 Définition

Wikipedia

Un tenseur est un objet très général, défini intrinsèquement à partir (…) de l'espace euclidien, généralement tridimensionnel (…) et qui ne dépend pas d'un système de coordonnées particulier.
Cette notion physique de tenseur comme « objet indépendant du système de coordonnées » est utile pour exprimer beaucoup de lois physiques, qui *par leur nature ne dépendent pas des systèmes de coordonnées choisis*.

Principe d'objectivité

Un calcul physique ne peut pas dépendre de la base choisie pour le calcul (*c.a.d.* l'observateur).

1.2 Produit tensoriel, base canonique

Soit $\vec{e}_i$ une base orthonormée de l'EV. Un tenseur générique **A** s'écrit comme :

$$\mathbb{A} = A_{ijk\ldots}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \ldots$$

— $\mathbb{A}$ désigne l'objet tenseur, indépendamment de toute base

— $\otimes$ est *le produit tensoriel*

— chaque indice $(i, j, k, \cdots)$ varie entre 1 et *le nombre de dimensions n*

— le nombre d'indices *p* est *l'ordre du tenseur*

— les n^p *composantes* $A_{ijk\ldots}$ dépendent de la base choisie

1.4 Composantes en base canonique

On écrit les composantes dans une table ; on indique de préférence la base sil y a a plusieurs.

Vecteurs : $\vec{u} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_{\{\vec{e}_i\}}$

Tenseur du second ordre : $\boldsymbol{\sigma} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}_{\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\}}$

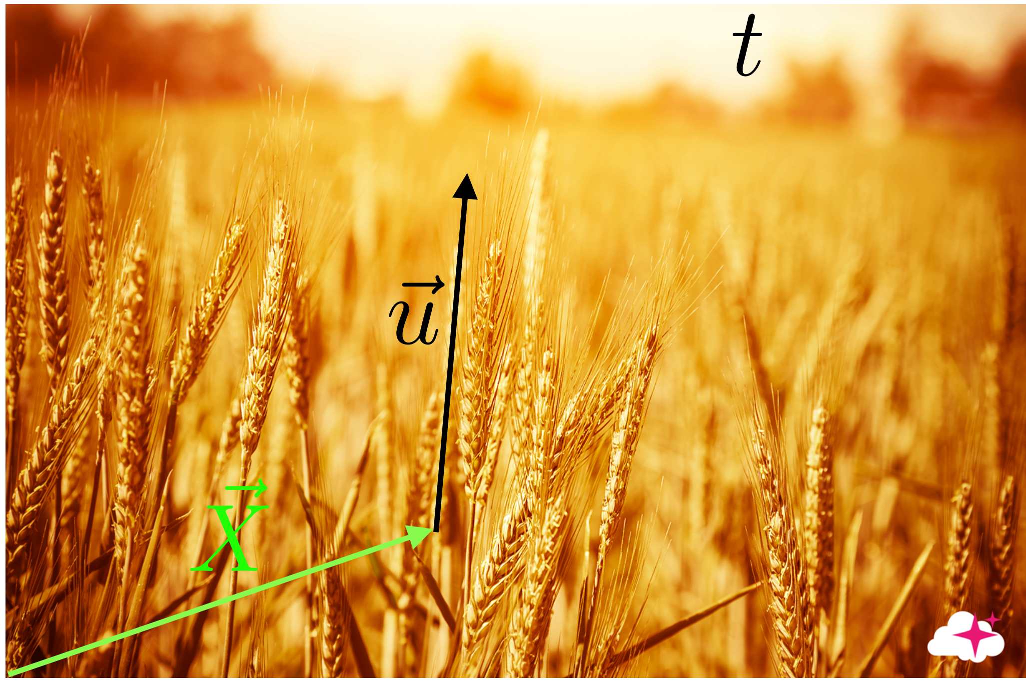
Tenseurs d'ordre supérieur (peu adapté…) :

$$\mathbb{A} \quad \begin{bmatrix} A_{111} & A_{112} \\ A_{121} & A_{122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{211} & A_{212} \\ A_{221} & A_{222} \end{bmatrix}_{\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k\}}$$

Ne pas confondre le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ avec la matrice σ (notation à éviter) de composantes σ_{ij} .

1.5 Exemples de tenseurs connus

Le vecteur déplacement $\vec{u} = u_i \vec{e}_i$ (vecteur=**tenseur du premier ordre**). Il dépend du vecteur position $\vec{X}$ et du temps t : $u_i(\vec{X}, t)$ c'est un **champ de vecteurs**.



Le tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ est un **tenseur du second ordre** : $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$

de composantes : $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$

Par construction il est *symétrique* : $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

Ses composantes ont un sens physique. C'est aussi un **champ de tenseurs** : $\varepsilon_{ij}(\vec{X}, t)$.

1.6 Produit tensoriel de deux tenseurs

Le produit tensoriel a les propriétés classiques d'un produit, sauf la commutativité.

$$\lambda \otimes \vec{u} = \lambda u_i \vec{e}_i \qquad \qquad \vec{u} \otimes (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \otimes \vec{v} + \vec{u} \otimes \vec{w}$$

On en déduit l'expression des composantes pour un produit tensoriel de deux tenseurs :

$$\begin{aligned} \vec{u} \otimes \vec{v} &= (u_i \vec{e}_i) \otimes (v_j \vec{e}_j) \\ &= u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\ \Longleftrightarrow (\vec{u} \otimes \vec{v})_{ij} &= u_i v_j \end{aligned}$$

Calcul pratique du produit tensoriel de deux vecteurs :

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{array}{cc} \otimes & \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} & \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & . \\ u_2 v_1 & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix}_{\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\}} \end{array}$$

sous Matlab :

```
E = u'*u;
```

Le produit tensoriel associe à deux tenseurs d'ordre *p* et *q* le tenseur d'ordre *p*+*q*.

On peut obtenir des tenseurs d'ordre plus élevé :

$$(\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon})_{ijkl} = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$$

1.8 Simple contraction

L'opération de *contraction* revient à effectuer un produit scalaire entre les termes les plus proches :

La simple contraction **de deux vecteurs**

$$\begin{aligned} \vec{u}.\vec{v} &= (u_i\vec{e}_i).(v_j\vec{e}_j) \\ &= u_i v_j(\vec{e}_i.\vec{e}_j) \quad \text{par distributivité du produit scalaire} \\ &= u_i v_j \delta_{ij} \\ \vec{u}.\vec{v} &= u_i v_i \end{aligned}$$

correspond à leur produit scalaire.

Simple contraction **entre un tenseur du second ordre et un du premier ordre** (vecteur) :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}.\vec{n} &= \varepsilon_{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j).n_k\vec{e}_k \\
&= \varepsilon_{ij}n_k\vec{e}_i(\vec{e}_j.\vec{e}_k) \\
&= \varepsilon_{ij}n_k\vec{e}_i\delta_{jk} \\
\boldsymbol{\varepsilon}.\vec{n} &= \varepsilon_{ij}n_j\vec{e}_i \\
(\boldsymbol{\varepsilon}.\vec{n})_i &= \varepsilon_{ij}n_j
\end{aligned}$$

Le calcul correspond à celui d'un produit matrice-vecteur. Le résultat est un vecteur.

Ex. le tenseur identité identité *contracté* avec un vecteur

$$(\mathbf{I}.\vec{u})_i = \delta_{ij}u_j = u_i \Longleftrightarrow \mathbf{I}.\vec{u} = \vec{u}$$

Simple contraction **entre deux tenseurs du second ordre** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}.\mathbf{B} &= A_{ij}B_{kl}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j).(\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \\
&= A_{ij}B_{kl}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_l)\delta_{jk} \\
&= A_{ik}B_{kl}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_l) \\
(\mathbf{A}.\mathbf{B})_{il} &= A_{ik}B_{kl}
\end{aligned}$$

est un tenseur du second ordre. Le les composantes de **A.B** sont obtenu par le produit des matrices des composantes.

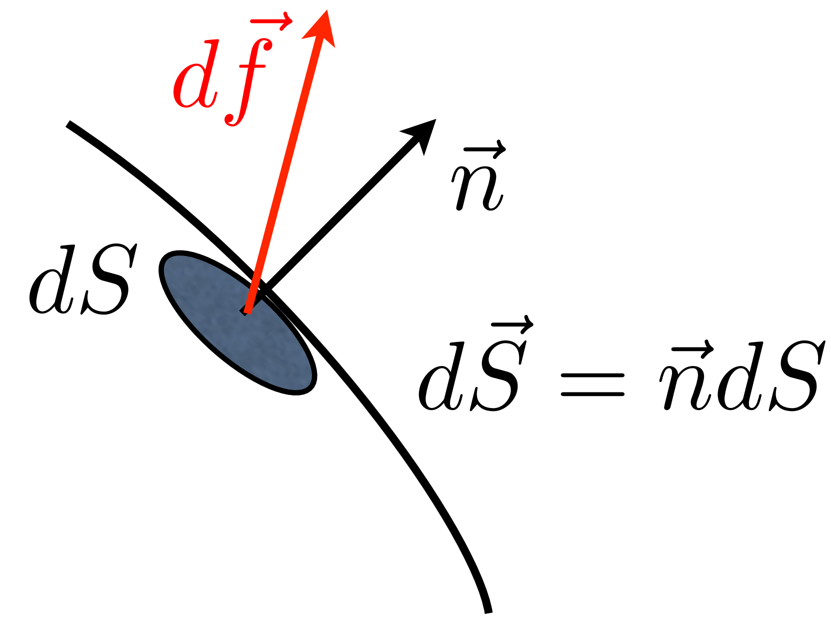
Simple contraction **entre deux tenseurs d'ordre quelconque**.
Le résultat s'obtient toujours en sommant les indices centraux.
P. ex. pour deux tenseurs du 4e ordre :

$$[\mathbb{A}.\mathbb{B}]_{ijkmnp} = A_{ijkl}B_{lmnp}$$

On remarque que la simple contraction de deux tenseurs d'ordre n et m est un tenseur d'ordre n+m-2.

Exemple d'utilisation

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ donne une relation linéaire entre la force et l'élément de surface orienté :



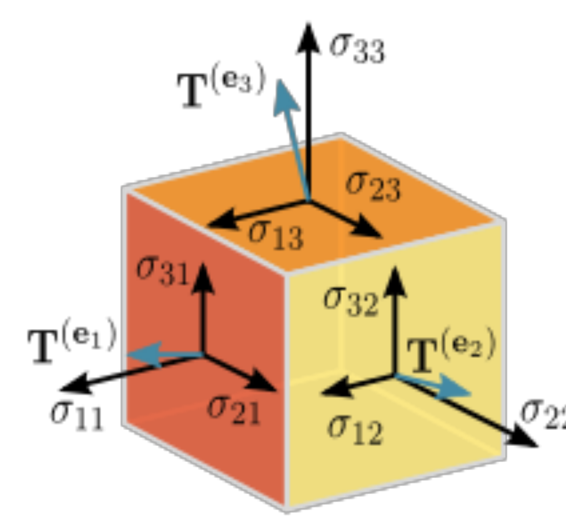
$$d\vec{f} = \boldsymbol{\sigma}.d\vec{S}$$

On peut aussi écrire

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\vec{f}}{d\vec{S}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \frac{df_i}{dS_j}$$

À cause de l'équilibre des moments c'est un tenseur symétrique.
Ses composantes ont un sens physique :

$$d\vec{f} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} dS$$



1.9 Double et n-contraction

On étend la règle des contractions de proche en proche. Le nombre de «.» correspond au nombre de contraction.

La double contraction entre deux tenseurs du second ordre correspond à leur produit scalaire :

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) : \varepsilon_{kl}(\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \overset{\text{def}}{=} \sigma_{ij}\varepsilon_{kl}(\vec{e}_j.\vec{e}_k)(\vec{e}_i.\vec{e}_l)$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ji}$$

Si ces tenseurs sont symétriques, on a aussi : $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$

D'un point de vue pratique :

$$\sigma : \varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Un exemple pour des tenseurs d'ordre supérieur :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \Longleftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{lk} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Un exemple de triple contraction :

$$[\mathbb{A} : . \mathbb{B}]_{ij} = A_{ipqr}B_{rqpj}$$

Règle : si A et B sont d'ordres m et n alors la p-contraction A... (p fois)B est d'ordre m+n-2p. Il faut que m≥p et n≥p.

1.10 Produit scalaire pour les tenseurs

Si on contracte n fois deux tenseurs d'ordre n on définit le produit scalaire pour les tenseurs d'ordre n.

Ex. tenseurs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ (sym.).

L'énergie élastique : $$W_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

La norme euclidienne d'un tenseur :

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$$

L'angle (attention, dans un espace à 9 dimensions…) entre les deux tenseurs est :

$$\cos(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|\,\|\boldsymbol{\varepsilon}\|}$$

Le produit scalaire avec les termes de base canonique donne les composantes du tenseur :

$$\boxed{u_i = \vec{u}.\vec{e}_i}$$

Pour un vecteur

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} : \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j &= (\sigma_{pq}\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q) : (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \\
&= \sigma_{pq}\delta_{iq}\delta_{jp} \\
&= \sigma_{ji} = \sigma_{ij}
\end{aligned}$$

Pour un tenseur du second ordre

si le tenseur est *symétrique*

$$\boxed{\sigma_{ij} = \boldsymbol{\sigma} : \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j}$$

Généralisation :

$$\boxed{A_{ijkl} = \mathbb{A} :: (\vec{e}_l \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i)}$$

Cet algèbre tensoriel constitue une extension de l'algèbre vectoriel.

Exemples : le produit scalaire possède le même sens physique que la simple contraction pour les vecteurs : il mesure la contribution des deux éléments. Par exemple :

— la puissance, en 1D ou en 3D (mécanique point) :

$$P = Fv \qquad\qquad P = \vec{F}.\vec{v} = F_i v_i$$

— en mécanique du solide rigide

$$P = \vec{F}.\vec{v} + \vec{M}.\vec{\omega}$$

- la puissance volumique (mécanique des milieux continus)

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$$

1.11 Applications : calculs intrinsèques

L'utilisation de l'opérateur $\otimes$ entre deux tenseurs permet beaucoup de simplifications.

Exemple : comment calculer le tenseur correspondant à un **projecteur sur une direction** donnée par **u** (normé) ?

On sait que, si $\vec{u} = \vec{e}_1$ alors $\mathbf{P}_{[\vec{e}_1]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

L'écriture intrinsèque associée est : $\mathbf{P} = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1$

Elle ne dépend pas de la base. Donc, le projecteur sur une direction **u** quelconque est :
$$\boxed{\mathbf{P}_{[\vec{u}]} = \vec{u} \otimes \vec{u}}$$
$$P_{ij} = u_i u_j$$

Projecteur sur un plan : $\vec{u}^{\perp}$

Cas particulier du plan $\vec{e}_3^{\perp}$

$$\mathbf{P}_{[\vec{e}_3^{\perp}]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Expression intrinsèque :

$$\boxed{\mathbf{P}_{[\vec{u}^{\perp}]} = \mathbf{I} - \vec{u} \otimes \vec{u}}$$

$$P_{ij} = \delta_{ij} - u_i u_j$$

Symétrie par rapport au plan : $\vec{u}^{\perp}$

Cas particulier du plan $\vec{e}_3^{\perp}$

$$\mathbf{S}_{[\vec{e}_3^{\perp}]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Expression intrinsèque :

$$\boxed{\mathbf{S}_{[\vec{u}^{\perp}]} = \mathbf{I} - 2\vec{u} \otimes \vec{u}}$$

$$S_{ij} = \delta_{ij} - 2u_i u_j$$

Tenseur des contraintes pour une traction selon $\vec{u}$

Cas particulier de la direction $\vec{e}_1$

$$\sigma \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Expression intrinsèque :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} \quad = \quad \sigma\, \vec{u} \otimes \vec{u}}$$

$$\sigma_{ij} \quad = \quad \sigma\, u_i u_j$$

La méthode est bien plus rapide que de changer de base le tenseur du cas particulier précédent…

Déformation dans une direction $\vec{u}$

Cas particulier de la direction $\vec{e}_1$

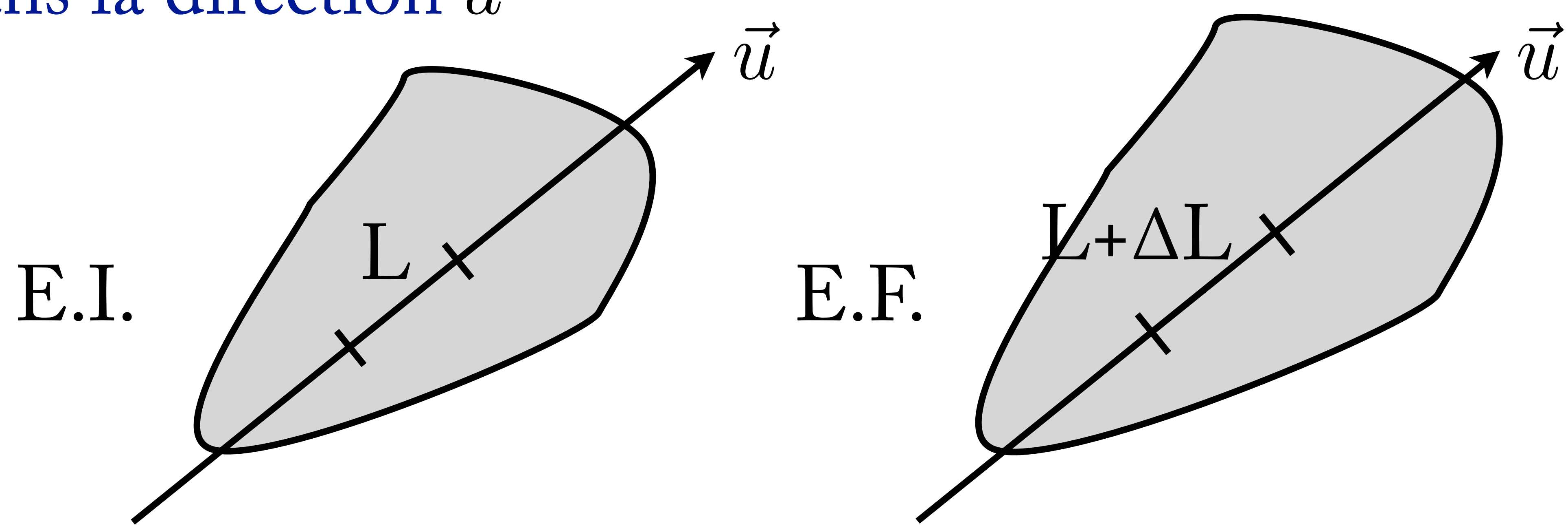
$$\varepsilon(\vec{e}_1) = \vec{e}_1.\boldsymbol{\varepsilon}.\vec{e}_1 = \boldsymbol{\varepsilon} : (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) = \varepsilon_{11}$$

Généralisation, pour $\vec{u}$ normé :

$$\boxed{\varepsilon(\vec{u}) = \vec{u}.\boldsymbol{\varepsilon}.\vec{u} = \boldsymbol{\varepsilon} : (\vec{u} \otimes \vec{u})}$$

$$\varepsilon(\vec{u}) = u_i \varepsilon_{ij} u_j$$

Cette valeur correspond à l'allongement relatif ΔL/L mesuré dans la direction $\vec{u}$



Calcul d'une composante (ici la 11) d'un tenseur dans une base $\vec{E}_i$ avec un tenseur exprimé en base $\vec{e}_i$:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{11} &= \boldsymbol{\sigma} : \vec{E}_1 \otimes \vec{E}_1 \\
&= \sigma_{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) : (\vec{E}_1 \otimes \vec{E}_1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Sigma_{11} = \sigma_{ij}\underbrace{(\vec{e}_i.\vec{E}_1)(\vec{e}_j.\vec{E}_1)}}$$

On n'utilise qu'une partie *de la matrice de changement de base* c'est donc plus rapide que de changer de base.

Pratiquement, si l'on pose $\vec{E}_1 = (x_1, x_2, x_3)_{\vec{e}_i}$

$$\Sigma_{11} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\Sigma_{11} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2x_2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3x_3 \end{bmatrix}$$

2 Changement de base orthonormée

2.0 Décomposition orthogonale de l'identité

Le théorème de la décomposition orthogonale de l'identité indique qu'un vecteur est somme de ses projections orthogonales :

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 \\
&= (\vec{u}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{u}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{u}\cdot\vec{e}_3)\vec{e}_3 \\
\vec{u} &= (\vec{u}\cdot\vec{e}_i)\vec{e}_i \\
&= (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_i)\cdot\vec{u} \\
\Longrightarrow \boxed{\mathbf{I} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i}
\end{aligned}$$

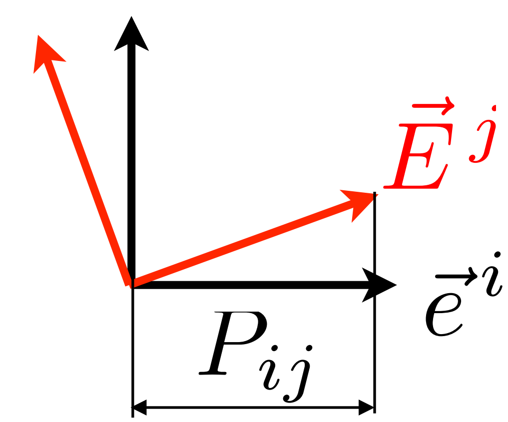
On le voit bien en composantes :

$$\begin{array}{l} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1 Changement de base orthonormée des vecteurs

On nomme «l'ancienne base» $\vec{e}_i$ et la «nouvelle base» $\vec{E}_i$.

Soit la *matrice de passage* $\boxed{P_{ij} = \vec{e}_i.\vec{E}_j}$



Remarque : $P_{ij} = \cos(\widehat{\vec{e}_i, \vec{E}_j})$.

Action sur les vecteurs de base :

$$\begin{aligned} \vec{e}_i &= (\vec{e}_i.\vec{E}_j)\vec{E}_j \\ \Longrightarrow \boxed{\vec{e}_i = P_{ij}\vec{E}_j} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= (\vec{E}_i.\vec{e}_j)\vec{e}_j \\ \Longrightarrow \boxed{\vec{E}_i = P_{ji}\vec{e}_j} & \\ \vec{E}_i &= P^T_{ij}\vec{e}_j \end{aligned}$$

Théorème de décomposition orthogonale de l'identité :

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \vec{E}_1 & \vec{E}_2 & \vec{E}_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} & & \\ & P_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \end{array}$$

P_{ij} est une matrice orthogonale :

$$\begin{aligned}
\vec{e}_i &= P_{ik}\vec{E}_k \\
&= P_{ik}P_{lk}\vec{e}_l \\
\vec{e}_i.\vec{e}_j &= P_{ik}P_{lk}\vec{e}_l.\vec{e}_j \\
\delta_{ij} &= P_{ik}P_{lk}\delta_{jl} \\
\delta_{ij} &= P_{ik}P_{jk} \\
\delta_{ij} &= P_{ik}P^T_{kj} \\
\Longrightarrow P^{-1}_{li}\delta_{ij} &= P^{-1}_{li}P_{ik}P^T_{kj} \\
P^{-1}_{lj} &= \delta_{lk}P^T_{kj} \\
\Longrightarrow \boxed{P^{-1}_{lj} = P^T_{lj}}
\end{aligned}$$

ou encore $P^{-1} = P^T$.

$$\begin{aligned}
\det(P.P^T) &= \det(I) = 1 \\
\det(P)^2 &= 1 \\
\boxed{\det(P) = \pm 1}
\end{aligned}$$

Attention P est une matrice, mais qui ne correspond pas aux composantes d'un tenseur ! Il n'existe pas de tenseur $\cancel{\mathbf{P}}$.

Action sur les composantes :

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= U_j \vec{E}_j \\
&= U_j P_{kj} \vec{e}_k \\
\vec{u}.\vec{e}_i &= U_j P_{kj} \vec{e}_k . \vec{e}_i \\
\boxed{u_i = P_{ij} U_j}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\vec{U} &= u_j \vec{e}_j \\
&= u_j P_{jk} \vec{E}_k \\
\vec{U}.\vec{E}_i &= u_j P_{jk} \vec{E}_k . \vec{E}_i \\
\boxed{U_i = P^T_{ij} u_j}
\end{aligned}$$

Aspects pratiques

Dans le cas où l'on a plus d'une base, il faut indiquer celle-ci (d'autant plus que l'on a des valeurs numériques !).

$$\vec{u} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_{\{\vec{e}_i\}} \qquad \vec{u} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_{\{\vec{E}_i\}}$$

2.2 Changement de base orthonormée des tenseurs d'ordre quelconque

Soit un tenseur du second ordre $\boldsymbol{\sigma}$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \sigma_{pq}\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \\
\boldsymbol{\sigma} &= \sigma_{pq}P_{pi}P_{qj}\vec{E}_i \otimes \vec{E}_j \\
\boldsymbol{\sigma} &= \Sigma_{ij}\vec{E}_i \otimes \vec{E}_j \qquad \text{par définition} \\
\Longrightarrow \boxed{\Sigma_{ij} = P^T_{ip}P^T_{jq}\sigma_{pq}}
\end{aligned}
$$

on identifie la formule classique $\Sigma = P^t.\sigma.P$ qui est «dangereuse» car Σ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont les matrices de composantes d'un seul et même tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ dans deux bases différentes…

La notation la plus sûre serait de spécifier la base, en conservant le nom du tenseur… $\sigma_{ij\ \{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_i\}} \neq \sigma_{ij\ \{\vec{E}_i \otimes \vec{E}_i\}}$

Le changement de base inverse :

$$\boxed{\sigma_{ij} = P_{ip}P_{jq}\Sigma_{pq}}$$

On voit la continuité avec la formule vue pour les tenseurs du premier ordre ($u_i = P_{ij}U_j$).

Par extension (les démonstrations sont similaires), les relations entre les composantes d'un tenseur d'ordre quelconque sont obtenues en appliquant autant de fois la matrice de changement de base que l'ordre du tenseur. Par ex. pour un tenseur du 4e ordre :

$$\boxed{\begin{aligned} a_{ijkl} &= P_{ip}P_{jq}P_{kr}P_{ls}A_{pqrs} \\ A_{ijkl} &= P^T_{ip}P^T_{jq}P^T_{kr}P^T_{ls}a_{pqrs} \end{aligned}}$$

où a_{ijkl} sont les composantes dans l'ancienne base et A_{ijkl} les composantes dans la nouvelle base.

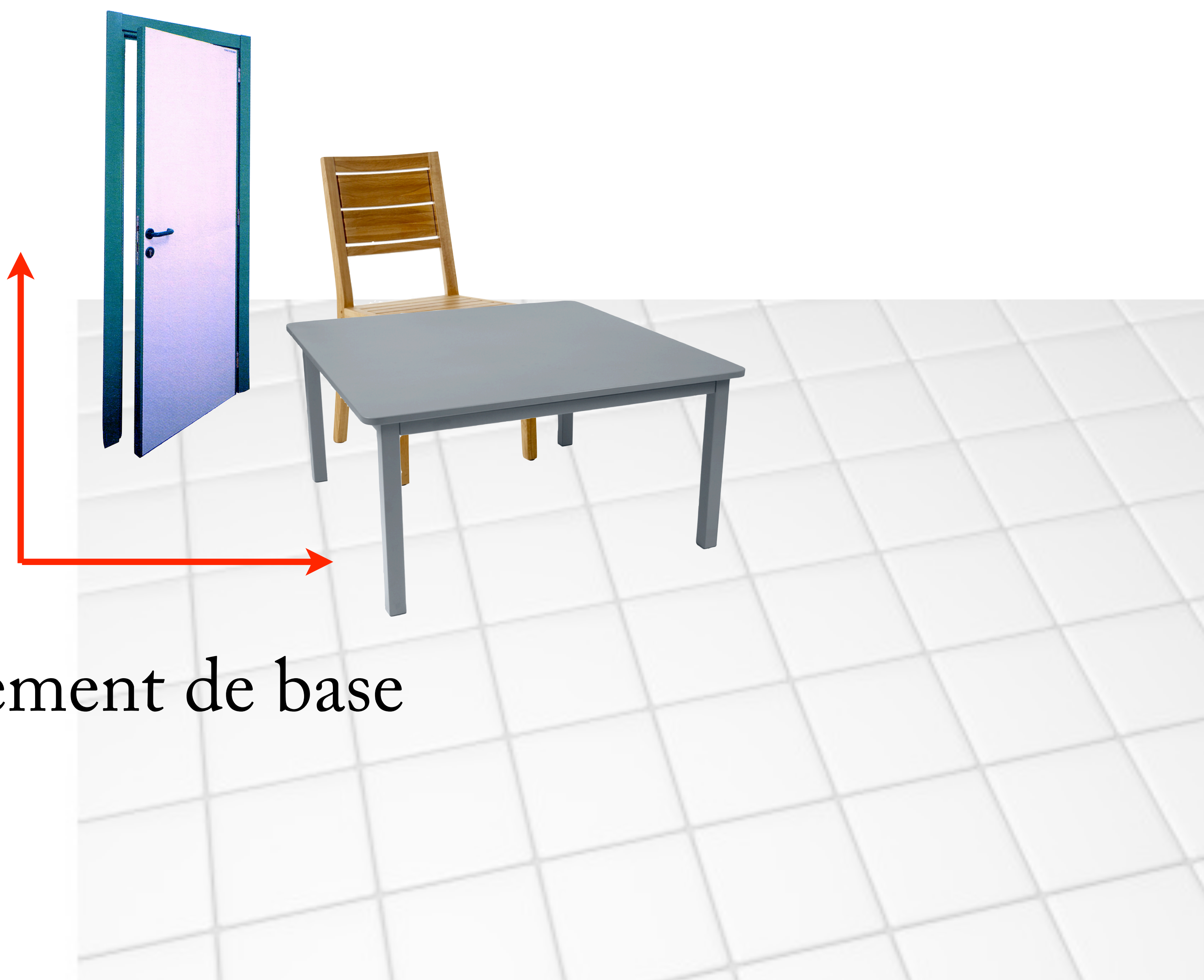
Attention pour un tenseur d'ordre 4 cela fait $4 \times 3^8 = 26244$ multiplications…

Nous verrons des formules plus rapides pour les tenseurs d'élasticité (formules de Bond).

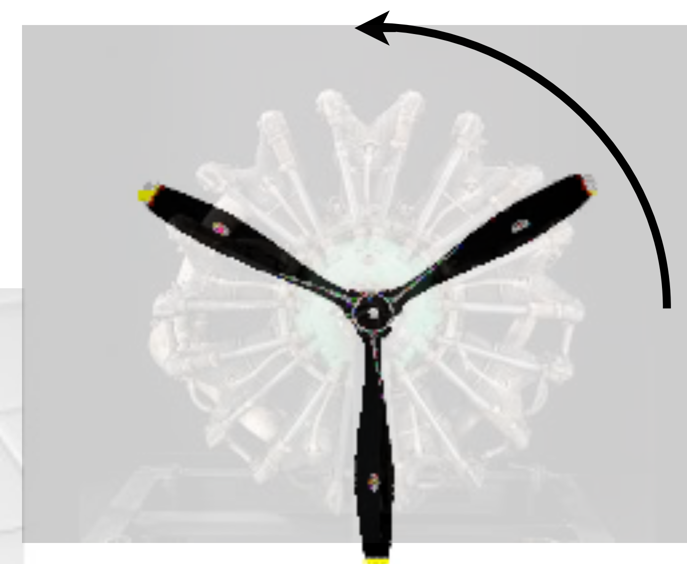
3 Rotations et symétries de tenseurs

3.1 Différence entre rotation et changement de repère

La rotation (ou translation) est physique, le changement de repère ne l'est pas. Bien que mathématiquement proches, ce sont des concepts différents.



Changement de base



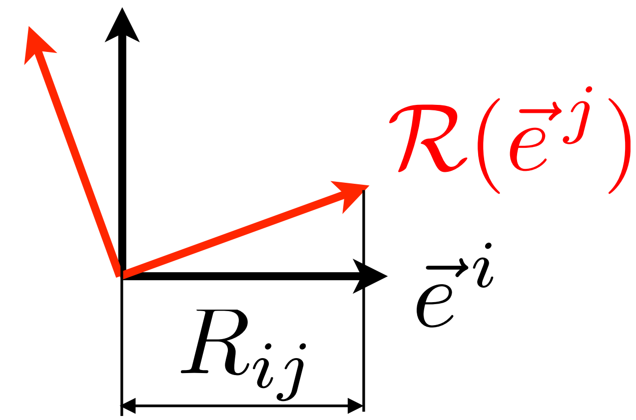
Rotation

4

3.2 Rotation

La matrice de rotation défini les tournés des tenseurs de base :

$$\boxed{\mathcal{R}(\vec{e}_j) = R_{ij}\vec{e}_i}$$



$$\Longrightarrow \boxed{R_{ij} = \mathcal{R}(\vec{e}_j)\cdot\vec{e}_i = \cos(\widehat{\mathcal{R}(\vec{e}_j),\vec{e}_i})}$$

Elle contient donc les vecteurs tournés exprimés en colonne dans la base :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\vec{e}_1) & \mathcal{R}(\vec{e}_2) & \mathcal{R}(\vec{e}_3) \end{array} \\ \Leftrightarrow R_{ij} & \left[\begin{array}{c} \\ \mathcal{R}(\vec{e}_j).\vec{e}_i \\ \\ \end{array} \right] \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \end{array}$$

on a conservation des angles :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\vec{e}_j).\mathcal{R}(\vec{e}_l) &= \delta_{jl} \\
R_{ij}\vec{e}_i.R_{kl}\vec{e}_k &= \delta_{jl} \\
\vec{e}_i.\vec{e}_k &= \delta_{ik} \\
R_{ij}R_{il} &= \delta_{jl} \\
R_{ij}R^T_{li} &= \delta_{jl} \\
\Leftrightarrow \boxed{R^{-1}_{ij} = R^T_{ij}}
\end{aligned}$$

depuis

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{R.R^t}) &= \det(I) = 1 \\
\det(R)^2 &= 1
\end{aligned}$$

et des orientations :

— rotations

$$\boxed{\det(R_{ij}) = 1}$$

— rotations-inversions

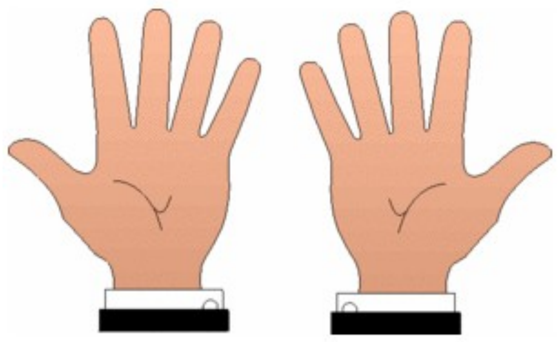
$$\boxed{\det(R_{ij}) = -1}$$

Pour un vecteur :

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \mathcal{R}(\vec{u}) \\
&= \mathcal{R}(u_j\vec{e}_j) \\
&= u_j\mathcal{R}(\vec{e}_j) = u_j R_{ij}\vec{e}_i \\
\Rightarrow \boxed{v_i = R_{ij}u_j}
\end{aligned}$$

Attention !

La rotation-inversion n'est pas physique :



On constate que l'expression est très proche de celles du changement de base (à la transposition près).

Pour un tenseur du second ordre on a simplement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathcal{R}(\sigma_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \\
&= \sigma_{ij}\mathcal{R}(\vec{e}_i) \otimes \mathcal{R}(\vec{e}_j) \\
&= \sigma_{ij}R_{ki}\vec{e}_k \otimes R_{lj}\vec{e}_l
\end{aligned}$$

$$\boxed{[\mathcal{R}(\boldsymbol{\sigma})]_{kl} = R_{ki}R_{lj}\sigma_{ij}}$$

et pour un tenseur du 4e ordre :

$$\mathbb{C} = C_{pqrs}\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes \vec{e}_r \otimes \vec{e}_s$$

$$\boxed{[\mathcal{R}(\mathbb{C})]_{ijkl} = R_{ip}R_{jq}R_{kr}R_{ls}C_{pqrs}}$$

3.3 Projections et symétries de tenseurs

Les formules précédentes sont encore valables pour les opérations de projection ou de symétrie, depuis les matrices que nous avons étudié précédemment.

Par ex. le symétrique d'un tenseur du 4e ordre par rapport à un plan $\vec{u}^{\perp}$ s'obtient par :

$$S_{ij} = \delta_{ij} - 2u_i u_j$$

$$\boxed{[\mathcal{S}(\mathbb{C})]_{ijkl} = S_{ip}S_{jq}S_{kr}S_{ls}C_{pqrs}}$$

4 Objectivité

4.1 Motivation

Principe d'objectivité : *un résultat de calcul ne peut dépendre du repère dans lequel on l'effectue.*

Car c'est le scientifique qui fait ce choix arbitraire et que son choix ne peut conditionner la physique !

Les opérations que nous avons mené sur les tenseurs sont-elles objectives ?

4.2 Objectivité de la contraction

L'opération de contraction entre deux tenseurs est objective. Par ex. le calcul de la contraction entre un tenseur du second ordre et un vecteur :

$$\vec{v} = \mathbf{a}.\vec{u}$$

$$\boxed{v_i = a_{ij} u_j}$$ Calcul effectué dans l'ancienne base

$$P_{ik} V_k = P_{il} \underbrace{P_{jm} P_{jn}}_{\delta_{mn}} A_{lm} U_n$$

$$\underbrace{P_{ip} P_{ik}}_{\delta_{pk}} V_k = \underbrace{P_{ip} P_{il}}_{\delta_{pl}} A_{ln} U_n$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_p = A_{pn} U_n}$$ Calcul effectué dans la nouvelle base

On obtient le même résultat dans n'importe quelle base !

Autre exemple : la décomposition orthogonale de l'identité :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_{\mathrm{i}}\vec{e}_{\mathrm{i}} && \text{Calcul effectué dans l'ancienne base}\\ &= P_{\mathrm{ki}}U_{\mathrm{k}}P_{\mathrm{li}}\vec{E}_{\mathrm{l}} \\ &= U_{\mathrm{k}}\vec{E}_{\mathrm{k}} && \text{Calcul effectué dans la nouvelle base}\end{aligned}$$

La contraction au sein d'un tenseur comme A_{ikkj} est aussi objective. Preuve : on peut la ramener à une contraction entre deux tenseurs :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} \\ \Longleftrightarrow A_{ijkl} &= B_{ij} C_{kl} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{B}.\mathbf{C} \\ \Longleftrightarrow D_{il} &= B_{ij} C_{jl} = A_{ijjl} \end{aligned}$$

Donc si l'opération . est objective, la contraction interne A_{ikkj} l'est aussi.

Bilan : toute contraction (ou «saturation d'indice») est une opération objective. Par ex. les produits scalaires sont objectifs.

Il s'agit de la justification de la convention d'Einstein. On peut saturer deux indices (mais pas plus !).

4.3 Objectivité du produit vectoriel et de π

Question : la «marmelade d'indices» du produit vectoriel donne-t-elle le même résultat quelque soit la base ?

Preuve :

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \wedge \vec{v})_\mathrm{i} = \Pi_\mathrm{ijk} u_\mathrm{j} v_\mathrm{k} \vec{e}_\mathrm{i} &= \Pi_\mathrm{ijk} P_\mathrm{jq} U_\mathrm{q} P_\mathrm{kr} V_\mathrm{r} P_\mathrm{ip} \vec{E}_\mathrm{p} \\
&= \Pi_\mathrm{ijk} P_\mathrm{ip} P_\mathrm{jq} P_\mathrm{kr} U_\mathrm{q} V_\mathrm{r} \vec{E}_\mathrm{p}
\end{aligned}
$$

avec ∏ le symbole de Levi-Civita :

$$
\begin{aligned}
\Pi_\mathrm{ijk} &= 1 \,\mathrm{si}\, (\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\
&= -1 \,\mathrm{si}\, (\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}) \in \{(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)\} \\
&= 0 \quad \mathrm{sinon}
\end{aligned}
$$

cas p=q :

$$
\Pi_\mathrm{ijk} P_\mathrm{ip} P_\mathrm{jp} P_\mathrm{kr} = \Pi_\mathrm{ijk} \delta_\mathrm{ij} P_\mathrm{kr} = 0
$$

$$
\mathrm{car}\, \Pi_\mathrm{ijk} = 0, \mathrm{si}\, (\mathrm{i} = \mathrm{j}) \quad \mathrm{et} \quad \delta_\mathrm{ij} = 0, \mathrm{si}\, (\mathrm{i} \neq \mathrm{j})
$$

idem pour les cas q=r ou p=r

Si p,q et r sont tous différents :

sous-cas où ils forment une permutation directe de (1,2,3) :

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{ijk}} P_{\mathrm{ip}} P_{\mathrm{jq}} P_{\mathrm{kr}} &= \Pi_{\mathrm{ijk}} P_{\mathrm{i1}} P_{\mathrm{j2}} P_{\mathrm{k3}} \\ &= \det(P) \\ &= 1\end{aligned}$$

sous cas où ils forment une permutation indirecte de (1,2,3) : on trouve bien sûr -1

Au bilan on a :

$$\Pi_{\mathrm{ijk}} P_{\mathrm{ip}} P_{\mathrm{jq}} P_{\mathrm{kr}} = \Pi_{\mathrm{pqr}}$$

et donc :

$$\Pi_{\mathrm{ijk}} u_{\mathrm{j}} v_{\mathrm{k}} \vec{e}_{\mathrm{i}} = \Pi_{\mathrm{pqr}} U_{\mathrm{q}} V_{\mathrm{r}} \vec{E}_{\mathrm{p}}$$

ce qui montre que le produit vectoriel est objectif !

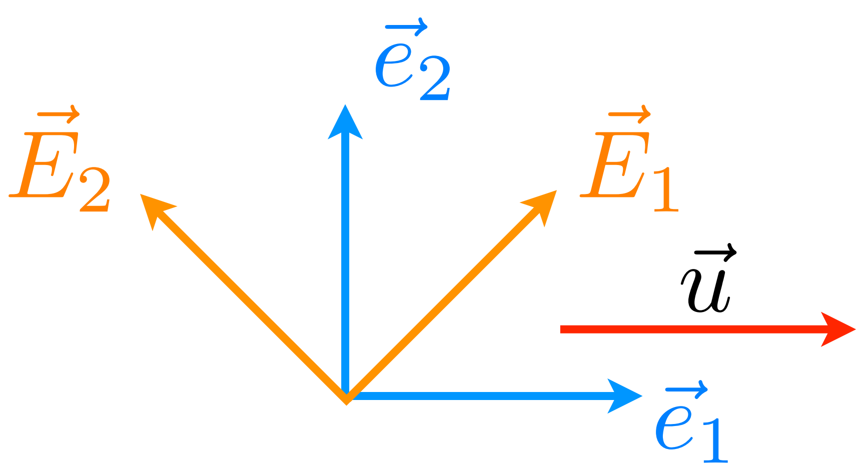
Et, par extension que l'opérateur de Levi-Civita l'est aussi.

4.4 Exemple d'une fonction non objective

La norme 2 (euclidienne), associée au produit scalaire, est objective.

Au contraire, la norme 1 ne l'est pas :

Contre-exemple :



$$\vec{u} = \vec{e}_1$$

$$\|\vec{u}\|_1 = |u_1| + |u_2| + |u_3|$$

Base $\vec{e}_{\mathrm{i}}$ $\qquad \|\vec{u}\|_1 = 1$

Base $\vec{E}_{\mathrm{i}}$ $\qquad \|\vec{u}\|_1 = \sqrt{2}$

Même si les mathématiciens disent que «les normes sont équivalentes», on ne peut utiliser que la norme 2 !

5 Invariants

5.1 Définition

Un *invariant* est une *fonction scalaire d'un tenseur* dont le résultat ne dépend pas de la base.

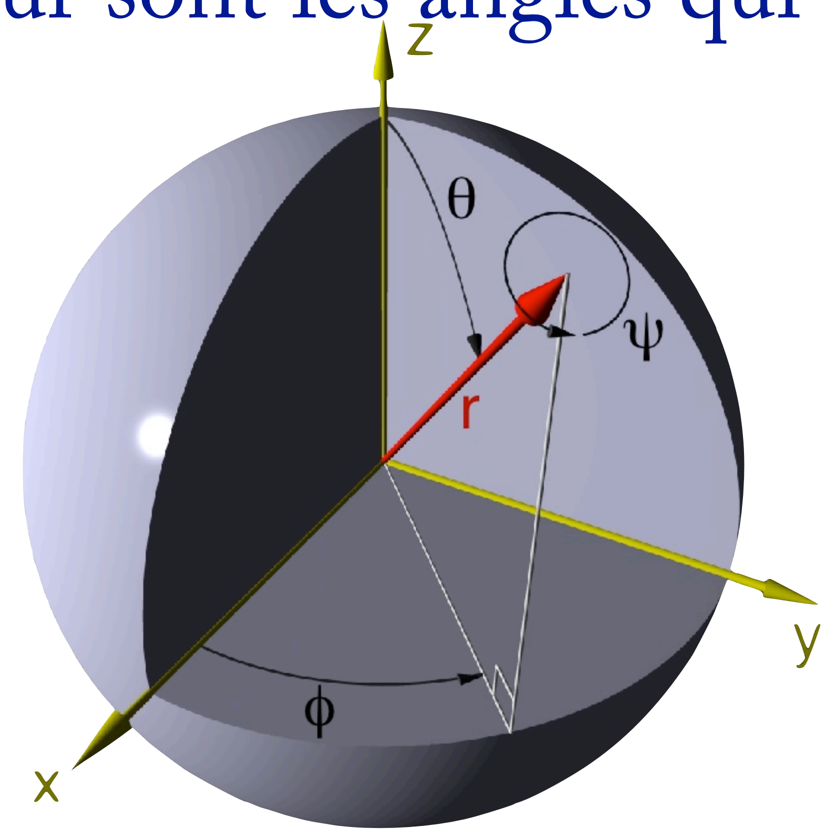
C'est mathématiquement équivalent à une invariance du résultat par rapport à toutes les rotations SO(2) en 2D ou SO(3) en 3D.

À cause du principe d'objectivité, toute fonction *isotrope* utilisée en physique doit pouvoir d'écrire comme une *fonction d'invariants*.

5.2 Invariant d'un vecteur

Pour les vecteurs, seule la norme euclidienne $\|\vec{u}\|$ est un invariant (l'invariance vient du produit scalaire).

Les deux autres informations du vecteur sont les angles qui positionnent le vecteur.

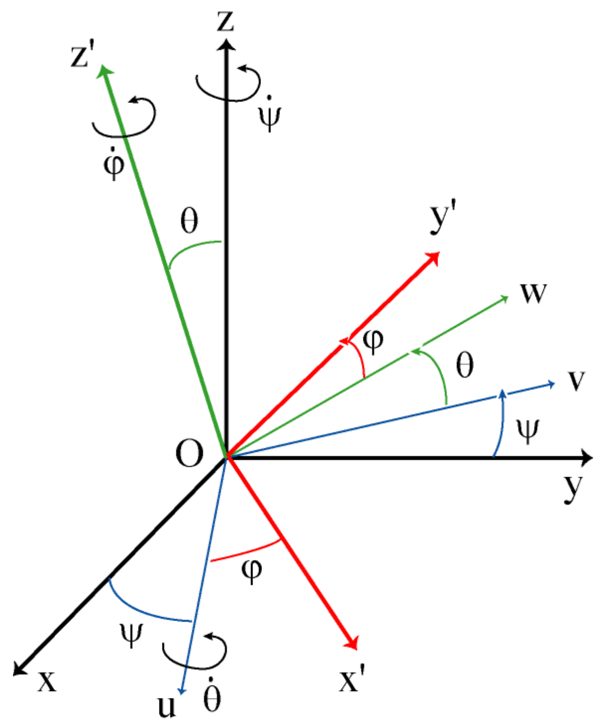


En 2D :
un angle + 1 norme = 2 dimensions

En 3D :
deux angles (la rotation propre n'intervient pas sur le vecteur qui y est insensible !) et 1 norme = 3 dimensions.

5.3 Invariants d'un tenseur symétrique du second ordre

Un tenseur **A** symétrique possède 6 composantes (DDL) indépendantes car $A_{ij} = A_{ji}$.



L'objet est positionné dans l'espace par 3 angles d'Euler :

Il reste 3 DDL, qui ne dépendent pas de l'orientation, c'est à dire 3 invariants scalaires.

Nous avons vu que les contractions, les opérateurs δ et π permettaient de construire des invariants scalaires par contraction…

On forme un premier invariant pas contraction avec δ : on obtient la **trace** du tenseur.

$$\mathrm{trace}(\mathbf{A}) = \mathbf{I} : \mathbf{A} = \delta_{ij} A_{ij} = A_{ii}$$

On peut en former un second en utilisant la **norme** euclidienne du tenseur (associée à la double contraction)

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}} = \sqrt{A_{ij} A_{ij}}$$

Enfin on peut utiliser l'opérateur de Levi-Civita et on obtient le **déterminant**.

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{3^2} \pi_{ijk} \pi_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr}$$

Ces trois invariants sont bien connus. Relatif à des puissances différentes des composantes, ce sont des termes indépendants.

Quelques autres jeux d'invariants indépendants :

- **Les valeurs propres** : $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (souvent oubliés…).

- **Les invariants de Rivlin-Ericksen** (plus mécaniques…)

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{I} = \mathrm{trace}(\boldsymbol{\sigma}) \\
J_2 &= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{I} = \tfrac{1}{2}\mathrm{trace}(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma}) \qquad = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \\
J_3 &= \tfrac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{I} = \tfrac{1}{3}\mathrm{trace}(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma})
\end{aligned}
$$

- **Les invariants de Cayley-Hamilton** (plus matheux…)

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{trace}(\boldsymbol{\sigma}) \\
I_2 &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{trace}(\boldsymbol{\sigma})^2 - \mathrm{trace}(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma})\right) \\
I_3 &= \det(\boldsymbol{\sigma})
\end{aligned}
$$

propriété : $\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{I}) \;=\; -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3$

$$\mathbf{0} \;=\; \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma} - I_1\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma} + I_2\boldsymbol{\sigma} - I_3\mathbf{I}$$

Il existe des relations entre les jeux d'invariants.

Quelques utilisations en mécanique :

pression hydrostatique moyenne : $P = \dfrac{1}{3}\mathrm{trace}(\boldsymbol{\sigma}) = \dfrac{\sigma_{ii}}{3}$

critère de Von Mises (on y reviendra) :

$$\sigma^{vm} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left\|\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathrm{trace}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}\right\| = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{D}})}$$

variation de volume :

L_1 $\quad$ $L_1(1+\varepsilon_I)$

$$\begin{aligned} V_{EF} &= L_1L_2L_3(1+\varepsilon_I)(1+\varepsilon_{II})(1+\varepsilon_{III}) \\ &\simeq V_{EI}(1+\varepsilon_I+\varepsilon_{II}+\varepsilon_{III}) \\ \Longrightarrow \frac{\Delta V}{V} &= \mathrm{trace}(\varepsilon) \end{aligned}$$

vrai dans le repère principal donc vrai dans tout repère car la trace est un invariant !

Représentation spectrale d'un tenseur symétrique du second ordre

La matrice A_{ij} des composantes du tenseur $\mathbf{A}$ est symétrique donc diagonalisable. Le tenseur s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{\vec{u}_i \otimes \vec{u}_j}$$

où les $\vec{u}_i$ forment une base orthogonale. La forme intrinsèque de cette équation se nomme la décomposition spectrale du tenseur :

$$\boxed{\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i}$$

Remarque : préciser la somme car il y a trois indices « i » …

Cela ne pose pas de souci car λ est un scalaire.

5.4 Invariants des tenseurs d'ordre >2

Les invariants des tenseurs d'ordre supérieur à 2 sont encore mal conus.

On pourra se référer aux travaux de M. Vianello pour les tenseurs du 4ème ordre en dimension 2

Et à ceux de N. Auffray, B. Kolev pour des résultats récents sur les tenseurs du 4ème ordre en dimension 3

Il existe aussi des invariants joints, pour une paire de tenseurs **A** et **B** par exemple…

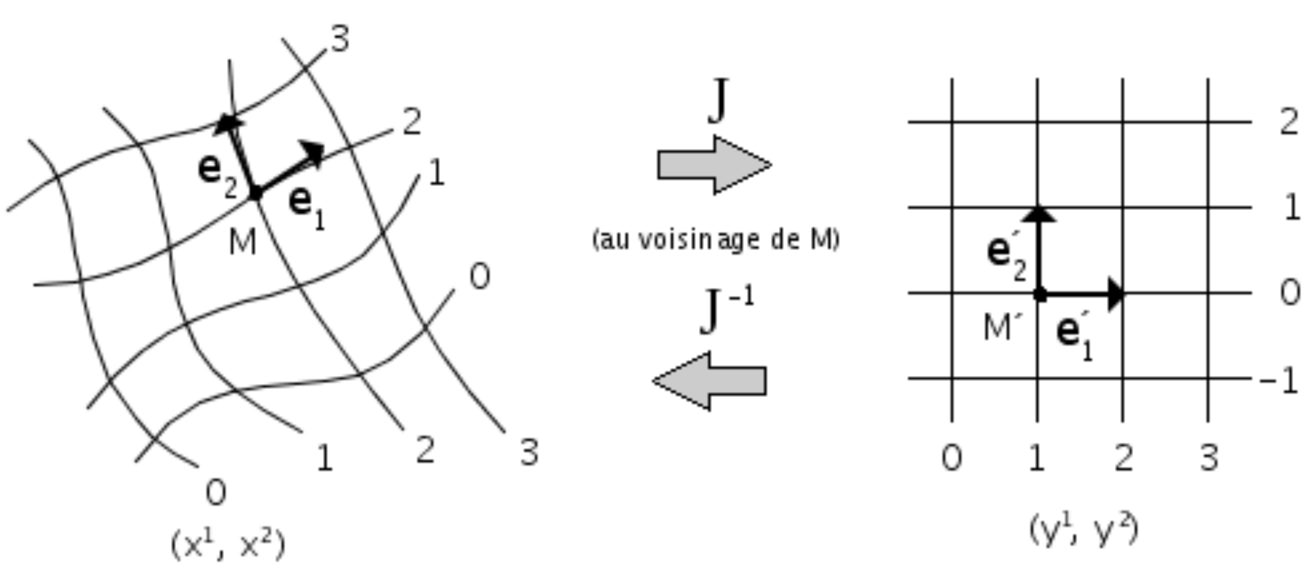
6 Cas des bases non orthonormées

6.1 Motivation

Dans certains problèmes comme la théorie des coques, il est plus simple de considérer un repère qui suit la forme, et sera non orthogonal.

En grandes transformations, certain repères non orthonormés apparaissent.

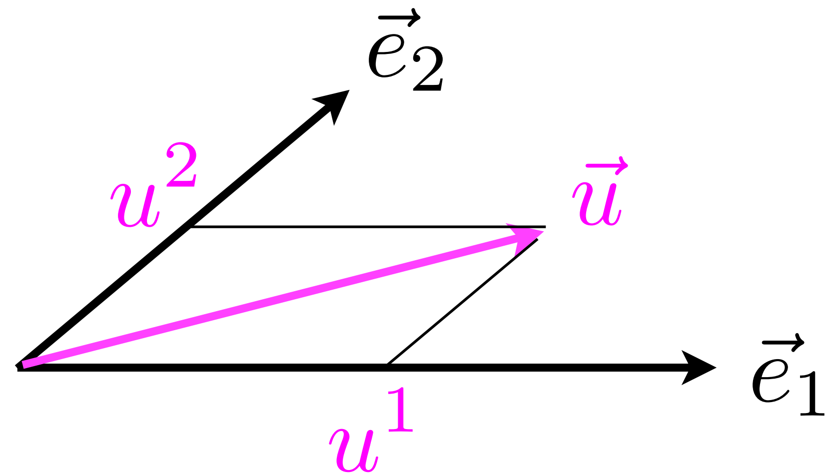
De nombreuses simplifications disparaissent…



6.2 Notations

Le vecteur $\vec{u}$ s'écrit dans sa base non orthonormée comme :

$$\vec{u} = u^i \vec{e}_i$$



On remarque la position des indices :

quand les indices sont en haut, ils désignent une grandeur *contravariante*.

quand les indices sont en bas ils désignent une grandeur *covariante*.

Nous verrons la justification de ces noms ensuite.

6.3 Changement de base des vecteurs

On nomme P la *matrice* de passage de l'ancienne base $\vec{e}_i$ à la nouvelle base $\vec{E}_i$: $\vec{E}_1 = \vec{e}_1 P_1^1 + \vec{e}_2 P_1^2$ (2D)

Forme matricielle* :

$$[\vec{E}_1 \quad \vec{E}_2] = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2] \cdot \begin{bmatrix} P_1^1 & P_2^1 \\ P_1^2 & P_2^2 \end{bmatrix} \iff \boxed{\vec{E}_j = \vec{e}_i P_j^i}$$

ligne

colonne

Relation entre les anciennes et nouvelles composantes :

$$\begin{aligned}
\vec{u} = u^i \vec{e}_i &= U^j \vec{E}_j \\
u^i \vec{e}_i &= U^j P_j^k \vec{e}_k \\
\Rightarrow \boxed{u^i = P_j^i U^j} \\
(P^{-1})_i^k u^i &= U^j (P^{-1})_i^k P_j^i = U^j \delta_{kj} \\
\Rightarrow \boxed{U^k = (P^{-1})_i^k u^i}
\end{aligned}$$

(car $\vec{e}_k$ est une base)

Soit, en écriture matricielle (2D) :

$$\boxed{\begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P^{-1})^1_1 & (P^{-1})^1_2 \\ (P^{-1})^2_1 & (P^{-1})^2_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^1_1 & P^1_2 \\ P^2_1 & P^2_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \end{bmatrix}}$$

On remarque que les composantes u^i changent de base à l'aide de la matrice P^{-1} (au «contraire» des vecteurs de base) :
- c'est pour cela qu'on les nomme *contravariantes*
- on écrit l'indice *en haut*
- on les rangera en *colonne* (pour la cohérence avec P^i_j ou *i* est le numéro de ligne et *j* le numéro de colonne.

Au contraire on rangera les *covariants* $\vec{e}_i$ ou $\vec{E}_i$ en ligne. D'où la forme «étrange» de l'équation *.

6.4 Formes linéaires

Une forme linéaire associe un scalaire à un vecteur $\vec{u} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix}$

Dans une base, on a (en 2D) : $l(\vec{u}) = l_1 u^1 + l_2 u^2$

Ce scalaire doit être invariant quelque soit la base (objectivité) :

Pour tous les u possibles

$$\begin{aligned} l_s u^s &= L_k U^k \\ l_s u^s &= L_k (P^{-1})^k_j u^j \\ \Big\downarrow \quad \boxed{l_j} &\boxed{= L_k (P^{-1})^k_j} \\ l_j P^j_i &= L_k (P^{-1})^k_j P^j_i \\ l_j P^j_i &= L_k \delta_{ik} \\ \boxed{L_i} &\boxed{= l_j P^j_i} \end{aligned}$$

Soit, en écriture matricielle et en 2D :

$$\boxed{\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1^1 & P_2^1 \\ P_1^2 & P_2^2 \end{bmatrix}}$$

On remarque que les composantes l_i changent de base à l'aide de la matrice P (comme les vecteurs de base) :
- elles sont donc *covariantes*
- on écrit l'indice *en bas* et on les range en *ligne*

Matriciellement et en 2D :

$$\boxed{l(\vec{u}) = l_1 u^1 + l_2 u^2 = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \end{bmatrix}$$

Exemples de formes linéaires

La force est définie depuis la puissance (invariante…).

$$P = F_1 v^1 + F_2 v^2$$

Le gradient est aussi, par construction, une forme linéaire, donc ses composantes sont *covariantes*. On note l'effet «d'inversion» de la variance par la division…

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 \\ &= \mathrm{grad}(f)_1 dx^1 + \mathrm{grad}(f)_2 dx^2 \end{aligned}$$

Une équation de plan (droite en 2D) vectoriel implique aussi que la normale $\vec{a}$ soit exprimée par ses composantes covariantes :

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 = 0$$

6.5 Base duale

La forme linéaire correspond-elle à un produit scalaire ? Mais si les l_i étaient les composantes de $\vec{l}$ dans la base $\vec{e}_i$ on aurait :

$$\cancel{\begin{aligned} \vec{l}.\vec{u} &= (l_1\vec{e}_1 + l_2\vec{e}_2).(u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2) \\ &= l_1u^1(\vec{e}_1.\vec{e}_1) + (l_1u^2 + l_2u^1)(\underbrace{\vec{e}_1.\vec{e}_2}_{\neq 0}) + l_2u^2(\vec{e}_2.\vec{e}_2) \end{aligned}}$$

Il faut considérer que les composantes l_i sont relatives à une autre base : *la base duale* $\vec{e}^{\,i}$ (indices en haut).

$$\vec{l}.\vec{u} = (l_1\vec{e}^{\,1} + l_2\vec{e}^{\,2}).(u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2) = l_1u^1 + l_2u^2$$

à condition que : $\boxed{\vec{e}^{\,i}.\vec{e}_j = \delta_{ij}}$

Ceci définit la base duale $\vec{e}^{\,i}$ et donc les composantes covariantes l_i de $\vec{l}$ lui sont relatives : $\boxed{\vec{l} = l_i\vec{e}^{\,i} = l^j\vec{e}_j}$

La base duale est nécessaire pour extraire les composantes :

$$\vec{u} = u^i \vec{e}_i$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{e}^{\,j} &= u^i \vec{e}_i \cdot \vec{e}^{\,j} \\ \Longrightarrow \boxed{u^j = \vec{u} \cdot \vec{e}^{\,j}} \end{aligned}$$

Et, de même :

$$\boxed{u_i = \vec{u} \cdot \vec{e}_i}$$

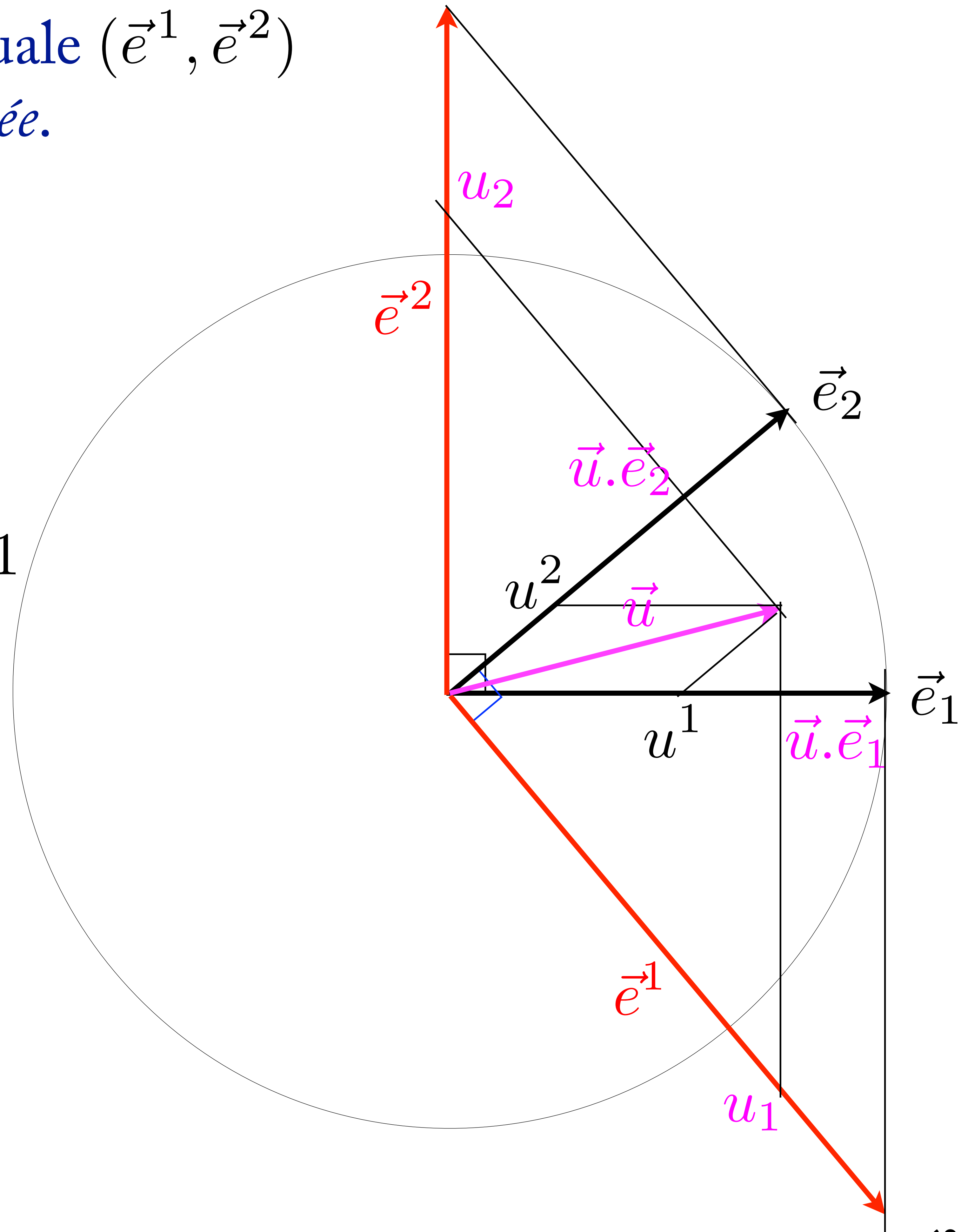
on remarque de nouveau la cohérence de la position des indices.

Construction de la base duale $(\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2})$
en supposant la base *normée*.

Depuis $\vec{e}^{\,i}.\vec{e}_j = \delta_{ij}$

1. $\vec{e}^{\,1} \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}^{\,2} \perp \vec{e}_1$

2. $\vec{e}^{\,1}.\vec{e}_1 = 1, \quad \vec{e}^{\,2}.\vec{e}_2 = 1$



La propriété $\vec{u}.\vec{e}_1 = u_1$
correspond au théorème
de Thales !

La base duale permet un calcul simple de la matrice de passage de $\vec{e}_i$ vers $\vec{E}_i$:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= \vec{e}_1 P_1^1 + \vec{e}_2 P_1^2 \\
\vec{E}_1.\vec{e}^2 &= \underbrace{\vec{e}_1.\vec{e}^2}_{0} P_1^1 + \underbrace{\vec{e}_2.\vec{e}^2}_{1} P_1^2 \\
\Rightarrow P_1^2 &= \vec{E}_1.\vec{e}^2
\end{aligned}$$

Généralisation :

$$\boxed{P_j^i = \vec{e}^{\,i}.\vec{E}_j}$$

On remarque de nouveau la cohérence de la position des indices.

6.6 Tenseur métrique

On peut avoir besoin des composantes l^i (contravariantes) de $\vec{l}$ (c'est à dire dans la base initiale $\vec{e}_i$). Elles vérifient :

$$\begin{aligned}
\vec{l}.\vec{u} &= l_k u^k \\
(l^j \vec{e}_j).(u^i \vec{e}_i) &= l_k u^k \\
l^j u^i (\vec{e}_j.\vec{e}_i) &= l_k u^k \\
l^j (\vec{e}_j.\vec{e}_i) &= l_i
\end{aligned}$$

$\forall \vec{u}$

$$\boxed{l_i = g_{ij} l^j}$$

on pose $\boxed{g_{ij} = \vec{e}_i.\vec{e}_j}$ le *tenseur métrique* ou *matrice de Gram* (symétrique).

Son déterminant est le volume engendré par les $\vec{e}_i$.

Forme duale $\boxed{\begin{array}{rcl} l^i & = & g^{ij} l_j \\ \hline g^{ij} & = & \vec{e}^{\,i}.\vec{e}^{\,j} \end{array}}$ et $\begin{array}{rcl} \vec{l}.\vec{u} & = & l^i g_{ij} u^j \\ & = & l_i g^{ij} u_j \end{array}$

On parle parfois de **g** comme d'un «ascenseur à indices». La matrice g_{ij} est symétrique, définie positive.

6.7 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs :

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= u_i \vec{e}^{\,i} \\
\vec{v} &= v_j \vec{e}^{\,j} \\
\vec{u}.\vec{v} &= u_i v_j (\vec{e}^{\,i}.\vec{e}^{\,j}) \\
\vec{u}.\vec{v} &= u_i g^{ij} v_j \\
&= u^i g_{ij} v^j \\
\vec{u}.\vec{v} &= u_i v^j \\
&= u^i v_j \\
&= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})
\end{aligned}$$

Règle générale : en base non orthonormée, on doit toujours contracter une coordonnée covariante avec une contravariante. On peut s'aider du tenseur métrique pour cela.

6.8 Tenseurs d'ordre *n*

Les règles se déduisent de celles des vecteurs. On doit toujours avoir des produits entre covariants et contravariants. Par ex. :

$$\mathbf{A} = A^i_{jk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}^k$$

Le tenseur de Gram est utilisé pour «monter» ou «abaisser» les indices (passer des coordonnées covariant au contravariant ou le contraire). Par ex. :

$$A_{ijk} = g_{il} A^l_{jk}$$

6.9 n-Contractions

La contraction, pour rester objective, doit réaliser un produit scalaire entre *un covariant avec un contravariant* :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}.\mathbf{B} &= (A^i_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}^{\,k}).(B^l_j \vec{e}_l \otimes \vec{e}^{\,j}) \\
&= A^i_k B^l_j \vec{e}_i \otimes \underbrace{(\vec{e}^{\,k}.\vec{e}_l)}_{\delta_{kl}} \vec{e}^{\,j} \\
&= A^i_k B^k_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}^{\,j} \\
\Rightarrow (\mathbf{A}.\mathbf{B})^i_j &= A^i_k B^k_j
\end{aligned}$$

Par construction, le tenseur métrique permet de transformer les indices covariants en contravariants comme pour les vecteurs. Par exemple :

$$\begin{aligned}
A^{ij} &= g^{ik} A^j_k \\
A_{ij} &= g_{ik} g_{jl} A^{kl}
\end{aligned}$$

6.10 Changements de bases des tenseurs

Les règles sont les mêmes que pour les bases orthonormées, mais en faisant attention de nouveau à la variance des indices.

Ex. $A^{ik}_{jl} \quad = \quad (P^{-1})^i_p (P^{-1})^q_j (P^{-1})^k_r (P^{-1})^s_l \, a^{pr}_{qs}$

6.11 Objectivité

Toujours en faisant attention à la variance des indices, on peut montrer que les opérations de contraction etc… sont objectives.

Ex.

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \mathbf{a}.\vec{u} \\
\boxed{v_i = a_i^j u_j} & \\
P_i^k V_k &= P_i^r \underbrace{(P^{-1})_s^j P_j^l}_{\delta_{sl}} U_l A_r^s \\
P_i^k V_k &= P_i^r U_l A_r^l \\
\underbrace{(P^{-1})_q^i P_i^k}_{\delta_{kq}} V_k &= \underbrace{(P^{-1})_q^i P_i^r}_{\delta_{rq}} U_l A_r^l \\
\boxed{V_q = A_q^l U_l} &
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
v_i &= P_i^k V_k \\
u_j &= P_j^l U_l \\
a_i^j &= P_i^r (P^{-1})_s^j A_r^s
\end{aligned}}$$

6.12 La base orthonormée

Dès que l'on peut, on utilise des bases orthonormées.
C'est à dire quasiment tout le temps sauf pour les coques et membranes non planes. Cela entraîne une série de simplifications :

$$\vec{e}_i = \vec{e}^{\,i} \qquad\qquad \vec{E}_j = \vec{e}_i P^i_j \qquad\qquad \boxed{P^{-1}_{ij} = P^t_{ij}} = P_{ji}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \qquad \Longrightarrow \boxed{P^i_j = \vec{e}_i . \vec{E}_j}$$

On n'a plus besoin de distinguer co- et contra- variance : on «ramène» tous les indices «en bas» et l'on retrouve les formules vues précédemment.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Bibliographie

Les tenseurs en mécanique et en élasticité, Léon Brillouin, Masson, 1960.

Le calcul tensoriel, André Delachet, Que sais-je N°1336.

Initiation progressive au calcul tensoriel, Claude Jeanperrin, Ellipses, 1999.

Champs de vecteurs et de tenseurs, E. Bauer, Masson, Paris, 1955.

Le calcul tensoriel en physique, J. Hladik, Masson, 1993.
Le calcul vectoriel en physique, J. Hladik, Ellipses, 1993.

Les tenseurs, Wikipedia.

Tenseurs, cours de S. Forest (École des Mines de Paris)

Mécanique des Milieux Continus, cours en ligne de Nicolas Moës (Centrale Nantes). On y trouvera notamment les formules d'intégration, de Green, de Stokes, les coordonnées curvilignes…

Bases de tenseurs, cours donné à l'occasion de l'école d'été MatSyMat (2014). En ligne. *https://matsymat.sciencesconf.org*. Ce cours est à l'origine de celui-ci et plus poussé.