TD EM & Optique 2A

Correction TD 4

Année 2019-2020

jordan.ledig@univ-lorraine.fr

Ondes en présence d'une interface, coefficients de Fresnel

Pour tout l'exercice, nous allons nous baser sur le schéma ci-dessous. Le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ va vers la droite, le vecteur unitaire $\vec{e}_z$ vers le haut, et le vecteur $\vec{e}_y$ s'enfonce dans la feuille. Les angles sont orientés de la normale vers le rayon lumineux (le sens de rotation donne le signe de l'angle).

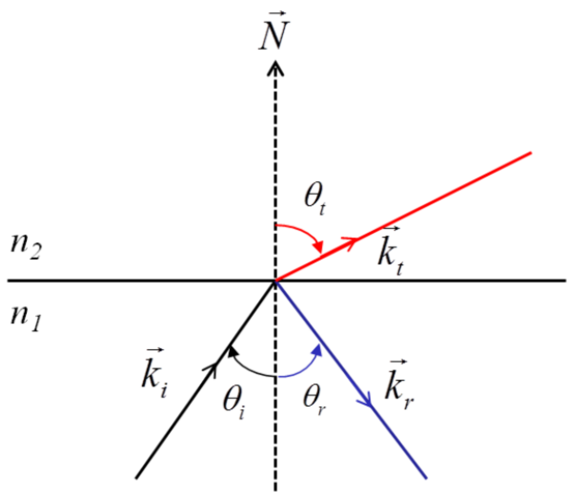


Figure 1 – Schéma du phénomène de réflexion/réfraction

Question 1

Une onde électromagnétique $\vec{E}$ en notation complexe peut s'écrire :

$$\underline{\vec{E}}_\alpha = E_{\alpha 0} e^{j(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)}\ \vec{e}_\alpha \qquad \text{avec } \alpha = \{i, t, r\}$$

j étant l'unité complexe telle que $j^2 = -1$ et $\vec{e}_\alpha$ la polarisation du champ.

Question 2

On considère une polarisation TE (transverse électrique, i.e. le champ électrique parallèle au dioptre). Comme $\vec{E}_\alpha = E_{y\alpha}\vec{e}_y$, la conservation de la composante tangentielle au dioptre revient à conserver E_y. Attention, la conservation se fait d'un milieu à l'autre :

$$\underline{\vec{E}}_{\text{milieu 1}} \cdot \vec{e}_y = \underline{\vec{E}}_{\text{milieu 2}} \cdot \vec{e}_y$$

On obtient ainsi la relation ($E_y = E_0$ dans notre cas) :

$$E_{0i} e^{j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + E_{0r} e^{j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = E_{0t} e^{j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \tag{1}$$

Cette relation est vraie partout sur le dioptre, donc même en $\vec{r} = \vec{0}$. Ainsi, la continuité de la partie tangentielle du champ électrique nous donne :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \tag{2}$$

Question 3

Repartons de l'équation (1). Si une somme d'exponentielles complexes donne 0, alors la somme des affixes donne zéro (c'est en fait notre équation (2), pour la continuité de $E_{\tan}$) et toutes les phases sont égales entre elles. Ainsi, partout sur le dioptre :

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}$$

Le vecteur d'onde $\vec{k}$ se trouve dans le plan de la feuille (sa composante suivant y est nulle), et le dioptre se trouve dans le plan $z = 0$. Donc les produits scalaires se limitent à :

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

où on a simplifié par x. Calculons maintenant les composantes des vecteurs $\vec{k}$. Encore une fois, il faut prêter attention aux orientations des angles, et se rappeler que $k = n\omega/c$.

$$\vec{k}_i = n_1 \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} -\sin\theta_i \\ 0 \\ \cos\theta_i \end{pmatrix} \qquad \vec{k}_r = n_1 \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} \sin\theta_r \\ 0 \\ -\cos\theta_r \end{pmatrix} \qquad \vec{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} -\sin\theta_t \\ 0 \\ \cos\theta_t \end{pmatrix}$$

On obtient alors les égalités :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k_{xi} & = & k_{xr} \\ k_{xi} & = & k_{xt} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \theta_i & = & -\theta_r \\ n_1 \sin\theta_i & = & n_2 \sin\theta_t \end{array} \right.$$

Pour que l'onde puisse passer dans le milieu 2, il faut que $\theta_t \leq \pi/2 \Leftrightarrow \sin\theta_t \leq 1$. En vertu de la relation de Snell-Descartes, nous avons :

$$\sin\theta_t \leq 1 \Leftrightarrow \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_i \leq 1$$

Si le milieu 2 est plus réfringent que le milieu 1 (i.e. $n_2 > n_1$ – pour un dioptre air/verre par ex.) alors cette inégalité est toujours vérifiée, et il y aura toujours une onde transmise. Dans le cas où $n_1 > n_2$ (pour un dioptre verre/air par ex.), il existe une valeur d'angle critique pour θ_i :

$$\theta_i \leq \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \theta_c$$

Au delà de θ_c il n'y a pas d'onde transmise, tout est réfléchi.

Question 4

Partons de l'équation de Maxwell–Faraday :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Avec l'hypothèse d'onde plane, la notation complexe nous permet d'écrire $\vec{\nabla} = j\vec{k}$ et $\partial_t = -j\omega$. De plus, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Développons le calcul :

$$\vec{H} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega \mu_0} = n\frac{\vec{e}_k \wedge \vec{E}}{\mu_0 c} \tag{3}$$

où $\vec{e}_k = \vec{k}/k$ est le vecteur unitaire de $\vec{k}$. Dans notre cas d'OEM–TE, on a :

$$\vec{H} = \frac{n}{\mu_0 c}\begin{pmatrix} e_{kx} \\ 0 \\ e_{kz} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n}{\mu_0 c}\begin{pmatrix} -E_y e_{kz} \\ 0 \\ E_y e_{kx} \end{pmatrix}$$

La composante tangentielle de $\vec{H}$ est conservée lors du passage du milieu 1 vers le milieu 2. La composante suivant y étant nulle, $H_{\tan}$ se limite à H_x :

$$\begin{aligned} & H_{xi} + H_{xr} = H_{xt} \\ \Leftrightarrow \quad & n_1(E_{0i}e_{kzi} + E_{0r}e_{kzr}) = n_2 E_{0t} e_{kzt} \\ \Leftrightarrow \quad & n_1(E_{0i}\cos\theta_i - E_{0r}\cos\theta_i) = n_2 E_{0t}\cos\theta_t \end{aligned}$$

La composante normale du champ magnétique $B_z = \mu_0 H_z$ est également conservée lors du passage au milieu 2. Cela conduit à l'équation :

$$n_1(E_{0i}\sin\theta_i - E_{0r}\sin\theta_r) = n_1(E_{0i} + E_{0r})\sin\theta_i = n_2 E_{0t}\sin\theta_t$$

On retrouve ici la loi de Descartes et la conservation du champ $\vec{E}$ tangentiel.

Question 5

Nous avons donc le système suivant à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{l} E_{0i}+E_{0r}=E_{0t} \\ E_{0i}\cos\theta_i - E_{0r}\cos\theta_i = E_{0t}\dfrac{n_2}{n_1}\cos\theta_t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+r=t \\ \cos\theta_i - r\cos\theta_i = t\dfrac{n_2}{n_1}\cos\theta_t \end{array}\right.$$

où l'on a posé $r = E_{0r}/E_{0i}$ le coefficient de réflexion et $t = E_{0t}/E_{0i}$ le coefficient de transmission. Je laisse le lecteur utiliser la méthode qu'il préfère pour résoudre ce système 2×2. Nous allons utiliser ici la méthode matricielle. Le système ci-dessus peut se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \dfrac{n_2}{n_1}\cos\theta_t & \cos\theta_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

La matrice est inversible, et donc :

$$\begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\theta_i + \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_t} \begin{bmatrix} \cos\theta_i & 1 \\ -\dfrac{n_2}{n_1}\cos\theta_t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

Pour avoir un résultat uniquement dépendant de θ_i, il faut transformer $\cos\theta_t$:

$$\cos\theta_t = \sqrt{\cos^2\theta_t} = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i}$$

Pour une OEM en polarisation TE, les coefficients t et r, ou coefficients de Fresnel, sont donc donnés par :

$$t_{\mathrm{TE}}(\theta_i) = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}} \qquad \text{et} \qquad r_{\mathrm{TE}}(\theta_i) = \frac{n_1\cos\theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}{n_1\cos\theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

Question 6

Cette fois on considère une OEM–TM. C'est à dire que $\vec{H} = H_y\vec{e}_y$ uniquement ($\vec{H}$ est parallèle au dioptre). De ce fait, nous partons maintenant de l'équation de Maxwell–Ampère :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J}_\ell + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

On considère qu'il n'y a pas de charge libre à l'interface, ni de courants. Ainsi $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ et $\vec{J}_\ell = \vec{0}$. La quantité ε_r est la permittivité diélectrique relative du milieu, et vaut n^2. On a alors, dans l'approximation d'ondes planes :

$$\vec{k}\wedge\vec{H} = -\omega\varepsilon_0 n^2\vec{E}$$

Le produit vectoriel donne $\vec{k} \wedge \vec{H} = k_x H_y \vec{e}_z - k_z H_y \vec{e}_x$. Seulement la partie tangentielle de $\vec{E}$ nous importe, donc la composante suivant x :

$$k_z H_y = \omega n^2 \varepsilon_0 E_x \Leftrightarrow E_x = \frac{k_z H_y}{\omega \varepsilon_0 n^2} = \frac{e_{kz} H_y}{c \varepsilon_0 n}$$

La conservation des composantes tangentielles de $\vec{H}$ et $\vec{E}$ nous donne les équations :

$$\begin{cases} E_{xi} + E_{xr} = E_{xt} \\ H_{0i} + H_{0r} = H_{0t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{H_{0i} e_{kzi} + H_{0r} e_{kzr}}{n_1} = \dfrac{H_{0t} e_{kzt}}{n_2} \\ H_{0i} + H_{0r} = H_{0t} \end{cases}$$

Pour obtenir les équations de Fresnel, il faut exprimer ce système en terme de E_α et non de H_α. L'équation (3) nous donne également un lien entre $\vec{H}$ et $\vec{E}$. En prenant le module de cette équation (comme $\vec{k} \perp \vec{E}$ on a $|\vec{k} \wedge \vec{E}| = kE$) nous avons une nouvelle égalité :

$$H_y = \frac{n}{\mu_0 c} ||\vec{E}||$$

et le système précédent se réécrit en terme de E_α :

$$\begin{cases} E_i e_{kzi} + E_r e_{kzr} = e_{kzt} E_t \\ E_i + E_r = \dfrac{n_2}{n_1} E_t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E_i \cos\theta_i - E_r \cos\theta_i = E_t \cos\theta_t \\ E_i + E_r = \dfrac{n_2}{n_1} E_t \end{cases}$$

On pose à nouveau $t = E_t/E_i$ et $r = E_r/E_i$. Le système à résoudre peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} n_2/n_1 & -1 \\ \cos\theta_t & \cos\theta_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

Pour une OEM en polarisation TM, les coefficients t et r, ou coefficients de Fresnel, sont donc donnés par :

$$t_{\mathrm{TM}}(\theta_i) = \frac{2 n_1 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2\theta_i}} \qquad \text{et} \qquad r_{\mathrm{TM}}(\theta_i) = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2\theta_i}}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2\theta_i}}$$

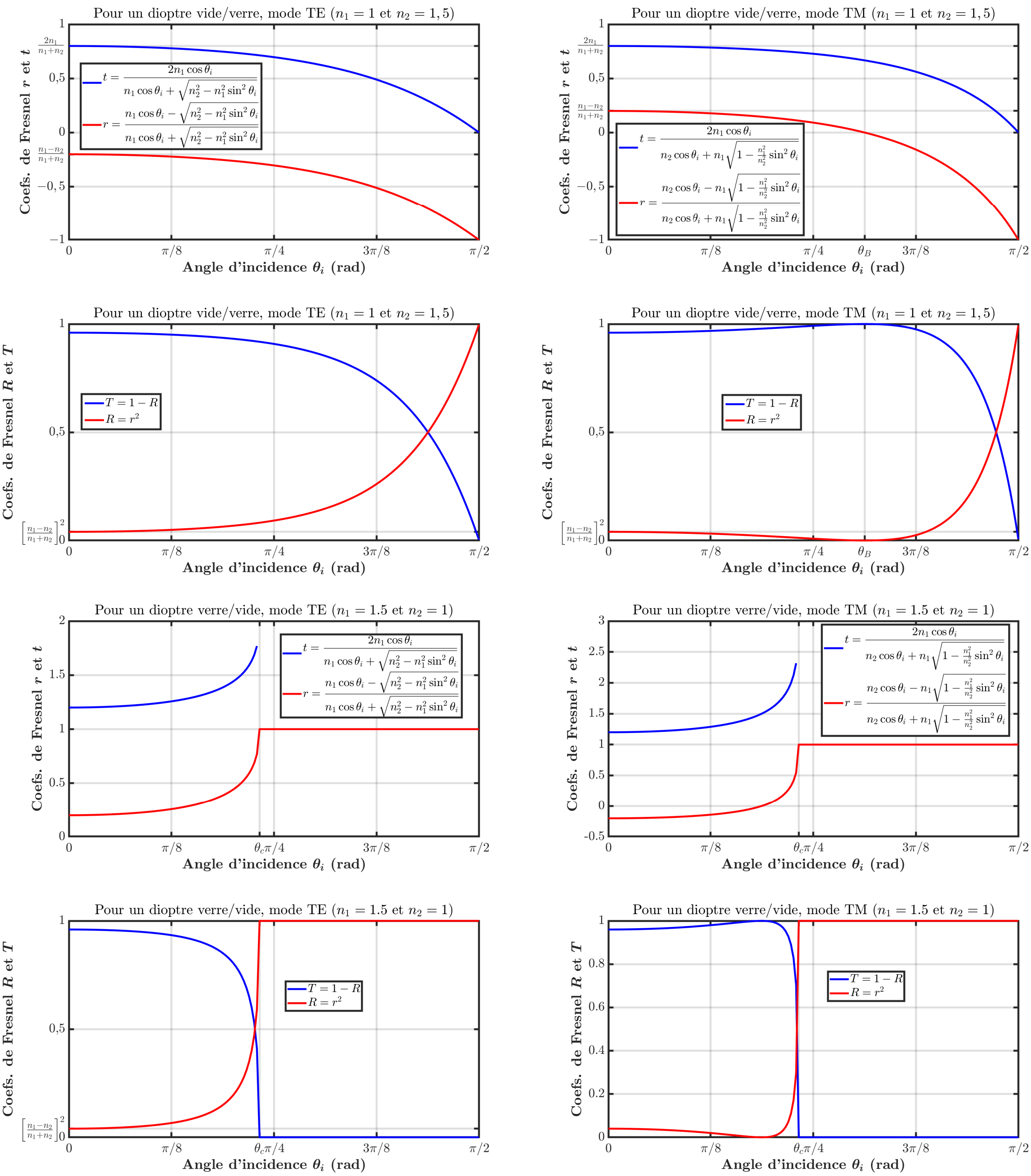
Il existe un angle pour lequel il n'y a pas de réflexion ($r_{\mathrm{TM}} = 0$). Cette angle est appelé angle de Brewter θ_B, et vérifie l'équation :

$$n_2 \cos\theta_B - n_1 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2\theta_B} = 0 \Leftrightarrow \cos^2\theta_B = \frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2} \Rightarrow \theta_B = \arccos\left(\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}\right)$$

Appendice

Tracer les coefficients de Fresnel

Sur la figure ci dessous sont tracés les coefficients de Fresnel pour une OEM TE et TM pour le passage d'un milieu air/verre et verre/air. Pour le passage air/verre, $n_1 \leq n_2$, il n'y a pas de phénomène de réflexion totale (il n'y a pas de θ_c). Cependant, pour le passage verre/air nous avons une limite en angle d'incidence, au delà duquel toute l'onde incidente est réfléchie.



Nous avons également tracé R et T en fonction de θ_i. En effet, les grandeurs r et t sont relatives aux amplitudes du champ $\vec{E}$, or la grandeur pertinente est la puissance $\propto \vec{E}^2$. Partons du vecteur de Poynting, $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$, car c'est le vecteur qui nous donne le flux d'énergie électromagnétique. Calculons le flux à la surface du dioptre (on fait le produit scalaire de $\vec{\Pi}$ avec la normale à la surface) :

$$\begin{aligned}
\Pi_z &= \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_z = (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{e}_z \\
&= \left[\frac{\vec{E} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{k})}{\omega \mu_0} \right] \cdot \vec{e}_z && \text{d'après l'équation (3)} \\
&= \left[\frac{(\vec{E} \cdot \vec{k})\vec{E} - |\vec{E}|^2 \vec{k}}{\omega \mu_0} \right] \cdot \vec{e}_z && \text{or } \vec{k} \perp \vec{E} \Leftrightarrow \vec{E} \cdot \vec{k} = 0 \\
\Leftrightarrow |\Pi_z| &= \frac{E^2}{\omega \mu_0} k_z = n \frac{E^2}{c \mu_0} \cos\theta
\end{aligned}$$

In fine, la puissance réfléchie est

$$R = \left| \frac{\Pi_{zr}}{\Pi_{zi}} \right| = r^2,$$

et la puissance transmise est

$$T = \left| \frac{\Pi_{zt}}{\Pi_{zi}} \right| = \frac{n_2}{n_1} t^2 \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i},$$

de plus la conservation de l'énergie EM nous donne $T + R = 1$ (la puissance incidente se retrouve dans la puissance réfléchie et la puissance transmise, notons que $r + t \neq 1$ de manière générale). Par conséquent, si nous nous penchons sur le cas air/verre, pour une incidence normale ($\theta_i = 0$) nous avons $R = (n_1 - n_2)^2/(n_1 + n_2)^2 = 0.04$. Cela signifie que 4% la puissance lumineuse incidente est réfléchie, donc 96% sont donc transmises. C'est donc pour cette raison que le verre est un bon matériau pour fabriquer les fenêtres puisqu'il laisse passer 96% de la lumière. Pour une incidence plus rasante ($\theta_i \to \pi/2$), une grande partie de la puissance est réfléchie et seulement une petite partie est transmise ($R \to 1$ et $T \to 0$). En effet, si on se place au pied d'un immeuble, les fenêtres les plus hautes agissent comme un miroir, et on ne voit pas à l'intérieur, ou très peu.

Résolution d'un systèmes d'équations avec une matrice

Une méthode rapide et simple pour résoudre un système d'équations 2×2 est d'utiliser un formalisme matriciel. Cela évite de faire des erreurs lors de la substitution lorsqu'on utilise une autre méthode. Considérons le système suivant (les équations sont linéairement indépendantes) :

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

Ce système peut se mettre sous la forme d'une opération matricielle :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{M}\vec{X} = \vec{A}$$

où $\mathscr{M}$ est la matrice, $\vec{X}$ le vecteur (x,y) des inconnues et $\vec{A}$ est le vecteur contenant le second membre (α,β). Ainsi, comme une équation algébrique on a :

$$\mathscr{M}\vec{X}=\vec{A}\Leftrightarrow\vec{X}=\mathscr{M}^{-1}\vec{A}$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'inverse de la matrice $\mathscr{M}$ qui est donnée par la formule suivante (la démonstration et la formule générale peut se trouver facilement sur internet, mais cela sort largement du cadre de ce cours sur les ondes électromagnétiques...) :

$$\mathscr{M}^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Et donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{d\alpha-b\beta}{ad-cb} \\ \\ y & = & \dfrac{a\beta-c\alpha}{ad-cb} \end{array} \right.$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle donne x et y en un seul calcul.

Équations de Maxwell dans un milieu

Pour rappel, dans les milieux diélectriques avec peu de susceptibilité magnétique relative ($\mu\approx\mu_0$) les équations de Maxwell sont (voir cours pour démonstration complète) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} & = & \rho_\ell \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E} & = & -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} & = & 0 \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{H} & = & \vec{J_\ell}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{D} & = & \varepsilon\vec{E} \\ \vec{B} & = & \mu\vec{H}\approx\mu_0\vec{H} \end{array} \right.$$

On a $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ qui est la permittivité diélectrique du milieu, et $\varepsilon_r=n^2$. Dans l'approximation des ondes planes, la divergence devient $j\vec{k}\cdot$, pour le rotationnel c'est $j\vec{k}\wedge$ et la dérivé temporelle devient $\partial_t=-j\omega t$ (avec $j^2=-1$). Où ω est la pulsation de l'onde et $\vec{k}$ le vecteur d'onde (sens de propagation de l'OEM). Le lien entre k, n et ω est :

$$k=n\frac{\omega}{c}$$