

Pourquoi le ciel est-il bleu ?

Partie A : Champ EM par un dipôle vibrant

Question 1

L'information ne se propage pas instantanément dans l'espace, mais se propage à la vitesse de la lumière c . Ainsi, si on mesure le champ en un point à un instant t et à une distance r de la source, alors on mesure le champ qui a été émis à l'instant $t - t_{\text{parcours}} = t - r/c$.

Ici nous étudions un dipôle NP (de charge $-q$ pour N et de charge q pour P) de centre O . On se place en M , à une distance r de ce dipôle. Les champs feront intervenir le retard $t - NO/c$ et $t - NP/c$ respectivement. Nous avons cependant :

$$NM = \|\vec{NM}\| = \|\vec{NO} + \vec{OM}\| \approx \|\vec{OM}\| = r$$

De même pour P à la place de N . En effet, la distance inter-atomique $NP = a$ est de l'ordre de 10^{-10} m, et donc négligeable devant r (si on se place à grande distance du dipôle). Le potentiel vecteur s'écrit alors :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{v}(t - r/c) \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}_N(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{v}_N(t - r/c) \\ \vec{A}_P(\vec{r}, t) = +\frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{v}_P(t - r/c) \end{cases}$$

Ici, nous considérons un dipôle qui vibre, d'où les vitesses pour P et N . Cette vibration va, nous allons le voir, générer un champ EM dans tout l'espace.

Question 2

D'après le théorème de superposition, le champ mesuré en M est la superposition du champ de P et de celui de N . Par conséquent :

$$\vec{A}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) = \vec{A}_P(\vec{r}, t) + \vec{A}_N(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} (\vec{v}_P(t - r/c) - \vec{v}_N(t - r/c))$$

Introduisons maintenant le moment dipolaire du dipôle en question : $\vec{p} = q\vec{NP}$ (à ne pas confondre avec la quantité de mouvement $m\vec{v}$). En utilisant le théorème de Chasles, nous avons :

$$\vec{p} = q\vec{NP} = q(\vec{NO} + \vec{OP}) = q(\vec{OP} - \vec{ON}),$$

dont la dérivée temporelle vaut :

$$\dot{\vec{p}} = q \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} - \frac{d\vec{ON}}{dt} \right) \equiv q(\vec{v}_P - \vec{v}_N)$$

Le potentiel total peut donc se réécrire simplement :

$$\vec{A}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(\vec{r}, t')}{r} \quad (1)$$

Question 3

Afin de déterminer le potentiel électrique en tout point, nous allons partir de la formule donnée par l'équation (1) et utiliser la Jauge de Lorentz ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial_t V/c^2 = 0$) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\text{tot.}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{r} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{p}}}{r} + \dot{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

Utilisons le formulaire pour calculer le premier terme du crochet. Le calcul est simplifié car le dipôle se trouve suivant l'axe Oz et donc $\dot{\vec{p}} = \dot{p} \vec{e}_z$. En coordonnées sphériques le vecteur \vec{e}_z s'écrit $\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$. D'après l'expression de la divergence en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{p}} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \times \dot{p} \cos \theta] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta \times (-\dot{p} \sin \theta)] \\ &= \frac{1}{r^2} \left[2r\dot{p} \cos \theta + r^2 \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} \cos \theta \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \times [-2\dot{p} \sin \theta \cos \theta] \\ &= 2\frac{\dot{p}}{r} \cos \theta + \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} \cos \theta - 2\frac{\dot{p}}{r} \cos \theta \\ &= \frac{\partial \dot{p}(t')}{\partial r} \cos \theta = \frac{\partial \dot{p}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial r} \cos \theta \\ &= \ddot{p} \left(-\frac{1}{c} \right) \cos \theta = -\frac{\ddot{p} \cdot \vec{e}_r}{c} \end{aligned}$$

Et le second terme du crochet est simplement $\vec{\nabla}(1/r) = \partial_r(1/r)\vec{e}_r = -\vec{e}_r/r^2$. Donc :

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\text{tot.}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\ddot{p} \cdot \vec{e}_r}{rc} - \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\frac{\ddot{p}}{c} + \frac{\dot{\vec{p}}}{r} \right] \cdot \vec{e}_r$$

en utilisant le fait que $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ on trouve :

$$V_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{\ddot{p}}{rc} + \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2} \right] \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{\dot{p}}{rc} + \frac{p}{r^2} \right] \cdot \cos \theta \quad (2)$$

Question 4

Nous allons maintenant utiliser le fait que $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ pour déterminer le champ magnétique généré par le dipôle vibrant. Repartons de l'équation (1) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_{\text{tot.}} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \left[\frac{\dot{p} \vec{e}_z}{r} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{p}}{r} \right) \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{p}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial r} - \frac{\dot{p}}{r^2} \right] \vec{e}_r \wedge (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\ddot{p}}{rc} - \frac{\dot{p}}{r^2} \right] (-\sin \theta \vec{e}_\varphi)\end{aligned}$$

Par conséquent, le champ magnétique total est :

$$\vec{B}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\ddot{p}}{rc} + \frac{\dot{p}}{r^2} \right] \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad (3)$$

Le calcul de $\vec{E}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t)$ est laissé en exercice au lecteur. Il suffit d'utiliser la définition $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial_t \vec{A}$ avec les équations (1) et (2), et de vérifier que l'expression trouvée correspond bien à ce qui est donné dans l'énoncé du TD.

Partie B : Analyse harmonique du rayonnement

On considère une OEM venant du soleil, de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} . Nous prenons l'approximation en onde plane :

$$\underline{\vec{E}}_0 = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \text{ où } j \text{ est l'unité complexe } j^2 = -1$$

Le dipôle vibre à sa fréquence propre, régie par les lois de la mécanique quantique. Sous l'effet d'une excitation extérieure (ici l'OEM) le dipôle finit par adopter la fréquence de l'onde incidente. Comme pour une balançoire : dans le régime stationnaire, la balançoire oscille à la fréquence que nous lui imposons avec la fréquence de balancement de nos jambes. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\underline{\vec{p}}(t) = \vec{p}_0 e^{-j\omega t}$$

Cependant, pour qu'une onde puisse interagir avec un corps, il faut que la longueur d'onde soit du même ordre de grandeur que le corps en question. Dans notre cas, il faut donc que $\lambda = 2\pi/k \approx a$.

Question 1

Puisque nous utilisons une approche en onde plane, $\dot{p} = -j\omega p$ et $\ddot{p} = -\omega^2 p$. Par conséquent le champ magnétique de l'équation (3) se réécrit :

$$\vec{B}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 p}{4\pi} \left(\frac{\omega^2}{rc} + j \frac{\omega}{r^2} \right) \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

Comme nous travaillons dans la limite $r \gg a$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \Rightarrow r &\gg \lambda && \text{pour qu'il y ait interaction} \\ \Leftrightarrow r &\gg \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} \\ \Leftrightarrow \frac{r\omega}{c} &\gg 1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\vec{B}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 p}{4\pi r} \times \frac{c}{r^2} \left(\left[\frac{\omega r}{c} \right]^2 + j \left[\frac{\omega r}{c} \right] \right) \sin \theta \vec{e}_\varphi \approx -\frac{\mu_0 p}{4\pi r c} \omega^2 \sin \theta \vec{e}_\varphi,$$

en effet, le premier crochet est un terme d'ordre 2, alors que le second n'est que d'ordre 1 en $r\omega/c$.

Question 2

Avec le champ électrique, nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left(-\frac{2j\omega}{r^2 c} + \frac{2}{r^3} \right) \cos \theta \vec{e}_r + \left(-\frac{\omega^2}{rc^2} - \frac{j\omega}{r^2 c} + \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta \right\} \\ &\approx \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \left(-\frac{\omega^2}{rc^2} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta \\ \Leftrightarrow \vec{E}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) &\approx -\frac{\mu_0 p}{4\pi r} \omega^2 \sin \theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

(le terme en ω^2 est dominant).

Le champ à grande distance ne dépend que de θ et pas de φ (symétrie par rotation autour de l'axe du dipôle). Le champ est nul pour $\theta = 0 + n\pi$ (le dipôle ne rayonne rien selon son axe) et est maximum pour $\theta = \pi/2$.

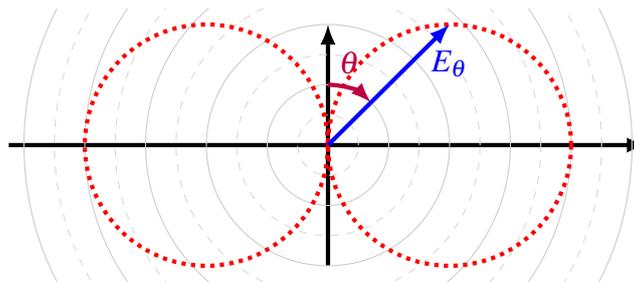


Figure 1 – Variation de E_θ avec θ à $r = \text{Cte}$.

Question 3

Utilisons les expressions trouvées pour $\vec{E}_{\text{tot.}}$ et $\vec{B}_{\text{tot.}}$ pour calculer le vecteur de Poynting moyen :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E}_{\text{tot.}} \wedge \vec{B}_{\text{tot.}}^*}{\mu_0} \right) = \frac{\mu_0 p_0^2}{32\pi^2 r^2 c} \omega^4 \sin^2 \theta \vec{e}_r$$

Ce calcul n'est valable que pour des charges suffisamment lentes (pas d'effets relativistes) et des particules de faibles dimensions (dans le cas contraire, on a de la diffusion de Mie, non sélective en fréquence, à l'origine du blanc des nuages).

Question 4

L'énergie rayonnée a une dépendance en ω^4 . Pour comprendre ce que cela implique, rappelons nous que le rouge est à 800 nm, et le bleu à 400 nm. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{rouge}} &= 2\lambda_{\text{bleu}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\omega_{\text{rouge}}} &= \frac{2}{\omega_{\text{bleu}}} \\ \Leftrightarrow \omega_{\text{bleu}}^4 &= 16\omega_{\text{rouge}}^4 \\ \Leftrightarrow \langle \Pi \rangle_{\text{bleu}} &= 16\langle \Pi \rangle_{\text{rouge}} \end{aligned}$$

Les molécules de O_2 et de N_2 qui composent l'atmosphère terrestre (et qui sont des dipôles) rayonnent/diffusent 16 fois plus le bleu que le rouge. C'est pour cela que le ciel est bleu. De plus, les rayons du soir semblent plus rouge, car $\langle \Pi \rangle \propto \omega^4/r^2$: les rayons rasants du soir ont parcouru une plus grande distance dans l'atmosphère terrestre (r plus grand pour le soir), de ce fait la lumière est "appauvrie" en bleu, et il ne reste que le rouge dans le spectre.

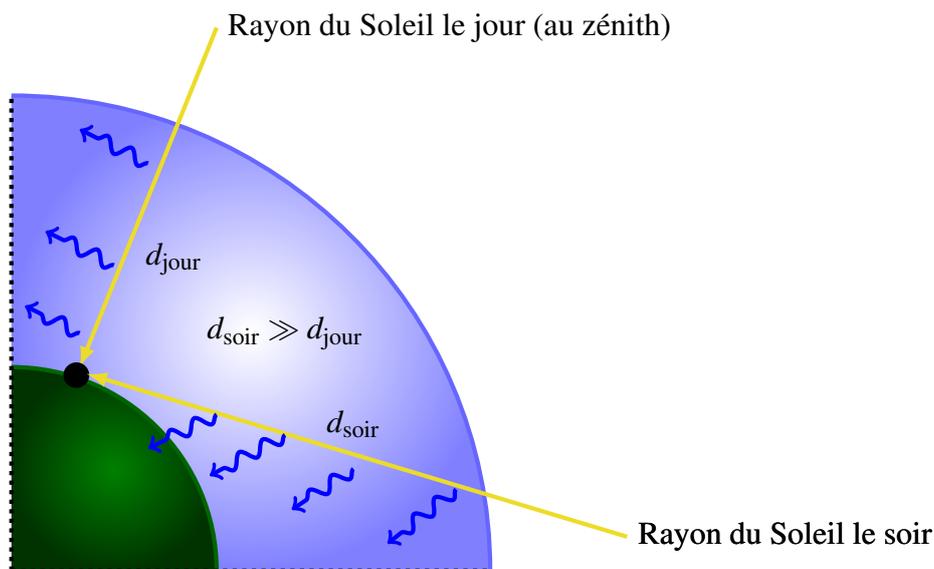


Figure 2 – Schéma explicatif de la diffusion de Rayleigh dans l'atmosphère terrestre.

Appendice

Je fournis ici le calcul rapide de $\vec{E}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t)$. Rappelons que $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ par définition, et que $\partial_r p(t') = -\dot{p}/c$. Ainsi :

$$\vec{E}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} V_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

D'après l'équation (2),

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} V_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\dot{p}}{rc} + \frac{p}{r^2} \right) \cos \theta \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\dot{p}}{rc} + \frac{p}{r^2} \right] \cos \theta \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\cos \theta] \left(\frac{\dot{p}}{rc} + \frac{p}{r^2} \right) \vec{e}_\theta \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{\ddot{p}}{rc^2} + \frac{2\dot{p}}{r^2c} + \frac{2p}{r^3} \right] \cos \theta \vec{e}_r + \left[\frac{\dot{p}}{r^2c} + \frac{p}{r^3} \right] \sin \theta \vec{e}_\theta \right\}, \end{aligned}$$

de même avec l'équation (1) on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{A}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mu_0 \dot{p}}{4\pi r} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\ddot{p}}{r} \cos \theta \vec{e}_r - \frac{\ddot{p}}{r} \sin \theta \vec{e}_\theta \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\ddot{p}}{rc^2} \cos \theta \vec{e}_r - \frac{\ddot{p}}{rc^2} \sin \theta \vec{e}_\theta \right] \end{aligned}$$

Et donc nous trouvons bien :

$$\vec{E}_{\text{tot.}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 2 \left[\frac{\dot{p}}{r^2c} + \frac{p}{r^3} \right] \cos \theta \vec{e}_r + \left[\frac{\ddot{p}}{rc^2} + \frac{\dot{p}}{r^2c} + \frac{p}{r^3} \right] \sin \theta \vec{e}_\theta \right\}$$