

Conducteurs et diélectriques

Dans ce TD, l'unité imaginaire sera notée j , tel que $j^2 = -1$.

Exercice 1 : l'effet de peau dans un conducteur

On considère un conducteur à l'équilibre électrique pouvant être traversé par un courant de charges libres. La quasi-neutralité est cependant conservée. Nous allons voir dans cet exercice comment se propage une OEM dans un conducteur.

Question 1

Pour une onde plane dans le vide, $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ (de même pour \vec{B}), l'équation de Maxwell-Ampère devient (avec $\vec{J} = \vec{0}$ puisque nous sommes dans le vide dans cette question) :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

avec $\mu_0 \epsilon_0 \equiv 1/c^2$. Or comme nous avons $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ d'après Maxwell-Thompson, nous savons que $\vec{k} \perp \vec{B}$. Par conséquent nous pouvons écrire le module de \vec{E} :

$$E = \frac{c^2}{\omega} |\vec{k} \wedge \vec{B}| = c^2 \frac{k}{\omega} B \Leftrightarrow E = cB$$

Rappelons que dans le vide $c = \omega/k$. Nous trouvons donc que le champ électrique est “ c fois plus grand que le champ magnétique”. Par conséquent, la force électromagnétique appliquée à une charge q de vitesse \vec{v} , soit $\vec{F}_{EM} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$, peut se simplifier si on considère des particules non relativistes ($v \ll c$) :

$$\frac{|\vec{F}_L|}{|\vec{F}_E|} = \frac{|q\vec{v} \wedge \vec{B}|}{|q\vec{E}|} \leq \frac{vB}{E} = \frac{v}{c} \ll 1$$

la force de Lorentz est donc négligeable dans la suite de l'exercice.

Question 2

Appliquons la deuxième loi de Newton à un électron qui baigne dans un champ EM et qui est soumis à une force de frottement $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{F}_L}_{\rightarrow \vec{0}} + \vec{F}_E + \vec{f} = q\vec{E} - \alpha \vec{v}$$

Cette équation est vraie pour un seul électron. Pour considérer une assemblée d'électrons, multiplions cette équation par nq pour faire apparaître le courant électronique \vec{J} :

$$mnq \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{J}}{dt} = nq^2 \vec{E} - \alpha \vec{J}$$

Les électrons contenus dans le conducteur sont soumis à un champ électrique de pulsation ω . A l'équilibre, les électrons oscillent à la même fréquence que le champ excitateur (comme une balançoire oscille à la même fréquence que nous lui imposons avec la fréquence de basculement de nos jambes). Ainsi, l'équation précédente se réécrit,

$$-jm\omega \vec{J} = nq^2 \vec{E} - \alpha \vec{J} \Leftrightarrow \left(1 - j \frac{m\omega}{\alpha}\right) \vec{J} = \frac{nq^2}{\alpha} \vec{E}$$

A faible fréquence nous supposons que $\omega \ll \alpha/m$. Ainsi nous trouvons la loi d'Ohm microscopique :

$$\vec{J} \approx \frac{nq^2}{\alpha} \vec{E} = \sigma_0 \vec{E} \quad (1)$$

avec $\sigma_0 = nq^2/\alpha$ la conductivité électrique statique (en Ω/m).

Question 3

Afin d'obtenir l'équation demandée, nous devons faire apparaître un $\Delta \vec{E}$. Pour cela, nous allons prendre l'équation de Maxwell-Faraday et calculer son rotationnel. Puis dans l'expression du rotationnel de \vec{B} (Maxwell-Ampère) nous injecterons le courant trouvé dans l'équation (1) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= \vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0 \text{ car } \rho=0} - \Delta \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \Leftrightarrow -\Delta \vec{E} &= -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \Leftrightarrow \Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Question 4

Comme \vec{E} est une onde plane, l'équation précédente permet de déterminer la relation de dispersion (relation donnant $\omega(k)$ ou $k(\omega)$). Pour simplifier les notations, on considère que l'OEM se propage suivant l'axe Oz , tel que $\vec{k} = k \vec{e}_z$. On injecte la solution de type onde plane dans l'équation :

$$-k^2 \vec{E} - \mu_0 \sigma_0 (-j\omega \vec{E}) - \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2 \vec{E}) = \vec{0} \Leftrightarrow k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \left(1 + j \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega} \right)$$

Dans le vide, $k = \omega/c$, et dans un milieu $k = n\omega/c$, où n est l'indice optique du milieu. Par

définition, l'indice optique est lié à la permittivité diélectrique relative du milieu $\epsilon_r = n^2$. Et donc, par identification :

$$k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow \epsilon_r = 1 + j \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega}$$

Nous voyons que ϵ_r est un coefficient complexe. Nous verrons dans la suite que cette quantité imaginaire a bel et bien une interprétation physique.

Question 5

Les équations précédentes ont été écrites dans l'hypothèse d'une OEM de basse fréquence. Par conséquent la partie imaginaire de la permittivité relative est supérieure à sa partie réelle (i.e. $\sigma_0/\epsilon_0\omega \gg 1$). Nous voulons maintenant écrire l'expression de $\underline{n} = n + j\kappa$, l'indice optique (qui est également un complexe puisque ϵ_r est un complexe). Comme nous connaissons ϵ_r , nous pouvons écrire :

$$\underline{n}^2 = \epsilon_r \approx j \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega} \Leftrightarrow \underline{n} = n + j\kappa \approx \sqrt{e^{j\pi/2} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega}} = e^{j\pi/4} \sqrt{\frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0 \omega}}$$

Question 6

Dans le cas d'un indice complexe, que devient la phase d'une onde plane qui se propage dans le milieu étudié ? Il faut prendre l'expression générale de la phase d'une onde plane, et injecter la valeur complexe de \underline{n} ,

$$j\phi = j(kz - \omega t) = j\left(\frac{\underline{n}\omega z}{c} - \omega t\right) = j\omega\left(\frac{n + j\kappa}{c}z - t\right) = j\left(\frac{n\omega}{c}z - \omega t\right) - \frac{\kappa\omega}{c}z$$

Comme $n = \kappa = \sqrt{\sigma_0/2\epsilon_0\omega}$, nous pouvons poser $\delta = c/\omega n = c/\omega\kappa$ comme étant l'épaisseur de peau. Le champ électrique s'écrit alors :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{j\phi} = \vec{E}_0 e^{j(z/\delta - \omega t)} e^{-z/\delta} \quad \text{avec } \delta = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma_0}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}}$$

Le champ électrique est ici une onde dite évanescente. C'est à dire qu'une fois qu'elle pénètre le conducteur, l'amplitude de l'onde décroît exponentiellement jusqu'à s'annuler : l'OEM ne se propage pas profondément dans le métal.

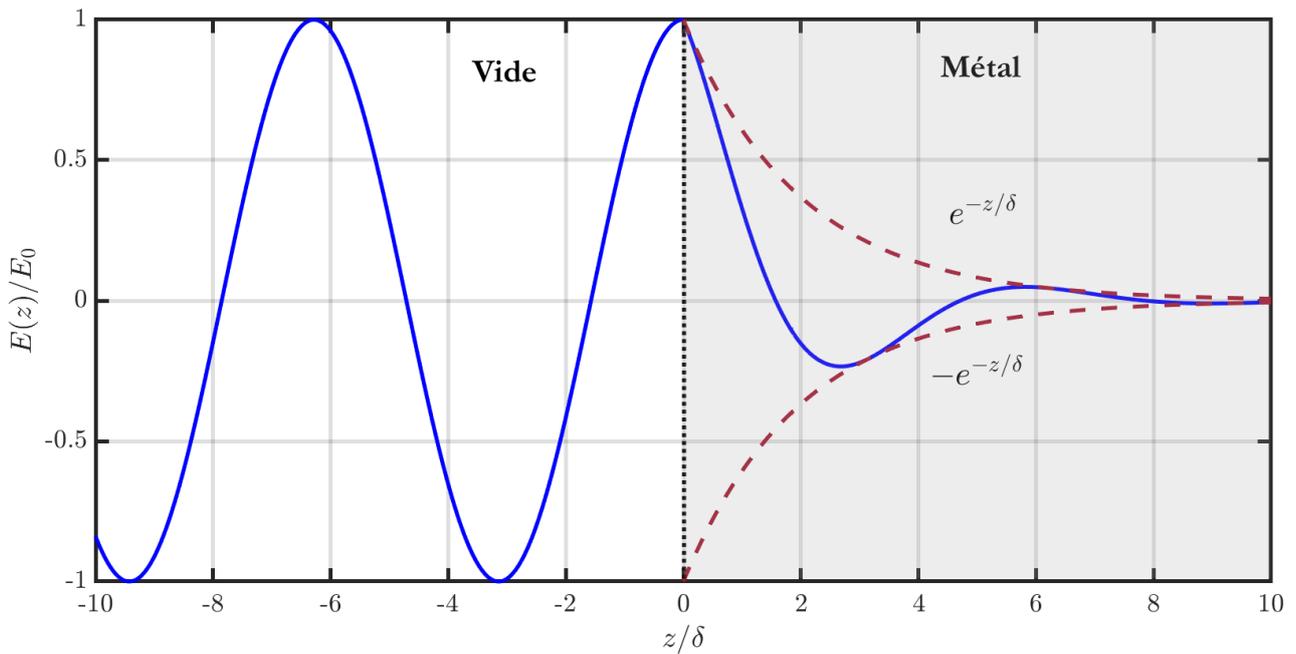


Figure 1 – Évolution spatiale de l’amplitude de l’OEM entrant dans un métal/conducteur.

Question 7

Dans le TD 3, nous avons vu que pour une transition air/métal ($n_1 = 1$ et $n_2 = \underline{n}$) le coefficient de Fresnel pour une incidence normale ($\theta = 0$) est :

$$r = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}}$$

La réflectivité $R = |r|^2$ peut alors s’écrire :

$$R = \left| \frac{1 - n - j\kappa}{1 + n + j\kappa} \right|^2 = \frac{(1 - n)^2 + \kappa^2}{(1 + n)^2 + \kappa^2}$$

Dans un métal, la conductivité est très importante, donc $\sigma_0/\epsilon_0\omega \gg 1 \Leftrightarrow n \gg 1$. Si on applique directement cette comparaison, on trouve une forme indéterminée pour R en $0/0$. Il faut aller à l’ordre plus élevé :

$$(1 - n)^2 = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = n^2 - 2n + o(1/n^2)$$

et de la même manière $(1 + n)^2 \approx n^2 + 2n$. par conséquent, pour un métal tel que $n \gg 1$, on a :

$$R \approx \frac{2n^2 - 2n}{2n^2 + 2n} = \frac{n - 1}{n + 1} \approx 1$$

Un métal qui a une réflexion très grande/maximale peut être utilisé comme miroir.

Question 8

Application numérique :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_0}} = 2,5 \text{ cm} \quad \left| \begin{array}{l} \omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 2,1 \cdot 10^9 \text{ rad/s} \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI} \\ \sigma_0 = 0,2 \text{ S/m} \end{array} \right.$$

Les ondes de nos appareils électroniques à 2,1 GHz ont une longueur de pénétration de 2,5 cm dans notre corps. Ce qui explique les précautions à prendre avec ces outils au quotidien.

Exercice 2 : dispersion dans une fibre optique

Question 1

L'application directe de la formule nous donne (attention, il faut donner λ en μm , donc sans le 10^{-6}) un indice optique de 1,4525/1,4469/1,4440 pour respectivement 0,85/1,3/1,55 microns. L'indice optique décroît avec la longueur d'onde.

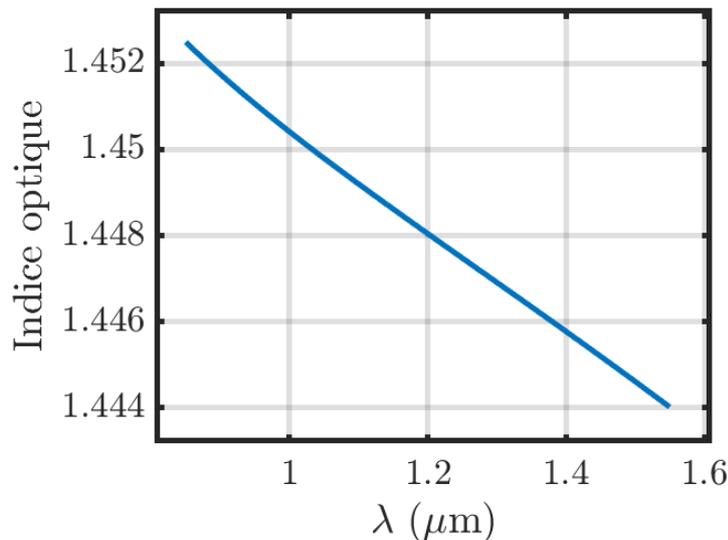


Figure 2 – Évolution de l'indice optique d'après la relation de Sellmeier.

Question 2

La vitesse de phase ne transporte pas d'énergie, ni d'information. Elle donne juste la "vitesse" de vibration de la phase de l'OEM. La vitesse de phase vaut $v_\varphi = \omega/k$. La vitesse de groupe en revanche, transporte l'énergie de l'onde, et vaut $v_g = \partial\omega/\partial k$. Nous pouvons relier ces deux vitesses grâce à la formule de Rayleigh :

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\partial k v_\varphi}{\partial k} = v_\varphi + k \frac{\partial v_\varphi}{\partial k}$$

Or,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda \Rightarrow v_g = v_\varphi + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \lambda}\right) = v_\varphi - \lambda \frac{\partial v_\varphi}{\partial \lambda}$$

Question 3

On considère une onde modulée en amplitude. L'équation donnée par l'énoncé est :

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(1 + A \cos(\Omega t)) \cos(\omega_0 t)$$

avec $\Omega \ll \omega_0$. La première parenthèse de cette équation est le signal que l'on veut transporter (à faible fréquence). Le second terme est la porteuse (à haute fréquence).

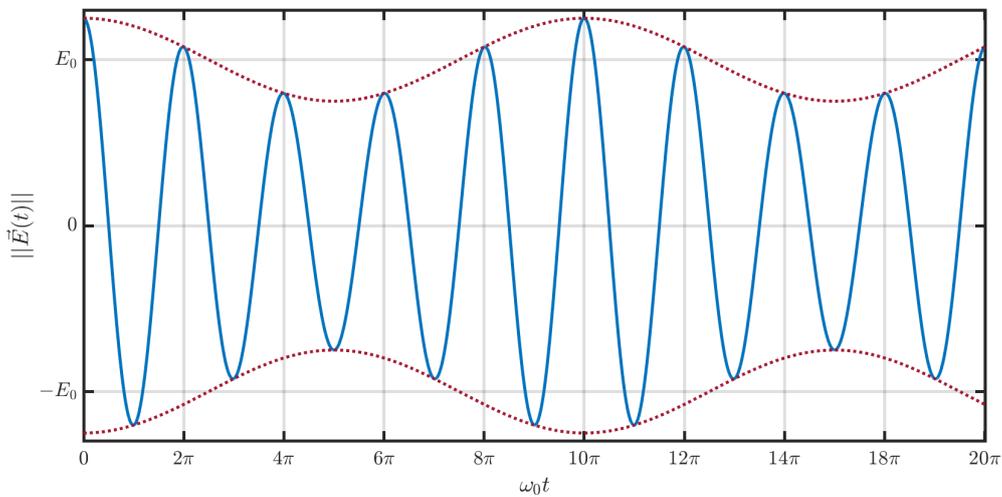


Figure 3 – Représentation graphique de $E(t)$ (en bleu). En rouge sont représentées les courbes de $\pm E_0(1 + A \cos \Omega t)$: c'est le signal de basse fréquence que l'on veut transmettre. C'est lui qui va donner l'enveloppe au signal modulé. On a pris dans cet exemple $A = 0,25$ et $\omega_0/\Omega = 5$.

Afin de trouver les fréquences caractéristiques de ce signal, il faut le décomposer en une somme de cosinus. Pour cela nous avons besoin de la relation $\cos(a) \cos(b) = (\cos(a + b) + \cos(a - b))/2$.

$$\begin{aligned} \vec{E}(t) &= \vec{E}_0(1 + A \cos(\Omega t)) \cos(\omega_0 t) = \vec{E}_0 \cos(\omega_0 t) + \vec{E}_0 A \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) \\ &= \vec{E}_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\vec{E}_0 A}{2} \cos([\omega_0 + \Omega]t) + \frac{\vec{E}_0 A}{2} \cos([\omega_0 - \Omega]t) \end{aligned}$$

Nous voyons donc trois pulsations caractéristiques, ω_0 , $\omega_0 - \Omega$ et $\omega_0 + \Omega$.

Si nous voulons étudier la propagation de cette onde suivant l'axe des x , il faut remplacer la phase ωt par $\omega t - kx$. Or $k = \omega/v_\varphi(\omega)$. Le champ électrique en tout point de l'espace et du temps s'écrit

alors, avec $\omega t \rightarrow \omega(t - x/v_\varphi(\omega))$:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \left\{ \cos \left(\omega_0 \left[t - \frac{x}{v_\varphi(\omega_0)} \right] \right) + \frac{A}{2} \cos \left([\omega_0 + \Omega] \left[t - \frac{x}{v_\varphi(\omega_0 + \Omega)} \right] \right) + \frac{A}{2} \cos \left([\omega_0 - \Omega] \left[t - \frac{x}{v_\varphi(\omega_0 - \Omega)} \right] \right) \right\}$$

Question 4

Développons l'expression précédente, avec $\omega/v_\varphi(\omega) \equiv k(\omega)$:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \left\{ \cos[\omega_0 t - k(\omega_0)x] + \frac{A}{2} \cos[\omega_0 t + \Omega t - k(\omega_0 + \Omega)x] + \frac{A}{2} \cos[\omega_0 t - \Omega t - k(\omega_0 - \Omega)x] \right\}$$

Or si nous considérons que $\Omega \ll \omega$, nous pouvons faire un développement limité de k autour de ω_0 (sur le même modèle que $f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \varepsilon f'(x_0) \dots$ pour $\varepsilon \ll x_0$) :

$$k(\omega_0 \pm \Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\pm \Omega)^n}{n!} \frac{\partial^n k}{\partial \omega^n} \Big|_{\omega_0} = k(\omega_0) \pm \Omega \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} + o(\Omega^2)$$

Ainsi,

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \left\{ \cos[\omega_0 t - k(\omega_0)x] + \frac{A}{2} \cos \left[(\omega_0 t - k(\omega_0)x) + \Omega \left(t - x \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \right) \right] + \frac{A}{2} \cos \left[(\omega_0 t - k(\omega_0)x) - \Omega \left(t - x \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \right) \right] \right\}$$

or comme $\cos(a) \cos(b) = (\cos(a+b) + \cos(a-b))/2$ avec $a = \omega_0 t - k(\omega_0)x$ et $b = \Omega(t - x \partial_\omega k|_{\omega_0})$:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \left\{ \cos[\omega_0 t - k(\omega_0)x] + A \cos[\omega_0 t - k(\omega_0)x] \cos \left(\Omega \left[t - x \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \right] \right) \right\}$$

Posons $k_0 = k(\omega_0)$, et puisque $v_g = \partial \omega / \partial k$, nous pouvons écrire :

$$\vec{E}(x,t) = \underbrace{\vec{E}_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x)}_{\text{porteuse } (\omega_0 \gg \Omega)} \times \underbrace{\left\{ 1 + A \cos \left[\Omega t - \frac{\Omega}{v_g(\omega_0)} x \right] \right\}}_{\text{information}}$$

La porteuse se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \omega_0/k_0$, alors que l'information se propage à la vitesse de groupe v_g (avec $v_\varphi \geq v_g$).

Question 5

D'après la relation de Sellmeier, l'indice optique de la fibre dépend de la longueur d'onde du signal. Mais puisque notre onde n'est pas monochromatique et est en fait constituée d'un paquet

d'ondes d'une largeur spectrale $\delta\lambda$ (le signal contient plusieurs longueurs d'onde, et non une seule), chaque composante aura sa propre vitesse de propagation : $1\lambda \rightarrow 1k \rightarrow 1v_\phi$ et $1v_g$.

Dans une fibre optique, le temps de transit d'un signal dépend de l'indice optique et *a fortiori* de la longueur d'onde. Ainsi, si un paquet d'ondes est envoyé en entrée, en sortie on va récupérer un signal plus étendu dans le temps car la composante avec la vitesse de groupe la plus rapide atteindra le bout de la fibre plus rapidement. Ce phénomène est la dispersion chromatique.

Nous verrons dans un prochain TD que cette dispersion chromatique nous oblige à envoyer l'information sous forme de pulses de paquets d'ondes, et d'attendre entre 2 pulses le temps que la composante la plus lente du pulse précédent soit arrivée.

Un exemple visuel de la dispersion chromatique est le prisme. Chaque longueur d'onde a son propre indice optique, ainsi la lumière blanche se décompose en toute ses composantes.



Figure 4 – Dispersion chromatique : photo d'un prisme décomposant la lumière, car chaque longueur d'onde a son propre indice optique.