TD EM & Optique 2A

Correction TD 7

Année 2019-2020

jordan.ledig@univ-lorraine.fr

L'œil et ses pathologies

Je recommande au lecteur de se référer au cours "rappel sur les lentilles" pour avoir les pré–requis nécessaires en optique géométrique afin de bien comprendre ce TD, et pour avoir les formules essentielles.

Dans ce TD nous allons étudier l'œil dans l'approximation d'un dioptre sphérique. Un dioptre sphérique est un objet (du verre par exemple), dont la surface dessine une sphère, ou du moins une calotte sphérique de sommet S. Nous nous plaçons ici dans les approximations de Gauss, tel que les rayons incidents forment un petit angle avec l'axe optique.

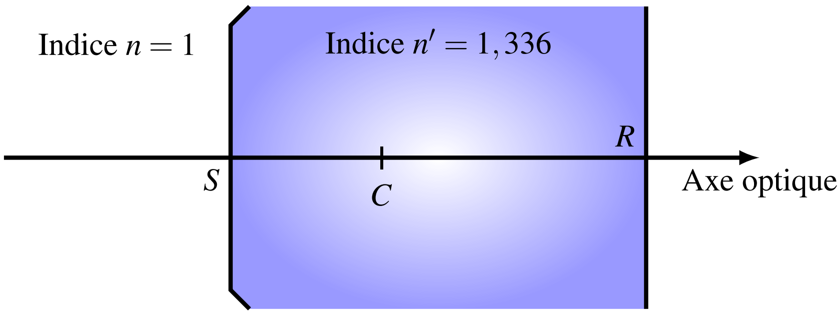

Figure 1 – Approximation en dioptre sphérique de l'œil. L'extérieur a un indice optique n et l'œil a un indice optique de $n' = 1,336$. La rétine se trouve en R tel que $\overline{SR} = 22,3$ mm, et le rayon de courbure du modèle de l'œil est de $\overline{SC} = 5,6$ mm.

Note : ici nous utilisons la notation en valeur algébrique (la barre sur les longueurs). Le sens positif est donné par l'axe optique (de la gauche vers la droite). Par exemple, nous avons $\overline{SC} = 5,6$ mm alors que $\overline{CS} = -5,6$ mm.

Œil normal, sans accommodation

Question *(a)* – La vergence d'un dioptre sphérique est donnée par la relation :

$$V = \frac{n' - n}{\overline{SC}} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{1,336 - 1}{5,6 \times 10^{-3}} = 60 \text{ m}^{-1} = 60\ \delta$$

Afin de retrouver les distances focales, partons de la relation de conjugaison pour un objet placé en A et son image formée en A' :

$$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = V$$

L'image d'un objet placé à l'infini se forme dans le plan focal image en f'. Mathématiquement, si $\overline{SA} \to -\infty$ alors $A' = F'$ et,

$$\overline{SF'} = f' = \frac{n'}{V}$$

En revanche, si un objet est placé dans le plan focal objet f_1, l'image sera renvoyée à l'infini. Mathématiquement, si $\overline{SA} = \overline{SF} = f$ alors $\overline{SA'} \to \infty$ et donc :

$$\overline{SF} = f = -\frac{n}{V}$$

Ainsi, pour l'œil normal nous avons : $f_1' = 22,3$ mm et $f_1 = -16,67$ mm. Cela veut dire que F est à gauche du dioptre, et F' est à droite.

Question *(b)* – Un œil n'a pas besoin d'accommoder lorsqu'il regarde les objets venant de l'infini (on se fatigue bien plus les yeux en lisant un livre à 20 cm de nous qu'en regardant un paysage à plusieurs km de nous). Par conséquent si un objet se trouve à l'infini, $\overline{SA} \to -\infty$, alors l'image se forme dans le plan focal image tel que $A' = F'$. Dans le cas de l'œil, le plan focal image correspond à la position de la rétine. L'image se formant sur la rétine, nous voyons l'objet de façon nette.

Accommodation

Si un objet est placé à une distance finie de l'œil, il faut alors accommoder. Physiologiquement, c'est le cristallin qui se contracte afin de faire la “mise au point”. Dans notre modèle, nous allons considérer que cette accommodation change le rayon de courbure de l'œil.

Par conséquent, pour un objet placé à une distance $\overline{SA}$ donnée, l'œil va se contracter (i.e. modifier son $\overline{SC}$, tout en gardant $\overline{SR}$ constant) tel que A' se forme sur la rétine pour former une image nette (voir relation de conjugaison). Prenons le cas limite d'accommodation tel que $\overline{SC} = 5,1$ mm (l'œil ne pourra pas aller en deçà de cette valeur).

Question *(a)* – En reprenant la formule de la vergence, mais en utilisant la nouvelle valeur pour le $\overline{SC}$, nous trouvons une vergence $V_2 = 65,9\ \delta$. Les distances focales correspondantes sont alors $f_2' = 20,3$ mm et $f_2 = -15,2$ mm.

Question *(b)* – Pour un objet très proche de nos yeux, l'œil peut se contracter afin d'avoir $\overline{SC} = 5,1$ mm. Si nous voulons avoir une image nette dans ces conditions, il faut que $\overline{SA'} = \overline{SR}$ (i.e. l'image se forme sur la rétine). Ainsi, d'après la formule de conjugaison :

$$\frac{n'}{\overline{\overline{SR}}} - \frac{n}{(\overline{SA})_{\min}} = V_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{SA})_{\min} = \frac{n}{\frac{n'}{\overline{\overline{SR}}} - V_2} \approx -16,7 \text{ cm}$$

Cette distance est le punctum proximum et vaut en moyenne 25 cm sur l'ensemble de la population saine. C'est le point le plus proche pour lequel l'œil peut accommoder pour voir nettement. Par opposition, nous avons le punctum remotum qui est le point le plus éloigné qu'un œil peut voir sans accommoder. Ce point est quant à lui situé à l'infini pour une personne saine.

Œil myope

Nous allons voir maintenant ce qui change pour une personne myope. Un œil myope conserve les mêmes grandeurs optiques que l'œil sain (la même vergence au repos, V_1, et avec accommodation maximale, V_2). Cependant le globe oculaire est plus large : la rétine se trouve à $\overline{SR} = 24,1$ mm au lieu de 22,3 mm pour une personne saine.

Question *(a)* – Comme l'œil myope garde la même vergence qu'un œil sain, un point à l'infini va se former au point foyer image F', à $\overline{SF'} = 22,3$ mm. L'image se forme donc avant la rétine : l'image d'un objet situé à l'infini pour un œil myope qui n'accommode pas sera floue.

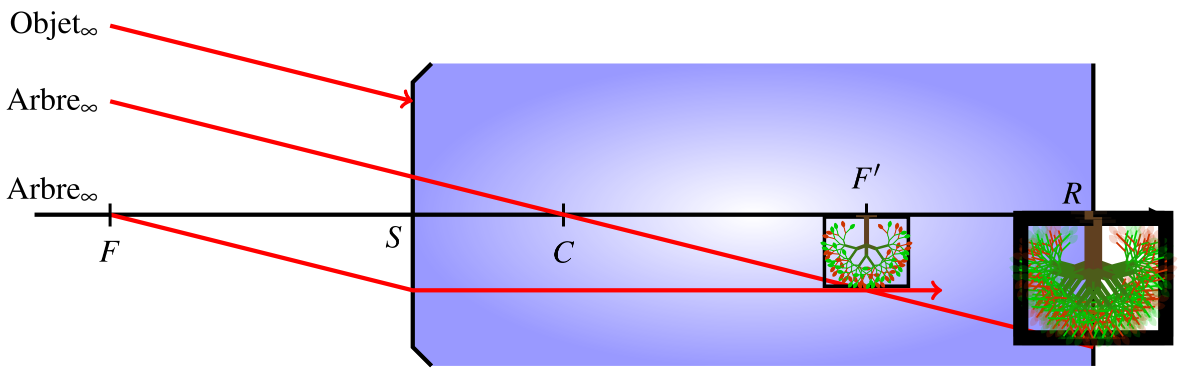

Figure 2 – Modèle de l'œil myope pour l'observation d'un arbre à l'infini, sans accommodation (les échelles ne sont pas respectées). Le rayon passant par C n'est pas dévié, le rayon passant par le foyer objet F ressort parallèlement à l'axe optique. L'intersection des deux rayons se fait dans le plan focal image, en F'. L'image obtenue en F' est nette, mais celle que l'on observe est sa projection sur la rétine : l'image est floue. Notes : (i) des rayons venant de l'infini sont parallèles entre eux. (ii) l'image projetée sur la rétine est inversée, c'est notre cerveau qui la “redresse”.

Par conséquent le ponctum remotum d'une personne myope sera à une distance finie. Calculons cette distance. Nous savons que sans accommoder, $V = V_1$, et nous voulons que $\overline{SA'} = \overline{SR}$; en utilisant la relation de conjugaison :

$$\frac{n'}{\overline{SR}} - \frac{n}{(\overline{SA})_{\max}} = V_1 \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{SA})_{\max} = \frac{n}{\frac{n'}{\overline{SR}} - V_1} \approx -22,0 \text{ cm}$$

De ce fait, si un objet est placé au delà de 22 cm de l'œil, un myope le verra flou (influence du degré de la maladie sur la vision). En revanche, les myopes peuvent voir des objets beaucoup plus près que les personnes saines. En effet, en accommodant nous savons que $V = V_2$, ainsi le punctum proximum d'une personne myope se calcule en utilisant la relation de conjugaison :

$$\frac{n'}{\overline{SR}} - \frac{n}{(\overline{SA})_{\min}} = V_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{SA})_{\min} = \frac{n}{\frac{n'}{\overline{SR}} - V_2} \approx -9,5 \text{ cm}$$

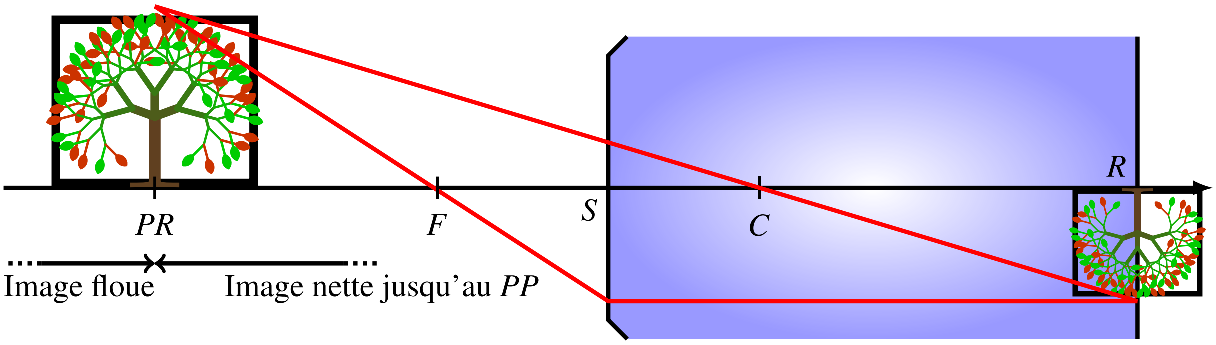

Figure 3 – Au repos/sans accommodation, un objet placé au ponctum remotum (PR) se formera sur la rétine d'une personne myope : l'image sera nette. Pour la construction : le rayon passant par F ressort parallèlement à l'axe optique, et le rayon passant par C est non dévié.

Question *(b)* – Afin de corriger la myopie, on utilise des verres correcteurs. Ces verres se situent à $\overline{SO} = -2$ cm de l'œil, et permettent de voir nettement les objets situés à l'infini, sans accommodation (O est le centre de la lentille). Comme les rayons venant de l'infini convergent trop tôt (i.e. avant la rétine), il faut utiliser des verres divergents afin de repousser leur convergence vers la rétine.

L'image d'un objet situé à l'infini, à travers une lentille divergente se forme au foyer image de la lentille, en F'_L. Cette image notée A' est dite "virtuelle" car elle se forme du même côté de la lentille que l'objet initial A. Afin de permettre à un myope de voir nettement et sans accommodation cette image virtuelle, elle doit se former au PR, en $\overline{SA'} = -22$ cm (l'image A'' à travers le dioptre se formera sur la rétine). Mathématiquement,

$$\overline{SA'} = \overline{SO} + \overline{OA'} \equiv \overline{SO} + \overline{OF'_L} \Leftrightarrow f'_L = \overline{OF'_L} = \overline{SA'} - \overline{SO} = -20 \text{ cm}$$

La lentille doit donc avoir une vergence de $V_L = 1/f'_L = -5\ \delta$ (comme on a $V_L < 0$, on a bien une lentille divergente) pour corriger cette myopie.

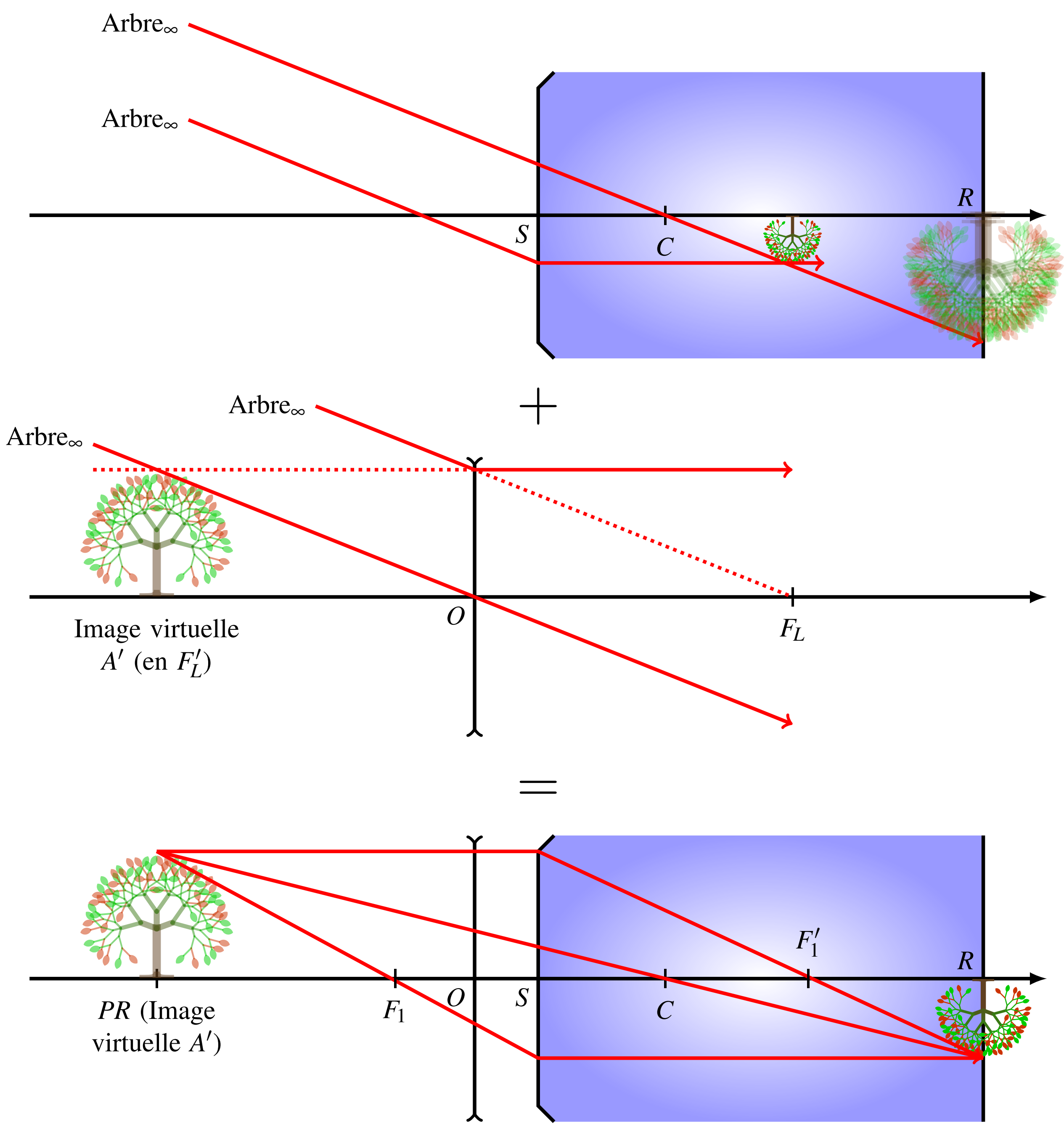

Figure 4 – Schéma explicatif de la correction d'une myopie (les échelles ne sont pas respectées, mais sont conservées d'une image à l'autre) : (*i*) objet de l'infini vu flou par un œil myope. (*ii*) image virtuelle créée à partir d'un objet situé à l'infini à travers une lentille divergente. (*iii*) correction de la myopie, permettant de voir un objet à l'infini. Pour le tracé avec la lentille divergente : le rayon passant par O n'est pas dévié, et le rayon qui passe par F ressort parallèlement à l'axe optique. Attention : F_1 et F'_1 sont les plans focaux du dioptre sans accommodation, alors que F_L et F'_L sont ceux de la lentille ; ces deux couples sont indépendants.

Œil hypermétrope

Comme nous l'avons vu, un œil myope a un globe oculaire plus long que la normale. L'inverse existe aussi, une personne hypermétrope a un globe oculaire plus court que la normale, tout en conservant les mêmes constantes physiologiques qu'un œil sain (au repos $V = V_1$ et en accommodant $V = V_2$). Un hypermétrope voit moins bien de près, et cette maladie se déclare chez les personnes moins jeunes, c'est pourquoi ces personnes éloignent leur téléphone pour lire un SMS par exemple.

Question *(a)* – On considère un œil hypermétrope tel que son *PP* se situe à -65 cm. Le PP est la distance minimale où l'œil peut voir l'objet de façon nette tout en accommodant. Par conséquent, $V = V_2$ et $\overline{SA'} = \overline{SR}$. Grâce à la relation de conjugaison, nous pouvons retrouver la "profondeur de l'œil" (i.e. $\overline{SR}$) :

$$\frac{n'}{\overline{SR}} - \frac{n}{(\overline{SA})_{\min}} = V_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{SR} = \frac{n'}{\frac{n}{(\overline{SA})_{\min}} + V_2} \approx 20,76 \text{ mm}$$

Question *(b)* – On veut connaître la position d'un objet tel qu'il soit vu de façon nette sans accommodation. De ce fait, $V = V_1$ et $\overline{SA'} = \overline{SR}$. L'application de la relation de conjugaison nous donne :

$$\frac{n'}{\overline{SR}} - \frac{n}{(\overline{SA})_{\max}} = V_1 \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{SA})_{\max} = \frac{n}{\frac{n'}{\overline{SR}} - V_1} \approx 23 \text{ cm}$$

L'objet se trouve après le dioptre. Par conséquent il est virtuel. Cela peut paraître étrange, car sans accommodation l'œil est censé voir nettement les objet situés à l'infini (i.e. $(\overline{SA})_{\max} \to -\infty$)... cependant c'est un effet direct de l'hypermétropie et de son globe oculaire plus court. Nous pouvons alors nous demander s'il est possible pour une personne hypermétrope de voir un objet situé à l'infini. Utilisons la relation de conjugaison encore une fois pour calculer la courbure de l'œil hypermétrope qui veut voir nettement un objet placé à l'infini :

$$V = \frac{n'}{\overline{SA'}} - \underbrace{\frac{n}{\overline{SA}}}_{\to 0} = \frac{n'}{\overline{SR}} \quad \text{or comme } V = \frac{n'-n}{\overline{SC}} \quad \Rightarrow \overline{SC} = \frac{n'-n}{n'}\overline{SR} \approx 5,22 \text{ mm}$$

Le rayon de courbure au repos/sans accommodation vaut 5,6 mm et avec accommodation maximale il est de 5,1 mm. La valeur calculée est donc réalisable physiologiquement parlant : l'œil hypermétrope voit à l'infini s'il accommode. Cela peut à la longue énormément fatiguer l'œil, et une correction est nécessaire.

Question *(c)* – Sans accommoder, un objet placé à l'infini formera une image nette en $\overline{SA'} = \overline{SF'} = f_1' = 22,3$ mm. Cette localisation étant au delà de la rétine, il faut ajouter une lentille qui fasse converger les rayons plus tôt : on utilisera donc une lentille convergente. Cette lentille convergente, placée à 2 cm de l'œil doit former une image à 23 cm de S (i.e. le $(\overline{SA})_{\max}$ calculé plus haut – position à laquelle doit se trouver un objet pour être vu nettement par l'œil hypermétrope sans accommodation). Pour ce faire, le plan focal de la lentille doit coïncider avec cet extremum. Mathématiquement :

$$\overline{OF_L'} = \overline{OA_{\max}} = \overline{OS} + (\overline{SA})_{\max} = 25 \text{ cm}$$

Ce qui conduit à une vergence de $V_L = 4\ \delta$.

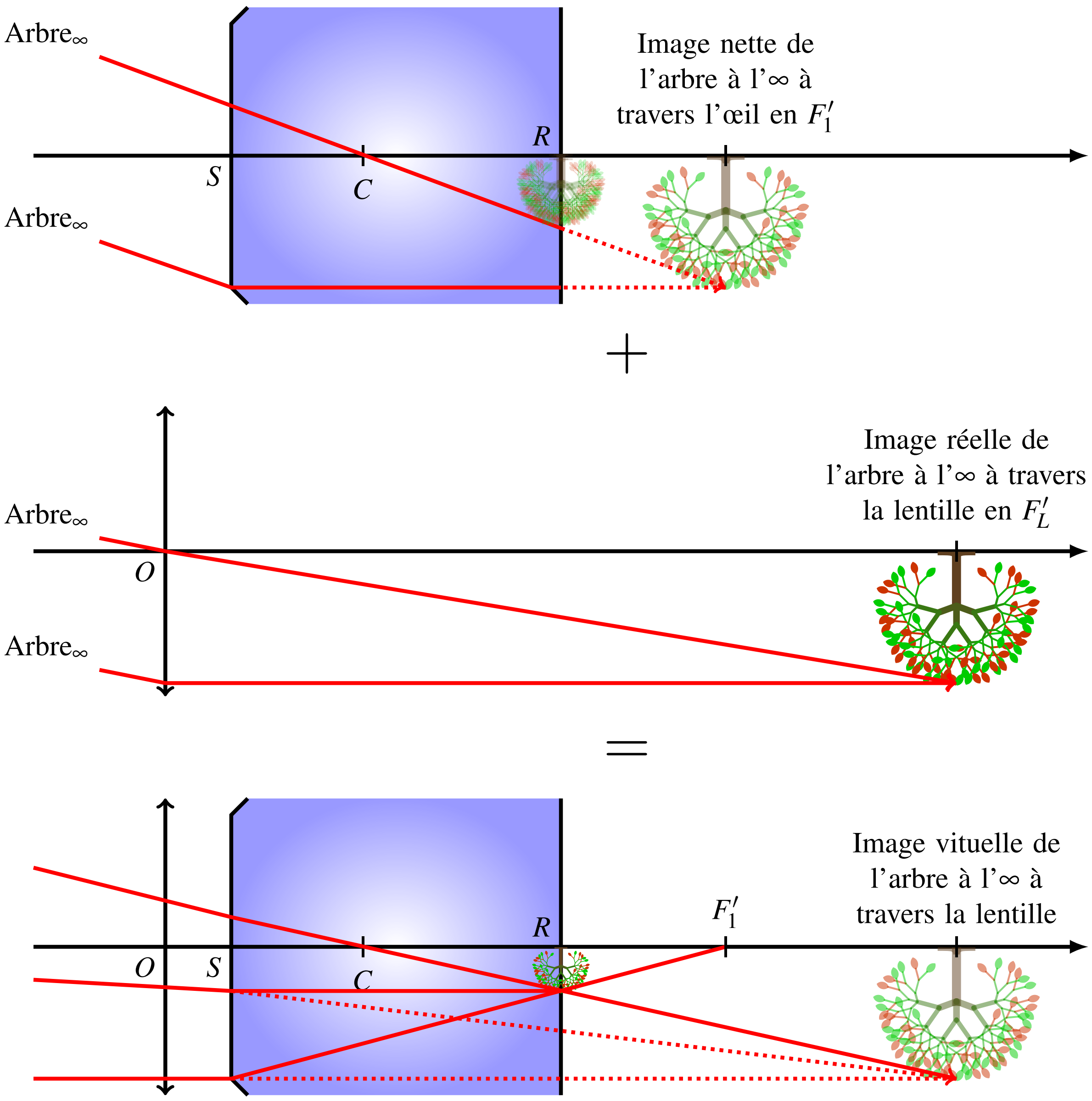

Figure 5 – Schéma explicatif de la correction d'une hypermétropie (les échelles ne sont pas respectées, mais sont conservées d'une image à l'autre) : (*i*) objet de l'infini vu flou par un œil hypermétrope. (*ii*) image réelle créée à partir d'un objet situé à l'infini à travers une lentille convergente (le plan focal objet F n'est pas représenté). (*iii*) correction de l'hypermétropie, permettant de voir un objet à l'infini.

Appendice

Les formules de conjugaison pour les dioptres sphériques et les lentilles sont à connaître par cœur ! Il en est de même pour les règles de construction.

$$V = \frac{n' - n}{\overline{SC}} \qquad \text{(vergence d'un dioptre de sommet } S \text{ et de centre } C\text{)}$$

$$V = \frac{n'}{\overline{SA}} - \frac{n}{\overline{SA'}} \qquad \text{(relation de conjugaison d'un dioptre pour objet en } A \text{ et image en } A'\text{)}$$

$$f' = \overline{SF'} = \frac{n'}{V} \qquad \text{(distance focale image d'un dioptre)}$$

$$f = \overline{SF} = -\frac{n}{V} \qquad \text{(distance focale objet d'un dioptre)}$$

$$V = \frac{1}{f'} \qquad \text{(vergence d'une lentille mince)}$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} \qquad \text{(relation de conjugaison d'un lentille de centre } O \text{ et de focale } f'\text{)}$$