Correction TD1 2019-2020

J. Ledig

Électromagnétisme et optique géométrique – Polytech 2A

Mercredi 18 mars 2020

Pré-requis (1)

Dans ce TD, nous allons travailler avec les équations de Maxwell. Elles sont au nombre de 4 et sont à **connaître par cœur** ! Côté champ électrique :

Équations de Maxwell

Maxwell – Gauss :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

Maxwell – Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

Pré-requis (2)

Dans ce TD, nous allons travailler avec les équations de Maxwell. Elles sont au nombre de 4 et sont à **connaître par cœur** ! Côté champ magnétique :

Équations de Maxwell

Maxwell – Thompson :

$$\text{div}\, \vec{B} = 0 \tag{3}$$

Maxwell – Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

Pré-requis (3)

Côté potentiels :

Liens entre potentiels et champs

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \tag{6}$$

V est le potentiel électrique. C'est une grandeur scalaire. Contrairement au potentiel vecteur $\vec{A}$ qui est...un vecteur !

Exercice 1

Question 1, partie 1

On considère un métal composés d'électrons se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans une matrice d'ions fixes. Les électrons sont soumis à un champ électromagnétique, et on néglige les forces de frottements. Le PFD devient :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{7}$$

de manière générale dans le vide $B \simeq E/c$ et comme $v \ll c$ on néglige la force de Lorentz.

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} \tag{8}$$

On a donc :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} \tag{9}$$

La densité de courant est $\vec{J} \equiv qn\vec{v}$, avec n la densité d'électrons dans le métal (qui est une constante du temps). On multiplie (9) par qn pour faire apparaitre $\mathrm{d}\vec{J}/\mathrm{d}t$ à gauche :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t} = \frac{nq^2}{m}\vec{E}} \tag{10}$$

La variation temporelle de $\vec{J}$ est proportionnelle au champ électrique appliqué.

On souhaite trouver le lien entre $\vec{J}$ et $\vec{A}$. On va donc partir de l'équation (10) qui lie $\vec{J}$ et $\vec{E}$. Utilisons la loi de Maxwell Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{m}{nq^2}\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}\right) = -\frac{m}{nq^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}\right) \tag{11}$$

or $\vec{B} \equiv \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}}{\partial t} = -\frac{m}{nq^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}\right) \tag{12}$$

Les dimensions temporelles et spatiales sont indépendantes, on peut donc, en vertu du théorème de Schwartz, changer l'ordre des dérivées (i.e. $\partial_t \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\partial_t$) :

$$\Rightarrow \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}}{\partial t} = -\frac{m}{nq^2}\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{J}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{J} = -\frac{nq^2}{m}\vec{A}} \tag{13}$$

Les potentiels sont toujours définis à une constante (scalaire ou vectorielle) près. Afin de fixer ces constantes, nous pouvons utiliser des jauges. Utilisons par exemple la jauge de Coulomb :

$$\text{div}\,\vec{A} = 0 \tag{14}$$

Exercice 1

Question 2, partie 3

$$0 = \mathrm{div}\,\vec{A} = \mathrm{div}\left(-\frac{m}{nq^2}\vec{J}\right) \Leftrightarrow \mathrm{div}\,\vec{J} = 0 \tag{15}$$

Or, d'après l'équation de conservation de la charge,

$$\mathrm{div}\,\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

Or, comme nous sommes dans un métal, $\rho = 0$ donc automatiquement nous avons $\mathrm{div}\,\vec{J} = 0$. Il en suit que $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$. La jauge n'est donc pas choisie, elle est fixée par les équations du système. L'équation (13) n'est donc pas invariante par changement de jauge.

Exercice 1

Question 3, partie 1

On souhaite établir l'équation différentielle régissant l'extension spatiale de $\vec{B}$. Partons de l'équation de Maxwell Ampère stationnaire :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \equiv \mu_0 \vec{J} \tag{17}$$

On remplace $\vec{J}$ par son expression donnée par l'équation de London, (13) :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\mu_0 \frac{nq^2}{m} \vec{A} \tag{18}$$

On prend le rotationnel de cette équation afin de faire apparaitre le Laplacien. Pour rappel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{X} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{X} - \Delta\vec{X}\ \forall \vec{X}$.

Exercice 1

Question 3, partie 2

$$-\frac{\mu_0 n q^2}{m}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = -\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,B - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B} \tag{19}$$

Puisque d'après Maxwell – Thompson div $\vec{B} = 0$. Ainsi, en se rappelant que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$:

$$\boxed{\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0 n q^2}{m}\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\Lambda_L}} \tag{20}$$

Le Laplacien est une dérivé seconde en espace. Sa dimension est donc une longueur à la puissance -2. Par identification, Λ_L est donc une longueur.

Exercice 1

Question 3, partie 3

- Pour passer à l'application numérique, il faut calculer n qui est le nombre d'électrons par unité de volume. On nous donne la masse volumique d'aluminium ρ_{Al}.
- Pour avoir le nombre d'atome d'Al par unité de volume : $n_{\mathrm{Al}} = \rho_{\mathrm{Al}} \times \mathcal{N}_A / M_{\mathrm{Al}} = 6,02 \times 10^{28}$ atomes/m^3.
- Sachant qu'il y a 3 électrons par atome d'Al, $n = 3n_{\mathrm{Al}} = 1,8 \times 10^{29}$ électrons/m^3.

$$\Lambda_L = \sqrt{\frac{m}{nq^2\mu_0}} = 12,5 \text{ nm} \tag{21}$$

Si les électrons sont appareillés, la formule de Λ_L est modifiée pour la masse, charge et densité de paires : $m_p = 2m_e$, $q_p = 2q_e$, $n_p = n_e/2$. $\Rightarrow \Lambda_{L,p} = \Lambda_{L,e}$.

Exercice 1

Question 4, partie 1

Considérons un cube d'aluminium de côté $2a$ et plongé dans un champ magnétique homogène $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$. A une dimension (z est l'axe vertical, x l'axe horizontal) :

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}x} = \frac{B_z}{\Lambda_L^2} \tag{22}$$

La solution est de la forme :

$$B_z(x) = Ae^{-x/\Lambda_L} + Be^{x/\Lambda_L} \tag{23}$$

Conditions aux bords du cube :

$$\begin{cases} B_z(-a) & = & B_0 \\ B_z(+a) & = & B_0 \end{cases} \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{a/\Lambda_L} + Be^{-a/\Lambda_L} & = & B_0 \\ Ae^{-a/\Lambda_L} + Be^{a/\Lambda_L} & = & B_0 \end{cases} \tag{25}$$

Une solution à ce système est $A = B$. Ainsi :

$$B_z(x) = 2A\cosh\left(\frac{x}{\Lambda_L}\right) \tag{26}$$

Enfin, comme

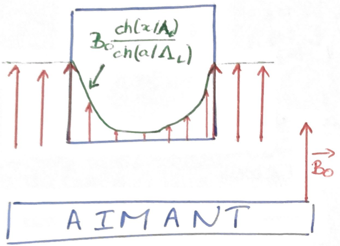
$$B_z(a) = 2A\cosh\left(\frac{a}{\Lambda_L}\right) \equiv B_0 \Leftrightarrow A = \frac{B_0}{2\cosh(a/\Lambda_L)} \tag{27}$$

D'où :

$$\vec{B} = \frac{\cosh(x/\Lambda_L)}{\cosh(a/\Lambda_L)}\vec{B}_0 \tag{28}$$

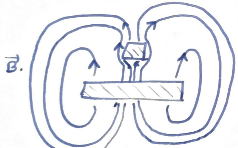
Exercice 1

Question 4, partie 3



Λ_L est l'épaisseur de peau. C'est la distance de pénétration des lignes de champ $\vec{B}$ dans le métal en question.

Les lignes de champ ne pénètrent pas, ou très peu le métal, et donc, pour que les lignes se referment ($\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$), elles doivent contourner le métal. C'est ce qui le fait léviter.



C'est le principe de la lévitation magnétique des métaux supraconducteurs.

Nous allons nous pencher ici sur les équations de Maxwell-Proca (voir poly). Ces équations font apparaitre un paramètre μ. D'après l'équation (2) du poly sait que $[\mathrm{div}\,\vec{E}] = [\mu^2 V]$. Or $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, ainsi :

$$[\mu^2] = [\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,] = [\Delta] = \frac{1}{L^2} \tag{29}$$

μ est donc l'inverse d'une longueur.

Exercice 2
Question 2

Prenons la divergence de l'équation (3) :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \mathrm{div}\,\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathrm{div}\,\vec{E}}{\partial t} - \mu^2 \mathrm{div}\,\vec{A}$$

$$\vec{0} = \mu_0 \mathrm{div}\,\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \mu^2 V\right) - \mu^2 \mathrm{div}\,\vec{A}$$

$$\vec{0} = \mu_0\left(\mathrm{div}\,\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + \mathrm{div}\,\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

Le premier terme est l'équation de continuité et vaut 0. On trouve donc : $\mathrm{div}\,\vec{A} + \partial_t V/c^2 = \vec{0}$. La jauge de Lorentz est donc imposée ! Les équations ne sont pas invariantes par changement de jauge.

En absence de sources, les équations deviennent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} & = & -\partial_t \vec{B} \\ \text{div}\ \vec{E} & = & -\mu^2 V \\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} & = & \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} - \mu^2 \vec{A} \\ \text{div}\ \vec{B} & = & 0 \end{array}\right. \tag{30}$$

Pour établir l'équation des ondes, il faut calculer le double rotationel de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$.
Calculons $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}$.

Exercice 2

Question 3, partie 2

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} &= -\partial_t \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} \\
\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{E} - \Delta\vec{E} &= -\partial_t \left(\mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E} - \mu^2\vec{A}\right) \\
\overrightarrow{\text{grad}}\,(-\mu^2 V) - \Delta\vec{E} &= -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu^2\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\
\Leftrightarrow \Delta\vec{E} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu^2\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu^2\vec{E}} \tag{31}$$

est l'équation de propagation de l'onde électromagnétique.

A retenir ! !

Pour obtenir la relation de dispersion d'une onde électromagnétique (OEM), il faut tout d'abord établir l'équation de propagation de l'onde (soit pour $\vec{E}$ soit pour $\vec{B}$), puis injecter la solution sous forme d'onde plane. Au final cela revient à remplacer ∂_t par $-i\omega$ et ∂_x par ik.

Si on cherche une solution de la forme $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t)}$ alors la dérivé temporelle est :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t)} = -i\omega \vec{E} \tag{32}$$

De la même façon le gradient est :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{r}} = i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t)} = i\vec{k} \cdot \vec{E} \tag{33}$$

L'équation de propagation devient alors :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu^2\vec{E} \Rightarrow -k^2\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} + \mu^2\vec{E}$$

D'où la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2} \tag{34}$$

Exercice 2

Question 4, partie 3

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2} \tag{35}$$

- La vitesse de phase $v_\varphi \equiv \omega/k$ se calcule facilement :

$$v_\varphi = \frac{c\sqrt{k^2 + \mu^2}}{k} = c\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{k}\right)^2} \tag{36}$$

- La vitesse de groupe $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ est alors :

$$v_g = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} \tag{37}$$

Astuce : si nous prenons la différentielle de la relation de dispersion, nous trouvons $2k\mathrm{d}k = 2\omega\mathrm{d}\omega/c^2$, d'où on tire $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$.

Exercice 2

Question 4, partie 4

$$\begin{cases} v_\varphi = c\sqrt{1+\left(\frac{\mu}{k}\right)^2} \\ v_g = \dfrac{c^2}{v_\varphi} \end{cases} \tag{38}$$

- Nous remarquons que la vitesse de phase surpasse la vitesse de la lumière.
- Cela ne pose pas de problème physique lié à la causalité, puisque la phase ne transporte ni information, ni énergie.
- L’énergie est transportée à la vitesse de groupe, qui elle vérifie bien $v_g < c$.

Exercice 2

Question 5

Déterminons maintenant la masse du photon dans la théorie de Proca. En relativité, l'énergie d'une particule de masse m s'écrit $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$. En parallèle, l'énergie du photon est quantifiée par sa fréquence puisque $E = \hbar\omega$.

D'une part :

$$E^2 = \hbar^2\omega^2 = \hbar^2(c^2k^2 + c^2\mu^2) \tag{39}$$

D'autre part :

$$E^2 = m_\phi^2 c^4 + p^2c^2 \tag{40}$$

D'où :

$$\boxed{m_\phi = \frac{\hbar\mu}{c}} \tag{41}$$

Exercice 2

Question 6, partie 1

- L'onde se déplace à la vitesse de groupe, v_g.
- Cette vitesse dépend de la longueur d'onde du photon.
- Le photon parcourt la distance L en un temps $t = L/v_g$.

L'intervalle de temps entre les deux réceptions est :

$$\Delta t = |t_2 - t_1| = \frac{L}{c^2}\left|v_{\varphi_2} - v_{\varphi_1}\right| = \frac{L}{c}\left|\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k_2^2}} - \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k_1^2}}\right| \tag{42}$$

Or, $k = 2\pi/\lambda$, ainsi :

$$\Delta t = \frac{L}{c}\left|\sqrt{1 + \frac{\lambda_2^2\mu^2}{4\pi^2}} - \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2\mu^2}{4\pi^2}}\right| \tag{43}$$

$$\Delta t = \frac{L}{c}\left|\sqrt{1+\frac{\lambda_2^2\mu^2}{4\pi^2}}-\sqrt{1+\frac{\lambda_1^2\mu^2}{4\pi^2}}\right| \tag{44}$$

On suppose que $\lambda\mu \ll 1$ et sachant $(1+\epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\epsilon + o(\epsilon^2)$, on trouve :

$$\boxed{\Delta t \simeq \frac{L\mu^2}{8\pi^2 c}|\lambda_2^2 - \lambda_1^2|} \tag{45}$$

A.N. : Comme $\Delta t \leq 10^{-3}$ s, on tire de cette équation que le paramètre de Proca vérifie $\mu \leq 2,28$ m^{-1}. En injectant la valeur limite dans l'équation de la masse du photon, (41), on trouve : $m_\phi = 7,6 \times 10^{-43}$ kg.... mille milliards de fois plus léger que l'électron. Ce n'est pas mesurable expérimentalement !