Correction TD2 2019-2020

J. Ledig

Électromagnétisme et optique géométrique – Polytech 2A

Mercredi 25 mars 2020

Une onde, kékecé ? (1)

Déf. : Une onde est la déformation d'un milieu matériel ou non au cours du temps.

Ex. : Une corde de guitare, une vague, le sons, la lumière.

Caractéristique : Une onde possède une vitesse (fonction des paramètres du milieu), une direction de propagation et une direction de déformation.

- Pour une corde de guitare, l'onde se propage suivant l'axe de la corde, mais la déformation se fait dans la direction perpendiculaire : on parle d'**onde transversale**.
- Pour le sons, les couches d'air oscillent dans la même direction que la propagation (un peu comme un ressort) : on parle alors d'**onde transversale**.

Une onde, kékecé ? (2)

- Mathématiquement, une onde est une fonction de l'espace et du temps : $\vec{F}(\vec{r}, t)$.
- Une onde obéit à **l'équation des ondes** dont la forme la plus générale est l'équation de D'Alembert :

$$\Delta\vec{F} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}$$

  où Δ est le Laplacien.
- Une solution de cette équation est une fonction périodique :

Une onde, kékecé ? (3)

$$\vec{F}(\vec{r},t) = F_0 \times \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi\right)\ \vec{u}_D$$

- F_0 est **l'amplitude de l'onde**.
- $\vec{k}$ est le **vecteur d'onde**, il donne la direction de propagation de l'onde. Exemple : si notre corde est posée sur l'axe des x, alors $\vec{k} = k_x\vec{u}_x$. La norme de k est liée à la *longueur d'onde* : $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$.
- ω est **la pulsation** de l'onde, et sa *fréquence* est $\nu = \omega/2\pi$.
- φ est le **déphasage** de l'onde... dans la vraie vie on n'a pas forcément toujours exactement un cosinus ou un sinus !
- $\vec{u}_D$ est le **vecteur de déformation**. Pour la corde de tout à l'heure posé sur l'axe des x et qu'on excite dans la direction y, la déformation sera suivant l'axe $\vec{u}_D = \vec{u}_y$.

Une onde, kékecé ? (4)

$$\vec{F}(\vec{r},t) = F_0 \times \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi\right)\ \vec{u}_D$$

- Expression lourde à manipuler mathématiquement.
- Nécessite la connaissance des formule de trigonométriques (qui sait simplifier $\cos(a+b)$ ou $\cos(a)\cos(b)$?)
- On peut alors passer en notation complexe pour faciliter les calculs (l'exponentielle d'une somme c'est le produit des exponentielles et inversement) :

$$\underline{\vec{F}} = F_0 \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t + \varphi)}\vec{u}_D \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{F}})$$

Pré-requis (1)

- Dans ce TD nous allons voir les caractérisitiques d'une onde électromagnétique (OEM).
- Une OEM possède une direction de propagation, qui est suivant le vecteur d'onde $\vec{k}$.
- Et une direction d'excitation suivant le **vecteur de polarisation** $\vec{u}_p \perp \vec{k}$.

Vectoriellement une OEM s'écrit (en approximation d'onde plane) :

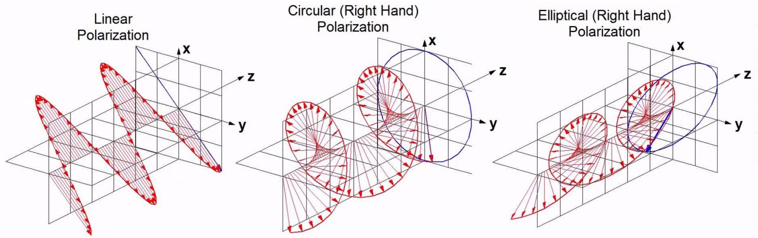
$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = E_0 \, \vec{u}_p \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)} \tag{1}$$

La vitesse de l'onde est alors $v_\varphi = \omega / k$.

Pré-requis (2)

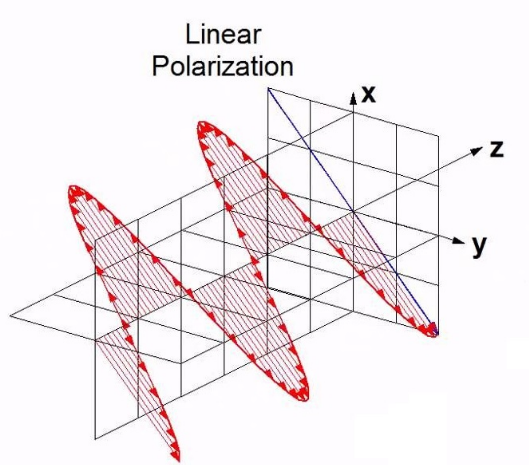
Il existe 3 types de polarisations. Si la propagation se fait dans la direction z, (càd $\vec{k} = k\vec{e}_z$), alors sa polarisation peut être définie grâce au rapport :

$$\frac{\underline{E}_y}{\underline{E}_x} = K \times e^{i\varphi}$$



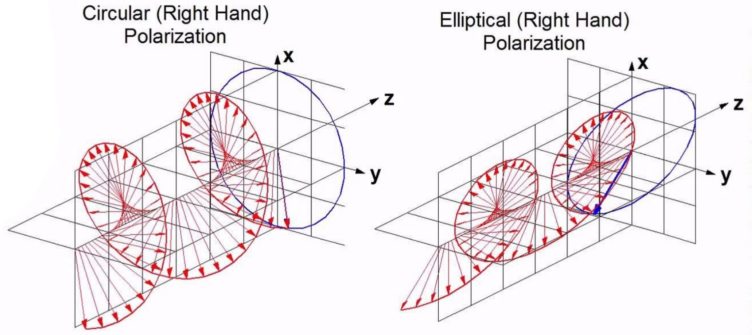
Pré-requis (3)

- Polarisation rectiligne : $\underline{E}_y / \underline{E}_x$ est un réel, $K \in \mathrm{R}$ et $\varphi = 0$: $\underline{E}_y = K \underline{E}_x$.



Pré-requis (4)

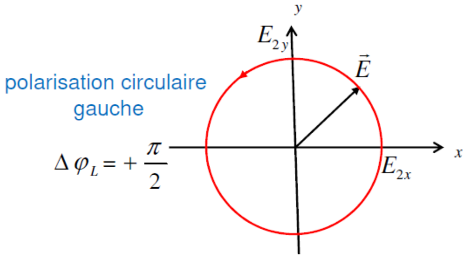
- Polarisation circulaire : $\underline{E}_y/\underline{E}_x$ est un réel, $K \in \mathbb{R}$ et $\varphi = \pm\pi/2$.
- Polarisation elliptique où K et φ sont quelconques.

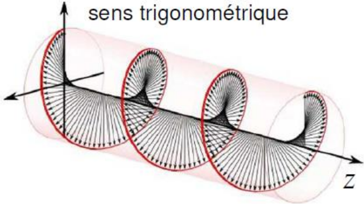


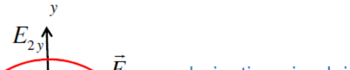
Pré-requis (4)

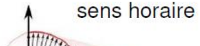
- Pour une polarisation circulaire le signe du déphasage donne le sens de la polarisation.

$$\underline{E}_y = e^{\pm i\pi/2}\underline{E}_x$$









Question a, partie 1

Def. : Un polariseur P est un *filtre* optique qui ne laisse passer que la composante du champ électrique colinéaire à son axe, noté $\vec{u}_P$.

Ex. : Si l'axe du polariseur est suivant l'axe des x alors seulement la composante E_x traversera le polariseur.

- Aussi, si une onde n'est pas polarisée, un polariseur la *polarise* suivant son axe.

Ainsi, une onde non polarisée $\underline{\vec{E}}_0$ passant à travers un polariseur P_1 ressortira suivant :

$$\underline{\vec{E}}_1 = \left(\underline{\vec{E}}_0 \cdot \vec{u}_{P_1}\right) \vec{u}_{P_1} = \underline{E}_{01} \vec{u}_{P_1}$$

Question a, partie 2

On a donc :

$$\underline{\vec{E}}_1 = \underline{E}_{01}\vec{u}_{P_1}$$

On envoie cette OEM à travers un polariseur P_2. On note θ l'angle entre les axes de P_1 et P_2. Que devient le champ en sortie ?

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_2 &= \left(\underline{\vec{E}}_1 \cdot \vec{u}_{P_2}\right)\vec{u}_{P_2} \\ &= \left(\underline{E}_{01}\vec{u}_{P_1} \cdot \vec{u}_{P_2}\right)\vec{u}_{P_2} \\ &= \left(\underline{E}_{01}\cos\theta\right)\vec{u}_{P_2}\end{aligned}$$

L'amplitude transmise est donc $\underline{E}_{02} = \underline{E}_{01}\cos\theta$.

Question a, partie 3

On a donc :

$$\underline{E}_{02} = \underline{E}_{01} \cos\theta$$

Définition

L'intensité d'une OEM est donnée, en notation complexe, par la relation :

$$I = \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*$$

où * désigne le complexe conjugué.

Ainsi :

$$\boxed{I_t = |\underline{E}_{01}|^2 \cos^2\theta}$$ **Loi de Malus**

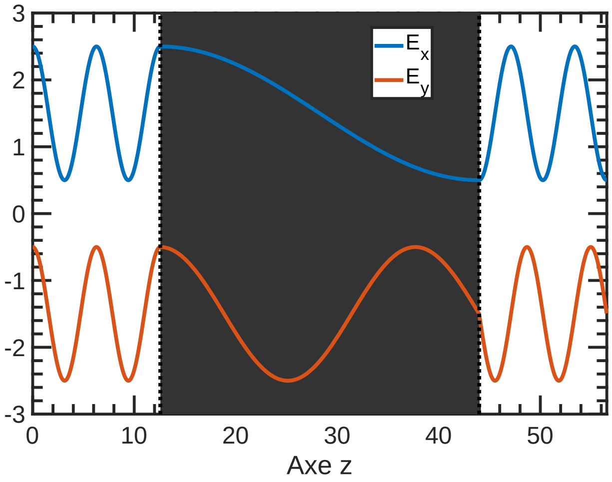
Correction TD2
2019-2020

J. Ledig

Question b, définitions (1)

- Une lame (ou cristal) est généralement un milieu **anisotrope**, càd que les directions ne sont pas équivalents.
- Un cristal **bi**réfringent possèdent deux axes, perpendiculaires entre eux, x et y, et perpendiculaire à la direction de propagation z.
- Chaque composante du champ électrique va avoir son propre mode de propagation dans le cristal : cela permet de changer la polarisation de l'onde. L'onde suivant x aura comme vitesse $v_x = c/n_x$ et la composante suivant y, $v_y = c/n_y$, avec n l'indice optique de l'axe.
- Le vecteur d'onde de chaque composante doit être pondéré de l'indice optique associé : $k_x = k_0 n_x = \omega n_x / c$.

Question b, définitions (2)



Question b, petit 1

L'onde arrivant sur la lame est :

$$\underline{\vec{E}}_1 = \underline{E}_{01}(\vec{r},t)\vec{u}_{P_1}$$

Sachant que le polariseur P_1 est incliné à 45° par rapport à la lame, l'angle entre $\vec{u}_x$ ou $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_{P_1}$ est de 45°. Ainsi les composantes sont :

$$\begin{cases} \underline{E}_x & = & \underline{\vec{E}}_1 \cdot \vec{u}_x = \underline{E}_{01}\vec{u}_{P_1} \cdot \vec{u}_x = \dfrac{\underline{E}_{01}}{\sqrt{2}} \\ \underline{E}_y & = & \underline{\vec{E}}_1 \cdot \vec{u}_y = \underline{E}_{01}\vec{u}_{P_1} \cdot \vec{u}_y = \dfrac{\underline{E}_{01}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Et donc :

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_1 = \frac{\underline{E}_{01}}{\sqrt{2}}\left(\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)}$$

Question b, petit 2, partie 1

- L'onde sortant du polariseur est :

$$\underline{\vec{E}}_1(z,t) = \frac{\underline{E}_{01}(z,t)}{\sqrt{2}}\left(\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)$$

- L'onde arrivant sur le cristal en $z = 0$ est :

$$\underline{\vec{E}}_1(z,t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{i(k_0 z - \omega t)}\vec{u}_x + \mathrm{e}^{i(k_0 z - \omega t)}\vec{u}_y\right) = \left(\mathrm{e}^{-i\omega t}\vec{u}_x + \mathrm{e}^{-i\omega t}\vec{u}_y\right)$$

- Une fois dans le cristal, chaque composante *fait sa vie*, et à la sortie on a :

$$\underline{\vec{E}}_1(e,t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{i(k_0 n_x e - \omega t)}\vec{u}_x + \mathrm{e}^{i(k_0 n_y e - \omega t)}\vec{u}_y\right)$$

Question b, petit 2, partie 2

- On avait :

$$\underline{\vec{E}}_1(e,t) \equiv \underline{\vec{E}}_2(t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}}\left(e^{i(k_0 n_x e - \omega t)}\vec{u}_x + e^{i(k_0 n_y e - \omega t)}\vec{u}_y\right)$$

- A la sortie de la lame, il y a un déphasage entre les deux composantes,

$$\frac{\underline{E}_y}{\underline{E}_x} = \frac{e^{i(k_0 n_y e - \omega t)}}{e^{i(k_0 n_x e - \omega t)}} = e^{ik_0(n_y - n_x)e} \equiv e^{i\Delta\varphi}$$

- Le déphasage entre les deux composantes doit être de $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ pour que l'OEM en sortie soit polarisé circulairement. Cela revient à vérifier que :

$$\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n_y = n_x \pm \frac{\pi}{2k_0 e} = n_x \pm \frac{c\pi}{2\omega e}$$

- Vérifions que l'onde de sortie décrit bien un cercle dans le plan (x, y) si $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, càd si $n_y = n_x \pm \frac{\pi}{2k_0 e}$:

Pour E_x :

$$\underline{E}_x(e,t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} e^{i(k_0 n_x e - \omega t)} \Rightarrow E_x(e,t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \cos(k_0 n_x e - \omega t)$$

Pour E_y :

$$\underline{E}_y(e,t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} e^{i(k_0 n_y e - \omega t)} \Rightarrow E_y(e,t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \cos(k_0 n_y e - \omega t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \cos\left(k_0 n_x e - \omega t \pm \frac{\pi}{2}\right.$$

Question b, petit 2, partie 4

On a :

$$\begin{cases} E_x(e,t) &= \dfrac{E_{01}}{\sqrt{2}}\cos(k_0 n_x e - \omega t) \\ E_y(e,t) &= \dfrac{E_{01}}{\sqrt{2}}\cos\left(k_0 n_x e - \omega t \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

L'équation d'un cercle étant $X^2 + Y^2 = R^2$, on a :

$$\begin{aligned} E_x^2 + E_y^2 &= \frac{E_{01}^2}{2}\left[\cos^2(k_0 n_x e - \omega t) + \cos^2\left(k_0 n_x e - \omega t \pm \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{E_{01}^2}{2}\left[\cos^2(k_0 n_x e - \omega t) + \sin^2(k_0 n_x e - \omega t)\right] = \frac{E_{01}^2}{2} \end{aligned}$$

Rappel : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ d'où $\cos(a \pm \pi/2) = \mp\sin(a)$.

Question b, petit 2, partie 5

Résumons

- Une lame quart-d'onde ou $\lambda/4$ est un cristal biréfringent permettant de transformer une OEM polarisée rectilignement en une OEM polarisée circulairement.
- Cette transformation se fait grâce à l'ajout d'un déphasage entre les composantes du champ électrique incident. Le déphasage doit valoir $\pi/2$.
- Pourquoi quart d'onde ? Parce qu'il faut vérifier la relation $n_y = n_x \pm \frac{\pi}{2k_0 e} = n_x \pm \frac{\lambda}{4e}$.

Question c, petit 1, partie 1

- Le champ incident est maintenant une OEM polarisée circulairement vers la droite. Cela veut donc dire que,

$$\frac{\underline{E}_{1y}}{\underline{E}_{1x}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

- A l'entrée de la lame on a donc :

$$\underline{\vec{E}}_1(z,t) = \frac{E_{01}}{\sqrt{2}}\left(e^{i(k_0 z - \omega t)}\vec{u}_x + e^{i\left(k_0 z - \omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\vec{u}_y\right)$$

Question c, petit 1, partie 2

- A la sortie de la lame :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_1(e,t) = \underline{\vec{E}}_2 &= \frac{E_{01}}{\sqrt{2}}\left(e^{i(k_0 n_x e-\omega t)}\vec{u}_x + e^{i\left(k_0 n_y e-\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}\vec{u}_y\right)\\ &= \frac{E_{01}}{\sqrt{2}}e^{i(k_0 n_x e-\omega t)}\left(\vec{u}_x + e^{i\left(\pm\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\vec{u}_y\right)\\ &= \frac{E_{01}}{\sqrt{2}}e^{i(k_0 n_x e-\omega t)}\left(\vec{u}_x \pm \vec{u}_y\right)\end{aligned}$$

  Or on a toujours $n_y = n_x \pm \frac{\pi}{2k_0 e}$

- L'onde de sortie est une OEM polarisée rectilignement.
- Si la lame quart d'onde est $-\pi/2$, $\vec{E}_2$ est polarisé rectilignement à $-45°$.

Question c, petit 1, partie 3

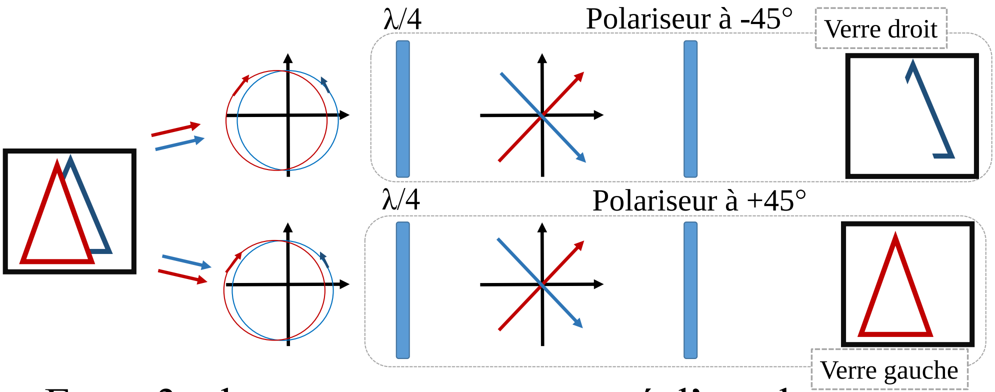
Résumons (màj)

- Une lame quart-d'onde ou $\lambda/4$ est un cristal biréfringent permettant de transformer une OEM polarisée rectilignement en une OEM polarisée circulairement.
- Cette transformation se fait grâce à l'ajout d'un déphasage entre les composantes du champ électrique incident. Le déphasage doit valoir $\pi/2$.
- Pourquoi quart d'onde ? Parce qu'il faut vérifier la relation $n_y = n_x \pm \frac{\pi}{2k_0e} = n_x \pm \frac{\lambda}{4e}$.
- L'inverse est aussi vraie : une OEM polarisée circulairement à droite est transformée en OEM polarisé rectilignement à $-45°$ (pour une OEM polarisée circulairement à gauche, ce sera $+45°$).

Question c, petit 2 et 3

- A la sortie de la lame quart d'onde, notre onde polarisée circulairement à droite est transformée en OEM polarisée rectiligment à $-45°$.
- Ainsi, l'ajout d'un polariseur à $+45°$ à la sortie de la lame $\lambda/4$ va éteindre le signal (cf. loi de Malus) car polarisation de l'onde est perpendiculaire à l'axe du polariseur.
- Avec initialement une OEM polarisée circulairement à gauche, le déphasage initial est de $+\pi/2$, et l'onde de sortie est donc déphasée de $-\pi/2 + \pi/2 = 0$: Polarisation rectiligne à $+45°$.

Question d, partie 1



Etape 3: chaque verre est composé d'une lame quart d'onde et d'un polariseur

La réponse d, partie 2

- Utiliser une OEM polarisée rectilignement nécessiterait au spectateur de garder la tête **PARFAITEMENT** à la verticale pendant tout le film (le film Avatar dure plus de 2h30).