

# Table des matières

<b>1</b>	<b>CFD EN ECOULEMENT COMPRESSIBLE</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	1
1.2	Présentation générale d'un code RANS . . . . .	2
<b>2</b>	<b>LES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES MOYENNEES</b>	<b>4</b>
2.1	Système des équations NS moyennées "à la Favre" . . . . .	4
2.2	Formulation conservative . . . . .	5
2.3	Formulation en repère entraîné . . . . .	6
2.3.1	Formulation en vitesse absolue . . . . .	7
2.3.2	Formulation en vitesse relative . . . . .	7
2.4	Turbulence compressible . . . . .	7
2.4.1	Equation de transport pour les contraintes turbulentes . . . . .	8
2.4.2	Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente . . . . .	8
2.4.3	Taux de dissipation d'énergie turbulente $\varepsilon$ . . . . .	9
<b>3</b>	<b>LES MODELES DE TURBULENCE</b>	<b>10</b>
3.1	La viscosité turbulente . . . . .	10
3.2	Modèles algébriques . . . . .	11
3.3	Modèle à 1 équation : le modèle de Spalart-Allmaras (1992) . . . . .	12
3.4	Modèles à 2 équations de transport . . . . .	12
3.4.1	Le modèle $k - \varepsilon$ de Jones-Launder (1972) . . . . .	13
3.4.2	Modèle $k - \varepsilon$ réalisable . . . . .	13
3.4.3	Le modèle $k - \varepsilon$ RNG (1986) . . . . .	14
3.4.4	Modèle $k - \varepsilon$ compressible . . . . .	14
3.4.5	Le modèle $k - \omega$ de Wilcox (1988) . . . . .	15
3.4.6	Le modèle $k - \omega$ compressible . . . . .	15
3.4.7	Le modèle $k - \omega$ de Menter avec correction SST (1992) . . . . .	15
3.4.8	Formules de conversion . . . . .	16
3.5	Modèles non-linéaires . . . . .	17
3.5.1	Modèles ARSM . . . . .	17
3.5.2	Modèles $k - \varepsilon$ non-linéaires . . . . .	17
3.6	Modèles au second ordre - RSM . . . . .	18
3.7	Aspects thermiques . . . . .	18
3.7.1	Modèle algébrique . . . . .	19
3.7.2	Modèle à équation de transport . . . . .	19

<b>4</b>	<b>ÉCOULEMENTS INSTATIONNAIRES</b>	<b>20</b>
4.1	URANS	20
4.2	Detached Eddy Simulation (DES) et variantes	20
4.2.1	Version initiale de la DES	20
4.2.2	Grid induced separation	22
4.2.3	Delayed Detached Eddy Simulation (DDES)	23
4.2.4	Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES)	23
4.2.5	Extended DDES	25
4.2.6	Improve Delayed DES (IDDES)	25
4.3	Scale-Adaptive Simulation (SAS)	27
4.3.1	Description de la construction du modèle SAS	27
4.3.2	Modèle SST-SAS	30
4.4	Modèle PANS	30
4.5	Formalisme des méthodes hybrides T-LES/RANS	31
4.6	Organised Eddy Simulation (OES)	32
<b>5</b>	<b>LES LOIS DE PAROI</b>	<b>34</b>
5.1	Problématique	34
5.2	Rappel des propriétés des couches limites turbulentes 2D incompressibles	34
5.3	Effets de compressibilité	35
5.4	Principe	35
<b>6</b>	<b>TRANSITION LAMINAIRE/TURBULENT</b>	<b>36</b>
6.1	Modèle algébrique de transition	36
6.2	Modèle à équation de transport de Walters and Leylek	36
6.3	Modèle $\gamma - \overline{Re_{\theta_{tr}}}$ de Menter	37
6.3.1	Equation de transport pour l'intermittence	38
6.3.2	Equation de transport pour $\overline{Re_{\theta_{tr}}}$	39
6.3.3	Corrélation pour le calcul de $Re_{\theta}$	40
6.3.4	Fermeture du modèle : fonctions $F_{length}$ et $Re_{\theta_c}$	41
6.3.5	Couplage du modèle de transition avec le modèle $k - \omega$ SST	41
<b>7</b>	<b>ASPECTS NUMERIQUES</b>	<b>42</b>
7.1	Intégration temporelle - Pas de temps local	42
7.2	Écoulements instationnaires - Pas de temps dual	42
7.3	Discrétisation spatiale des flux convectifs	43
7.4	Discrétisation spatiale des termes visqueux	44
7.5	Multigrille	44
7.5.1	Principe	44
7.5.2	Description de l'algorithme multigrille	44
7.5.3	Opérateurs intergrille	45
7.6	Traitement des conditions aux limites	46
7.6.1	Conditions à l'infini pour le champ moyen	46
7.6.2	Conditions à l'infini pour le champ turbulent	47
7.6.3	Conditions aux parois pour le champ moyen	48
7.6.4	Conditions aux parois pour le champ turbulent	48
7.7	Initialisation des calculs	48
7.8	Paramètres de calculs	48
	Bibliographie	50

# Chapitre 1

## CFD EN ECOULEMENT COMPRESSIBLE

### 1.1 Introduction

La simulation numérique des écoulements turbulents est un formidable outil aussi bien pour essayer de mieux comprendre les mécanismes physiques que pour la conception et le développement dans l'industrie. Son utilisation courante a été rendue possible par les progrès réalisés dans le domaine de la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides et surtout par l'explosion des moyens de calcul. Aujourd'hui, la simulation numérique est un véritable complément aux études expérimentales et permet de limiter le nombre d'essais en soufflerie, entraînant une réduction des coûts et des délais de conception, et constitue ainsi un enjeu économique majeur.

Actuellement, les applications concernent des géométries de plus en plus proches des configurations réelles (avion complet, moteur, tuyère...) qui mettent en jeu des phénomènes complexes : transition laminaire-turbulent, décollements, interaction choc-couche limite. Il se pose alors les problèmes de représentativité des calculs par rapport à la physique à reproduire, de précision, de robustesse et de coût de calcul. En effet, malgré la puissance des calculateurs, la simulation de toutes les échelles spatio-temporelles actives au sein d'un écoulement turbulent, depuis les plus grandes imposées par la taille du problème jusqu'aux plus petites dissipatives (échelle de Kolmogorov [27]), ne peut être envisagée à l'heure actuelle. Cette approche, appelée Simulation Numérique Directe ou DNS (Direct Numerical Simulation), est en pratique limitée à des cas très simples à faible nombre de Reynolds. Dès lors, pour évaluer les performances aérodynamiques de composants industriels, le recours à des modèles s'impose pour réduire les coûts de calcul, tout en garantissant un bon niveau de précision.

Une solution est de résoudre les équations de Navier-Stokes sur une gamme restreinte d'échelles et de modéliser l'action des autres. Cette séparation des échelles débouche sur différents niveaux d'approximation de la turbulence comme la simulation des grandes échelles ou LES (Large Eddy Simulation) et l'approche moyennée ou RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes).

- La première, par filtrage en espace, résout la dynamique des grandes et moyennes échelles porteuses d'énergie et utilise un modèle (dit de sous-maille) pour représenter l'action des échelles dont la taille est inférieure à celle de la maille du calcul, sur les échelles résolues. Cette méthode requiert un maillage très fin et est encore très coûteuse.
- La seconde utilise un traitement statistique : les variables du système sont décomposées en une partie moyenne et une partie fluctuante. Le système des équations de Navier-Stokes instantanées est alors remplacé par un système d'équations sur les valeurs moyennes du champ. Pour un écoulement stationnaire, la moyenne d'ensemble des équations de Navier-Stokes (moyenne obtenue sur un grand nombre de réalisations) peut être remplacée par une moyenne temporelle (hypothèse d'ergodicité). Dans le cas d'écoulements instationnaires, l'hypothèse d'ergodicité de la turbulence n'est plus valable et pose le problème de signification de l'URANS (Unsteady RANS).

Les non-linéarités des termes convectifs du système initial font apparaître des quantités inconnues associées à des moyennes de produits de fluctuations : les tensions de Reynolds  $\overline{\rho u'_i u'_j}$ , le flux de chaleur turbulent  $\overline{\rho u'_i e'}$ , et d'autres termes qui sont négligés (un terme  $\tau'_{ij}$ , un terme de diffusion turbulente, etc.). Les termes supplémentaires doivent être modélisés pour fermer le système dans le cas d'écoulements turbulents. La fermeture est réalisée au moyen d'un modèle de turbulence plus ou moins sophistiqué. Elle permet une diminution importante du nombre de degrés de liberté qui la rend applicable sur des configurations complexes et pour des nombres de Reynolds élevés. C'est l'approche la plus couramment utilisée dans l'industrie.

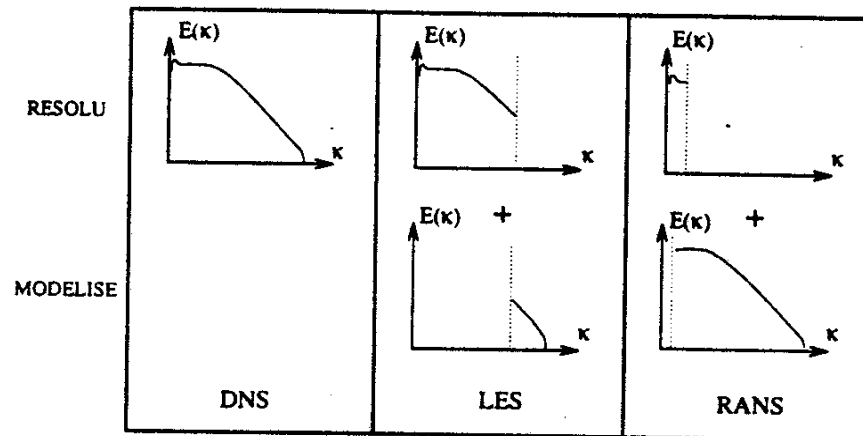


FIGURE 1.1 – Approche DNS/LES/RANS rapportées dans l'espace spectral

## 1.2 Présentation générale d'un code RANS

Un solveur RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) permet la simulation d'écoulements tridimensionnels, instationnaires, compressibles ou incompressibles, par résolution des équations de Navier-Stokes **moyennées** sur maillages structurés ou non par domaine. Le système est fermé par un modèle de turbulence. Nous ne parlerons ici que du cas des codes compressibles avec une discrétisation de type Volumes Finis.

L'intégration en temps est effectuée avec un schéma adapté (MacCormack, Runge-Kunta, Euler explicite...), avec un pas de temps local conditionné par un critère CFL et/ou une phase implicite. Une technique multigrille permet l'accélération de la convergence. Pour les écoulements instationnaires, la méthode du pas de temps dual est utilisée.

La discrétisation spatiale est de type Volumes Finis avec une représentation "cell-centered" (valeur au centre de la cellule) ou "cell-vertex" (valeur aux noeuds). Le calcul des flux au travers des facettes des cellules est réalisé au moyen de différents schémas numériques centrés ou décentrés.

Une approche multi-domaine, utilisant des techniques de raccords jointifs ou autorisant le recouvrement entre domaines, permet l'emploi de maillages structurés ou non par domaine. Les conditions aux limites, appliquées par facette frontière, reposent sur la discrétisation des relations caractéristiques écrites pour les équations d'Euler tridimensionnelles.

Les équations de Navier-Stokes moyennées sont un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre pour la conservation de la masse (comme pour les équations d'Euler), et du deuxième ordre pour la

conservation du moment et de l'énergie. Mise à part l'équation de conservation de la masse, les équations sont mixtes hyperboliques-paraboliques en espace et en temps (et elliptiques dans le cas stationnaire). L'équation de la conservation de la masse est hyperbolique en espace et en temps comme pour les équations d'Euler.

Le système des équations de Navier-Stokes moyennées n'admet que des **solutions continues** contrairement aux équations d'Euler où des solutions discontinues (au sens faible) sont admissibles. Les équations d'Euler sont la limite des équations de Navier-Stokes quand les termes visqueux tendent vers 0, c'est-à-dire quand le nombre de Reynolds tend vers l'infini. Dans le cas de l'air où la viscosité cinématique est de l'ordre de  $10^{-5}m^2/s$ , le nombre de Reynolds est très grand pour les configurations de calculs les plus courants (souvent supérieur à  $10^6$  et peut atteindre  $10^8$ ). Le champ de variables d'un écoulement peut alors présenter de très fortes variations locales (correspondant aux discontinuités des équations d'Euler), dont l'épaisseur est souvent bien inférieure à la taille du maillage utilisé pour la résolution numérique : on peut estimer la taille caractéristique de ces phénomènes à l'inverse du nombre de Reynolds. Les solutions numériques des équations de Navier-Stokes moyennées peuvent donc présenter des chocs. Pour simuler correctement la topologie du choc, il faut passer aux équations de Burnett ou super-Burnett (utilisées dans des cas de détoniques).

Outre la prise en compte des phénomènes de transferts thermiques, un caractère spécifique des équations de Navier-Stokes provient de la condition limite d'adhérence imposée au contact de la paroi. En effet, la vitesse du fluide à la paroi solide est nulle (par effet de rugosité) d'où la présence de forts gradients du champ dans les régions de proche paroi dites couches limites. Dans cette zone, les effets de viscosité deviennent très importants et la turbulence se développe. L'épaisseur de la couche limite peut être estimée comme l'inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds, ce qui impose l'utilisation de maillages très raffinés dans les régions de paroi. Les couches limites sont la majeure source de difficultés supplémentaires des équations de Navier-Stokes par rapport aux équations d'Euler pour la simulation numérique.

## Chapitre 2

# LES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES MOYENNEES

Le traitement statistique des équations instantanées conduit à décomposer chaque grandeur  $G$ , selon la formulation de Reynolds, en une partie moyenne (notée  $\overline{G}$ ) et une partie fluctuante (notée  $g'$ ). Pour les écoulements compressibles, on utilise une moyenne pondérée par la masse volumique (moyenne de Favre [14]).

Cette moyenne est définie par :  $\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\overline{\rho}}$ . Son utilisation évite l'apparition des fluctuations de masse volumique dans les équations. On néglige les fluctuations de la viscosité moléculaire  $\mu$ . Pour simplifier les notations, nous noterons en majuscule les grandeurs moyennes.

Remarque : la moyenne pondérée par la masse est un outil mathématique et non une simplification physique. Même si la fluctuation de masse volumique a disparu des équations, cela n'élimine pas pour autant son effet sur la turbulence. Morkovin [44] a émis l'hypothèse que, dans une couche limite, les effets de fluctuations de masse volumique sur la turbulence restent négligeables en comparaison de ceux de la masse volumique moyenne sous condition que le nombre de Mach reste inférieur à 5. La turbulence conserve ainsi un comportement incompressible.

### 2.1 Système des équations NS moyennées "à la Favre"

On introduit les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} \rho &= \overline{\rho} + \rho' & ; & & P &= \overline{P} + P' & ; & & q_j &= \overline{q_j} + q'_j \\ u_i &= \tilde{u}_i + u''_i & ; & & h &= \tilde{h} + h'' & ; & & e &= \tilde{e} + e'' \end{aligned}$$

où  $h$  désigne l'enthalpie et  $e$  l'énergie interne.

Les équations de Navier-Stokes "à la Favre" s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho \tilde{u}_i}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \tilde{u}_i}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j}) &= -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{\tau}_{ji} - \overline{\rho u''_i u''_j} \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \overline{\rho} \left( \tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\overline{\rho u''_i u''_i}}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \overline{\rho \tilde{u}_j} \left( \tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\overline{\rho u''_i u''_i}}{2} \right] &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -\overline{q_j} - \overline{\rho u''_j h''} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{u}_i \left( \tilde{\tau}_{ij} - \overline{\rho u''_i u''_j} \right) \right] \end{aligned}$$

Avec l'équation d'état des gaz parfaits :  $\bar{P} = r\bar{\rho}\bar{T}$

Le tenseur  $\tilde{\tau}_{ij}$  représente la partie moyenne du tenseur des contraintes visqueuses. Et le terme  $-\overline{\rho u_i'' u_j''} = \bar{\rho} \tau_{ij}^t$  est le tenseur des contraintes turbulentes (ou tenseur de Reynolds).

Le terme  $\overline{\rho u_j'' h''} = q_j^t$  est le flux de chaleur turbulent ; il représente l'enthalpie transportée par les fluctuations turbulentes.

Le terme  $\frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''}$  est l'énergie cinétique de turbulence  $\bar{\rho}k$ .

La partie moyenne du tenseur taux de déformation s'écrit :  $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$ . L'hypothèse de Boussinesq (1877) permet d'exprimer le tenseur turbulent aux gradients de vitesse moyenne par une relation analogue à la loi de comportement liant les contraintes visqueuses au tenseur des taux de déformation. Cette hypothèse fait intervenir la notion de viscosité turbulente  $\mu_t$ .

$$\bar{\rho} \tau_{ij}^t = -\overline{\rho u_i'' u_j''} = 2\mu_t \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}$$

Le flux de chaleur turbulent est relié au gradient de température moyenne via la viscosité turbulente et un nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  par une relation analogue à la loi de Fourier :

$$q_j^t = \overline{\rho u_j'' h''} = -\frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j}$$

## 2.2 Formulation conservative

Pour alléger les notations, les grandeurs moyennes sont notées sans opérateur. Le système des équations de Navier-Stokes moyennées couplées avec un modèle de turbulence à deux équations de transport ( $k, \Psi$ ) s'écrit, sous forme conservative :

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} (F_c(w) - F_d(w, w_x, w_y, w_z)) = S(w)} \quad (2.1)$$

où  $w$  désigne le vecteur des variables conservatives,  $F_c$  et  $F_d$  es densités de flux convectif et diffusif :

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ \rho E \\ \rho k \\ \rho \Psi \end{pmatrix} ; \quad F_c = \begin{pmatrix} \rho \vec{V} \\ \rho (\vec{V} \otimes \vec{V}) + p \bar{I} \\ \rho E \vec{V} + p \vec{V} \\ \rho k \vec{V} \\ \rho \Psi \vec{V} \end{pmatrix} ; \quad F_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\tau^v} + \overline{\tau^t} \\ (\overline{\tau^v} + \overline{\tau^t}) \cdot \vec{V} - \vec{q}^v - \vec{q}^t \\ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \text{grad } k \\ \left( \mu + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \text{grad } \Psi \end{pmatrix}$$

Le vecteur terme source  $S$  ne concerne que les équations de transport de la turbulence.  $E$  désigne l'énergie totale (énergie cinétique + énergie interne). Les coefficients  $\sigma_k$  et  $\sigma_\Psi$  sont des constantes.

Les modèles de turbulence sont formulés dans le cadre de l'hypothèse de Boussinesq et de la loi de Fourier turbulente. La modélisation du tenseur des contraintes turbulentes (ou tenseur de Reynolds) et du vecteur flux de chaleur turbulent est remplacée par celle de la viscosité turbulente selon la formulation suivante :

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\tau}}^t &= \mu_t \left[ \text{grad } \vec{V} + (\text{grad } \vec{V})^t - \frac{2}{3}(\text{div } \vec{V})\vec{I} \right] - \frac{2}{3}\rho k \overline{\overline{I}} \\ \vec{q}^t &= -\frac{\mu_t}{P_{rt}} C_p \text{grad } T\end{aligned}$$

Cette relation signifie que la turbulence réagit instantanément à une modification du champ de vitesse moyenne, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'effet de mémoire de la turbulence.

Le terme  $\frac{2}{3}\rho k$  s'apparente à une pression dynamique turbulente due aux mouvements d'agitation. Il est souvent associé à la pression pour former une pression modifiée  $P^* = P + \frac{2}{3}\rho k$ . Il est négligeable devant  $P$  en régime subsonique.

On utilise les lois de Newton et de Fourier pour fermer le tenseur des contraintes visqueuses et le flux de chaleur. Le tenseur des contraintes (somme des contraintes visqueuses et des contraintes turbulentes)  $\overline{\overline{\tau}} = \overline{\overline{\tau}}^v + \overline{\overline{\tau}}^t$  et le vecteur flux de chaleur  $\vec{q} = \vec{q}^v + \vec{q}^t$  s'écrivent alors :

$$\overline{\overline{\tau}} = (\mu + \mu_t) \left[ \text{grad } \vec{V} + (\text{grad } \vec{V})^t - \frac{2}{3}(\text{div } \vec{V})\vec{I} \right] - \frac{2}{3}\rho k \overline{\overline{I}} \quad (2.2)$$

$$\vec{q} = -\left(\frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_t}{P_{rt}}\right) C_p \text{grad } T \quad (2.3)$$

où les nombres de Prandtl moléculaire et turbulent sont pris constants :  $P_r = 0.72$  et  $P_{rt} = 0.9$  pour l'air. L'air est considéré comme un gaz parfait avec  $\gamma = 1,4$ . La viscosité moléculaire est évaluée par la loi de Sutherland et ne dépend que de la température moyenne :

$$\mu(T) = \mu_{ref} \sqrt{\frac{T}{T_{ref}} \frac{1 + S/T_{ref}}{1 + S/T}}$$

avec  $T_{ref} = 273.16K$ ,  $\mu_{ref} = 1.711 \cdot 10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}$  et  $S = 110.4K$ .

## 2.3 Formulation en repère entraîné

Pour certaines applications, la projection des lois de bilan dans un repère entraîné se justifie par l'existence d'un écoulement permanent dans ce repère. C'est par exemple le cas pour une roue isolée de turbomachine, pour un rotor d'hélicoptère en vol stationnaire ou pour une hélice en mouvement de translation axiale.

On distingue alors, dans ce repère entraîné, deux formulations possibles des équations moyennées selon le choix d'inconnue pour la vitesse.

- Formulation en vitesse absolue

Ce choix est celui retenu pour les applications hélices ou rotor d'hélicoptères en vol stationnaire. La raison de ce choix est reliée directement à des considérations de précision numérique dans l'approche volumes finis.

- Formulation en vitesse relative

Ce choix offre une formulation physique directe en termes de lois de bilan pour l'observateur entraîné. On l'utilise pour les écoulements dans les turbomachines.

Les deux formulations font apparaître un terme source volumique dans les équations de bilan de q.d.m et d'énergie, dû aux forces d'inertie agissant sur le fluide (forces de Coriolis et forces d'entraînement).



### 2.3.1 Formulation en vitesse absolue

Les équations RANS sont projetées dans un repère cartésien entraîné  $\mathcal{R}_E$ . Le système est formulé avec les composantes  $\vec{V}_E$  de la vitesse absolue dans le repère entraîné  $\mathcal{R}_E$ . Notons  $\vec{s}_E$  le vecteur vitesse d'entraînement et  $\vec{\omega}(\mathcal{R}_E/\mathcal{R})$  le vecteur rotation du repère entraîné par rapport au repère absolu.

$$\frac{\partial w_E}{\partial t} + \text{div} (F_c(w_E, \vec{s}_E) - F_d(w_E, \text{grad}(w_E))) = S(w_E)$$

où  $w_E$  désigne le vecteur des variables conservatives,  $F_c(w_E, \vec{s}_E)$  et  $F_d$  les densités de flux convectif et diffusif :

$$w_E = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{V}_E \\ \rho E \end{pmatrix}; \quad F_c(w_E, \vec{s}_E) = \begin{pmatrix} \rho(\vec{V}_E - \vec{s}_E) \\ \rho(\vec{V}_E \otimes (\vec{V}_E - \vec{s}_E)) + p\vec{I}_E \\ \rho E(\vec{V}_E - \vec{s}_E) + p\vec{V}_E \end{pmatrix}; \quad F_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\overline{\tau^v}}_E + \overline{\overline{\tau^t}}_E \\ (\overline{\overline{\tau^v}}_E + \overline{\overline{\tau^t}}_E) \cdot \vec{V}_E - \vec{q}^v_E - \vec{q}^t_E \end{pmatrix}$$

où l'énergie totale  $E$  est définie par :  $E = e + \frac{|\vec{V}_E|^2}{2}$ . Les composantes des tenseurs des contraintes et des vecteurs flux de chaleur sont exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_E$ . Le vecteur terme source  $S(w_E)$  :

$$S(w_E) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\vec{\omega}(\mathcal{R}_E/\mathcal{R}) \wedge \rho \vec{V}_E \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 2.3.2 Formulation en vitesse relative

Le système est formulé avec les composantes  $\vec{V}_{rE} = \vec{V} - \vec{s}_E$  de la vitesse relative exprimée dans le repère entraîné  $\mathcal{R}_E$ .

$$\frac{\partial w_E}{\partial t} + \text{div} (F_c(w_E) - F_d(w_E, \text{grad}(w_E))) = S(w_E)$$

où  $w_E$  désigne le vecteur des variables conservatives,  $F_c(w_E)$  et  $F_d$  les densités de flux convectif et diffusif :

$$w_E = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{V}_{rE} \\ \rho E_r \end{pmatrix}; \quad F_c(w_E) = \begin{pmatrix} \rho \vec{V}_{rE} \\ \rho(\vec{V}_{rE} \otimes \vec{V}_{rE}) + p\vec{I}_E \\ \rho E_r \vec{V}_{rE} + p\vec{V}_{rE} \end{pmatrix}; \quad F_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\overline{\tau^v}}_E + \overline{\overline{\tau^t}}_E \\ (\overline{\overline{\tau^v}}_E + \overline{\overline{\tau^t}}_E) \cdot \vec{V}_{rE} - \vec{q}^v_E - \vec{q}^t_E \end{pmatrix}$$

où l'énergie totale "relative"  $E_r$  est définie par :  $E_r = e + \frac{|\vec{V}_{rE}|^2}{2}$

Les composantes des tenseurs des contraintes et des vecteurs flux de chaleur sont exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_E$ .

Le vecteur terme source  $S(w_E)$  et l'expression des forces d'inertie :

$$S(w_E) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \vec{f}_{cor} + \rho \vec{f}_{cen} \\ \rho \vec{V}_{rE} \cdot \vec{f}_{cen} \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} \vec{f}_{cor} = -2\vec{\omega}(\mathcal{R}_E/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_{rE} & = \text{force de Coriolis} \\ \vec{f}_{cen} = -\left[ \frac{\partial \vec{s}_E}{\partial t} + \vec{\omega}(\mathcal{R}_E/\mathcal{R}) \wedge \vec{s}_E \right] & = \text{force centrifuge} \end{cases}$$

## 2.4 Turbulence compressible

Ecriture des équations dans le cas où le nombre de Mach est élevé  $M > 5$ .

### 2.4.1 Equation de transport pour les contraintes turbulentes

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tau_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{u_k \bar{\rho} \tau_{ij}}}{\partial x_k} = \bar{\rho} P_{ij} + \bar{\rho} \Pi_{ij} - \bar{\rho} \varepsilon_{ij} + \bar{\rho} M_{ij} + \bar{\rho} D_{ij}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\rho} P_{ij} &= -\bar{\rho} \left[ \tau_{ik} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_k} \tau_{kj} \right] \\ \bar{\rho} \Pi_{ij} &= \overline{p' \left( \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right)} \\ &= \overline{p' \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)} \\ \bar{\rho} \varepsilon_{ij} &= \overline{\sigma_{ik}'' \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} + \overline{\sigma_{jk}'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} \\ &= \overline{\sigma_{ik}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} + \overline{\sigma_{jk}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \\ \bar{\rho} M_{ij} &= \frac{\overline{\rho' u_i''}}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\sigma_{jk}}}{\partial x_k} \right) + \frac{\overline{\rho' u_j''}}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\sigma_{jk}}}{\partial x_k} \right) + \frac{\overline{\rho' u_j'}}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k} \right) \\ \bar{\rho} D_{ij} &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} + \left( \delta_{ik} \overline{\rho' u_j''} + \overline{\rho' u_i''} \delta_{jk} \right) - \left( \overline{\sigma_{ik}'' u_j''} + \overline{\sigma_{jk}'' u_i''} \right) \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \underbrace{\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} + \left( \delta_{ik} \overline{\rho' u_j''} + \overline{\rho' u_i''} \delta_{jk} \right)}_{\text{turbulent transport}} - \underbrace{\left( \overline{\sigma_{ik}'' u_j''} + \overline{\sigma_{jk}'' u_i''} \right)}_{\text{viscous transport}} \right] \end{aligned}$$

La signification des termes est :  $P_{ij}$  production,  $\Pi_{ij}$  redistribution d'énergie entre les composantes du tenseur de Reynolds,  $\varepsilon_{ij}$  destruction/dissipation d'énergie par la viscosité moléculaire,  $M_{ij}$  contribution du flux de masse,  $D_{ij}$  transport et diffusion.

### 2.4.2 Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente

L'équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente est obtenue à partir de l'équation de transport pour les contraintes de Reynolds par contraction des indices,  $k = \frac{\tau_{ii}}{2}$ . On obtient :

$$\bar{\rho} \frac{Dk}{Dt} = \bar{\rho} P_k + \bar{\rho} \Pi - \bar{\rho} \varepsilon + \bar{\rho} M + \bar{\rho} D$$

avec

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}P_k &= \frac{\bar{\rho}P_{ii}}{2} = -\bar{\rho}\tau_{ik}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_k} \\
 \bar{\rho}\Pi &= \frac{\bar{\rho}\Pi_{ii}}{2} = \overline{p'\frac{\partial u'_i}{\partial x_i}} \\
 \bar{\rho}\varepsilon &= \frac{\bar{\rho}\varepsilon_{ii}}{2} = \overline{\sigma'_{ik}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \\
 \bar{\rho}M &= \frac{\bar{\rho}M_{ii}}{2} = \frac{\overline{\rho'u'_i}}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial\overline{\sigma'_{ik}}}{\partial x_k}\right) \\
 \bar{\rho}D &= \frac{\bar{\rho}D_{ii}}{2} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\overline{u''_i u''_i u''_k}}{2} + \overline{p'u'_i\delta_{ik}} - \overline{\sigma'_{ik}u'_i}\right]
 \end{aligned}$$

Usuellement la fermeture du terme de production  $P_k$  est réalisée à l'aide d'une hypothèse de viscosité turbulente isotrope. Le terme de diffusion  $D$  est modélisé par une approche de diffusion par gradient.

Les autres termes sont influencés par la compressibilité et nécessite un traitement particulier [49, 31, 16].

### 2.4.3 Taux de dissipation d'énergie turbulente $\varepsilon$

La dissipation scalaire peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}\varepsilon &\approx 2\bar{\mu}\overline{s'_{ik}s'_{ki}} - \frac{2}{3}\bar{\mu}\overline{s'_{kk}s'_{ll}} \\
 &= \underbrace{2\bar{\mu}\overline{w'_{ik}w'_{ik}}}_{\bar{\rho}\varepsilon_s} + \underbrace{2\bar{\mu}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial\overline{u'_k u'_l}}{\partial x_l} - 2\overline{u'_k s'_{ll}}\right]}_{\bar{\rho}\varepsilon_{inh}} + \underbrace{\frac{4}{3}\bar{\mu}\overline{s'_{kk}s'_{ll}}}_{\bar{\rho}\varepsilon_d}
 \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_s$  est la contribution solénoïdale qui correspond à la contribution en incompressible ;  $\varepsilon_{inh}$  la contribution inhomogène et  $\varepsilon_d$  la contribution dilatationnelle ou compressible.

On a  $\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = s'_{ij} + w'_{ij}$  avec :

$$s'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right) \quad ; \quad w'_{ij} = \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)$$

## Chapitre 3

# LES MODELES DE TURBULENCE

Les différences entre les modèles de turbulence résident dans leurs capacités à reproduire fidèlement le comportement des écoulements turbulents sur différentes configurations, dans les difficultés liées à leur implémentation et leur résolution dans des codes de calcul. **Aucun modèle n'est satisfaisant pour tous les types de configurations.** Le choix du modèle de turbulence est donc fonction des applications visées ainsi que de la capacité des méthodes numériques à le supporter.

### 3.1 La viscosité turbulente

Les modèles utilisant la notion de viscosité turbulente reposent sur l'existence, au sein des couches cisillées à grand nombre de Reynolds, d'une région assez étendue d'équilibre approximatif entre la production d'énergie turbulente (extraite des grosses structures) et la dissipation turbulente (dissipée aux petites échelles), échanges entre l'écoulement moyen et l'écoulement fluctuant :

$$\frac{\text{production}}{\text{dissipation}} \simeq 1$$

Cet équilibre production-dissipation justifie localement la notion de viscosité turbulente (argument d'isotropie locale) correspondant en fluide incompressible à :

$$\tau_{ij}^t = 2\mu_t S_{ij} \quad \text{avec} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

avec  $\tau^t$  le tenseur de Reynolds et  $S$  le tenseur des taux de déformation.

Cette modélisation conduit aux approximations suivantes :

- le tenseur de Reynolds est aligné sur le tenseur des déformations (colinéarité), ce qui n'est généralement pas vérifié.
- l'écoulement turbulent réagit directement à des effets de distorsions de l'écoulement moyen sans effet de mémoire.
- le terme de production  $P_k = 2\mu_t S^2$  traduit un transfert d'énergie uniquement du mouvement moyen vers la turbulence.
- on donne un caractère diffusif (adapté aux petites échelles) à un phénomène à grande échelle (dont l'origine est la non linéarité des équations de Navier-Stokes). Les tensions de Reynolds tendent donc à stabiliser les mécanismes instationnaires advectifs ce qui est en contradiction avec leur origine formelle.

A l'équilibre strict  $Production/Dissipation = 1$  dans une région de l'espace, l'expression de  $\mu_t$  peut être établie de façon assez sûre. Au voisinage de  $Production/Dissipation = 1$ , il est toujours possible d'utiliser

une modélisation plus complexe (comme le modèle  $k - \varepsilon$ ) mais sa validité est moins certaine.

Pour  $Production/Dissipation \neq 1$ , tout devient compliqué!! Non seulement la possibilité de calculer simplement la valeur de  $\mu_t$  disparaît, mais en plus la notion même d'une viscosité turbulente  $\mu_t$  scalaire est perdue. Il est possible de développer des modèles plus sophistiqués avec transport des composantes du tenseur de Reynolds : les modèles RSM (7 équations de transport). On peut aussi définir une viscosité turbulente tensorielle d'ordre 4 :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = (\mu_t)_{ijkl} \left( \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_l} \right)$$

La viscosité turbulente scalaire est évaluée, par analogie avec la viscosité moléculaire, comme le produit d'une échelle de vitesse  $u$  et d'une échelle de longueur  $l$ , caractéristiques de la turbulence. Elle peut s'obtenir à partir d'une relation algébrique, d'une ou plusieurs équations de transport.

Pour l'échelle de vitesse, comme une part importante de l'énergie des fluctuations de vitesse est contenue dans les grosses structures, il est naturel de prendre une grandeur relative à l'énergie cinétique de turbulence  $k$ , soit  $u \sim \sqrt{k}$ .

Pour l'échelle de longueur  $l$ , plusieurs choix de variables transportées sont possibles :

- le taux de dissipation  $\varepsilon$ ,  $l \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$
- la dissipation spécifique  $\omega$ ,  $l \sim \frac{\sqrt{k}}{\omega}$
- directement l'échelle de longueur  $l$

Les modèles les plus utilisés en aérodynamique sont :

- Le modèle à une équation de Spalart-Allmaras [54]
- Le modèle  $k - \omega$  de Menter avec correction SST [34]
- Le modèle  $k - \varepsilon$  de Jones-Launder [26] ou ses variantes
- Le modèle  $k - \omega$  de Wilcox [65] et ses améliorations

## 3.2 Modèles algébriques

La viscosité turbulente est définie algébriquement d'après une longueur de mélange. Ces modèles ont l'avantage d'une relative robustesse et de l'économie en temps de calcul. Leur valeur prédictive est limitée mais les modèles plus précis sont complexes et coûteux.

L'échelle de longueur servant à exprimer la viscosité turbulente tend à représenter la taille des tourbillons porteurs d'énergie, c'est pourquoi elle est souvent proportionnelle à la distance à la paroi  $d$ . La détermination de cette échelle, appelée longueur de mélange " $l$ ", est basée sur une analogie avec le libre parcours moyen dans la théorie cinétique des gaz. L'échelle de vitesse  $u$ , pour un écoulement turbulent cisailé en couche mince, est fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement :  $u = l \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$ .

Citons le modèle de Michel-Quémar-Durant [41] (1969) où la viscosité turbulente, fonction de la vortacité de l'écoulement moyen  $\omega$  et des grandeurs caractéristiques de la couche limite, suit l'équation suivante :

$$\mu_t = \rho l^2 D^2 \omega \quad \text{avec} \quad l = 0.085 \delta \tanh \left( \frac{\kappa}{0.085} \frac{d}{\delta} \right)$$

où  $l$  est la longueur de mélange,  $\kappa$  la constante de von Karman=0.41,  $\delta$  est l'épaisseur de la couche limite,  $d$  est la distance à la paroi.  $D$  est une fonction d'amortissement traduisant la décroissance rapide de la turbulence au voisinage de la paroi :

$$D(\xi) = 1 - \exp \left( -\frac{\xi^{1/2}}{26\kappa} \right) \quad \text{avec} \quad \xi = \rho l^2 \frac{\mu + \mu_t}{\mu^2} \omega$$

Un autre modèle algébrique souvent utilisé est le modèle de Baldwin-Lomax [2] (1978). La viscosité turbulente s'écrit :

$$\begin{aligned}\nu_t &= \min(\nu_{t_i}, \nu_{t_e}) \\ \nu_{t_i} &= (\kappa d D(d))^2 \omega \\ \nu_{t_e} &= C_{Clauser} C_{cp} F_{wake} F_{Kleb}(d)\end{aligned}$$

avec  $F_{wake}$  une fonction de sillage,  $D(d)$  la fonction d'amortissement de van Driest,  $C_{Clauser}$  la constante de Clauser = 0.0168,  $C_{cp}$  une constante = 1.6 et  $F_{Kleb}$  la fonction de Klebanoff.

Ce modèle peut générer des oscillations numériques.

### 3.3 Modèle à 1 équation : le modèle de Spalart-Allmaras (1992)

Ce modèle utilise une seule équation de transport pour la quantité  $\tilde{\nu}$  qui, loin des parois, se confond avec la viscosité turbulente  $\nu_t$ . L'équation pour  $\tilde{\nu}$  résulte d'une construction pas à pas par ajout de termes destinés à prendre en compte de plus en plus de phénomènes physiques. Partant d'une forme "convection=production+diffusion" pour les écoulements libres, Spalart [53, 54] ajoute les termes nécessaires pour obtenir une région logarithmique dans les profils de vitesse puis les termes de correction de faible nombre de Reynolds de turbulence pour la région de proche paroi.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \operatorname{div} \left[ \vec{V} \rho \tilde{\nu} - \frac{1}{\sigma} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \operatorname{grad} \tilde{\nu} \right] &= c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\nu} + \frac{c_{b2}}{\sigma} \operatorname{grad} \rho \tilde{\nu} \cdot \operatorname{grad} \tilde{\nu} \\ &\quad - \left( c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \rho \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} & \quad ; \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} & \quad ; \quad \chi = \frac{\rho \tilde{\nu}}{\mu} \\ \tilde{S} = |\operatorname{rot} \vec{V}| + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} & \quad ; \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} & \quad ; \quad f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2) \\ f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}} & \quad ; \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r) & \quad ; \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}\end{aligned}$$

Les constantes :

$$\begin{aligned}c_{b1} = 0,1355 & \quad ; \quad c_{b2} = 0,622 & \quad ; \quad \sigma = \frac{2}{3} & \quad ; \quad \kappa = 0,41 \\ c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + (1 + c_{b2})/\sigma & \quad ; \quad c_{w2} = 0,3 & \quad ; \quad c_{w3} = 2 \\ c_{v1} = 7,1 & \quad ; \quad c_{t3} = 1,1 & \quad ; \quad c_{t4} = 2\end{aligned}$$

### 3.4 Modèles à 2 équations de transport

Actuellement, ces modèles sont les plus répandus dans les codes RANS. Dans ces équations, la variable  $d$  désigne la plus petite distance à la paroi. Dans le sillage d'un profil,  $d$  est la distance au bord de fuite.

### 3.4.1 Le modèle $k - \varepsilon$ de Jones-Launder (1972)

Ce modèle, très largement utilisé, a été développé à l'origine pour prévoir le phénomène de relaminarisation des couches limites turbulentes en présence de gradients de pression favorables [26].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \operatorname{div} \left[ \rho k \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \operatorname{grad} k \right] &= P_k - \rho \tilde{\varepsilon} - D \\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \left[ \rho \tilde{\varepsilon} \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \operatorname{grad} \tilde{\varepsilon} \right] &= c_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - \rho c_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + E \end{aligned}$$

Le taux de dissipation de l'énergie cinétique peut être approximée par :

$$\rho \varepsilon = \mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}$$

Le terme  $D$  est introduit pour intégrer la quantité  $\tilde{\varepsilon}$ , grandeur interprétée comme la partie isotrope de la dissipation. Elle a l'avantage de tendre vers zéro à la paroi ce qui simplifie l'écriture de la condition au limite.

$$D = 2\nu \left( \operatorname{grad} \sqrt{k} \right) \cdot \left( \operatorname{grad} \sqrt{k} \right) \quad ; \quad \rho \tilde{\varepsilon} = \rho \varepsilon - D$$

La viscosité turbulente, la production de  $k$  et le terme de bas nombre de Reynolds de turbulence  $E$  vérifient :

$$\begin{aligned} \mu_t &= \rho c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad ; \quad P_k = \overline{\tau^t} : \operatorname{grad} \vec{V} \\ E &= 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} \left( \operatorname{grad} \left( \operatorname{grad} \vec{V} \right) \right) : \left( \operatorname{grad} \left( \operatorname{grad} \vec{V} \right) \right) \end{aligned}$$

Les fonctions d'amortissement sont reliées au nombre de Reynolds de turbulence :

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad ; \quad f_\mu = \exp \left( \frac{-2,5}{1 + R_t/50} \right) \quad ; \quad f_2 = 1 - 0,3 \exp(-R_t^2)$$

Les constantes :

$$c_\mu = 0,09 \quad ; \quad C_{\varepsilon 1} = 1,57 \quad ; \quad C_{\varepsilon 2} = 2 \quad ; \quad \sigma_k = 1 \quad ; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3$$

L'échelle de temps caractéristique  $\mathcal{T} = k/\varepsilon$  représente la durée nécessaire pour dissiper un tourbillon porteur d'une énergie cinétique turbulente  $k$ .

Il existe de nombreux modèles  $k - \varepsilon$  (Jones-Launder, Launder-Sharma, Nagano, Chieng, Shih...). Les différences majeures entre ces modèles concernent les valeurs des constantes et les fonctions d'amortissement utilisées.

### 3.4.2 Modèle $k - \varepsilon$ réalisable

Les conditions de réalisabilité expriment que les fluctuations de vitesse au carré doivent être positives et que les corrélations croisées doivent vérifier l'inégalité de Schwartz. Appliquées à un modèle de turbulence  $k - \varepsilon$ , les conditions pour assurer la réalisabilité dans un écoulement tridimensionnel sont (voir [12]) :

$$C_\mu \leq \frac{1}{s\sqrt{3}} \quad ; \quad s = \frac{k}{\varepsilon} S \quad ; \quad S^2 = 2S_{ij}S_{ij} - \frac{2}{3}S_{kk}^2$$

Ceci permet d'obtenir un modèle faiblement non-linéaire avec un coefficient  $C_\mu$  fonction du tenseur de déformation adimensionné :

$$C_\mu = \min \left( C_\mu^o, \frac{c}{s\sqrt{3}} \right) \quad \text{avec} \quad c \leq 1 \quad \text{et} \quad C_\mu^o = 0.09$$

### 3.4.3 Le modèle $k - \varepsilon$ RNG (1986)

Ce modèle, dû aux travaux de Yakhot et Orszag [66, 67], est une amélioration du modèle  $k - \varepsilon$  par l'utilisation de techniques basées sur la théorie des groupes de renormalisation (mécanique quantique). L'idée générale de cette théorie est d'abord de se placer dans l'espace de Fourier. On raisonne alors sur les nombres d'onde, les grandes échelles correspondent aux petits nombres d'onde et les petites échelles aux grands nombres d'ondes. Le champ de vitesse est décomposée en bandes de nombres d'onde. Un procédé itératif est utilisé pour calculer l'influence de chaque bande en fonction des nombres d'onde plus faibles adjacents. Ce procédé permet donc d'exprimer les effets des grands nombres d'onde (les petites échelles non résolues) en fonction des plus faibles. De proche en proche, on élimine les bandes de nombres d'onde élevés que l'on peut relier aux petits nombres d'ondes correspondant aux échelles résolues.

On repasse ensuite dans l'espace physique et on peut obtenir de manière "analytique" les modèles de turbulence que l'on souhaite. Les calculs analytiques obtenus par cette approche donnent un modèle avec des constantes différents de celles du modèle standard, ainsi que la présence d'une terme supplémentaire  $R$  dans l'équation pour  $\varepsilon$  :

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \left[ \rho \tilde{\varepsilon} \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \operatorname{grad} \tilde{\varepsilon} \right] = c_{\varepsilon_1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - \rho c_{\varepsilon_2} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + E - R$$

La détermination des constantes du modèle se fait de manière analytique sans avoir recours à des expériences comme le cas du modèle normal. Cependant, le nouveau terme  $R$ , non déduit de la théorie RNG, est "bricolé". La formulation originale, fonction du taux de déformation de l'écoulement moyen  $\eta$ , s'écrit :

$$R = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k} \quad \text{avec} \quad \eta = S \frac{k}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad S = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}$$

Avec  $C_\mu = 0.085$ ,  $\beta = 0.012$ ,  $\eta_0 = 4.38$ ,  $c_{\varepsilon_2} = 1.68$ ,  $c_{\varepsilon_1} = 1.42$ ,  $\sigma_k = \sigma_\varepsilon 0.719$ .

On constate pour ce modèle :

- une dépendance de la solution à la modélisation du terme  $R$ .
- une amélioration des résultats aux effets de déformation rapide de l'écoulement par rapport au modèle standard. Dans les zones à forte déformation (lorsque  $\eta$  est grand), le terme  $R$  amène une contribution négative au terme en  $c_{\varepsilon_2}$  ce qui entraîne une diminuation de la destruction de la dissipation  $\varepsilon$  et donc de  $k$  et éventuellement de la viscosité turbulente  $\mu_t$ .

### 3.4.4 Modèle $k - \varepsilon$ compressible

Le modèle  $k - \varepsilon$  compressible développé par Sarkar tient compte de la compressibilité de la turbulence dans le cas où le nombre de Mach est supérieur à 5. En turbulence compressible, deux nouveaux termes interviennent dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente : un terme de corrélation pression-dilatation  $\Pi$  et le terme de dissipation dilatationnelle  $\varepsilon_d$ . L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente en compressible s'écrit donc :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \operatorname{div} \left[ \rho k \vec{V} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \operatorname{grad} k \right] = P_k - \rho \varepsilon - D + \Pi$$

avec

$$\Pi = \overline{p' \frac{\partial u''}{\partial x_i}} = \overline{p' d'} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d$$

Sarkar a proposé une fermeture pour ces deux nouveaux termes en se basant sur le nombre de Mach turbulent comme indicateur de la compressibilité de la turbulence. La fermeture de Sarkar s'exprime :

$$\begin{aligned} \varepsilon_d &= \alpha_1 M_t^2 \varepsilon_s \\ \overline{p' d'} &= -\alpha_2 P M_t + \alpha_3 \varepsilon_s M_t^2 \\ \text{ou } \overline{p' d'} &= -\alpha_4 P M_t^2 + \alpha_5 \varepsilon_s M_t^2 \end{aligned}$$



avec

$$M_t = \frac{\sqrt{2k}}{a} \quad \alpha_1 = 0.5 \quad \alpha_2 = 0.15 \quad \alpha_3 = 0.2 \quad \alpha_4 = 0.4 \quad \alpha_5 = 0.2$$

### 3.4.5 Le modèle $k - \omega$ de Wilcox (1988)

Ce modèle [64] présente le grand avantage de ne pas comporter de fonction d'amortissement dans les seconds membres des équations de transport ni dans l'expression de la viscosité turbulente. Par contre, il est très sensible à la condition limite à imposer sur  $\omega$  aux frontières des couches limites et des sillages.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho k \vec{V} - (\mu + \sigma^* \mu_t) \text{grad } k \right] &= P_k - \beta^* \rho k \omega \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho \omega \vec{V} - (\mu + \sigma \mu_t) \text{grad } \omega \right] &= \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 \\ \text{avec} \quad \mu_t &= \frac{\rho k}{\omega} \end{aligned}$$

Les constantes :

$$\alpha = \frac{5}{9} \quad ; \quad \beta = \frac{3}{40} \quad ; \quad \beta^* = 0,09 \quad ; \quad \sigma = \sigma^* = 0,5$$

La condition limite à la paroi pour la dissipation spécifique est :

$$\lim_{d \rightarrow 0} \omega = \frac{6\nu}{\beta d^2}$$

### 3.4.6 Le modèle $k - \omega$ compressible

Le modèle  $k - \omega$  compressible de Wilcox s'inspire des corrections de Sarkar pour le modèle  $k - \varepsilon$ . La compressibilité de la turbulence est prise en compte par la modification des coefficient  $\beta$  et  $\beta^*$ .

$$\begin{aligned} \beta_c^* &= \beta^* (1 + \xi^* F[M_t]) \\ \beta_c &= \beta - \beta^* \xi^* F[M_t] \end{aligned}$$

La fonction  $F$  s'écrit :

$$F[M_t] = \begin{cases} M_t^2 - M_{t0}^2 & M_t > M_{t0} \\ 0 & M_t < M_{t0} \end{cases}$$

Les coefficients sont :

$$\beta^* = 0,09 \quad \beta = \frac{3}{40} \quad \xi^* = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1.5 \end{array} \right\} \quad M_{t0} = 0.25$$

### 3.4.7 Le modèle $k - \omega$ de Menter avec correction SST (1992)

Il s'agit d'un modèle bicouche,  $k - \omega$  de Wilcox et  $k - \varepsilon$  de Launder-Sharma, développé pour remédier au problème de sensibilité à la valeur de  $\omega_e$  à l'extérieur des couches limites. Menter [32] espère ainsi conserver le bon comportement du modèle de Wilcox dans la région interne des couches limites et obtenir une condition limite insensible au niveau de  $\omega_e$ . Ceci constitue le modèle BSL de Menter :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho k \vec{V} - (\mu + \sigma^* \mu_t) \text{grad } k \right] &= P_k - \beta^* \rho k \omega \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \text{div} \left[ \rho \omega \vec{V} - (\mu + \sigma \mu_t) \text{grad } \omega \right] &= \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \rho \omega^2 \\ &+ 2 \frac{\rho \sigma \omega}{\omega} \text{grad } k \cdot \text{grad } \omega \end{aligned}$$

Menter ajoute en plus une correction dite SST pour "Shear Stress Transport". Elle repose sur la constatation que pour les modèles de turbulence à deux équations de transport utilisant la notion de viscosité turbulente, le rapport de la contrainte de cisaillement  $\tau$  à la valeur de  $\rho k$  est égale à :

$$\frac{\tau}{\rho k} = \sqrt{C_\mu \frac{P_k}{\varepsilon}} \quad ; \quad C_\mu = 0,09$$

alors qu'expérimentalement ce rapport est plutôt  $\tau/\rho k \simeq \sqrt{C_\mu} = 0,3$  dans une grande partie de la couche limite. Dans le cas d'écoulements en présence de gradients de pression positifs, le rapport production sur dissipation peut être nettement supérieur à 1 ce qui conduit à surestimer la contrainte de cisaillement et donc, indirectement, à sous-estimer l'effet des gradients de pression positifs.

Pour pallier cette incohérence, Menter [34] propose de limiter le coefficient de viscosité turbulente dans la région externe des couches limites :

$$\mu_t = \frac{\rho k / \omega}{\max\left(1, \frac{\Omega F_2}{a_1 \omega}\right)}$$

La fonction  $F_1$  permet de passer du modèle  $k - \omega$  à la paroi ( $F_1 = 1$ ) au modèle  $k - \varepsilon$  à l'extérieur ( $F_1 = 0$ ) et la fonction  $F_2$  limite la valeur de la viscosité turbulente. Elles sont données par :

$$\begin{aligned} F_1 = \tanh(\zeta^4) \quad & \text{avec} \quad \zeta = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right); \frac{4\rho\sigma_\omega k}{D_\omega y^2} \right] \\ & \text{et} \quad D_\omega = \max \left( \frac{\rho\sigma_\omega}{\omega} \text{grad } k \cdot \text{grad } \omega; 10^{-20} \right) \\ F_2 = \tanh(\iota^2) \quad & \text{avec} \quad \iota = \max \left( 2 \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right) \end{aligned}$$

Les constantes, indicées 1 pour le modèle de Wilcox et 2 pour le modèle de Launder Sharma s'écrivent :

$$\begin{aligned} \phi &= F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2 \\ \sigma_1^* &= 0,5 \quad ; \quad \sigma_1 = 0,5 \quad ; \quad \beta_1 = 0,075 \quad ; \quad \sigma_{\omega_1} = 0 \\ \sigma_2^* &= 0,85 \quad ; \quad \sigma_2 = 0,856 \quad ; \quad \beta_2 = 0,0828 \quad ; \quad \sigma_{\omega_2} = 0,856 \\ \kappa &= 0,41 \quad ; \quad a_1 = \sqrt{\beta^*} = 0,3 \quad ; \quad \gamma_i = \frac{\beta_i}{\beta^*} - \sigma_i \frac{\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad \text{pour } i=1,2 \end{aligned}$$

Remarque : la correction SST de Menter peut être appliquée à n'importe quel modèle de turbulence à deux équations  $k - \Psi$ .

### 3.4.8 Formules de conversion

Elles reposent sur la définition de la viscosité turbulente pour chacun des modèles, en négligeant les corrections de faible nombre de Reynolds de turbulence :

$$\begin{aligned} k - \varepsilon &: \mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon \\ k - \omega &: \mu_t = \rho k / \omega \\ Spalart - Allmaras &: \mu_t = \rho \tilde{\nu} \end{aligned}$$

### 3.5 Modèles non-linéaires

Les modèles classiques souffrent souvent des limitations imposées par l'hypothèse de Boussinesq. Cet état de fait conduit naturellement à s'intéresser à une expression non-linéaire plus générale des tensions de Reynolds et à la formulation de nouvelles hypothèses pour la fermeture du système au second ordre. Les modèles RSM  $R_{ij} - \varepsilon$  nécessitent la résolution de 7 équations de transport ce qui est en général lourd à mettre en oeuvre et pose des problèmes de convergence et robustesse.

#### 3.5.1 Modèles ARSM

Les modèles alébriques anisotropes ARSM sont une simplification des modèles RSM obtenus au moyen d'un hypothèse d'équilibre. Cette hypothèse conduit à un système de cinq équations indépendantes, implicites en  $R_{ij}$  ce qui permet de fermer le système. Le passage à une forme explicite EARSM (Explicit Algebraic RSM) en supposant une linéarité entre le tenseur de pression/dilatation et le tenseur d'anisotropie permet encore de simplifier l'expression.

On introduit le tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$  et le tenseur d'anisotropie adimensionné  $b_{ij}$  définis par :

$$a_{ij} = R_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij} \quad \text{et} \quad b_{ij} = \frac{a_{ij}}{2k}$$

Pour des fluides homogènes turbulents en équilibre, la dérivée particulaire du tenseur d'anisotropie adimensionné est supposé nulle c'est-à-dire les termes de diffusion par effets de viscosité, de pression et de turbulence sont négligés. Cette hypothèse peut s'appliquer aux écoulements à turbulence quasi homogène. On obtient alors une formulation générale suivante :

$$(P_k - \varepsilon)b_{ij} = -\frac{2}{3}kS_{ij} - k(b_{ij}S_{ij} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}) - k(b_{ik}\Omega_{ik} + b_{jk}\Omega_{ik}) + \frac{1}{2}\Pi_{ij}$$

Avec  $\Pi_{ij} = \phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$  le gradient de pression-vitesse. A ce stade, la modèle est implicite. La passage à une forme explicite suppose que le tenseur  $\Pi$  soit linéaire en  $b$ .

La forme linéaire la plus générale s'écrit :

$$\Pi_{ij} = C_1\varepsilon b_{ij} + C_2kS_{ij} + C_3k(b_{ij}S_{ij} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}) + C_4k(b_{ik}\Omega_{ik} + b_{jk}\Omega_{ik})$$

Il existe plusieurs jeux de valeurs pour les coefficients  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  qui peuvent être constant où dépendre des invariants de  $b_{ij}$  et du rapport  $P_k/\varepsilon$  (voir par exemple le modèle de Speziale et Gatski [57]).

#### 3.5.2 Modèles $k - \varepsilon$ non-linéaires

Ces modèles introduisent une relation non-linéaire pour le calcul du tenseur de Reynolds et permettent ainsi de prendre en compte des effets d'anisotropie (courbure, swirl) ainsi que de calculer la transition laminaire/turbulent. Une formulation s'écrit :

$$\begin{aligned} -\rho\overline{u'_i u'_j} &= \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} \\ &+ A_3 \frac{\rho k^3}{2\varepsilon^2} \left[ \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right] \\ &+ A_5 \frac{\rho k^4}{2\varepsilon^3} \left[ \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_p} \frac{\partial U_p}{\partial x_j} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_p} \frac{\partial U_p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_p} \frac{\partial U_p}{\partial x_k} \delta_{ij} \right. \\ &- 0.5 \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \delta_{ij} \right) \\ &\left. - 0.5 \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned}$$

Les coefficients du modèle sont déterminés par la théorie de la distorsion rapide, des contraintes de réalisabilité et des données expérimentales. Et ajout des fonctions d'amortissement de la turbulence en proche paroi.

### 3.6 Modèles au second ordre - RSM

Les modèles RSM (Reynolds Stress Model) reposent sur la résolution des équations de transport des tensions de Reynolds. Ces équations de transport sont obtenues en soustrayant de l'équation de  $u'_i u'_j$  l'équation de  $U_i U_j$  et en prenant la moyenne de Reynolds (ou de Favre) du résultat. L'équation s'écrit alors sous forme compacte :

$$C_{ij} = P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + Dt_{ij} + Dp_{ij} + D\nu_{ij}$$

Cette équation comprend deux types de terme : ceux exprimables sous forme de divergence de tenseurs qui représentent le transport d'une quantité (termes  $Dt_{ij}$ ,  $Dp_{ij}$  et  $D\nu_{ij}$  dont l'intégrale reste nulle sur l'ensemble de l'écoulement) et ceux qui jouent le rôle de sources et de puits (termes  $P_{ij}$ ,  $\phi_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  dont l'intégrale est non nulle).

Les différents termes sont :

- $C_{ij}$  : terme de convection.
- $P_{ij}$  : production résultant du travail des tensions de Reynolds.
- $\phi_{ij}$  : terme de redistribution par la pression.
- $\varepsilon_{ij}$  : terme de dissipation due à la viscosité du fluide.
- $Dt_{ij}$  : diffusion turbulente qui est une convection au niveau des agitations turbulentes.
- $Dp_{ij}$  : diffusion turbulente due aux fluctuations de pression.
- $D\nu_{ij}$  : diffusion moléculaire.

A part la production, tous ces termes nécessitent d'être modélisés. Il est aussi nécessaire de résoudre l'équation de transport exacte pour  $\varepsilon$  et d'introduire des modèles à bas nombre de Reynolds de turbulence (fonctions d'amortissement de la turbulence).

Les principales qualités d'un modèle RSM sont ses capacités à prédire des écoulements différents les uns des autres (plus grande universalité). Il permet une meilleure modélisation physique de l'écoulement puisqu'il prend en compte l'anisotropie au voisinage de la paroi.

L'inconvénient majeur de ces modèles est le coût en temps de calcul et en mémoire car ils requièrent la résolution de 6 nouvelles équations. Un autre défaut est le manque de robustesse dans la résolution numérique.

Une alternative peut être l'utilisation de modèles ARSM (Algebraic Reynolds Stress Model) où les tensions de Reynolds sont obtenues à partir d'expressions algébriques déduites de leurs équations de transport.

### 3.7 Aspects thermiques

Il existe différentes modélisations du flux de chaleur turbulent. Plusieurs démarches sont principalement utilisées :

- a) Modèle algébrique basé sur une loi de Fourier turbulente.
- b) Modèle à équation de transport basé sur une loi de Fourier turbulente.
- c) Résolution des équations de transport du flux de chaleur turbulent (modèle au second ordre équivalent aux modèles RSM) ou utiliser un modèle algébrique ARSM.

### 3.7.1 Modèle algébrique

Ce modèle permet de relier le flux de chaleur turbulent au gradient de température moyenne par une loi de Fourier turbulente. Les composantes du vecteur flux de chaleur turbulent  $q_i^t$  vérifient :

$$q_i^t = -\rho C_p \alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

où  $\alpha_t$  est la diffusivité thermique turbulente (de même dimension que la viscosité turbulente  $\nu_t$ ). Il reste alors à modéliser le scalaire  $\alpha_t$ .

Les codes du commerce utilisent principalement une modélisation algébrique de  $\alpha_t$  basée sur une analogie avec les phénomènes moléculaires où la diffusivité est proportionnelle à la viscosité  $\mu$  selon l'expression  $P_r = \frac{\nu}{\alpha}$  où  $P_r$  désigne le nombre de Prandtl moléculaire. Une loi analogue est utilisée pour lier  $\alpha_t$  et  $\nu_t$  dont le facteur de proportionnalité est appelé nombre de Prandtl turbulent  $P_{rt}$  :

$$P_{rt} = \frac{\nu_t}{\alpha_t}$$

Généralement, le nombre  $P_{rt}$  est pris égal 1. Cette relation implique que les phénomènes cinématiques et thermiques possèdent la même échelle de vitesse. Ceci semble cohérent puisque les grosses structures porteuses de l'énergie cinétique turbulente transporte également l'énergie thermique turbulente.

Remarque : des résultats expérimentaux ont montré que le nombre  $P_{rt}$  n'était pas constant et pouvait varier fortement près des parois dans des cas avec transferts de chaleur. Un modèle plus sophistiqué peut s'avérer nécessaire pour des calculs présentant de forts gradients thermiques.

### 3.7.2 Modèle à équation de transport

Pour s'affranchir d'une analogie complète entre les champs cinématique et thermique, les échelles de vitesse et de temps servant à construire le scalaire  $\alpha_t$  seront bâties à la fois sur des grandeurs cinématiques et thermiques turbulentes. Comme les structures porteuses de l'énergie cinétique de turbulence sont aussi celles qui transportent l'énergie thermique turbulente, on choisit la même échelle pour ces phénomènes à savoir  $u \sim \sqrt{k}$ . Par conséquent, il est nécessaire de résoudre les équations de transport pour  $k$  et  $\varepsilon$ .

L'échelle de temps choisie tient à la fois compte de l'échelle de temps caractéristique des phénomènes dissipatifs cinématiques :  $\mathcal{T} = \frac{k}{\varepsilon}$  et de l'échelle de temps caractéristique des phénomènes dissipatifs thermiques :

$\mathcal{T}_\theta = \frac{\overline{T'^2}}{2\varepsilon_\theta}$ . On note  $\theta$  les fluctuations de température  $T'$  et la quantité  $\overline{\theta^2}$  s'appelle la variance de la fluctuation de température. Le temps  $\mathcal{T}_\theta$  représente le temps mis pour dissiper la variance de la fluctuation de température. Son taux de dissipation,  $\varepsilon_\theta$ , est défini par :

$$\rho\varepsilon_\theta = \alpha \overline{\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}}$$

Les échelles  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}_\theta$  apparaissent avec les poids respectifs  $m$  et  $p$  dans l'expression de la diffusivité thermique turbulente :

$$\alpha_t = C \rho k \mathcal{T}^m (2\mathcal{T}_\theta)^p$$

avec  $m + p = 1$ . Les valeurs de  $m$  et  $p$  diffèrent selon les modèles, ce qui permet de donner plus ou moins de poids à l'un des deux phénomènes. Cette relation implique la résolution de deux nouvelles équations de transport : celles de  $\overline{\theta^2}$  et de  $\varepsilon_\theta$  (soit au total 4 équations de transport avec  $k$  et  $\varepsilon$ ).

Il existe plusieurs modélisations de ces équations de transport qui nécessitent, comme pour la modélisation cinématique, des termes à bas nombre de Reynolds de turbulence.

## Chapitre 4

# ÉCOULEMENTS INSTATIONNAIRES

### 4.1 URANS

Les simulations numériques de type URANS (Unsteady RANS) soulèvent de nombreuses questions. Cette approche consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes moyennées instationnaires, sans modification du modèle de turbulence par rapport au cas stationnaire. Le traitement statistique de Reynolds induit une séparation d'échelles à basse fréquence et ne permettrait de représenter au mieux que des phénomènes instationnaires basses fréquences (inférieure au kHz). L'approche URANS sous-entend ainsi qu'il y a un découplage entre l'instationnarité du champ moyen et de la turbulence. D'autre part, l'hypothèse d'ergodicité de la turbulence (qui permet de remplacer la moyenne d'ensemble par une moyenne temporelle) n'est plus valide lorsque l'écoulement moyen est instationnaire. A l'heure actuelle, il n'existe pas de consensus satisfaisant sur la décomposition URANS et du filtrage associé. Une vision des choses est la suivante : la décomposition URANS peut s'interpréter comme l'application **d'un filtre spatio-temporel** implicite aux variables instantanées, ce filtre étant impliqué par l'introduction d'un modèle de turbulence dans les équations. La largeur du filtre est de l'ordre de grandeur de l'échelle intégrale (de longueur ou de temps). L'idée essentielle est que ce filtre doit extraire les structures organisées à grande échelle pour les calculer explicitement, tandis que la fluctuation, représentative de l'agitation turbulente, est modélisée.

Un autre problème provient du fait que les modèles classiques de type  $k - \varepsilon$  sont fondés sur un équilibre spectral de la turbulence (théorie de Kolmogorov) et sont calibrés principalement pour des écoulements stationnaires. La présence de structures organisées (dites cohérentes), en écoulement instationnaire, peut rompre cet équilibre. De plus, il est souvent observé que les modèles classiques produisent trop de viscosité turbulente, ce qui a pour effet de modifier la topologie de l'écoulement, de réduire les décollements et de limiter le développement des instationnarités. Plusieurs solutions sont envisageables pour tenter de réduire la viscosité turbulente : correction SST de Menter (valable uniquement pour des écoulements 2D), condition de réalisabilité. Une autre possibilité est d'employer des modèles de turbulence plus sophistiqués qui peuvent prendre en compte des déséquilibres de la turbulence (RSM, modèles non linéaires) ou d'utiliser d'autres approches : la simulation des grandes échelles (LES) ou les approches hybrides RANS/LES comme la DES qui couple un calcul RANS près des parois avec un calcul LES.

### 4.2 Detached Eddy Simulation (DES) et variantes

#### 4.2.1 Version initiale de la DES

La DES (Detached Eddy Simulation) a été développée par Spalart et al. en 1997 pour des écoulements aérodynamiques massivement décollés [56]. Ce type d'approche hybride RANS/LES connaît un réel engouement car il permet de fortement réduire le coût de calcul par rapport à une simulation LES à grand nombre de

Reynolds. L'idée est de combiner, sous un même modèle, les avantages des deux méthodes précitées. Les structures "attachées" à la paroi sont traitées en URANS et celles "détachées" de la paroi le sont en LES. Cette approche a donné des résultats encourageants autour de différentes configurations (cylindre, aile, avion de combat).

Le modèle fournit une viscosité turbulente qui dépend, dans certaines régions, de la discrétisation spatiale. Les auteurs proposent une simple modification dans l'équation de transport du modèle de Spalart-Allmaras en remplaçant dans le terme de destruction, la distance de la plus proche paroi  $d$  par la grandeur  $\tilde{d}$  définie :

$$\tilde{d} = \min(d, C_{DES}\Delta)$$

La valeur de la constante  $C_{DES}$  a été déterminée par Shur, dans le cas d'une turbulence isotrope en décroissance, à 0.65. Dans le cas de couches limites turbulentes, la grille de maillage est le plus souvent anisotrope et l'échelle de longueur  $\Delta$  est alors définie comme étant la longueur maximale de la maille dans les trois directions :

$$\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$$

Par suite, au voisinage des parois,  $d \ll \Delta$  et l'on retrouve le modèle classique de Spalart-Allmaras. Lorsque  $\Delta \ll d$ , la taille de maille devient l'échelle de longueur du modèle qui évolue vers un modèle sous-maille. La zone intermédiaire dans laquelle  $d \simeq C_{DES}\Delta$  est une zone de transition entre les modes URANS et LES. Spalart utilise le terme de "zone grise" pour désigner cette région dans laquelle le modèle bascule d'un mode à l'autre. A priori, la transition entre les deux zones doit être assez lisse grâce à la diffusion turbulente.

L'équation de transport pour la viscosité turbulente s'écrit :

$$\frac{\partial \nu_t}{\partial t} + \text{div} \left[ \vec{V} \nu_t - \frac{1}{\sigma} (\nu + \nu_t) \text{grad} \nu_t \right] = c_{b1} \tilde{S} \nu_t + \frac{c_{b2}}{\sigma} \text{grad} \nu_t \cdot \text{grad} \nu_t - c_{w1} \left( \frac{\nu_t}{C_{DES}\Delta} \right)^2$$

En moyennant sur tout le domaine de calcul, la contribution du terme de diffusion disparaît du fait de l'homogénéité. On note  $\langle . \rangle$  pour la moyenne temporelle et  $\langle ' \rangle$  pour les fluctuations autour de cette moyenne, en assimilant la dérivée convective à une dérivée temporelle, l'équation devient :

$$\frac{d \langle \nu_t \rangle}{dt} = C_{b1} (\langle S \rangle \langle \nu_t \rangle + \langle S' \nu_t' \rangle) - c_{w1} \left( \frac{\langle \nu_t \rangle}{C_{DES}\Delta} \right)^2$$

Puis en négligeant le membre de gauche et le terme de corrélation  $\langle S' \nu_t' \rangle$ , l'équilibre entre la production et la destruction conduit à :

$$\langle \nu_t \rangle = C_{DES}^2 \frac{C_{b1}}{c_{w1}} \Delta^2$$

On retrouve donc le modèle de Smagorinsky mais avec une constante plus faible ( $0,133^2$  au lieu de  $0,18^2$ ). Toutefois, la comparaison avec le modèle de Smagorinsky ne peut être faite complètement car on n'a pas de preuve que la taille caractéristique de maille  $\Delta$  soit réellement la longueur de coupure  $\Delta_c$  du modèle.

La DES est proche d'une simulation des grandes échelles et tend vers une DNS pour un maillage infiniment fin, puisqu'alors  $\Delta \ll d$  et  $\tilde{d} = C_{DES}\Delta \rightarrow 0$ , ie le terme de destruction tend vers l'infini d'où  $\mu_t \rightarrow 0$ .

Remarque : On ne peut parler de convergence en maillage en DES puisque le raffinement en maillage change le rapport entre la part résolue et la part modélisée.

$k - \epsilon$  DES

Les équations de transport pour  $k$  et  $\epsilon$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_l k - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_l} \right] &= \bar{\rho} P_k - \bar{\rho} \epsilon_T \\ \frac{\partial \bar{\rho} \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_l \epsilon - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right] &= c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \bar{\rho} P_k - \bar{\rho} c_{\epsilon 2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \nu_t &= k^{1/2} \ell_T \\ \ell_T &= \min \left[ C_\mu \frac{k^{3/2}}{\epsilon}; C_k \Delta \right] \\ \epsilon_T &= \max \left[ \epsilon; C_\epsilon \frac{k^{3/2}}{\Delta} \right] \end{aligned}$$

$k - \omega$  SST DES

Dans ce cas, le terme de dissipation  $\beta^* \rho k \omega$  de l'équation pour  $k$  devient :

$$\beta^* \rho k \omega \rightarrow \beta^* \rho k \omega F_{DES}$$

avec :

$$F_{DES} = \max \left[ \frac{\ell_T}{C_{DES} \Delta} (1 - F_S); 1 \right]$$

$\ell_T = \frac{k^{1/2}}{\beta^* \omega}$ . La fonction  $F_S$  évite le déclenchement du mode LES en couche limite,  $F_S$  est prise égale à  $F_1$  ou  $F_2$ .

4.2.2 Grid induced separation

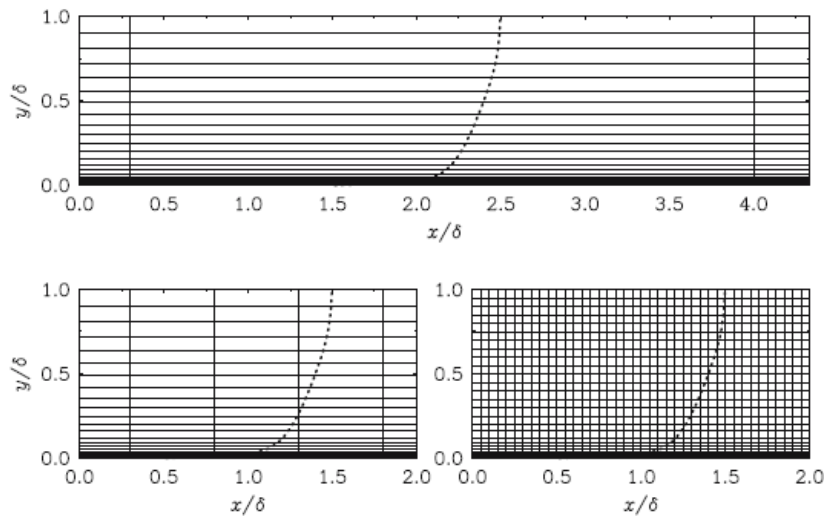


FIGURE 4.1 – Différents types de maillage de proche paroi.



La zone intermédiaire dans laquelle  $d \simeq C_{DES}\Delta$  est une zone de transition entre les modes URANS et LES. La topologie du maillage de proche paroi est donc importante pour bien gérer la transition vers le mode LES. Dans certains cas, selon le rapport d'aspect des mailles en zone de proche paroi, la taille de maille dans cette zone est suffisamment petite pour affecter le limiteur de la DES mais trop grande pour supporter une simulation LES. Il se produit alors une chute des contraintes turbulentes conduisant dans la plupart des cas à un décollement prématuré et artificiel de la couche limite - on parle de "grid induced separation" ou "modeled stress depletion" (MSD) - et à des résultats dégradés par rapport à une simulation URANS. La figure 4.1 présente trois types de maillage en zone de proche paroi amenant une transition vers le mode LES plus ou moins rapide. Le cas le plus favorable est obtenu avec des mailles de proche paroi très allongées ce qui garanti une grande valeur de l'échelle  $\Delta$  et un mode RANS près de la paroi.

### 4.2.3 Delayed Detached Eddy Simulation (DDES)

La DDES [55] a été développée pour pallier au même problème dit de "grid induced separation". Cependant, la DDES ne demande pas de spécifier les zones RANS et LES à priori.

L'application de la DDES nécessite de modifier l'expression du paramètre  $r$  du modèle SA.

$$r_d = \frac{\nu_t + \nu}{\sqrt{U_{i,j}U_{i,j}\kappa^2 d^2}} \quad \text{avec} \quad \nu_t + \nu = \tilde{\nu}$$

La distance à la plus proche paroi  $d$  intervenant dans le terme de destruction est remplacée par la grandeur  $\tilde{d}$  définie par :

$$\tilde{d} = d - f_d \max(0, d - C_{DES}\Delta)$$

où  $f_d$  est une fonction qui tend vers 1 en zone LES et est nulle partout ailleurs. Cette fonction est raide et permet un passage rapide du mode RANS au mode LES :

$$f_d = 1 - \tanh\left([8r_d]^3\right) \quad (4.1)$$

### 4.2.4 Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES)

#### Première version : Deck (2005)

La Zonal Detached Eddy Simulation [9] a été développée pour éviter le déclenchement prématuré du mode LES en couche limite. Cette méthode consiste à préciser les zones RANS et les zones LES. Le maillage dans la zone LES se compose de cellule quasi-cubique. Par conséquent, la longueur  $\Delta$  est calculée comme :  $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ . De plus, les fonctions de proche paroi sont modifiées :

$$f_{v1} = 1, \quad f_{v2} = 0, \quad f_w = 1$$

#### Version améliorée : Deck (2012)

Des problèmes mis en évidence dans le cas de l'utilisation de l'EDDES et une volonté de construire un modèle capable de résoudre différents types d'écoulements ont poussé au développement d'une version améliorée de la ZDES [10]. L'objectif est de pouvoir simuler les 3 classes d'écoulements suivants :

- Ecoulements décollés imposés par la géométrie (I)
- Ecoulements décollés par la présence d'un gradient de pression adverse sur une surface courbe (II)
- Ecoulements décollés mais fortement influencés par la dynamique de la couche limite amont (III)

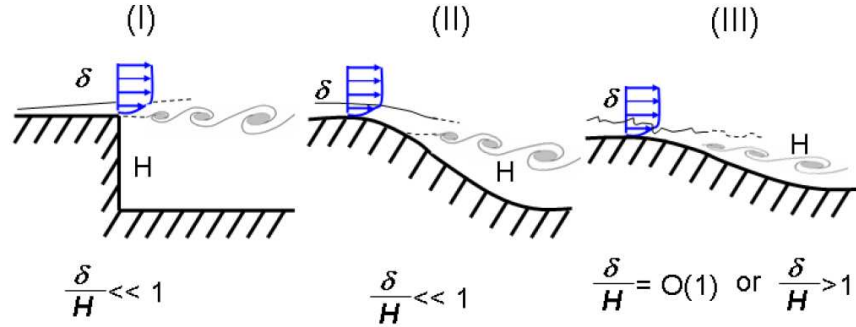


Fig. 2 Classification of typical flow problems. I: separation fixed by the geometry, II: separation induced by a pressure gradient on a curved surface, III: separation strongly influenced by the dynamics of the incoming boundary layer.

FIGURE 4.2 – Les 3 classes d'écoulements (extrait de [10])

Pour cela, on définit deux senseurs : *ides* et *imode*. Le senseur *ides* permet de choisir entre le mode RANS et le mode DES. Le senseur *imode* permet de choisir parmi 3 types de DES à appliquer. L'ensemble de ces choix influence le calcul de la distance  $\tilde{d}$  dans le modèle de Spalart-Allmaras. On a donc l'ensemble des combinaisons suivantes :

$$\tilde{d} = \begin{cases} d_w & \text{if } ides = 0 \\ \tilde{d}^I & \text{if } ides = 1 \text{ et } imode = 1 \\ \tilde{d}^{II} & \text{if } ides = 1 \text{ et } imode = 2 \\ \tilde{d}^{III} & \text{if } ides = 1 \text{ et } imode = 3 \end{cases}$$

En appliquant la formule pour chaque domaine du maillage :

$$\tilde{d}(ndom) = (1 - ides(ndom)) d_w + ides(ndom) \tilde{d}^{I \text{ ou } II \text{ ou } III}$$

avec  $d_w$  la distance à la paroi et  $\tilde{d}^{I \text{ ou } II \text{ ou } III}$  les distances hybrides définies par :

- mode *I* :

$$\tilde{d}^I = \min(d_w ; C_{DES} \tilde{\Delta}^I)$$

avec  $\tilde{\Delta}^I = \Delta_{vol} \text{ ou } \Delta_\omega$  qui seront définies plus loin. De plus dans ce cas, les fonctions de proche paroi du modèle sont modifiées en mode LES :

$$f_{v1} = 1 \quad f_{v2} = 0 \quad f_w = 1$$

- mode *II* :

$$\tilde{d}^{II} = d_w - f_d \max(0, d_w - C_{DES} \tilde{\Delta}^{II})$$

avec  $f_d$  la fonction définie dans le cadre de la DDES. La taille de maille  $\tilde{\Delta}^{II}$  est calculée par :

$$\tilde{\Delta}^{II} = (0,5 + \text{sign}(0,5 ; f_d - f_{d0})) \Delta_{max} + (0,5 - \text{sign}(0,5 ; f_d - f_{d0})) (\Delta_{vol} \text{ ou } \Delta_\omega)$$

avec  $f_{d0} = 0,8$  et la fonction  $\text{sign}(a ; b)$  définie telle que :

$$\text{sign}(a ; b) = \begin{cases} +a & \text{if } b \geq 0 \\ -a & \text{if } b < 0 \end{cases}$$

- mode *III* :

$$\tilde{d}^{III} = \begin{cases} d_w & \text{si } d_w < d_w^{interface} \\ \tilde{d}^I & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

avec  $d_w^{interface}$  est l'altitude spécifiée par l'utilisateur correspondant à l'enclenchement du mode LES. L'utilisation de ce mode nécessite d'ensemencer l'écoulement en quantités turbulentes.

**Définition des différentes tailles de mailles  $\Delta_{max}$ ,  $\Delta_{vol}$  et  $\Delta_{\omega}$** 

La taille de maille  $\Delta_{max}$  correspond à la définition usuellement employée dans le cadre des calculs DES.

$$\Delta_{max} = \max(\Delta x; \Delta y; \Delta z)$$

La taille de maille  $\Delta_{vol}$  correspond à la définition usuellement employée dans le cadre des calculs LES et nécessite un maillage proche de l'isotropie.

$$\Delta_{vol} = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$$

La taille de maille  $\Delta_{\omega}$  correspond à la racine carré de la section normale à la direction de la vorticité  $\omega$ . On peut l'interpréter comme la nécessite pour capturer un tourbillon que le maillage soit dans la direction normale à la vorticité plus petit que la taille du tourbillon.

$$\Delta_{\omega} = \sqrt{\bar{S}_{\omega}}$$

avec  $\bar{S}_{\omega}$  la section moyenne de la cellule normale à la vorticité.

Une autre définition possible est :

$$\Delta_{\omega} = \sqrt{N_x^2 \Delta y \Delta z + N_y^2 \Delta x \Delta z + N_z^2 \Delta x \Delta y}$$

avec  $\mathbf{N} = \frac{\omega}{\|\omega\|}$  le vecteur unité donnant l'orientation de la vorticité  $\omega$ .

**Cas tests de validation**

3 cas tests ont été effectués pour montrer l'intérêt de cette nouvelle ZDES. Les 3 cas sont :

- Couche de mélange  $\leftrightarrow ides = 0$  et 1 avec  $\tilde{d}^I$
- Marche descendante  $\leftrightarrow ides = 1$  avec  $\tilde{d}^{II}$  partout
- Profil d'aile avec bec et volet  $\leftrightarrow ides = 0$  et 1 avec  $\tilde{d}^I$  et  $\tilde{d}^{II}$

**4.2.5 Extended DDES**

L'Extended DES consiste à marier la ZDES et la DDES en utilisant un critère de choix basé sur la fonction  $f_d$ . L'utilisateur fixe une valeur  $f_{d0} \in (0.75; 0.99)$  qui permettra le passage de la DDES à la ZDES. La nouvelle version s'écrit :

$$f_d < f_{d0} \begin{cases} \Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \\ f_{v1}, f_{v2}, f_w \text{ du modele SA} \end{cases}$$

$$f_d \geq f_{d0} \begin{cases} \Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \\ f_{v1} = 1, \quad f_{v2} = 0, \quad f_w = 1 \end{cases}$$

**4.2.6 Improve Delayed DES (IDDES)**

L'IDDES [50] consiste à superposer un mode DDES et un mode WMLES (Wall Model LES) sur un modèle de type RANS comme le modèle de Spalart-Allmaras ou le modèle Menter SST. Ce concept fait appel à une définition plus poussée de l'échelle de sous-maille  $\Delta$  :

$$\Delta = \min(\Delta_{max}, \max(C_w d_w, C_w \Delta_{max}, \Delta_{wn})) \quad \text{avec} \quad \Delta_{max} = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$$

avec  $C_w = 0.15$ ,  $d_w$  la distance à la paroi,  $\Delta_{wn}$  la taille de maille dans la direction normale à la paroi.

La branche DDES est identique à celle décrite ci-dessus avec la possibilité d'ajouter un terme supplémentaire  $\Psi$  permettant de compenser l'activation de termes bas-Reynolds en mode LES [55]. La formulation générale de l'échelle de longueur quel que soit le modèle RANS utilisé est :

$$l_{DDES} = l_{RANS} - f_d \max[0; (l_{RANS} - l_{LES})] \quad \text{avec} \quad l_{DES} = C_{DES} \Psi \Delta$$

Dans le cas du modèle SA,  $l_{RANS} = d_w$ .

La branche WMLES fait intervenir une échelle de longueur de raccordement RANS-LES. Le passage de l'échelle LES à l'échelle RANS s'effectue par l'intermédiaire de la fonction  $f_B$ , qui vaut 1 pour  $d_w < 0.5\Delta_{max}$ , et 0 quand la distance à la paroi  $d_w$  est supérieure à  $\Delta_{max}$ . Elle a pour expression :

$$f_B = \min \left[ 2 \exp(-9\alpha^2), 1.0 \right] \quad \text{avec} \quad \alpha = 0.25 - \frac{d_w}{\Delta_{max}}$$

L'échelle de longueur WMLES est définie par :

$$l_{WMLES} = f_B(1 + f_e)l_{RANS} + (1 - f_B)l_{LES}$$

La fonction  $f_e$  permet d'empêcher la forte réduction des tensions de Reynolds issue du mode RANS à la frontière entre le RANS et la LES afin de pallier les problèmes de concordance avec la loi log en couche limite. Cette fonction est passive dans les cas où le maillage utilisé est suffisamment fin pour permettre une résolution LES à la paroi et quand le modèle fonctionne en mode RANS.

$$f_e = \max(f_{e1} - 1, 0) \Psi f_{e2} \quad \text{et} \quad f_{e1}(d_w/\Delta_{max}) = \begin{cases} 2 \exp(-11.09\alpha^2) & \alpha \geq 0 \\ 2 \exp(-9.0\alpha^2) & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$f_{e2} = 1.0 - \max(f_t, f_l) \quad ; \quad f_t = \tanh \left[ (c_t^2 r_{dt})^3 \right] \quad ; \quad f_l = \tanh \left[ (c_l^2 r_{dl})^{10} \right]$$

avec  $c_t = 1.63$  et  $c_l = 3.55$  des constantes qui dépendent du modèle RANS utilisé. Les fonctions  $f_t$  et  $f_l$  sont construites pour agir comme des indicateurs de la présence d'une couche limite ; elles tendent vers 1 respectivement dans la zone logarithmique et dans la sous-couche visqueuse, et vers 0 ailleurs. Les quantités  $r_{dt}$  et  $r_{dl}$  sont définies par :

$$r_{dt} = \frac{\nu_t}{\kappa^2 d_w^2 \max \left[ \sqrt{U_{i,j} U_{i,j}}; 10^{-10} \right]} \quad ; \quad r_{dl} = \frac{\nu}{\kappa^2 d_w^2 \max \left[ \sqrt{U_{i,j} U_{i,j}}; 10^{-10} \right]}$$

On peut modifier légèrement la définition de l'échelle de longueur de la DDES pour permettre un passage de la branche DDES à la branche WMLES.

$$l_{DDES} = \tilde{f}_d l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d) l_{LES} \\ \tilde{f}_d = \max[1 - f_{dt}; f_B] \quad f_{dt} = 1 - \tanh \left( [8r_{dt}]^3 \right)$$

On obtient ainsi une échelle de longueur hybride de la forme :

$$l_{hyb} = \tilde{f}_d(1 + f_e)l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d)l_{LES}$$

### 4.3 Scale-Adaptive Simulation (SAS)

Menter et Egorov [38, 36, 37] ont proposés une approche "Scale-Adaptive" pour un modèle à deux équations de transport. Ces auteurs ont introduit un terme supplémentaire dans l'équation pour la deuxième variable ( $\varepsilon, \omega, l \dots$ ) basée sur l'échelle de longueur de von Karman  $L = \kappa \left| \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \right|$ . Cette dernière agit comme un senseur et permet d'ajuster la résolution des structures en URANS, ce qui permet d'avoir un comportement proche d'une LES dans les régions instationnaires. Le point de départ repose sur l'échelle de longueur intégrale de Rotta et du modèle  $k - kl$ .

#### 4.3.1 Description de la construction du modèle SAS

##### Modèle $k - kl$ de Rotta [48]

Au départ, Rotta définit, dans le cas d'une écoulement avec un cisaillement dominant dans la direction  $\vec{y}$ , une échelle de longueur  $l$  de la manière suivante :

$$kl = \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ii}(\vec{x}, r_y) dr_y$$

avec le tenseur de corrélation  $R_{ij}$  défini par :

$$R_{ij} = \overline{u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + r_y)}$$

Ce tenseur exprime la corrélation de vitesse entre un point fixe et un point se déplaçant suivant la direction  $\vec{y}$ .

Rotta obtient ensuite une équation de transport pour la quantité  $\Psi = kl$  en sommant le produit de l'équation de transport des fluctuations au point fixe par les fluctuations de vitesse au point mouvant avec le produit de l'équation de transport des fluctuations au point mouvant par les fluctuations de vitesse au point fixe. L'expression obtenue est intégrée suivant la direction  $r_y$  et moyennée :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} + \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial U(\vec{x} + r_y)}{\partial x} - \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x} R_{ii} dr_y \right]}_{\text{convection}} = \\ & \underbrace{-\frac{3}{16} \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} R_{21} dr_y - \frac{\mathbf{3}}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(\vec{x} + r_y)}{\partial y} \mathbf{R}_{12} d\mathbf{r}_y}_{\text{production}} \\ & \underbrace{+ \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r_k} (R_{(ik)i} - R_{i(ik)}) dr_y + \nu \frac{3}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 R_{ii}}{\partial r_k^2} dr_y}_{\text{destruction}} \\ & \underbrace{- \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ R_{(i2)i} + \frac{1}{\rho} (\overline{p'v'} + \overline{v'p'}) \right] dr_y - \nu \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\}}_{\text{diffusion}} \end{aligned}$$

Le premier indice se réfère toujours au point fixe. La direction du cisaillement dominant est alignée avec la direction  $\vec{y}$ ,  $U$  représente la vitesse d'ensemble dans la direction  $\vec{x}$ . Le terme intégrale du terme de convection implique des dérivées par rapport à  $x$  qui sont négligeables par rapport au terme en dérivée partielle par rapport à  $y$  présents dans le membre de gauche.

Le terme important dans cette équation de transport est le deuxième terme (en gras) du terme de production qui fait apparaître la dérivée de la vitesse du point mouvant.

$$I = -\frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(\vec{x} + r_y)}{\partial y} \mathbf{R}_{12} dr_y$$

La modélisation de ce terme est effectuée à l'aide d'un développement de Taylor dans la direction de déplacement du point mouvant (direction du cisaillement dominant). On obtient :

$$\frac{\partial U(\vec{x} + r_y)}{\partial y} = \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial y} + \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial y^2} r_y + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U(\vec{x})}{\partial y^3} r_y^2 + \dots$$

On peut donc réécrire le terme  $I$  :

$$I \approx \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} R_{12} dr_y + \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{12} r_y dr_y + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U(\vec{x})}{\partial y^3} \int_{-\infty}^{\infty} R_{12} r_y^2 dr_y + \dots$$

Le premier terme de cette expression peut être regroupé avec le terme de production. Le deuxième terme en dérivée seconde est considéré nul par Rotta car en écoulement homogène la distribution de  $R_{12}$  est symétrique donc  $R_{12} r_y$  est antisymétrique et l'intégrale de ce terme est donc nulle. Le terme dominant devient donc le terme en dérivée troisième. Rotta définit les expressions suivantes :

$$L_{12,1} = \frac{3}{16 \overline{u'v'}} \int_{-\infty}^{\infty} (R_{12} + R_{21}) dr_y$$

$$L_{12,n} = \left[ \frac{3}{16(n-1)! \overline{u'v'}} \int_{-\infty}^{\infty} R_{12} r_y^{n-1} dr_y \right]^{1/n}$$

Rotta modélise les termes  $L_{12,1} \tilde{\xi}_1 l$ , et  $L_{12,3}^3 = \tilde{\xi}_1 l^3$  en supposant que toutes les échelles de longueurs définies précédemment sont reliées à une seule échelle de longueur  $l$ .

Le terme de destruction est modélisé par :

$$\frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r_k} (R_{(ik)i} - R_{i(ik)}) dr_y + \nu \frac{3}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 R_{ii}}{\partial r_k^2} dr_y \approx \tilde{\xi}_3 k^{3/2}$$

Le terme de diffusion est modélisé par une approche de type gradient.

Le modèle k-kl s'écrit alors en formulation couche limite :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial U_j k}{\partial x_j} = P_k - c_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial U_j \Psi}{\partial x_j} = -\overline{u'v'} \left( \hat{\xi}_1 l \frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\xi}_2 l^3 \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} \right) - \hat{\xi}_3 k^{3/2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)$$

avec :

$$\Psi = kl \qquad \nu_t = c_\mu^{1/4} \frac{\Psi}{k^{1/2}} \qquad P_k = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y}$$

Les coefficients du modèle sont définis comme suit :

- $\hat{\xi}_1 = 1.2$  d'après des mesures de corrélation effectuées par Rose en écoulement cisailé homogène.
- $\hat{\xi}_3 = 0.11 - 0.13$  qui couvre l'intervalle du coefficient de Loitsianskii ( $\sigma = 2 - 4$ ) pour une décroissance turbulente isotrope.
- $\hat{\xi}_2$  est déterminée à partir des contraintes de raccord dans la zone logarithmique ( $dU/dy = u_\tau/\kappa y$ ;  $k = \sqrt{c_\mu} U_\tau^2$ ;  $l = \kappa y$ ;  $\nu_t = \mu_t \kappa y$ ) :

$$\hat{\xi}_2 = -\frac{1}{2\kappa^2} \left( \hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_3 \frac{1}{c_\mu^{3/4}} + \frac{1}{\sigma_\Psi} \kappa^2 \frac{1}{c_{mu}} \right) \implies \hat{\xi}_2 = (-2.88) - (-3.24)$$

**Modèle  $k - kl$  de Menter et Egorov**

Menter et Egorov ont revisité le modèle  $k$ - $kl$  de Rotta et notamment l'hypothèse d'homogénéité qui justifie que le terme en dérivée seconde  $\int_{-\infty}^{\infty} R_{12} r_y dr_y$  est nul.

En effet, dans le cas d'une couche limite de type logarithmique, il est facile de démontrer que la distribution de  $R_{12}$  n'est plus symétrique. On peut expliquer ce phénomène avec une image : au dessus du point fixe les tourbillons qui se développent ont une taille supérieure aux tourbillons qui se développent en dessous, par conséquent le niveau de corrélation s'étend plus loin au dessus du point fixe qu'en dessous. La distribution de  $R_{12}$  est donc asymétrique.

Il résulte de cette observation que le terme dominant n'est plus le terme en dérivée troisième mais le terme en dérivée seconde. Pour modéliser ce terme, il est nécessaire d'introduire un indicateur de l'hétérogénéité de l'écoulement cisailé. Menter et Egorov ont choisi la dérivée seconde de la vitesse qui est nulle en écoulement homogène. Le terme en dérivée seconde est donc écrit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{12} r_y dr_y \approx \overline{u'v'} l^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{l}{\kappa \frac{\partial U}{\partial y}}$$

avec :

$$\begin{aligned} \overline{u'v'} &\approx R_{12} \\ l^2 &\approx \int r_y dr_y \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\longrightarrow \text{indicateur de l'hétérogénéité} \\ \frac{l}{\kappa \frac{\partial U}{\partial y}} &\longrightarrow \text{échelle d'adimensionnement pour } \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Ce terme peut également s'écrire :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{12} r_y dr_y \approx P_k \frac{kl}{k} \left( \frac{l}{L_{vk}} \right)^2 \quad (4.3)$$

avec  $L_{vk}$  l'échelle de von Karman et  $P_k = \overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y}$ .

A partir du modèle de Rotta et en remplaçant le terme en dérivée troisième de la vitesse par le terme en dérivée seconde, Menter propose un modèle  $k - \Phi$  avec  $\Phi = \sqrt{kl}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} &= P_k - c_\mu^{3/4} \rho \frac{k^{3/2}}{l} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \\ \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \phi}{\partial x_j} &= \frac{\phi}{k} P_k \left( \xi_1 - \xi_2 \left( \frac{l}{L_{v\kappa}} \right)^2 \right) - \xi_3 \rho k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \nu_t &= c_\mu^{1/4} \phi ; P_k = \mu_t S^2 ; S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} ; S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ L_{v\kappa} &= \kappa \left| \frac{U'}{U''} \right| ; |U'| = S ; |U''| = \sqrt{\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}} \end{aligned}$$

Les coefficients du modèle sont :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0.8 & \xi_2 &= 1.47 & \xi_3 &= 0.0288 \\ \sigma_\phi &= \sigma_k = \frac{2}{3} & C_\mu &= 0.09 & \kappa &= 0.41 \end{aligned}$$

Le modèle de Rotta ainsi que le modèle  $k - \Phi$  de Menter possèdent l'avantage de fournir une échelle de longueur au terme source des équations de la turbulence contrairement aux autres modèles  $k - \epsilon$  ou  $k - \omega$ . Le modèle SAS s'ajuste donc à l'échelle déjà résolue de l'écoulement. Cette caractéristique lui permet de fournir un spectre turbulent jusqu'à une échelle limite imposée par la taille du maillage comme le montre le calcul effectué par Menter et Egorov dans le cas d'un écoulement de turbulence isotrope décroissante. Ce résultat provient de la faculté du modèle SAS de diminuer la viscosité turbulente de l'écoulement en fonction de la taille de la maille (de manière équivalente à la DES) contrairement au modèle RANS classique. Cependant, la taille minimale des tourbillons est limité par la taille de grille, par conséquent l'énergie ne peut être dissipée par des tourbillons plus petits, elle s'accumule aux petites échelles.

### 4.3.2 Modèle SST-SAS

En appliquant ce modèle au modèle SST de Menter, on obtient une nouvelle équation pour la dissipation spécifique  $\omega$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \omega}{\partial x_j} &= \frac{\omega}{k} P_k \left( 1 - \xi_1 + \xi_2 \left( \frac{l}{L_{vk}} \right)^2 \right) \\ &\quad - \rho \omega^2 \left( c_\mu - c_\mu^{1/4} \xi_3 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \\ &\quad + \frac{2\rho}{\sigma_\phi} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \frac{k}{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

Afin de ne pas perturber le comportement du modèle en version proche paroi le terme SAS est modifié de la manière suivante :

$$Q_{SAS} = \rho \max \left[ \xi_2 \kappa S^2 \left( \frac{L}{L_{vk}} \right) - C_c \frac{2}{\sigma_\phi} k \max \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), 0 \right]$$

avec  $C_c = 2$

## 4.4 Modèle PANS

Dans le cas du modèle  $k - \epsilon$ , deux fonctions  $f_k$  et  $f_\epsilon$  sont introduites [17]. Ces deux fonctions sont définies comme :

$$f_k = \frac{k^u}{k} \quad f_\epsilon = \frac{\epsilon^u}{\epsilon}$$

avec  $k^u$  et  $\epsilon^u$  les parties non résolues de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation turbulente,  $k$  et  $\epsilon$  l'énergie cinétique turbulente totale et la dissipation turbulente totale.

On dérive les équations pour  $k^u$  et  $\epsilon^u$  en multipliant l'équation pour  $k$  et  $\epsilon$  par respectivement  $f_k$  et  $f_\epsilon$ .

$$\begin{aligned} f_k \left\{ \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_l k - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_l} \right] \right\} &= f_k \{ \bar{\rho} P_k - \bar{\rho} \epsilon \} \\ f_\epsilon \left\{ \frac{\partial \bar{\rho} \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_l \epsilon - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right] \right\} &= f_\epsilon \left\{ c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \bar{\rho} P_k - \bar{\rho} c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \right\} \end{aligned}$$

On obtient au final :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} k^u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_l k^u - \left( \mu + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}} \right) \frac{\partial k^u}{\partial x_l} \right] &= \bar{\rho} P_k^u - \bar{\rho} \epsilon^u \\ \frac{\partial \bar{\rho} \epsilon^u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_l \epsilon^u - \left( \mu + \frac{\mu_u}{\sigma_{\epsilon u}} \right) \frac{\partial \epsilon^u}{\partial x_l} \right] &= c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon^u}{k^u} \bar{\rho} P_k^u - \bar{\rho} c_{\epsilon 2}^* \frac{\epsilon^{u2}}{k^u} \end{aligned}$$



La viscosité turbulente  $\mu_t u$ , la production  $P_k^u$  et la dissipation  $\varepsilon^u$  sont définies comme :

$$\mu_t u = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad ; \quad P_k^u = f_k P_k \quad ; \quad \varepsilon^u = f_k \varepsilon$$

Les termes de diffusions sont modifiés :

$$\sigma_{ku} = \sigma_k \frac{f_k}{f_\varepsilon} \quad ; \quad \sigma_{\varepsilon u} = \sigma_\varepsilon \frac{f_k}{f_\varepsilon}$$

Le coefficient  $c_{\varepsilon 2}^*$  est égale à :

$$c_{\varepsilon 2}^* = c_{\varepsilon 1} + \frac{f_k}{f_\varepsilon} (c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})$$

En général,  $f_k \approx 0,4$  et  $f_\varepsilon = 1$ .

## 4.5 Formalisme des méthodes hybrides T-LES/RANS

Les travaux de Gatski, Fadai, Manceau mettent en évidence la nécessité de certaines règles pour permettre à modèle hybride RANS/LES de s'adapter continûment d'un mode de résolution à l'autre.

Premièrement, un des points important est la consistance du passage d'un mode à l'autre notamment dans le cas des écoulements inhomogènes. En effet, la LES fournit des champs moyennés dans l'espace tandis que le RANS fournit des champs moyennés sur une longue période. Ces deux moyennes ne sont pas équivalentes en écoulement inhomogène. En revanche, si on utilise un filtre temporel eulérien pour appliquer la LES (dans ce cas on parle de T-LES), alors lorsque la taille du filtre tend vers l'infini, on retrouve la moyenne de Reynolds et les deux approches sont consistantes.

Les auteurs propose une approche TPITM (Temporal Partially Integrated Transport Model) dans laquelle, le changement de mode de résolution est continûment piloté par un paramètre  $r = \frac{k_m}{k}$  qui représentent le rapport entre l'énergie cinétique turbulent modélisée et l'énergie cinétique turbulente totale. Ce paramètre intervient dans l'équation de transport de la dissipation  $\varepsilon$  et modifie le coefficient  $C_{\varepsilon 2}$  qui devient :

$$C_{\varepsilon 2}^* = C_{\varepsilon 1} + r (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})$$

Le paramètre  $r$  peut être relié à la taille du filtre en assumant l'existence d'un spectre de Kolmogorov standard :

$$r = \frac{3}{2} C_\kappa \left( \kappa_c \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \right)^{-\frac{2}{3}}$$

avec  $\kappa_c$  le nombre d'onde de coupure qui peut être relié à la taille de maille par la relation  $\kappa_c = \pi (\Delta x \Delta y \Delta z)^{-1/3}$ . Les auteurs applique cette méthode à un modèle RSM dit Elliptic Blending-RSM.

La DES peut-être inclut dans ce type de modèle hybride à condition que la constante  $C_{DES}$  soit remplacée par la fonction  $f_{DES}$  :

$$f_{DES} = \frac{1}{\beta_0^{3/2} \pi \phi(r)} \quad (4.4)$$

avec :

$$\phi(r) = 1 + \left( \frac{C_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 1}} - 1 \right) \left( 1 - r^{C_{\varepsilon 1}/C_{\varepsilon 2}} \right) \quad (4.5)$$

En réalité, l'utilisation de la constante  $C_{DES}$  correspond à une approximation linéaire de la fonction  $f_{DES}$ .

## 4.6 Organised Eddy Simulation (OES)

Dans le contexte de la simulation d'écoulements présentant des structures spatio-temporelles organisées liées par exemple à un échappement tourbillonnaire, la méthodologie OES [11, 20] repose sur une décomposition des processus physiques aléatoires en un terme moyen déterministe associé à la partie cohérente des processus, et un terme aléatoire associé aux fluctuations chaotiques autour de la partie moyenne. Du point de vue spectral, cette décomposition conduit à une séparation du spectre d'énergie cinétique turbulente en deux parties, de même que la simulation aux grandes échelles. Cependant, dans le cas de l'OES, cette séparation ne consiste pas à simuler les processus de plus basses fréquences et modéliser la région dissipative. En effet, comme illustré sur la figure (4.3), le ou les pics associés à la présence de structures organisées dans l'écoulement correspondent à la partie résolue alors que le spectre résiduel s'étendant continûment des basses aux hautes fréquences est modélisé.

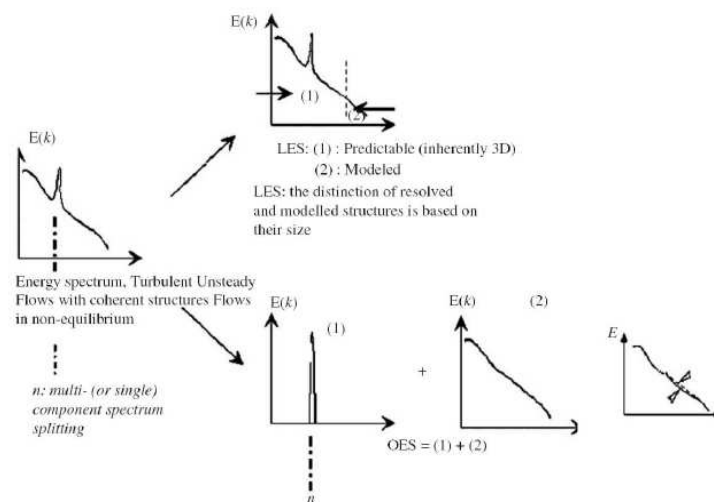


FIGURE 4.3 – Représentation schématique de la décomposition spectrale de l'approche OES

Compte tenu de la nature du spectre associé aux processus non résolus (spectre continu sur l'ensemble des nombres d'ondes), l'utilisation des concepts de modélisation statistique semble adaptée à la prise en compte de l'effet de ces quantités fluctuantes sur les processus organisés. Néanmoins, il apparaît que la présence de structures cohérentes dans l'écoulement conduit à une modification importante de la forme du spectre d'énergie cinétique turbulente par rapport au spectre en équilibre décrit par la théorie de Kolmogorov (1941). D'une part, les structures organisées se traduisent par l'apparition d'un ou plusieurs pics dans le spectre pour des longueurs d'ondes ou fréquences caractéristiques de ces structures. D'autre part, la présence de structures cohérentes induit une modification de la pente du spectre dans la zone inertielle en principe décrite par la loi en  $k^{5/3}$  où  $k$  représente le nombre d'onde. Ce phénomène a été quantifié expérimentalement (proche sillage d'un cylindre circulaire). Par conséquent, une modélisation efficace des processus aléatoires en présence de structures organisées doit se fonder sur une reconsidération des échelles de la turbulence par rapport aux fermetures statistiques classiques (RANS), adaptées aux écoulements présentant une turbulence en équilibre.

Un point important de la définition de l'approche OES est le choix de la moyenne conditionnelle considérée pour "extraire" les processus cohérents. Dans le cas d'écoulements présentant un fort caractère (quasi-)périodique, qu'il s'agisse de configurations où la périodicité est forcée par exemple par le tangage d'une aile, ou d'une périodicité apparaissant en raison de l'amplification d'instabilités naturelles, la moyenne de phase peut être adoptée. Dans ce contexte, un processus stochastique  $v$  peut être décomposé selon l'approche

suggérée par Reynolds et Hussain ([46]) comme suit :

$$v(x, t) = \bar{v}(x) + \tilde{v}(x, t) + v'(x, t) \quad (4.6)$$

où  $\bar{v}$  représente la moyenne temporelle stationnaire,  $\tilde{v}$  est une quantité déterministe représentant l'évolution périodique de  $v$  et  $v'$  désigne la partie fluctuante aléatoire. Un regroupement des termes déterministes conduit à la décomposition en moyenne de phase telle que :

$$v(x, t) = \langle v(x, t) \rangle + v'(x, t) \quad (4.7)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  désigne l'opérateur de moyenne de phase.

L'opérateur de moyenne de phase possède les mêmes propriétés que la moyenne de Reynolds (commutation avec les dérivations temporelle et spatiale). Les équations de Navier-Stokes en moyenne de phase s'écrivent donc de manière identique à celles obtenues par l'approche URANS. Néanmoins, en tenant compte des remarques précédentes concernant la modification du spectre d'énergie cinétique turbulente sous l'effet des structures organisées, les fermetures classiquement utilisées pour estimer les tensions turbulentes devront être reconsidérées pour la modélisation des corrélations doubles des fluctuations de vitesse en moyenne de phase.

En conservant la même approche de fermeture des équations moyennes que précédemment par l'introduction d'une relation constitutive des contraintes turbulentes, ce sont les échelles caractéristiques de la turbulence à modéliser qui doivent être réévaluées. Dans le cadre de l'hypothèse de Boussinesq, une première modification concerne la réévaluation de la constante de diffusivité turbulente  $C_\mu = \sqrt{\frac{u'v'}{k}} = 0.09$  mise en jeu dans le modèle  $k - \varepsilon$ .

Dans le cas d'un écoulement hors-équilibre, en particulier en présence d'un gradient de pression adverse, cette estimation conduit à une surévaluation de la viscosité de turbulence. En supposant une relation linéaire entre les contraintes turbulentes et le tenseur des taux de déformation moyens (relation de type Boussinesq), une "viscosité de turbulence équivalente" peut alors être obtenue et conduire à une estimation du coefficient de diffusivité turbulente  $C_\mu=0.02$ .

Cette réévaluation a conduit à une amélioration significative des capacités prédictives des modèles de turbulence à deux équations de transport, notamment pour la simulation d'écoulements fortement détachés autour de surfaces portantes à forte incidence.

# Chapitre 5

## LES LOIS DE PAROI

### 5.1 Problématique

Pour bien prendre en compte toute la physique d'un écoulement turbulent, il est nécessaire d'utiliser un maillage très raffiné près des parois. En effet, la région interne de la couche limite turbulente est le siège de forts gradients de la vitesse, de la température et des grandeurs turbulentes, suivant la direction  $y$  perpendiculaire à la paroi. Au proche voisinage de la paroi, l'énergie cinétique de turbulence  $k$  évolue comme  $y^2$ . Elle présente un pic autour de  $y^+ \simeq 10 \sim 20$  comme la production de  $k$ . La contrainte de cisaillement turbulente évolue comme  $y^3$ . La sous-couche visqueuse est le siège d'une forte dissipation liée à la présence de petites structures dissipatives ; la dissipation  $\varepsilon$  varie rapidement tout près de la paroi et atteint son maximum à la paroi.

Aussi, le maillage doit absolument comporter des points dans la sous-couche visqueuse. Usuellement, les maillages pour des calculs RANS ont une hauteur de première maille  $h_1^+$  proche de l'unité en variable de paroi. Pour le modèle  $k - \varepsilon$  de Jones-Launder, il est même souhaitable d'avoir  $h_1^+$  autour de 0,3 (voir travaux de Bardina et al [3]). Une telle condition impose des contraintes sévères pour la construction du maillage. De plus, le respect de la condition CFL entraîne un pas de temps d'intégration local très petit dans les mailles les plus fines, ce qui ralentit fortement la vitesse de convergence des méthodes de résolution non totalement implicites.

### 5.2 Rappel des propriétés des couches limites turbulentes 2D incompressibles

Le principe de base du traitement de paroi repose sur l'existence, bien établie pour les couches limites turbulentes bidimensionnelles incompressibles pas trop près du décollement, d'une relation universelle reliant la vitesse à la distance à la paroi par l'intermédiaire du frottement pariétal.

On introduit la vitesse de paroi et la longueur de paroi, grandeurs adimensionnées par les échelles de paroi :

$$U^+ = U/U_\tau \quad ; \quad y^+ = \frac{yU_\tau}{\nu_p} \quad ; \quad U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}}$$

Selon l'importance relative des composantes laminaire et turbulente du tenseur des contraintes, la région interne de la couche limite se sépare en trois zones distinctes :

- **La sous-couche visqueuse** :  $y^+ < 5$

Il s'agit une zone de faible épaisseur où l'action de la viscosité prédomine. Dans ce film visqueux, le profil de vitesse de paroi suit une loi linéaire :

$$U^+ = y^+$$

- **La zone de turbulence développée** :  $40 < y^+$  et  $y/\delta < 0,2$

Dans cette région, les effets turbulents prédominent sur les effets visqueux. Il est difficile de déterminer avec précision l'étendue de cette zone, son épaisseur varie en fonction du nombre de Reynolds et du gradient de pression.

Dans cette zone, le profil de vitesse suit une loi logarithmique :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$$

Les constantes  $\kappa$  et  $C$ , déterminées expérimentalement, sont indépendantes du nombre de Reynolds. La constante  $\kappa$ , appelée constante de von Karman, est très proche de 0,41 et  $C \simeq 5.25$ .

Cette loi s'obtient soit par l'analyse dimensionnelle soit par la théorie des développements asymptotiques raccordés ([8]). Elle reste valable même pour des gradients de pression positifs intenses conduisant au voisinage du décollement de la couche limite. Dans une zone décollée, cette loi n'est plus valide.

- **La zone tampon** :  $5 < y^+ < 40$

C'est la zone de raccord entre les deux régions précédentes où coexistent les propriétés de la sous-couche visqueuse et de la zone logarithmique.

Dans la région interne, pour  $y/\delta < 0,2$ , le profil des vitesses suit donc une loi  $U^+ = f(y^+)$ , propriété fondamentale de la couche limite turbulente. Cette loi, dite "universelle", est indépendante de toutes les conditions dans lesquelles peut se développer la couche limite.

### 5.3 Effets de compressibilité

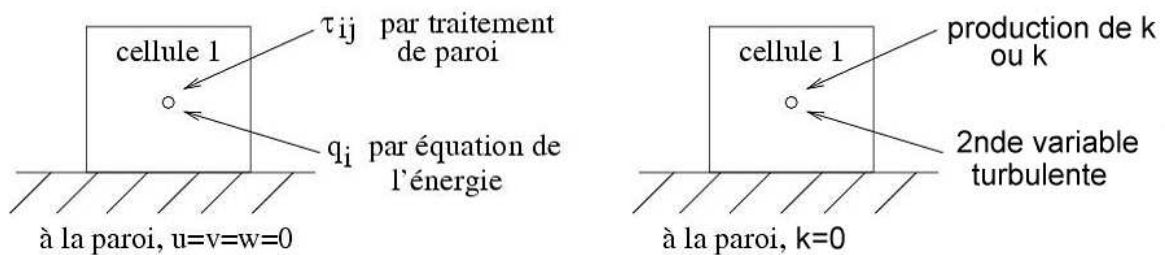
Pour les écoulements compressibles, on utilise la vitesse transformée  $\bar{U}$  de van Driest [60, 61], définie par :

$$\bar{U} = \int_0^{U_t} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_p}} dU_t$$

L'indice 't' désigne la composante tangentielle dans le repère paroi. Pour intégrer le rapport  $\rho/\rho_p$ , il faut connaître l'évolution de la température dans la région de paroi. L'évolution du flux de chaleur local, dans le repère paroi, peut s'obtenir par exemple en négligeant la convection dans l'équation de l'énergie. On obtient alors une équation différentielle pour la température en fonction de la vitesse.

### 5.4 Principe

Le principe des lois de paroi est ainsi de remplacer le calcul des densités de flux diffusif (tenseur des contraintes et vecteur flux de chaleur) et des grandeurs turbulentes transportées dans la première cellule du maillage, dont l'évaluation précise exige un fort raffinement du maillage, par un autre calcul reposant sur des propriétés de la couche limite turbulente. Ceci permet d'utiliser un maillage moins raffiné près de la paroi avec des hauteurs de maille  $y^+$  comprises entre 40 et 150.



## Chapitre 6

# TRANSITION LAMINAIRE/TURBULENT

Si aucun critère de transition ou fonction d'intermittence ne sont implantés dans le code, les zones laminaires sont imposées arbitrairement selon la configuration étudiée.

Une façon de procéder dans les zones laminaires est la suivante : les équations de transport sont intégrées avec  $\mu_t/\mu = 10^{-3}$  et les grandeurs turbulentes sont fixées aux valeurs à l'infini. Le passage au régime turbulent s'effectue alors de façon brutale pour la viscosité turbulente.

### 6.1 Modèle algébrique de transition

Il existe plusieurs modèles algébriques pour l'intermittence. Ils nécessitent d'identifier la position du début de transition en faisant appel à un autre modèle (généralement basé sur une corrélation empirique).

Arnal [1] a proposé une méthode pratique de calcul de la région de transition. La fonction d'intermittence  $\gamma_{tr}$  a été calibrée à l'aide d'expériences 2D en gradients de pression nuls et positifs. Les variations brutales de la vitesse instantanée aux interfaces entre les spots turbulents et les régions laminaires peuvent entraîner des pics de frottement. Afin de représenter ce phénomène, la fonction  $\gamma_{tr}$  passe par un maximum supérieur à l'unité. De nombreuses expériences de soufflerie en écoulement supersonique montrent de plus que l'étendue de la région de transition croît lorsque le nombre de Mach augmente jusqu'à 2 (voir chapitre couche limite). Afin d'améliorer l'accord calcul/expérience aux grandes vitesses, une loi de pondération a été proposée en introduisant le nombre de Mach dans l'expression de  $\gamma_{tr}$ .

Une autre approche pour le calcul de la région de transition est d'associer à un modèle de turbulence une fonction de lissage qui impose une évolution parabolique de  $Re_\theta$ . Cette fonction est inspirée du démarrage de la fonction d'intermittence d'Arnal :

$$\gamma = \frac{1}{0.15^2} \left[ \frac{Re_\theta - Re_{\theta_{tr}}}{Re_{\theta_{tr}}} \right]$$

### 6.2 Modèle à équation de transport de Walters and Leylek

Ce modèle [62] a été développé pour le mécanisme de transition bypass. Il a été construit pour être couplé à un modèle  $k-\varepsilon$  "bas Reynolds". Il est basé sur le fait que ce type de transition est généré par des fluctuations de très forte amplitude à l'extérieur des couches limites. Une seconde équation de transport d'énergie cinétique pour ces fluctuations est introduite. Cette énergie cinétique est appelée par ces auteurs énergie cinétique laminaire, notée  $k_L$ . Dans la région de proche paroi, l'énergie cinétique turbulente  $k$  a été scindée en énergie des petites échelles et énergie des grandes échelles, l'énergie de petites échelles contribuant directement à la production de la turbulence  $k_{tr}$ , et l'énergie des grandes échelles étant associée à la production de  $k_L$ . Des

viscosités turbulentes sont construites à partir de chacune de ces énergies. La prévision du point de début de transition est basée sur un paramètre faisant intervenir  $k_{tr}$ , la viscosité cinématique et la distance à la paroi. Lorsque la valeur de ce paramètre est supérieure à un certain seuil, la transition est déclenchée. Le début de la transition est donc lié à l'augmentation de  $k_{tr}$  consécutive de la réduction de  $k_L$ . Ce modèle a été implanté par ses auteurs dans un solveur RANS et donne de bons résultats sur des cas test de transition bypass. Il présente l'avantage de ne faire intervenir que des grandeurs locales aux cellules de calcul. En revanche, il ne permet pas de prendre en compte d'autres mécanismes de transition.

### 6.3 Modèle $\gamma - \overline{Re_{\theta_{tr}}}$ de Menter

Menter [29] a proposé une voie originale en donnant la priorité aux aspects numériques. Cette démarche repose en premier lieu sur la constatation simple que les méthodes numériques en oeuvre dans les codes Navier-Stokes sont particulièrement efficaces pour résoudre des équations de bilan qui ne font intervenir que des informations purement locales aux cellules de maillage. Cette propriété est fondamentale pour les architectures de calculateurs massivement parallèles, car l'efficacité de ces machines se dégrade très rapidement lorsque des traitements complexes s'étendant sur des cellules non contiguës sont nécessaires. C'est typiquement le cas du calcul classique de la transition dans l'approche par critères qui repose sur des épaisseurs intégrales et des analyses le long de lignes tangentes aux parois. Menter remarque ensuite que malgré la très grande complexité du phénomène de transition, la limite laminaire-turbulent peut, dans beaucoup de cas d'intérêt pratique, être prévue pour des transitions de type longitudinal par des critères globaux assez simples de la forme  $Re_{\theta_{tr}}(\lambda_\theta, T_u)$ , avec  $\lambda_\theta$  le paramètre de gradient de pression, et  $T_u$  le taux de turbulence extérieure, tel que le critère d'Abu-Ghannam et Shaw. Il constate encore que de nombreux calculs "tout turbulents" donnent déjà les paramètres essentiels pour beaucoup d'applications industrielles avec une précision presque acceptable. On peut donc espérer que la prise en compte, même approximative, de la position de transition permettra un gain global de précision intéressant. Menter propose donc en 2002 [39] un premier modèle de transition reposant sur une équation de transport pour la fonction d'intermittence dont l'expression du terme source est basée sur le nombre de Reynolds de vorticité,  $Re_v$  :

$$Re_v = \frac{\rho y^2 \Omega}{\mu}$$

Ce nombre de Reynolds, est préféré à  $Re_\theta$  pour contrôler le déclenchement de la transition parce que son évaluation ne fait intervenir que des grandeurs locales aux cellules de maillage. En effet, il ne dépend que de la masse volumique, de la viscosité, de la distance à la paroi et de la vorticité. De plus, dans un écoulement de similitude, il est relié à  $Re_\theta$  par :

$$Re_\theta = \frac{\max(Re_v)}{2.193}$$

La difficulté est alors de transférer un critère du type  $Re_{\theta_{tr}}(\lambda_\theta, T_u)$  défini en  $\delta$  vers chaque cellule de calcul dans la couche limite. Une étape décisive est franchie en 2004 [40] : Menter et Langtry introduisent une seconde équation de transport pour un scalaire comparable au nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement à la transition. Cette équation est écrite de sorte qu'à l'extérieur de la couche limite la variable transportée,  $\overline{Re_{\theta_{tr}}}$ , prene la valeur du nombre de Reynolds  $Re_{\theta_{tr}}$  donné par la corrélation expérimentale. Cette information est alors diffusée et convectée dans la couche limite de manière classique. Ainsi, cette seconde équation permet d'utiliser des informations définies en  $\delta$  dans la couche limite sans introduire de non-localité brutale afin de déclencher le terme source de l'équation de transport pour l'intermittence. De cette façon, la transition est traitée par une simple intégration d'équations de bilan comme pour n'importe quelle variable conservative. Ceci facilite le codage, rend le calcul particul rement efficace et ne demande aucun effort particulier à l'utilisateur pour spécifier les zones possibles de transition contrairement à l'approche classique par critère. Toute la difficulté est reportée sur l'expression des termes sources des nouvelles équations.

### 6.3.1 Equation de transport pour l'intermittence

La fonction d'intermittence est définie par Menter et Langtry [40, 29] comme étant égale à 0 dans les couches limites laminaires et à 1 partout ailleurs. Ce concept présente l'avantage de ne pas interférer avec le modèle de turbulence aux points d'arrêt ou encore au bord et en dehors de la couche limite.

L'équation de transport pour l'intermittence s'écrit comme celles pour les variables turbulentes, sous la forme symbolique : convection = production - destruction + diffusion :

$$\frac{\partial \rho \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \gamma}{\partial x_j} = P_\gamma - E_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_f} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right]$$

avec le terme source défini comme suit :

$$P_\gamma = F_{length} c_{a1} \rho S (\gamma F_{onset})^{0.5} (1 - c_{e1} \gamma)$$

où  $S$  est la norme du tenseur des taux de déformation. La fonction  $F_{length}$  est définie plus loin.

La fonction  $F_{onset}$  sert à déclencher le terme de production de  $\gamma$  dans les couches limites. Elle est basée sur le nombre de Reynolds de vorticité,  $Re_v$  :

$$\begin{aligned} F_{onset} &= \max(F_{onset2} - F_{onset3}, 0) \\ F_{onset2} &= \min(\max(F_{onset1}, F_{onset1}^4), 2) \\ F_{onset1} &= \frac{Re_v}{2.193 Re_{\theta_c}} ; Re_t = \frac{\rho k}{\mu \omega} \\ F_{onset3} &= \max\left(1 - \left(\frac{Re_t}{2.5}\right)^3, 0\right) \end{aligned}$$

La fonction  $F_{onset1}$ , définie comme le rapport entre  $Re_v$  et  $Re_{\theta_c}$ , est assimilable à un critère de transition. Dès lors que sa valeur est supérieure à 1 dans une partie de la couche limite, même limitée à quelques cellules,  $P_\gamma$  est activé et le processus de transition est déclenché :  $\gamma$  augmente rapidement d'une valeur proche de 0 à 1 dans cette région de la couche limite entraînant un accroissement de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et donc la viscosité turbulente  $\nu_t$ . Ensuite, par convection et diffusion, l'intermittence puis la turbulence augmentent dans les cellules voisines. Le nombre de Reynolds critique  $Re_{\theta_c}$  se différencie du nombre de Reynolds à la transition  $Re_{\theta_{tr}}$ , même si ces quantités sont étroitement liées.  $Re_{\theta_c}$  est relatif à la position où la turbulence commence à apparaître dans la couche limite alors que  $Re_{\theta_{tr}}$  n'est atteint que lorsque le profil de vitesse dévie de sa solution laminaire. Comme la turbulence doit être suffisamment importante dans la couche limite avant de voir la moindre déviation du profil de vitesse,  $Re_{\theta_c}$  est atteint en amont de  $Re_{\theta_{tr}}$ .

Les fonctions  $F_{onset2}$  et  $F_{onset3}$  servent à assurer le bon comportement de la fonction  $F_{onset}$  qui doit être active dans toute la région de transition et nulle dans les couches limites laminaires.

Enfin, le terme  $(1 - c_{e1}\gamma)$  est un terme de rappel qui impose la valeur limite 1 à  $\gamma$ .

Le terme de destruction/relaminarisation est défini comme suit :

$$E_\gamma = c_{a2} \rho \Omega \gamma F_{turb} (c_{e2} \gamma - 1)$$

où  $\Omega$  est la norme de la vorticité. Ce terme sert à assurer une valeur proche de zéro à l'intermittence dans les couches limites laminaires. Il permet également au modèle de prévoir une éventuelle relaminarisation de l'écoulement en ramenant l'intermittence à une valeur quasi nulle lorsque le critère de transition de la fonction  $F_{onset}$  n'est plus satisfait : le terme de production  $P_\gamma$  est alors nul et  $E_\gamma$  reste positif engendrant la diminution de  $\gamma$ . La constante  $c_{a2}$  sert à pondérer le terme de destruction afin que ce dernier soit plus petit que le terme de production  $P_\gamma$  lorsque le critère de transition est satisfait. La constante  $c_{e2}$  fixe la limite inférieure de la



valeur de l'intermittence : si  $c_{e2} < 1$  alors  $E_\gamma$  est négatif et devient un terme de production. Cette constante est prise égale à 50 ce qui correspond à une valeur limite inférieure de l'intermittence de 0.02. La fonction  $F_{turb}$  sert à rendre inefficace le terme  $E_\gamma$  à l'extérieur de la couche limite ou dans la sous-couche visqueuse.

$$F_{turb} = \exp\left(-(\text{Re}_t/4)^4\right)$$

Les constantes pour l'équation de transport de l'intermittence sont :

$$c_{a1} = 2. \quad c_{a2} = 0.06 \quad c_{e1} = 1. \quad c_{e2} = 50 \quad \sigma_f = 1.$$

Les conditions aux limites sont :

- Parois : une condition de flux nul est appliquée à la paroi,  $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$
- Entrée : on impose  $\gamma = 1$
- Sortie : on impose la condition de flux nul  $\frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0$
- Condition à l'infini : on impose  $\gamma = 1$  comme pour la condition d'entrée.

### Bulbe de transition

Menter et Langtry ont apporté une amélioration à la formulation de la fonction d'intermittence afin de mieux prévoir la transition par bulbe de décollement. En effet, les résultats obtenus avant cette modification font état d'une prévision de la position du point de rattachement de l'écoulement en aval de celle observée expérimentalement. Langtry [28] présume que cela est dû au fait que l'énergie cinétique de turbulence n'augmente pas assez rapidement dans l'écoulement décollé. Il propose donc de permettre à l'intermittence de dépasser la valeur 1 dans ce type d'écoulement ce qui a pour conséquence d'augmenter la production d'énergie cinétique de turbulence  $k$ . Cette modification est donnée par :

$$\begin{aligned} \gamma_{sep} &= F_{\theta_{tr}} \min \left[ s_1 \max \left( 0, \frac{\text{Re}_v}{3.235 \text{Re}_{\theta_c}} - 1 \right) F_{reattach}, 2 \right] \\ F_{reattach} &= \exp\left(-(\text{Re}_t/20)^4\right) \quad ; \quad \gamma_{eff} = \max(\gamma, \gamma_{sep}) \end{aligned}$$

où  $s_1 = 2$  contrôle la taille du bulbe. La fonction  $F_{reattach}$  permet de ne pas prendre en compte cette modification si la viscosité turbulente est assez importante pour contrôler le rattachement. La fonction  $F_{\theta_{tr}}$  est définie dans la section suivante. Elle permet ici d'éviter d'augmenter le terme de production de l'énergie cinétique turbulente à l'extérieur des couches limites, et donc de modifier le modèle de turbulence dans ces régions. La constante 3.235 est issue de la relation entre  $\text{Re}_v$  et  $\text{Re}_{\theta_c}$  pour un facteur de forme  $H$  de 3.5 (valeur proche de celle au point de décollement).

### 6.3.2 Equation de transport pour $\overline{\text{Re}_{\theta_{tr}}}$

Cette équation de transport est écrite de sorte qu'à l'extérieur de la couche limite  $\overline{\text{Re}_{\theta_{tr}}}$  prenne la valeur de  $\text{Re}_{\theta_{tr}}$ , donnée par la corrélation expérimentale. Cette information est alors diffusée et convectée dans la couche limite. L'équation de transport pour  $\overline{\text{Re}_{\theta_{tr}}}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho \text{Re}_{\theta_{tr}}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho U_j \text{Re}_{\theta_{tr}}}}{\partial x_j} &= P_{\theta_{tr}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{\theta_{tr}} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \overline{\text{Re}_{\theta_{tr}}}}{\partial x_j} \right] \\ P_{\theta_{tr}} &= c_{\theta_{tr}} \frac{\rho}{t} (\text{Re}_{\theta_{tr}} - \overline{\text{Re}_{\theta_{tr}}}) (1 - F_{\theta_{tr}}) \end{aligned}$$

où  $t$  est une échelle de temps, introduite à la suite d'une analyse dimensionnelle, et où  $c_{\theta_{tr}}$  sert à pondérer l'amplitude du terme source :

$$t = \frac{500\mu}{\rho U^2} \quad \text{et} \quad c_{\theta_{tr}} = 0.03$$

À l'extérieur de la couche limite, le terme source  $P_{\theta_{tr}}$  force  $\overline{Re_{\theta_{tr}}}$  à prendre la valeur de  $Re_{\theta_{tr}}$  calculée avec la relation empirique via le terme de rappel  $Re_{\theta_{tr}} - \overline{Re_{\theta_{tr}}}$ . La fonction  $F_{\theta_{tr}}$  sert à annuler le terme source dans la couche limite. Elle est écrite de sorte que sa valeur vaille 1 dans la couche limite et 0 ailleurs :

$$F_{\theta_{tr}} = \min \left[ \max \left( F_{wake} \exp \left( -\frac{y^4}{\delta^4} \right), 1 - \left( \frac{\gamma - 1/c_{e2}}{1 - 1/c_{e2}} \right)^2 \right), 1 \right]$$

$$\delta = \frac{50\Omega y}{U} \delta_{BL} \quad \text{avec} \quad \delta_{BL} = \frac{15}{2} \frac{\mu \overline{Re_{\theta_{tr}}}}{\rho U}$$

La fonction  $F_{wake}$  est introduite pour désactiver la fonction  $F_{\theta_{tr}}$  dans les zones de sillage :

$$F_{wake} = \exp \left[ -\left( \frac{Re_{\omega}}{10^5} \right)^2 \right] \quad \text{avec} \quad Re_{\omega} = \frac{\rho \omega y^2}{\mu}$$

De par sa construction, l'équation de transport pour  $\overline{Re_{\theta_{tr}}}$  devient, dans la couche limite, une égalité entre le terme de convection et le terme de diffusion :

$$\frac{\partial \rho \overline{Re_{\theta_{tr}}}}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \overline{Re_{\theta_{tr}}}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{\theta_{tr}} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \overline{Re_{\theta_{tr}}}}{\partial x_j} \right]$$

Ainsi, l'écart entre la valeur locale de  $\overline{Re_{\theta_{tr}}}$  dans la couche limite et celle à l'extérieur peut être contrôlé par le terme de diffusion  $\sigma_{\theta_{tr}}$  : une augmentation de  $\sigma_{\theta_{tr}}$  permet de diminuer l'effet d'histoire dû à la convection. Deux valeurs ont été testées :  $\sigma_{\theta_{tr}} = 10$  comme le proposait initialement Menter et Langtry [40] et  $\sigma_{\theta_{tr}} = 2$ , valeur donnée dans leurs publications plus récentes [35].

Les conditions aux limites sont :

- Parois : on impose une condition de flux nul,  $\left( \frac{\partial \overline{Re_{\theta_{tr}}}}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$
- Entrée :  $\overline{Re_{\theta_{tr}}}$  est calculé par la relation empirique  $Re_{\theta_{tr}}(\lambda_{\theta}, T_u)$  pour une gradient de pression nul.
- Sortie : une condition de flux nul est appliquée,  $\frac{\partial \overline{Re_{\theta_{tr}}}}{\partial y} = 0$
- Condition à l'infini : on impose la même condition que celle d'entrée.

### 6.3.3 Corrélation pour le calcul de $Re_{\theta}$

$Re_{\theta_{tr}}$  représente la corrélation empirique qui relie la valeur de  $Re_{\theta}$  au point de transition au taux de turbulence extérieure  $T_u$  et au gradient de pression local dans la direction de l'écoulement évaluée à l'extérieur de la couche limite,  $dP/ds$ . Cette relation est fondamentale car c'est elle qui permet d'identifier la position de la transition. Elle sert au calcul du terme source  $P_{\gamma_{tr}}$  dans l'équation de transport pour  $\overline{Re_{\theta_{tr}}}$ . Plusieurs formulations ont été publiées. On présente la corrélation donnée par Langtry dans sa thèse [28]. Celle-ci est une extension aux faibles  $T_u$  du critère proposé par Abu-Ghannam et Shaw. Elle est basée sur les paramètres suivant :

$$\lambda_{\theta} = \frac{\rho \theta^2}{\mu} \frac{dU}{ds} \quad \text{et} \quad T_u = \frac{\sqrt{2k/3}}{U}$$

où  $dU/ds$  est l'accélération dans la direction locale de l'écoulement.

La corrélation empirique s'écrit :

$$\begin{aligned}
Re_{\theta_{tr}} &= \left( 1173.51 - 589.428T_u + \frac{0.2196}{T_u^2} \right) F(\lambda_\theta) & \text{si } T_u \leq 1.3\% \\
Re_{\theta_{tr}} &= 331.5(T_u - 0.5658)^{-0.671} F(\lambda_\theta) & \text{si } T_u > 1.3\% \\
F(\lambda_\theta) &= 1 + (12.986\lambda_\theta + 123.66\lambda_\theta^2 + 405.689\lambda_\theta^3) \exp \left[ - \left( \frac{T_u}{1.5} \right)^{1.5} \right] & \text{si } \lambda_\theta \leq 0 \\
F(\lambda_\theta) &= 1 + 0.275 (1 - \exp(-35\lambda_\theta)) \exp \left( \frac{-T_u}{0.5} \right) & \text{si } \lambda_\theta > 0
\end{aligned}$$

### 6.3.4 Fermeture du modèle : fonctions $F_{length}$ et $Re_{\theta_c}$

Le couplage des deux équations de transport pour l'intermittence et  $\overline{Re_{\theta_{tr}}}$  est contenu dans deux fonctions introduites par Menter et Langtry [40, 28]  $F_{length}$  et  $Re_{\theta_c}$ . Avant 2009, ces fonctions étaient propriétés de ANSYS et de ce fait, non publiées. Plusieurs auteurs ont proposé des fermetures en utilisant des bases de données expérimentales, nous donnons la formulation de Content et Houdeville [7], implanté dans le code elsA de l'ONERA.

$$\begin{aligned}
F_{length} &= \exp \left( -1.325 \cdot 10^{-8} \overline{Re_{\theta_{tr}}}^3 + 7.42 \cdot 10^{-6} \overline{Re_{\theta_{tr}}}^2 + 8.16 \cdot 10^{-3} \overline{Re_{\theta_{tr}}} + 2.5652 \right) \\
Re_{\theta_c} &= \min \left( 1, 1.623 \cdot 10^{-6} \overline{Re_{\theta_{tr}}}^2 - 1.228 \cdot 10^{-3} \overline{Re_{\theta_{tr}}} + 0.849 \right) \overline{Re_{\theta_{tr}}}
\end{aligned}$$

### 6.3.5 Couplage du modèle de transition avec le modèle $k - \omega$ SST

Le modèle de transition de Menter est calibré pour être utilisé avec le modèle de turbulence  $k - \omega$  SST. Le couplage entre ces modèles se fait en remplaçant les termes de production  $P_k$  et de destruction  $D_k$  dans l'équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente  $k$  par  $\tilde{P}_k$  et  $\tilde{D}_k$  :

$$\tilde{P}_k = \gamma_{eff} P_k \quad \text{et} \quad \tilde{D}_k = \min(\max(\gamma_{eff}, 0.1), 1) D_k$$

où  $\gamma_{eff} = \max(\gamma, \gamma_{sep})$  est l'intermittence efficace donnée précédemment pour le bulbe de transition.

D'autre part, la fonction de raccord  $F_1$  entre les systèmes  $k - \omega$  et  $k - \varepsilon$  est modifiée pour éviter qu'elle ne passe à 0 (système  $k - \omega$ ) dans la couche limite laminaire :

$$F_1 = \max(F_{1orig}, F_3) \quad \text{avec} \quad F_3 = \exp \left[ - \left( \frac{Re_y}{120} \right)^8 \right] ; \quad Re_y = \frac{\rho y \sqrt{k}}{\mu}$$

Afin de n'activer la correction SST que dans les régions turbulentes et non dans les couches limites laminares, une modification du couplage a été effectuée de façon à introduire la fonction d'intermittence dans l'expression du limiteur SST :

$$\tilde{\mu}_t = \min \left( \frac{\rho k}{\omega}, \frac{0.3 \rho k}{SF_2 \min(\gamma_{eff}, 1)} \right)$$

## Chapitre 7

# ASPECTS NUMERIQUES

### 7.1 Intégration temporelle - Pas de temps local

Afin d'accélérer la convergence des calculs, le pas de temps  $\Delta t$  utilisé pour intégrer les équations est un pas de temps local. Il est déterminé à partir d'une étude de stabilité de von Neumann sur une équation de convection et une équation de diffusion.

Chaque équation est intégrée à l'aide du schéma explicite sur une grille uniforme. L'étude de stabilité conduit à une condition de type critère de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Ces deux conditions de stabilité représentent les limites visqueuse et non visqueuse du critère de stabilité utilisé pour le calcul du pas de temps local. La formulation, pour chaque point du maillage, est :

$$\Delta t = CFL \min \left[ \underbrace{\frac{\Delta x}{\rho(A)}}_{\text{terme convectif}}, \underbrace{\frac{\rho \Delta x^2}{2\gamma \left( \frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_t}{P_{rt}} \right)}}_{\text{terme diffusif}} \right]$$

où :  $\Delta x$  désigne la taille de maille et  $\rho(A)$  est le rayon spectral de la matrice jacobienne du flux convectif, écrite pour les équations d'Euler. CFL doit être inférieur au  $CFL_{max}$ , limite supérieure de la zone de stabilité du schéma numérique. Soulignons que la solution perd tout son sens physique tant que la convergence vers une solution stationnaire n'est pas complètement atteinte. Pour les calculs instationnaires, la méthode du pas de temps dual permet d'utiliser un pas de temps local dans les itérations en temps fictif.

### 7.2 Ecoulements instationnaires - Pas de temps dual

Les calculs avec un schéma explicite en temps sont pénalisés par la condition de stabilité avec un critère de type CFL. En effet, ce dernier est fonction de la taille des plus petites cellules du maillage qui atteint de fort raffinement près des parois. Les lois de paroi, par l'utilisation de maillages dégrossis, s'avèrent ainsi très intéressantes. Par ailleurs, il n'est plus possible de recourir à la technique du pas de temps local ainsi qu'à la méthode multigrille non consistantes en temps.

Pour pallier ces difficultés, Jameson a développé l'approche du pas de temps dual pour la résolution des équations d'Euler [22]. Cette méthode, étendue aux équations de Navier-Stokes, offre la possibilité d'utiliser les techniques d'accélération de la convergence, notamment le multigrille, introduites pour les problèmes stationnaires. L'introduction d'un temps dual permet de transformer le problème instationnaire en temps physique en un problème stationnaire en temps dual, sans signification physique réelle. A chaque pas de temps physique, des sous-itérations avec technique multigrille sont réalisées, dans le domaine dual, pour ap-

procher la solution stationnaire. Cette méthode du pas de temps dual assure une précision en temps d'ordre 2.

For unsteady computations, the dual time stepping method is used to overcome the lack of numerical efficiency of the global time stepping approach. The unsteady solution of the RANS equations is computed as the steady solution of the system :

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial w}{\partial t} + R(w) = 0$$

where  $\frac{\partial w}{\partial \tau}$  is the derivative with respect to the dual time variable  $\tau$  and  $R(w)$  is the residual. The derivative  $\frac{\partial w}{\partial t}$  with respect to the physical time  $t$  is discretized by a second-order formula :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{3w^{n+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2\Delta t}$$

where the superscript  $n$  is associated with the physical time. Between each time step, the solution is advanced in a dual time  $\tau$  and acceleration strategies developed for steady problems can be used to speed up the convergence in fictitious time. The initialization of the derivative with respect to the physical time is done with a first-order formula.

### 7.3 Discrétisation spatiale des flux convectifs

La formulation en Volumes Finis consiste à intégrer le système (2.1) sur une cellule de volume  $\Omega$ , de surface  $\Sigma$ , et de normale extérieure  $\vec{n}$ . Le théorème d'Ostrogradski conduit à :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w d\Omega + \oint_{\Sigma} F_c \cdot \vec{n} d\Sigma - \oint_{\Sigma} F_d \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\Omega} S d\Omega \quad (7.1)$$

La discrétisation en espace revient à calculer le bilan des flux numériques sur une cellule élémentaire. Ce bilan comprend la somme des contributions de chaque face de la cellule. Les densités de flux sont supposées constantes sur chaque facette. Il vient :

$$\oint_{\Sigma} (F_c - F_d) \cdot \vec{n} d\Sigma = \sum_{\text{facettes}} (F_c - F_d)_{\text{facette}} \cdot \vec{n}_{\text{facette}} \Sigma_{\text{facette}}$$

Avec un schéma centré, la densité de flux sur une facette est égale à la demi-somme des densités de flux évaluées au centre des cellules adjacentes à cette facette (voir figure 7.1) :

$$F(w_G, w_D) = \frac{1}{2}(F(w_D) + F(w_G))$$

où  $w_D$  et  $w_G$  sont les vecteurs des variables conservatives des cellules gauche et droite.

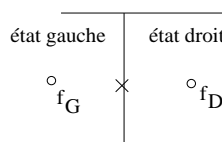


FIGURE 7.1 – interface entre deux cellules

L'utilisation d'un tel schéma entraîne une erreur de troncature d'ordre 2 en espace. Cette erreur dégénère d'un ordre sur les frontières. Ce schéma est instable et nécessite l'introduction d'une dissipation artificielle pour le stabiliser. La formulation de Jameson-Schmidt-Turkel [24] est la plus couramment utilisée. D'autres schémas peuvent être utilisés : Roe, HLLC, AUSM+, WENO...

## 7.4 Discrétisation spatiale des termes visqueux

La discrétisation des flux visqueux consiste à approximer les variables et les dérivées des variables par rapport aux directions  $x$  et  $y$  (en écoulement 2D). Par exemple, à l'interface  $(i + 1/2, j)$ , pour toute quantité  $f$  :

$$f_{i+1/2,j} = \frac{f_{i,j} + f_{i+1,j}}{2} \quad ; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i+1/2,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x_i}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i+1/2,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1} + f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{4\Delta y}$$

Ces discrétisations sont du second ordre.

## 7.5 Multigrille

### 7.5.1 Principe

Pour accélérer la convergence des calculs, une méthode multigrille peut être utilisée. L'idée fondamentale de cette méthode est basée sur les deux observations suivantes :

- Les méthodes itératives classiques pour la résolution de problèmes elliptiques ont un effet de lissage de l'erreur au cours des itérations. Si l'erreur commise au cours d'un calcul est décomposée en série de Fourier, on observe que les hautes fréquences de l'erreur sont amorties beaucoup plus vite que les basses fréquences. Ainsi, lors d'un calcul, il est possible d'obtenir un bon lissage (suppression des hautes fréquences) tout en ayant une convergence lente, à cause des basses fréquences.
- Dans un calcul, une approximation de la solution s'obtient plus rapidement sur un maillage grossier, mais avec une perte de précision, que sur un maillage fin. Cependant, les basses fréquences relatives au maillage fin deviennent les hautes fréquences pour le maillage grossier et seront donc bien lissées sur ce maillage.

La méthode multigrille permet, à travers un algorithme basé sur une séquence de grilles de tailles différentes, de lisser de façon optimale toutes les fréquences de l'erreur. Sur la grille la plus grossière, la résolution du système se fait de façon exacte. Les transferts de l'erreur et la solution approchée sur les différentes grilles se font à l'aide d'opérateurs d'interpolation.

Pour des calculs instationnaires, cette technique est utilisable avec la méthode du pas de temps dual.

### 7.5.2 Description de l'algorithme multigrille

Considérons une séquence de grilles de plus en plus grossières  $G_{2h}$ ,  $G_{4h}$ ,  $G_{2^i h}$ ... pour lesquelles la taille caractéristique des mailles de chaque grille  $G_{2^i h}$  est deux fois plus grande que celles des mailles de la grille précédente  $G_{2^{i-1} h}$ .

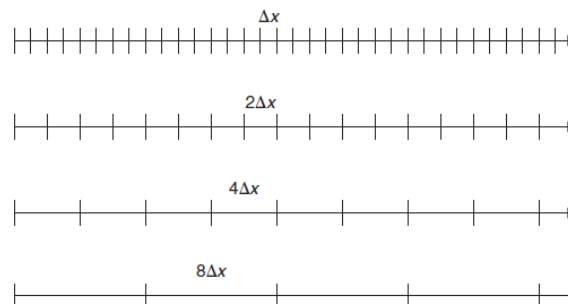


FIGURE 7.2 – Séquence de grille 1D de plus en plus grossière

A partir de la méthode numérique de résolution associée au niveau fin  $G_h$ , la méthode d'accélération multigrille consiste à utiliser les niveaux grossiers afin de calculer les corrections à apporter à la solution du niveau fin. Les corrections sont calculées par l'application du schéma d'intégration temporelle sur les niveaux grossiers. La technique FAS ("Full Approximation Storage") est couramment utilisée [21]; elle réside dans le fait que les équations à résoudre sur les grilles grossières sont semblables aux équations à résoudre sur la grille fine, à l'adjonction près d'un terme dit "forcing function", qui représente l'écart des erreurs de troncature entre deux grilles successives.

Les différentes étapes d'un calcul sur deux niveaux de grille sont :

- Réalisation d'itérations du schéma temporel sur la grille fine  $G_h$ .
- Phase de restriction de la solution  $w_h$  et des résidus  $R(w_h)$  de  $G_h$  sur  $G_{2h}$ .

$$\begin{aligned} w_{2h} &= I_h^{2h} w_h \\ R(w_{2h}) &= J_h^{2h} R(w_h) \end{aligned}$$

où  $I_h^{2h}$  et  $J_h^{2h}$  sont respectivement les opérateurs de restriction de la solution et des résidus du niveau  $G_h$  vers le niveau  $G_{2h}$ .

- Calcul de la forcing function  $P_{2h}$  pour le résidu sur la grille grossière :

$$P_{2h} = J_h^{2h} R(w_h) - R(I_h^{2h} w_h)$$

- Réalisation d'itérations du schéma temporel sur la grille grossière  $G_{2h}$ . La solution sur la grille grossière au pas de temps  $n + 1$  est donnée par (schéma backward d'ordre 1) :

$$w_{2h}^{(n+1)} w_{2h}^n - \frac{\Delta t}{Vol} \left( R(w_{2h}^{k-1}) + P_{2h} \right)$$

On peut constater que lorsque le résidu devient nul sur la grille fine, le terme  $R(w_{2h}^{k-1}) + P_{2h}$  s'annule et aucune correction ne se propage des grilles grossières vers les grilles fines.

- Transfert des corrections  $C_h$  vers la grille fine  $G_h$  calculées par :

$$C_h = I_{2h}^h (w_{2h}^* - w_{2h})$$

où  $w_{2h}^*$  est la solution obtenue sur le maillage  $G_{2h}$  et  $I_{2h}^h$  est l'opérateur de prolongement du niveau de grille  $G_{2h}$  vers le niveau  $G_h$ .

Dans le cas d'une utilisation de plus de 2 niveaux de grille, les étapes décrites précédemment s'appliquent de manière récursive pour les niveaux  $G_{4h}, G_{8h}...$  La technique de correction de solution sur un grille fine à l'aide de valeurs obtenues aux différents niveaux de grilles grossières est appelée cycle multigrille. Le cycle le plus simple est un cycle en V dont un schéma de principe est donné sur la figure 7.3.

### 7.5.3 Opérateurs intergrille

#### Opérateurs de restriction

Il y a deux types de champs à restreindre sur les grilles grossières :

- Les résidus :  
Le résidu à transférer sur une cellule du niveau grossier est la somme des résidus calculés sur la grille fine aux cellules correspondantes.

- Les variables conservatives et les viscosités moléculaire et turbulente :  
Les grandeurs sont transférées sur la grille grossière par une moyenne pondérée basée sur les volumes des cellules :

$$w_{2h} = \frac{\Sigma \Omega_h w_h}{\Sigma \Omega_h}$$

où  $\Sigma$  est l'opérateur sommation appliqué aux cellules de la grille fine correspondant à la cellule de la grille grossière et  $\Omega_h$  est le volume des cellules correspondantes.

### Opérateurs de prolongement

L'opérateur de prolongement  $I_{2h}^h$  transfère les corrections du maillage grossier vers le niveau fin et joue un rôle important dans l'amélioration de la convergence de la méthode. Il est composé des deux étapes suivantes :

- Les valeurs au centre des cellules de la grille grossière sont projetées sur les sommets des cellules par une moyenne arithmétique.
- À partir des valeurs projetées sur les noeuds de la grille grossière, les valeurs aux centres des cellules de la grille fine sont déterminées au moyen d'une interpolation trilinéaire.

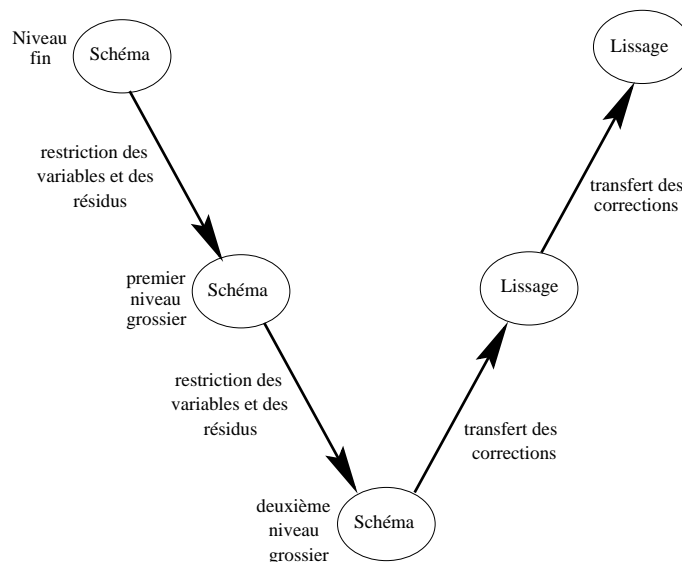


FIGURE 7.3 – Cycle multigrille en V

## 7.6 Traitement des conditions aux limites

### 7.6.1 Conditions à l'infini pour le champ moyen

La méthode de traitement des conditions aux limites à l'infini repose sur l'utilisation des relations caractéristiques associées aux équations d'Euler. Elle est basée sur les propriétés des systèmes hyperboliques en temps. Malgré le caractère non hyperbolique du système des équations de Navier-Stokes stationnaires, cette approche est appliquée sur les frontières situées dans des régions de l'écoulement où les effets visqueux sont en grande partie négligeables.

Les relations caractéristiques sont utilisées uniquement dans le cas où l'information se propage depuis l'intérieur du domaine de calcul vers l'extérieur de manière à compléter les conditions aux limites physiques. **Le nombre de caractéristiques entrantes fixe le nombre de valeurs indépendantes à imposer.**



Les différents types de conditions aux limites sont :

- entrée subsonique

Cette condition correspond au cas où l'écoulement entre dans le domaine de calcul avec une vitesse normale subsonique. Il y a alors quatre caractéristiques entrantes. Par exemple, les quatre variables choisies à imposer peuvent être la pression d'arrêt, la température d'arrêt et la direction de la vitesse (deux angles, le dérapage et l'incidence). Pour compléter, une relation de compatibilité discrétisée (résolue par exemple au moyen d'une méthode de Newton) peut être utilisée.

Les quantités turbulentes déterminées par une équation de transport sont par définition associées à la caractéristique  $\vec{V} \cdot \vec{n}$  et par conséquent doivent être imposées en tout point d'une frontière entrante.

- sortie subsonique - pression imposée

Il n'y a qu'une seule courbe caractéristique entrante donc une seule variable à imposer sur la frontière : usuellement on choisit la pression statique. Pour compléter, deux relations de compatibilité discrétisées peuvent être utilisées.

- entrée supersonique

Toutes les caractéristiques sont entrantes, il faut donc imposer complètement le vecteur  $w$ .

- sortie supersonique

Aucune caractéristique n'est entrante. On utilise une extrapolation des variables au bord du domaine.

- condition de non réflexion

Cette condition est usuellement utilisée pour les écoulements externes autour d'un profil, sur la frontière extérieure du domaine de calcul, pour simuler une atmosphère infinie. Elle permet d'éliminer les perturbations qui pourraient apparaître lors, par exemple, de la traversée d'une discontinuité au travers de la frontière.

La condition consiste à imposer les grandeurs conservatives à la frontière en utilisant toutes les relations caractéristiques. Le nombre de caractéristiques entrantes ou sortantes n'est pas déterminé à l'avance mais calculé en chaque point de la frontière. On évalue les valeurs propres du système sur la face frontière au pas de temps  $n$ . Le signe de chacune des valeurs propres permet de déterminer le sens de propagation de l'information. Les grandeurs conservatives qui sont imposées à la frontière sont prises soit à un état de référence si la caractéristique est entrante soit à l'état courant si la caractéristique est sortante.

### 7.6.2 Conditions à l'infini pour le champ turbulent

Pour le champ turbulent, les grandeurs transportées doivent être imposées à l'infini. Elles peuvent être calculées en fonction du taux de turbulence  $T_u$  et de la viscosité turbulente à l'infini  $\mu_{t\infty}$ , selon :

$$\begin{aligned}(\rho k)_\infty &= \frac{3}{2} T_u^2 \rho_\infty U_\infty^2 \\(\rho \varepsilon)_\infty &= C_\mu \frac{(\rho k)_\infty^2}{\mu_{t\infty}} \\(\rho \omega)_\infty &= \frac{(\rho k)_\infty}{\mu_{t\infty}} \\(\rho \nu)_\infty &= \mu_{t\infty}\end{aligned}$$

Généralement, la valeur de  $\mu_{t\infty}$  est prise égale à une certaine fraction de  $\mu_\infty$ . Si le taux de turbulence est inconnu, les valeurs à l'infini sont fixées arbitrairement.

Attention! pour le modèle  $k - \omega$  de Wilcox, les résultats de calculs sont sensibles à la valeur  $(\rho\omega)_\infty$  qui est fixée à l'infini. Il convient donc d'essayer plusieurs valeurs !

### 7.6.3 Conditions aux parois pour le champ moyen

Les conditions aux limites sur une paroi traduisent l'adhérence du fluide à la paroi et la caractéristique thermique de cette paroi. Cette dernière condition est de deux types :

- adiabatique avec un flux de chaleur à la paroi nul.
- isotherme avec une température imposée en tout point de la paroi.

Pour fixer à la paroi les variables énergie totale et masse volumique, il est souvent utilisée une hypothèse sur la pression statique à savoir qu'elle varie très peu dans la direction normale à la paroi :  $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ .

Ceci peut aussi être utilisée avec une condition au limite de type lois de paroi (conditions sur les flux visqueux).

### 7.6.4 Conditions aux parois pour le champ turbulent

A la paroi, on impose la valeur des quantités turbulentes :

- pour l'énergie cinétique de turbulence :  $\rho k = 0$
- pour le taux de dissipation modifiée :  $\rho \tilde{\epsilon} = 0$
- pour la dissipation spécifique :  $\lim_{d \rightarrow 0} \omega = \frac{6\nu}{\beta d^2}$

Selon la façon de coder "l'infini" à la paroi, on obtient des résultats différents !

- pour le modèle de Spalart-Allmaras :  $\rho \tilde{\nu} = 0$

## 7.7 Initialisation des calculs

Pour un calcul stationnaire, les conditions initiales n'ont pas influence sur la solution. Le champ moyen est généralement initialisé avec un état uniforme correspondant au champ infini amont.

L'initialisation d'un calcul avec modèle de turbulence à équations de transport peut s'avérer délicate ! Un calcul conduit parfois à une convergence vers une solution laminaire ou une divergence. La raison essentielle de ce comportement provient du fait que les équations de transport ont souvent comme solution triviale un champ turbulent nul (sauf pour  $k - \omega$ ). Une solution envisageable consiste à effectuer quelques itérations en laminaire avant d'initialiser le champ des grandeurs turbulentes. Certains modèles ne nécessitent aucun traitement particulier et les variables turbulentes sont initialisées aux valeurs à l'infini. La viscosité turbulente est prise égale à un certain rapport de la viscosité moléculaire. Il est possible de fixer l'énergie cinétique de turbulence  $k$  en utilisant l'hypothèse de Bradshaw :  $k = \mu_t |rot \vec{V}| / 0.3$ .

Pour d'autres modèles, le champ turbulent doit être développé afin que le calcul ne reste pas laminaire. L'initialisation est alors effectuée à partir d'une solution convergée obtenue avec un autre modèle.

## 7.8 Paramètres de calculs

Lorsque des simulations numériques avec un solver RANS sont effectuées, il est important de présenter les conditions de calcul (nombres de Mach et de Reynolds, température, pression, incidence, caractéristique de la géométrie, transition laminaire/turbulent...) et de détailler le plus possible les paramètres de calculs :

- caractéristique du maillage avec  $y^+$  de première maille.
- nombre de CFL, pas de temps en instationnaire.
- les critères de convergence.

- nombre de sous-itérations en pas de temps dual et critère de convergence dans les sous-itérations.
- paramètre des schémas numériques (paramètres de la dissipation artificielle, constante de l'algorithme MUSCL, paramètre de la correction de Harten, ordre de précision..).
- les paramètres du schéma numérique pour intégrer les équations de transport de la turbulence (ordre de précision).
- le modèle de turbulence utilisé.
- condition aux limites des parois.
- utilisation de limiteurs sur les variables turbulentes ou sur la viscosité turbulence.

# Bibliographie

- [1] D. Arnal, E. Coustols, and J.C. Juillen. Transition sur une aile en fleche infinie. *La Recherche Aéronautique*, (4), 1984.
- [2] B. Baldwin and H. Lomax. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. In *AIAA 78-2587, 16<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting – Huntsville, Alabama*, 1978.
- [3] J.E. Bardina, P.G. Huang, and T.J. Coakley. Turbulence modeling validation, testing and development. Technical report, NASA, April 1997. TM 110446.
- [4] J. Boussinesq. Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans des lits rectilignes à grande section. Gauthier-Villars, 1897.
- [5] M. Breuer, B. Jaffrezic, and K. Arora. Hybrid LES-RANS technique based on a one-equation near-wall model. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 22 :157–187, 2008.
- [6] H.C. Chen and V.C. Patel. Near-wall turbulence models for complex flows including separation. *AIAA Journal*, 26(6) :641–648, june 1985.
- [7] C. Content. *Méthodes innovantes pour le calcul de la transition laminaire-turbulent dans les codes Navier-Stokes*. PhD thesis, These de doctorat, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2011.
- [8] J. Cousteix. Turbulence et couche limite. Collection La Cheveche, Cepadues-Editions, 1989.
- [9] S. Deck. Zonal-detached eddy simulation of the flow around a high-lift configuration. *AIAA Journal*, 43(11) :2372–2384, 2005.
- [10] S. Deck. Recent improvements in the Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES) formulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 26(6) :523–550, 2012.
- [11] A. Dervieux, M. Braza, and J-P. Dussauge. Computation and comparison of efficient turbulence models for aeronautics. Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 65, Ed. Vieweg, 1998.
- [12] P.A. Durbin. On the  $k - \varepsilon$  stagnation point anomaly. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 17(1) :89–90, 1996.
- [13] P.A. Durbin. Limiters and wall treatments in applied turbulence modeling. *Fluid Dyn. research*, 41(1) :012203, 2009.
- [14] A. Favre. Equations des gaz turbulents compressibles. *Journal de mécanique*, 4(3) :361–390, 1965.
- [15] J. Frohlich and D. von Terzi. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 44 :349–377, 2008.
- [16] T. Gatski and J-P. Bonnet. Compressibility, turbulence and high speed flow. Elsevier, 2009.
- [17] S.S. Girimaji and K.S. Abdol-Hamid. Partially-averaged Navier Stokes model for turbulence : Implementation and validation. In *AIAA 2005-502, 3rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 10-13 January 2005, Reno, Nevada*, 2005.
- [18] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows - fundamentals of numerical discretization, volume I. John Wiley & Sons, 1988.

- [19] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows, volume II. John Wiley & Sons, 1990.
- [20] Y. Hoarau. *Analyse physique par simulation numérique et modélisation des écoulements décollés instationnaires autour de surfaces portantes*. PhD thesis, These de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2002.
- [21] A. Jameson. Multigrid algorithms for compressible flow calculations. Lecture Notes in Mathematics n° 1228, Springer-Verlag, 1985.
- [22] A. Jameson. Time dependent calculations using multigrid with applications to unsteady flows past airfoils and wings. In *AIAA paper 91-1259, 10<sup>th</sup> Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu (HI)*, 1991.
- [23] A. Jameson and T. Baker. Solution of the Euler equations for complex configurations. In *AIAA 6th Computational Fluid Dynamics Conference*, July 1983.
- [24] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes. In *AIAA Paper 81-1259*, June 1981.
- [25] C.L.V. Jayatilleke. The influence of Prandtl number and surface roughness on the resistance of the laminar sublayer to momentum and heat transfer. *Prog. Heat Mass Transfer*, 1 :193, 1969.
- [26] W.P. Jones and B.E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15 :301–314, 1972.
- [27] A.N. Kolmogorov. Local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 30 :299–303, 1941.
- [28] R.B. Langtry. *A Correlation-Based Transition Model Using Local Variables for Unstructured Parallelized CFD Codes*. PhD thesis, These de doctorat, Stuttgart University, 2006.
- [29] R.B. Langtry and F.R. Menter. Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes. *AIAA Journal*, 47(12) :2894–2906, 2009.
- [30] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, 3 :269–289, 1974.
- [31] S. Lele. Compressibility effects on turbulence. *Annual review of Fluid Mechanics*, 26 :211–254, 1994.
- [32] F.R. Menter. Improved two-equation  $k - \omega$  turbulence models for aerodynamic flows. Technical report, NASA Technical Memorandum 103975, October 1992.
- [33] F.R. Menter. Zonal two equation  $k - \omega$  turbulence models for aerodynamic flows. In *AIAA 93-2906, 24th Fluid Dynamics Conference - Orlando, Florida*, July 6–9 1993.
- [34] F.R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8) :1598–1605, 1994.
- [35] F.R. Menter. Review of the shear-stress transport turbulence model experience from an industrial perspective. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 23(4) :305–316, 2009.
- [36] F.R. Menter. The scale-adaptive simulation method for unsteady turbulent flow predictions. Part 1 : Theory and model description. *Flow, Turbulence and Combustion*, 85(1) :113–138, 2010.
- [37] F.R. Menter. The scale-adaptive simulation method for unsteady turbulent flow predictions. Part 2 : Application to complex flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 85(1) :139–165, 2010.
- [38] F.R. Menter and Y. Egorov. A scale-adaptive simulation model using two-equation models. In *AIAA 2005-1095, 43rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit - Reno, Nevada*, January 10–13 2005.
- [39] F.R. Menter, T. Esch, and S. Kubacki. Transition modelling based on local variables. In *5th International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, Mallorca, Spain*, 2002.
- [40] F.R. Menter, R.B. Langtry, S.R. Likki, Y.B. Suzen, P.G. Huang, and S. Volker. A correlation-based transition model using local variables Part I - model formulation. In *ASME GT2004-53452. ASME Turbo Expo 2004 Power for Land, Sea and Air, Vienna, Austria*, June 14–17 2004.

- [41] R. Michel, C. Quemard, and R. Durand. Application d'un schéma de longueur de mélange à l'étude des couches limites turbulentes d'équilibre. Note Technique 154, ONERA, 1969.
- [42] H. Ha Minh and A. Kourta. Semi-deterministic turbulence modelling for flows dominated by strong organized structures. In *Proc. Symp. Turbulent Shear Flows, Kyoto*, 1993.
- [43] J.G. Moore and J. Moore. Realizability in two equation turbulence models. In *AIAA 99-3779. 30th Fluid Dynamics Conference, Norfolk, Virginia*, 28 June - 1 July 1999.
- [44] M.V. Morkovin. Effects of compressibility on turbulent flows. Colloque International CNRS No 108, Mécanique de la Turbulence, Editions CNRS, 1961.
- [45] V.C. Patel, W. Rodi, and G. Scheuerer. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows : A review. *AIAA Journal*, 23(9) :1308–1319, 1985.
- [46] W.C. Reynolds and AKMF Hussain. The mechanics of an organized wave in trubulent shear flow. part 3. theoretical models and comparisons with experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 54(2) :263–288, 1972.
- [47] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameters vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43 :357–372, 1981.
- [48] J.C. Rotta. *Turbulente Stromungen*. BG Teubner Stuttgart, 1972.
- [49] S. Sarkar, G. Erlebacher, M.Y. Hussaini, and H.O. Kreiss. The analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 227 :473–493, 1991.
- [50] M. Shur, P.R. Spalart, M. Strelets, and A.K. Travin. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29 :1638–1649, 2008.
- [51] P.R. Spalart. Strategies for turbulence modelling and simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21 :252–263, 2000.
- [52] P.R. Spalart. Detached-eddy simulation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41 :181–202, 2009.
- [53] P.R. Spalart and S.R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In *AIAA 92-0439, 30<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting – Reno, Nevada*, January 6-9 1992.
- [54] P.R. Spalart and S.R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aéropatiale*, (1) :5–21, 1994.
- [55] P.R. Spalart, S. Deck, M.L. Shur, K.D Squires, M.K. Strelets, and A. Travin. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theoretical Computational Fluid Dynamics*, 20 :181–195, 2006.
- [56] P.R. Spalart, W.H Jou, M. Strelets, and S.R. Allmaras. Comments on the feasibility of LES for wings and on hybrid RANS//LES approach. In *1st AFSOR Int. Conf. on DNS/LES - Ruston*, 1997.
- [57] C.G. Speziale and T.B. Gatski. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *Physic of Fluids*, 4(7) :1510–1520, 1992.
- [58] H. Tennekes and J.L. Lumley. A first course in turbulence. Massachusetts Institute of Technology, 1972.
- [59] EF. Toro. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. 2nd edition, New York : Springer, 1999.
- [60] E.R. van Driest. Turbulent boundary layer in compressible fluids. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 18 :145–160, 1951.
- [61] E.R. van Driest. On turbulent flow near a wall. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23 :1007–1011, 1957.
- [62] D.K. Walters and J.H. Leylek. A new model for boundary layers transition using a single-point RANS approach. *Journal of Turbomachinery*, 126 :193–202, 2004.

- [63] F.M. White and G.H. Christoph. A simple theory for the two-dimensional compressible turbulent boundary layer. *Journal of Basic Engineering*, pages 636–642, September 1972.
- [64] D.C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11) :1299–1310, November 1988.
- [65] D.C. Wilcox. Turbulence modeling for cfd. DCW Industries, La Cañada, California, 1998.
- [66] V. Yakhot and S.A. Orszag. Renormalization group analysis of turbulence. *Journal of Sci. Computational*, 1(3), 1986.
- [67] V. Yakhot, S.A. Orszag, S. Thangam, T.B. Gatski, and C.G. Speziale. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physic of Fluids*, 4(7) :1510–1520, 1992.