Analyse de la mesure
Méthodologie

Concepts fondamentaux

Mesurage → Valeur du mesurande (grandeur particulière)

→ Définir la méthode et la procédure de mesure

→ Analyse des résultats de mesures

Estimation de la grandeur
Incertitude de mesure
correction de la mesure (effet systématique)

→ Comment présenter un résultat de mesure?

Evalualtion de Type A de l'incertitude-Type

Mesure d'une grandeur $\rightarrow$ n observations indépendantes X_k

Moyenne arithmétique des n observations $\rightarrow$ $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$

Variance expérimentale $\rightarrow$ $S^2(X_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$

Ecart type expérimental $\rightarrow$ $S(X_k)$

Ecart type expérimental de la moyenne $\rightarrow$ $s\left(\overline{X}\right) = \frac{s(X_k)}{\sqrt{n}}$

Modélisation d'un mesurage

Le mesurande Y n'est pas mesuré directement

$$Y = f\left(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_N\right)$$

X_i grandeur d'entrée

Exemple : puissance dissipée par une résistance à T

$$P = f\left(V, R_0, \alpha, t\right) = \frac{V^2}{R_0\left[1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right]}$$

Evalualtion de Type B de l'incertitude-Type

Pour une estimation x_i d'une variable d'entrée X_i qui n'a pas été obtenue à patir d'observations répétées, la variance estimée associée $u^2(x_i)$ ou l'incertitude-type $u(x_i)$ est obtenue par un jugement scientifique fondé sur toutes informations disponibles sur la variabillité de X_i .

* Résultats de mesures antérieures
* Spécification du constructeur
* Données fournies par un certificat d'étalonnage ou autres certificats
* L'incertitude assignée à des valeurs de références provenants d'ouvrages
* L'expérience ou la connaissance générales du comportement et des Propriétés des matériaux et instruments utilisés.

Evalualtion de Type B de l’incertitude-Type

la variance estimée associée $u^2(x_i)$ ou l’incertitude-type $u(x_i)$ Évaluées de cette façon sont appelés respectivement variance de Type B et incertitude-type de Type B

Remarque

Une évaluation de type B d’une incertitude-type peut être aussi faible qu’une évaluation de type A

Determination de l'incertitude type-composée

I- Grandeurs d'entrée non corrélés

$$Y = g\left(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_N\right)$$

Toutes les grandeurs d'entrée sont indépendantes

L'incertitude de y estimation du mesurande Y donc le résultat de mesurage est

$$u_c^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]^2 u^2\left(x_i\right)$$

u^2 (x_i) est l'incertitude - type

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial g}{\partial X_i}\right|_{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N}$$

Remarque

Lorsque la linéarité de f devient trop significative, il faut inclure les termes d’ordre supérieures

Par exemple lorsque la loi de chaque Xi est symétrique autour de sa moyenne Les termes non linéaire les plus importants sont:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right\}^2 + \frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial^3 g}{\partial x_i \partial x_j^2}\right] u^2(x_i)\, u^2(x_j)$$

Determination de l'incertitude type-composée (I)

I- Grandeurs d'entrée corrélés

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_N)$$

Si les X_i sont significativement corrélés

L'incertitude de y estimation du mesurande Y donc le résultat de mesurage est

$$u_c^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j)$$

u^2 (x_i) est l'incertitude – type

u (x_i,x_j) = u (x_j, x_i) est la covariance estimée associée à x_i et x_j

Determination de l'incertitude type-composée (II)

I- Grandeurs d'entrée corrélés

Le degrè de corrélation est caractérisé par le coefficient de corrélation

$$\rho\left(x_i, x_j\right) = \frac{u\left(x_i, x_j\right)}{u\left(x_i\right) \cdot u\left(x_j\right)}$$

$$\rho\left(x_i, x_j\right) = \rho\left(x_j, x_i\right) \text{ et } -1 \leq \rho\left(x_i, x_j\right) \leq +1$$

Concepts et termes statistiques fondamentaux

Une expérience physique donne un nombre fini de mesures

L'ensemble résultat $\mathscr{E}$ = Echantillon {xi }

Si au cours de n répétitions de $\mathscr{E}$, le résultat x est apparue n_x la fréquence f_x

$$f_x = \frac{n_x}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} f_x = P(x)$$

P(x) est la probabilité de trouver le résultat x

Déscription d'une variable aléatoire (I)

Variable aléatoire discrète

$$P_i = P(x = x_i)$$

$$\text{avec } P_i \in [0,1] \text{ et } \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

La fonction de répartition F est définie par

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{i} P_j = P_1 + P_2 + \ldots P_i = P(x \leq x_i)$$

Quelques propriétés

- $F(x_i)$ n'est jamais décroissant

- $P(a<x<b)=F(b)-F(a)$

Déscription d'une variable aléatoire (II)

Variable aléatoire continue $\longrightarrow$ Densité de probabilité $f_X(u)$

$$\boxed{P(X \in A) = \int_A f_X(u)\,du}$$

La fonction de répartition F est définie par

$$\boxed{F_X(u) = P(X \leq u)}$$

Quelques propriétés

- $F_X(x)$ n'est jamais décroissant
- $F_X(x)$ varie de 0 à 1 quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$ ($F_X(-\infty) = 0$ et $F_X(+\infty) =$
- $P(a<X<b)=F_X(b)-F_X(a)$

Notions associés à la variable aléatoire (III)

Espérance mathématiques d'une variable aléatoire X

v.a. discrète → $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$

v.a. continue → $E(X) = \mu = \int_D x \, f_X(x) \, dx$

Variance

v.a. discrète → $V(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, P(x_i)$

v.a. continue → $V(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \int_D (x-\mu)^2 f_X(x) \, dx$

Ecart type → $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Ecart type relative → σ / μ

Variance relative → σ^2 / μ^2

Notions associés à la variable aléatoires (IV)

Ecart type (d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité)

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Covariance de deux variables aléatoires

$$\operatorname{cov}(y,z) = \operatorname{cov}(z,y) = E\{[y - E(y)][z - E(z)]\}$$

$$\operatorname{cov}(y,z) = \iint (y - \mu_Y)(z - \mu_z) P(y,z)\,dy\,dz$$

P(y,z) est la densité de probabilité jointe des deux variables

La covariance peut être estimé par s(yi, zi) obtenue de n paires indépedantes D'observations simultanées yi, zi de y et z.

$$s(y_i, z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

Notions associées à la variable aléatoires (V)

Variable aléatoire centrée réduite

X v.a. d'espérence $E(X) = \mu$ et de variance $V(X) = \sigma^2$

→ $X - \mu$ est la v.a centrée d' espérence nulle

X/σ est la v.a réduite de variance unité

$(X-\mu) / \sigma$ est la v.a centrè réduite d'espérence 0 et de variance 1

Covariance

X_1 et $X_2 \rightarrow E(X_{1/2}) = \mu_{1/2}$ et $V(X_{1/2}) = \sigma_{1/2}$

→

$$\boxed{\begin{aligned} E(Y) &= \mu_1 \pm \mu_2 \\ V(Y) &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm 2\sigma_{12} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\sigma_{12} = \mathrm{cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]}$$

Notions associés à la variable aléatoires (VI)

Généralisation au cas de k variables aléatoires X_1, X_2, ….X_k:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} \quad alors \quad \underline{E}(\underline{X}) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} et \quad \underline{V}(\underline{X}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{21} & .. & \sigma_{k1} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & .. & \sigma_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1k} & \sigma_{2k} & .. & \sigma_k^2 \end{pmatrix}$$

Matrice de Variance-covariance

$$\boxed{\underline{V}(\underline{X}) = \underline{E}\left\{\left[\underline{X} - \underline{E}(\underline{X})\right]\left[\underline{X} - \underline{E}(\underline{X})\right]^T\right\}}$$

I- Loi normale (loi de Gauss)

Une v.a X suit une loi de Gauss ou loi normale notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si sa densité de probabilité est

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

La fonction de répartition associée s'écrit

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^X \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} dt$$

Loi fondamentale de la statistique →théorème de la limite centrale

Remarque

On appelle quantile (fractile) d'ordre q de la variable X, où q ϵ {0,1}, la valeur x_q telle que $P(X<x_q)=q$ ou de même $F_X(x_q)=q$.

Lois fondamentales de l'échantillonnage

Observations répétées → **Echantillon aléatoire de taille n**

→ **Suite de n v.a indépendante régies par la même loi mère**

Moyenne de l'échantillon ou moyenne empirique →

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Variance empirique →

$$\widetilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

Variance de l'échantillon →

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

Loi du Khi-deux:

Soit Z_1, Z_2, …,Z_ν, une suite de v.a.i,de loi $\mathcal{N}(0;1)$. ALors la variable $\sum_{i=2}^{\nu} Z_i^2$ suit une loi appelée loi du Khi-deux à ν degrés de libertés, noté $X^2(\nu)$.

Densité de probabilité associée est

$$f_\nu(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\, x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad \textit{pour } x > 0 \textit{ (sinon 0)}$$

La fonction Gamma est définie par

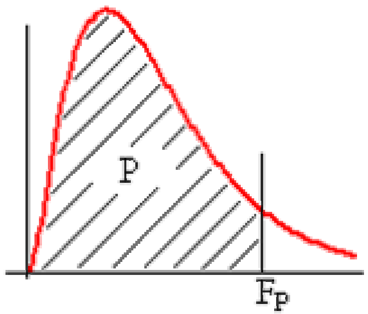
$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt}$$

Propriétés élémentaires de la loi du khi-deux

- **l'espérance de la loi $\chi^2(\nu)$ est égale à ν**
- **la variance de la loi $\chi^2(\nu)$ est égale à 2ν**
- **$\chi^2(2)$ = exponentielle(1/2)**

Fractiles de la loi du χ^2 (ν)

Cette table donne les fractiles F_P de la loi de khi-deux à ν degrés de liberté : P = Probabilité ($\chi^2 < F_P$)



P
ν

	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9
1	0.000	0.001	0.004	0.016	0.036	0.064	0.102	0.148	0.275	0.455	0.708	1.074	1.323	1.642	2.072	2.706
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.325	0.446	0.575	0.713	1.022	1.386	1.833	2.408	2.773	3.219	3.794	4.605
3	0.115	0.185	0.352	0.584	0.798	1.005	1.213	1.424	1.869	2.366	2.946	3.665	4.108	4.642	5.317	6.251
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.366	1.649	1.923	2.195	2.753	3.357	4.045	4.878	5.385	5.989	6.745	7.779
5	0.554	0.752	1.145	1.610	1.994	2.343	2.675	3.000	3.656	4.351	5.132	6.064	6.626	7.289	8.115	9.236
6	0.872	1.134	1.635	2.204	2.661	3.070	3.455	3.828	4.570	5.348	6.211	7.231	7.841	8.558	9.446	10.645
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.358	3.822	4.255	4.671	5.493	6.346	7.283	8.383	9.037	9.803	10.748	12.017
8	1.647	2.032	2.733	3.490	4.078	4.594	5.071	5.527	6.423	7.344	8.351	9.524	10.219	11.030	12.027	13.362
9	2.088	2.532	3.325	4.168	4.817	5.380	5.899	6.393	7.357	8.343	9.414	10.656	11.389	12.242	13.288	14.684
10	2.558	3.059	3.940	4.865	5.570	6.179	6.737	7.267	8.295	9.342	10.473	11.781	12.549	13.442	14.534	15.987
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.336	6.989	7.584	8.148	9.237	10.341	11.530	12.899	13.701	14.631	15.767	17.275
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.114	7.807	8.438	9.034	10.182	11.340	12.584	14.011	14.845	15.812	16.989	18.549
13	4.107	4.765	5.892	7.041	7.901	8.634	9.299	9.926	11.129	12.340	13.636	15.119	15.984	16.985	18.202	19.812
14	4.660	5.368	6.571	7.790	8.696	9.467	10.165	10.821	12.078	13.339	14.685	16.222	17.117	18.151	19.406	21.064
15	5.229	5.985	7.261	8.547	9.499	10.307	11.037	11.721	13.030	14.339	15.733	17.322	18.245	19.311	20.603	22.307

Loi de Student

Soit Z et Q deux v.a indépedantes telles que Z ↠ $\mathcal{N}$(0;1), Q ↠ $X^2(\nu)$. Alors la v.a

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Q}{\nu}}}$$

Suit une loi appelée loi de Student à ν degrés de liberté, notée t(ν)

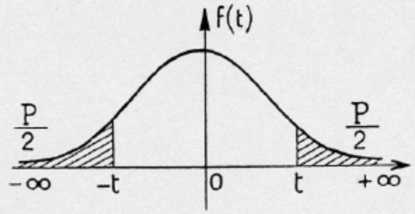
Densité de probabilité associée est

$$f_\nu(x) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad , \boldsymbol{x} \in \Re$$

Propriétés élémentaires de la loi du khi-deux

- **l'espérance E(T) = 0 si** $\nu \geq 2$
- **la variance V (T) =** $\nu/(\nu-2)$ **si** $\nu \geq 3$

Table de distribution de T (Loi de Student)
Valeurs de T ayant la probabilité P d'être dépassées en valeur absolue.



ν \ P	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Théoème de la limite centrale

Soit $\{X_n\}$ une suite de v.a indépendantes de même loi admettant une moyenne μ et une variance σ^2. Alors la suite $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$, s'écrit:

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \aleph(0;1)$$

Remarque :

n>30 suffit pour obtenir une approximation de probabilité à 0.02 prés

Théorie de l'estimation

X une v.a à un certain phénomène aléatoire observable de façon répétée

Estimer certaines caractéristique d'intérêt de sa loi
(moyenne, variance, fonction de répartion, densité de probabilité,..)
sur la base d'une série d'observation (x_1, x_2,….,x_n)

Estimation ponctuelle

Attribuer au mieux une valeur unique à la caractéristique

Estimation par intervavalle

Attribuer un encadrement plausible à la caractéristique

Définition informelle d'un estimateur et d'une estimation:

Estimer une caractéristique c de la variable aléatoire X sur la base de la réalisation $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ de n-échantillo $(X_1, X_2,\ldots,X_n)$. On appelle estimateur toute statistique donc toute fonction de $X_1, X_2,\ldots,X_n$ dont la réalisation après expérience est envisagée comme estimation de c.

Un estimatateur se définit dans l'intention de fournir une estimation.

Un estimateur est une variable aléatoire
Une estimation est une valeur numérique prise par l'estimateur suite à la réalisation de n-échantillons.

Si un estimateur est déterminé par une fonction h $(X_1, X_2,\ldots,X_n)$, l'estimation correspondante est h $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$.

Exemple

moyenne E(X) de la loi X, un estimateur est la moyenne empirique $\overline{X}$ qui produit une estimation $\overline{x}$ moyenne descriptive de la serie de valeur observée.

Cadre de l’estimation paramétrique:

En estimation paramétrique la loi de X appartient à une famille de loi décrite

→ **Forme fonctionnelle connue par fonction de répartion, densité de probabilité..**

dépendant de un ou plusieur paramètres inconnus réels, on note θ ce paramètre
qui peut être un vecteur paramètre. L’enesemble des valeurs possibles θ appelés espace paramètrique sera noté Θ inclu dans R^k , k dimension du paramètre.

Exemple:
La famille des lois de Gauss est décrite par la famille des densités de probabiliés de la forme

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\}$$

$$un\ paramètre\ \left(\mu, \sigma^2\right)$$

$$L'espace\ \ paramétrique\ est\ \left\{\left(\mu, \sigma^2\right) \middle| \mu \in \Re, \sigma^2 \in \Re, \sigma^2 \geq 0\right\}.$$

Notation pour les estimateurs et les estimations:

Pour un paramètre désigné par une certaine lettre θ on note

souvent un estimateur par $\hat{\theta}$

On rajoute un indice pour justifier la méthode d’estimation

Qualités des estimateurs

? Choisir l’estimateur $\Rightarrow$ **Critère de qualité pertinents**

On note T_n l’estimateur de θ à étudier, comme θ est inconnue, il faut que le Comportement de T_n soit satisfaisant quelques soit θ c.a.d quelques soit la Loi mère.

Biais d'un estimateur

Soit une v.a. X de loi de densité (ou fonction de probabilité); f(x;θ) où $\theta \in \Theta \subseteq \Re$.
Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Un n-échantillon issu de cette loi et T_n un estimateur de θ.
On appelle biais de T_n pour θ la valeur:

$$b_\theta(T_n) = E_\theta(T_n) - \theta$$

Si $b_\theta(T_n) = 0 \ \forall \theta \in \Theta$, on dit que T_n est un estimateur sans biais

Exemple

Considérons la variance empirique $\widetilde{S}^2$ comme estimateur de la variance où

$$\widetilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)$$

$$E_\theta\left(\widetilde{S}^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2(\theta)$$

Le biais est $$b_\theta\left(\widetilde{S}^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2(\theta) - \sigma^2(\theta) = -\frac{1}{n}\sigma^2(\theta)$$

Il s'agit donc d'un estimateur biaisé

On prend souvent comme variance espérimentale $\longrightarrow$

$$S^2(X_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$$