

Marc Pogu

Analyse appliquée



Centrale Nantes

École Centrale de Nantes — 2012

Ce document est sous licence Creative Commons 3.0 France:

- paternité;
- pas d'utilisation commerciale;
- partage des conditions initiales à l'identique;

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr>





Table des matières

1	Espaces vectoriels normés	5
1.1	Normes	5
1.1.1	Contexte	5
1.1.2	Normes équivalentes	5
1.2	Suites	6
1.2.1	Suites de Cauchy	6
1.2.2	Espaces de Banach	6
1.3	Théorème de point fixe	7
1.3.1	Existence du point fixe	7
1.3.2	Existence et unicité de la solution d'une classe d'équations différentielles	7
1.4	Généralités sur l'optimisation	7
1.4.1	Présentation du problème	7
1.4.2	Suites minimisantes	7
2	Espace vectoriel muni d'un produit scalaire	9
2.1	Introduction du produit scalaire	9
2.1.1	Forme bilinéaire symétrique	9
2.1.2	Forme bilinéaire symétrique positive	9
2.1.3	Forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée	10
2.2	Espace de Hilbert	10
2.2.1	Définition de base	10
2.2.2	Exemple fondamental	11
2.3	Projection dans un espace de Hilbert	11
2.3.1	Définitions de base	11
2.3.2	Caractérisation de la projection	11
2.4	Théorème de représentation de Riesz	12
2.4.1	Notions préliminaires	12
2.4.2	Correspondance entre forme linéaire continue et vecteurs d'un espace de Hilbert	13

3	Fonctions à dérivées généralisées	15
3.1	Notion de dérivée généralisée	15
3.1.1	Fonction à support borné	15
3.1.2	Dérivées généralisées	16
3.1.3	Dérivées généralisées d'ordre $ \alpha \geq 1$	17
3.1.4	Dérivées généralisées de carré sommable	17
3.2	Propriétés de densité	18
3.2.1	Densité	18
3.2.2	Applications	18
4	Espaces associés au laplacien	19
4.1	Un espace fondamental	19
4.1.1	L'espace $\mathcal{H}^1(G)$	19
4.1.2	Notion de trace	20
4.1.3	Formule de Green généralisée	20
4.2	Fonctions de $\mathcal{H}^1(G)$ à trace nulle	20
4.2.1	L'espace $\mathcal{H}_0^1(G)$	20
4.2.2	Propriétés	20
4.2.3	Inégalité de Poincaré	20
4.2.4	Résolution du problème de Dirichlet	21
5	Mouvement brownien	23
5.1	Modèle de Wiener	23
5.1.1	Ensemble des trajectoires	23
5.1.2	Fonctions définies sur l'ensemble des trajectoires	23
5.1.3	Intégrale par rapport à la densité de Gauss	24
5.2	Calcul stochastique	24
5.2.1	Intégrales stochastiques	24
5.2.2	Équations différentielles stochastiques	25
5.2.3	Formule de Itô	25
5.3	Problème de Dirichlet	25
5.3.1	Temps d'atteinte	25
5.3.2	Représentation intégrale	25
5.3.3	Résolution approchée	26
6	Espace de Hilbert et convergence faible	29
6.1	Base et espace de Hilbert	29
6.1.1	Bases hilbertiennes	29
6.1.2	Identité de Bessel-Parseval	29
6.2	Convergence faible	30
6.2.1	Notions préliminaires	30
6.2.2	Propriétés usuelles	30
6.3	Compacité faible	30
	Exercices	31
	Références	47

Chapitre 1

Normes

Contexte
Normes équivalentes

Suites

Suites de Cauchy
Espaces de Banach

Théorème de point fixe

Existence du point fixe
Existence et unicité de la solution d'une classe d'équations différentielles

Généralités sur l'optimisation

Présentation du problème
Suites minimisantes

Espaces vectoriels normés

Les notions exposées ici sont maintenant d'un emploi classique pour les Mathématiques issues de l'art de l'ingénieur. Les espaces vectoriels sont pris sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cependant les propriétés établies s'étendent aisément pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1 Normes

1.1.1 Contexte

Définition 1.1 Étant donné un espace vectoriel E , une norme sur E est une application notée $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ telle que :

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (1.1)$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (1.2)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (1.3)$$



Une norme est obligatoirement positive avec cette définition.

Vocabulaire Un espace vectoriel muni d'une norme est un espace vectoriel normé.

Proposition 1.1 On a les propriétés :

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \quad (1.1)$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \quad \text{où } n \text{ est un entier fini} \quad (1.2)$$

1.1.2 Normes équivalentes

Définition 1.2 Soit un espace vectoriel muni des normes N_1 et N_2 . On dit qu'elles sont équivalentes lorsqu'il existe $c, d \in]0; +\infty[$ tels que

$$cN_1 < N_2 < dN_1 \quad (1.3)$$

Théorème 1.1 Sur $E = \mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes.


1.2 Suites

Définition 1.3 Soit E un espace vectoriel. Une suite est un ensemble (fini ou infini) de vecteurs de E indicés par $\mathbb{N} : u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$

Notation 1.1 $u = (u_n)$

Définition 1.4 Étant donné un espace vectoriel normé E , $\|\cdot\|$ et un vecteur $\ell \in E$, la suite u converge vers ℓ lorsque :

$$\|u_n - \ell\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

 Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes, la convergence de u vers ℓ dans (E, N_1) équivaut à la convergence de u vers ℓ dans (E, N_2) .

Proposition 1.2 Lorsqu'elle existe la limite d'une suite est unique.

1.2.1 Suites de Cauchy

Définition 1.5 Étant donné un espace vectoriel normé E , une suite u est de Cauchy lorsque :

$$\|u_m - u_n\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } m \text{ et } n \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

La condition (1.5) est équivalente à :

$$\|u_n - u_{n+p}\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } m \rightarrow \infty, \quad \forall p \quad (1.6)$$

Proposition 1.3 Étant donné un nombre réel $k \in]0; 1[$ et une suite u telle que :

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq k \|u_n - u_{n-1}\| \quad (1.7)$$

alors c'est une suite de Cauchy.

Définition 1.6 Étant donné un espace vectoriel normé E , $\|\cdot\|$, un nombre réel $k \in]0; 1[$ et une application f de E dans E ; f est contractante lorsque :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| \quad (1.8)$$

Exemple 1 (Procédé des approximations successives) Si f est contractante, la suite u définie pour u_0 quelconque par $u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite de Cauchy.

1.2.2 Espaces de Banach

Définition 1.7 Un espace vectoriel normé dans lequel toutes les suites de Cauchy convergent est un espace de Banach.

Exemple 2 L'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}^n)$ définies sur l'intervalle $[a; b]$ ($a, b \in]-\infty; +\infty[$) à valeurs dans \mathbb{R}^n et muni de la norme du "sup" :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [a; b]\} \quad (1.1)$$

est un espace de Banach.

1.3 Théorème de point fixe : application aux équations différentielles

1.3.1 Existence du point fixe

Théorème 1.2 (Point fixe de Banach) Étant donné un espace de Banach E et une application f de E dans E contractante, alors le procédé d'approximation successive converge vers un point fixe unique $\ell \in E$ donné par :

$$\ell = f(\ell) \quad (1.2)$$

Proposition 1.4 Étant donné un espace de Banach E et une application f de E dans E telle qu'il existe un entier $m \geq 1$ fixé pour que l'application $g = f^m = f \circ f \dots \circ f$ m fois soit contractante, alors f a un point fixe unique dans E .

1.3.2 Existence et unicité de la solution d'une classe d'équations différentielles


Théorème 1.3 (de Cauchy Lipschitz) Soient :

1. les données : $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et f une application de $[a; b] \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n ;
2. les hypothèses : f continue et $|f(x, y) - f(x, z)| \leq c|y - z|$ avec $0 < c < +\infty$,
 $\forall x \in [a; b], \forall y, z \in \mathbb{R}^n$.

alors l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

admet une solution unique y dont la dérivée est continue sur $[a; b]$.

 Sous les données et hypothèses précédentes, la solution approchée y_h construite par la méthode d'Euler converge vers la solution y de (1.3) dans $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}^n)$; on a $\|y - y_h\|_\infty \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Le théorème 1.3 est encore valable lorsqu'on y remplace \mathbb{R}^n par un espace de Banach.

1.4 Généralités sur l'optimisation

1.4.1 Présentation du problème

Soit V un espace vectoriel normé et K un sous ensemble de V ($K \subset V$) ; on considère une fonctionnelle $J : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.8 La fonctionnelle J est bornée inférieurement sur K lorsque :

$$\exists a \in]-\infty; \infty[, \quad J(v) \geq a, \quad \forall v \in K \quad (1.4)$$

De (1.4), on peut définir la borne inférieure :

$$m = \inf\{J(v) ; v \in K\} \quad (1.5)$$

Le problème revient à évaluer m et l'ensemble $A_{m+\epsilon} = \{v \in K, J(v) \leq m + \epsilon\}$.

1.4.2 Suites minimisantes

Définition 1.9 Une suite $(v_n) \in K$ telle que $J(v_n) \rightarrow m$ est une suite minimisante dans K .

Proposition 1.5 Sous l'hypothèse de (1.4), il existe toujours des suites minimisantes dans K .

Chapitre 2

Introduction du produit scalaire

- Forme bilinéaire symétrique
- Forme bilinéaire symétrique positive
- Forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée

Espace de Hilbert

- Définition de base
- Exemple fondamental

Projection dans un espace de Hilbert

- Définitions de base
- Caractérisation de la projection

Théorème de représentation de Riesz

- Notions préliminaires
- Correspondance entre forme linéaire continue et vecteurs d'un espace de Hilbert

Espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Des propriétés de l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni d'un produit scalaire sont étendues au cas d'espaces vectoriels de dimension quelconque. Les espaces vectoriels sont pris sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.1 Introduction du produit scalaire

2.1.1 Forme bilinéaire symétrique

Définition 2.1 Étant donné un espace vectoriel V et une application f de $V \times V$ dans \mathbb{R} , c'est une forme bilinéaire lorsque :

$$\begin{aligned}f(u_1 + u_2, v) &= f(u_1, v) + f(u_2, v) \\f(u, v_1 + v_2) &= f(u, v_1) + f(u, v_2) \\f(\lambda u, v) &= \lambda f(u, v) \\f(u, \lambda v) &= \lambda f(u, v)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Définition 2.2 Une forme bilinéaire est symétrique lorsque $f(u, v) = f(v, u)$.

Définition 2.3 Étant donnée une forme bilinéaire symétrique, deux vecteurs u et v sont orthogonaux lorsque $f(u, v) = 0$.

Théorème 2.1 (de Pythagore) Étant donnée une forme bilinéaire symétrique et deux vecteurs u et v orthogonaux, on a l'identité :

$$f(u + v, u + v) = f(u, u) + f(v, v)\tag{2.2}$$

2.1.2 Forme bilinéaire symétrique positive

Définition 2.4 Une forme bilinéaire symétrique est positive lorsque :

$$\forall v, \quad f(v, v) \geq 0\tag{2.3}$$

Théorème 2.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Étant donnée une forme bilinéaire symétrique positive, on a la majoration :

$$|f(u, v)| \leq [f(u, u)]^{1/2}[f(v, v)]^{1/2}\tag{2.4}$$

Théorème 2.3 (Inégalité de Minkowski) Étant donnée une forme bilinéaire symétrique positive, on a la majoration :

$$[f(u + v, u + v)]^{1/2} \leq [f(u, u)]^{1/2} + [f(v, v)]^{1/2} \quad (2.5)$$

2.1.3 Forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée

Définition 2.5 Une forme bilinéaire symétrique positive est non dégénérée lorsque :

$$f(v, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0 \quad (2.6)$$

Définition 2.6 Un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique, positive et non dégénérée.

Proposition 2.1 Étant donné un espace vectoriel V et un produit scalaire f défini sur V , l'application :

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ v &\rightarrow [f(v, v)]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

est une norme sur V .

Vocabulaire C'est la norme associée au produit scalaire.

Notation 2.1 Le produit scalaire et la norme associée sont notés en général (\cdot, \cdot) et $|\cdot|$; on écrit :

– la bilinéarité :

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2, v) &= (u_1, v) + (u_2, v) \\ (u, v_1 + v_2) &= (u, v_1) + (u, v_2) \\ (\lambda u, v) &= \lambda(u, v) \\ (u, \lambda v) &= \lambda(u, v) \end{aligned} \quad (2.1)$$

– la symétrie :

$$(u, v) = (v, u) \quad (2.2)$$

– l'orthogonalité :

$$(u, v) = 0 \quad (2.3)$$

– le théorème de Pythagore :

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \quad (2.4)$$

– l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)| \leq |u| |v| \quad (2.5)$$

Proposition 2.2 (Critère de colinéarité) Pour $v \neq 0$, on a l'équivalence :

$$|(u, v)| = |u| |v| \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad u = \lambda v \quad (2.6)$$

2.2 Espace de Hilbert

2.2.1 Définition de base

Définition 2.7 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire tel que pour la norme associée, il est complet :

– *complet* signifie que toutes les suites de Cauchy de V convergent ;

- un espace de Hilbert est un cas particulier d'espace de Banach ; pour ce dernier on n'exige pas nécessairement que la norme soit associée à un produit scalaire.

Exemple 3 L'espace $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire :

$$(u, v) \rightarrow \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad (2.1)$$

est un espace de Hilbert.

2.2.2 Exemple fondamental

L'ensemble des fonctions v définies "presque partout" sur $(a; b)$ et de carré sommable :

$$V = \mathcal{L}^2(a; b) = \left\{ v ; \int_a^b v^2 dx < +\infty \right\} \quad (2.2)$$

C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_0 = \int_a^b u v dx \quad (2.3)$$

L'espace $\mathcal{C}^0([a; b])$ muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_0$ n'est pas un espace de Hilbert. Il n'est pas complet pour la norme induite par le produit scalaire. On a $\mathcal{C}^0([a; b]) \subsetneq \mathcal{L}^2(a; b)$. Ce dernier est le complété de $\mathcal{C}^0([a; b])$ pour la norme $|\cdot|_0$. On rappelle que ce complété est le plus petit espace vectoriel complet par rapport à la norme $|\cdot|_0$ qui contient $\mathcal{C}^0([a; b])$.

2.3 Projection dans un espace de Hilbert

2.3.1 Définitions de base

Définition 2.8 Soit V un espace vectoriel normé ; une partie A de V est fermée lorsqu'elle contient toutes les limites de ses suites convergentes dans V .

Définition 2.9 Étant donné un espace de Hilbert V et une partie A de V , l'orthogonal de A est l'ensemble :

$$A^\perp = \{u \in V ; (u, v) = 0, \forall v \in A\} \quad (2.4)$$

Proposition 2.3 A^\perp est un sous-espace vectoriel fermé.

2.3.2 Caractérisation de la projection

Théorème 2.4 Étant donné un espace de Hilbert V , $|\cdot|$, un sous-espace fermé M de V et un vecteur $u \in V$, il existe un vecteur unique $w \in M$ tel que :

$$|u - w| = d \quad (2.5)$$

où :

$$d = \inf\{|u - v| ; v \in M\} \quad (2.6)$$

Définition 2.10 Le vecteur w donné par le théorème est appelé projection de u sur M et est noté $w = Pu$.

Théorème 2.5 Sous les hypothèses du théorème 2.4, la projection est caractérisée par l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$w \in M, \quad |u - w| \leq |u - v|, \quad \forall v \in M \quad (2.7a)$$

$$w \in M, \quad (u - w, v) = 0, \quad v \in M \quad (2.7b)$$

Proposition 2.4 On a les propriétés :

$$u \in M^\perp \Rightarrow Pu = 0 \quad ; \quad P^2 = P \quad ; \quad P \text{ est linéaire} \quad ; \quad |Pu| \leq |u| \quad (2.8)$$

Ces propriétés ne caractérisent pas la projection Pu . Pour se souvenir de ces résultats, pensez aux dessins et au fait que M doit être fermé.

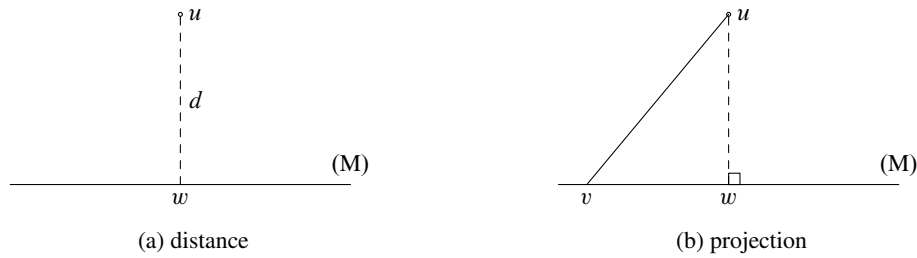


Figure 2.1: Propriétés d'un espace vectoriel avec produit scalaire

2.4 Application de la projection : théorème de représentation de Riesz

2.4.1 Notions préliminaires

Vocabulaire

- Étant donné un espace vectoriel V , une application linéaire de V dans \mathbb{R} est appelée *forme linéaire* ;
- Une application linéaire de V , $\|\cdot\|$ dans \mathbb{R} qui est continue est appelée *forme linéaire continue* ;
- L'ensemble des formes linéaires continues est un espace vectoriel, appelé *dual* de V et noté V' .

Proposition 2.5 Soient un espace vectoriel normé V , $\|\cdot\|$ et une forme linéaire continue F ; il existe une constante $c \in [0; +\infty[$ telle que :

$$v \in V, \quad |F(v)| \leq c\|v\| \quad (2.1)$$

Réciproquement, l'existence de c implique que F est une forme linéaire continue.

Par conséquent, l'application

$$V' \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ F \rightarrow \sup \left\{ \frac{|F(v)|}{\|v\|} ; v \in V, v \neq 0 \right\} \quad (2.2)$$

est une norme sur V' notée $\|\cdot\|'$ et on a :

$$|F(v)| \leq \|F\|' \cdot \|v\| \quad (2.3)$$

2.4.2 Correspondance entre forme linéaire continue et vecteurs d'un espace de Hilbert

Théorème 2.6 (de Riesz) Soient un espace de Hilbert V , (\cdot, \cdot) et une forme linéaire continue F de V' , $\|\cdot\|'$; alors il existe un vecteur unique $u \in V$ tel que :

$$(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V \quad (2.4)$$

De plus on a :

$$\|u\| = \|F\|' \quad (2.5)$$

Chapitre 3

Notion de dérivée généralisée

Fonction à support borné

Dérivées généralisées

Dérivées généralisées d'ordre $|\alpha| \geq 1$

Dérivées généralisées de carré sommable

Propriétés de densité

Densité

Applications

Fonctions à dérivées généralisées

La notion de dérivée généralisée est une extension de la dérivée au sens usuel. L'introduction des dérivées généralisées est motivée en particulier par :

- l'interprétation de la masse de Dirac ; cette notion intervient dans les modèles issus de la physique ;
- la construction d'espaces utiles pour l'étude des équations différentielles partielles usuelles.


Les définitions et propriétés seront introduites pour :

1. les fonctions f de carré sommable, $f \in \mathcal{L}^2$;
2. les fonctions f de carré sommable et dont les dérivées généralisées $\partial_i f$ sont de carré sommable, c'est-à-dire $\partial_i f \in \mathcal{L}^2$.

3.1 Notion de dérivée généralisée

3.1.1 Fonction à support borné

Définition 3.1 Étant donné un ouvert G de \mathbb{R}^n et une fonction f définie sur G à valeurs dans \mathbb{R} , elle est à support borné dans G s'il existe un fermé borné $A \subsetneq G$ tel que f soit nulle en dehors de A .

 A n'est pas unique.

Exemple 4 Soient $G = \mathbb{R}$ et la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{si } x \notin]0; 1[\end{cases} \quad (3.1)$$

La fonction f est à support borné, on peut prendre $A = [0; 1]$ ou $A = [1; 2]$.

Exemple 5 Soient $G = \mathbb{R}$ et la fonction $f(x) = x$. La fonction f n'est pas à support borné.

Exemple 6 Soit $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$ et on note : $x^0 = (1, 1)$; Considérons la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \quad (3.1)$$

La fonction f est à support borné ; on peut prendre $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^0| \leq 1/2 + \epsilon\}$ pour tout $\epsilon \in]0 ; 5/2 - \sqrt{2}[$.

⚠ Lorsque f est à support borné dans G , cela entraîne qu'elle s'annule sur la frontière ∂G de G .

Notation 3.1 Étant donné un ouvert G de \mathbb{R}^n , l'ensemble des fonctions φ qui sont à support borné dans G et indéfiniment dérivables est un espace vectoriel noté $\mathcal{D}(G)$.

⚠ Dire que φ est indéfiniment dérivable signifie que pour tout $m \in \mathbb{N}$ les dérivées partielles d'ordre m de φ existent.

3.1.2 Dérivées généralisées

Définition 3.2 Soient un ouvert G de \mathbb{R}^n et une application f de carré sommable. Lorsque la quantité :

$$E = \int_G f(x) \partial_i \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G) \quad (3.2)$$

peut se mettre sous la forme $E = L(\varphi)$ où L est linéaire en φ et ne fait pas intervenir les dérivées de φ , on dit que f admet une dérivée généralisée et on pose :

$$\partial_i f = -L \quad (3.3)$$

Exemple 7 Considérons $G =]-a ; a[\times]-a ; a[$ avec $a > 0$ et la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$E = \int_G f(x) \partial_1 \varphi(x) dx = L(\varphi) = \int_{-a}^a \varphi(0, x_2) dx_2 \quad (3.2)$$

On peut introduire $\Sigma = \{x ; x_1 = 0\}$ qui représente la courbe des sauts ; on note alors :

$$\int_{-a}^a \varphi(0, x_2) dx_2 = \delta_\Sigma(\varphi) \quad (3.3)$$

le symbole δ_Σ représente la masse de Dirac le long de Σ ; avec ces notations, on obtient $L(\varphi) = -\delta_\Sigma(\varphi)$ et l'on pose $\partial_1 f = \delta_\Sigma$.

Exemple 8 Soit l'ensemble G de l'exemple 7 et la fonction $f(x) = |x_1|$. En intégrant par parties, on obtient :

$$E = \int_G f(x) \partial_1 \varphi(x) dx = L(\varphi) = - \int_G \epsilon(x_1) \varphi(x) dx \quad (3.1)$$

où :

$$\epsilon(s) = \begin{cases} -1 & \text{si } s < 0 \\ 1 & \text{si } s > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

On pose $\partial_1 f = \epsilon$.

Définition 3.3 (Définition rigoureuse) Étant donné un ouvert G de \mathbb{R}^n et une application f de carré sommable $f \in \mathcal{L}^2(G)$; la dérivée généralisée de f notée $\partial_i f$ est la forme linéaire définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(G) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightarrow \partial_i f(\varphi) = -(f, \partial_i \varphi) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans $\mathcal{L}^2(G)$.

⚠ L'équation (3.3) signifie $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$, $\partial_i f(\varphi) = -(f, \partial_i \varphi)$ et f est une application dont l'espace de départ est $\mathcal{D}(G)$ et l'espace d'arrivée est \mathbb{R} .

Transformation de la divergence Étant donné $u = (u_1, \dots, u_n)$, $u_i \in \mathcal{L}^2(G)$; on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(G), \quad \operatorname{div} u(\varphi) = -(u, \nabla \varphi) \quad (3.4)$$

Proposition 3.1

1. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^2(G)$ telles que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$, $\partial_i f_1(\varphi) = \partial_i f_2(\varphi)$, alors $\partial_i f_1 = \partial_i f_2$.
2. Les dérivées généralisées conservent la linéarité : $\partial_i(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \partial_i f_1 + \lambda_2 \partial_i f_2$.

3.1.3 Dérivées généralisées d'ordre $|\alpha| \geq 1$

Définition 3.4 Étant donné une fonction $f \in \mathcal{L}^2(G)$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-indice, la dérivée généralisée d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ de f notée $\partial^\alpha f$ est la forme linéaire définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(G) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightarrow \partial^\alpha f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Proposition 3.2 On peut commuter les dérivées généralisées : $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$.

Exemple 9 Considérons l'ensemble $G = \{x \in \mathbb{R}^2; r < 1\}$ avec $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ et la fonction $f(x) = \log r$. On a $f \in \mathcal{L}^2(G)$ puisqu'en effet :

$$\int_G f(x) dx = 2\pi \int_0^1 (\log r)^2 r dr < +\infty \quad (3.1)$$

Par intégration par parties et en appliquant la formule de Green :

$$\int_{G_\epsilon} (\nabla u, \nabla v) dx = \int_{\partial G_\epsilon} (\partial_n u) v d\Gamma - \int_{G_\epsilon} (\Delta u) v dx \quad (3.2)$$

où $G_\epsilon = \{x \in G; \epsilon < |x| < 1\}$ avec $\epsilon \in]0; 1[$, on obtient $\Delta f(\varphi) = 2\pi\varphi(0)$. On peut introduire la forme linéaire δ_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(G) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightarrow \varphi(0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le symbole δ_0 représente la masse de Dirac à l'origine. Dans ces conditions Δf et $2\pi\delta_0$ sont deux applications qui coïncident sur le même espace de départ $\mathcal{D}(G)$; on a $\Delta f = 2\pi\delta_0$ où Δf est lu au sens dérivées généralisées.

3.1.4 Dérivées généralisées de carré sommable

Définition 3.5 Soit $f \in \mathcal{L}^2(G)$; lorsqu'il existe $g \in \mathcal{L}^2(G)$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(G), \quad \partial_i f(\varphi) = (g, \varphi)_0 \quad (3.4)$$

on dit que la dérivée généralisée de f est de carré sommable $\partial_i f \in \mathcal{L}^2(G)$ et l'on pose $\partial_i f = g$.

⚠ La définition 3.5 implique que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$, $\partial_i f(\varphi) = (\partial_i f, \varphi)_0 = -(f, \partial_i \varphi)_0$:

- dans l'exemple 8, on a $g = \epsilon(x) \in \mathcal{L}^2(G)$;
- dans les exemples 7 et 9, les dérivées généralisées ne sont pas de carré sommable; on peut montrer que $\delta \notin \mathcal{L}^2$.

Proposition 3.3


1. si f a des dérivées partielles continues, alors ses dérivées généralisées et dérivées usuelles coïncident ;
2. étant donnée une fonction θ à dérivées partielles continues sur $\bar{G} = F \cup \partial G$, alors :

$$\partial_i(\theta f) = (\partial_i \theta) f + \theta \partial_i f \quad (3.5)$$

Définition 3.6 Étant donné $f \in \mathcal{L}^2(G)$ et un opérateur aux dérivées partielles :

$$U = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \partial^{\alpha} \quad (3.6)$$

avec $a_{\alpha} \in \mathbb{R}$; lorsqu'il existe $g \in \mathcal{L}^2(G)$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$, $U(f)(\varphi) = (g, \varphi)_0$, on dit que $U(f)$ est de carré sommable, c'est-à-dire $U(f) \in \mathcal{L}^2(G)$ et on pose $U(f) = g$.

 Comme lorsque $\partial_i f \in \mathcal{L}^2(G)$, on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(G), \quad U(f)(\varphi) = (U(f), \varphi)_0 = (f, {}^t U(\varphi))_0 \quad (3.7)$$

où :


$${}^t U = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha} \quad (3.8)$$

3.2 Propriétés de densité

3.2.1 Densité

Définition 3.7 Étant donné un espace vectoriel normé V , $\|\cdot\|$ et une partie A de V , A est dense dans V lorsque pour tout $u \in V$, il existe une suite $u_n \in A$ telle que $\|u - u_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Théorème 3.1 L'ensemble $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $\mathcal{L}^2(G)$, $|\cdot|_0$.

 Il résulte du théorème 3.1 que tout espace E tel que $\mathcal{D}(G) \subset E \subset \mathcal{L}^2(G)$ est dense dans $\mathcal{L}^2(G)$, $|\cdot|_0$. En particulier, on peut prendre pour E , $\mathcal{C}^0(\bar{G})$, l'ensemble des fonctions continues sur \bar{G} .

3.2.2 Applications

Proposition 3.4 Soient $f, g \in \mathcal{L}^2(G)$; si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$, $(f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$ alors $f = g$.

Proposition 3.5 Si les dérivées généralisées de f sont nulles sur un ouvert connexe, alors f est constante.

Proposition 3.6 $\delta \notin \mathcal{L}^2$

Chapitre 4

Un espace fondamental

L'espace $\mathcal{H}^1(G)$

Notion de trace

Formule de Green généralisée

Fonctions de $\mathcal{H}^1(G)$ à trace nulle

L'espace $\mathcal{H}_0^1(G)$

Propriétés

Inégalité de Poincaré

Résolution du problème de Dirichlet

Espaces associés au laplacien

Nous construisons à partir de la notion de dérivée généralisée des espaces utiles à l'étude d'équations aux dérivées partielles usuelles.

Classe d'ouverts considérés

Sauf mention contraire, les ouverts G seront pris bornés dans \mathbb{R}^n avec $n \in \{1, 2, 3\}$. Ils auront l'allure suivante :

- $n = 1$: union finie d'intervalles ouverts ;
- $n = 2$: la frontière ∂G est régulière sauf en un nombre fini de coins T_k de sommets $P_k \in \partial G$;
- $n = 3$: la frontière ∂G est régulière sauf en un nombre fini d'arêtes $A_k \in \partial G$ ou de cônes C_k de sommets $P_k \in \partial G$.

4.1 Un espace fondamental

4.1.1 L'espace $\mathcal{H}^1(G)$

On pose :

$$\mathcal{H}^1(G) = \{v \in \mathcal{L}^2(G) ; \nabla v \in \mathcal{L}^2(G)\} \quad (4.1)$$

C'est l'espace vectoriel des fonctions définies sur G à valeurs dans \mathbb{R} , de carré sommable $v \in \mathcal{L}^2(G)$ et à dérivée généralisée de carré sommable $\partial_i v \in \mathcal{L}^2(G)$.

Exemple 10 Soit $G = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x| < 1\}$ avec $f(x) = |x_1|$. On a $f \in \mathcal{H}^1(G)$.

Vocabulaire L'espace vectoriel $\mathcal{H}^1(G)$ est appelé espace de Sobolev d'ordre 1.

Théorème 4.1

1. lorsqu'il est muni du produit scalaire :

$$(u, v) \rightarrow ((u, v))_1 = \int_G (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx \quad (4.1)$$

l'espace vectoriel $\mathcal{H}^1(G)$ est un espace de Hilbert ;

2. l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur \bar{G} , $\mathcal{C}^\infty(\bar{G})$ est dense dans $\mathcal{H}^1(G)$ muni de la norme associée au produit scalaire :

$$v \rightarrow \|v\|_1 = \left(\int_G (v^2 + |\nabla v|^2) dx \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

4.1.2 Notion de trace

Soit $v \in \mathcal{H}^1(G)$; sa trace est la fonction définie sur ∂G par :

$$\begin{aligned} \partial G &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow v|_{\partial G}(x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

où $v|_{\partial G}$ désigne la restriction de v à ∂G .

4.1.3 Formule de Green généralisée

Proposition 4.1 Étant donné $u = (u_1, u_2)$ avec $u_1, u_2 \in \mathcal{L}^2(G)$ tel que $\operatorname{div} u \in \mathcal{L}^2(G)$ et $v \in \mathcal{H}^1(G)$, on a la formule de Green :

$$(u, \nabla v)_0 = \langle u \cdot n, v \rangle - (\operatorname{div} u, v)_0 \quad (4.4)$$

où l'on note :

$$\langle u \cdot n, v \rangle = \int_{\partial G} (u \cdot n)v \, d\Gamma \quad (4.5)$$

4.2 Fonctions de $\mathcal{H}^1(G)$ à trace nulle

4.2.1 L'espace $\mathcal{H}_0^1(G)$

On pose :

$$\mathcal{H}_0^1(G) = \{v \in \mathcal{H}^1(G) ; v = 0 \text{ sur } \partial G\} \quad (4.6)$$

4.2.2 Propriétés

1. $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $\mathcal{H}_0^1(G)$, $\|\cdot\|_1$;
2. $\mathcal{H}_0^1(G)$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}^1(G)$.

4.2.3 Inégalité de Poincaré

Théorème 4.2 Il existe une constante $c \in]0 ; +\infty[$ telle que l'on ait l'inégalité :

$$v \in \mathcal{H}_0^1(G) \Rightarrow \int_G v^2(x) dx \leq c \int_G |\nabla v(x)|^2 dx \quad (4.7)$$

Proposition 4.2 L'espace vectoriel $\mathcal{H}_0^1(G)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v) \rightarrow ((u, v))_0 = (\nabla u, \nabla v)_0 \quad (4.8)$$

est un espace de Hilbert.

4.2.4 Résolution du problème de Dirichlet

Mise en évidence d'une équation variationnelle On part de :

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } G \quad (4.9a)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial G \quad (4.9b)$$

On multiplie (4.9a) par $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, on arrive à :

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_0 = (f, \varphi)_0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G) \quad (4.10a)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial G \quad (4.10b)$$

et la relation (4.10b) conduit à chercher u dans $V = \mathcal{H}_0^1(G)$.

Théorème de Riesz À l'aide du théorème de Riesz, on montre que l'équation :

$$\exists u \in V, \quad (\nabla u, \nabla v)_0 = (f, v)_0, \quad \forall v \in V \quad (4.11)$$

a une solution unique. On peut ensuite remonter de (4.11) à (4.10) et (4.9).

Proposition 4.3 Étant donné $f \in \mathcal{L}^2(G)$, le problème aux limites (4.9) a une solution unique $u \in \mathcal{H}_0^1(G)$.

Chapitre 5

Modèle de Wiener

Ensemble des trajectoires
Fonctions définies sur l'ensemble des trajectoires
Intégrale par rapport à la densité de Gauss

Calcul stochastique

Intégrales stochastiques
Équations différentielles stochastiques
Formule de Itô

Problème de Dirichlet

Temps d'atteinte
Représentation intégrale
Résolution approchée

Mouvement brownien

Le mouvement brownien, observé par R. Brown (~ 1820), correspond au mouvement désordonné de grains de pollen se déplaçant à la surface de l'eau. Un modèle mathématique de ce mouvement a été proposé par N. Wiener (~ 1920). Ce modèle est utilisé ici pour obtenir des représentations et des méthodes de résolution approchée concernant les équations aux dérivées partielles. La formule de K. Itô (~ 1940) est appliquée.

5.1 Modèle de Wiener

5.1.1 Ensemble des trajectoires

On note $I = [0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \omega : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longrightarrow \omega(s) \end{aligned} \quad (5.1)$$

avec $\omega \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $\omega(0) = x$. L'ensemble des trajectoires est noté $\Omega = \{\omega\}$.

5.1.2 Fonctions définies sur l'ensemble des trajectoires

A l'instant $s > 0$, on définit :

$$\begin{aligned} X_s : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longrightarrow \omega(s) \end{aligned} \quad (5.2)$$

On a $X_s(\omega) = \omega(s)$.

Vocabulaire La fonction définie par :

$$\begin{aligned} X : I \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, \omega) &\longrightarrow X_s(\omega) \end{aligned} \quad (5.1)$$

est un processus.

5.1.3 Intégrale par rapport à la densité de Gauss

Définition 5.1 Pour $(s, y) \in I \times \mathbb{R}^2$, la densité de Gauss est définie par :

$$p(s, y) = \frac{1}{2\pi s} e^{-\frac{1}{2s}|y|^2} \quad (5.2)$$

Vocabulaire Une fonction $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire par rapport à au moins une variable lorsque $\beta(-y_1, y_2) = -\beta(y_1, y_2)$ ou $\beta(y_1, -y_2) = -\beta(y_1, y_2)$.

Proposition 5.1 On a les relations :

$$\int_{\mathbb{R}^2} p(s, y) dy = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \beta(y) p(s, y) dy = 0 \quad (5.1)$$

La relation (5.1) implique que pour β impaire par rapport à au moins une variable :

$$\int_{\mathbb{R}^2} y_i^2 p(s, y) dy = s \quad (5.2)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |y_i|^3 p(s, y) dy \leq Ks^{3/2}, \quad i = 1, 2 \quad (5.3)$$

Notation 5.1 Étant donné $0 < s_1 < \dots < s_{1+N}$ et $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, on pose :

$$E(F(X_{s_1}, \dots, X_{s_{1+N}})) = \int_{(\mathbb{R}^2)^{1+N}} F(x^1, \dots, x^{1+N}) p(s_1, x^1 - x) \dots p(s_{1+N} - s_N, x^{1+N} - x^N) dx^1 \dots dx^{1+N} \quad (5.4)$$

Proposition 5.2 Si $0 < s_1 < s_2$, on a les relations :

$$E(\alpha(X_{s_1})\beta(\delta X_s)) = 0 \quad \text{où} \quad \delta X_s = X_{s_2} - X_{s_1} \quad (5.5)$$

La relation (5.5) implique pour β impaire par rapport au moins une variable :

$$E(\alpha(X_{s_1})(\delta X_s)_i^2) = \delta_s E(\alpha(X_{s_1})) \quad (5.6)$$

où $\delta_s = s_2 - s_1$ et $(\delta X_s) = (X_{s_2})_i - (X_{s_1})_i$ avec $X_s = ((X_s)_1, (X_s)_2)$ et :

$$|E(\alpha(X_{s_1}, X_{s_2})(\delta X_s)^3)| \leq K|\alpha|_\infty \delta_s^{3/2} \quad (5.7)$$

avec $(\delta X_s)^3$ de composantes $(\delta X_s)_i, (\delta X_s)_j, (\delta X_s)_k, i, j, k \in \{1, 2\}$.

5.2 Calcul stochastique

5.2.1 Intégrales stochastiques

Pour $t > r > 0$, on introduit une subdivision de (r, t) : $s_1 = r, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_{N+1} = t$. On pose $\delta_n = \max\{\delta s_i ; i = 1, \dots, N\}$. Soit $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on pose :

$$u_N = \sum_{i=1}^N \alpha(X_{s_i}) \delta X_{s_i} \quad (5.8)$$

où $\delta X_{s_i} = X_{s_{i+1}} - X_{s_i}$. Lorsque la limite existe, on définit l'intégrale stochastique :

$$\int_r^t \alpha(X_s) dX_s = \lim_{\delta_N \rightarrow 0} u_N \quad (5.9)$$

5.2.2 Équations différentielles stochastiques

Soit $t > r > 0$ et les fonctions :

$$\begin{aligned} a &: (r, t) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ b &: (r, t) \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.10)$$

telles que $a \in \mathcal{L}^2(r, t)$ et $b \in \mathcal{L}^2(r, t)$. Lorsque :

$$Y_t - Y_r = \int_r^t a(s) ds + \int_r^t b(s) dX_s \quad (5.11)$$

On définit l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{aligned} dY_t &= a(t) dt + b(t) dX_t & t > r \\ Y_t &= Y_r & t = r \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.2.3 Formule de Itô

Soit la fonction $F : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $F \in \mathcal{C}^2(I \times \mathbb{R}^2)$. Lorsque :

$$Y_t - Y_r = \int_r^t a(s) ds + \int_r^t b(s) dX_s \quad (5.13)$$

on a la formule :

$$\begin{aligned} F(t, Y_t) - F(r, Y_r) &= \int_r^t (\partial F(s, Y_s) + a(s) \nabla F(s, Y_s) + \frac{1}{2} b^2(s) \Delta F(s, Y_s)) ds \\ &\quad + \int_r^t b(s) \nabla F(s, Y_s) dX_s \end{aligned} \quad (5.14)$$

Le symbole ∂ désigne la dérivée par rapport au temps dans I . Le gradient et le laplacien sont pris par rapport à l'espace, dans \mathbb{R}^2 . Concernant les égalités (5.13) et (5.14), les intégrales stochastiques sont prises au sens de (5.9). Passant aux $E(\cdot)$ dans (5.14), on obtient :

$$E(F(t, Y_t) - F(r, Y_r)) = E\left(\int_r^t (\partial F(s, Y_s) + a(s) \nabla F(s, Y_s) + \frac{1}{2} b^2(s) \Delta F(s, Y_s)) ds\right) \quad (5.15)$$

5.3 Problème de Dirichlet

5.3.1 Temps d'atteinte

Définition 5.2 Soit $G \in \mathbb{R}^2$; le temps d'atteinte de $\bar{G} = \mathbb{R}^2 \setminus G$ est la fonction :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \omega &\longrightarrow T(\omega) = \inf\{s > 0; X_s(\omega) \in \bar{G}\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

soit, en notation abrégée :

$$T = \inf\{s > 0; X_s \in \bar{G}\} \quad (5.17)$$

5.3.2 Représentation intégrale

Proposition 5.3 Étant donné G borné contenu dans \mathbb{R}^2 et $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(G + \partial G)$, on a :

$$u(x) = E\left(u(X_T) - \frac{1}{2} \int_0^T \Delta u(X_s) ds\right) \quad (5.18)$$

Considérons le problème de Dirichlet :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad (\Omega) \\ u &= g \quad (\partial\Omega) \end{aligned} \quad (5.19)$$

où sont donnés le domaine borné $G \subset \mathbb{R}^2$, la fonction $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction $g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$. L'inconnue est la fonction $u : G \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les données (G, f, g) sont telles que :

$$u \in \mathcal{C}^2(G + \partial G) \quad (5.20)$$

Théorème 5.1 Sous l'hypothèse (5.20), la solution de (5.19) admet la représentation :

$$u(x) = E\left(g(X_T) - \frac{1}{2} \int_0^T f(X_s) ds\right) \quad (5.21)$$

5.3.3 Résolution approchée

Calcul de Ω

$$\Omega = \{\omega_h^i, i = 1, \dots, N\} \quad (5.22)$$

1. on introduit un pas en espace h et un pas en temps $\tau = h^2 : t_n = n\tau$;
2. pendant l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) , on passe de $x_n = (ih, jh)$ à l'une des quatre positions possibles $x_{n+1} = (i \pm h, j \pm h)$. La probabilité de passage $x_n \rightarrow x_{n+1}$ est donnée par :

$$P(x_n \rightarrow x_{n+1}) = \frac{1}{4} \quad (5.23)$$

3. séquence possible de simulation :

```
H=0,25
X1=2
X2=0
8 D1=RND 4
D1=SGN(D1-2,1)
D2=RND 4
D2=SGN(D2-2,1)
X1=X1+D1*H
X2=X2+D2*H
GO TO 8
```

Calcul des T et des X_T

On pose $\{T(\omega) ; \omega \in \Omega\} \approx \{T(\omega_h^i) ; i = 1, \dots, N\}$ ainsi que $\{X_T(\omega) ; \omega \in \Omega\} \approx \{X_T(\omega_h^i) ; i = 1, \dots, N\}$ et $T(\omega_h^i) = T_i$ ainsi que $X_T(\omega_h^i) \approx X_i$ où $T_i = N\tau_i$ et X_i , point de ω_h^i à l'instant T_i . On obtient :

$$\{T(\omega) ; \omega \in \Omega\} \approx \{T_i, i = 1, \dots, N\} \quad (5.24)$$

$$\{X_T(\omega) ; \omega \in \Omega\} \approx \{X_i, i = 1, \dots, N\} \quad (5.25)$$

Calcul de $E(g(X_T))$

$$E(g(X_T)) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \quad (5.26)$$

Calcul de $E\left(\int_0^T f(X_s) ds\right)$

On note :

$$Y_i = \tau \sum_{j=1}^{N_i} f(\omega_h^i s_j) \quad (5.27)$$

On obtient :

$$E\left(\int_0^T f(X_s) ds\right) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (5.28)$$

Exemple 11 On considère $G = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; 1 < r < 3\}$ et :

$$u(x) = 4 + \frac{2}{\log 3} \log r \quad (5.1)$$

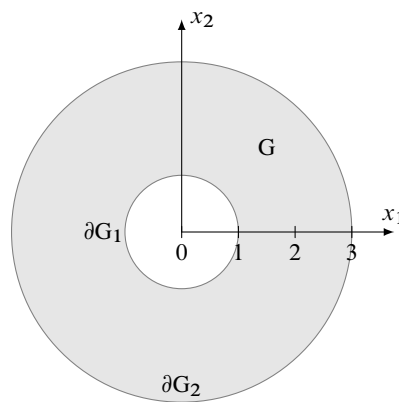


Figure 5.1: Domaine d'étude

Le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{dans } G \\ u &= 4 && \partial G_1 = (r = 1) \\ u &= 6 && \partial G_2 = (r = 3) \end{aligned} \quad (5.2)$$

On connaît la valeur exacte en $x = (2, 0)$: $u = 5,26$. Pour résoudre numériquement ce problème, on propose l'algorithme suivant :

```


S=0
N=
H=
FOR I=1 TO N
  X1=2 # point de départ
  X2=0
  20 D1=RND 4
  D1=SGN(D1-2,1)
  D2=RND 4
  D2=SGN(D2-2,1)
  X1=X1+D1*H # progression de omegah
  X2=X2+D2*H
  R=X1*X1+X2*X2
  R=SQR(R)
  # test pour savoir si on est sur la frontière
  IF R < 1 GO TO 44
  IF R > 3 GO TO 48
  GO TO 20
  44 S=S+4 # sommation des g(xi) sur frontière G1

```

```
GO TO 50 # fin de progression des omegah
48 S=S+6 # sommation des g(xi) sur frontière G2
50 NEXT I # nouveau omegahi
U=S/N # moyenne des g(xi)
PRINT N, U
```

Les valeurs trouvées sont les suivantes :

N	H	u
10	0,25	5
50	0,5	5,52
100	0,5	5,3

 Les programmes sont courts et effectués ici sur une calculatrice de poche. Pour des essais plus complets, notamment dans \mathbb{R}^3 , on pourra se reporter à [1].

Chapitre 6

Base et espace de Hilbert

Bases hilbertiennes
Identité de Bessel-Parseval

Convergence faible

Notions préliminaires
Propriétés usuelles

Compacité faible

Espace de Hilbert et convergence faible

6.1 Base et espace de Hilbert

6.1.1 Bases hilbertiennes

Définition 6.1 Une suite (w_p) d'un espace de Hilbert $V, (\cdot, \cdot), |\cdot|$ est une base hilbertienne lorsque :

1. pour tout $n > 1$, les vecteurs w_1, \dots, w_n sont linéairement indépendants ;
2. l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires finies de w_i est dense dans V .

Définition 6.2 Une suite (w_p) d'un espace de Hilbert $V, (\cdot, \cdot), |\cdot|$ est une base hilbertienne orthonormée lorsque :

1. (w_p) est une base hilbertienne ;
2. les w_p sont orthonormés :

$$(w_i, w_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (6.1)$$

Proposition 6.1 À partir de toute base hilbertienne, on peut construire une base hilbertienne orthonormée.

Proposition 6.2 Les éléments :

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad ; \quad e_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad ; \quad e_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \quad n \geq 1 \quad (6.2)$$

forment une base hilbertienne orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(0; 2\pi), (\cdot, \cdot)_0$.

6.1.2 Identité de Bessel-Parseval

Théorème 6.1 Étant donné un espace de Hilbert $V, (\cdot, \cdot), |\cdot|$ et une base hilbertienne orthonormée, alors pour tout $u \in V$, on a :

1. $P_n u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ où $\alpha_i = (u, e_i)$ et $P_n = P_{V_n}$; V_n est engendré par (e_1, \dots, e_n) ;
2. $(P_n u \xrightarrow{V} u)$ quand $(n \rightarrow \infty)$;
3. $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$.

6.2 Convergence faible

6.2.1 Notions préliminaires

Définition 6.3 Étant donné un espace de Hilbert V , (\cdot, \cdot) , $|\cdot|$, une suite de vecteurs (u_n) converge faiblement vers u dans V lorsque :

$$\forall v \in V, \quad (u_n, v) \xrightarrow{\mathbb{R}} (u, v) \quad (6.3)$$

Notation 6.1 La convergence faible sera notée $u_n \xrightarrow{V} u$.

On a :

$$|u_n - u| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \implies u_n \xrightarrow{V} u \quad (6.4)$$

et :

$$u_n \xrightarrow{V} u \not\implies |u_n - u| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \quad (6.5)$$

6.2.2 Propriétés usuelles

– soit F une forme linéaire continue sur V , (\cdot, \cdot) , $|\cdot|$, alors :

$$u_n \xrightarrow{V} u \implies F(u_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} F(u) \quad (6.6)$$

– propriété de la suite en norme :

$$u_n \xrightarrow{V} u \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \geq |u| \quad (6.7)$$

6.3 Compacité faible

Définition 6.4 Soient une suite u_1, \dots, u_n et une application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On appelle suite extraite, la suite $u_f = u_{f(1)}, \dots, u_{f(n)}$.

Définition 6.5 Un espace de Hilbert V , (\cdot, \cdot) , $|\cdot|$ vérifie la propriété de compacité faible lorsque de toute suite bornée $(u_n) \subset V$, on peut extraire une sous suite (u_q) telle que :

$$u_q \rightarrow v \quad (6.8)$$

Théorème 6.2 Un espace de Hilbert V , (\cdot, \cdot) , $|\cdot|$ muni d'une base hilbertienne vérifie la propriété de compacité faible.

Les espaces $\mathcal{L}^2(G)$, $(\cdot, \cdot)_0$, $|\cdot|_0$, $H^1(G)$, $((\cdot, \cdot))_1$, $\|\cdot\|_1$ et $H_0^1(G)$, $((\cdot, \cdot))_0$, $\|\cdot\|_0$ vérifient la compacité faible.

Le concept de convergence faible est essentiel pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires : par exemple, les équations de Navier-Stokes [2].



Exercices

Exercice 1 (Propriétés de base)

1. Étant donné $x \in E$, E , espace vectoriel normé, vérifier que $\forall \epsilon > 0, \|x\| < \epsilon \Rightarrow x = 0$.
2. Soit f une application continue de $[a; b] \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n et g une application continue de $[a; b]$ dans \mathbb{R}^n , vérifier que :

$$\begin{aligned} h : [a; b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow f(x, g(x)) \end{aligned} \quad (\text{ex1.1})$$

est continue.

3. Étant donnée une partie X de \mathbb{R} , on dit que $a \in \mathbb{R}$ est un minorant de X lorsque $\forall x \in X, a \leq x$. Soit α le plus grand des minorants de X (c'est par définition la borne inférieure de X), $\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R}; x \in X\}$. Montrer l'équivalence :

$$\alpha \text{ borne inférieure de } X \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ minorant de } X \text{ et} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x \in X : \alpha \leq x \leq \alpha + \epsilon \end{cases} \quad (\text{ex1.2})$$

4. Soit un espace vectoriel normé E ; étant donné une partie A de E et un vecteur u de E , on introduit la distance de u à A :

$$d(u, A) = \inf\{\|u - v\|, v \in A\} \quad (\text{ex1.3})$$

Montrer à l'aide de la question 3. qu'il existe une suite (v_n) telle que :

$$(v_n) \subset A \quad \text{et} \quad \|u - v_n\| \rightarrow d(u, A) \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{ex1.4})$$

5. (a) Étant donné deux ensembles de nombres réels $\{\alpha\}$ et $\{\beta\}$, établir :

$$\begin{aligned} \inf\{\alpha\} + \inf\{\beta\} &\leq \inf\{\alpha + \beta\} \\ \sup\{\alpha + \beta\} &\geq \sup\{\alpha\} + \inf\{\beta\} \end{aligned} \quad (\text{ex1.5})$$

- (b) Étant donné un nombre $\lambda \geq 0$ et un ensemble de nombres réels $\{\alpha\}$, établir :

$$\begin{aligned} \inf\{\lambda\alpha\} &= \lambda \inf\{\alpha\} \\ \sup\{\lambda\alpha\} &= \lambda \sup\{\alpha\} \end{aligned} \quad (\text{ex1.6})$$

6. Étant donné un espace vectoriel normé $E, \|\cdot\|$, on considère l'ensemble, noté E' des applications linéaires continues de E dans \mathbb{R} .

- (a) Soit $f \in E'$, montrer qu'il existe $c \in [0; +\infty[$ telle que $\forall v \in E, |F(v)| \leq c\|v\|$.

(b) Pour $F \in E'$, on pose :

$$N(F) = \sup \left\{ \frac{|F(v)|}{\|v\|} ; v \in E, v \neq 0 \right\} \quad (\text{ex1.7})$$

Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow \mathbb{R} \\ F &\rightarrow N(F) \end{aligned} \quad (\text{ex1.8})$$

est une norme

Exercice 2

1. Étant donnés deux nombres réels strictement positifs α et β tels que $\alpha + \beta = 1$; montrer que pour tout couple de réels strictement positifs x et y , on a :

$$\alpha \log x + \beta \log y \leq \log(\alpha x + \beta y) \quad (\text{ex2.1})$$

2. Effectuer le changement de variable $p = 1/\alpha$, $q = 1/\beta$, $a = x^\alpha$ et $b = y^\beta$; déduire de (ex2.1) que :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (\text{ex2.2})$$

3. Soit un réel $r \geq 1$, on note :

$$|x|_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{1/r} ; \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{ex2.3})$$

En prenant dans (ex2.2), $a = |x_i|/|x|_p$ et $b = |y_i|/|y|_q$, déduire :

$$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq |x|_p|y|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 0, \quad q > 0 \quad (\text{ex2.4})$$

4. À l'aide de l'identité :

$$(|x_i| + |y_i|)^p = (|x_i| + |y_i|)^{p-1}|x_i| + (|x_i| + |y_i|)^{p-1}|y_i| \quad (\text{ex2.5})$$

montrer que :

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leq |z|_q (|x|_p + |y|_p) \quad (\text{ex2.6})$$

où $z_i = (|x_i| + |y_i|)^{p-1}$. En déduire :

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p \quad (\text{ex2.7})$$

5. Vérifier que :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\rightarrow |x|_p \end{aligned} \quad (\text{ex2.8})$$

est une norme.

Exercice 3 On introduit la norme :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\xrightarrow{N} \mathbb{R}^+ \\ x &\rightarrow \max\{|x_i| ; 1 \leq i \leq n\} \end{aligned} \quad (\text{ex3.1})$$

Vérifier que $N(x) \leq |x|_p \leq (n)^{1/p}N(x)$.

 Les majorations (ex2.4) et (ex2.7) sont appelées inégalités de Hölder et de Minkowski.

Exercice 4


1. Considérons n espaces de Banach $(E_1, |\cdot|_1), \dots, (E_n, |\cdot|_n)$. Montrer que $E = E_1 \times \dots \times E_n$, $|\cdot| = |\cdot|_1 + \dots + |\cdot|_n$ est un espace de Banach.
2. On désigne par $u = (u_1, \dots, u_n)$ les éléments de $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}^n)$. Montrer que cet espace vectoriel muni de la norme $\|u\|_\infty = \|u_1\|_\infty + \dots + \|u_n\|_\infty$ est un espace de Banach.

Exercice 5 Soit a_n une suite de nombres réels positifs tels que $a_{n+1} \leq (1 + A)a_n + B$ avec $A > 0$ et $B > 0$. Montrer que $a_n \leq a_0 e^{nA} + \frac{1}{A}(e^{nA} - 1)B$.

Exercice 6 Soit u une fonction continue sur $[a; b]$; pour $\delta > 0$, on note :

$$M(\delta, u) = \sup\{|u(x) - u(x')|, |x - x'| \leq \delta, x, x' \in [a; b]\} \quad (\text{ex6.1})$$

Utiliser les quantificateurs pour écrire que u est uniformément continue sur $[a; b]$; en déduire $M(\delta, u) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$.

 La quantité $M(\delta, u)$ est le module de continuité de la fonction u .

Exercice 7 Soient un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$, un vecteur $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et une application f de $[a; b] \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n . Sous les hypothèses que f est continue et vérifie :

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z| \quad (\text{ex7.1})$$

l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned} \quad (\text{ex7.2})$$

a une solution unique $y \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R}^n)$. On considère la méthode d'Euler :

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + hf(x_n, y^n) \\ y^0 &= y_0 \end{aligned} \quad (\text{ex7.3})$$

et on introduit la fonction y_h définie sur $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n par :

$$y_h(x) = y^n + \frac{1}{h}(y^{n+1} - y^n)(x - x_n), \quad x \in [x_n; x_{n+1}] \quad (\text{ex7.4})$$

Sous les hypothèses que f est continue et vérifie (ex7.1), nous allons établir la convergence

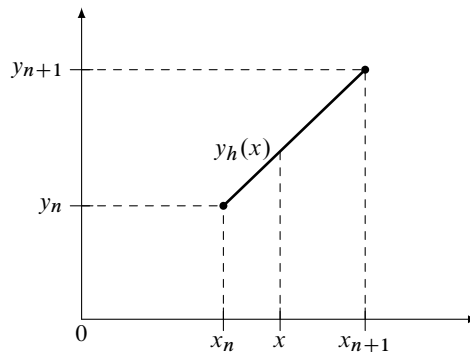


Figure 6.1: Schéma d'Euler

de la méthode d'Euler, c'est-à-dire montrer que $\|y - y_h\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ où l'on note $\|v\| = \sup\{|v(x)|; x \in [a; b]\}$.

1. Tenant compte de (ex7.2), vérifier l'identité :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + h\epsilon_n \text{ où } \epsilon_n = \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (y'(t) - y'(x_n)) dt \quad (\text{ex7.5})$$

2. Puisque $y \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R}^n)$, en déduire que $|\epsilon_n| \leq M(h, y')$. Notons $\epsilon_n = y(x_n) - y^n$.

3. Utiliser (ex7.5) et (ex7.3) et montrer que :

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + h(f[x_n, y(x_n)]f(x_n, y_n)) + h\epsilon_n \quad (\text{ex7.6})$$

4. À l'aide de (ex7.1) déduire que $|\epsilon_{n+1}| \leq (1 + hK)|\epsilon_n| + h|\epsilon_n|$ puis :

$$|\epsilon_{n+1}| \leq \frac{1}{K}(e^{K(b-a)} - 1)M(h, y') \quad (\text{ex7.7})$$

Pour montrer (ex7.7), on utilisera l'exercice 5.

5. À l'aide de l'inégalité triangulaire, établir que pour $x \in [x_n; x_{n+1}]$, on a :


$$|y(x) - y_h(x)| \leq hN + |e_n| + M(h, y) \quad (\text{ex7.8})$$

où $N = \max_n |f(x_n, y^n)|$; en déduire que $\|y - y_h\| \leq \epsilon(h)$ avec $\epsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Exercice 8 On considère une subdivision de $[a; b]$; on se propose de montrer que la solution de (ex7.2) vérifie :

$$\max_n |\nabla y(x_n) - f(x_n, y(x_n))| \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0 \quad (\text{ex8.1})$$

On a posé $\nabla y(x) = (y(x+h) - y(x))/h$. Appliquer le théorème des accroissements finis et utiliser le module de continuité de y' pour montrer (ex8.1).

 La propriété (ex8.1) s'appelle *consistance*. Elle signifie que lorsque h diminue, le quotient différentiel $\nabla y(x)$ ne s'éloigne pas trop de $y'(x)$ où y est la solution de (ex7.2).

Exercice 9 Considérons la méthode d'Euler de pas h :

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + hf(x_n, y^n) \\ y^0 &= y_0 \end{aligned} \quad (\text{ex9.1})$$

Soient (ϵ^n) des vecteurs; on introduit la méthode perturbée :


$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n + hf(x_n, z^n) + \epsilon^n \\ z^0 &= z_0 \end{aligned} \quad (\text{ex9.2})$$

On se propose de montrer qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 indépendantes de h telles que :

$$\max_n |y^n - z^n| \leq K_1 |y_0 - z_0| + K_2 \max_n |\epsilon^n| \quad (\text{ex9.3})$$

Utiliser (ex9.1), (ex9.2) et (ex7.1) pour obtenir (ex9.3) avec :

$$K_1 = e^{K(b-a)} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{1}{K}(e^{K(b-a)} - 1) \quad (\text{ex9.4})$$

 La propriété (ex9.3) s'appelle *stabilité*. Elle signifie que lorsque la perturbation des données est assez petite, c'est-à-dire (z_0 proche de y_0) et $\max_n |\epsilon^n|$ petit, alors les vecteurs z_n ne s'éloignent pas trop des vecteurs y_n . Il faut imaginer que ϵ^n s'introduit naturellement par les "erreurs d'arrondi" des machines à calcul.

Exercice 10 Dans les cas listés ci-dessous, indiquer α , la borne inférieure de X et préciser si $\alpha \in X$:

$$X = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \quad ; \quad X =]1/2; 1] \quad ; \quad X = \{0\} \cup]1/2; 1] \quad (\text{ex10.1})$$

Exercice 11 Soit $V, |\cdot|_V$ et $W, |\cdot|_W$, deux espaces vectoriels normés.

1. On considère une fonction $f : V \rightarrow W$; réduire une résolution approchée de $f(x) = 0$ à celle de la minimisation d'une fonctionnelle $J : V \rightarrow \mathbb{R}^+$.

2. Appliquer au cas particulier $Av = b$ où sont donnés le vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ et la matrice $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Exercice 12 Étant donné $V = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $|\cdot|$, on considère une fonctionnelle :

$$\begin{aligned} J : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow J(v) \end{aligned} \quad (\text{ex12.1})$$

On suppose que J est continue et :

$$\frac{J(v)}{|v|} \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad |v| \rightarrow +\infty \quad (\text{ex12.2})$$

1. Montrer que J est minorée.
2. On pose $m = \inf\{J(v) ; v \in V\}$. Montrer que toute suite minimisante est bornée.
3. En déduire que le problème :

$$\exists u \in V, \quad J(u) = m \quad (\text{ex12.3})$$

admet une solution.

4. On suppose que J est continue et que $J(v) \geq \alpha|u|^p + \beta$ où $\alpha, \beta \in]0; +\infty[$ et $p > 1$. Montrer que (ex12.3) admet une solution.
5. On prend $V = \mathbb{R}, |\cdot|$ et :

$$J(v) = \frac{1}{1 + v^2} \quad (\text{ex12.4})$$

L'équation (ex12.3) admet-elle une solution ?

6. On se place dans des hypothèses plus générales que (ex12.2) et J n'est plus nécessairement continue. On suppose uniquement que $J(v) \geq a > -\infty$. Montrer que (ex12.3) a une solution à ϵ près, c'est-à-dire $\forall \epsilon > 0, \exists u_\epsilon \in V$ tel que $J(u_\epsilon) \in [m; m + \epsilon]$.
7. Dessiner $\{u_\epsilon ; J(u_\epsilon) \in [m; m + \epsilon]\}$ dans le cas de (ex12.4).

Exercice 13 Étant donné le vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ et la matrice $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, on considère la fonctionnelle :

$$J(v) = \frac{1}{2}|Av - b|^2 \quad (\text{ex13.1})$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne. On suppose que u est un minimum local de J , c'est-à-dire qu'il existe une boule centrée en u de rayon $\zeta > 0$ notée $B(u, \zeta)$ telle que $\forall v \in B(u, \zeta), J(v) \geq J(u)$. Pour u et v fixés, on introduit la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow J(u + sv) \end{aligned} \quad (\text{ex13.2})$$

1. comparer $J(u + sv)$ et $J(u)$, en déduire que $f'(0) \geq 0$;
2. comparer $J(u - sv)$ et $J(u)$, en déduire que $f'(0) \leq 0$;
3. montrer que $Bu = c$ où B et c sont à préciser en fonction de A et b ;
4. vérifier le point 3. dans le cas :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ex13.3})$$

Exercice 14 (propriétés de base) Soit $V, (\cdot, \cdot)$ un espace de Hilbert ; on note $|\cdot|$ la norme associée :

1. (a) Montrer l'identité $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.
- (b) Soit n vecteurs x_n deux à deux orthogonaux $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$; montrer l'identité :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad (\text{ex14.1})$$

2. (a) Soit W un sous espace vectoriel de V et $u \in V$ tel que $(u, w) \geq 0, \forall w \in W$; en déduire que $(u, w) = 0, \forall w \in W$.
 (b) Soit $u \in V$ tel que $(u, v) = 0, \forall v \in V$; en déduire que $u = 0$.
3. (a) Soit $u \in V$; montrer l'identité :

$$|u| = \sup \left\{ \frac{|(u, v)|}{|v|}; v \in V, v \neq 0 \right\} \quad (\text{ex14.2})$$

(b) Montrer que :

$$v_n \xrightarrow{V} v \Rightarrow (u, v_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} (u, v) \quad (\text{ex14.3})$$

Soit $V = \mathcal{L}^2(a; b)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v) \rightarrow (u, v)_0 = \int_a^b uv \, dx \quad (\text{ex14.4})$$

4. Montrer l'inégalité :

$$\left| \int_a^b uv \, dx \right| \leq \left(\int_a^b u^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b v^2 \, dx \right)^{1/2} \quad (\text{ex14.5})$$

5. En déduire :

$$\left| \int_a^b u \, dx \right| \leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b u^2 \, dx \right)^{1/2} \quad (\text{ex14.6})$$

Exercice 15 Étant donné un espace vectoriel normé $E, |\cdot|$, on considère une suite u telle que $|u_{n+1} - u_n| < a_n$ où (a_n) est une suite de nombres réels strictement positifs satisfaisant :

$$\sum_{n \geq 0} a_n < +\infty \quad (\text{ex15.1})$$

Montrer que u est une suite de Cauchy.

Soit $V = \mathcal{L}^2(0; 1)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v) \rightarrow (u, v)_0 = \int_0^1 uv \, dx \quad (\text{ex15.2})$$

1. Considérons la suite u_n de V définie par :

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ -nx + n/2 + 1 & 1/2 \leq x \leq 1/2 + 1/n \\ 0 & 1/2 + 1/n \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{ex15.3})$$

Montrer que $|u_n - u_{n+1}|_0^2 \leq c/n^3$ pour $n \geq 1$.

2. En déduire que u est une suite de Cauchy.

3. Soit $v(x) \in V$ la fonction définie par :

$$v(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{ex15.4})$$

Montrer que $u_n \xrightarrow{V} v$.

4. Déduire de 2. et 3. que $W = \mathcal{C}^0(0; 1)$ muni de la norme $|\cdot|_0$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 16 Soit $V, (\cdot, \cdot)$ un espace de Hilbert; sur V , on définit une forme bilinéaire a symétrique et telle que $\exists \alpha, M \in]0; +\infty[$ telles que $\alpha|u|^2 \leq a(u, u)$ et $|a(u, v)| \leq M|u||v|$.

1. Montrer que a définit un produit scalaire sur V noté $(u, v)_a = a(u, v)$. On note $|\cdot|_a$ la norme associée.

2. Montrer que $|\cdot|$ et $|\cdot|_a$ sont équivalentes ; en déduire que $V, (\cdot, \cdot)_a$ est un espace de Hilbert.
3. Soit F une forme linéaire continue $V, (\cdot)$; utiliser le théorème de Riesz et montrer $\exists! u \in V$ tel que $a(u, v) = F(v), \forall v \in V$.
4. Soit W un sous espace vectoriel fermé de $V, |\cdot|$; à l'aide du théorème de la projection, montrer que $\exists! u \in W$ tel que $a(u, v) = F(v), \forall v \in W$.

Exercice 17 On note G un domaine borné du plan ou de l'espace. On suppose que l'origine O appartient à G et on considère des fonctions f définies sûr $G \setminus \{O\}$. Dans les cas suivants, montrer que $f \in \mathcal{L}^2(G)$:

- $f(x) = \log r, r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;
- $f(x) = 1/r, r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Exercice 18 Soit $V, (\cdot, \cdot), |\cdot|$ un espace de Hilbert. On considère des fonctionnelles $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfont $J(u + v) = J(u) + (\nabla J(u), v) + (\nabla^2 J(u, v) \cdot v, v)$ avec $\nabla J(u) \in V$ et $\nabla^2 J(u, v) \in \mathcal{L}(V, V)$. Soit W un sous espace vectoriel fermé de V ; on introduit la projection P de V sur W . On s'intéresse à la résolution de l'équation :

$$\exists u \in W, \quad P(\nabla J(u)) = 0 \quad (\text{ex18.1})$$

Minima locaux La norme dans $\mathcal{L}(V, V)$ est désignée par $|\cdot|'$. On note :

$$|\nabla^2 J|_\infty = \sup\{|\nabla^2 J(u, v)|' ; v \in V\} \quad (\text{ex18.2})$$

On suppose que :

$$|\nabla^2 J|_\infty \leq M \quad (\text{ex18.3})$$

où $M \in]-\infty ; +\infty[$. Montrer que si u est un minimum local de J sur W , alors u est solution de (ex18.1).

Résolution à ϵ près On suppose que :

$$J \geq a \quad (\text{ex18.4})$$

où $a \in]-\infty ; +\infty[$. Sous les hypothèses (ex18.3) et (ex18.4), on va montrer que (ex18.1) admet une solution à ϵ près ; c'est-à-dire que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists u_\epsilon \in W, \quad |P(\nabla J(u_\epsilon))| \leq \epsilon \quad (\text{ex18.5})$$

1. Étant donné $\mu > 0$, on introduit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n - \mu P \nabla J(u_n)$ avec $u_0 \in W$. Montrer que :

$$\begin{aligned} \delta u_n &= -\mu P \nabla J(u_n) \\ |\delta u_n|^2 &= -\mu (\nabla J(u_n), \delta u_n) \end{aligned} \quad (\text{ex18.6})$$

où $\delta u_n = u_{n+1} - u_n$.

2. Montrer que $J(u_{n+1}) = J(u_n) + (\nabla J(u_n), \delta u_n) + (\nabla^2 J(u_{n+1}, \delta u_n) \cdot \delta u_n, \delta u_n)$.
3. Dédurre de 1. et 2. que $|\delta u_n|^2(1 - \mu M) \leq \mu(J(u_n) - J(u_{n+1}))$.
4. Soit $\mu \in]0 ; 1/M[$; montrer que la suite de nombres réels $s_n = J(u_n)$ est décroissante et bornée inférieurement.
5. Montrer que $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tel que $n \geq N \Rightarrow |\delta u_n| \leq \epsilon$ et en déduire (ex18.5).

Borne indépendante de ϵ On suppose que :

$$|\nabla J(u)| \leq m|u| + N \quad (\text{ex18.7})$$

où $N \in]0; +\infty[$ et :

$$(\nabla J(u), u) \geq \alpha|u|^2 + \beta \quad (\text{ex18.8})$$

où $\alpha \in]0; +\infty[$ et $\beta \in]-\infty; 0]$. Sous les hypothèses (ex18.3), (ex18.7) et (ex18.8), on va montrer que (ex18.5) admet une solution bornée indépendamment de ϵ :

$$|u_\epsilon| \leq m \quad (\text{ex18.9})$$

1. Montrer que $|u_{n+1}| \leq |u_n - \mu \nabla J(u_n)|$.
2. Développer $|u_n - \mu \nabla J(u_n)|^2$ et déduire que $|u_n|$ est bornée indépendamment de ϵ .

Contraction On suppose que :

$$|\nabla J(u) - \nabla J(v)| \leq b|u - v| \quad (\text{ex18.10})$$

$$(\nabla J(u) - \nabla J(v), u - v) \leq \gamma|u - v|^2 \quad (\text{ex18.11})$$

1. Montrer que (ex18.10) implique (ex18.7) ;
2. Montrer que (ex18.11) implique (ex18.8) ;
3. Montrer que l'application $Q(u) = u - \mu P \nabla J(u)$ est une contraction pour μ convenable ;
4. Sous les hypothèses (ex18.10) et (ex18.11), montrer que (ex18.1) admet une solution unique.

Exercice 19 Considérons l'espace $[\mathcal{L}^2(G)]^2 = \{v = (v_1, v_2) ; v_1 \in \mathcal{L}^2(G), v_2 \in \mathcal{L}^2(G)\}$ muni du produit scalaire $(u, v)_0 = (u_1, v_1)_0 + (u_2, v_2)_0$. Cet espace est un espace de Hilbert. On note $[\mathcal{L}^2(G)]^2, (\cdot, \cdot)_0 = V, (\cdot, \cdot)$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Supposons que $f \geq a$ où $a \in]-\infty; \infty[$ et $|f''|_\infty \leq M$ où $M \in]0; \infty[$.

1. Montrer que la fonctionnelle :

$$J(v) = \int_G f(v) dx \quad (\text{ex19.1})$$

est bien définie.

2. Soit W un sous espace vectoriel fermé de V et P la projection de V sur W . Montrer que l'on peut résoudre $\forall \epsilon > 0, \exists u_\epsilon \in W$ tel que $|P f'(u_\epsilon)|_0 \leq \epsilon$.

Exercice 20 Les fonctions suivantes sont elles à support borné ?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \quad x \rightarrow e^x & \text{et} & \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ & & & \quad x \rightarrow g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{ex20.1})$$

Exercice 21 On considère la fonction :

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{ex21.1})$$

1. Montrer que pour $x > 0$, on a :

$$\alpha^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x} \quad (\text{ex21.2})$$

où P_n est un polynôme.

2. Déduire du 1. que α est indéfiniment dérivable ;
3. Déduire du 2. que pour $a > 0$, la fonction $\phi(x) = \alpha(a^2 - x^2)$ est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$; dessiner son allure.

Exercice 22 Étant donnée la fonction :

$$\begin{aligned} f :]-1; 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow |x| \end{aligned} \quad (\text{ex22.1})$$

1. Montrer que f n'est pas dérivable au sens usuel à l'origine ;
2. Calculer la dérivée généralisée de f .

Exercice 23 Étant donnée la fonction :

$$\begin{aligned} f :]-1; 1[^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{ex23.1})$$

Calculer les dérivées généralisées $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_{11} f$, $\partial_{12} f$.

Exercice 24 Dans cet exercice, on utilise le résultat de la question 3 de l'exercice 2 ; les questions sont indépendantes.

1. Construire un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
2. Construire une fonction ϕ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = 1$ si $x \in [-1; 1]$ et $\phi(x) = 0$ si $x \notin [-2; 2]$.
3. Étant donné l'ouvert G indiqué sur la figure 6.2, construire une fonction w de classe \mathcal{C}^∞

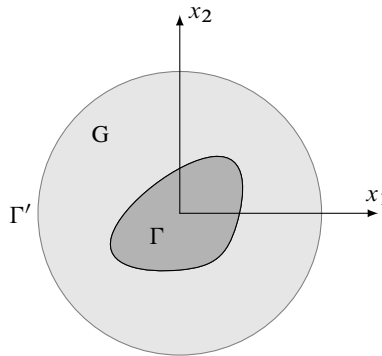


Figure 6.2: Ouvert G avec $\Gamma' = \{x ; |x| = 1\}$

telle que $w(x) = 0$ sur Γ et $w(x) = 1$ sur Γ' .

Exercice 25 Étant donnée $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que ϕ soit nulle en dehors de $]a; b[$ où $-\infty < a < b < +\infty$; on introduit la primitive :

$$P(\phi)(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt \quad (\text{ex25.1})$$

1. Montrer que :

$$P(\phi)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ C(\phi) & \text{si } x > b \text{ (constante)} \end{cases} \quad (\text{ex25.2})$$

2. En déduire que si :

$$C(\phi) = 0 \quad (\text{ex25.3})$$

alors :

$$\exists \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \phi = \theta' \quad (\text{ex25.4})$$

(on pourra utiliser $\theta = P\phi$)

3. Avons-nous (ex25.4) implique (ex25.3) ?

4. Avons-nous ?

$$C(\phi) = \int_a^b \phi(t) dt \quad (\text{ex25.5})$$

Exercice 26 Soit $G \in]0; 1[$, on considère deux fonctions : v définie sur \bar{G} à valeurs dans \mathbb{R}^2 et u , définie sur \bar{G} à valeurs dans \mathbb{R} telles que $v, \partial_i v, u, \partial_i u$ soient continues sur \bar{G} . Vérifier la formule :

$$\int_{\bar{G}} (v \cdot \nabla u) dx = \int_{\partial G} (v \cdot n) u d\Gamma - \int_G (\operatorname{div} v) u dx \quad (\text{ex26.1})$$

Pour ce faire, on transformera successivement :

$$A = \int_{\partial G} (v \cdot n) u d\Gamma = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} (v \cdot n) u d\Gamma \quad (\text{ex26.2})$$

$$B = \int_G (v \cdot \nabla u) dx = \int_0^1 \int_0^1 (v_1 \partial_1 u + v_2 \partial_2 u) dx_1 dx_2$$

⚠ La formule (ex26.1) est la formule de Green usuelle.

Exercice 27

1. Soit $q \in \mathcal{L}^2(G)$; montrer que $\forall \phi \in \mathcal{D}(G), \operatorname{div} q(\phi) = -(q, \nabla \phi)_0$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}^2(G)$ telle que $\nabla u \in \mathcal{L}^2(G)$; montrer que $\Delta u(\phi) = (\nabla u, \nabla \phi)_0 = (u, \Delta \phi)_0$.
3. Soit $\phi \in \mathcal{D}(G)$; montrer que $(\Delta^2 \phi, \phi)_0 = |\Delta \phi|_0^2$.
4. On note $G =]0; 1[\times]0; 1[$ et on introduit la fonction :

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < 1/2 \\ 2 & \text{si } x_1 > 1/2 \end{cases} \quad (\text{ex27.1})$$

Au sens dérivées généralisées, vérifier que dans $G_1 =]0; 1/2[\times]0; 1[$ et $G_2 =]1/2; 1[\times]0; 1[$, on a $\Delta u = 0$ alors que dans G , on a $\Delta u \neq 0$.

Exercice 28

1. Montrer que l'application $u, v \rightarrow (\nabla u, \nabla v)_0$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}_0^1(G)$. On note $\|\cdot\|_0$, la norme associée. On utilisera le fait que sur $\mathcal{L}^2(G)$, l'application $v \rightarrow |v|_0$ est une norme.
2. Montrer que $\mathcal{H}_0^1, \|\cdot\|_0$ est un espace de Hilbert. On utilisera l'inégalité de Poincaré et le fait que \mathcal{H}_0^1 est fermé dans $\mathcal{H}^1(G), \|\cdot\|_1$.

Exercice 29 Soient G un ouvert borné de \mathbb{R}^n et deux fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{R}, g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$. On considère le problème aux limites :

$$\begin{aligned} -\Delta U &= f & (G) \\ U &= g & (\partial G) \end{aligned} \quad (\text{ex29.1})$$

On suppose que $f \in \mathcal{L}^2(G), g = H|_{\partial G}$ et $H \in \mathcal{C}^2(\bar{G})$.

1. Quel est le problème aux limites satisfait par la fonction $u = U - H$?
2. Montrer que le problème précédent a une solution unique $u \in \mathcal{H}_0^1(G)$.
3. En déduire que (ex29.1) a une solution unique $U \in \mathcal{H}^1(G)$

Exercice 30 On introduit $G =]0; 1[\times]0; 1[$ et $\Gamma = \{x ; x_2 = 0\}$. On note les deux espaces $V = \{v \in \mathcal{H}^1(G) ; v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$ et $\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{G}) ; v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$:

1. Établir l'inégalité de Poincaré sur \mathcal{V} ;
2. On suppose que \mathcal{V} est dense dans $V, \|\cdot\|_1$. En déduire l'inégalité de Poincaré sur V ;
3. On suppose que V est fermé dans $\mathcal{H}^1(G), \|\cdot\|_1$; déduire que $V, \|\cdot\|_0$ est un espace de Hilbert ;

4. Soient $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$. On considère le problème aux limites :

$$\begin{aligned} -\Delta U &= f & (G) \\ U &= g & (\Gamma) \\ \partial_n U &= h & (\Gamma') \quad \text{où } \Gamma' = \partial G \setminus \Gamma \end{aligned} \quad (\text{ex30.1})$$

On suppose que $f \in \mathcal{L}^2(G)$; $g = H|_\Gamma$, $H \in \mathcal{C}^2(\bar{G})$; $h = H'|_\Gamma$, $H' \in \mathcal{C}^2(\bar{G})$. Quel est le problème aux limites, noté (ex30.2), satisfait par la fonction $u = U - H$?

5. Montrer que si $u \in V$ est solution de (ex30.2) on a :

$$(\nabla u, \nabla v)_0 = F(v), \quad \forall v \in V \quad (\text{ex30.3})$$

où $F(v) = (f, v)_0 + \langle h, v \rangle$ avec :

$$\langle h, v \rangle = \int_{\Gamma'} h v \, d\Gamma \quad (\text{ex30.4})$$

6. On suppose que $\langle h, v \rangle \leq C \|v\|_1$, $\forall v \in V$. On note $a(u, v) = ((u, v))_0$. Montrer que (ex30.3) a une solution unique $u \in V$.

7. En déduire que (ex30.1) a une solution unique $U \in \mathcal{H}^1(G)$.

Exercice 31 Étant donné G un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et simplement connexe, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$. On considère le problème aux limites :

$$\begin{aligned} -\Delta U &= f & (G) \\ \partial_n U &= h & (\partial G) \end{aligned} \quad (\text{ex31.1})$$

On suppose que $f \in \mathcal{L}^2(G)$ et $h = H|_{\partial G}$, $H \in \mathcal{C}^2(\bar{G})$.

1. Montrer que si u est solution de (ex31.1) alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, fixé, la fonction $u + \lambda$ est aussi solution de (ex31.1).

2. Montrer que si $u \in \mathcal{H}^1(G)$ est solution de (ex31.1), on a :

$$(\nabla u, \nabla v)_0 = F(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(G) \quad (\text{ex31.2})$$

où $F(v) = (f, v)_0 + \langle h, v \rangle$ avec :

$$\langle h, v \rangle = \int_{\Gamma'} h v \, d\Gamma \quad (\text{ex31.3})$$

3. Soit $v \in \mathcal{H}^1$; on introduit la classe d'équivalence $\dot{v} = \{v + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$. On note V l'ensemble de ces classes d'équivalence $V = \{\dot{v}, v \in \mathcal{H}^1(G)\}$:

(a) Soit l'application :

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \mathbb{R} \\ \dot{v} &\rightarrow F_1(\dot{v}) = F(v) \end{aligned} \quad (\text{ex31.4})$$

Vérifier que F_1 a un sens si :

$$F(1) = 0 \quad (\text{ex31.5})$$

(b) On introduit l'application :

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ \dot{u}, \dot{v} &\rightarrow P(\dot{u}, \dot{v}) = ((u, v))_0 \end{aligned} \quad (\text{ex31.6})$$

Vérifier que P définit un produit scalaire sur V ; on note $\|\cdot\|$ la norme associée.


(c) Montrer que sur V , $\|\cdot\|$, P est une forme bilinéaire continue.

4. On suppose que $|\langle h, v \rangle| \leq C \|v\|_1$, $\forall v \in \mathcal{H}^1(G)$. L'application $\dot{v} \rightarrow N(\dot{v}) = \inf\{\|v + \lambda\|_1; \lambda \in \mathbb{R}\}$ définit une norme sur V équivalente à $\|\cdot\|$. Montrer que F_1 est une forme linéaire continue sur V , $\|\cdot\|$.

5. Montrer que (ex31.2) signifie :

$$\exists \dot{u} \in V, \quad P(\dot{u}, \dot{v}) = F_1(\dot{v}), \quad \forall \dot{v} \in V \quad (\text{ex31.7})$$

6. On suppose que (V, P) est un espace de Hilbert. Montrer que (ex31.7) a une solution unique $\dot{u} \in V$.
7. En déduire que (ex31.1) a une solution unique $\dot{u} \in V$.

 On retiendra que la condition (ex31.5) est indispensable pour que le problème (ex31.1) (dit de Neumann) soit soluble. Lorsque $f = 0$ la condition (ex31.5) se réduit à :

$$\int_{\partial G} h \, d\Gamma = 0 \quad (\text{ex31.8})$$

et puisque $\partial_n u = h$ sur ∂G , on obtient :

$$\int_{\partial G} \partial_n u \, d\Gamma = 0 \quad (\text{ex31.9})$$

ce qui est à interpréter, sur le plan physique, comme une condition de flux ou de débit.

Des équations gouvernant les écoulements conduisent aux situations des exercices 2, 3 et 4 lorsque l'on utilise notamment les fonctions potentielles ou les fonctions de courant.

Exercice 32 Soit $G \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné ; on considère le problème aux limites :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} g(u) &= 0 & \text{dans } G \\ \operatorname{rot} u &= 0 & \text{dans } G \\ g(u) \cdot n &= 0 & \text{sur } \partial G \end{aligned} \quad (\text{ex32.1})$$

où $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction donnée. L'inconnue est $u : G \rightarrow \mathbb{R}^2$. On note $[L^2(G)]^2$, $(\cdot, \cdot)_0 \equiv V$, (\cdot, \cdot) et on introduit le sous-espace vectoriel $W = \{v \in V ; \operatorname{rot} v = 0\}$.

1. Montrer que si $u \in W$ satisfait :

$$\begin{aligned} g(u) &\in L^2(G) \\ (g(u), v) &= 0, \quad \forall v \in W \end{aligned} \quad (\text{ex32.2})$$

alors elle est solution de (ex32.1).

2. Montrer que W est fermé.
3. Soit P la projection de V sur W ; montrer que (ex32.2) équivaut à :


$$Pg(u) = 0 \quad (\text{ex32.3})$$

4. Au sens des dérivées usuelles, on suppose que $g' = f$ où f est de classe \mathcal{C}^2 . Introduisons la fonctionnelle :

$$J(v) = \int_G f(u) \, dx \quad (\text{ex32.4})$$

On suppose que $f \geq a$ où $a \in]-\infty ; \infty[$ et $|f''|_\infty \geq M$ où $M \in]0 ; +\infty[$. Montrer que (ex32.3) a une solution à ϵ près, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists u_\epsilon \in W, \quad |Pf'(u_\epsilon)| \leq \epsilon \quad (\text{ex32.5})$$

 Des problèmes tels que (ex32.1) se présentent dans des modèles d'écoulement et dans des modèles issus de l'électromagnétisme.

Exercice 33 Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \quad (\text{ex33.1})$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2/2} dx \quad (\text{ex33.2})$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} p(s, y) dy = 1 \quad (\text{ex33.3})$$

$$\beta(-y_1, y_2) = -\beta(y_1, y_2) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \beta(y) p(s, y) dy = 0 \quad (\text{ex33.4})$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} y_1^2 p(s, y) dy = s \quad (\text{ex33.5})$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |y_1|^3 p(s, y) dy = Ks^{3/2} \quad (\text{ex33.6})$$

Exercice 34 Si $s_2 > s_1 > 0$, montrer que :

$$\beta(-y_1, y_2) = -\beta(y_1, y_2) \Rightarrow E(\alpha(X_{s_1})\beta(\delta X_s)) = 0 \quad (\text{ex34.1})$$

$$E(\alpha(X_{s_1})(\delta X_s)_1^2) = \delta_s E(\alpha(X_{s_1})) \quad (\text{ex34.2})$$

$$|E(\alpha(X_{s_1}, X_{s_2})(\delta X_s)_1^3)| \leq K|\alpha|_{\infty} \delta_s^{3/2} \quad (\text{ex34.3})$$

Exercice 35 On considère deux fonctions $\alpha : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec β impaire par rapport à au moins une variable.

1. Montrer que :

$$E(\alpha(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})\beta(\delta X_{s_n})) = 0 \quad (\text{ex35.1})$$

2. Montrer que :

$$E(\alpha(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})(\delta X_{s_n})_i^2) = E(\alpha(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}))\delta_{s_n}, \quad i = 1, 2 \quad (\text{ex35.2})$$

3. Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; montrer que :

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^N u(X_{s_i})\delta X_{s_i}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^N E(|u(X_{s_i})|^2)\delta_{s_i} \quad (\text{ex35.3})$$

4. Pour t fixé, on prend la subdivision $s_1 \dots s_{1+N}$ de $(0; t)$. Lorsque $\delta_N \rightarrow 0$, on suppose le passage à la limite dans 3. Quelle identité est obtenue ?

5. En déduire l'identité :

$$E\left(\left(\int_0^t u(X_s) dX_s\right)\left(\int_0^t v(X_s) dX_s\right)\right) = \int_0^t E(u(X_s)v(X_s)) ds \quad (\text{ex35.4})$$

Lors des calculs, on posera $a = u(X_s)$, $b = v(X_s)$ et :

$$i = \int_0^t u(X_s) dX_s \quad ; \quad j = \int_0^t v(X_s) dX_s \quad (\text{ex35.5})$$

Exercice 36 Soit une fonction $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les dérivées usuelles existent et sont continues jusqu'à l'ordre n . Pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $x \in \mathbb{R}^2$, on considère la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\rightarrow u(\tilde{a}) \end{aligned} \quad (\text{ex36.1})$$

où $\tilde{a} = a + \lambda x$.

1. Montrer que :

$$f^{(n)}(\lambda) = \sum_{\ell=0}^n C_n^{\ell} \partial_1^{\ell} \partial_2^{n-\ell} u(\tilde{a}) x_1^{\ell} x_2^{n-\ell} \quad (\text{ex36.2})$$

2. On introduit diverses notations pour $f^{(n)}(\lambda)$ utiles par la suite :

$$f^{(n)}(\lambda) = (\partial_1 \tilde{u} x_1 + \partial_2 \tilde{u} x_2)^n \quad (\text{ex36.3})$$

où $\partial_1 \tilde{u} = \partial_1 u(\tilde{a})$ et $\partial_2 \tilde{u} = \partial_2 u(\tilde{a})$. Ensuite :

$$f^{(n)}(\lambda) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha \partial^\alpha \tilde{u} x^\alpha \quad (\text{ex36.4})$$

où $\partial^\alpha \tilde{u} = \partial^\alpha u(\tilde{a})$ et $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, et enfin :

$$f^{(n)}(\lambda) = \nabla^n u(\tilde{a}) x^n \quad (\text{ex36.5})$$

où $x \rightarrow \nabla^n u(\tilde{a}) x^n$ est la forme n -linéaire qui à x associe :

$$\sum_{|\alpha|=n} \partial^\alpha \tilde{u} x^\alpha \quad (\text{ex36.6})$$

Vérifier que :

$$\begin{aligned} f^{(3)}(0) &= \partial_1^3 u(a) x_1^3 + 3 \partial_1^2 \partial_2 u(a) x_1^2 x_2 + \partial_1 \partial_2^2 u(a) x_1 x_2^2 + \partial_2^3 u(a) x_2^3 \\ f^{(3)}(0) &= \nabla^3 u(a) x^3 \end{aligned} \quad (\text{ex36.7})$$

3. On suppose que u a des dérivées usuelles continues jusqu'à l'ordre 3. Appliquer la formule de Taylor pour évaluer $f(1) - f(0)$. En déduire l'identité :

$$u(a+x) - u(a) = \nabla u(a) \cdot x + \frac{1}{2} \nabla^2 u(a) \cdot x^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\lambda)^2 \nabla^3 u(\tilde{a}) d\lambda \quad (\text{ex36.8})$$

Exercice 37 Montrer que :

$$|X_t|^2 - |x|^2 \neq \int_0^t 2X_s dX_s \quad (\text{ex37.1})$$

Utiliser la formule de Itô pour :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\rightarrow |y|^2 \end{aligned} \quad (\text{ex37.2})$$

En général, on a :

$$d(u(X_t)) \neq u'(X_t) dX_t \quad (\text{ex37.3})$$

Cette différence provient de la définition des intégrales stochastiques. Au sens dérivées usuelles, on a $d(u(v(t))) = u'(v(t)) dv$.

Exercice 38 Lorsque :

$$Y_t - Y_r = \int_r^t a(s, Y_s) ds + \int_r^t b(s, Y_s) dX_s \quad (\text{ex38.1})$$

vérifier que :

$$F(t, Y_t) - F(r, Y_r) = \int_r^t (\partial F + a \nabla F + \frac{b^2}{2} \Delta F) ds + \int_r^t b \nabla F dX_s \quad (\text{ex38.2})$$

où $a, b, \partial F, \nabla F$ et ΔF sont prises en (s, Y_s) .

Exercice 39 Soient deux fonctions $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$; on introduit :

$$Y_t = \int_0^t \beta(s) dX_s \quad (\text{ex39.1})$$

On pose $Z_t = \alpha(t) Y_t$.

1. Montrer que :

$$dZ_t = d\alpha Y_t + \alpha\beta dX_t \quad (\text{ex39.2})$$

Indication : Appliquer la formule de Itô à :

$$F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, y) \rightarrow \alpha(s)y \quad (\text{ex39.3})$$

avec :

$$\nabla F(s, y) = \alpha(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha I_d \quad ; \quad \Delta F(s, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ex39.4})$$

2. Vérifier que :

$$d\left(\alpha(t) \int_0^t \beta(s) dX_s\right) = d\alpha \int_0^t \beta(s) dX_s + \alpha(t)\beta(t) dX_t \quad (\text{ex39.5})$$

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, vérifier que :

$$Y_t = e^{-at} \left(Y_0 + b \int_0^t e^{as} dX_s \right) \quad (\text{ex39.6})$$

est solution de :

$$dY_t = -aY_t dt + b dX_t \quad (\text{ex39.7})$$



Cette équation a été introduite par Langevin pour le mouvement de particules de poussière à la surface de l'eau ; la quantité X_t représente la vitesse.

Exercice 40 On s'intéresse à la résolution du problème de Neumann :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & (G) \\ \partial_n u &= g & (\partial G) \end{aligned} \quad (\text{ex40.1})$$

où sont donnés le domaine $G \subset \mathbb{R}^2$, la fonction $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction $g : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$. L'inconnue est la fonction $u : G \rightarrow \mathbb{R}$. On introduit le processus :

$$Y_t = x + \int_0^t dX_s - \int_0^t 1_{\partial G}(Y_s) n(Y_s) d\xi(Y_s) \quad (\text{ex40.2})$$

où $1_{\partial G}$ est la fonction indicatrice de ∂G et $d\xi(Y_s) = \lambda(s) ds$ avec $\lambda > 0$.

1. Montrer que $Y_t = -1_{\partial G}(Y_t) n(Y_t) \lambda(t) dt + dX_t$.
2. Lorsque $Y_t \in \partial G$, on suppose que $\lambda dt \gg |dX_t|$. Dessiner la somme $dY_t = dX_t + \lambda n dt$.
3. Montrer que pour $v : G \rightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$v(x) = E\left(v(Y_t - 1/2) \int_0^t \Delta v(Y_s) ds + \int_0^t \partial_n v(Y_s) 1_{\partial G}(Y_s) d\xi(Y_s)\right) \quad (\text{ex40.3})$$

4. Soit u une solution de (ex40.1) telle que $E(Y_t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$: en déduire une représentation en fonction des données G, f, g et de Y et ξ .

Exercice 41 Étant donnés $t > 0$ et $G \subset \mathbb{R}^3$, on pose $I = (0; t)$, $Q = I \times G$, $\Sigma = I \times \partial G$ et $G_0 = \{0\} \times G$. On considère le problème parabolique :

$$\partial_t u - \frac{1}{2} \Delta u = f \quad (Q) \quad (\text{ex41.1})$$

$$u = g \quad (\Sigma) \quad (\text{ex41.2})$$

$$u = u_0 \quad (G_0) \quad (\text{ex41.3})$$

où sont données la fonction $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction $u_0 : G_0 \rightarrow \mathbb{R}$. L'inconnue est la fonction $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Donner une représentation de u . Indication : appliquer la formule de Itô à $u(t-s, X_s)$ entre $s_1 = 0$ et $s_2 = \min(t, T)$.

Exercice 42 On se donne un espace de Hilbert V , (\cdot, \cdot) , $|\cdot|$ muni d'une base hilbertienne (w_p) , une forme linéaire continue $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ et une forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} a : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow a(u, v) \end{aligned} \quad (\text{ex42.1})$$

On suppose que a est symétrique et vérifie les conditions $\alpha|u|^2 \leq a(u, u)$ et $|a(u, v)| \leq M|u||v|$. On sait que l'équation :

$$\exists! u \in V, \quad a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V \quad (\text{ex42.2})$$

a une solution unique. Pour n fixé, on munit $V_n = \{w_1, \dots, w_n\}$ du produit scalaire de V . Comme en (ex42.2), on a :

$$\exists! u_n \in V_n, \quad a(u_n, v) = F(v), \quad \forall v \in V_n \quad (\text{ex42.3})$$

1. Montrer que l'on peut extraire de (u_n) une sous-suite telle que :

$$u'_n \xrightarrow{V} u_* \quad (\text{ex42.4})$$

pour $v \in V_m$ à m fixé.

2. Montrer que :

$$a(u_*, z) = F(z), \quad \forall z \in V \quad (\text{ex42.5})$$

3. Dédire de (ex42.4) et de (ex42.5) que $u_n \xrightarrow{V} u$.
4. Effectuer $a(u - u_n, u - u_n)$ et en déduire $u_n \xrightarrow{V} u$.
5. Résoudre (ex42.2) lorsque a n'est plus symétrique.
6. Donner une méthode d'approche de (ex42.3) lorsque a n'est plus symétrique



Références

- [1] Marc POGU et José Eduardo SOUZA DE CURSI. « Programmation de la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles ». Polycopié de cours. École centrale de Nantes, 1994.
- [2] Roger TEMAM. *Navier-stokes Equations : Theory and Numerical Analysis*. AMS/Chelsea Publication Series. American Mathematical Society, 1977. ISBN : 9780821827376.