Cours d'Analyse 1

Prof : Rachid Bahloul

Ch 1 : Les suites

Définition:

- Une suite est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ème terme ou terme général de la suite.

Ch 1 : Les suites

Définition:

- Une suite est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ème terme ou terme général de la suite.

Exemple

1. $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ est la suite de termes : $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$.
2. $(-1)^n$ est la suite de termes : $+1$, - 1, $+1$, - 1,...

Ch 1 : Les suites

Définition:

- Une suite est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ème terme ou terme général de la suite.

Exemple

1. $(\sqrt{n})_{n \geq 0}$ est la suite de termes : $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$.
2. $(-1)^n$ est la suite de termes : $+1$, - 1, $+1$, - 1,...

Suite majorée, minorée, bornée

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq M$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq m$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \leq M$$

.

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante

Limite finie, limite infinie

Dédifinition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|u_n - l| \leq \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; (\forall n \in \mathbb{N}) \; (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l.

Dédifinition :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si :

$$\forall A > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; (\forall n \in \mathbb{N}) \; (n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A)$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si :

$$\forall A > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; (\forall n \in \mathbb{N}) \; (n \geq n_0 \Rightarrow u_n < -A)$$

Définition : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers ∞, soit elle n'admet pas de limite).

Définition : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers ∞, soit elle n'admet pas de limite).

Proposition : Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Définition : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers ∞, soit elle n'admet pas de limite).

Proposition : Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Proposition : Toute suite convergente est bornée.

Suites arithmitiques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a :

$$\mathbf{u_{n+1} - u_n = r}$$

Le nombre r est appelé **raison** de la suite

Suites arithmitiques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a :

$$\mathbf{u_{n+1} - u_n = r}$$

Le nombre r est appelé **raison** de la suite

Proposition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Alors Pour tout entier naturel n on a :

$$\mathbf{u_n = u_0 + nr}$$

Suites arithmitiques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a :

$$\mathbf{u_{n+1} - u_n = r}$$

Le nombre r est appelé **raison** de la suite

Proposition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Alors Pour tout entier naturel n on a :

$$\mathbf{u_n = u_0 + nr}$$

$$\mathbf{u_n = u_p + (n-p)r}$$

Proposition : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 et $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. Alors

$$\mathbf{S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)}$$

Suites géométrique

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a :

$$\mathbf{v_{n+1} = qv_n}$$

Le nombre q est appelé raison de la suite

Suites géométrique

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a :

$$\mathbf{v_{n+1} = qv_n}$$

Le nombre q est appelé raison de la suite
Proposition : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0. Alors Pour tout entier naturel n on a :

$$\mathbf{v_n = q^n v_0}$$

Suites géométrique

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a :

$$\mathbf{v_{n+1} = qv_n}$$

Le nombre q est appelé raison de la suite
Proposition : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0. Alors Pour tout entier naturel n on a :

$$\mathbf{v_n = q^n v_0}$$

$$\mathbf{v_n = q^{n-p} v_p}$$

Proposition : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul v_0.

Pour $v_0 > 0$

- Si $q > 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour $v_0 < 0$

- Si $q > 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Proposition : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul v_0.

Pour $v_0 > 0$

- Si $q > 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour $v_0 < 0$

- Si $q > 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration : Dans le cas où $v_0 > 0$

$\mathbf{v_{n+1} - v_n} = q^{n+1}v_0 - q^n v_0 = \mathbf{q^n v_0(q-1)}$.

Si $q > 1$ alors $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Si $q < 1$ alors $v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Proposition : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul v_0.

Pour $v_0 > 0$

- Si $q > 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour $v_0 < 0$

- Si $q > 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration : Dans le cas où $v_0 > 0$

$\mathbf{v_{n+1} - v_n} = q^{n+1}v_0 - q^n v_0 = \mathbf{q^n v_0(q-1)}$.

Si $q > 1$ alors $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Si $q < 1$ alors $v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exemple : La suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = -3^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 et $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$. Alors

$$\mathbf{S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Suites adjacentes :

définition : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Elles sont adjacentes si elles vérifient les conditions suivantes :

1. L'une est croissante
2. L'autre est décroissante
3. $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Définition : Soit $x_0 \in I$ (un intervalle de $\mathbb{R}$). f admet en x_0 la limite l si:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in I \; [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

On note:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Définition : Soit $x_0 \in I$ (un intervalle de $\mathbb{R}$). f admet en x_0 la limite l si:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in I \; [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

On note:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Définition (Limite à droite)
Soit $x_0 \in I$ (un intervalle de $\mathbb{R}$). f admet à droite de x_0 la limite l_1 si:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in I \; [0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon].$$

On note:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 = f(x_0^+)$$

Définition (Limite à gauche)
Soit $x_0 \in I$ (un intervalle de $\mathbb{R}$). f admet à droite de x_0 la limite l_2 si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ [0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon].$$

On note:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 = f(x_0^-)$$

Définition (Limite à gauche)
Soit $x_0 \in I$ (un intervalle de $\mathbb{R}$). f admet à droite de x_0 la limite l_2 si:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in I \; [0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon].$$

On note:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 = f(x_0^-)$$

Théorème : La fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in I$ si et seulement si f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 et que ces deux limites sont égales à l.

Définition (Limite à gauche)
Soit $x_0 \in I$ (un intervalle de $\mathbb{R}$). f admet à droite de x_0 la limite l_2 si:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in I \; [0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon].$$

On note:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 = f(x_0^-)$$

Théorème : La fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in I$ si et seulement si f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 et que ces deux limites sont égales à l.
Démonstration : Supposons que f admet une limite l en x_0.
Donc par définition:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in I \; [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

Définition (Limite à gauche)
Soit $x_0 \in I$ (un intervalle de $\mathbb{R}$). f admet à droite de x_0 la limite l_2 si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ [0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon].$$

On note:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 = f(x_0^-)$$

Théorème : La fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in I$ si et seulement si f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 et que ces deux limites sont égales à l.
Démonstration : Supposons que f admet une limite l en x_0.
Donc par définition:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

Ce qui entraine les deux possibilités:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ [0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

et

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ [0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ [0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

f admet une limite à droite et une limite à gauche.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ [0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

f admet une limite à droite et une limite à gauche.
Inversement: Supposons que $f(x_0^+) = f(x_0^-) = l$
Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta_1 > 0 \ \forall x \in I \ [0 < x - x_0 < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

et

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta_2 > 0 \ \forall x \in I \ [0 < x_0 - x < \eta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ [0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

f admet une limite à droite et une limite à gauche.
Inversement: Supposons que $f(x_0^+) = f(x_0^-) = l$
Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta_1 > 0 \ \forall x \in I \ [0 < x - x_0 < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

et

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta_2 > 0 \ \forall x \in I \ [0 < x_0 - x < \eta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

En posant $\eta = inf(\eta_1, \eta_2)$, On aura:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

Propriétés des limites

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies l_1 et l_2 en un point $x_0 \in I$.
Alors:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 + l_2$

Propriétés des limites

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies l_1 et l_2 en un point $x_0 \in I$.
Alors:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 + l_2$
2. $\lim_{x\to x_0}(\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha l_1$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

Propriétés des limites

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies l_1 et l_2 en un point $x_0 \in I$.
Alors:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 + l_2$
2. $\lim_{x\to x_0}(\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha l_1$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) \times g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 \times l_2$.

Propriétés des limites

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies l_1 et l_2 en un point $x_0 \in I$. Alors:

1. $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 + l_2$
2. $\lim_{x \to x_0}(\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha l_1$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) \times g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \times \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 \times l_2$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur I (sauf peut être au point $x_0 \in I$) et admettant une limite finie l en x_0. Si $f \geq 0$ alors.

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f}(x) = l$$

Propriétés des limites

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies l_1 et l_2 en un point $x_0 \in I$. Alors:

1. $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 + l_2$
2. $\lim_{x \to x_0}(\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha l_1$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) \times g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \times \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 \times l_2$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur I (sauf peut être au point $x_0 \in I$) et admettant une limite finie l en x_0. Si $f \geq 0$ alors.

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f}(x) = l$$

Exemple : On a $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6$.
Donc $\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}} = \sqrt{6}$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors: $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ dans I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers l .

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors: $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ dans I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers l .

Exercice : Les limites suivantes existent-elles? Si oui, les déterminer.

$$a) \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \quad b) \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + |x|}{x}$$

(a) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(a) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\
&= 1
\end{aligned}$$

(b) Nous avons, pour $x \neq 0$,

$$\frac{x^2+|x|}{x} = x + \frac{|x|}{x} = x + signe(x)$$

où signe(x) vaut 1 quand x est positif ou nul, et -1 quand x est strictement négatif. La limite à droite en 0 de l'expression obtenue vaut 1, et la limite à gauche vaut -1, donc l'expression de départ n'admet pas de limite en 0.

Définition : Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle (ouvert) I et $x_0 \in I$. f est continue en x_0 si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \mathbf{f(x)} = \mathbf{f(x_0)}.$$

C'est à dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Définition : Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle (ouvert) I et $x_0 \in I$. f est continue en x_0 si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x_0}).$$

C'est à dire:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I\ [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Définition : Soit f une fonction numérique sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. f est uniformément continue sur I si:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x, x' \in I\ [0 < |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon].$$

Définition : Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle (ouvert) I et $x_0 \in I$. f est continue en x_0 si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x_0}).$$

C'est à dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Définition : Soit f une fonction numérique sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. f est uniformément continue sur I si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x, x' \in I \ [0 < |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon].$$

Exemple: Soit f une fonction k-lipschitzienne sur I c'est-à-dire que

$$\forall x, x' \in I \ |f(x) - f(x')| < k|x - x'|, \text{ où } k \in \mathbb{R}_+^*$$

Alors f est uniformément continue. En effet pour $\varepsilon > 0$ on prendre $\eta = \varepsilon / k$.

Proposition : Une fonction uniformément continue sur $\mathbf{I}$ est continue sur $\mathbf{I}$.

Proposition : Une fonction uniformément continue sur **I** est continue sur **I**.

Remarque : La réciproque est fausse.

Proposition : Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I.

Remarque : La réciproque est fausse.

En effet : Soient $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$. Cette fonction est continue sur R. Supposons qui elle est uniformément continue.

Pour

$\varepsilon = 1\ \exists \eta > 0\ \forall x, x' \in I\ [0 < |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < 1]$.

Soient $x = \frac{1}{\eta}$ et $x' = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}$.

Alors on a

$$|x - x'| = |\frac{\eta}{2}| < \eta \text{ et } |f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| = 1 + \frac{\eta^2}{4} > 1.$$

D'où f n'est pas uniformément continue.

Proposition : Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I.

Remarque : La réciproque est fausse.

En effet : Soient $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$. Cette fonction est continue sur R. Supposons qui elle est uniformément continue.

Pour

$\varepsilon = 1 \; \exists \eta > 0 \; \forall x, x' \in I \; [0 < |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < 1]$.

Soient $x = \frac{1}{\eta}$ et $x' = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}$.

Alors on a

$$|x - x'| = |\frac{\eta}{2}| < \eta \text{ et } |f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| = 1 + \frac{\eta^2}{4} > 1.$$

D'où f n'est pas uniformément continue.

Théorème : Toute fonction définie et **continue** sur un intervalle fermé borné [a,b] et telle que

$$\mathbf{f(a) \times f(b) < 0}$$

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\mathbf{f(c) = 0}$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Démonstration :

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Démonstration : Soit, par exemple $f(x_1) < f(x_2)$.
Soit $c \in]f(x_1), f(x_2)[$. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$ par:

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Démonstration : Soit, par exemple $f(x_1) < f(x_2)$.
Soit $c \in]f(x_1), f(x_2)[$. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$ par:

$$\mathbf{g(x) = f(x) - c}$$

on a

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Démonstration : Soit, par exemple $f(x_1) < f(x_2)$.
Soit $c \in]f(x_1), f(x_2)[$. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$ par:

$$\mathbf{g(x) = f(x) - c}$$

on a

$$g(x_1) =$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Démonstration : Soit, par exemple $f(x_1) < f(x_2)$.
Soit $c \in]f(x_1), f(x_2)[$. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$ par:

$$\mathbf{g(x) = f(x) - c}$$

on a

$$g(x_1) = f(x_1) - c$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Démonstration : Soit, par exemple $f(x_1) < f(x_2)$.
Soit $c \in]f(x_1), f(x_2)[$. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$ par:

$$\mathbf{g(x) = f(x) - c}$$

on a

$$g(x_1) = f(x_1) - c < 0$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Démonstration : Soit, par exemple $f(x_1) < f(x_2)$.
Soit $c \in]f(x_1), f(x_2)[$. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$ par:

$$\mathbf{g(x) = f(x) - c}$$

on a

$$g(x_1) = f(x_1) - c < 0$$
$$g(x_2) =$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Démonstration : Soit, par exemple $f(x_1) < f(x_2)$.
Soit $c \in]f(x_1), f(x_2)[$. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$ par:

$$\mathbf{g(x) = f(x) - c}$$

on a

$$g(x_1) = f(x_1) - c < 0$$
$$g(x_2) = f(x_2) - c$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Démonstration : Soit, par exemple $f(x_1) < f(x_2)$.
Soit $c \in]f(x_1), f(x_2)[$. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$ par:

$$\mathbf{g(x) = f(x) - c}$$

on a

$$g(x_1) = f(x_1) - c < 0$$
$$g(x_2) = f(x_2) - c > 0$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.
Démonstration : Soit, par exemple $f(x_1) < f(x_2)$.
Soit $c \in]f(x_1), f(x_2)[$. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$ par:

$$\mathbf{g(x) = f(x) - c}$$

on a

$$\begin{aligned} g(x_1) &= f(x_1) - c < 0 \\ g(x_2) &= f(x_2) - c > 0 \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème précèdent,

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Démonstration : Soit, par exemple $f(x_1) < f(x_2)$.
Soit $c \in]f(x_1), f(x_2)[$. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$ par:

$$\mathbf{g(x) = f(x) - c}$$

on a

$$g(x_1) = f(x_1) - c < 0$$
$$g(x_2) = f(x_2) - c > 0$$

Donc, d'après le théorème précèdent,il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que: $g(x_0) = 0$. C'est à dire:

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < x_2$ deux éléments de I. Alors pour toute valeur c, comprise entre $f(x_1)$ et (x_2), il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = c$.

Démonstration : Soit, par exemple $f(x_1) < f(x_2)$.
Soit $c \in]f(x_1), f(x_2)[$. Considérons la fonction g définie sur l'intervalle fermé borné $[x_1, x_2]$ par:

$$\mathbf{g(x) = f(x) - c}$$

on a

$$\begin{aligned} g(x_1) &= f(x_1) - c < 0 \\ g(x_2) &= f(x_2) - c > 0 \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème précèdent,il existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que: $g(x_0) = 0$. C'est à dire: $\exists x_0 \in]x_1, x_2[$: $f(x_0) = c$.

Corollaire : L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$, par une fonction continue est un intervalle.

Corollaire : L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$, par une fonction continue est un intervalle.

Théorème du point fixe.

Théorème : Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Alors, il existe au moins un point $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$

Corollaire : L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$, par une fonction continue est un intervalle.

Théorème du point fixe.

Théorème : Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Alors, il existe au moins un point $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$

Preuve : Soit la fonction définie sur $[a, b]$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$) par:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$$

g est continue sur $[a, b]$ et on a : $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$ car f est à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$. Donc il existe au moins un point $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est à dire $f(x_0) = x_0$.

Définition :Soit $f : I \to I$. f est dite **contractante** s'il existe une constante $\mathbf{k} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ telle que:

$$\forall x, y \in I, \ |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

Définition :Soit $f : I \to I$. f est dite **contractante** s'il existe une constante $\mathbf{k} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ telle que:

$$\forall x, y \in I, \ |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

Remarque : Toute fonction contractante est Lipschitzienne donc uniformément continue, donc continue.

Définition :Soit $f : I \to I$. f est dite **contractante** s'il existe une constante $\mathbf{k} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ telle que:

$$\forall x, y \in I, \ |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

Remarque : Toute fonction contractante est Lipschitzienne donc uniformément continue, donc continue.
Contractante $\Rightarrow$ Lipschitzienne $\Rightarrow$ Uniformément continue $\Rightarrow$ Continue.

Définition :Soit $f : I \to I$. f est dite **contractante** s'il existe une constante $\mathbf{k} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ telle que:

$$\forall x, y \in I, \ |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

Remarque : Toute fonction contractante est Lipschitzienne donc uniformément continue, donc continue.
Contractante $\Rightarrow$ Lipschitzienne $\Rightarrow$ Uniformément continue $\Rightarrow$ Continue.
Théorème : Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction contractante, alors f admet un point fixe **unique**.

Définition :Soit $f : I \to I$. f est dite **contractante** s'il existe une constante $\mathbf{k} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ telle que:

$$\forall x, y \in I, \ |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

Remarque : Toute fonction contractante est Lipschitzienne donc uniformément continue, donc continue.
Contractante $\Rightarrow$ Lipschitzienne $\Rightarrow$ Uniformément continue $\Rightarrow$ Continue.
Théorème : Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction contractante, alors f admet un point fixe **unique**.
Démonstration : **Unicité**: f étant continue, si l est une limite alors elle doit vérifier: $f(l) = l$ Supposons qu'il existe l_1 et l_2 deux réels vérifiant $f(l_1) = l_1$ et $f(l_2) = l_2$. On aura alors:

$$|l_1 - l_2| = |f(l_1) - f(l_2)| \leq k|l_1 - l_2|$$

Ceci est en contradiction avec le fait que $k \in]0, 1[$. Donc $l_1 = l_2$.

Fonctions dérivables

La dérivée d'une fonction Définition : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. f est dérivable au point a si

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tend vers une limite quand x tend vers a. Si elle existe, cette limite, notée $f'(a)$, s'appelle la dérivée de f en a et on écrit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Fonctions dérivables

La dérivée d'une fonction Définition : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. f est dérivable au point a si

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tend vers une limite quand x tend vers a. Si elle existe, cette limite, notée $f'(a)$, s'appelle la dérivée de f en a et on écrit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Si f est dérivable en a alors on a:

$$\mathbf{f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x)}$$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Définition : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. f est dérivable

1. à droite de x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie,et est noté :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0) \text{ (ou } f'(x_0^+)).$$

2. à gauche de x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie,et est noté :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(x_0) \text{ (ou } f'(x_0^-)).$$

Définition : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. f est dérivable

1. à droite de x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie,et est noté :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \text{ (ou } f'(x_0^+)).$$

2. à gauche de x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie,et est noté :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(x_0) \text{ (ou } f'(x_0^-)).$$

Proposition : Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Définition : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. f est dérivable

1. à droite de x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie,et est noté :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \text{ (ou } f'(x_0^+)).$$

2. à gauche de x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie,et est noté :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(x_0) \text{ (ou } f'(x_0^-)).$$

Proposition : Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Définition : On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable si f est dérivable en tout $a \in I$. On définit alors sa dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$.

Théorème de Rolle :

Théorème de Rolle :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et vérifiant $\mathbf{f(a) = f(b)}$. Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et vérifiant $\mathbf{f(a) = f(b)}$. Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Remarque : Les conditions du théorème sont suffisantes mais non nécessaires. En effet $f(x) = x^3$ ne satisfait pas toutes les hypothèses du théorème de Rolle sur $[-1, 1]$ et pourtant $f'(0) = 0$.

Théorème de Rolle :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et vérifiant $\mathbf{f(a) = f(b)}$. Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Remarque : Les conditions du théorème sont suffisantes mais non nécessaires. En effet $f(x) = x^3$ ne satisfait pas toutes les hypothèses du théorème de Rolle sur $[-1, 1]$ et pourtant $f'(0) = 0$.
Exemple : La fonction polynômiale définie par:

$$P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$$

s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.

Théorème de Rolle :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et vérifiant $\mathbf{f(a) = f(b)}$. Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Remarque : Les conditions du théorème sont suffisantes mais non nécessaires. En effet $f(x) = x^3$ ne satisfait pas toutes les hypothèses du théorème de Rolle sur $[-1, 1]$ et pourtant $f'(0) = 0$.
Exemple : La fonction polynômiale définie par:

$$P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$$

s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.
En effet, P continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et vérifiant $f(0) = f(1) = 2$. Alors il existe un $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

C'est une généralisation du théorème de Rolle.

Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

C'est une généralisation du théorème de Rolle.

Régle de l'Hospital

Théorème des accroissements finis
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

C'est une généralisation du théorème de Rolle.

Régle de l'Hospital
Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$ (sauf peut être en $x_0 \in]a, b[$) dérivables sur $]a, b[$ (sauf peut être en x_0) telles que: $g'(x_0) \neq 0$ et $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty})$.
Si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple: Calculons $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - sin^2(x)}{x^4}$ (forme indéterminée $\frac{0}{0}$)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - sin^2(x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2sin(x)cos(x)}{4x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x - sin(2x)}{4x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2cos(2x)}{12x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4sin(2x)}{24x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{8cos(2x)}{24} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Fonctions Convexes

Définition : $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction **convexe** si pour tout $x, y \in [a, b]$ et tout $\lambda \in [0, 1]$ on a:

$$f(\lambda x + (\mathbf{1} - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (\mathbf{1} - \lambda)f(y).$$

Fonctions Convexes

Définition : $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction **convexe** si pour tout $x, y \in [a, b]$ et tout $\lambda \in [0, 1]$ on a:

$$f(\lambda x + (\mathbf{1} - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (\mathbf{1} - \lambda)f(y).$$

Exemple : $x \to x^2$ est convexe (sur $\mathbb{R}$).
Théorème : Soit f une fonction dérivable. Alors

Fonctions Convexes

Définition : $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction **convexe** si pour tout $x, y \in [a, b]$ et tout $\lambda \in [0, 1]$ on a:

$$f(\lambda x + (\mathbf{1} - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (\mathbf{1} - \lambda)f(y).$$

Exemple : $x \to x^2$ est convexe (sur $\mathbb{R}$).
Théorème : Soit f une fonction dérivable. Alors
f est convexe si et seulement si f' est croissante (si f est deux fois dérivable f'' est positive).

Fonctions hyperboliques

On définit les fonctions suivantes: (cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique)

$$\mathbf{chx} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\mathbf{shx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\mathbf{thx} = \frac{\mathbf{shx}}{\mathbf{chx}}$$

Fonctions hyperboliques

On définit les fonctions suivantes: (cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique)

$$\mathbf{chx} = \frac{\mathbf{e^x + e^{-x}}}{\mathbf{2}}$$
$$\mathbf{shx} = \frac{\mathbf{e^x - e^{-x}}}{\mathbf{2}}$$
$$\mathbf{thx} = \frac{\mathbf{shx}}{\mathbf{chx}}$$

Il s'en suit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$chx + shx = e^x$$
$$chx - shx = e^{-x}$$
$$ch^2x - sh^2x = e^x$$

Cosinus hyperbolique

Etude de Ch :

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

C'est une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Cosinus hyperbolique

Etude de Ch :

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

C'est une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Elle est paire et sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie;

Cosinus hyperbolique

Etude de Ch :

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

C'est une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Elle est paire et sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie;
$ch'x = shx\ \forall x \in \mathbb{R}$. Donc sh est strictement croissante. Par ailleurs: $\forall x \in \mathbb{R}\ chx - shx = e^{-x} > 0$. Donc la courbe de ch est située au dessus de la courbe de sh; (remarquer que cette différence tend vers 0).

Tangente hyperbolique

Remarques

Tangente hyperbolique

Remarques

La fonction **th** est impaire.

Tangente hyperbolique

Remarques

La fonction **th** est impaire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$

Tangente hyperbolique

Remarques

La fonction **th** est impaire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$

On rencontre parfois la fonction cotangente hyperbolique qui est la fonction $\frac{1}{thx}$ (mais qui n'est pas définie en 0.

Tangente hyperbolique

Remarques
La fonction **th** est impaire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$
On rencontre parfois la fonction cotangente hyperbolique qui est la fonction $\frac{1}{thx}$ (mais qui n'est pas définie en 0.
Proposition:

Tangente hyperbolique

Remarques

La fonction **th** est impaire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$

On rencontre parfois la fonction cotangente hyperbolique qui est la fonction $\frac{1}{thx}$ (mais qui n'est pas définie en 0.

Proposition:

La fonction **th** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$th'(x) = 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$

Tangente hyperbolique

Remarques

La fonction **th** est impaire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$

On rencontre parfois la fonction cotangente hyperbolique qui est la fonction $\frac{1}{thx}$ (mais qui n'est pas définie en 0.

Proposition:

La fonction **th** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$th'(x) = 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$

Etude des variations. Il suffit d'étudier **th** sur $[0, +\infty[$ puisqu'il s'agit d'une fonction impaire.

Tangente hyperbolique

Remarques
La fonction **th** est impaire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$
On rencontre parfois la fonction cotangente hyperbolique qui est la fonction $\frac{1}{thx}$ (mais qui n'est pas définie en 0.
Proposition:
La fonction **th** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :
$th'(x) = 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$
Etude des variations. Il suffit d'étudier **th** sur $[0, +\infty[$ puisqu'il s'agit d'une fonction impaire.
La dérivée de **th** est $\frac{1}{ch^2}$ donc **th** est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Fonctions hyperboliques réciproques

Réciproque de la fonction sinus hyperbolique

La fonction **sh** est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Fonctions hyperboliques réciproques

Réciproque de la fonction sinus hyperbolique

La fonction **sh** est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Définition : On appelle fonction **argument sinus hyperbolique**, et on note

$$\textbf{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to Argshx$$

l'application réciproque de la fonction sinus hyperbolique.

Fonctions hyperboliques réciproques

Réciproque de la fonction sinus hyperbolique

La fonction **sh** est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Définition : On appelle fonction **argument sinus hyperbolique**, et on note

$$\textbf{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to Argshx$$

l'application réciproque de la fonction sinus hyperbolique.

Proposition: La fonction Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Fonctions hyperboliques réciproques

Réciproque de la fonction cosinus hyperbolique

La fonction **ch** est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$.

Fonctions hyperboliques réciproques

Réciproque de la fonction cosinus hyperbolique
La fonction **ch** est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$.
Définition : On appelle fonction **argument cosinus hyperbolique**, et on note

$$\textbf{Argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[, x \to Argshx$$

l'application réciproque de la fonction cosinus hyperbolique.

Fonctions hyperboliques réciproques

Réciproque de la fonction cosinus hyperbolique
La fonction **ch** est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$.
Définition : On appelle fonction **argument cosinus hyperbolique**, et on note

$$\textbf{Argch} : [1,+\infty[\to [0,+\infty[, x \to Argshx$$

l'application réciproque de la fonction cosinus hyperbolique.
Proposition: La fonction Argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad Argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Fonctions hyperboliques réciproques

Réciproque de la fonction tangente hyperbolique

La fonction **th** est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Fonctions hyperboliques réciproques

Réciproque de la fonction tangente hyperbolique
La fonction **th** est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Définition : On appelle fonction **argument tangente hyperbolique**, et on note

$$\textbf{Argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \to Argthx$$

l'application réciproque de la fonction tangente hyperbolique.

Fonctions hyperboliques réciproques

Réciproque de la fonction tangente hyperbolique
La fonction **th** est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Définition : On appelle fonction **argument tangente hyperbolique**, et on note

$$\textbf{Argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \to Argthx$$

l'application réciproque de la fonction tangente hyperbolique.
Proposition: La fonction Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[\;\; Argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\mathrm{ch}(a + b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$$
$$\mathrm{ch}(a - b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$$

$$\mathrm{ch}(a + b) = \mathrm{ch}\ a\ \mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ a\ \mathrm{sh}\ b$$
$$\mathrm{ch}(a - b) = \mathrm{ch}\ a\ \mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ a\ \mathrm{sh}\ b$$
$$\mathrm{sh}(a + b) = \mathrm{sh}\ a\ \mathrm{ch}\ b + \mathrm{ch}\ a\ \mathrm{sh}\ b$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b$$
$$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b$$
$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b$$
$$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b$$

ch(a + b) = ch a ch b + sh a sh b
ch(a - b) = ch a ch b - sh a sh b
sh(a + b) = sh a ch b + ch a sh b
sh(a - b) = sh a ch b - ch a sh b

Proposition:

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $Argshx = ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
2. Pour tout $x \geq 1$, on a : $Argchx = ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
3. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a : $Argthx = \frac{1}{2} ln(\frac{1+x}{1-x})$.

Polynôme de Taylor

Soit n un entier. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I contenant un point a, dérivable $n-1$ fois sur I, et dont la dérivée n-ième en a existe. On appelle **polynôme de Taylor** d'ordre n en a de f, le polynôme :

$$\mathbf{P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n}$$

On appelle **reste de Taylor** d'ordre n en a de f, la fonction

$$\mathbf{R_n(x) = f(x) - P_n(x)}$$

Polynôme de Taylor

Soit n un entier. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I contenant un point a, dérivable $n-1$ fois sur I, et dont la dérivée n-ième en a existe. On appelle **polynôme de Taylor** d'ordre n en a de f, le polynôme :

$$\mathbf{P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n}$$

On appelle **reste de Taylor** d'ordre n en a de f, la fonction

$$\mathbf{R_n(x) = f(x) - P_n(x)}$$

Définition : Soient I un intervalle ouvert, a un point de I et n un entier. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a lorsqu'il existe un polynôme P_n tel que le reste R_n soit négligeable devant $\circ((x-a)^n) := (x-a)^n\varepsilon(x)$.

Polynôme de Taylor

Soit n un entier. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I contenant un point a, dérivable $n-1$ fois sur I, et dont la dérivée n-ième en a existe. On appelle **polynôme de Taylor** d'ordre n en a de f, le polynôme :

$$\mathbf{P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n}$$

On appelle **reste de Taylor** d'ordre n en a de f, la fonction

$$\mathbf{R_n(x) = f(x) - P_n(x)}$$

Définition : Soient I un intervalle ouvert, a un point de I et n un entier. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a lorsqu'il existe un polynôme P_n tel que le reste R_n soit négligeable devant $\circ((x-a)^n) := (x-a)^n\varepsilon(x)$.

Remarque : Nous simplifierons les écritures en n'écrivant plus que des développements limités en 0.

Taylor avec reste intégral

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I (c'est-à-dire n+1 fois dérivable, de dérivée (n+1)-ième continue). Soit R_n son reste de Taylor d'ordre n en 0.

$$\mathbf{R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt}$$

Taylor avec reste intégral

Théorème : Soit n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I (c'est-à-dire n+1 fois dérivable, de dérivée (n+1)-ième continue). Soit R_n son reste de Taylor d'ordre n en 0.

$$\mathbf{R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt}$$

Opérations sur les développements limités : Soient n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soient f et g deux fonctions définies sur I, admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0.

$$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$$

1. Somme : $f + g$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est la somme de ceux de f et g.
2. Produit : $f \times g$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le produit $P_n \times Q_n$.
3. Composition : si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme composé $Q_n \circ P_n$.

Exemple : Soit
$f(x) = 1 - x - x^2 + \circ(x^2)$ et $g(x) = 2x + x^2 + \circ(x^2)$, Alors
$f(x) + g(x) = 1 + x + \circ(x^2)$, $f(x)g(x) = 2x - x^2 + \circ(x^2)$,
$f \circ g(x) = 1 - 2x - 5x^2 + \circ(x^2)$.

Exemple : Soit
$f(x) = 1 - x - x^2 + \circ(x^2)$ et $g(x) = 2x + x^2 + \circ(x^2)$, Alors
$f(x) + g(x) = 1 + x + \circ(x^2)$, $f(x)g(x) = 2x - x^2 + \circ(x^2)$,
$f \circ g(x) = 1 - 2x - 5x^2 + \circ(x^2)$.

Théorème : Soient n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit f une fonction n - 1 fois dérivable sur I, dont la dérivée n-ième en 0 existe. Soit P_n son polynôme de Taylor d'ordre n, et R_n le reste.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \circ(x^n)$$

Exemple : Soit
$f(x) = 1 - x - x^2 + \circ(x^2)$ et $g(x) = 2x + x^2 + \circ(x^2)$, Alors
$f(x) + g(x) = 1 + x + \circ(x^2)$, $f(x)g(x) = 2x - x^2 + \circ(x^2)$,
$f \circ g(x) = 1 - 2x - 5x^2 + \circ(x^2)$.

Théorème : Soient n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit f une fonction n - 1 fois dérivable sur I, dont la dérivée n-ième en 0 existe. Soit P_n son polynôme de Taylor d'ordre n, et R_n le reste.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \circ(x^n)$$

1) dérivation : la dérivée f' admet un développement limité d'ordre n-1 en 0, dont le polynôme de Taylor est la dérivée de celui de f.

$$f'(x) = P_n'(x) + \circ(x^{n-1})$$

Exemple : Soit
$f(x) = 1 - x - x^2 + \circ(x^2)$ et $g(x) = 2x + x^2 + \circ(x^2)$, Alors
$f(x) + g(x) = 1 + x + \circ(x^2)$, $f(x)g(x) = 2x - x^2 + \circ(x^2)$,
$f \circ g(x) = 1 - 2x - 5x^2 + \circ(x^2)$.
Théorème : Soient n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit f une fonction n - 1 fois dérivable sur I, dont la dérivée n-ième en 0 existe. Soit P_n son polynôme de Taylor d'ordre n, et R_n le reste.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \circ(x^n)$$

1) dérivation : la dérivée f' admet un développement limité d'ordre n-1 en 0, dont le polynôme de Taylor est la dérivée de celui de f.

$$f'(x) = P_n'(x) + \circ(x^{n-1})$$

2) intégration : toute primitive de f admet un développement limité d'ordre n + 1 en 0, dont le polynôme de Taylor est une primitive de celui de f.

Exemple : Si $f(x) = 1 - x + x^2 + \circ(x^2)$, et F est une primitive de f, alors :

$$f'(x) = -1 + 2x + \circ(x) \text{ et } F(x) = F(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3).$$

Développement des fonctions usuelles :
Tous les développement limités de cette section sont au voisinage de 0. Soit n un entier, α un réel.

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n).$
2. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \circ(x^n).$
3. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$
4. $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1})$
5. $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n})$
6. $sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1})$
7. $cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n})$
8. $ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!} + \circ(x^{n+1})$

Fonctions équivalentes : Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0. $f \sim g$ (équivalentes au voisinage de x_0) si et seulement si:

$$f(x) - g(x) =_{x_0} \circ(x)$$

Fonctions équivalentes : Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0. $f \sim g$ (équivalentes au voisinage de x_0) si et seulement si:

$$f(x) - g(x) =_{x_0} \circ(x)$$

Exemple : Au voisinage de 0, on

$$sin(x) \sim x, \;\; tan(x) \sim x, \;\; ln(1+x) \sim x, \;\; e^x - 1 \sim x, \;\; \frac{1}{1-x} - 1 \sim x.$$

Fonctions équivalentes : Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0. $f \sim g$ (équivalentes au voisinage de x_0) si et seulement si:

$$f(x) - g(x) =_{x_0} \circ(x)$$

Exemple : Au voisinage de 0, on

$$sin(x) \sim x, \;\; tan(x) \sim x, \;\; ln(1+x) \sim x, \;\; e^x - 1 \sim x, \;\; \frac{1}{1-x} - 1 \sim x.$$

Exercice : Calculer la limite $\lim_{x\to 0} \frac{(sinx)^x - 1}{x^x - 1}$

Fonctions équivalentes : Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0. $f \sim g$ (équivalentes au voisinage de x_0) si et seulement si:

$$f(x) - g(x) =_{x_0} \circ(x)$$

Exemple : Au voisinage de 0, on

$$sin(x) \sim x, \;\; tan(x) \sim x, \;\; ln(1+x) \sim x, \;\; e^x - 1 \sim x, \;\; \frac{1}{1-x} - 1 \sim x.$$

Exercice : Calculer la limite $\lim_{x \to 0} \frac{(sinx)^x - 1}{x^x - 1}$

Remarquons que : $\forall x \in]0, 1[, x^x - 1 = e^{xlnx} - 1 \neq 0$.

Au voisinage de 0 on a : $sinx \sim x$, on déduit $ln(sinx) \sim ln(x)$.

On a aussi $\lim_{x \to 0} xln(x) = 0$, d'où

$$\frac{sinx^x - 1}{x^x - 1} = \frac{e^{xln(sinx)} - 1}{e^{xlnx} - 1} \sim \frac{xln(sinx)}{xlnx} \sim \frac{xlnx}{xlnx} = 1.$$

Finalement

$$\lim_{x \to 0} \frac{(sinx)^x - 1}{x^x - 1} = 1.$$

Définition : Soient deux fonctions f et g définies sur le même sous-ensemble D . Le point $M(t) = (f(t); g(t))$ décrit un sous-ensemble (C) du plan lorsque t varie dans D.
Une représentation paramétrique d'une courbe (C) est un système d'équations
$(C) : \{x = f(t); y = g(t)\}$
Ces équations sont appelées équations paramétriques de (C).
On note parfois $\{x = x(t); y = y(t)\}$. Le domaine de définition $D = D_x \cap D_y$
Exemple : Trouvez le domaine de définition de la courbe paramétrée : $\{x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}\}$

Définition : Soient deux fonctions f et g définies sur le même sous-ensemble D . Le point $M(t) = (f(t); g(t))$ décrit un sous-ensemble (C) du plan lorsque t varie dans D.
Une représentation paramétrique d'une courbe (C) est un système d'équations
$(C) : \{x = f(t); y = g(t)\}$
Ces équations sont appelées équations paramétriques de (C).
On note parfois $\{x = x(t); y = y(t)\}$. Le domaine de définition $D = D_x \cap D_y$

Exemple : Trouvez le domaine de définition de la courbe paramétrée : $\{x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}\}$

Asymptotes :

Asymptote verticale : On obtient une telle asymptote lorsque

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a, \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = \infty$$

L'asymptote verticale est une droite qui a pour équation $x = a$.
Si $x(t) - a$ est positif, la courbe est à droite de l'asymptote, sinon elle est à gauche.
La courbe coupe l'asymptote lorsque $x(t) = a$.

L'asymptote verticale est une droite qui a pour équation $x = a$.
Si $x(t) - a$ est positif, la courbe est à droite de l'asymptote, sinon elle est à gauche.
La courbe coupe l'asymptote lorsque $x(t) = a$.
Asymptote horizontale : Cette fois, x tend vers l'infini et y tend vers une valeur finie b lorsque t tend vers t_0.

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \infty,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = b$$

L'asymptote horizontale est une droite qui a pour quation $y = b$.
Si $y(t) - b$ est positif, la courbe est en dessus de l'asymptote, sinon elle est en dessous.
La courbe coupe l'asymptote lorsque $y(t) = b$.

Asymptote oblique : Une asymptote oblique ne peut exister que si x et y tendent tous deux vers l'infini lorsque t tend vers t_0.

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \infty,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = \infty$$

Asymptote oblique : Une asymptote oblique ne peut exister que si x et y tendent tous deux vers l'infini lorsque t tend vers t_0.

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \infty,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = \infty$$

La droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique si :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a, \ \lim_{t \to t_0} (y(t) - ax(t)) = b$$

Asymptote oblique : Une asymptote oblique ne peut exister que si x et y tendent tous deux vers l'infini lorsque t tend vers t_0.

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = \infty,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = \infty$$

La droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique si :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a, \ \lim_{t \to t_0} (y(t) - ax(t)) = b$$

La position de la courbe est donnée par le signe de $y(t) - ax(t) - b$.
Si cette expression est positive, la courbe est en dessus de l'asymptote, sinon, elle est en dessous.

Dérivées et points particuliers:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, la courbe admet une **tangente horizontale** en $M(t_0)$.

Si $x'(t_0 = 0$ et $y'(t_0 \neq 0$, la courbe admet une **tangente verticale** en $M(t_0)$.

Si $x'(t_0 = 0$ et $y'(t_0 = 0$, la courbe admet un **point singulier** en $M(t_0)$.

Exemple

Etudier la courbe

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t^2}{t-1} \\ y(t) &= \frac{t}{t^2-1} \end{aligned} \qquad (1)$$