Les adjonctions: une approche algébrique

Fernand Meyer

Centre de Morphologie Mathématique

9 mai 2016

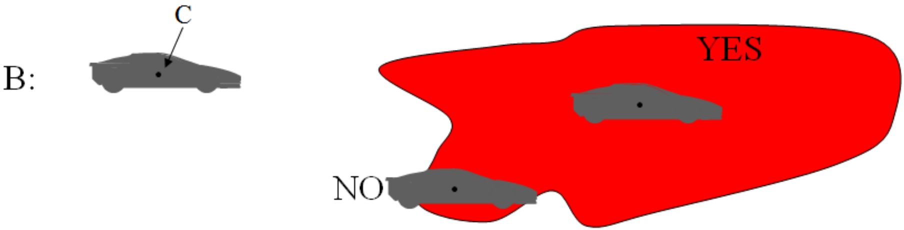
Plan de l'exposé

Les bases algébriques : ensembles, ensemble des parties, structure de treillis partiellement ordonné
Les opérateurs entre treillis partiellement ordonnés
L'adjonction : définition et propriétés
La dualité : définition et propriétés
L'ouverture et la fermeture associées à une adjonction
Les filtres morphologiques
Les treillis de fonctions à valeur dans un ensemble totalement ordonné
Adjonctions entre les valuations des noeuds ou des arêtes d'un graphe valué.

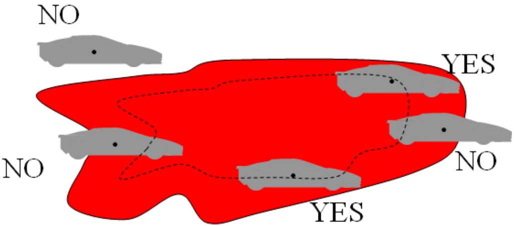
L'érosion et la dilatation dans l'imagerie d'Epinal

Quand vous demandez à quelqu'un, rencontré par hasard dans un congrès, s'il connait la morphologie mathématique, la réponse est généralement oui: la dilatation et l'érosion, pour des ensembles binaires...

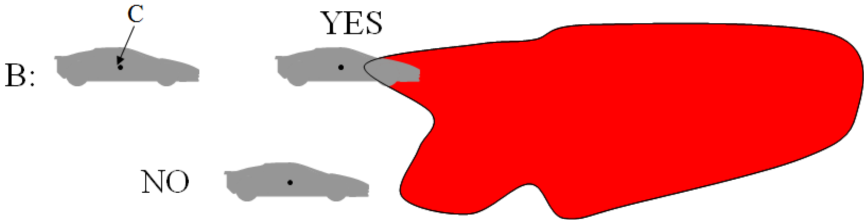
L'érosion et la dilatation dans l'imagerie d'Epinal



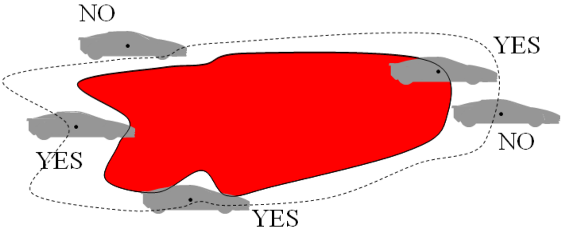
L'érosion et la dilatation dans l'imagerie d'Epinal



L'érosion et la dilatation dans l'imagerie d'Epinal



L'érosion et la dilatation dans l'imagerie d'Epinal



Adjonction ou dualité ?

Les deux opérateurs précédents sont duaux : on obtient l'érodé de X en érodant le complémentaire de X puis en prenant le complémentaire du résultat. Cette construction facilite l'élaboration de librairies de traitement d'images : dès qu'un des opérateurs est implémenté, le deuxième s'obtient aisément par dualité, car la complémentation est une opération peu coûteuse.

Nous allons centrer notre exposé sur une autre relation entre érodés et dilatés : l'adjonction, Ce sont les adjonctions qui engendrent l'essentiel de la morphologie.

Comme on le verra, les adjonctions peuvent être définies dans de nombreux contextes.
Nous allons d'abord étudier les adjonctions d'un point de vue purement algébrique, pour établir les propriétés communes à toutes les adjonctions.

la structure de treillis

Le bon cadre pour définir les adjonctions : les treillis

Les exemples simples précédents introduisent une dilatation et une érosion particulière, appliquées à des ensembles binaires.

Nous allons à présent présenter le cadre le plus général permettant de parler d'adjonctions: les treillis.

Les adjonctions constituent des couples d'opérateurs entre treillis.

La structure de treillis

L'ensemble des parties d'un ensemble

L'ensemble des parties d'un ensemble E désigne l'ensemble des sous-ensembles de cet ensemble, on le représente par $\mathcal{P}(E)$:

$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subseteq E\}$.

Remarque : $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$

Les opérateurs $\cup$ et $\cap$ de la théorie des ensembles s'appliquent à $\mathcal{P}(E)$.

$\mathcal{P}(E)$ est muni de la relation d'ordre $\subset$.

La structure de treillis.

Un treillis complet V est une collection d'éléments $(a, b, c...)$ muni d'une relation d'ordre $<$, i.e. une relation :

- réflexive : $\forall x \in V : x < x$
- anti-symétrique : $x < y$ et $y < x \Rightarrow x = y$
- transitive : $x < y$ et $y < z \Rightarrow x < z$

Le treillis V contient deux éléments particuliers :

- o le plus petit élément de V : $\forall x \in V : o < x$
- ω le plus grand élément de V : $\forall x \in V : \omega > x$

La structure de treillis.

On considère $\mathcal{P}\left(V\right)$ l'ensemble des parties de V.

A chaque $A \in \mathcal{P}\left(V\right)$ on associe :

- l'ensemble $\overline{A}$ des majorants de A : $\overline{A} = \left\{y \in V \mid \forall x \in A : x < y\right\}$, qui n'est jamais vide car il contient au moins ω.
- l'ensemble $\underline{A}$ des minorants de A : $\underline{A} = \left\{y \in V \mid \forall x \in A : x > y\right\}$, qui n'est jamais vide car il contient au moins o.

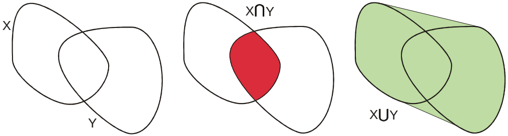
Remarque : la relation d'ordre $<$ est totale si pour tout couple x, y on a $x < y$ ou $y < x$. Dans le cas contraire elle est partielle

La structure de treillis

Un sous-ensemble quelconque de V n'a pas de structure particulière. Par contre :

- l'ensemble $\overline{A}$ des majorants de A a un plus petit élément noté $\vee A \in V$. On l'appelle borne supérieure de A.
- l'ensemble $\underline{A}$ des minorants de A a un plus grand élément noté $\wedge A \in V$. On l'appelle borne inférieure de A.
  Ansi tout sous ensemble d'un treillis adment une borne supérieure et une borne inférieure.

Exemple : le treillis des ensembles convexes a comme relation d'ordre l'inclusion entre ensembles. L'inf de 2 convexes est l'intersection de ces convexes. Par contre le sup de 2 convexes est le plus petit convexe qui contienne les 2.



La structure de treillis: plus grand élément d'un ensemble et borne supérieure.

Il ne faut pas confondre borne supérieure d'un ensemble et plus grand élément.
Dans un treillis, tout ensemble a une borne supérieure, par hypothèse, par contre il n'a pas nécessairement un plus grand élément.

Cependant si $a \in A$ est le plus grand élément d'un ensemble A, alors $\vee A = a$.
En effet tout majorant de A est aussi majorant de a ; or $a < a$, donc a lui-même est majorant de A. Il en résulte que a est nécessairement le plus petit majorant de A, c'est à dire $\vee A = a$.

Mutatis mutandis, tout ce que nous venons de dire s'applique aussi aux plus petits éléments et bornes inférieures.

La structure de treillis

On a les propriétés suivantes :

Soient $A, B \in \mathcal{P}\left(V\right) : A \subset B \Rightarrow \overline{A} \supset \overline{B} \Rightarrow \vee A < \vee B$ et
$A \subset B \Rightarrow \underline{A} \supset \underline{B} \Rightarrow \wedge A > \wedge B$

L'ensemble vide $\varnothing$ est une partie de $\mathcal{P}\left(V\right)$ et admet donc une borne supérieure et une borne inférieure :

$\overline{\varnothing} = V$ et $\vee \varnothing = o : \forall x \in V : o < x$
$\underline{\varnothing} = V$ et $\wedge \varnothing = \omega : \forall x \in V : x < \omega$

Opérateurs dyadiques dans un treillis

L'existence d'une borne supérieure et d'une borne inférieure pour tout élément de $\mathcal{P}\left(V\right)$ permet de définir les relations dyadiques suivantes :

Pour $A, B \in \mathcal{P}\left(V\right)$: $A \vee B = \vee\left(A \cup B\right)$ et $A \wedge B = \wedge\left(A \cup B\right)$

Pour $a, b \in V$: $a \vee b = \vee\left(a, b\right)$ et $a \wedge b = \wedge\left(a, b\right)$ où $\left(a, b\right)$ est le sous-ensemble de V contenant a et b.

Remarquons que $A, B, A \cup B, \left(a, b\right)$ sont des éléments de $\mathcal{P}\left(V\right)$ alors que $A \vee B = \vee\left(A \cup B\right), A \wedge B = \wedge\left(A \cup B\right), a \vee b = \vee\left(a, b\right)$ et $a \wedge b = \wedge\left(a, b\right)$ sont des éléments de V.

Opérateurs dyadiques dans un treillis

On a les propriétés suivantes :

Pour $A, B \in \mathcal{P}(V) : A \vee B = \vee (A \cup B) = \vee (\vee A, \vee B) = (\vee A) \vee (\vee B)$

et $A \wedge B = \wedge (A \cup B) = \wedge (\wedge A, \wedge B) = (\wedge A) \wedge (\wedge B)$

où$(\vee A), (\vee B), (\wedge A), (\wedge B) \in V$

Opérateurs dyadiques dans un treillis

Preuve : Montrons que $\vee(A \cup B) = \vee(\vee A, \vee B) = (\vee A) \vee (\vee B)$

1) $A \subset A \cup B \Rightarrow \vee A < \vee(A \cup B)$. De même $\vee B < \vee(A \cup B)$.
$\vee(A \cup B)$ étant un majorant de $\vee A$ et de $\vee B$ est plus grand que leur plus petit majorant $\vee(\vee A, \vee B)$: $\vee(A \cup B) > \vee(\vee A, \vee B)$

2) $\vee(A)$ est un majorant de A et $\vee(B)$ un majorant de B ; $\vee(\vee A, \vee B)$ étant le plus petit majorant de $\vee A$ et $\vee B$ est donc aussi un majorant de A et de B, il est donc plus grand que le plus petit majorant de $A \cup B$: $\vee(A \cup B) < \vee(\vee A, \vee B)$.

On a donc bien égalité $\vee(A \cup B) = \vee(\vee A, \vee B)$

La structure de treillis: les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble vide.

L'ensemble vide $\varnothing$ est une partie de $\mathcal{P}(V)$ et admet donc une borne supérieure et une borne inférieure :

$\forall x \in V : o < x : \overline{\varnothing} = V$. Ainsi $\vee\varnothing = o$
$\forall x \in V : x < \omega : \underline{\varnothing} = V$. Ainsi $\wedge\varnothing = \omega$

On vérifie la cohérence de ces résultats :

$$\vee(A) = \vee(A \cup \varnothing) = \vee A \vee \vee\varnothing = \vee A \vee o$$
$$\wedge(A) = \wedge(A \cup \varnothing) = \wedge A \wedge \wedge\varnothing = \wedge A \wedge \omega$$

N.B. Les expressions anglaises upper bound et lower bound ne correspondent pas à « borne supérieure » et « borne inférieure », mais à majorant et minorant, respectivement ; « borne supérieure » se traduit par least upper bound ou supremum et « borne inférieure » par greatest lower bound ou infimum.

Treillis totalement ordonnés et le paradoxe de Zénon d'Elée

Dans un treillis totalement ordonné V, tous les éléments sont comparables entre eux :

$\forall a, b \in V : a > b$ ou $b > a$.
Ainsi $a \vee b = a$ ou b.

Si A est un sous-ensemble fini de V, on peut regrouper ses éléments par paires :

$\vee A = (a_1 \vee a_2) \vee (a_3 \vee a_4) \vee \ldots$: on remplace chaque paire par son plus

grand élément et on itère jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul élément, le plus grand élément.

Treillis totalement ordonnés et le paradoxe de Zénon d'Elée

Cela ne marche pas pour un ensemble infini, même dénombrable et c'est le paradoxe de Zénon.

Si on tire une flèche vers une cible, elle parcourt d'abord la moitié de la distance, puis la moitié de celle qui reste etc.... pour ne jamais toucher la cible.

L'ensemble des positions où la flèche est observée est infini et dénombrable. La cible, à savoir la borne supérieure de ces positions n'en fait pas partie...et du coup la flèche ne touche jamais la cible (d'après Zénon).

Treillis des entiers, des rationnels et des réels

Dans le treillis $\mathbb{N}$ des entiers, tout ensemble a un plus grand et un plus petit élément.

Dans les treillis $\mathbb{Q}$ des rationnels et $\mathbb{R}$ des réels, cela n'est pas vrai.

Dand le treillis des rationnels $\mathbb{Q}$ l'ensemble $\left\{x :\mid x^2 < 2\right\}$ n'a pas de plus grand élément, ni de borne supérieure.

Par contre, cet ensemble a une borne supérieure égale à $\sqrt{2}$ dans le treillis des réels. Le treillis des réels a été construit comme une extension des rationnels ayant précisément comme propriété que toute partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure (resp. inférieure). Par contre il n'a pas de plus grand ou plus petit élément. Cependant, un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ a un plus petit et plus grand élément.

Opérateurs entre treillis

Opérateurs entre treillis

Nous considérons :

- un treillis V muni de la relation d'ordre $\prec$, avec un inf $\curlywedge$ et un sup $\curlyvee$.
- un treillis W muni de la relation d'ordre $<$, avec un inf $\wedge$ et un sup $\vee$.
- un opérateur $\alpha : V \longmapsto W$ qui à $x \in V$ fait correspondre $\alpha(x) \in W$
- un opérateur $\beta : W \longmapsto V$ qui à $s \in W$ fait correspondre $\beta(s) \in V$

On en dérive :

- l'opérateur $\alpha\beta$ qui à $s \in W$ fait correspondre $\alpha\beta(s) \in W$
- l'opérateur $\beta\alpha$ qui à $t \in V$ fait correspondre $\beta\alpha(t) \in V$

Nomenclature des propriétés des opérateurs

Un opérateur $\alpha : V \longmapsto W$ est croissant si :
$x, y \in V : x \prec y \Rightarrow \alpha(x) < \alpha(y)$
Un opérateur $\alpha : V \longmapsto W$ est décroissant si :
$x, y \in V : x \prec y \Rightarrow \alpha(x) > \alpha(y)$

Pour les opérateurs suivants, source et destination appartiennent au même espace :

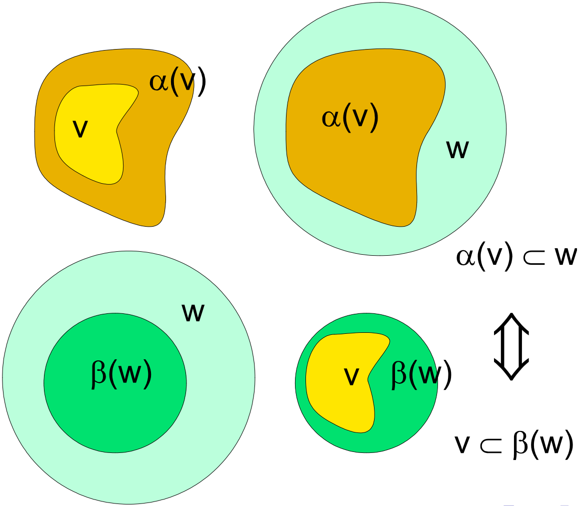
Un opérateur $\zeta : V \longmapsto V$ est idempotent si : $\zeta\zeta = \zeta$
Un opérateur $\zeta : V \longmapsto V$ est anti-extensif si $\zeta(x) \prec x$
Un opérateur $\zeta : V \longmapsto V$ est extensif si $x \prec \zeta(x)$
Un opérateur $\zeta : V \longmapsto V$ est une involution si $\zeta\zeta = identit\acute{e} = Id_V$

Une involution $\complement : V \longmapsto V$ décroissante est appelée complémentation

Adjonctions : définitions et propriétés

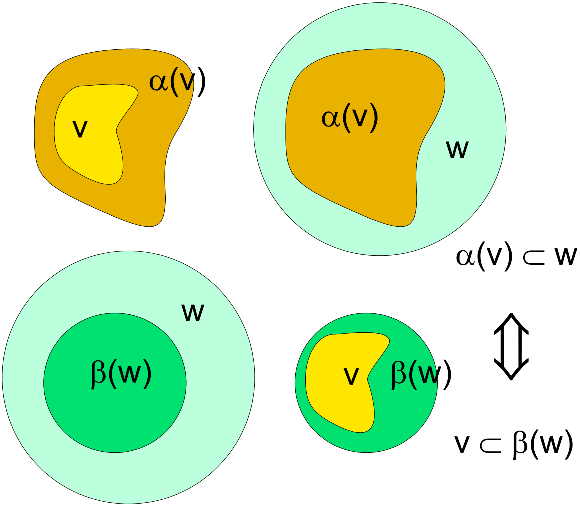
Adjonction

Les opérateurs $\alpha : V \longmapsto W$ et $\beta : W \longmapsto V$ forment une adjonction si : pour $v \in V$, $w \in W : \alpha(v) < w \Leftrightarrow v \prec \beta(w)$



Adjonction : illustration sur le treillis des ensembles

Dans le treillis des ensembles la relation d'ordre est $\subset$.



Erosion et dilatation

Si (α, β) constituent une adjonction, alors α est une dilatation, i.e un opérateur croissant qui commute avec le supremum et β est une érosion, i.e. un opérateur croissant qui commute avec l'infimum.

Preuve: Soit $s \in V$ et $(t_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de W.

Alors $s \prec \beta \curlywedge (t_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \alpha s < \curlywedge (t_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \forall i \in I : \alpha s < t_i \Leftrightarrow \forall i \in I : s \prec \beta t_i \Leftrightarrow s \prec \curlywedge (\beta t_i)_{i \in I}$

Remplaçant s par $\curlywedge (\beta t_i)_{i \in I}$ ($\prec$ réflexive) et lisant de droite à gauche : $\curlywedge (\beta t_i)_{i \in I} \prec \beta \curlywedge (t_i)_{i \in I}$

Remplaçant s par $\beta \curlywedge (t_i)_{i \in I}$ et lisant de gauche à droite: $\beta \curlywedge (t_i)_{i \in I} \prec \curlywedge (\beta t_i)_{i \in I}$

D'où par antisymétrie de $\prec$: $\curlywedge (\beta t_i)_{i \in I} = \beta \curlywedge (t_i)_{i \in I}$

Unicité

Si β_1 et β_2 sont tous deux adjoints d'un opérateur α, alors $\beta_1 = \beta_2$.

En effet pour $s, t \in V : s \prec \beta_1 t \Leftrightarrow \alpha s < t \Leftrightarrow s \prec \beta_2 t$.

En remplaçant s à gauche par $\beta_1 t : \beta_1 t \prec \beta_1 t$ (réflexivité de $\prec$)
$\Leftrightarrow \beta_1 t \prec \beta_2 t$

En remplaçant s à droite par $\beta_2 t : \beta_2 t \prec \beta_1 t \Leftrightarrow \beta_2 t \prec \beta_1 t$

D'où, par anti-symétrie de $\prec$: $\beta_2 t = \beta_1 t$

Croissance

Proposition : α et β sont des opérateurs croissants.

Preuve :

Pour $u, v \in W$, $u < v$ alors : $\beta(u) = \beta(u \wedge v) = \beta(u) \curlywedge \beta(v) \prec \beta(v)$

Pour $s, t \in V$, $s \prec t$ alors : $\alpha(t) = \alpha(s \curlyvee t) = \alpha(s) \vee \alpha(t) > \alpha(s)$

Valeurs extrêmes

Pour tout $s \in W$: on a $o_V \prec \beta(s)$. Par adjonction : $\alpha(o_V) < s$ ce qui montre que $\alpha(o_V) = o_W$

Pour tout $t \in V$: on a $\alpha(t) < \omega_V$. Par adjonction : $t \prec \beta(\omega_W)$ ce qui montre que $\beta(\omega_W) = \omega_v$

Expressions croisées

On peut définir une érosion directement, comme opérateur croissant qui commute avec l'inf, sans passer par l'adjonction.
Quel est alors son adjoint ?
Idem pour une dilatation, définie comme un opérateur croissant commutant avec le sup ?

Si $v \in V$ et $w \in W$, de la relation $\alpha v < w \Leftrightarrow v \prec \beta w$ on dérive l'expression d'un opérateur en fonction de l'autre.

Si α est connu, β peut s'exprimer comme $\beta w = \Upsilon \{v \mid \alpha v < w\}$.

Inversement si β est connu, alors $\alpha v = \wedge \{w \mid v \prec \beta w\}$

Chaque opérateur apparaît comme un pseudo-inverse de l'autre.

Sup de dilatations : exercice

Montrer que le supremum de 2 dilatations α_1 et α_2 est une dilatation et trouver l'érosion adjointe.

Sup de dilatations solution

Soient (α_1, β_1) et (α_2, β_2) 2 adjonctions.

Soient $v \in V$ et $w \in W$ vérifiant :
$(\alpha_1 \vee \alpha_2)v < w$.

Alors on a la suite des equivalences suivantes:

$(\alpha_1 \vee \alpha_2)v < w \Leftrightarrow \alpha_1 v < w$ et $\alpha_2 v < w \Leftrightarrow v \prec \beta_1 w$ et
$v \prec \beta_2 w \Leftrightarrow v \prec \beta_1 w \curlywedge \beta_2 w = (\beta_1 \curlywedge \beta_2)\, w$

Ce qui montre que le couple $(\alpha_1 \vee \alpha_2, \beta_1 \curlywedge \beta_2)$ forme une adjonction.

Composition de 2 érosions ou de 2 dilatations

Montrer que le produit de 2 dilatations α_1 et α_2 est une dilatation et trouver l'érosion adjointe.

Composition de 2 érosions ou de 2 dilatations

Soient (α_1, β_1) et (α_2, β_2) 2 adjonctions :

$\alpha_1, \beta_2 : V \longmapsto W$ et $\alpha_2, \beta_1 : W \longmapsto V$

Soient $v, w \in W$ vérifiant :
$\alpha_1 \alpha_2 v < w$

Alors on a la suite des equivalences suivantes :

$v, w \in W : \alpha_1 \alpha_2 v < w \Leftrightarrow \alpha_2 v < \beta_1 w \Leftrightarrow v < \beta_2 \beta_1 w$

Ce qui montre que le couple $(\alpha_1 \alpha_2, \beta_2 \beta_1 : W \longmapsto W)$ forme une adjonction.

Complémentation endogène et dualité

Nous définissons un opérateur complémentation, i.e. une involution décroissante sur chaque espace V et W :

$\complement_W : W \longmapsto W$ est tel que $\complement_W \complement_W = Id_W$ et pour $s, t \in W$ on a $s < t \Leftrightarrow \complement_w s > \complement_W t$
Ces opérateurs sont appelés endogènes car leurs espace source et destination sont identiques.

A tout opérateur $\alpha : V \longmapsto W$ on peut alors faire se correspondre son dual $\complement_w \alpha \complement_v : V \longmapsto W$

Complémentation endogène et dualité

Si (α, β) forment une adjonction, alors $(\complement_V \beta \complement_W, \complement_W \alpha \complement_V)$ forment également une adjonction:

Preuve : $t \in V$ et
$s \in W : \complement_V \beta \complement_W s \prec t \Leftrightarrow \beta \complement_W s \succ \complement_V t \Leftrightarrow \complement_W s > \alpha \complement_V t \Leftrightarrow s < \complement_W \alpha \complement_V t$

Remarque : $\complement_V \beta \complement_W$ et $\beta : W \longmapsto V$; $\complement_W \alpha \complement_V$ et $\alpha : V \longmapsto W$

Les dilatations α et $\complement_V \beta \complement_W$ (resp. β et $\complement_W \alpha \complement_V$)n'opèrent pas sur les mêmes treillis.

On définit à présent 2 opérateurs décroissants d'un treillis dans un autre, inverses l'un de l'autre.
Les opérateurs de complémentation sont des involutions décroissantes d'un espace dans un autre:
Sur $\complement_V^W : V \longmapsto W$ et $\complement_W^V : W \longmapsto V$, décroissants vérifiant
$\complement_V^W \complement_W^V = Id_W$ et $\complement_W^V \complement_V^W = Id_V$
Soient une dilatation $\alpha : V \longmapsto W$ et son érosion adjointe $\beta : W \longmapsto V$.
On obtient alors une nouvelle dilatation $\complement_V^W \beta \complement_V^W : V \longmapsto W$ et son érosion adjointe $\complement_W^V \alpha \complement_W^V : W \longmapsto V$
Preuve:
$\complement_V^W \beta \complement_V^W v < w \Leftrightarrow \beta \complement_V^W v > \complement_W^V w \Leftrightarrow \complement_V^W v > \alpha \complement_W^V w \Leftrightarrow v > \complement_W^V \alpha \complement_W^V w$

Un théorème élégant, mais sans grande utilité pratique...

Théorème: Tout opérateur croissant peut s'écrire comme un sup d'érosions ou un inf. de dilatations.

Preuve (sup d'érosions) : Si $\psi : V \longmapsto W$ est un opérateur croissant on associe une érosion $\psi_s(t)$ à chaque élément $s \in V$:

$$\psi_s(t) = \left| \begin{array}{c} \omega_W \text{ si } t = \omega_V \\ \psi(t) \text{ si } s \prec t \\ o_W \text{ sinon} \end{array} \right|$$ (vérification facile, à faire en exercice)

On a alors $\psi(t) = \bigvee_{s \prec t} \psi_s(t)$

Remarque : Un opérateur binaire peut être considéré comme un opérateur booléen. Il peut se décomposer de manière canonique en une conjonction de disjonctions ou une disjonction de conjonctions.

Opérateurs dérivés

Opérateurs dérivés

Les adjonctions sont intéressantes par elles-mêmes mais surtout par les opérateurs qu'elles permettent d'engendrer:

- "gradient de Beucher"
- ouvertures
- fermetures
- filtres morphologiques

Tous ces opérateurs dérivés se construisent par les même mécanismes quelque soit l'adjonction dont on part.

Le "gradient de Beucher": complémentation endogène

Nous avons défini les opérateurs de complémentation endogènes comme involutions décroissantes d'un espace en lui-même:
Sur $\complement_V : V \longmapsto V$ est tel que $\complement_V \complement_V = Id_V$ et pour $s, t \in V$ on a $s < t \Leftrightarrow \complement_v s > \complement_V t$
Sur $\complement_W : W \longmapsto W$ est tel que $\complement_W \complement_W = Id_W$ et pour $s, t \in W$ on a $s < t \Leftrightarrow \complement_w s > \complement_W t$

Les opérateurs $\alpha : V \longmapsto W$ et $\beta : W \longmapsto V$ formant une adjonction n'ont pas les mêmes espaces source et destination. A l'inverse, un opérateur et son dual ont les mêmes espaces source et destination (exemple: la dilatation α et l'érosion duale $\complement_w \alpha \complement_v$)

Le "gradient de Beucher" : ∂_W se définit alors par
$\partial_W = \alpha \wedge \complement_w \left(\complement_w \alpha \complement_v \right) = \alpha \wedge \alpha \complement_v$

Un autre "gradient de Beucher" : ∂_V est égal à
$\partial_V = \complement_v \beta \complement_w \wedge \complement_v \beta \complement_w \complement_w = \complement_v \beta \complement_w \wedge \complement_v \beta$

Ouverture et fermeture

Ouverture et fermeture

Soient un opérateur $\alpha : V \longmapsto W$ et un opérateur $\beta : W \longmapsto V$ formant une adjonction, alors

$\gamma = \alpha\beta : W \longmapsto W$ est une ouverture et $\varphi = \beta\alpha : V \longmapsto V$ une fermeture.

La fermeture $\beta\alpha$ est croissante extensive et idempotente. De même l'ouverture $\alpha\beta$ est croissante anti-extensive et idempotente.

Ouverture et fermeture

Preuve : Produits de 2 opérations croissantes, l'ouverture et la fermeture sont croissantes.

Pour $v \in V$: $\alpha v < \alpha v \Rightarrow v \prec \beta\alpha v$ montre que la fermeture est extensive

Et $\alpha\beta v \prec v \Longleftarrow \beta v < \beta v$ montre que l'ouverture est anti-extensive.

Or $v \prec \beta\alpha v \Rightarrow \alpha v < \alpha\beta\alpha v$ et $\alpha\beta v \prec v \Rightarrow \alpha\beta\alpha v < \alpha v$ d'où : $\alpha v = \alpha\beta\alpha v$

Et en appliquant β de part et d'autre : $\beta\alpha v = \beta\alpha\beta\alpha v$ on montre l'idempotence de la fermeture.

L'idempotence de la fermeture se montre de manière similaire.

La famille des invariants d'une ouverture ou d'une fermeture

On appelle $\mathrm{Inv}(\gamma) \subset W$ et $\mathrm{Inv}(\varphi) \subset V$ les familles des invariants de γ et de φ.

Lemma

La famille des invariants d'une ouverture est fermée pour le sup. Et la famille des invariants d'une fermeture est fermée pour l'inf.

Preuve : Supposons 2 éléments $u, v \in V$ invariants par l'ouverture γ : $\gamma(u) = u$ et $\gamma(v) = v$.

Alors $\gamma(u \vee v) < u \vee v = \gamma(u) \vee \gamma(v)$ par anti-extensivité et idempotence

Et $\gamma(u \vee v) > \gamma(u) \vee \gamma(v)$ car γ est croissant.

Invariants d'une ouverture ou d'une fermeture

Pour $u \in V$

- $\alpha u \in \mathrm{Inv}(\gamma)$ car $\alpha u = \alpha\beta\alpha u = (\alpha\beta)\alpha u$
- $\beta u \in \mathrm{Inv}(\varphi)$ car $\beta u = \beta\alpha\beta u = (\beta\alpha)\beta u$

Construction d'une ouverture à partir de ses invariants.

Soit une famille (w_i) d'éléments de W contenant l'élément o_W. Cette famille peut servir de famille génératrice pour une ouverture:

pour $s \in W : \gamma(s) = \bigvee [w_i \in W \mid w_i < s]$

L'opérateur γ est croissant, anti-extensif et idempotent.

Ses invariants sont constitués par toutes les unions possibles de w_i.

Construction d'une fermeture à partir de ses invariants.

Soit une famille (v_i) d'éléments de V contenant l'élément ω_W. Cette famille peut servir de famille génératrice pour une fermeture:

pour $t \in V : \varphi(t) = \curlywedge [v_i \in V \mid v_i \succ t]$

L'opérateur γ est croissant, extensif et idempotent.

Ses invariants sont constitués par toutes les intersections possibles de v_i.

Invariants d'une ouverture ou d'une fermeture

En général, la dilatation n'est pas l'opération inverse de l'érosion car $\alpha\beta \leq Id$ et $\beta\alpha \geq Id$

Pour $u \in V$ vérifie $\in \mathrm{Inv}(\gamma)$: $\alpha\beta u = u$, c'est à dire $\alpha = \beta^{-1}$ sur $\in \mathrm{Inv}(\gamma)$

Pour $u \in V$ vérifie $\in \mathrm{Inv}(\varphi)$: $\beta\alpha u = u$, c'est à dire $\beta = \alpha^{-1}$ sur $\in \mathrm{Inv}(\varphi)$

L'image réciproque d'un érodé: plus petit élément.

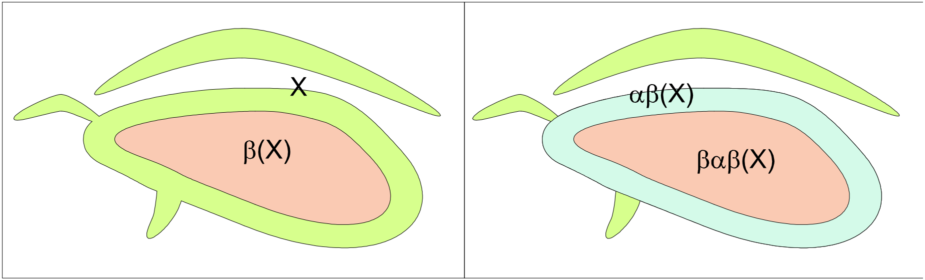
On sait que pour $t \in W$: $\beta t = \beta\alpha\beta t$, montrant que $\alpha\beta t$ a le même érodé que t.
Alors tout $s \in V$ tel que $\alpha\beta t < s < t$ appartient à l'image réciproque de βt : on a $\beta t = \beta\alpha\beta t < \beta s < \beta t$, d'où $\beta s = \beta t$.
En fait $\alpha\beta t$ est le plus petit élément de V ayant le même érodé que t.
Preuve 1: Si s est tel que $\beta s = \beta t$, alors $s < \alpha\beta t \Rightarrow s = \alpha\beta t$
En effet $\beta s = \beta t \Rightarrow \alpha\beta t = \alpha\beta s < s$ (par anti-extensivité de $\alpha\beta$) $< \alpha\beta t$ (par hypothèse). D'où par anti-réflexivité : $s = \alpha\beta t$
Preuve 2: On cherche
$\bigwedge \{s \mid \beta t = \beta s\} = \bigwedge \{s \mid \beta t < \beta s\} = \bigwedge \{s \mid \alpha\beta t < s\} = \alpha\beta t$

L'image réciproque d'un érodé: pas de plus grand élément.

Si l'image réciproque d'un érodé a un plus petit élément, il n'a pas de plus grand élément.
Prenons une érosion β_ρ d'un ensemble X par un disque B_ρ de rayon ρ. Si on ajoute à cet ensemble X un nombre arbitraire de composantes connexes Y disjointes de X telles que $\beta_\rho Y = \varnothing$, alors $\beta_\rho (X \cup Y) = \beta_\rho X$

L'image réciproque d'un érodé

$\beta X = \beta\alpha\beta X$. Ajouter à X des parties assez fines pour disparaître par érosion ne change ni l'érodé ni l'ouvert. Par contre pour un ensemble $Y \subsetneq \alpha\beta X$ on a $\beta Y \subsetneq \beta X$



L'image réciproque d'un dilaté: plus grand élément.

On sait que pour $t \in V$: $\alpha t = \alpha\beta\alpha t$, montrant que $\beta\alpha t$ a le même dilaté que t.
Alors tout $s \in W$ tel que $t < s < \beta\alpha t$ appartient à l'image réciproque de αt : on a $\alpha t < \alpha s < \alpha\beta\alpha t = \alpha t$, d'où $\alpha s = \alpha t$.
En fait $\beta\alpha t$ est le plus grand élément de V ayant le même dilaté que t.
Preuve 1: Si s est tel que $\alpha s = \alpha t$, alors $s > \beta\alpha t \Rightarrow s = \beta\alpha t$
En effet $\alpha s = \alpha t \Rightarrow \beta\alpha t = \beta\alpha s > s$ (par extensivité de $\beta\alpha$) $> \beta\alpha t$ (par hypothèse). D'où par anti-réflexivité : $\beta\alpha t$
Preuve 2: On cherche
$\bigvee \{s \mid \alpha t = \alpha s\} = \bigvee \{s \mid \alpha s < \alpha t\} = \bigvee \{s \mid s < \beta\alpha t\} = \beta\alpha t$

L'image réciproque d'un dilaté: pas de plus petit élément.

S'il existe un plus grand élément dans l'image réciproque d'un dilaté, il n'existe pas de plus petit élément.
Prenons une dilatation δ_ρ d'un ensemble X par un disque B_ρ de rayon ρ.
Considérons un nombre arbitraire de composantes connexes Y telles que $\varepsilon_\rho Y = \emptyset$, alors l'ensembe X/Y a le même dilaté que X.

Filtres morphologiques élémentaires

Filtres morphologiques élémentaires

Définition: On appelle filtre morphologique tout opérateur croissant et idempotent.
Ouvertures et fermetures sont donc des filtres morphologiques.
Ils sont extrêmes car l'ouverture est anti-extensive et la fermeture est extensive.

Pour obtenir des filtres "intermédiaires", on peut associer à une ouverture quelconque $\gamma : V \longmapsto V$ et une fermeture quelconque $\varphi : V \longmapsto V$ la suite ordonnée de filtres suivants:

$$\gamma < \gamma\varphi\gamma < \gamma\varphi, \varphi\gamma < \varphi\gamma\varphi < \varphi$$

NB: En fait, il suffit pour construire ces filtres que γ et φ sont croissants, $\gamma < \varphi$, γ est sur-potente et φ sous-potente: $\gamma\gamma > \gamma$ et $\varphi\varphi < \varphi$

Exercice

Montrer que si γ et φ sont croissants, $\gamma < \varphi$, γ est sur-potente et φ sous-potente: $\gamma\gamma > \gamma$ et $\varphi\varphi < \varphi$, alors $\gamma\phi$ est idempotente.

Solution de l'exercice

On suppose γ et φ sont croissants, $\gamma < \varphi$, γ est sur-potente et φ sous-potente: $\gamma\gamma > \gamma$ et $\varphi\varphi < \varphi$:

$\gamma\varphi < \gamma\gamma\gamma\varphi < \gamma\varphi\gamma\varphi < \gamma\varphi\varphi\varphi < \gamma\varphi$

Treillis de fonctions de supports différents

Deux treillis de fonctions

$\mathcal{T}$ = un treillis complet avec une relation d'ordre $<$.

$\mathcal{D}$,$\mathcal{E}$ = ensembles quelconques
o : le plus petit élément et ω : le plus grand de $\mathcal{T}$

$\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{T})$: les fonctions définies sur le support $\mathcal{D}$ prenant leur valeur en $\mathcal{T}$

$\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{T})$: les fonctions définies sur le support $\mathcal{E}$ prenant leur valeur en $\mathcal{T}$

Deux treillis de fonctions

Le treillis $\mathcal{T}$ permet de munir $\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{T})$ et $\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{T})$ d'une structure de treillis complet:

Si α_1 et α_2 sont deux fonctions de $\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{T})$, on a
$\alpha_1 < \alpha_2$ (relation d'ordre dans $\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{T})$) $\Leftrightarrow$
$\forall p \in \mathcal{D} : \alpha_1(p) < \alpha_2(p)$ (relation d'ordre dans $\mathcal{T}$)

Si β_1 et β_2 sont deux fonctions de $\mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{T})$, on a
$\beta_1 < \beta_2 \Leftrightarrow \forall s \in \mathcal{E} : \beta_1(s) < \beta_2(s)$

Deux treillis de fonctions

Pour une famille de fonctions de $\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{T})$ et $s \in \mathcal{D}$:

$$\left(\bigwedge_{i\in I} \alpha_i\right)(s) = \bigwedge_{i\in I} \alpha_i(s) \text{ et } \left(\bigvee_{i\in I} \alpha_i\right)(s) = \bigvee_{i\in I} \alpha_i(s)$$

$\bigwedge_{i\in I} \alpha_i$ est l'infimum dans le treillis $\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{T})$ et $\bigwedge_{i\in I} \alpha_i(s)$ l'infimum dans le treillis $\mathcal{T}$

Remarque: Si le treillis $\mathcal{T}$ est bien ordonné, et que les familles $\bigwedge_{i\in I} \alpha_i$ et $\bigwedge_{i\in I} \alpha_i(s)$ sont finies, elles admettent un plus petit et un plus grand élément,

constituant respectivement l'infimum et le supremum des familles.

Adjonction sur les graphes

Un graphe aux noeuds et aux arêtes valués.

Un *graphe non orienté* $G = [\mathcal{N}, \mathcal{E}]$ contient un ensemble $\mathcal{N}$ de noeuds et un ensemble $\mathcal{E}$ d'arêtes ; une arête étant un couple de noeuds. Les noeuds sont désignés par des lettres minuscules : p, q, r...L'arête reliant les noeuds p et q est désignée par e_{pq}.

Les arêtes et les noeuds sont valués et prennent leur valeur dans un treillis complet $\mathcal{T}$. On définit deux familles de fonctions:

- $\mathcal{F}_n = \mathrm{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{T})$: les fonctions définies sur les noeuds $\mathcal{N}$ avec valeurs en $\mathcal{T}$. Si $\nu \in \mathrm{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{T})$, la valeur prise par le noeud p est ν_p.
- $\mathcal{F}_e = \mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{T})$: les fonctions définies sur les arêtes $\mathcal{E}$ avec valeurs en $\mathcal{T}$. Si $\eta \in \mathrm{Fun}(\mathcal{E},\mathcal{T})$, la valeur prise par l'arête e_{pq} est η_{pq}.

Deux adjonctions entre arêtes et noeuds

Deux adjonctions entre arêtes et noeuds

Definition

On définit 2 opérateurs entre arêtes et noeuds :
- une érosion, $[\varepsilon_{en}\nu]_{ij} = \nu_i \wedge \nu_j$ et sa dilatation adjointe
$$[\delta_{ne}\eta]_i = \bigvee_{k \text{ voisin de } i} \eta_{ik}$$
- une dilatation $[\delta_{en}\nu]_{ij} = \nu_i \vee \nu_j$ et son érosion adjointe
$$[\varepsilon_{ne}\eta]_i = \bigwedge_{k \text{ voisin de } i} \eta_{ik}$$

Lemma

Les 4 opérateurs sont 2 à 2 adjoints ou duaux :
- *ε_{ne} et δ_{en} sont adjoints*
- *ε_{en} et δ_{ne} sont adjoints*
- *ε_{ne} et δ_{ne} sont duaux*
- *ε_{en} et δ_{en} sont duaux*

Preuve de l'adjonction et de la dualité

Montrons que δ_{en} et ε_{en} sont adjoints

Si un graphe $G = [E, N]$ est le support de deux fonctions η et $\overline{\eta}$ sur les arêtes ainsi que de 2 fonctions ν et $\overline{\nu}$ sur les noeuds

$$\delta_{en}\nu \leq \overline{\eta} \Leftrightarrow \forall i,j : \nu_i \vee \nu_j \leq \overline{\eta}_{ij} \Leftrightarrow \forall i,j : \nu_i \leq \overline{\eta}_{ij} \Leftrightarrow \forall i,j : \nu_i \leq \bigwedge_{j \text{ voisin de } i} \overline{\eta}_{ij} = [\varepsilon_{ne}\overline{\eta}]_i \Leftrightarrow \nu \leq \varepsilon_{ne}\overline{\eta}$$

ce qui établit que δ_{en} and ε_{en} sont des opérateurs adjoints.

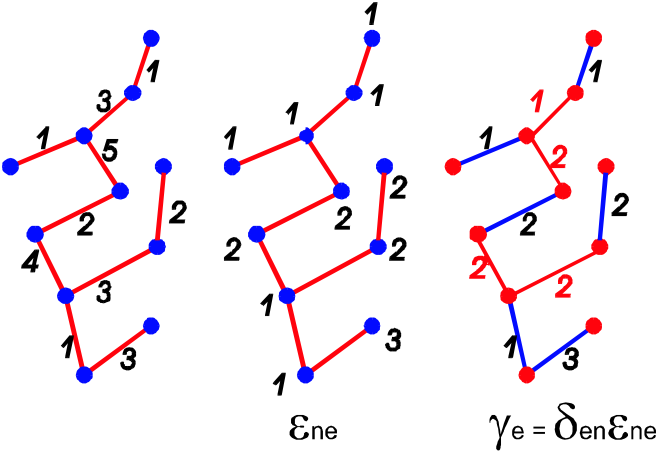
Montrons que ε_{en} et δ_{en} sont des opérateurs duaux

$[\varepsilon_{en}(-\nu)]_{ij} = -\nu_i \wedge -\nu_j = -(\nu_i \vee \nu_j) = -[\delta_{en}\nu]_{ij}$

Ainsi $\delta_{en}\nu = -[\varepsilon_{en}(-\nu)]$

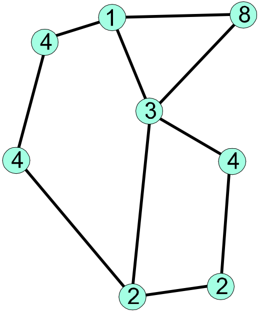
Ouverture sur les arêtes

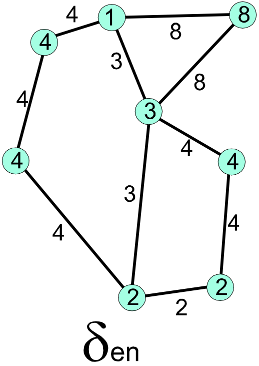
Exercice : montrer que les arêtes invariantes par l'ouverture γ_e sont celles qui sont la plus basse pour l'une de leurs extrémités.

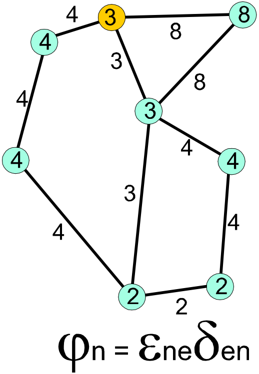


Fermeture sur les noeuds

Exercice : montrer que les noeuds invariants par la fermeture φ_n sont ceux qui ne sont pas des minima régionaux isolés.







Questions ?