ERRATA page 13

Après la première ligne (formule), insérer :

On décompose en une somme de 0 à ∞ on retranche une somme de S+1 à ∞

$$Q_p(S) = \sum_0^\infty (S-x)P(X=x) - \sum_{S+1}^\infty (S-x)P(X=x)$$

Dans la deuxième somme on change (S-x) par -(x-S)

On développe la première somme :

$$Q_p(S) = \sum_0^\infty SP(X=x) - \sum_0^\infty xP(X=x) - \left[-\sum_{S+1}^\infty (x-S)P(X=x)\right]$$

L'expression entre crochets = $-Q_r(S)$

d'où

$$Q_p(S) = S\sum_0^\infty P(X=x) - \sum_0^\infty xP(X=x) + Q_r(S)$$

or

$$\sum_0^\infty P(X=x) = 1$$

et

$$\sum_0^\infty xP(X=x) = m$$ moyenne de x

d'où

$$Q_p(S) = S-m+Q_r(S)$$

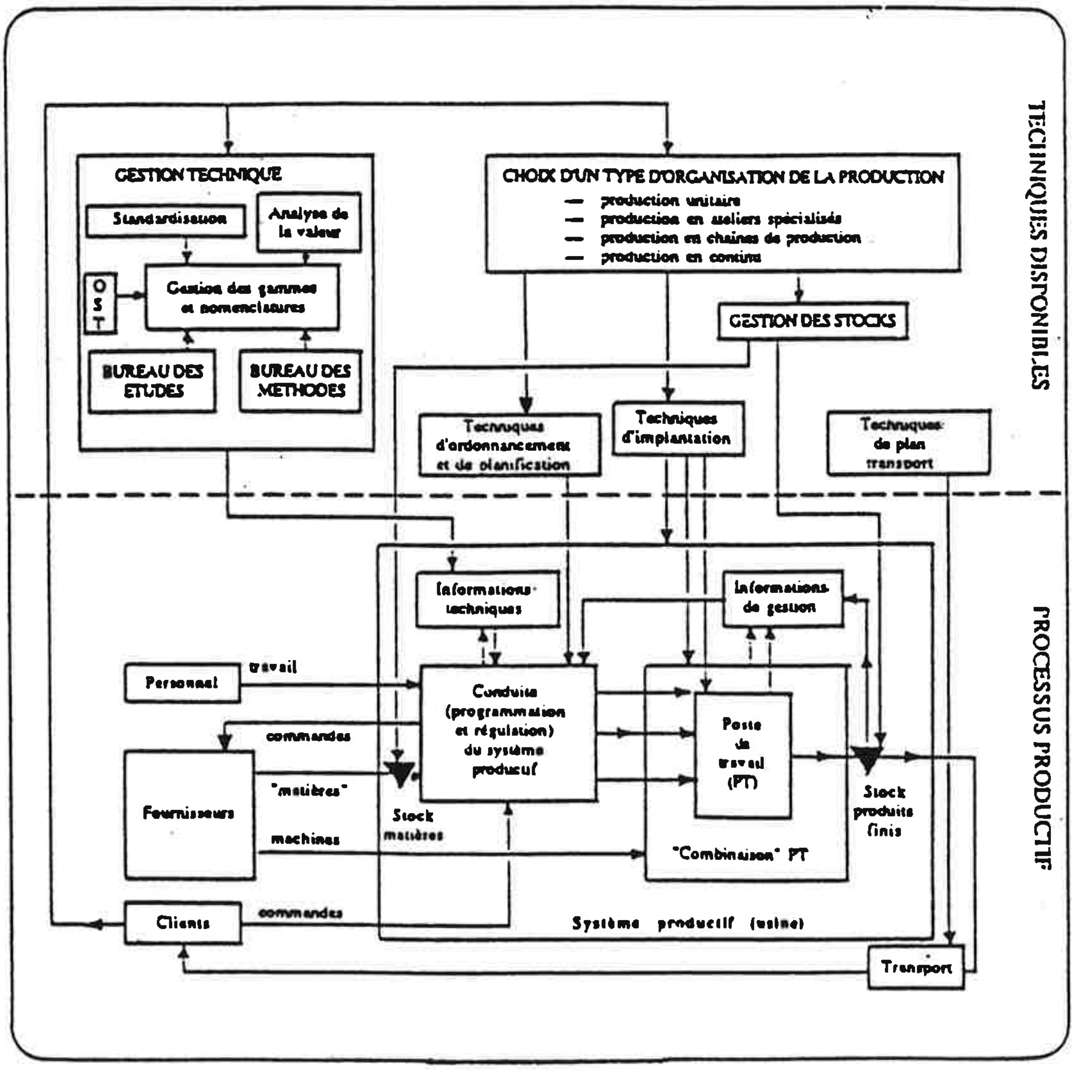
Introduction : Présentation générale de la gestion de la production. (*)

I - Définition.

a) La production

C'est une transformation de ressources appartenant à un système productif conduisant à l'obtention de biens ou de services. Elle mobilise 4 types de ressources : des équipements, des hommes, des matières, des informations techniques ou procédurales.

Elle peut être schématisée comme suit :



(*) - Le présent cours s'inspire largement de GIARD. V - Gestion de la production - Economica 2ème éd. 1988 (1068 pages) et en a repris divers exemples illustratifs.

b) La gestion de la production

Elle a pour objet la recherche d'une organisation efficace de la production, visant à limiter les ressources nécessaires ou à mieux utiliser celles disponibles. Elle fait appel à une multiplicité d'approches compte -tenu de la grande diversité et de la grande complexité des problèmes et situations rencontrées.

On classe généralement les décisions de gestion en trois catégories :

- les décisions stratégiques, liées au long terme, sur la définition du "portefeuille d'activités" et des ressources stables ;

- les décisions tactiques, liées au moyen terme, notamment la planification de la production (sur 6 à 8 mois) ;

- les décisions opérationnelles (dites parfois de pilotage), liées au court terme qui assurent la flexibilité quasi quotidienne face à la demande, notamment le contrôle des matières (gestion des stocks), de la main d'oeuvre et des équipements (ordonnancement).

II - Typologies des systèmes productifs.

Deux grilles d'analyse :

a) Production à la commande, production pour stocks.

Production à la commande quand elle est déclanchée par une commande ferme. Production pour stock quand on anticipe la demande, ce qui suppose que la demande soit prévisible ; elle se justifie quand, la demande étant importante, la saisonnalité est forte, ou les délais du processus de production trop importants par rapport au délai commercial admissible.

Un cas intermédiaire est celui de "l'assemblage à la commande", avec des composants standard produits pour stock.

b) Modes d'organisation.

On distingue 4 modes :

- organisation de type "série unitaire" : toutes les ressources sont mobilisées sur un (ou quelques) projet (ex. travaux publics, construction navale...) Le problème majeur est celui de l'ordonnancement, recherche d'un arbitrage entre coût compétitif et respect des délais (ordonnancement)

- organisation en ateliers spécialisés : les équipements assurant une même fonction sont en un même lieu. Le problème majeur est celui de l'ordonnancement pour éviter les files d'attente et le mauvais emploi des ressources disponibles.

- Organisation en ligne (ou chaine) : flux régulier d'un poste de travail à un autre. Le problème majeur est celui de l'équilibrage de la chaine.

- Organisation en production continue, les industries de process ; marquées par des flux importants et réguliers de matières premières (ex. laiterie).

III - Evaluation économique et Décisions en gestion de la production.

Le problème de l'évaluation économique des décisions opérationnelles est délicat. L'entreprise peut contrôler son activité interne par un bon système d'information s'appuyant sur la comptabilité analytique d'exploitation. Mais connaître et maîtriser les coûts des produits (ce que fait la comptabilité analytique) n'est pas identique à maîtriser les coûts de la production. Qu'il s'agisse de coûts historiques ou de coûts préétablis, elle fournit certes des informations très utiles, mais insuffisantes, soit qu'elles restent très globales, soit en contrôle de gestion, qu'elles apprécient l'adéquation des résultats à un référentiel de prévisions, sans jugement sur ce dernier.

Pour évaluer les décisions possibles, il conviendra donc de disposer d'indicateurs économiques dans une optique "différentielle" (fondées sur des différences, et non sur une simple norme).

Chapitre 1 : La gestion des stocks.

Un stock est entendu ici comme étant une quantité physique d'un bien en attente (dans un magasin, un rayonnage...) d'être transféré ailleurs pour son utilisation. Cette attente entraîne un coût de stockage et de mobilisation d'un capital oisif, d'autant plus grand que l'attente est longue. Face à ce coût, l'idée d'une production avec "zéro stock" n'est ni réaliste ni même, nous le verrons, très souhaitable, car en effet, le stock va résulter de compromis.

Section 1 : Vue générale sur la problématique des stocks.

Le stock est en partie inévitable, mais il convient de le replacer dans un ensemble qu'on va appeler le "système stock".

A) Le stock et ses fonctions.

1 - Les fonctions du stock.

Le stock a deux types de fonctions :

a) Il assume la non-coïncidence dans le temps et dans l'espace de la production et de la consommation : il est impossible de produire instantanément là et quand la demande se manifeste et ce à des coûts jugés acceptables. Le stock permet de réguler face à des phénomènes saisonniers de la production (cas agro-alimentaire) ou de la demande (exemple les jouets) ; le stock permettra une utilisation plus satisfaisante du point de vue économique des ressources productives.

b) Il assume les irrégularités aléatoires dues à l'incertitude, pouvant porter :

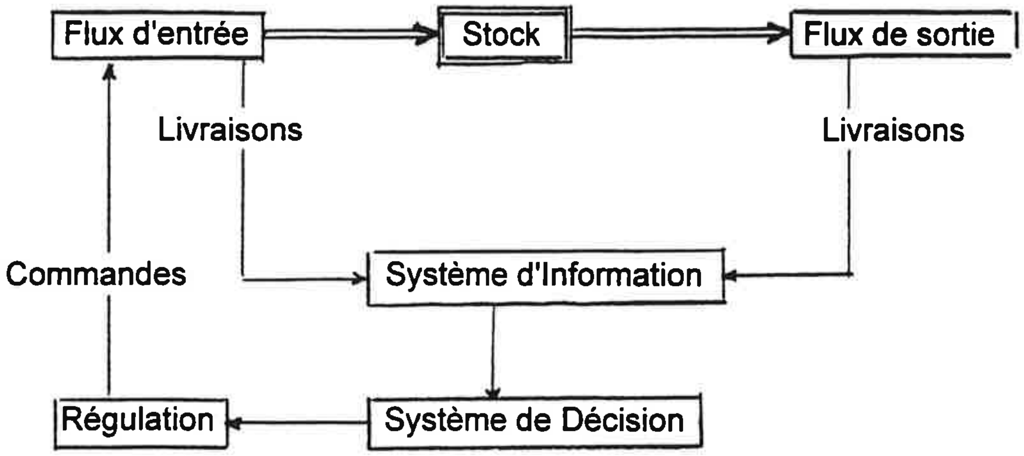
- sur les quantités demandées et les délais d'obtention (de fabrication et de transport);
- sur les quantités produites (des incidents peuvent se produire).
  Ces deux points conduisent au stock de sécurité ;
- sur les prix pouvant générer des stocks spéculatifs.

2 - Domaine d'application de l'analyse de stock.

La notion de stock est applicable aux biens physiques, mais également aux potentiels des services dont on dispose à un moment donné (équipements, ressources humaines) : bien que celles-ci ne soient pas "stockables", elles entrent dans le domaine de l'analyse de la problèmatique des stocks, les stocks de biens physiques pouvant permettre une meilleure utilisation de ces potentiels.

3 - Analyse du système-stock.

On peut le schématiser comme suit :



Légende = Flux physique ⟹
= Flux informationnel ⟶

a) Le stock est caractérisé à tout instant par son "état", son niveau. Celui-ci est donné par l'équation de passage d'état :

$$S_t = S_{t-1} + \text{entrées} - \text{sorties}$$

Aucune action directe n'est possible sur cet état. En général les sorties (la demande) sont subies, dès lors on ne peut agir que sur le flux d'entrée.Dans la réalité on a souvent affaire à des "stocks à étage" (ou multiéchelons) : en différents lieux, à différents stades de la production...

b) Le système d'information permet de connaître dans le temps l'état du stock :
- soit de manière permanente (inventaire permanent) chaque fois que se produit un mouvement d'entrée ou de sortie,
- soit par intermittance (inventaire périodique, physique, qui permet en outre de prendre en compte des mouvements "cachés", pertes, démarques...),
- soit lors d'évènements particuliers, quand il convient de faire appel à une "réserve".

c) Le système de décision porte sur la modulation des flux d'entrée en répondant à deux questions qui d'ailleurs, sont intimement liées :
- quand approvisionner le stock,
- de combien l'approvisonner.

d) Les flux d'entrée.

Leur origine peut être interne (fabrications) ou externe (achats). En outre, il y aura lieu de tenir compte du délai d'obtention (temps entre la commande et la livraison). Le flux d'entrée génère un coût dont le montant unitaire (prix d'achat, coût de fabrication) peut varier avec l'importance de la commande (rabais selon quantité, loi du coût de fabrication décroissant selon la quantité).

e) Les flux de sortie.

La demande, durant une période donnée peut être considérée :

soit comme certaine et connue à l'avance,

soit comme aléatoire et caractérisée par une distribution de probabilités pouvant être connue à partir d'informations sur le passé, ou supposée comme telle à partir de probabilités subjectives. Distribution pouvant se rapprocher (ou non) d'un processus théorique (loi de Poisson, loi normale tout particulièrement). La demande peut être complexe et s'obtenir par combinaison de deux (ou plus) distributions : exemple la demande peut combiner le nombre de bons de commande et le nombre d'articles par bon de commande ; la distribution combinée peut s'obtenir par application de la méthode de Monté Carlo.

- Si la demande s'étale sur plusieurs périodes, ses caractéristiques peuvent être soit les mêmes d'une période à l'autre : on parle de demande statique ; soit évolutives dans le temps et on parle de demande dynamique.

- La demande peut être :
 * externe (provenant de clients), on parle de stock de distribution ;
 * interne à l'entreprise (d'un atelier à l'autre), on parle de stock de fabrication.

La demande externe est souvent de type aléatoire-statique. Par contre, la demande interne qui va résulter d'une organisation planifiée sera alors souvent de type dynamique-certaine.

- Les demandes non satisfaites (rupture de stock) peuvent être soit perdues (le client renonce à sa demande, en la reportant vers un concurrent), soit différées dans le temps (le client accepte d'attendre), soit partiellement perdues (certains clients attendent, d'autres non).

Tous ces paramètres auront des incidences sur le fonctionnement du système stock et bien entendu sur ses conséquences financières et peuvent donc entraîner différentes façons de conduire ce système.

B) Les politiques de gestion des stocks.

La gestion des stocks consiste à déterminer les valeurs de diverses variables caractérisant le système-stock. On ne peut l'apprécier qu'en référence aux performances économiques et financières en fonction d'un (ou de plusieurs) objectifs de l'entreprise. Autrement dit, le système stock va être représenté par un modèle.

1 - Le modèle de gestion des stocks.

Le modèle doit représenter un ensemble de politiques. Par politique on entend un ensemble particulier de valeurs des variables représentant un fonctionnement possible du système stock. Parmi ces politiques, quelle politique retenir ? Cela nécessite disposer d'un critère de valeur caractérisant la performance économique, critère de valeur qu'on cherchera à optimiser. Au lieu du critère classique de la maximisation d'un bénéfice, on préfère celui plus commode de la minimisation d'un coût.

La fonction de coût, associée au système stock, va dépendre de trois variables caractérisant le système stock :

Q_p = le stock moyen possédé durant une période, auquel sera associé un coût unitaire c_p de possession

Q_r = la rupture moyenne (demande non satisfaite), nombre moyen de demandes non fournies durant la période, auquel sera associé un coût unitaire de rupture c_r

Q_c = le nombre moyen de commandes passées au cours d'une période (chaque commande portant sur un nombre q d'unités commandées), auquel on associe un coût unitaire de commande c_r.

La fonction de coût global pour une période s'écrit :

$$C = \underbrace{c_pQ_p}_{\text{stock}} + \underbrace{c_cQ_c}_{\text{commande}} + \underbrace{c_rQ_r}_{\text{ruptures}}$$

A partir du moment où les variables de flux sont aléatoires, les variables de quantité sont ses espérances mathématiques et la fonction de coût est aussi une espérance mathématique. Les valeurs réelles des variables et donc du coût, pour une période donnée, vont être différentes de ces espérances. Le raisonnement sur espérance mathématique ne se justifie que s'il se fonde sur de nombreuses décisions de même type, ici sur différentes périodes successives.

Il convient de bien préciser les types de coût qui seront utilisés.

a) Le coût de possession.

Il comprend deux éléments :

1 - Le coût de détention, coût lié comme son nom l'indique, à la détention d'un article en stock, coût qui ne dépend que des conditions financières d'acquisition. Celles-ci diffèrent selon que le stock résiduel en fin de période a encore ou non une utilité pour l'entreprise :

* Cas de stock dit "à rotation nulle" : le stock résiduel n'a plus d'utilité ; il est perdu (cas des produits frais de l'agroalimentaire ou obsolète (articles de mode). Dans ce cas, le coût d'acquisition (coût d'achat, coût de fabrication) est à prendre en considération car il ne sera jamais "récupéré" par une vente. Le "stock moyen" à prendre en considération sera le niveau moyen du stock résiduel en fin de période. Du coût d'acquisition on déduit toutefois l'éventuelle valeur de reprise d'invendus, s'il en eixste une.

* Cas de stock dit "à rotation non nulle" : la vente d'un article en stock résiduel en fin de période est reportée à la période suivante. Il sera dès lors inutile de prendre en compte le coût d'acquisition, puisque de toute façon il sera "récupéré" plus tard. Par contre, il va y avoir lieu de de tenir compte d'un coût dit d'opportunité (selon le langage des économistes), qui ne correspond pas à un débours monétaire, mais au fait que le stock entraîne une immobilisation d'un capital, qui ne peut être utilisé à autre chose de productif et entraîne donc un manque à gagner. Le taux d'opportunité doit correspondre à la rentabilité de l'investissement le plus rentable qui n'a pu être effectué faute de moyens financiers. Dans la pratique, on prend souvent le taux de placement monétaire. Le stock auquel sera appliqué ce coût d'opportunité est le niveau moyen du stock durant la période.

2 - Le coût de stockage recouvre des dépenses de logistique pour assurer physiquement le stockage. Elles comportent des charges variables liées à la valeur des stocks (assurances, casse...) ou à leurs volumes, et des charges fixes qui souvent varient par palier, délicats à prendre en compte, car le coût unitaire n'est ni continu, ni proportionnel aux quantités, ce qui conduit en général à ne pas les prendre en compte ou à réajuster successivement le calcul d'optimisation.

b) Le coût de rupture.

Ce coût lié à la demande non satisfaite, peut être soit dépendant, soit indépendant de la durée de rupture de stock. Dans le cas de ventes manquées (stock de distribution) ce coût est alors le manque à gagner qui résulte de la non vente et comprend la marge sur coût d'acquisition, auquel peut s'ajouter ce que l'on appelle une perte de goodwill correspondant à la diminution d'actifs incorporels, notamment le risque de perte définitive d'un client. Cette perte de goodwill est délicate à estimer. Supposons par exemple qu'un marchand de journal quotidien à une marge moyenne (le quotidien parait 6 jours/7) de O,7 F. et qu'une vente manquée entraîne la perte définitive du client, et sur la base d'un taux d'actualisation annuel de 5 %, la perte de goodwill serait

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{0.7}{(1.05)^{t/365}}$$

Ce calcul est un peu fallacieux : d'abord le client n'a pas une durée de vie infinie, ensuite il n'y a qu'une certaine probabilité de le perdre (ce qu'il faudrait prendre en compte), enfin le client reviendra peut être un jour (quand le concurrent sera en rupture de stock). En outre, une rupture de stock sur un article peut entraîner la perte d'un client qui achetait aussi d'autres articles..

Dans le cas de ventes différées (et non perdues), le coût de rupture n'incluera pas la marge (manque à gagner) puisqu'elle est simplement décalée dans le temps.. Par contre peuvent apparaitre d'autres coûts (rabais octroyé pour différé, relance de clientèle...).

Dans le cas d'une demande interne (stock de fabrication) une rupture dans la chaine de production peut entraîner un sous emploi dans les postes en aval (surtout dans les organisations en ligne) et le coût de rupture sera proportionnel à la durée de rupture..

c) Le coût de commande.

Dans le cas d'une commande de fabrication, on parle d'un coût de lancement (réglages de machines). Dans le cas d'une commande d'approvisionnement externe ; il s'agit de coûts administratifs (émission, envoi d'un bon de commande). Ce coût est généralement indépendant de la quantité commandée.

2 - Typologie des politiques de gestion des stocks.

Deux questions se posent : quand commender, combien commander. Les politiques vont dépendre du type de réponse à ces questions.

a) Réponses à la question "quand". Ce peut être :

- à intervalles réguliers T : on parle de gestion calendaire,
- au "point de commande s", quand le stock résiduel devient inférieur à un seuil.

On peut éventuellement combiner les deux : gestion calendaire conditionnelle : à intervalle régulier T sous condition que le stock soit inférieur à un seuil s (sinon on saute un intervalle).

b) Réponse à la question "combien". Ce peut être :

- une quantité fixe q, appelée quantité économique de commande,
- à un niveau de recomplètement S : la quantité commandée étant la différence entre ce niveau S et le stock observé et attendu R au moment de la commande,
- une quantité variable en fonction du stock détenu, mais non d'un niveau de recomplètement.

A priori on peut combiner n'importe quel type de réponse à la question "quand" à n'importe quel type à la question "combien" définissant ainsi des politiques de gestion distinctes. En réalité, deux politiques dominent :

- la politique de gestion calendaire caractérisée par un couple (T,S)
- la politique à quantité économique de commande : (q,s)

On peut schématiser la démarche guidant l'élaboration d'une politique optimale comme suit illustrée pour une politique (q,s).

Des variables de commande	q,s
déterminent des variables d'état	Q_p (q,s) , Q_p (q,s) , Q_c (q,s)
et un coût global dont on extrait	C(q,s)
les valeurs optimales	q* , s*

Le choix d'une politique de gestion n'est toutefois pas simple : cela dépend des informations disponibles, des compétences, des moyens de calcul. Mais si elle peut se traduire par des économies obtenues par une meilleure gestion des stocks, elle est coûteuse. Et ce dernier coût peut être éventuellement supérieur aux économies. On n'a pas forcément intérêt à appliquer une mesure politique de gestion pour tous les articles en références : on porte attention aux articles les plus importants.

La méthode dite ABC permet de classer les produits en 3 groupes d'importance décroissante. Elle est dérivée de ce que l'on appelle la "règle des 80-20". On observe fréquemment mais grossièrement qu'environ 20 % des articles font environ 80 ù du chiffre d'affaires. On classe donc selon l'importance de ce chiffre d'affaires.

Politique calendulaire ou politique de la quantité ? Chacune a ses avantages:

- pour la politique calendaire, la régularité dont la plus grande facilité d'organisation, la possibilité de regrouper les commandes des divers articles, l'adaptation à la saisonnalité.
- pour la politique de la quantité, la facilité de modélisation. On peut passer par l'analyse d'une politique "q,s" pour déterminer une bonne politique "T,S" (car la détermination éventuelle simultanée de T et de S est souvent numériquement délicate).

Section 2 : La gestion calendaire des stocks.

Les commandes sont passées à intervalle régulier T (dite période de révision calendaire).

On commande q = S - R (R étant l'état du stock au moment de la commande). La détermination de q ou de S passe par un arbitrage entre coûts de possession et coûts de rupture.

A) Gestion calendaire d'un stock à rotation nulle.

La périodicité T est fixée (par la durée de vie) et la quantité à commander est le niveau de recomplètement S qui est alors le stock initial en début de période. On peut supposer que le réapprovisionnement est instantané et négliger le délai de livraison.

1 - Cas d'une loi de demande discrète.

ILLUSTRATION NUMERIQUE :

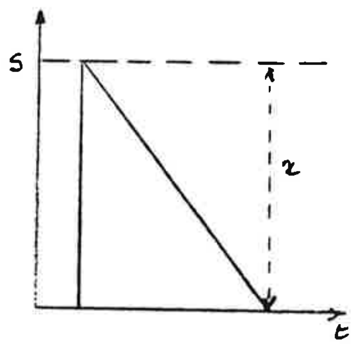
Le patissier fabrique un gateau lui coutant 25 F. , vendu 60 F. . La demande quotidienne suit approximativement une loi de Poisson :

X	o	1	2	3	4	5	6	7
P(x=X)	0,14	0,27	0,27	0,18	0,09	0,04	0,01	0

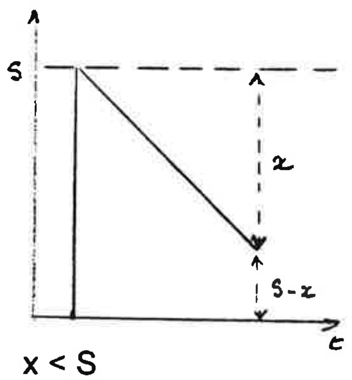
Les invendus du jour sont perdus (donnés à des oeuvres), le patissier tenant à sa réputation de vendre des produits frais du jour.

Combien de gateaux doit-il fabriquer chaque matin ?

On appellera S la quantité à produire (qui est le stock initial quotidien). Il convient de minimiser le coût de gestion C(S), somme du coût de possession et du coût de rupture liée aux ventes manquéesd (si la demande x>S). En effet, trois cas de figure sont possibles :

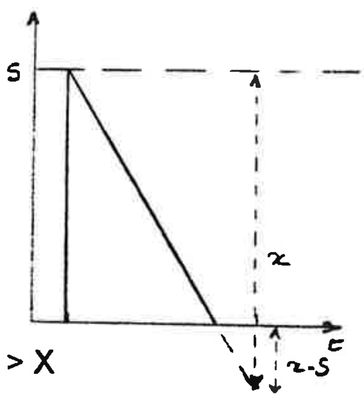


x = S



x < S

$Q_p = S - x$ invendus



x > X

$Q_p = x - S$ ventes manquées

Le coût s'écrit :

$C(S) = c_p Q_p(S) + c_r Q_r(S)$

c_p étant le coût de possession lié à un invendu, ici 25 F.

c_r étant le coût de rupture lié à une vente manquée, soit la marge = prix de vente - coût de possession. Ici 60 F - 25 F. = 35 f;

donc $C(S) = 25 Q_p(S) + 35 Q_r(S)$

La valeur optimale S* de l'approvisionnement initial est telle que le coût C (S*) est inférieur à celui associé à S* + 1 ou S* - 1

$$\left.\begin{array}{l} C(S^*) < C(S^*-1) \\ C(S^*) < C(S^*+1) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} C(S^*+1) - C(S^*) > 0 \\ C(S^*) - C(S^*-1) < 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

ce qui conduit à étudier comment évolue $C(S+1) - C(S)$

La quantité en invendu $Q_p = S - x$ pour x < S est :

$$Qr(S) = \sum_{x=0}^{S} (S-x) P(X=x)$$

La quantité en rupture $Q_r = x - S$ pour x > S est :

$$Qr(S) = \sum_{x=S+1}^{\infty} (x-S) P(X=x)$$

Le coût de gestion est alors :

$$C(S) = c_p \sum_{x=0}^{S} (S-x) P(X=x) + c_r \sum_{x=S+1}^{\infty} (x-S) P(X=x)$$

Résolution numérique de l'exemple. On peut établir le tableau :

S	$Q_p(S)$ $= \Sigma(S-x)P(x)$	$c_p\ Q_p(S)$	$Q_r(S)$ $= \Sigma(x-S)P(x)$	$C_r\ Q_r(S)$	C(S)
0	0	0	1,97	68,95	68,95
1	0,14	3,5	1,11	38,85	42,35
2	0,55	13,75	0,52	18,20	31,95
3	1,83	30,75	0,20	7,00	37,75
4	2,09	52,25	0,06	2,10	54,35
5	3,04	76,0	0,01	0,35	76,35
6	4,03	100,75	0	0	100,75

Le coût le plus faible est obtenu pour S* = 2

ANALYSE MATHEMATIQUE

La quantité en rupture peut s'écrire

$$Q_r(S) = \sum_{S+1}^{\infty} (x-S) P(X=x) = \sum_{S+1}^{\infty} x P(X=x) - S P(X<S)$$

La quantité en invendu :

$$Q_p(S) = \sum_{0}^{S} (S - x) P(X = x)$$

$$Q_p(S) = S \sum_{0}^{\infty} P(X = x) - \sum_{0}^{\infty} x P(X = x) - \left[-\sum_{S+1}^{\infty} (x - S) P(X = x) \right]$$

$$= S \times 1 - m - Q_r(s)$$

donc

$$C(S) = c_p(S - m) + (c_p + c_r) Q_r(S) \qquad \text{avec } m = \text{moyenne de X}$$

$$C(S+1) = c_p(S + 1 - m) + (c_p + c_r) Q_r(S+1)$$

d'où

$$C(S+1) - C(S) = c_p - (c_p + c_r)\left[Q_r(S+1) - Q_r(S)\right]$$

Or on démontre que $Q_r(S+1) - Q_r(S) = P(x > S)$

Pour cela dans l'expression $Q_r(S) = \sum_{S+1}^{\infty} x P(X = x) - S.\sum_{S+1}^{\infty} P(X = x)$

on dégage le terme S + 1, on en déduit :

$$Q_r(S) = P(X = S+1) + \sum_{S+2}^{\infty} x P(X = x) - S.\sum_{S+2}^{\infty} P(X = x)$$

De même pour $Q_r(S+1)$

On en déduit :

$$Q_r(S+1) - Q_r(S) = P(X = S+1) - \sum P(X = x)$$

$$= -\sum_{S+1}^{\infty} P(X = x)$$

$$= -P(X > S)$$

Il en résulte :

$$C(S+1) - C(S) = c_p - (c_p + c_r) P(X > S)$$

Appliquée aux conditions (1), on en tire la valeur de S*, optimum de S S* minimum de S tel que :

$$P(x > S^*) < \frac{c_p}{c_p + c_r} < P(x > S^* - 1) \qquad (3a)$$

$$P(x > S^* + 1) < \frac{c_p}{c_p + c_r} < P(x > S^*) \qquad (3b)$$

$$P(x < S^*) < \frac{c_r}{c_p + c_r} < P(x < S^* + 1) \qquad (3c)$$

$$P(x > S^* - 1) < \frac{c_r}{c_p + c_r} < P(x < S^*) \qquad (3d)$$

Selon les tables statistiques disponibles, l'une ou l'autre de ces 4 formules est utilisable.

Application à l'exemple numérique : il suffit de calculer l'une ou l'autre des probabilités annulées, et l'un ou l'autre des rapports $c_p / (c_p + c_r)$ ou $c_r / (c_p + c_r)$

S P (x = s)	0 0,14	1 0,27	2 0,27	3 0,18	4 0,09	5 0,04	6 0,01
P (x > s)	0,86	0,59	0,32	0,14	0,05	0,01	0,00
P (x > s)	1,00	0,86	0,59	0,32	0,14	0,05	0,01
P (x < s)	0,00	0,14	0,41	0,68	0,86	0,95	0,99
P (x< s)	0,14	0,41	0,68	0,86	0,95	0,99	1,00

Application de (3b) : $c_p / (c_p + c_r) = 25 / (25 + 35) = 0{,}42$
$P(x > 3) = 0{,}32 < 0{,}42 < 0{,}59 = P(x > 2)$ ---> $S^* = 2$

Application de (3d) : $c_r / (c_p + c_r) = 35 / (25 + 35) = 0{,}58$
$P(x < 1) = 0{,}41 < 0{,}58 < 0{,}68 = P(x < 2)$ ---> $S^* = 2$

(Il était donc inutile d'établir tout le tableau de calcul des coûts pour trouver la solution).

2 - Cas d'une demande continue (ou approximée à une loi continue).

Dans l'analyse mathématique précédente, on peut remplacer les signes par des $\int$ et $P(X = x)$ par $f_{(x)}\,dx$ avec $f_{(x)}$ loi de densité de probabilité.

On démontre alors que :

$$\frac{dQr(S)}{dS} = -\int_S^{\infty} f(x)dx = -P(X > S)$$

De $C(S) = c_p (S - m) + (c_p + c_r) Q_r(S)$ avec m = moyenne, on tire :

$$\frac{dC(S)}{dS} = c_p + (c_p + c_r)\frac{dQ_r(S)}{dS} = 0$$
$$= c_p - (c_p + c_r)P(X > S) = 0$$

L'optimum S* est tel que $P(X > S) = \dfrac{c_p}{c_p + c_r}$

soit encore $P(X < S) = \dfrac{c_r}{c_p + c_r}$

Cas d'une demande selon une loi normale de moyenne m et d'écart type σ.

Exemple d'illustration : un journal quotidien est acheté 1,80 F. par le revendeur, vendu 2,50 F. les invendus étant repris 1,60 F. La demande suit une loi normale m = 300 $\sigma = 20$

Le coût de rupture est 2,50 - 1,80 = 0,70
Le coût d'un invendu : 1,80 - 1,60 = 0,20
L'optimum est défini par $P(X > S^*) = \dfrac{c_p}{c_p+c_r}$ = 0,2/(0,2+0,7) + 0,2222

Par consultation d'une table de la loi normale centrée réduite pour la valeur (1 - 0,2222) - 0,5 = 0,2778 ou lit t = 0,765.

De t = 0,765 $= \dfrac{S-m}{\sigma} = \dfrac{S-300}{20}$ ou tire S = 315,3 environ 315

En posant $t_S = \dfrac{S-m}{\sigma}$ et G(ts) = f(ts) - ts P(t > ts),

on démontre que $Q_r(S) = \sigma$ g(ts)

Les tables statistiques (ci-jointes) donnent les liaisons 2 à 2 entre les 3 éléments P (t > ts) (qui est = P(x > S), ts, g(ts)).

Pour P(x > S) = P(t > ts) = 0,222 on lit dans la table B : g(ts) = 0,1277 puis dans la table B pour g(ts) = 0,1277 on lit ts = 0,765.

De ts = 0,765 = (S - 300) / 20, on tire S = 315,3.

3 - Conséquences économiques de la solution optimale.

Elles peuvent s'apprécier à partir d'indicateurs physiques ou en valeur et sont utilisables quelle que soit la politique (optimale ou non).

a) Indicateurs physiques

- La rupture de stock $Q_r(S)$

  loi de Poisson : $Q_r(S) = m.P(X = x) + (m - S).P(X > S)$

  loi normale : $Q_r(S) = \sigma.g(t_s)$

- La demande moyenne satisfaite = $m - Q_r(S)$
- Le pourcentage de demandes non satisfaites

$$\beta(S) = 100\frac{Qr(S)}{m}$$

Le stock résiduel (invendus) $Q_p(S) = S - m + Q_r(S)$

- La probabilité de rupture α (S)

  La probabilité idéale est $c_p / (c_p + c_r)$

  La probabilité effective est en général plus faible du fait du caractère discret. Le coût unitaire de rupture étant délicat à quantifier (du fait des pertes de goodwill), on peut être tenté d'imposer une probabilité de rupture à ne pas dépasser, et dès lors d'en déduire le coût de rupture. Dans le cas du marchand de journaux qui se fixerait une probabilité de rupture à 5 % on en déduirait 0,2 : (0,2 + c_r) = 0,05 d'où c_r = 4,20 F.

- La probabilité de rupture sur l'année

Une demande journalière aléatoire selon une loi normale N(M,r) conduit à une probabilité de rupture p = P(x > S) pour un stock initial S. La répétition sur M périodes conduit à n périodes où il y a rupture. Ce nombre n suit la loi binomiale

(M,p) que l'on approxime à une loi normale N(Mp, Mn(1-n)). On peut dès lors calculer la probabilité de dépasser j périodes avec ruptures sur les M périodes.

- Le stock de sécurité

C'est la différence entre le stock initial S (au niveau de recomplétement) et la demande moyenne m. Il est généralement positif. Avec la loi normale, le stock de sécurité est ts σ=(S - m).

b) Indicateurs en valeur

Outre l'indicateur de coût moyen c(S) (c'est une espérance mathématique), on peut envisager :

- La dépense d'acquisition moyenne liée à l'approvisionnement = c_p S
- La marge nette moyenne B (s)

  $B(s) = c_r [m - Q_r(s)] - c_p Q_p(s)$

ANNEXE 1

TABLE A : t_S connu → $g(t_S)$

- $t_S = \frac{S - \bar{x}}{\sigma}$ pour une demande suivant la loi normale $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma)$ pendant une période donnée
- $\sigma \cdot g(t_S)$ = demande moyenne non satisfaite pendant cette période, pour un stock initial S

- la valeur de t_S est donnée en première colonne pour les deux premiers chiffres significatifs, la valeur du second chiffre après la virgule est repérée dans la première ligne du tableau. A l'intersection de la ligne et de la colonne considérées se trouve la valeur de $g(t_S)$

  exemple : $t_S = -1{,}72 \rightarrow g(t_S) = 1{,}73741$

  $t_S = +0{,}80 \rightarrow g(t_S) = 0{,}12021$

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-2.5	2.50200	2.51194	2.52188	2.53183	2.54177	2.55171	2.56166	2.57161	2.58156	2.59151
-2.4	2.40272	2.41266	2.42256	2.43248	2.44241	2.45234	2.46227	[illegible]	[illegible]	2.49207
-2.3	2.30366	2.31355	2.32345	2.33335	2.34325	2.35314	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.39280
-2.2	2.20489	2.21475	2.22461	2.23448	2.24436	2.25423	2.26411	[illegible]	2.28388	2.29377
-2.1	2.10647	2.11629	2.12612	2.13595	2.14579	2.15563	2.16547	2.17532	2.18517	2.19503
-2.0	2.00849	2.01826	2.02804	2.03783	2.04762	2.05742	2.06722	2.07702	2.08683	2.09665
-1.9	1.91105	1.92077	1.93049	1.94022	1.94995	1.95969	1.96944	1.97920	1.98896	1.99872
-1.8	1.81427	1.82392	1.83357	1.84323	1.85290	1.86257	1.87225	1.88194	1.89164	1.90134
-1.7	1.71829	1.72786	1.73741	1.74699	1.75659	1.76617	1.77577	1.78539	1.79501	1.80464
-1.6	1.62324	1.63270	1.64217	1.65165	1.66114	1.67063	1.68015	1.68960	1.69920	1.70874
-1.5	1.52931	1.53866	1.54799	1.55736	1.56673	1.57612	1.58552	1.59494	1.60436	1.61379
-1.4	1.43667	1.44587	1.45509	1.46431	1.47355	1.48281	1.49208	1.50137	1.51067	1.51998
-1.3	1.34553	1.35457	1.36362	1.37270	1.38179	1.39089	1.40002	1.40916	1.41831	1.42748
-1.2	1.25610	1.26496	1.27384	1.28273	1.29165	1.30058	1.30954	1.31851	1.32750	1.33650
-1.1	1.16862	1.17727	1.18595	1.19464	1.20336	1.21210	1.22086	1.22964	1.23844	1.24726
-1.0	1.08331	1.09174	1.10019	1.10866	1.11716	1.12568	1.13422	1.14279	1.15138	1.15999
-.9	1.00043	1.00860	1.01680	1.02503	1.03328	1.04156	1.04986	1.05819	1.06654	1.07491
-.8	.92021	.92814	.93603	.94398	.95196	.95997	.96801	.97607	.98417	.99228
-.7	.84288	.85047	.85810	.86576	.87345	.88117	.88892	.89669	.90450	.91234
-.6	.76867	.77599	.78329	.79059	.79797	.80537	.81281	.82028	.82778	.83531
-.5	.69780	.70473	.71170	.71870	.72573	.73280	.73991	.74705	.75422	.76143
-.4	.63044	.63701	.64362	.65027	.65695	.66367	.67042	.67721	.68404	.69090
-.3	.56676	.57296	.57920	.58547	.59178	.59813	.60452	.61094	.61740	.62390
-.2	.50689	.51271	.51856	.52445	.53038	.53634	.54235	.54840	.55448	.56060
-.1	.45093	.45635	.46181	.46731	.47285	.47842	.48404	.48969	.49539	.50112
-.0	.39894	.40396	.40902	.41412	.41926	.42444	.42966	.43492	.44022	.44556
.0	.39894	.39396	.38902	.38412	.37926	.37444	.36966	.36492	.36022	.35556
.1	.35093	.34635	.34181	.33731	.33285	.32842	.32404	.31969	.31539	.31112
.2	.30689	.30271	.29856	.29445	.29038	.28634	.28235	.27840	.27448	.27060
.3	.26676	.26296	.25920	.25547	.25178	.24813	.24452	.24094	.23740	.23390
.4	.23044	.22701	.22362	.22027	.21695	.21367	.21042	.20721	.20404	.20090
.5	.19780	.19473	.19170	.18870	.18573	.18280	.17991	.17705	.17422	.17143
.6	.16867	.16595	.16325	.16059	.15797	.15537	.15281	.15029	.14778	.14531
.7	.14288	.14048	.13810	.13576	.13345	.13117	.12892	.12669	.12450	.12234
.8	.12021	.11816	.11603	.11398	.11196	.10997	.10801	.10607	.10417	.10229
.9	.10043	.09860	.09680	.09503	.09328	.09156	.08986	.08819	.08654	.08491
1.0	.08332	.08174	.08019	.07866	.07716	.07568	.07422	.07279	.07138	.06999
1.1	.06862	.06727	.06595	.06465	.06336	.06210	.06086	.05964	.05844	.05726
1.2	.05610	.05496	.05384	.05274	.05165	.05059	.04954	.04851	.04750	.04650
1.3	.04553	.04457	.04363	.04270	.04179	.04090	.04002	.03916	.03831	.03748
1.4	.03667	.03587	.03508	.03431	.03356	.03281	.03208	.03137	.03067	.02998
1.5	.02931	.02865	.02800	.02736	.02674	.02612	.02552	.02494	.02436	.02380
1.6	.02324	.02270	.02217	.02165	.02114	.02064	.02015	.01967	.01920	.01874
1.7	.01829	.01785	.01742	.01699	.01658	.01617	.01578	.01539	.01501	.01464
1.8	.01428	.01392	.01357	.01323	.01290	.01257	.01226	.01195	.01164	.01134
1.9	.01105	.01077	.01049	.01022	.00996	.00970	.00945	.00920	.00896	.00872
2.0	.00849	.00827	.00805	.00783	.00762	.00742	.00722	.00702	.00683	.00665
2.1	.00647	.00629	.00612	.00595	.00579	.00563	.00547	.00532	.00517	.00503
2.2	.00489	.00475	.00462	.00449	.00436	.00424	.00411	.00400	.00388	.00377
2.3	.00366	.00356	.00345	.00335	.00326	.00316	.00307	.00298	.00289	.00280
2.4	.00272	.00264	.00256	.00248	.00241	.00234	.00227	.00220	.00213	.00207
2.5	.00200	.00194	.00188	.00183	.00177	.00171	.00166	.00161	.00156	.00151
2.6	.00146	.00142	.00137	.00133	.00129	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.00110
2.7	.00106	.00103	.00099	.00096	.00093	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.00079
2.8	.00076	.00074	.00071	.00069	.00066	.00064	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.00056
2.9	.00054	.00052	.00050	.00049	.00047	.00046	.00044	.00042	.00041	.00040
3.0	.00038	.00037	.00036	.00034	.00033	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028

ANNEXE 1

TABLE B : $P(t > t_S) \rightarrow g(t_S)$

- Voir table A pour la définition de t_S, S et $g(t_S)$
- Probabilité de rupture $P(t > t_S)$ donnée en pourcentage, et lue en première colonne et première ligne des tableaux ci-dessous.
- Le premier tableau donne les valeurs $g(t_S)$ pour des probabilités variant entre 0.1 % et 25,9 %, par pas de 0,1 %

  exemple : $P(t > t_S) = 9{,}6\,\% \rightarrow g(t_S) = 0{,}04508$
- Le second tableau donne les valeurs de $g(t_S)$ pour des probabilités variant entre 10 % et 89 % par pas de 1 %

  exemple : $P(t > t_S) = 37\,\% \rightarrow g(t_S) = 0{,}25478$

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
.0	********	.00020	.00058	.00091	.00124	.00158	.00193	.00229	.00265	.00302
1.0	.00339	.00377	.00415	.00453	.00492	.00532	.00572	.00612	.00652	.00693
2.0	.00734	.00776	.00818	.00860	.00902	.00945	.00987	.01031	.01074	.01118
3.0	.01162	.01206	.01250	.01295	.01340	.01385	.01431	.01476	.01522	.01568
4.0	.01615	.01661	.01708	.01755	.01802	.01849	.01897	.01945	.01993	.02041
5.0	.02089	.02138	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.02334	.02384	.02433	.02483	.02533
6.0	.02584	.02634	.02685	.02736	.02787	.02838	.02889	.02941	.02992	.03044
7.0	.03096	.03148	.03201	.03253	.03306	.03359	.03412	.03465	.03519	.03572
8.0	.03626	.03680	.03734	.03788	.03843	.03897	.03952	.04007	.04062	.04117
9.0	.04172	.04228	.04283	.04339	.04395	.04451	.04508	.04564	.04621	.04677
10.0	.04734	.04791	.04849	.04906	.04963	.05021	.05079	.05137	.05195	.05253
11.0	.05312	.05370	.05429	.05488	.05547	.05606	.05665	.05725	.05785	.05844
12.0	.05904	.05964	.06024	.06085	.06145	.06206	.06267	.06328	.06389	.06450
13.0	.06511	.06573	.06635	.06696	.06758	.06820	.06883	.06945	.07008	.07070
14.0	.07133	.07196	.07259	.07323	.07386	.07449	.07513	.07577	.07641	.07705
15.0	.07769	.07834	.07898	.07963	.08028	.08093	.08158	.08223	.08289	.08354
16.0	.08420	.08486	.08552	.08618	.08684	.08750	.08817	.08884	.08950	.09017
17.0	.09085	.09152	.09219	.09287	.09354	.09422	.09490	.09558	.09627	.09695
18.0	.09763	.09832	.09901	.09970	.10039	.10108	.10178	.10247	.10317	.10387
19.0	.10456	.10527	.10597	.10667	.10738	.10808	.10879	.10950	.11021	.11092
20.0	.11164	.11235	.11307	.11379	.11451	.11523	.11595	.11667	.11740	.11812
21.0	.11885	.11958	.12031	.12104	.12178	.12251	.12325	.12399	.12473	.12547
22.0	.12621	.12695	.12770	.12845	.12919	.12994	.13069	.13145	.13220	.13296
23.0	.13371	.13447	.13523	.13599	.13675	.13752	.13828	.13905	.13982	.14059
24.0	.14136	.14213	.14291	.14368	.14446	.14524	.14602	.14680	.14758	.14837
25.0	.14915	.14994	.15073	.15152	.15231	.15311	.15390	.15470	.15549	.15629

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10.0	.04734	.05312	.05904	.06511	.07133	.07769	.08420	.09085	.09763	.10456
20.0	.11164	.11885	.12621	.13371	.14136	.14915	.15710	.16519	.17343	.18182
30.0	.19037	.19908	.20795	.21698	.22617	.23554	.24507	.25478	.26467	.27476
40.0	.28500	.29549	.30610	.31694	.32799	.33926	.35074	.36244	.37437	.38653
50.0	.39894	.41169	.42452	.43771	.45117	.46492	.47896	.49332	.50799	.52300
60.0	.53835	.55404	.57015	.58664	.60353	.62086	.63864	.65689	.67565	.69493
70.0	.71477	.73521	.75627	.77400	.80044	.82364	.84766	.87256	.89840	.92527
80.0	.95326	.98244	1.01300	1.04501	1.07866	1.11413	1.15165	1.19150	1.23403	1.27960

ANNEXE 1

TABLE C : $g(t_S) \rightarrow P(t > t_S)$

- Voir table A pour la définition de t_S, S et $g(t_S)$: la probabilité de rupture $P(t > t_S)$ est donnée en pourcentage, comme dans la table B
- Le premier tableau donne les valeurs de $P(t > t_S)$ pour des valeurs de $g(t > t_S)$ variant entre 0,0001 et 0,0039 par pas de 0,0001

  exemple : $g(t_S) = 0{,}0251 \rightarrow P(t_S) = 5{,}85$ %
- Le second tableau donne les valeurs de $P(t > t_S)$ pour des valeurs de $g(t > t_S)$ variant entre 0,0010 et 0,3090 par pas de 0,001

  exemple : $g(t_S) = 0{,}092 \rightarrow P(t > t_S) = 17{,}17$ %

	.0000	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
.000	######	.04	.07	.11	.14	.17	.21	.24	.27	.30
.001	.33	.36	.39	.42	.45	.48	.50	.53	.56	.59
.002	.62	.65	.67	.70	.73	.76	.79	.81	.84	.87
.003	.90	.92	.95	.98	1.00	1.03	1.06	1.08	1.11	1.13
.004	1.16	1.19	1.21	1.24	1.26	1.29	1.32	1.34	1.37	1.39
.005	1.42	1.44	1.47	1.50	1.52	1.54	1.57	1.59	1.62	1.64
.006	1.67	1.69	1.72	1.74	1.77	1.79	1.82	1.84	1.87	1.89
.007	1.92	1.94	1.96	1.99	2.01	2.04	2.06	2.08	2.11	2.13
.008	2.16	2.18	2.20	2.23	2.25	2.28	2.30	2.32	2.35	2.37
.009	2.39	2.42	2.44	2.46	2.49	2.51	2.53	2.56	2.58	2.60
.010	2.63	2.65	2.67	2.70	2.72	2.74	2.76	2.79	2.81	2.84
.011	2.86	2.88	2.90	2.93	2.95	2.97	3.00	3.02	3.04	3.06
.012	3.08	3.11	3.13	3.15	3.18	3.20	3.22	3.24	3.26	3.29
.013	3.31	3.33	3.35	3.37	3.40	3.42	3.44	3.47	3.48	3.51
.014	3.53	3.55	3.57	3.60	3.62	3.64	3.66	3.69	3.71	3.73
.015	3.75	3.77	3.79	3.82	3.84	3.86	3.88	3.90	3.92	3.94
.016	3.96	3.99	4.01	4.03	4.05	4.07	4.09	4.12	4.14	4.16
.017	4.18	4.20	4.22	4.25	4.26	4.29	4.31	4.33	4.35	4.37
.018	4.39	4.42	4.44	4.46	4.48	4.50	4.52	4.54	4.56	4.58
.019	4.60	4.63	4.65	4.67	4.69	4.71	4.73	4.75	4.77	4.79
.020	4.81	4.83	4.85	4.87	4.89	4.91	4.94	[illegible]	[illegible]	5.00
.021	5.02	5.04	5.06	5.08	5.10	5.12	5.14	5.16	5.19	5.21
.022	5.22	5.24	5.27	5.29	5.31	5.32	5.35	5.37	5.39	5.41
.023	5.43	5.45	5.47	5.49	5.51	5.53	5.55	5.57	5.59	5.61
.024	5.63	5.65	5.67	5.69	5.71	5.73	5.75	5.77	5.79	5.81
.025	5.83	5.85	5.87	5.89	5.91	5.93	5.95	5.97	5.99	6.01
.026	6.03	6.05	6.07	6.09	6.11	6.13	6.15	6.17	6.19	6.21
.027	6.23	6.24	6.26	6.29	6.31	6.33	6.34	6.36	6.38	6.41
.028	6.43	6.44	6.46	6.48	6.50	6.52	6.54	6.56	6.58	6.60
.029	6.62	6.64	6.66	6.67	6.69	6.71	6.73	6.75	6.77	6.79
.030	6.81	6.83	6.85	6.87	6.89	6.91	6.92	6.94	6.96	6.98

	.0000	.0010	.0020	.0030	.0040	.0050	.0060	.0070	.0080	.0090
.000	######	2.28	2.28	2.28	2.28	2.29	2.29	2.29	2.29	2.39
.010	2.63	2.86	3.09	3.31	3.53	3.75	3.97	4.18	4.39	4.60
.020	4.81	5.02	5.22	5.43	5.63	5.83	6.03	6.23	6.42	6.62
.030	6.81	7.01	7.20	7.38	7.58	7.76	7.95	8.13	8.32	8.50
.040	8.68	8.87	9.04	9.22	9.41	9.59	9.76	9.94	10.11	10.28
.050	10.46	10.63	10.81	10.97	11.14	11.32	11.49	11.66	11.82	11.99
.060	12.15	12.32	12.49	12.64	12.81	12.98	13.14	13.30	13.46	13.63
.070	13.78	13.95	14.10	14.24	14.42	14.58	14.73	14.89	15.04	15.19
.080	15.35	15.50	15.66	15.81	15.96	16.12	16.26	16.41	16.57	16.72
.090	16.86	17.01	17.17	17.32	17.46	17.60	17.76	17.90	18.05	18.19
.100	18.34	18.48	18.63	18.76	18.91	19.06	19.20	19.33	19.49	19.62
.110	19.76	19.88	20.04	20.18	20.32	20.46	20.61	20.74	20.88	21.01
.120	21.15	21.28	21.43	21.56	21.69	21.82	21.96	22.11	22.24	22.37
.130	22.49	22.63	22.76	22.90	23.04	23.16	23.30	23.42	23.56	23.68
.140	23.82	23.94	24.07	24.21	24.33	24.46	24.58	24.71	24.85	24.98
.150	25.11	25.22	25.35	25.47	25.60	25.73	25.86	25.97	26.10	26.23
.160	26.35	26.48	26.59	26.73	26.84	26.97	27.09	27.22	27.34	27.45
.170	27.57	27.71	27.82	27.94	28.06	28.18	28.29	[illegible]	[illegible]	28.65
.180	28.77	28.88	29.01	29.13	29.25	29.37	29.49	29.59	29.71	29.84
.190	29.94	30.06	30.18	30.29	30.41	30.53	30.64	30.76	30.87	30.99
.200	31.10	31.20	31.33	31.43	31.54	31.66	31.77	31.88	32.00	32.11
.210	32.22	32.33	32.43	32.56	32.67	32.78	32.88	32.99	33.10	33.21
.220	33.32	33.43	33.54	33.65	33.76	33.87	33.98	34.09	34.20	34.29
.230	34.40	34.51	34.62	34.73	34.82	34.93	35.04	35.14	35.25	35.36
.240	35.45	35.56	35.68	35.77	35.88	35.98	36.09	36.18	36.29	36.41
.250	36.50	36.60	36.71	36.80	36.91	37.01	37.12	37.22	37.31	37.43
.260	37.52	37.61	37.73	37.82	37.92	38.01	38.13	38.22	38.32	38.41
.270	38.53	38.62	38.72	38.82	38.91	39.01	39.12	39.22	39.32	39.41
.280	39.51	39.60	39.70	39.80	39.89	39.99	[illegible]	[illegible]	[illegible]	40.38
.290	40.47	40.57	40.67	40.76	40.86	40.96	[illegible]	[illegible]	[illegible]	41.33
.300	41.43	41.52	41.60	41.70	41.80	41.89	[illegible]	[illegible]	[illegible]	42.27

ANNEXE 1

TABLE D : $g(t_S) \rightarrow t_S$

- Voir table A pour la définition de S, t_S, et $g(t_S)$
- La lecture de $g(t_S)$ s'effectue comme pour la table C, mais en sortie, on obtient t_S au lieu de $P(t > t_S)$

  exemples : $g(t_S) = 0{,}0251 \rightarrow t_S = 1{,}567$

  $g(t_S) = 0{,}0920 \rightarrow t_S = 0{,}947$

	.0000	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
.000	######	3.354	3.179	3.068	2.987	2.923	2.870	2.825	2.785	2.750
.001	2.718	2.689	2.662	2.637	2.614	2.592	2.572	2.552	2.534	2.517
.002	2.500	2.485	2.470	2.455	2.441	2.428	2.415	2.402	2.390	2.379
.003	2.367	2.356	2.346	2.335	2.325	2.315	2.306	2.296	2.287	2.278
.004	2.270	2.261	2.253	2.244	2.236	2.228	2.221	2.213	2.206	2.199
.005	2.192	2.185	2.178	2.171	2.164	2.158	2.151	2.145	2.139	2.133
.006	2.127	2.121	2.115	2.109	2.103	2.098	2.092	2.087	2.082	2.076
.007	2.071	2.066	2.061	2.056	2.051	2.046	2.041	2.036	2.031	2.027
.008	2.022	2.017	2.013	2.008	2.004	1.999	1.995	1.991	1.986	1.982
.009	1.978	1.974	1.970	1.966	1.962	1.958	1.954	1.950	1.946	1.942
.010	1.938	1.934	1.931	1.927	1.923	1.920	1.916	1.912	1.909	1.905
.011	1.902	1.898	1.895	1.891	1.888	1.885	1.881	1.878	1.874	1.871
.012	1.868	1.865	1.861	1.858	1.855	1.852	1.849	1.846	1.843	1.840
.013	1.837	1.834	1.831	1.828	1.825	1.822	1.819	1.816	1.813	1.810
.014	1.807	1.805	1.802	1.799	1.796	1.793	1.791	1.788	1.785	1.783
.015	1.780	1.777	1.775	1.772	1.769	1.767	1.764	1.762	1.759	1.757
.016	1.754	1.752	1.749	1.747	1.744	1.742	1.739	1.737	1.734	1.732
.017	1.730	1.727	1.725	1.722	1.720	1.718	1.715	1.713	1.711	1.709
.018	1.706	1.704	1.702	1.699	1.697	1.695	1.693	1.691	1.688	1.686
.019	1.684	1.682	1.680	1.678	1.675	1.673	1.671	1.669	1.667	1.665
.020	1.663	1.661	1.659	1.657	1.655	1.653	1.651	1.649	1.647	1.645
.021	1.643	1.641	1.639	[illegible]	1.635	1.633	1.631	1.629	1.627	1.625
.022	1.623	1.621	1.619	1.617	1.615	1.614	1.612	1.610	1.608	1.606
.023	1.604	1.602	1.601	1.599	1.597	1.595	1.593	1.592	1.590	1.588
.024	1.586	1.584	1.583	1.581	1.579	1.577	1.576	1.574	1.572	1.571
.025	1.569	1.567	1.565	1.564	1.562	1.560	1.559	1.557	1.555	1.554
.026	1.552	1.550	1.549	1.547	1.545	1.544	1.542	1.541	1.539	1.537
.027	1.536	1.534	1.533	1.531	1.529	1.528	1.526	1.525	1.523	1.521
.028	1.520	1.518	1.517	1.515	1.514	1.512	1.510	1.509	1.507	1.506
.029	1.504	1.503	1.501	1.500	1.498	1.497	1.495	1.494	1.492	1.491
.030	1.489	1.488	1.486	1.485	1.483	1.482	1.481	1.479	1.478	1.476

	.0000	.0010	.0020	.0030	.0040	.0050	.0060	.0070	.0080	.0090
.000	######	1.999	1.999	1.998	1.998	1.997	1.997	1.996	1.996	1.978
.010	1.938	1.902	1.868	1.837	1.807	1.780	1.754	1.730	1.706	1.684
.020	1.663	1.643	1.623	1.604	1.586	1.568	1.552	1.535	1.520	1.504
.030	1.489	1.475	1.461	1.447	1.434	1.421	1.408	1.396	1.384	1.372
.040	1.360	1.349	1.338	1.327	1.316	1.305	1.295	1.285	1.275	1.265
.050	1.255	1.246	1.236	1.227	1.218	1.209	1.200	1.192	1.183	1.175
.060	1.167	1.159	1.150	1.143	1.135	1.127	1.119	1.112	1.104	1.097
.070	1.090	1.082	1.075	1.068	1.061	1.054	1.048	1.041	1.034	1.028
.080	1.021	1.015	1.008	1.002	.996	.989	.983	.977	.971	.965
.090	.959	.953	.947	.941	.936	.930	.924	.919	.913	.908
.100	.902	.897	.891	.886	.881	.875	.870	.865	.860	.855
.110	.850	.845	.840	.835	.830	.825	.820	.815	.810	.806
.120	.801	.796	.791	.787	.782	.778	.773	.768	.764	.759
.130	.755	.751	.746	.742	.737	.733	.729	.725	.720	.716
.140	.712	.708	.704	.699	.695	.691	.687	.683	.679	.675
.150	.671	.667	.663	.659	.655	.651	.647	.644	.640	.636
.160	.632	.628	.625	.621	.617	.613	.610	.606	.602	.599
.170	.595	.591	.588	.584	.581	.577	.574	.570	.567	.563
.180	.560	.556	.553	.549	.546	.542	.539	.536	.532	.529
.190	.526	.522	.519	.516	.512	.509	.506	.502	.499	.496
.200	.493	.490	.486	.483	.480	.477	.474	.471	.467	.464
.210	.461	.458	.455	.452	.449	.446	.443	.440	.437	.434
.220	.431	.428	.425	.422	.419	.416	.413	.410	.407	.404
.230	.401	.398	.395	.392	.390	.387	.384	.381	.378	.375
.240	.373	.370	.367	.364	.361	.359	.356	.353	.350	.347
.250	.345	.342	.339	.337	.334	.331	.328	.326	.323	.320
.260	.318	.315	.312	.310	.307	.305	.302	.299	.297	.294
.270	.291	.289	.286	.284	.281	.279	.276	.273	.271	.268
.280	.266	.263	.261	.258	.256	.253	.251	.248	.246	.243
.290	.241	.238	.236	.233	.231	.229	.226	.224	.221	.219
.300	.216	.214	.212	.209	.207	.204	.202	.200	.197	.195

B) Gestion calendaire d'un stock à rotation non nulle.

De nombreux articles ont des rotations non nulles : ils sont "stockables" et disponibles pour la période suivante.

1 - Avec délai de réapprovisionnement nul (ou quasi nul).

Tel est le cas d'approvisionnements hebdomadaires près d'un grossiste.

Exemple introductif : la demande hebdomadaire d'un produit de conserve (par exemple une boisson en boite) est de 300 avec un écart-type de 20. Elle est achetée 9 F. et revendue 10,50 F. . Le coût de possession (stockage) est estimé à 0,02 F. par unité et par semaine. Le coût de rupture est le manque à gagner soit 10,5 - 9 = 1,50 F..

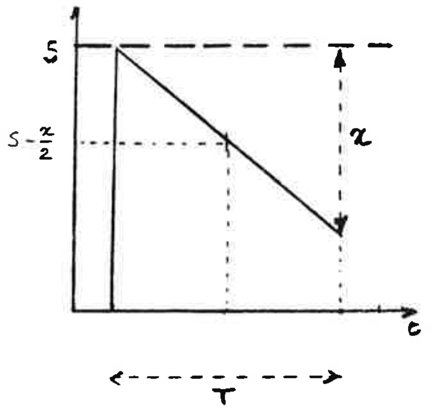
Quel est le niveau optimal de recomplètement S, c'est-à-dire le niveau à atteindre au début de chaque semaine, la quantité a commander une semaine étant alors la différence entre ce niveau de recomplètement S et le stock résiduel à l'issue de la semaine précédente ?

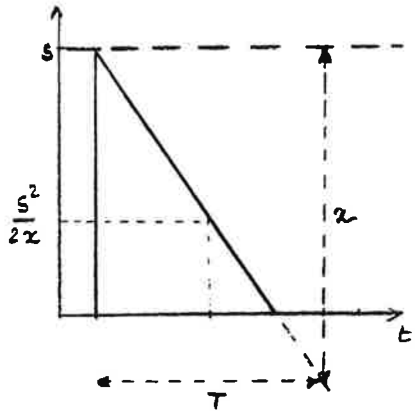
a) Positionnement du problème.

On va chercher le minimum de C (S) = $C_p\ Q_p(S) + C_r\ Q_r(S)$

soit un compromis entre le stockage et la rupture de stock.

Dans l'hypothèse où la demande se répartit régulièrement durant la période T, on peut voir deux cas de figure pour une demande réelle x durant cette période T.





x ≤ S il n'y a pas de rupture de stock

le stock moyen possédé est $\frac{S + (S-x)}{2} = S - \frac{x}{2}$

x > S il y a rupture de stock sur la qualité x - S

la rupture va se produire dans un délai S/x

Durant ce délai le stock moyen possédé est S/2

Durant le délai T le stock moyen possédé est $\frac{S}{2}\frac{S}{x} = \frac{S^2}{2x}$

b) Espérance du stock moyen possédé.

$$Qp(S) = \sum_{0}^{S}(S - \frac{x}{2})P(X = x) + \sum_{S+1}^{\infty}(\frac{S^2}{2x})P(X = x)$$

soit en notation continue

$$Q_p(S) = \int_{0}^{S}(S - \frac{x}{2})f(x)dx + \int_{S+1}^{\infty}(\frac{S^2}{2x})f(x)dx$$

On peut en déduire :

$$Q_P(S) = S - \frac{m}{2} + Qr(S) - \frac{S}{2}P(X > S) + \frac{S^2}{2x}\sum(\frac{1}{x})P(X = x)$$

Cette expression où intervient $\frac{1}{x}$ conduira inévitablement à des formules complexes pour définir l'optimum. On se contentera ici d'une approche simplifiée.

c) Solution optimale approchée.

Une simplification consiste à admettre que la rupture de stock se produit en fin de période. Dès lors, le stock moyen possédé est $\frac{S}{2}$ dans le cas où x > S.

Alors $Q_P(S) = \sum_{0}^{S}(S - \frac{x}{2})P(X = x) + \sum_{S+1}^{\infty}(\frac{S}{2})P(X = x)$

On montre alors que $Q_P(S) = S - \frac{m}{2} + \frac{Q_r(S)}{2}$

Le coût total est alors dans le cas où les ventes manquées sont perdues :

$$C(S) = cp\left[S - \frac{m}{2} + \frac{Q_r(S)}{2}\right] + c_r Q_r(S)$$

On obtient l'optimum par dérivation sachant que $dQ_r(S) = P(X > S)$

Il est tel que

$$P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_r + c_p/2}$$

et la règle d'encadrement

$$P(X > S^*) < \frac{c_p}{c_r + c_p/2} < P(X > S^* - 1)$$

Si par contre, le coût de rupture était proportionnel au temps (cas de ventes différées avec pénalité) alors le coût de rupture (pour un coût par unité de temps Cr_1) deviendrait

$$c_{r1}\sum\frac{x - S}{x}P(X = x)$$

et les formules plus complexes.

Dans le cas de l'exemple numérique, la probabilité de rupture doit être

P (X > S*) = O,02 = 0,0132

D'où par lecture des tables pour P (t > ts) = 1,32 % g (ts) = 0,0046 et ts = 2,306

d'où ts = 2,306 = (S - 300)/20 d'où S = 346,1 (solution qui ne diffère guère de celle obtenue sans l'hypothèse simplificatrice).

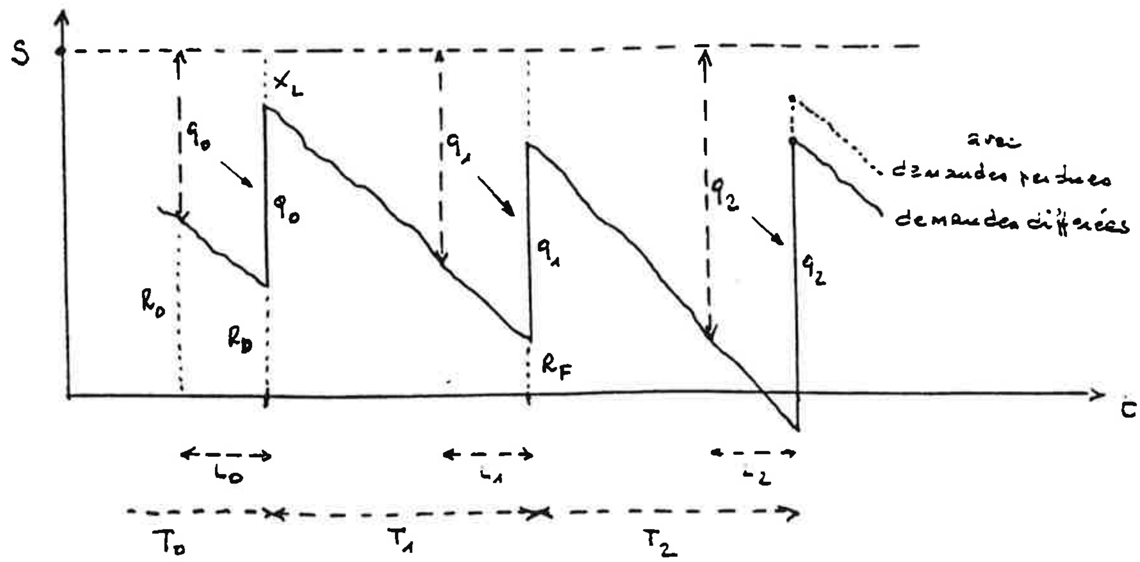
2 - Avec délai de réapprovisionnement non nul.

Lorsque la livraison n'est pas immédiate après une commande, on ne peut définir une politique optimale sans tenir compte de ce qui se passe dans la période antérieure à la livraison. Cette interdépendance temporelle n'est pas très grave lorsque la demande non satisfaite est différée ; ce n'est pas le cas lorsqu'elle est perdue : dans ce dernier cas, on supposera que le délai de livraison L est inférieur à la période calendaire T.

La commande Q passée sera la différence entre le niveau de recomplètement S et la position de stock R au moment de la commande (le stock détenu), et les commandes attendues si le délai de livraison est supérieur à la période calendaire. La position de stock est alors R = stock détenu - demandes non satisfaites (si différé possible) + commandes attendues (si L > T)

On appellera :
X_T la demande aléatoire durant la période calendaire (qui débute à la livraison)
X_L la demande aléatoire durant le délai de livraison (durant la période calendaire antérieure (~~ou les~~)

On peut schématiser comme suit :



a) Cas des demandes différées.

En début de période calendaire (à la livraison), la position de stock est $R_T = S - X_L$.

En fin de période, elle sera celle de début moins la demande X_T durant la période T donc $R_{\cancel{D}F} = S - X_L - X_T$

En ajoutant l'hypothèse simplificatrice d'une rupture de stock se produisant en fin de période calendaire, on peut établir les expressions de Q_p (S) stock moyen possédé et Q_r (S) rupture moyenne de stock

		sans rupture de stock en fin de période	avec rupture de stock en fin de période
Sans rupture de stock en début $X_L < S$ après livraison	Stock moyen	$s - X_L - X_T/2$	$= (S - X_L)/2$
	Rupture moyenne	$= 0$	$= X_T + X_L - S$
Avec rupture de stock en début $X_L > S$ après livraison	Stock moyen		$= 0$
	Rupture moyenne	impossible	$= X_T + X_L - S$

La détermination de la politique optimale passera alors par la recherche du coût minimum, qui ne dépendra que de S, X_L et X_T (X_L et X_T étant définis par leurs fonctions de densité de probabilité f_l et f_r).

La fonction de coût C (S) est simple à établir, bien que d'apparence fort complexe :

$$
\begin{aligned}
C(S) = {} & c_p\int_0^S\left[\int_0^{S-X_l}(S - X_L - X_T/2)f_T(X_T)dX_T\right]f_L(X_L)dX_L \\
& + c_p\int_0^S\left[\int_{S-X_L}^{\infty}\frac{S-X_L}{2}f_T(X_T)dX_T\right]f_L(X_L)dX_L \\
& + c_r\int_0^S\left[\int_{S-X_L}^{\infty}(X_T + X_L - S)f_T(X_T)dX_T\right]f_L(X_L)dX_L \\
& + c_r\int_S^{\infty}\left[\int_{S-X_L}^{\infty}(X_T + X_L - S)f_T(X_T)dX_T\right]f_L(X_L)dX_L
\end{aligned}
$$

La dérivation (fort complexe)- de ce coût conduit à la solution optimale obtenue pour :

$$\int_0^S\left[\int_0^{S-X_L}f_T(X_T)dX_T\right]f_L(X_L)dX_L = \frac{c_r + \frac{c_p}{2}P(X_L < S)}{c_r + \frac{c_p}{2}}$$

La double intégration s'interprète comme étant la probabilité que la demande durant la période T + L soit inférieure à S. Si on suppose que la position de stock n'influe pas sur la demande (pas d'achats de précaution ou spéculatif), alors il y a indépendance en probabilité entre les demandes durant T et durant L. Alors on montre que l'optimum est défini par :

$$P(X_{T+L} > S^*) = \frac{c_p(1 - P(X_L > S^*)/2)}{c_r + \frac{c_p}{2}}$$

Il est facile d'encadrer dans le cas discret.

Exemple :

Un produit de conserve est réapprovisionné tous les 20 jours ouvrés (4 semaines, T = 20) le délai de livraison est L= 10. La demande annuelle suit une loi normale N (650,126). La demande durant T est une loi N (50,35) ; celle durant L est N (25,24.75). Le produit est vendu 298 F. avec une marge de 35 F. Le coût de possession est estimé à 52 F./an, soit 52 (20) = 4 F. sur la période T Le coût d'une rupture avec demande différée, à 10 F.

Sur une période T + L de 30 jours, la demande suit une loi normale de moyenne 650.20/260 = 75 et l'écart type 126 30/260 + 42,8

On suppose $P(X_L > S) = 0$
Dès lors $P(X_{T+L} > S) = \frac{4/2}{10 + 4/2} = 0{,}333$

Des tables statistiques B et D on tire t = 0,432
D'où $0{,}432 = (S - 75)/42{,}8 \longrightarrow S = 93$

On peut vérifier que $P(X_L > 93) = 0{,}28\ \%$

ce qui justifie l'approximation $P(X_L > S) = 0$

b) Cas des demandes perdues.

Le cas est un peu plus complexe car S n'est plus indépendant du niveau du stock R au moment de la commande. Dans le cas où L < T, les variables Qp (S) et Q_r (S) sont :

		sans rupture en fin	avec rupture en fin
Sans rupture début	Q_p =	$S - X_L - X_T/2$	$(S - X_L)/2$
$X_L < R$	Q_r =	0	$X_T + X_L - S$
Sans rupture ~~fin~~ début	Q_p =	$S - R - X_T/2$	$(S - R)/2$
$X_L > R$	Q_r =	0	$R + X_T - S$

à partir desquelles on peut établir la fonction de coût qui dépend alors de P (XL < R), P (XT > S - R) et $P(X_L = x_L)$. On peut en tirer des tables de décision donnant la quantité à commander en fonction du niveau de stock R (et de la loi de distribution).

c) Incidence de l'utilisation simultanée d'un facteur rare pour plusieurs articles.

Lorsqu'il y a plusieurs articles, et en l'absence de contrainte quelconque, on minimise la somme

L'introduction d'une contrainte portant sur l'utilisation d'une ressource rare, limitée à un niveau A peut provenir :

- d'une capacité globale de stockage (par exemple les "gondoles" d'un super marché)
- d'une limitation financière globale pour ce stockage.

A la fonction de coût $\sum_j C_j(S_j)$

s'adjoint celle de la contrainte $\sum_j a_j S_j = A$

dans laquelle a_j sont les coefficients unitaires d'emploi de la ressource par chaque article j (exemple l'encombrement dans les rayons de stockage).

Pour résoudre le système, on utilise la fonction de Lagrange :

dont les dérivations par rapport aux S_j et a conduiront à un système d'où on extrait la solution optimale.

Les expressions de C_j (S_j) varient selon le délai d'obtention et le type de stock (rotation nulle ou non).

d) Délai d'obtention nul, rotation nulle
C'est le cas d'un ensemble de produits frais

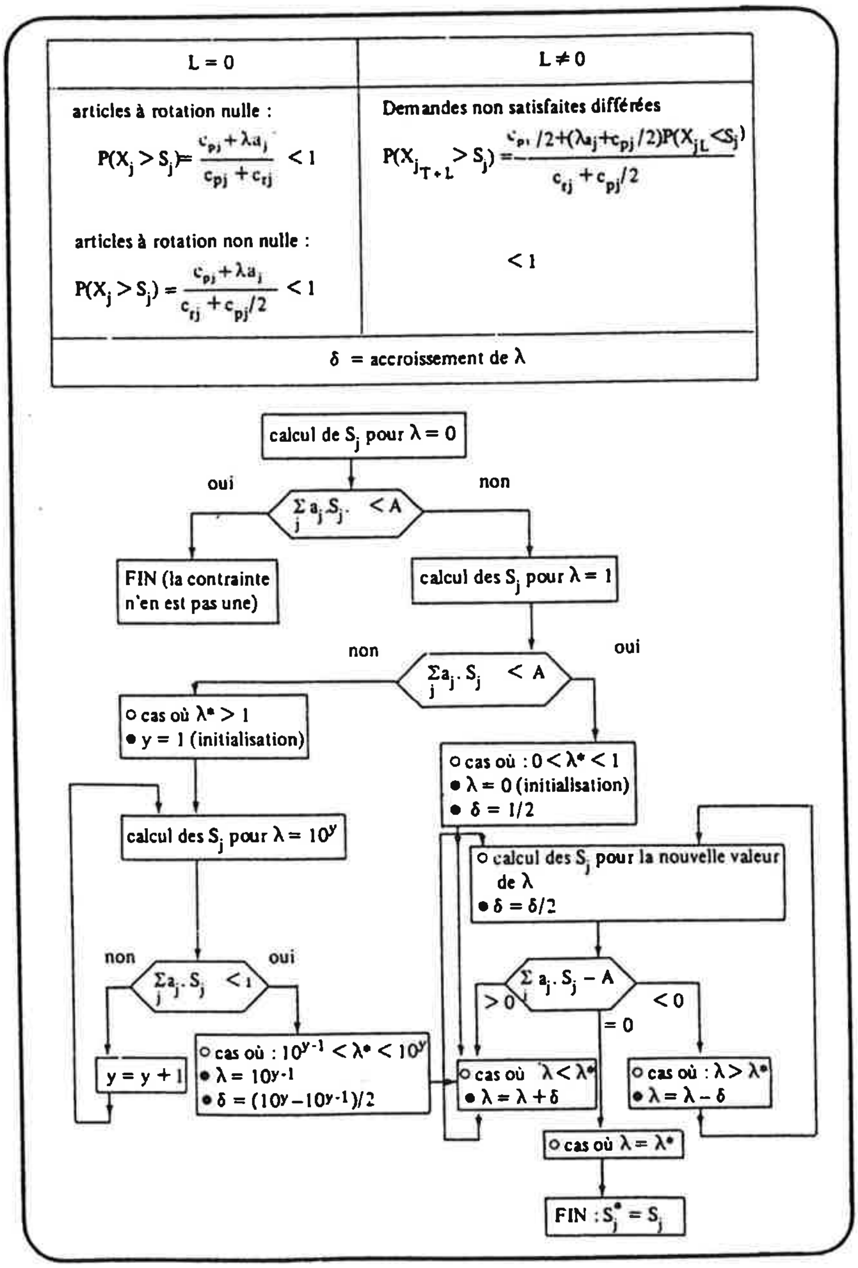
$$L = \sum_j \left[c_{pj}(S_j - m_j) + (c_{pj} + c_{rj})Q_r(S_j) \ \right] + \lambda \sum_j (a_j S_j - A)$$

Les dérivées

$$\frac{\partial L}{dSj} = 0 \qquad \text{entraînent} \qquad P(X_j > S_j) = \frac{c_{pj} + \lambda a_j}{c_{pj} + c_{rj}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad\qquad \sum_j (a_j S_j - A) = 0$$

Pour n articles, le système de n + 1 équations à n + 1 inconnues n'a pas de solution implicite. On le résoud par itérations en faisant croître progressivement selon l'algorithme suivant (valable également pour les cas suivants :



e) Délai d'obtention nul, rotation non nulle.

$$L = \sum_j [S_j - m_j / 2 + (c_{pj} + c_{rj}) Q_r(S_j) \ ] + \lambda \sum_j (a_j S_j - A)$$

conduit à

$$P(X_j > S_j) = \frac{c_{pj} + \lambda a_j}{c_{rj} + c_{pj} / 2}$$

f) Délai d'obtention non nul, demandes non satisfaites différées

La contrainte est alors un peu plus complexe :

$$\sum_j aj \int_0^{Sj} (S_j - m_{jL}) f_{jL}(X_{jL}) dX_{jL} < A$$

Si $P(XjL > Sj) \cong 0$ l'algorithme précédent est applicable.

Section 3 La gestion des stocks par point de commande.

Elle se caractérise par une quantité commandée Q constante et une périodicité de commande T variable : on commande quand le niveau de stock devient inférieur ou égal à un niveau R appelé point de commande.

Démarche radicalement différente de celle de la gestion calendaire lorsqu'on se place en univers certains, elle lui fera des emprunts dans le cas d'un univers aléatoire.

A) Quantité économique de commande en univers certain.

Quelle est la valeur optimale de Q, ce que l'on appelle la quantité économique de commande.

1 - Le modèle de base (modèle de WILSON).

a) Les hypothèses.

On suppose que :

- La demande est certaine et distribuée uniformément au cours d'une période de référence conventionnelle (l'année) avec un taux (annuel) de demande D (nombre d'unités demandées durant la période).
- Le délai de réapprovisionnement est certain, il n'y a donc pas besoin de stock de sécurité.
- On cherche à définir une quantité de commande périodique constante qui minimise le coût de gestion, somme du coût de possession et du coût de commande de réapprovisionnement.
- La livraison de q est instantanée : elle ne s'étale pas dans le temps.

b) Formulation.

Le modèle dépend alors de la seule variable de commande q

Le nombre de commande de réapprovisionnement par an est : $Q_C (q) = D/q$

La période entre deux réapprovisionnement est : $T = q/D = 1/Q_C (q)$

Le coût unitaire d'une commande étant C_C, le coût annuel des commandes est donc : $C_C Q_C(q) = C_C.D/q$

Le coût unitaire de possession étant Cp (coût d'une possession durant toute l'année) et le stock moyen étant q/2 (puisqu'il y a régularité), le coût de possession annuel est : $C_pQ_p(q) = C_p.q/2$

Dès lors, le coût total annuel est :

$$C(q) = c_pQ_p(q) + c_cQ_c(q)$$

$$C(q) = c_p \frac{q}{2} + c_c \frac{D}{q}$$

La condition de coût minimum est donc :

$$\frac{dC(q)}{dq} = \frac{c_p}{2} - \frac{c_cD}{q^2}$$

c) Quantité économique de commande (question combien)

De la condition de coût minimum on tire :

$$q^* = \sqrt{\frac{2c_cD}{c_p}}$$

formule dite de WILSON

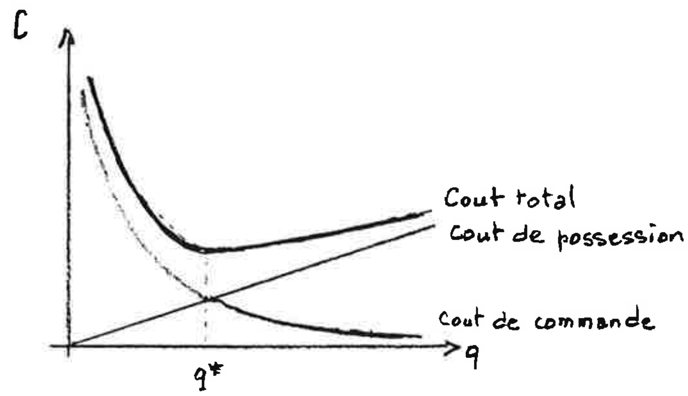
Le nombre optimal de commandes :

Le coût annuel de gestion : $C(q^*) = c_pq^* = \sqrt{Dc_cc_p}$

La période optimale entre 2 réapprovisionnements :

$$T^* = \frac{1}{Q_c^*(q)} = \sqrt{\frac{2c_c}{c_pD}}$$

Le coût est la somme de 2 couts variant en sens inverse.



Si le coût de possession est un coût d'opportunité, produit du coût unitaire d'achat $c_a$par un taux i (taux de rentabilité ou d'intérêt alors :

T* = $\frac{\sqrt{2c_c/i}}{c_aD}$ la période de réapprovisionnement est inversement proportionnelle à la acine carrée de la valeur de la consommation annuelle.

d) Sensibilité

Pour une quantité q ≠ q* posons h = q/q*. On peut aisément établir que g = C(q)/C(q*) = h/2 + 1/2h

La variation du coût est une fonction de la variation de quantité de même type que la fonction de coût. Une erreur par excès de quantité est préférable à une erreur par défaut.

De même des erreurs e_D, e_p et e_c sur D C_p et Cc entraînent une variation de coût g = $\sqrt{\frac{e_d e_c}{e_p}}$

e) Point de commande.

Dans l'hypothèse d'un délai de livraison nul, le point de commande R est nul.

Dans l'hypothèse d'un délai de livraison non nul L, L étant exprimé en unité de période de référence, l'année par exemple, le point de livraison est tel que :R = DL Ce point de commande apparait indépendant de la quantité économique de commande (ce ne sera plus vrai en univers aléatoire).

Si q > R, il n' y a qu'un seul point de commande

Si q < R, il y aura plusieurs points de commande

R2 = R-q ; R3 = R-2q ; (si R>2q) ; Rn = R-nq (si R>nq)

2 - Compléments.

a) Variation du prix d'achat.

*** Variations tarifaires.***

On suppose que le coût de possession est $C_p = i_c$

a étant le prix d'achat i un taux d'intérêt

Il est assez aisé de montrer qu'une variation relative h du prix d'achat $h = (a_1 - a_0)/a_0$ entraîne une variation relative g de la quantité $g = (q^*_1 - q^*_0)/ q^*_0 = \sqrt{(1/(1+h)} - 1 = \frac{1}{\sqrt{h+1}} - 1$

Une hausse du prix d'achat entraîne une baisse de la quantité économie de commande

Supposons qu'on envisage de commander q juste avant la hausse du prix d'achat. Le coût total durant la période q/D est $C_c + a_{0q} + (ia_{0q}/2).q/D$

Si le prix était passé à a_1, ce coût aurait été $(2DC_c ia_1) + Da_1$

on va chercher la valeur de q qui maximise l'économie de coût (différence entre les 2 coûts). La dérivation conduit à commander :

$$q^* = q^*_1 + h\,(q^*_1 + D_i)$$

avec

q^*_1 quantité qui aurait été commandée si le prix avait déjà augmenté $q^*_1 = (2DC_c/ia_1)$

Mais l'élément D/i risque d'entraîner une forte commande, et se posent les questions : pourra-t-on la stocker, n'y a-t-il pas risque d'obsolescence ?

*** Rabais selon quantités.***

Le rabais peut être :

- uniforme sur toute la commande dès qu'on passe un ou des seuils
- progressif (par tranches de quantités)

Pour chaque tranche, le coût total est avec rabais uniforme :

$$C(q) = C_c(D/q) + (iaj)q/2 + Da_j = C_c D/q + a_j\,(iq/2 + D)$$

Pour l'ensemble des tranches, diverses courbes sans intersection dont on cherche le minimum qui est soit au minimum de l'une des courbes soit à l'une des bornes.

b) Cas de l'approvisionnement interne. Soient :

T le nombre de jours ouvrés de la période de référence (année)

D la demande annuelle

O la capacité de production annuelle en cet article

On fractionne la production par séries de q unités :

La demande par jour est D/T

La production possible (offre) O/T

La production de q unités nécessite Tq/O jours

Le stock net en fin de journée avec production O/T - D/T = (O-D)/T
Le stock net en fin d'une série de production (Tq/O).(O-D)/T = q (O-D)/O
Le stock moyen annuel : (q/2) (O-D)/O
Coût total de gestion : C(q) = CcD/q + Cp(q/2)(O-D)/O
d'où : $q^* = (2DC_c/C_p(0\text{-}D)/0)^{1/2}$

c) Gestion multiarticles avec contrainte sur le stock.

**** Utilisation simultanée de la ressource rare.***

Les articles étant supposés indépendants, on minimise une fonction de coût global :

$$\sum_j C(qj) = \sum_j (c_{pj}q_j / 2 + c_{cj}D_j / q_j)$$

avec contrainte $\sum_j b_j u_j q_j = B$

dans laquelle :

b_j encombrement unitaire de l'article j
u_j un coefficient
= 1 si tous les articles arrivent simultanément
= 0,5 si les arrivages sont très répartis
B capacité de stockage

La fonction de Lagrange conduit à

$$q_j^* = \sqrt{\frac{2c_{cj}D_j}{c_{pj} + 2\alpha b_j u_j}}$$

Les quantités q_j et la demande en facteur rare $\sum_j b_j u_j q_j$ seront d'autant plus faibles que α (multiplicateur de Lagrange) sera élevè, il existe une valeur optimale α^* qui égalise demande et offre (B) du facteur rare. Le système n'a pas de solution explicite : on le résoud par approches successives sur .

Le multiplicateur de Lagrange apparait comme un coût marginal associé à une unité de la ressource B.

Si l'encombrement b_j est proportionnel au coût d'acquisition de l'article a_j, alors $\sum \frac{b_j u_j q_j}{a_j q_j} = H$ soit $u_j = h$ pour tout j et si $c_{pj} = ia_j$ alors

$$q_j^* = \frac{\sqrt{2D_j c_{cj} / a_j}}{\sqrt{(i + 2\alpha h)}}$$ et

$$\alpha = \frac{h}{2B^2}(\sum(\sqrt{2D_j c_{cj} a_j})^2 - i/2h$$

**** utilisation successive d'une même ressource rare : Cas des produits (fabricatons) saisonniers ou sucessifs.***

En reprenant la formulation de l'approvisionnement interne (l'atelier ne pouvant traiter qu'un article à la fois), une solution réalisable consiste à rechercher un nombre moyen annuel de commandes qui soit le même pour tous les articles, soit rechercher une périodicité commune T pour tous les articles. Dès lors T est la variable de commande.

Le stock moyen annuel de l'article j : $q_j /2 = D_j T/2$
Son coût de possession $c_{pj} (O_j - D_j)/O_j$

L'équation de coût total annuel conduit à :

$$T^* = \sqrt{\frac{\sum c_{cj}}{\sum D_j c_{pj}(1 - D_j / O_j)}}$$

Dans le cas de commandes groupées à l'extérieur, avec livraison périodiques de la totalité des commandes, le facteur correctif $(O_j - D_j) / O_j$ n'a pas à être pris en compte (=1).

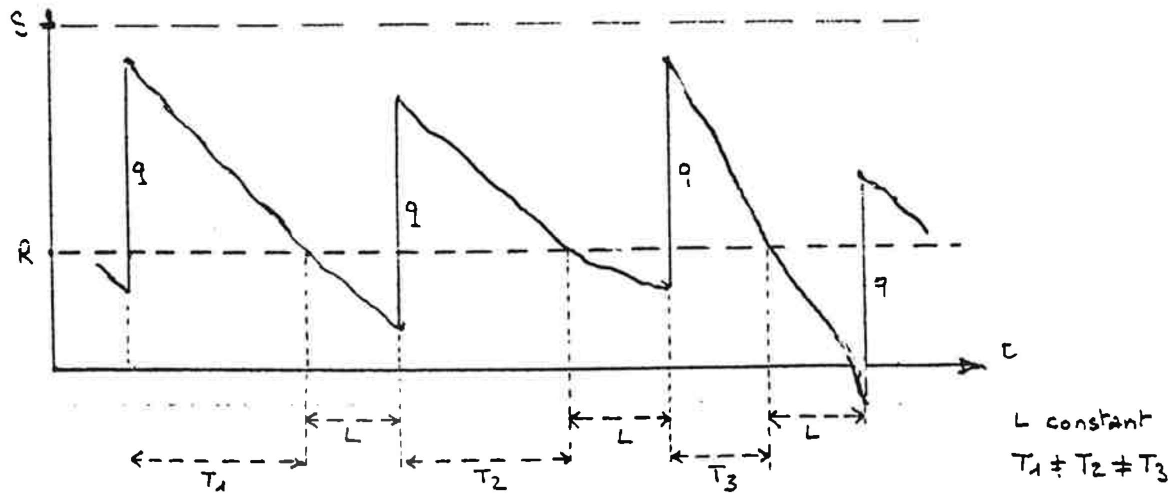
B) Quantité économique de commande en univers aléatoire.

1 - demande aléatoire, délai obtention certain.

a) solution approchée de R et q

Une solution consiste à résoudre indépendamment deux problèmes :

- On commence par chercher la quantité économique q par un arbitrage entre coût de commande et coût de possession à partir de la demande moyenne comme si l'univers était certain (par le modèle de Wilson)
- On recherche ensuite le point de commande R par un arbitrage entre le coût de rupture et le coût de possession en utilisant le modèle de gestion calendaire pendant le délai d'obtention L donné, et en retenant comme point de commande R le niveau de recomplètement S fourni par ce modèle. La différence entre ce point de commande R et la valeur DL (du modèle de Wilson) est un stock de sécurité. Ce raisonnement n'est valable que s'il n'y a pas de points de commande multiples.



b) Détermination simultanée de R et q avec ventes perdues.

Le stock moyen possédé $Q_j(R,q)$ dépend de R et de q

La quantité de ventes perdues ne dépend que de R = $Q_r(R)$

Le nombre annuel de commandes ne dépend que de q = $Q_c(q)$

Le stock moyen annuel possédé $Q_p(R,q)$ peur s'analyser comme la somme des espérances mathématiques :

- du stock $Q_{p2}(R,q)$ entre la livraison et le franchissement du point de commande R
- du stock $Q_{p1}(R,q)$ entre le franchissement du point de commande R et la prochaine livraison.

Le stock $Q_{p1}(R,q)$ s'analyse comme un problème de gestion calendaire et on montre que

$$Q_{p1}(R,q) = (2R - m + Q_r(R)) / 2$$

Durant l'intervalle commande-livraison, le stock moyen est

$Q_{p2}(R,q) = (q+R)/2$ si le résidu est nul

$Q_{p2}(R,q) = (2R-m+q)/2$ si le résidu est > 0

d'où :

$$Q_{p2}(R,q) = (2R-m+q+Qr(R))/2$$

d'où :

$$Q_p(R,q) = R-m/2+Q_r(R)/2+(1-m/2)q/2$$

Soit sachant que m = DL

$$Q_p(R,q) = q/2+(R-DL)+Q_r(R)/2$$

Le coût total :

$$C(R,q) = c_c D/q + c_p(q/2+R-DL)+(c_p/2+c_r D/q)Q_r(R)$$

Le minimun est obtenu pour :

$$q^* = \sqrt{\frac{2D(c_c+c_r Q_r(R^*)}{c_p}}$$

Sachant que (voir gestion calendaire) :

$$Qr(R^*) = \sum_{x>R^*}(x-R^*)P(X=x)$$

et

$$P(X>R^*) = \frac{c_p q^* D}{(c_p - q^*/D)/2}$$

Des expressions de q* et P (x > R*), on calcule q* et R* par approches successives.

c) Cas de ventes différées

Le stock peut devenir négatif. Donc :

$$Q_{p2}(R,q) = R-m/2+q/2$$

La solution optimale devient :

$$q^* = \sqrt{\frac{2D(c_c+(c_r+c_p L/2)Q_r(R^*)}{c_p}}$$

$$P(X>R^*) = \frac{c_p q^* D}{c_r + c_p L/2}$$

Pourcentage de demandes non satisfaites :

- sur un cycle : $\beta_L = Q_r(R)/DL$
- sur l'année : $\beta_A = (D/q)Q_r(R)/d = Q_r(R)/q = \beta_L LD/q$

La probabilité qu'on ait rupture de stock au cours de la période L est α_L (voir gestion calendaire). La probabilité qu'on ait m rupture sur n cycles (phénomène de nature binominale) est le nombre de combinaisons m,n de $(\alpha_L)^m(1-\alpha_L)^{n-m}$

Un indicateur nombre moyen de ruptures sur l'année est donné par l'espérance de la loi binomiale B (n,α_L) : $\alpha_A = \alpha_L D/q$

2 - Demande aléatoire, délai d'obtention aléatoire.

La recherche d'une politique (R,q) optimale nécessite de connaître la distribution de probabilité de ce délai d'obtention :

soit par estimation sur le passé

soit par estimation subjective

La probabilité de rupture dépend de la distribution de la demande durant ce délai aléatoire :

- Si la loi de demande annuelle est une loi de Poisson de paramètre

$$P(X = x \mid L = 1) = e^{-m} \frac{m^x}{x!}$$

et la densité de probabilité g(L) du délai d'obtention L une loi gamma

$$g(L) = \beta(\beta L)^{\alpha-1} e^{-\beta L} / \Gamma(\alpha)$$

avec

$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)$ si α entier $\alpha>0$, $\beta>0$, $L>0$

(remarque : si loi exponentielle $\alpha = 1$)

alors la loi de demande XL durant le délai L suit une loi binomiale négative :

$$P(X_L = x) = \frac{\Gamma(\alpha + x)}{x!\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{\beta}{\beta + m}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{m}{\beta + m}\right)^{x}$$

- Sinon, on peut calculer la valeur moyenne de I = E (X_L) à partir de E (X_1) de la demande sur la période de référence et E(L) du délai d'obtention $E(X_L) = E(X_L)\ E(L)$

La variance est alors : $V(X_L) = E(L).\ V(X_1) + (E(X_1)^2.\ V(L)$

La rupture moyenne Qr (R) est l'espérance des ruptures moyennes Qr1 (R calculées pour chaque délai

Le calcul du coût annuel conduit à :

$$q^* = \sqrt{\frac{2D(c_c + c_r Q_r(R^*))}{c_p}}$$

La probabilité de rupture :

$$\alpha = \frac{c_p}{c_r D / q^* + c_p / 2}$$

Chapitre 2 : L'ordonnancement.

Les problèmes d'ordonnancement concernent la détermination de l'ordre de passage de certains travaux à exécuter. Ils sont inexistants lorsque la production est en chaine ou en continue. Ils se posent :

- lorsque la production s'effectue par séries (+ importantes) en ateliers spécialisés,
- lorsque la production porte sur un nombre très faible de séries unitaires (ouvrages d'art, constructions navales).

Section 1 : Ordonnancement en ateliers spécialisés.

Il convient de définir à quel moment précis un certain nombre de tâches doivent être réalisées, une tâche correspondant à la fabrication d'un objet ou à la founiture d'une prestation de service précise. La réalisation d'une tâche nécessite l'intervention d'un ou de plusieurs centres de production (machine, groupe de machines, usine,... caisse de supermarché...). Si la tâche recquiert plusieurs centres, chacun effectue une opération.

On parle de modèle statique si les tâches arrivent simultanément, et de modèle dynamique successivement.

A) Modèles statiques.

Le problème général est de fixer l'ordonnancement optimal de n tâches durant une période dans m centres de production. Problème combinatoire extrêmement complexe. On s'en tiendra au cas simple d'un seul centre.

1 - Fixation de l'ordre par la règle du Temps Opératoire Minimum.

Soient :

T_i le temps pour la tâche i (i = 1,2...n)

A_j le moment où la tâche exécutée en j ième position est achevée :

$$A_j = \sum_{h=1}^{j} t_h$$

On choisit j tel que $t_1 \leq t_2 \leq .... < t_j < .... t_n$

Cela revient à minimiser le temps moyen d'attente ainsi que le retard moyen.

Le temps d'achèvement moyen est

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{j} t_h$$

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)t_j$$

On peut éventuellement pondérer les temps pour tenir compte de priorités par des poids u_i ($u_i > 1$)

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_j u_j A_j$$

donnant la règle : $\frac{t1}{u_1} \leq \frac{t_2}{u_2} \leq \ldots$

2 - Autres règles proposées :

* Règle de la date de livraison minimum dj, date de livraison souhaitée.
Dela conduit à la règle : $d_1 < d_2 < \ldots$..

* Règle de la marge libre minimale. Marge libre = date de livraison - temps opératoire (donc marge de manoeuvre)
$d_1 - t_1 < d_2 - t_2 < \ldots < d_j - t_j < \ldots$

B) Modèles dynamiques (ou stockastiques).

Cette approche se situe dans un univers aléatoire, les procédures d'ordonnancement se ramènent à des règles dont les conséquences sont connues en probabilité.

1 - La théorie des files d'attente.

Les arrivées des tâches (ou des "clients") dans le système productif ne sont pas simultanées, mais espacées par des intervalles connus en probabilité. Les tâches sont exécutées par un ou plusieurs postes de travail (en parallèle ou en série) avec des durées soit certaines soit connues en probabilité. Le système productif est représenté comme suit :

Arrivées λ ——> Service d ——> Sorties

avec λ arrivées par unité de temps selon une distribution de probabilité (très souvent loi de Poisson)

avec d durée de service selon une distribution de probabilité (souvent loi gamma N)

Le système peut être soit avec attente (création d'une file d'attente ou queue), soit sans attente avec rejet des arrivées trouvant le système encombré (tous les postes de service occupés : ex. un parking).

Dès lors, on peut décrire le système par un modèle analytique probabiliste aux caractéristiques suivantes :

λ le débit moyen des arrivées aléatoires par moitiè du temps
μ le débit moyen des sorties = N / d

N le nombre de postes de services ~~e-mλd~~
~~(mλd)~~

P la probabilité d'attente $\text{Log}(1 - p) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\lambda d}}{m} \cdot \sum_{q=mN}^{\infty} \frac{(m\lambda d)^q}{q!}$

T le temps moyen d'attente $T = Pd / M(1 - \psi)$

le taux moyen d'occupation des postes de service $\psi = \frac{\lambda d}{n}$

On cherche généralement la capacité N en minimisant une fonction de coût
$C = c_a(N) + c_n N$
avec c_a coût unitaire d'attente
et c_n coût unitaire d'un poste de service

2 - L'approche simulatoire.

Lorsqu'il est difficile de trouver la solution analytique d'un problème probabiliste, l'utilisation des méthodes de Monté Carlo permet de définir des règles d'action.

a) Principe de la méthode de Monté Carlo.

Soient 2 variables aléatoires R et D (Recettes, Dépenses) connues par leurs distributions de probabilité (objectives ou subjectives).

On se propose de déterminer la distribution de probabilité F et F = R - D

Pour cela on effectue un grand nombre de tirages de 2 valeurs aléatoires équiprobables entre 0 et 1. Selon ces valeurs, on retient un niveau de R et un niveau de D.

Par exemple la distribution de R étant

R :	1 000	1 500	2 000
P(R) :	0,30	0,50	0,20

Pour N(0,1), on retient :	N < 0,30	R = 1 000
	0,3 < N < 0,8	R = 1 500
	0,8 < N < 1	R = 2 000

Pour chaque tirage ayant fourni R et D, on déduit F. Sur la série des tirages, on peut en déduire la distribution de F.

b) La simulation de systèmes réels.

On cherche la solution d'un problème complexe réel, donc de règles de décision sur le modèle.

- soit en temps réel, à chaque modification du système, pour proposer la meilleure conduite
- soit une fois pour toutes, pour établir une table de décisions.

Il existe des langages informatiques spécialisés de simulation (GPSS, SYMSCRIPT, ...) permettant de prendre en compte de nombreuses contraintes de fonctionnement. Toutefois les conclusions de telles simulations n'ont pas de portée générale.

c) La simulation de systèmes fictifs.

On résoud numériquement par simulation la démarche utilisée dans les modèles statiques. On peut aussi tester diverses règles de priorité. Fréquemment de telles simulations révélent la supériorité de la règle T.O.M.

Section 2 : Ordonnancement de la série unitaire.

Un projet peut se définir comme la réalisation d'un produit unitaire complexe (ouvrage d'art, navire, ...) ou comme la mise en oeuvre des moyens diverses pour réaliser un objectif non répetitif (ex : lancement d'un produit nouveau).

L'ordonnancement procède essentiellement de la mèthode dite PERT - Programm Evaluation and Reviex Technique (qui a des variantes).

Un exemple type est celui de la construction d'un batiment d'atelier. Diverses taches doivent y être réalisées ; chaque tâche à un (ou des) "ancêtres" (tache qui précède) et un "descendant" (tache qui suit).

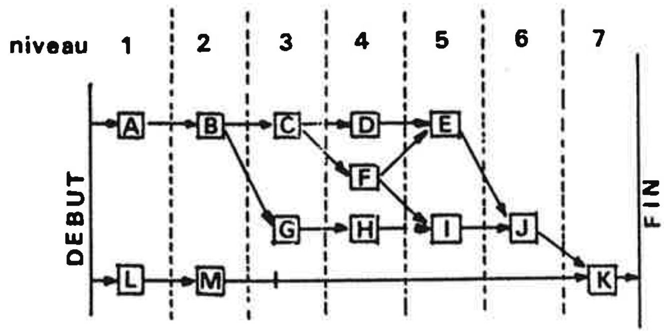
Code (i)	**Désignation de la tache i**	**Durée di**	**Ancêtre**
A	Terrassement	5	-
B	Fondation	4	A
C	Charpente verticale	2	B
D	Charpente toiture	2	C
E	Couverture	3	D,F
F	Maçonnerie	5	C
G	Gros oeuvre de la plomberie et électricité	3	B
H	Coulages dalle béton	3	G
I	Chauffage	4	H,F
J	Plâtre	10	I,E
K	Finitions ; installation des machines	5	J,M
L	Négociation achat machines + délai livraison	15	-
M	Réception machines ; essais "hors site"	3	L

1 - Le graphe potentiel tâche.

C'est une représentation sous forme de graphe de ce problème d'ordonnancement, liant les taches dans leur succession possible. Les taches sont classées par niveaux successifs comme suit (à partir de l'exemple) :

Tache	Ancêtres	NIVEAUX 1	2	3	4	5	6	7
A		A						
B	A		B					
C	B			C				
D	C				D			
E	D,F					E		
F	C				F			
G	B			G				
H	G				H			
I	H,F					I		
J	I,E						J	
K	J,M							K
L		L						
M	L		M					

Dans chaque niveau (pris successivement) on place les tâches qui n'ont plus d'ancêtre, puis on raye dans les colonnes Tâches et Ancêtres ces tâches. On passe au niveau suivant. Dans l'exemple cette procédure conduit à 7 niveaux. On en déduit le graphe "potentiel-tâche".



2 - La recherche du "chemin-critique".

On appelle chemin-critique, l'itinéraire permettant d'aller du début à la fin du projet dans le temps minimal possible, temps qui est le cumul des temps opératoires des tâches.

a) Ordonnancement au plus tôt, par le calcul des dates "au plus tôt" de début et de fin de tâches.

Pour chaque tâche, on établit un tableau du type suivant :

Tâche	Durée
Début au plus tôt	Début au plus tard
Fin au plus tôt	Fin au plus tard
Marge libre	Marge totale

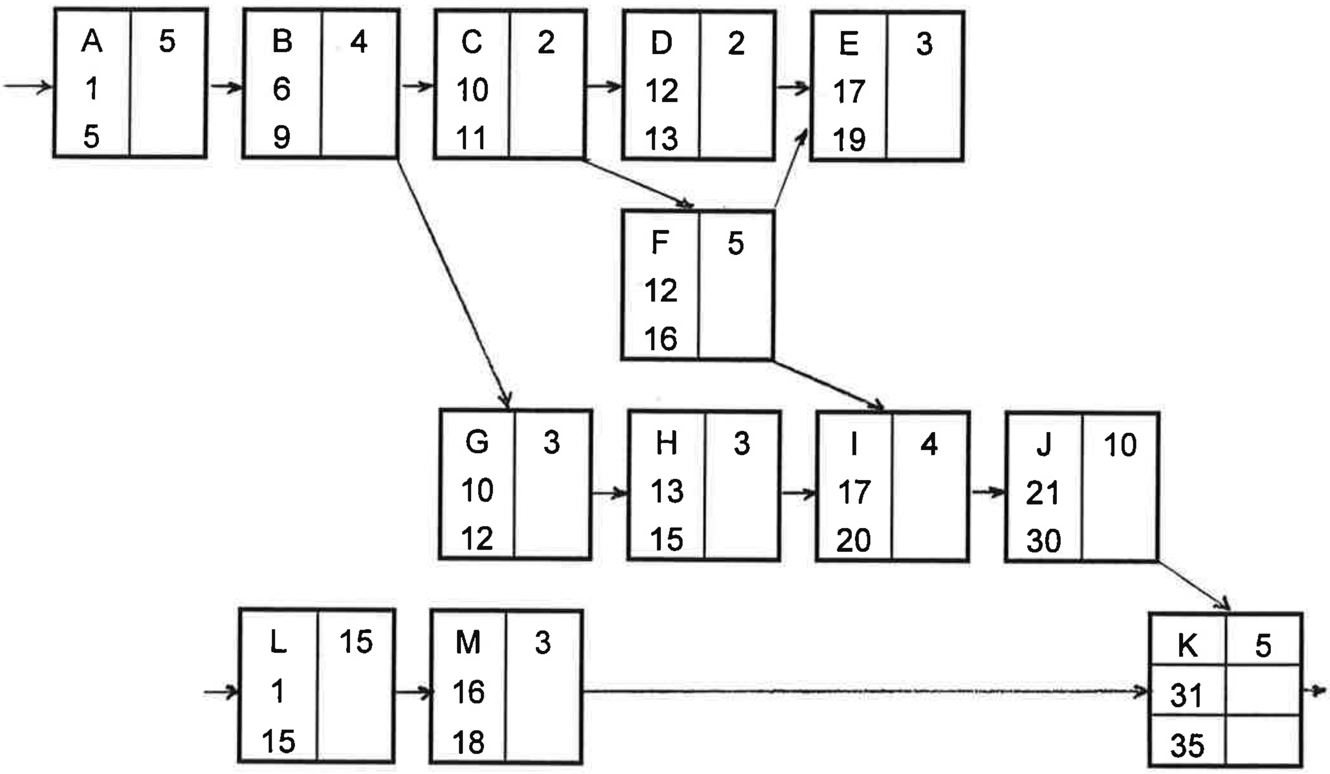
en respectant les règles suivantes :

- lorsqu'une tâche n'a qu'un seul ancêtre, la date "Début au plus tôt" est égale à la date de "Fin au plus tôt" de l'ancêtre + 1 ; la date "Fin au plus tôt" est égale à la date "Fin au plus tôt" de l'ancêtre (= Début au plus tôt + Durée - 1).

- lorsqu'une tâche a plusieurs ancêtres, on procède de même, en privilégiant l'ancêtre dont la Date de "Fin au plus tôt" est la plus tardive (pour éviter de violer les contraîntes d'antériorité).

De proche en proche (voir tableau 1 ci-dessous), on détermine ainsi la date de fin au plus tôt de la dernière tâche (ici K et 35 jours). Le temps total du projet ne saurait être inférieur à cette valeur. Tout ordonnancement aboutissant à un même total (ici 35) est optimal.

b) Ordonnancement au plus tard, par calcul des dates au plus tard
L'ordonnancement au plus tôt peut poser des problèmes dans :

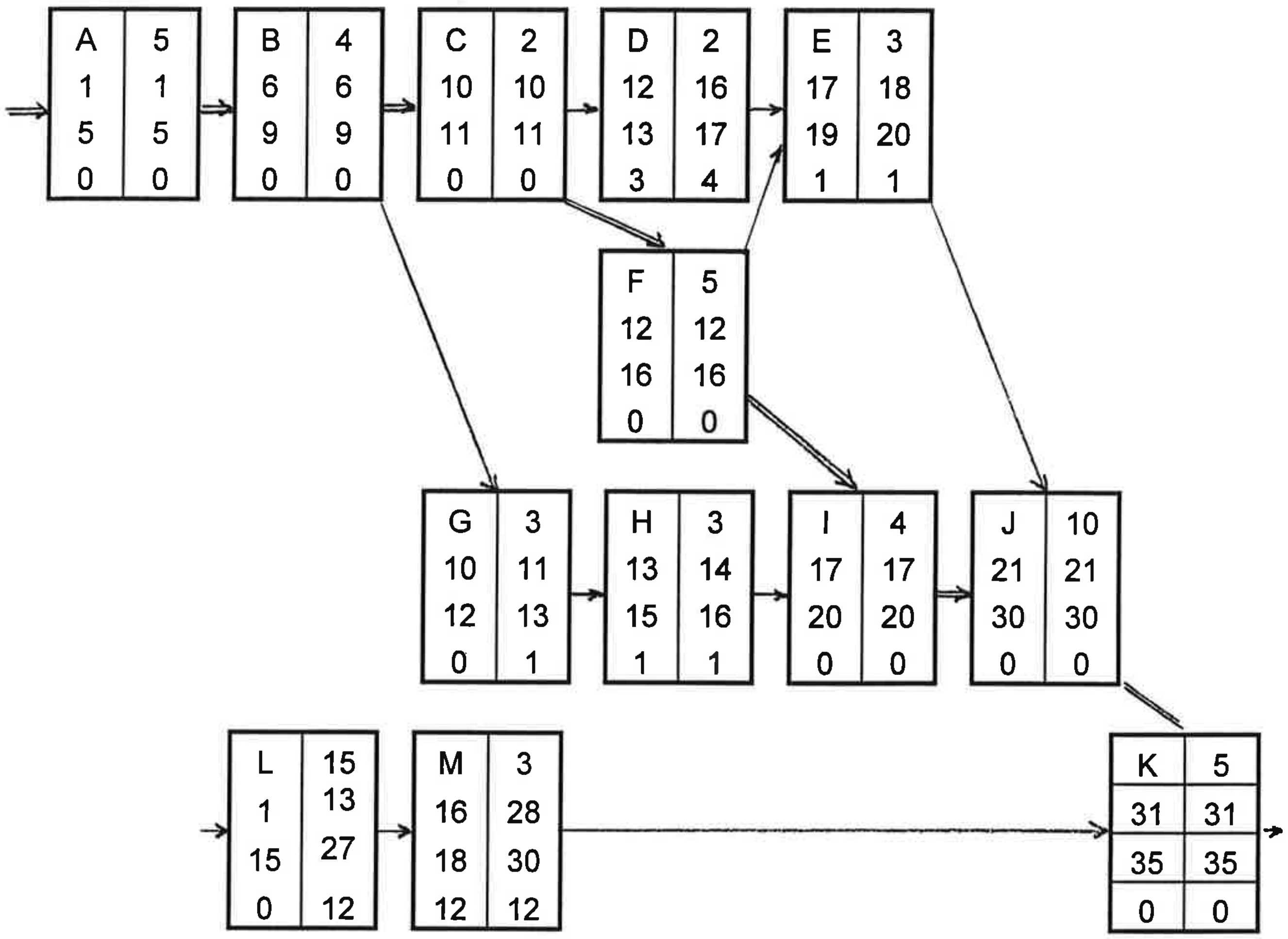


Ordonnancement au plus tôt (tableau 1)

L'utilisation des moyens, qui peuvent s'atténuer avec un autre ordonnancement optimal. On va apprécier la marge de manoeuvre dont on dispose en déterminant un ordonnancement au plus tard.

Pour cela, on remonte à partir de la dernière tâche et de sa date optimale d'achèvement, en calculant les dates au plus tard à l'aide des règles suivantes :

- lorsque la tâche n'a qu'un seul "descendant", sa date de fin au plus tard est égale à la date de fin au plus tard du descendant même la durée du descendant.
- lorsque la tâche a plusieurs descendants, on privilégie le descendant



Ordonnancement au plus tard et marge libre (tableau 2)

qui donne la date la plus précoce de fin au plus tard.

- les dates de début au plus tard se déduisent des dates de fin au plus tard moins la durée - 1.

(Application voir tableau 2)

Les tâches qui ont la même date de fin au plus tard et au plus tôt sont des "taches critiques sans marge de manoeuvre. Le "chemin" du graphe qui ne passe que par des tâches-critiques est dit "chemin-critique". Il peut y en avoir plusieurs. (Sur le tableau il est repéré par des flèches doubles).

Si l'ordonnancement des tâches-critiques se trouve imposé, qu'en est-il des autres ? La différence entre la date de fin au plus tard et celle de fin au plus tôt est la "marge totale", et mesure le degré de liberté pour programmer cette tâche. La "marge libre" est la différence entre la date de début au plus tôt du descendant et sa date de fin au plus tard : tout retard n'excédant pas cette marge libre sera sans conséquence (sur le temps minimal total).

3 - La programmation finale du projet.

On programme au plus tôt les tâches non critiques pour éviter que des aléas n'entraînent des retards, et pour pouvoir tenir compte d'éventuelles contraintes disjonctives (impossibilité de réaliser simultanément deux tâches, par exemple parce qu'elles font appel à une même ressource).

Toutefois, la programmation au plus tôt peut avoir un inconvénient économique lorsqu'elle utilise une ressource dont le coût dépend de la durée de présence : la préoccupation d'économie, peut conduire à une programmation au plus tard. Il y a un compromis à trouver entre prudence et économie.

Les marges libres sont utilisables discrétionnairement (la partie non libre d'une marge totale ne l'est pas). On programme les tâches par ordre croissant de niveau (et on recalcule si nécessaire les marges totales des niveaux ultérieurs).

4 - La méthode PERT-étapes.

Il s'agit d'une variante (utilisée dans les logiciels PERT). Un sommet du graphe représente le début possible d'exécution d'une tâche, les arcs sont les tâches. Cette variante fournit les mêmes résultats. Elle est toutefois plus délicate à lire, et même à mettre en oeuvre (surtout manuellement !).

Chapitre 3 - La planification de la production.

La planification de la production répond à un souci de régulation à moyen terme. Lieu entre le court terme et le long terme. Il n'existe pas de modèle général de planification de la production, mais diverses approches plus ou moins sophistiquées.

Section 1 : La problèmatique de la planification de la production.

Elle vise à optimiser, sur un moyen terme (quelques semaines, quelques mois), l'utilisation des facteurs productifs disponibles pour la production d'un ou de plusieurs produites, pour aboutir à une programmation prévisionnelle.

A) Un système de traitement d'informations.

La planification de la production part d'un ensemble d'informations disponibles et conduit à un plan de production.

1 - Les informations utilisées sont :

a) Des données physiques du système productif :
- stocks disponibles, livraisons attendues, demandes non satisfaites (ou retard) tant pour les matières que pour les produits
- demandes prévisionnelles
- volume de main d'oeuvre disponible
- capacités de production

b) Des données comptables :
- coûts d'approvisionnement, de production
- coûts de modification du système (heures supplémentaires)
- coûts commerciaux (coûts de rupture...)

2 - Le contenu du plan de production.

Le plan définit pour chaque période :
- les quantités à produire de chaque bien, et les approvisionnements en matières, éventuellement pour chaque filière, chaque centre de production,
- les niveaux des stocks nécessaires,
- l'utilisation des facteurs productifs,
- les plans de sous traitance.

Si le plan porte sur plusieurs périodes, le problème est dit dynamique : il est plus complexe, car des arbitrages sont à effectuer entre les périodes pour ajuster besoins et moyens.

B) Méthodologies.

Il existe diverses approches :

1 - Des méthodes relativement simples.

Elles reposent sur des modèles mathématiques élémentaires, mais ont l'avantage d'être exploitables simultanément pour un grand nombre de biens (ou articles ou références). Deux grands types de techniques opposées coexistent, (reposant sur des philosophies diamétralement opposées) :

- les techniques de "production à flux poussés" dans lesquelles on anticipe les demandes des biens (produits finis, produits intermédiaires ou composants), et on en déduit les productions périodiques. Cela conduit à la méthode dite MRP (ou PBC, (section 2), et aux techniques de planification hiérarchisée (section 3).

- les techniques de "production à flux tirés" (ou "flux tendus"), dans lesquelles une production est déclanchée par la demande de ce bien (par un centre de production demandeur de la référence) ; il s'agit donc d'un "appel par l'aval". C'est la méthode du J.A.T. (juste à temps) et de son dérivé, le système KANBAN (section 4).

2 - Des méthodes dites de recherche opérationnelles.

Elles sont fondées sur des modèles mathématiques plus élaborés, qui ont l'avantage d'opérer à des arbitrages économiques rigoureux (par l'optimisation de fonction), mais l'inconvénient d'être d'une mise en oeuvre plus complexe et pas toujours applicables simultanément à un grand nombre de biens. Ce sont les techniques :

- de progammation dynamique (section 5)
- de programmation linéaire (section 6)
- de programmation stochastique (quoique celle-ci cherchant à réalier l'ajustement entre les capacités de production et les flux aléatoires sort un peu du champ de la planification à moyen terme à capacités données).

Section 2 : La planification des besoins en composants (P.B.C. ou M.R.P.).

(M.R.P. : matérial requierement planing)

La M.R.P. est une démarche simulatoire, qui utilise une résolution heuristique de problèmes que l'on anticipe au lieu de subir. Une résolution heuristique ne garantit pas une solution optimale, mais une solution praticable à performances assez bonnes. Le M.R.P. consiste à planifier la fabrication des divers composants (pouvant être nombreux) de produits finals.

A) Fondements de la méthode.

1 - L'inadéquation des politiques classiques de gestion des stocks au cas des stocks de fabrication.

En effet,, ces politiques gèrent comme si les demandes étaient indépendantes, ce qui n'est pas le cas. En outre, elles suposent que ces demandes soient relativement constantes dans le temps, hypothèes qui n'est pas acceptable dans le cas de stock de fabrication, du fait de lancement par lots.

2 - Des conditions de mise en oeuvre.

La M.R.P. s'inscrit dans un plan directeur de production (PDP) qui fixe la production des produits finals en fonction de leur demande prévisionnelle (éventuellement connue avec certitude dans le cas d'une production sur commandes).

On peut schématiser la place de la PBC dans l'organigramme suivant :

Plan à long terme de l'entreprise

↓

→ Plan Directeur de Production

↓

Planification des Besoins en Composantes

↓

Planification des capacités

↓

non — Réalisable ? — oui

↓

Progarmmation
de la production

La M.R.P. suppose en outre l'existence d'une nomenclature complète des composantes utilisés, d'un système d'informations fiable sur l'état des stocks, sur les délais d'obtention, sur les capacités (moin d'oeuvre et équipements), sur des règles de priorité à utiliser en cas de rupture.

B) La démarche de la M.R.P.

La M.R.P. s'appuie sur une logique élémentaire de calcul, utilisée en cascade pour les différents niveaux de besoins en composantes, pour s'ajuster au Plan Directeur de Production, dans un premier temps en faisant abstraction des problèmes de capacité, puis en procédant à des ajustements "charge-capacité".

1 - La logique élémentaire.

Pour un composant, on détermine ses besoins nets par période, puis la manière de les couvrir.

a) Les besoins nets par période d'un composant.

On part d'un échéancier de besoins bruts, c'est-à-dire des demandes en ce composant, émanant des composants de niveau inférieur. Exemple : une boite de vitesse (niveau inférieur) nécessite un jeu d'engrenages (composant dont on cherche à déterminer le besoin net).

On appellera D_t ces besoins bruts périodiques.

Exemple numérique pour un composant C_1 ::

Périodes	t	1	2	3	4	5	6	7
Besoins Bruts	D_t	30	0	25	40	0	20	15

Ces besoins bruts ne correspondent pas à ce qu'il faut lancer en production : il faut tenir compte du stock initial disponible et des livraisons attendues (provenant de commandes antérieures. On appellera :

L_t la livraison attendue en début de période t

S_t la position de stock en fin de période t, qui peut s'écrire :

$$S_t = S_{t-1} + L_t - D_t \qquad (1)$$

Attention : St est une "position" de stock, pouvant être < o montrant alors la rupture. Seul So est un stock physique non négatif (dans l'exemple on supposera S_o = 10=

Les besoins net sont alors :

$$B_t = \text{Max } \; O, D_t - L_t - \text{Max } (o, S_{t-1}) \qquad (2)$$

En remarquant que Max (o, St-1) représente le stock physique (nul ou positif), le besoin net apparait comme la différence entre le besoin brut et les livraisons attendues et stock physique. Si l'expression est négative, il n'y a pas de besoin net (qui est donc mis à zéro).

Application à l'exemple numérique. :

Périodes	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Besoins bruts D_t		30	0	25	40	0	20	15
Livraisons attentues L_t		20	0	30	0	0	0	0
Positions de stock S_t	10	0	0	5	-35	-35	-55	-70
Besoins nets B_t	0	0	0	0	35	0	20	15

Les lignes de D_t et L_t sont des données. Les lignes des So et Bt sont calculées par les formules récurrentes (1) et (2)

b) La couverture des besoins nets.

La phylosophie de la M.R..P. implique que les besoins nets soient connus d'avance pour éviter que se produise des ruptures de stock. Les besoins nets d'une période doivent donc être couverts soit par une livraison en début de la même période, soit par une livraison antérieure, calculée pour couvrir les besoins de plusieurs périodes successives. La détermination de la quantité à livrer (ou livraison programmée) devrait normalement reposer sur un arbitrage entre coûts de lancement et coûts de possession. En réalité, les logiciels disponibles proposent diverses règles de calcul de cette quantité :

- la quantité économique de Wilson, peu recommandée dès que la demande (besoins bruts) est irrégulière ;
- une quantité fixe de commande, déterminée exogènement mais également critic able si la demande est irrégulière,
- la quantité couvrant les besoins nets d'une période ainsi que ceux d'un nombre fixe de périodes à venir. Ce nombre de périodes peut être celui correspondant à l'intervalle séparant deux commandes successives dans le modèle de Wilson.
- la quantité dite du "lot pour lot", soit le besoin net de la période. Cette technique est très valable si le coût de lancement est faible par rapport au coût de possession.

- la quantité découlant de l'algorithme de Wagner et Whitin (solution optimale pour une référence unique, indépendante des autres. Elle sera vue à propos de la programmation dynamique)
- la quantité découlant de l'heuristique de Silver et Meal (sera également vue plus loin).

Ces divers choix possibles soulignent le caractère quelque peu empirique de la M.R.P. La taille des lots étant retenue, il y a lieu de tenir compte du délai d'obtention (délai de fabrication, délai de livraison) conduisant à décaler la commande de fabrication (ou de livraison).

Cas de l'exemple numérique (avec un délai d'une période et des lots > = 30) :

Périodes	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Besoins nets	0	0	0	35	0	20	15
Livraisons programmées	0	0	30	35	0	35	0
Lancement de fabrication	0	0	35	0	35	0	0

2 -Utilisation en "cascade".

La démarche est appliquée successivement pour toutes les références de niveau 0 (produits finals), puis de niveau 1, puis de niveau 2, jusqu'aux approvisionnements externes, les lancements d'un niveau générant des besoins bruts pour le niveau suivant. La méthode est illustrée dans les tableaux de la page suivante.

3 - Charges découlant du programme de production.

Les logiciels déterminent les charges de travail et les comparentaux capacités de productions. Ils peuvent faire apparaître soit des excédents de capacité (de main d'oeuvre ou d'équipements), soit des déficits. En cas de déficit à un certain niveau, il est inutilie de poursuivre l'exploration des nomenclatures de niveau ultérieur : il convient de modifier le programme de fabrication du niveau où il y a un déficit.

Certains logiciels plus avancés procèdent à des ajustements en exploitant l'excédent de charge d'une période pour couvrir le déficit d'une période ultérieure (ou produit donc à l'avance et on stockera), tout en cherchant à constituer ce stock le plus tardivement possible.

Section 3 : La planification hiérarchisée.

La M.R.P..est difficilement applicable lorsque les références sont très nombreuses. Une simplification est proposée par la Programmation Hiérarchisée (PH) consistant à travailler sur des regroupements homogènes de références. Elle repose sur une structuration des produits finals. On se contentera ici d'un aperçu très sommaire sur les principes.

La structure arborescente est à 3 niveaux :
- la référence : c'est un produit final
- la famille rassemble les références partageant un même outillage

- le type rassemble les familles ayant la même évolution tendanciée ou saisonnière.

Le Plan Directeur de Production est établi sur les types (et sur plusieurs périodes)

Il est ensuite désagrégé par famille. Toutes les références d'une famille sont mises en fabrication en même temps. Il y a lieu d'approvisionner une référence j (et donc toutes les références de la famille) quand la différence entre le stock de début de période R_j et le stock de sécurité Sj est supérieur à la demande prévisionnelle D_j. Les quantités économiques de commande sont calculées par la technique des commandes groupées. On procède à des ajustements si la production totale calculée ne correspond pas au Plan Directeur.

La production programmée d'une famille est ensuite désagrégée par références.

Cette technique nécessite l'utilisation d'une unité commune pour les calculs : on utilise l'heure de travail.

Exemple d'utilisation en cascade de la M.R.P.

Lancements programmés

niveau 0

Période	16	17	18	19	20	21	22	23
T 27	7	11	6	15	8	11	12	7
T 28	10	9	4	10	7	14	8	8
T 29	4	8	3	5	12	2	8	7

Niveau 1

E-1001 (L = 1)

Période	15	16	17	18	19	20	21	22	23
DEMANDES :									
T 27	-	7	11	6	15	8	11	12	7
T 28	-	10	9	4	10	7	14	8	8
Total	-	17	20	10	25	15	25	20	15
Livraisons attendues	-	0	30	0	0	0	0	0	0
Position de stock	17	0	10	0	-25	-40	-65	-85	-100
Besoins nets	-	0	0	0	25	15	25	20	15
Livraisons programmées	-	0	0	0	25	40	0	20	15
Lancement	-	30	0	25	40	0	20	15	0

E-1104 (L = 2)

Période	15	16	17	18	19	20	21	22	23
DEMANDES : (T 29)	-	4	8	3	5	12	2	8	7
Livraisons attendues	-	0	11	0	0	0	0	0	0
Position de stock	4	0	3	0	-5	-17	-19	-27	-34
Besoins nets	-	0	0	0	5	12	2	8	7
Livraisons programmées	-	0	0	0	17	0	10	0	7
Lancement	-	0	17	0	10	0	7	0	0

Niveau 2

E-2010 (L = 1)

Période	15	16	17	18	19	20	21	22
DEMANDES (E-1001)	-	30	0	25	40	0	20	15
Livraisons attendues	-	20	0	25	0	0	0	0
Position de stock	10	0	0	0	-40	-40	-60	-75
Besoins nets	-	0	0	0	40	0	20	15
Livraisons programmées	-	0	0	0	40	0	35	0
Lancement	-	0	25	40	0	35	0	0

E-2040 (L = 2)

Période	15	16	17	18	19	20	21
DEMANDES (E-1104)	-	0	17	0	10	0	7
Livraisons attendues	-	0	17	0	0	0	0
Position de stock	0	0	0	0	-10	-10	-17
Besoins nets	-	0	0	0	10	0	7
Livraisons programmées	-	0	0	0	17	0	0
Lancement	-	0	17	0	0	0	0

Niveau 3

E-3047 (L = 1)

Période	15	16	17	18	19	20
DEMANDES :						
E-2010	-	0	25	40	0	35
E-2040	-	0	34	0	0	0
Total	-	0	59	40	0	35
Livraisons attendues	-	0	0	0	0	0
Position de stock	0	0	- 59	- 99	- 99	- 134
Besoins nets	-	0	42	40	0	35
Livraisons programmées	-	0	99	0	0	35
Lancement	-	99	0	0	35	0

Section 4 : La programmation JAT (Juste à Temps).

Dans cette méthode de "production à flux tendus", la production d'un composant est déclanchée par la demande de la référence (demande finale ou intermédiaire). Elle s'applique tout particulièrement quand on a affaire à une production de masse visant à satisfaire des demandes relativement stables, ou à des produits de courte durée de vie (cas de l'agro-alimentaire).

L'idée de base est d'éliminer toutes les sources de gaspillage dans la production en fournissant le bon composant au bon endroit et au bon moment. Tout ce qui ne contribue pas à la valeur d'un produit est un gaspillage. En particulier un stock : il faut donc tendre vers le "moindre stock" (si ce n'est le "stock zéro"). Le JAT vise aussi à la bonne utilisation des ressources humaines : toute sous-utilisation d'un potentiel de travailleurs est un gaspillage. L'excédent en un endroit doit pouvoir être utilisé ailleurs. Ce qui nécessite polyvalence et bonnes qualifications des travailleurs.

Mais l'application du JAT est établie sur un horizon plus court que celui de la MRP. La production mensuelle est divisée par le nombre de jours ouvrables et il convient de ne pas s'écarter de cette production journalière. L'excédent éventuel de main d'oeuvre sera utilisé à d'autres tâches (pour lesquelles apparait un déficit), mais en aucun cas à une production pour stock.

Une application : le système KANBAN

C'est un système de gestion décentralisé et manuel. KANBAN en japonais signifie étiquette. A chaque référence est associé un nombre fixe d'étiquettes (comportant le numéro de référence et une quantité que devra contenir un conteneur). Toute l'étiquette se trouve :

- soit accrochée à un conteneur plein
- soit accrochée au tableau du centre de production (auquel cas elle correspond à un ordre implicite de fabrication)
- soit très provisoirement en transit.

Aucune production n'est lancée tant qu'il n'y a pas d'étiquette au tableau du centre de production.

Les systèmes à simple ou à double étiquettes sont représentés sur les schémas de la page suivante.

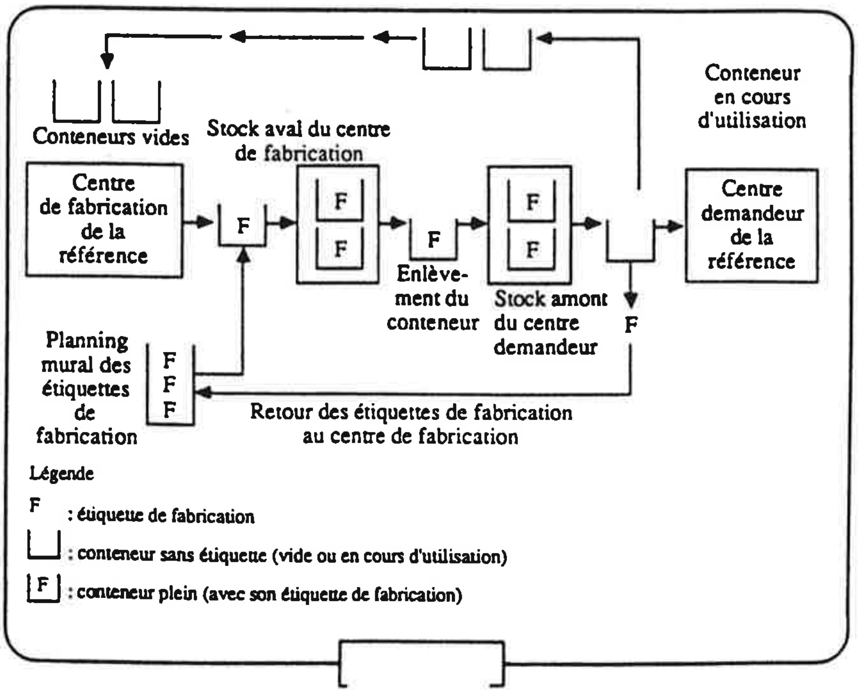
Le nombre d'étiquettes N dépend :

- de la demande journalière D
- du nombre d'unités dans un conteneur plein K
- du temps de cycle T comportant le temps de fabrication d'un conteneur, le temps d'attente au stock aval de production, le temps de transport, le temps d'attente au stock amont de distribution, le temps de retour de l'étiquette (elle est décrochée du conteneur dès qu'on entame celui-ci), un petit délai de sécurité.

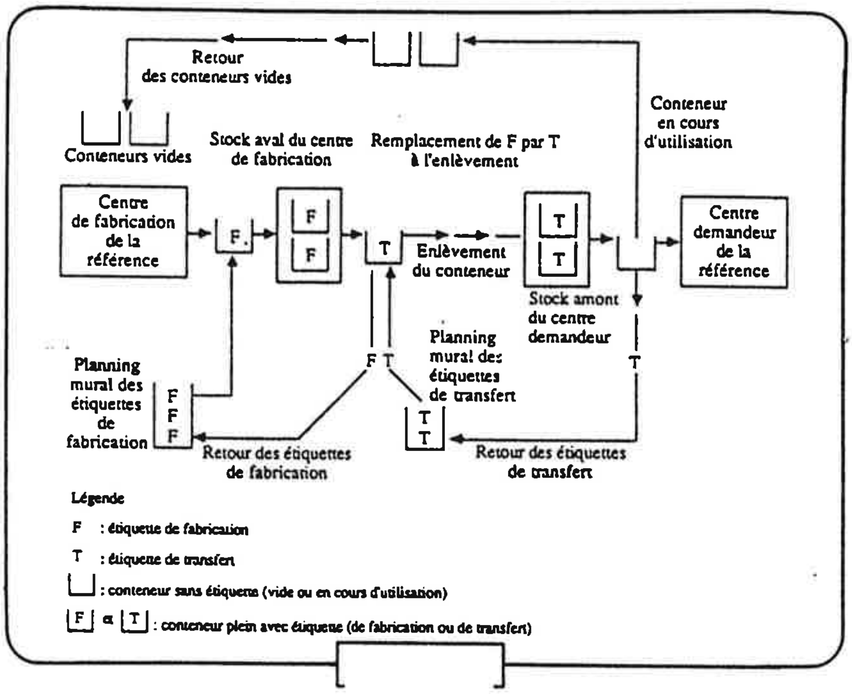
Dès lors : $N = DT / K$

Le Système KANBAN

à simple étiquette



à double étiquette



Section 5 : La programmation dynamique.

C'est une technique de résolution de problèmes combinatoires relatif à la définition d'une séquence optimale de décisions successives. Ici cette séquence de décisions est relative à un calendrier de production ou d'approvissionnement qui, combiné avec un échéancier de demandes, fournit une évolution du stock.

La méthode repose sur le "principe d'optimalité". Bellman, son auteur, l'énonce comme suit : "une politique est optimale, si à une période donnée, quelles que soient les décisions précédentes, les décisions qui restent à prendre constituent une politique optimale au regard du résultat des décisions précédentes. Autrement dit une politique optimale est nécessairement composées de sous politiques optimales".

A) Présentation de la méthode à partir d'un problème de transport.

D'une ville point de départ, à une ville point d'arrivée, de nombreux itinéraires sont possibles, passant par diverses villes étapes intermédiaires. Quel est le meilleur itinéraire, le moins coûteux, sachant qu'on connait les coûts de transport entre tout couple de villes i et j ?

Le graphe de la page suivante illustre un tel problème. Pour répondre à la question, il suffirait de déceler chaque itinéraire possible (par une simple analyse combinatoire) et son coût total, et de retenir parmi ceux-ci le moins coûteux. Dans l'exemple simplifié, on peut ainsi déceler 14 itinéraires. Cette procédure devient longue et délicate (risque d'erreurs) dès que le nombre de combinaisons devient grand.

La programmation dynamique est une demande récurrente qui évite d'expliciter tous les itinéraires possibles. Cette demarche consiste à raisonner à partir du point d'arrivéé en remontant vers le point de départ, et en calculant pour chaque ville i d'une étape n le coût le plus faible possible de transport entre cette ville i et le point d'arrivée. On appelera :

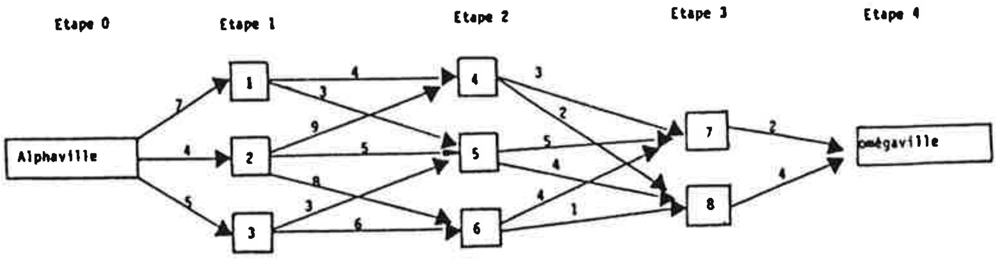
$f_n(i)$ le coût minimun pour se rendre de la ville i de l'étape n jusqu'au point d'arrivée.

Or de cette ville i de l'étape n, on peut se rendre à l'une des villes (limitées en nombre) de l'étape n+1. Soit j l'une des villes de l'étape n+1. Dès lors, le coût de la ville i de l'étape n jusqu'au point d'arrivée en passant par la ville j de l'étape n+1 est la somme du coût c_{ij} de la ville i jusqu'à la ville j et du coût minimum $f_{n+1}(j)$ de la ville j jusqu'à l'arrivée $f_{n+1}(j)$ étant connu puisque la démarche récurrent part du point d'arrivée et remonte d'étape à étape vers la ville j. Dès lors parmi les coûts associés aux diverses villes j de l'étape n+1 (depuis la ville i de l'étape n), il suffit de choisir le moindre coût pour connaître le coût minimun de la ville i jusqu'à l'arrivée. Donc : $f_n(i) = \text{Min}_j[c_{ij} + f_{n+1}(j)]$

A ce coût minimun est associé une ville j de l'étape n+1 par où il conviendra de passer. On notera Vn (i) cette ville j de l'étape n+1 donnant le coût minimun depuis la ville i jusqu'à l'arrivée.

On résonnera ainsi pour chaque étape N-1, N-2, ..., avec N nombre d'étapes (étape 0 = point de départ). Pour mettre en oeuvre ce processus de raisonnement, on établira donc N tableaux (un par étape, en partant du point d'arrivée) comme suit :

Exemple illustratif d'un problème de transport.



Etape 3

		Coût associé à la décision de se rendre dans la ville j=	Décision optimale	
		ω	f_3 (i)	g_3 (i)
partir de la ville i=	$\boxed{7}$	2	2	$\boxed{\omega}$
	8	4	4	ω

Etape 2

		Coût associé à la décision de se rendre dans la ville j=		Décision optimale	
		7	8	f_2 (i)	g_2 (i)
partir de la ville i=	4	3 + 2	2 + 4	5	7
	$\boxed{5}$	5 + 2	4 + 4	7	$\boxed{7}$
	6	4 + 2	1 + 4	5	8

Etape 1

		Coût associé à la décision de se rendre dans la ville j=			Décision optimale	
		4	5	6	f_1 (i)	g_1 (i)
Partir de la ville i=	1	4+ 5	3+ 7		9	4
	2	9+ 5	5+ 7	8+ 5	12	5
	$\boxed{3}$		3+ 7	6+ 5	10	$\boxed{5}$

Etape 0= point de départ

		Coût associé à la décision de se rendre dans la ville j=			Décision optimale	
		1	2	3	$f_0(\alpha)$	$g_0(\alpha)$
partir de la ville i=	α	7+ 9	4+ 12	5+ 10	15	$\boxed{3}$

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">DÉCISIONS POSSIBLES : se rendre à l'étape n+ 1 suivante dans la ville :</td><td colspan="2">Décision optimale</td></tr>
<tr><td>....</td><td>j</td><td>....</td><td>coût minimal</td><td>aller à :</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ETAT du système à l'étape n : être dans la ville</td><td>....</td><td>....</td><td>....</td><td>....</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>i</td><td>....</td><td>coût minimal pour aller de i à Omégaville en passant par j : $c_{ij} + f_{n+1}$ (j)</td><td>....</td><td>f_n (i)</td><td>V_n (i)</td></tr>
<tr><td>....</td><td>....</td><td>....</td><td>....</td><td></td><td></td></tr>
</table>

On trouvera ces tableaux sous le graphe de l'exemple d'illustration. Le premier tableau (pour n = N) ne comporte qu'une seule colonne j (la ville d'arrivée) ; le dernier tableau (n = 0) qu'une seule ligne (la ville point de départ). Il ne reste plus, dès lors, qu'a déterminer l'itinéraire le moins coûteux sur les colonnes V_n(i) du dernier tableau vers le premier.

B) Application de la programmation dynamique à la gestion de la production et de stocks.

1 - Formulation générale du problème.

a) Variables et paramètres utilisés.

Soient :

t : indice de la période (la période joue ici le même rôle que l'étape dans le problème de transports)

T : l'horizon de planification = nombre total de périodes prises en compte.

Q_t : quantité produite en période t, disponible en fin de période. Qt est la variable de commande de fabrication.

S_t : stock physique du produit au début de la période t. Cette variable d'état, qui peut prendre diverses valeurs correspond à la ville i possible d'une étape n du problème de transport.

D_t : la demande en produit au cours de la période t. C'est un paramètre supposé connu.

Sans dégradation, on peut écrire l'équation de passage d'état :

$$S_{t+1} = S_t + Q_t - D_t$$

parfois encore appelée équation de conservation. Cette équation n'a pas d'équivalent dans le problème de transport. On supposera en outre que le stock résiduel en fin d'horizon est nul : $S_{T+1} = 0$ (puisqu'on ne fait plus de projet au delà de T, il n'y a pas lieu de garder un stock).

Les variables spécifiques de la programmation dynamique seront :

$f_t(S_t)$: coût minimal pour l'ensemble des périodes allant de t à T lorsque le stock au début de la période t est S_t. Cette fonction de coût est l'équivalent de la fonction fn(i) du problème de transport.

$g_t(S_t)$:production (ou approvisionnement) optimal livré en fin de période t, lorsque le stock de début est S_t. C'est la valeur de Q_t permettant d'obtenir le coût minimal $f_t(S_t)$, c'est l'équivalent de $V_n(i)$ du problème de transport.

$c_t(q_t,S_t)$: coût de production (ou d'approvisionnement) de Qt unités durant la période t et de stockage durant cette période t. La décision de produire Q_t même l'état S_t de stock en début à un état $S_{t+1} = S_t+Q_t-D_t$ en début de période suivante. Le coût associé à ce passage est l'équivalent du coût c_{ij} dans le problème de transport.

b) Démarche de raisonnement.

La recherche de la production optimale q^*_t de la période t sachant un stock de début S_t, est associée au coût minimal de t à T, défini par :

$f_t(St) = \text{Minimum}_{/Q_t} [c_t (Q_t, S_t) + f_{t+1}(S_{t+1})]$

avec $S_{t+1} = S_t + Q_t - D_t$

Mais quelles sont les valeurs possibles de S_t et Q_t ? Deux cas de figure sont à distinguer selon que des contraintes de production et de stockage pèsent ou non.

1 - Sans contrainte de capacité de production et de stockage.

Le stock initial S_t peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et la somme des demandes entre t et T. En effet, le stock initial S_t peut à la limite être suffisant pour faire face aux demandes jusqu'à l'horizon T, sachant que le stock résiduel à l'horizon T doit être nul.

La quantité produite q_t en période t doit être suffisante pour qu'il n'y ait pas de rupture de stock en fin de période t, donc $o < Q_t < D_t - S_t$. En outre la quantité produite doit conduire à un stock nul au terme T.

D'où

S_t peut varier de 0 à $\sum_{i=t}^{T} D_i$

q_t peut varier de $\text{Max}[0,D_t-S_t]$ à $\sum_{i=t}^{T} D_t - S_t$

2 - Avec contraintes.

de capacité de production Q_{Mt} en période t

de capacité de stockage S_{Mt} enpériode t

Le stock initial S_t minimal est donc $D_t - Q_{Mt}$

Le stock initial S_t maximal sera la plus petite de deux valeurs : le cumul des demandes D_i et la contrainte de stockage S_{Mt}

La quantité maximale produite qt est le minimum de trois valeurs :

la somme des demandes

la capacité de production Q_{Mt}

de la période t (ou au début de la période t - 1) soit $S_{Mt+1} + D_t - S_t$

D'où

S_t varie de $\text{Max}[O,D_t-Q_{Mt}]$ à $\text{Min}[D_i, S_{Mt}]$

Q_t varie de $\text{Max}[O,D_t-S_t]$ à $\text{Min}[D_i-S_t,Q_{Mt},S_{M+1}+D_t-S_t]$

L'utilisation récurrente de ces relations peut conduire à avoir une borne inférieure pour S_t ou Q_t qui soit supérieure à la borne supérieure : alors il n'y a pas de solution sauf à modifier les contraintes en accroissant les capacités.

c ❷) Cas de demandes différées.

Dans le raisonnement précédent, on a supposé qu'il ne pouvait y avoir de rupture de stock. En supprimant cette hypothèse et en admettant un maximum D_{Mt} de demandes différées en début de période t (rupture de stock maximale admise sur la demande D_{t-1}), les bornes se modifient :

S_t varie de $Max[(D_{Mt}, D_t - Q_{Mt} + Q_{Mt+1}]$

à $Min[\sum_i^T Di, Q_{Mt}]$

Q_t varie de $Max[O, D_t - S_t + Q_{Mt+1}]$

à $Min[\sum D_i - S_t, Q_{Mt}, Q_{Mt+1} + D_t - S_t]$

3 - Mise en oeuvre.

a) Tableaux successifs

Pour chaque période t (en partant de T), on établit un tableau comme suit :

Stock début S_t	Product. g_t (S_t) Q_t	Demande D_t	Stock fin S_{t+1}	Coût de product. de Q_t	Coût de stockage de S_t	Coûts Min. f_{t+1}	Coût minim. f_t

chaque ligne de ce tableau est défini par :

- un niveau de stock début, devant être compris entre les bornes minimale et maximale définies précédemment
- et un niveau de production, devant être compris entres ses bornes.

Dès lors, à chaque niveau de stock début est associé plusieurs lignes, une par niveau de production possible.

Il reste ensuite à "remonter" ces tableaux (depuis t = 1) : à chaque tableau, pour le niveau de stock début, on choisit la production qui minimise le coût total f_t (S_t), on en déduit le stock fin, qui permet de se positionner dans le tableau supérieur (de la période postérieure).

b) Illustration numérique.

Sur 5 périodes (T = 5), on suppose les demandes suivantes :

Périodes t	1	.2	3	4	5
Demandes Dt	2	5	4	2	4

La fabrication du produit nécessite un coût de lancement de 150 (dépenses de réglage et d'administration).

Le coût unitaire de production est de 200 F. et 250 F. s'il y a lieu d'utiliser des heures supplémentaires de main d'oeuvre (ce qui ne sera fait que si les heures normales sont pleinement utilisées).

Les productions maximales sont les suivantes (selon emploi ou non des heures supplémentaires) :

Périodes	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Product. maxim. à 200 F	2	2	3	3	3
Product. maxim. à 250 F	3	3	3	3	3

Le coût de stockage est 10 F. par unité stockée (quel que soit le coût de production, ce qui est ici une simplification, car il devrait logiquement tenir compte d'un intérêt sur le capital stocké = coût de production)

La capacité de stockage est limitée à 2 unités. Le stock initial est nul ($S_1 = 0$) ; on s'interdit toute rupture de stock. Le stock est terme T sera nul ($S_{t+1} = 0$)

Dès lors, on peut établir les tableaux successifs (tableau 1 de la page suivante). Puis un tableau récapitulatif (tableau 2) permettant de déduire la planification optimale.

4 - Planification glissante.

Supposons maintenant qu'on veuille établir une programmation sur un horizon plus court (ce qui évite à anticiper les demandes de périodes plus lointaine), quitte à rétablir une programmation au début de chaque période. C'est ce qu'on appelle la planification glissante.

On va l'illustrer à partir de l'exemple numérique précédent sur la base d'un horizon T = 3 périodes, et en effectuant trois programmations pour les périodes 1,2,3.

On va en profiter pour développer un algorithme inverse. En effet, précédemment on partait de la dernière période pour remonter vers la première (algorithme de type "en arrière", ou "backward"). On va utiliser un algorithme "en avant" (forward) allant de la 1ère à la dernière période. Les calculs sont présentés dans une page suivante.

Exemple de Programmation dynamique de la Production

Tabl. 1 :

```
COL 1 : PERIODE T
COL 2 : STOCK DE DEBUT DE PERIODE R(T)
COL 3 : LIVRAISON DE LA PERIODE T:Q(T)
COL 4 : -DEMANDE DE LA PERIODE T:-D(T)
COL 5 : STOCK DE FIN DE PERIODE T=STOCK DE DEBUT PERIODE T+1:R(T+1)
COL 6 : COUT DE PRODUCTION DE Q(T):
COL 7 : COUT DE STOCKAGE DE R(T) DURANT LA PERIDE T:
COL 8 : F(T+1, R(T+1)   )
COL 9 : SOMME DES COLONNES 6 A 8
```

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
5	0	4	-4	0	1000.0	.0	.0	1000.0
5	1	3	-4	0	750.0	10.0	.0	760.0
5	2	2	-4	0	550.0	20.0	.0	570.0
4	0	2	-2	0	550.0	.0	1000.0	1550.0
4	0	3	-2	1	750.0	.0	760.0	1510.0 ←F(t = 4, R_4 = 0)
4	0	4	-2	2	1000.0	.0	570.0	1570.0
4	1	1	-2	0	350.0	10.0	1000.0	1360.0
4	1	2	-2	1	550.0	10.0	760.0	1320.0
4	1	3	-2	2	750.0	10.0	570.0	1330.0
4	2	0	-2	0	.0	20.0	1000.0	1020.0
4	2	1	-2	1	350.0	20.0	760.0	1130.0
4	2	2	-2	2	550.0	20.0	570.0	1140.0
3	0	4	-4	0	1000.0	.0	1510.0	2510.0
3	0	5	-4	1	1250.0	.0	1320.0	2570.0
3	0	6	-4	2	1500.0	.0	1020.0	2520.0
3	1	3	-4	0	750.0	10.0	1510.0	2270.0
3	1	4	-4	1	1000.0	10.0	1320.0	2330.0
3	1	5	-4	2	1250.0	10.0	1020.0	2280.0
3	2	2	-4	0	550.0	20.0	1510.0	2080.0
3	2	3	-4	1	750.0	20.0	1320.0	2090.0
3	2	4	-4	2	1000.0	20.0	1020.0	2040.0
2	0	5	-5	0	1300.0	.0	2510.0	3810.0
2	1	4	-5	0	1050.0	10.0	2510.0	3570.0
2	1	5	-5	1	1300.0	10.0	2270.0	3580.0
2	2	3	-5	0	800.0	20.0	2510.0	3330.0
2	2	4	-5	1	1050.0	20.0	2270.0	3340.0
2	2	5	-5	2	1300.0	20.0	2040.0	3360.0
1	0	2	-2	0	550.0	.0	3810.0	4360.0
1	0	3	-2	1	800.0	.0	3570.0	4370.0
1	0	4	-2	2	1050.0	.0	3330.0	4380.0

Tabl. 2 :

Horizon 5

R_5	$g_5(R_5)=q_5$	$-d_5$	R_6	$f_5(R_5)$
0	4	-4	0	1000
1	3	-4	0	760
2	2	-4	0	570

Horizon 4

R_4	$g_4(R_4)=q_4$	$-d_4$	R_5	$f_4(R_4)$
0	3	-2	1	1510
1	2	-2	1	1320
2	0	-2	0	1020

Horizon 3

R_3	$g_4(R_3)=q_3$	$-d_3$	R_4	$f_3(R_3)$
0	4	-4	0	2510
1	3	-4	0	2270
2	4	-4	2	2040

Horizon 2

R_2	$g_2(R_2)=q_2$	$-d_2$	R_3	$f_2(R_2)$
0	5	-5	0	3810
1	4	-5	0	3570
2	3	-5	0	3330

Horizon 1

R_1	$g_1(R_1)=q_1$	$-d_1$	R_2	$f_1(R_1)$
0	2	-2	0	4360

Plan optimal :

PERIODE*	STOCK DEBUT*	LIVRAISON*	-DEMANDE*	STOCK FIN*
1*	0 *	2 *	-2 *	0 *
2*	0 *	5 *	-5 *	0 *
3*	0 *	4 *	-4 *	0 *
4*	0 *	3 *	-2 *	1 *
5*	1 *	3 *	-4 *	0 *

COUT= 4360.00

Exemple de Planification glissante :
Programmation en période 1

Pér.	Dem	Stock Début	Produc-tion	Stock fin	Coût product.	Coût stock	Coût min. antérieur	Coût cumulé
1	2	0	2	0	550	0	0	550
	2	0	3	1	800	0	0	800
	2	0	4	2	1050	0	0	1050
2	5	0	5	0	1300	0	550	1850
	5	1	4	0	1050	10	800	1860
	5	1	5	1	1300	10	800	2110
	5	2	3	0	800	20	1050	1870
	5	2	4	1	1050	20	1050	2120
	5	2	5	2	1300	20	1050	2370
3	4	0	4	0	1000	0	1850	2850
	4	1	3	0	750	10	2110	2870
	4	2	2	0	550	20	2370	2940

Programme optimal :

1	20	0	2	0
2	50	0	5	0
3	40	0	4	0

Coût minimal 2 850

Remarques sur la construction du tableau :

La production ne peut excéder 5 en périodes 1 et 2, 6 en période 3.

Le stock fin de toute période ne peut excéder 2.

Chaque ligne combine une possibilité de production et une possibilité de stock fin (compte tenu du stock début et de la demande).

Le "coût minimun antérieur" reprend le plus faible des coûts associés à un même stock fin, et l'associe au même stocl début de la période suivante.

Le choix se fait à partir du dernier tableau vers le premier.

On a établi le tableau sur la base d'un stock résiduel nul au terme T = 3. Si on acceptait de produire pour stock résiduel, le scoûts totaux augmenteraient du coût de production, ce qui conduirait à écarter leur choix, sauf à considérer qu'au terme il existe un capital en stock qu'il conviendrait de déduire des coûts, ce qui revient au même que de supposer le stock résiduel nul.

On décide donc de produire 2 en période 1. C'est le même plan que celui obtenu en programmant sur 5 périodes. Au début de chaque période, on reprogramme (sur 3 périodes : voici les résultats que l'on obtient.

Programme optimal de période 2 (sur périodes 2, 3 et 4)

Pér.	Dem	St. D	Prod	St .F
2	5	0	5	0
3	4	0	6	2
4	2	2	0	0

Prod. 5 en période 2

Programme optimal de période 3 (sur périodes 3, 4 et 5)

3	4	0	4	0
4	2	0	3	1
5	4	1	3	0

Prod. 4 en période 3

Programme optimal de période 4 (sur période 4 et 5)

4	2	0	3	1
5	4	1	3	0

Prod. 3 en période 4

Prod. 3 en période 5

Dans ce dernier programme (de période 4), on aurait dû normalement tenir compte d'une période 6. On s'en est tenu à un terme général de 5 périodes, pour comparer à la planification établie sur 5 périodes. On constate ici que la programmation glissante fournit les mêmes productions périodiques que la programmation sur 5 périodes. Mais on constate aussi qu'en période 3, on doit réviser à la baisse la production par rapport à celle prévue par le programme établi en période 2 (en période 2, on prévoit 6 pour la période 3 ; en période3, la production est ramenée à 4). Ce qui pose souvent des problèmes pratiques considérables avec l'obligation de replanifier le travail et l'activité de la période en début de cette même période. Une solution acceptable consiste à retenir comme production d'une période celle qui avait été prévue par la programmation faite lors de la période précedente, à la condition de réaliser la programmation de chaque sur au moins 4 périodes. En effet, une programmation périodique faite sur 3 périodes conduirait à produire 6 en 3e période (ce qui est donné par le programme établi en période 2).

Une programmation glissante établie sur 4 périodes conduirait, dans l'exemple numérique, aux programmes suivants :

Pér. de Progr	Pér.	Dem	St. D	Prod	St .F
1	1	2	0	2	0
	2	5	0	5	0
	3	4	0	6	2
	4	2	2	0	0
2	2	5	0	5	0
	3	4	0	4	0
	4	2	0	3	1
	5	4	1	3	0
3	3	4	0	4	0
	4	2	0	3	1
	5	4	1	3	0
	-	-	-	-	-

D) Cas des coûts convexes ou concaves.

Une fonction de coût est dite "convexe", si chaque unité produite additionnelle coûte au moins autant que la précédente. Cette situation est dite à rondement d'échelle décroissant.

Une fonction de coût est dite "concave", si chaque unité produite additionnelle coûte au plus ce que coûte la précédente. Cette situation est dite à rendement d'échelle croissant. Dans l'illustration numérique de l'exemple précédent, examinons pour la période 1, le coût total de production C(q) en fonction de la quantité produite q :

$C(0) = 0$; $C(1) = 150 + 200 = 350$; $C(2) = 350 + 200 = 550$; $C(3) = 550 + 250 = 800$; ...

Les variations successives C'(q) sont donc : $C'(1) = 350$; $C'(2) = 200$; $C'(3) = 250$

D'abord concave, la fonction devient ensuite convexe. Si on supprimait le coût de lancement (150), la fonction devient convexe :

$C(1) = 200$ $\quad C(2) = 200 + 200 = 400$ $\quad C(3) = 400 + 250 = 650$ $\quad$ ...
$C'(1) = 200$ $\quad C'(2) = 200$ $\quad C'(3) = 250$ $\quad$ ...

a) Cas convexe (coûts croissants).

On démontre que l'algorithme à utiliser est du type "en avant" avec la procédure suivante (cas sans rupture de stock) : à chaque période, satisfaire la demande de la période en utilisant les moyens les plus avantageux (les moins coûteux) de la période, ou de la période précédente, sans excéder les capacités de production.

Illustration : on reprend les données de l'illustration précédente avec les modifications suivantes : pas de coût de lancement, coût de stockage de 8 pour les unités produites à 200 F, et 10 pour les unités à 250 F. On peut établir le tableau suivant, dans lequel les coûts unitaires (Cu) comprennent le coût de production et le coût de stockage quand la production est destinée à satisfaire une demande ultérieure. Le choix de produire à une période ou à une période antérieure dépend du coût unitaire. On veille à ne pas dépasser les capacités, c'est pourquoi on corrige les valeurs de capacité résidelle.

Période de Production	niveau de coût	Période de "CONSOMMATION"										Capacité de production RESIDUELLE
		1		2		3		4		5		
		C.U.	Prod.	C.U.	Prod.	C.U.	Prod	C.U.	Prod.	C.U.	Prod.	
1	1	200	2	208		216		224		232		~~2~~ 0
	2	250		260		270		280		290		3
2	1			200	2	208		216		224		~~2~~ 0
	2			250	3	260		270		280		~~3~~ 0
3	1					200	3	208		216		~~3~~ 0
	2					250	1	260		270		~~3~~ 2
4	1							200	2	208	1	~~3~~ ~~1~~ 0
	2							250		260		3
5	1									200	3	~~3~~ 0
	2									250		3
DEMANDE RESTANT A SATISFAIRE		~~2~~ 0		~~5~~ ~~3~~ 0		~~4~~ ~~1~~ 0		~~2~~ 0		~~4~~ ~~1~~ 0		

b) Cas concave (coûts décroissants).

Il ne se rencontre guère en approvisionnement interne (les coûts marginaux de court terme sont en général croissants) ; mais se rencontre en approvisionnement externe (par suite de rabais progressif). C'est aussi le cas

quand existe un coût de commande (et un coût unitaire de fonctionnement constent). L'algorithme de résolution est appelé "modèle dynamique de la quantité économique de commande", ou modèle de Wagner-Whitin.

On démontre qu'il existe toujours une politique optimale telle que la quantité produite (ou approvisionnée) au cours de la période t soit l'une des valeurs : 0 ou D_t ou D_t+D_{t+1} ou ΣD_i.

Il en déduit un algorithme sur la base des notations suivantes :

$Q_{it} = \Sigma D_j$ demandes cumulées de la période i à la période t

$C_i(q_{it})$ coût de production (ou d'approvisionnement) de q_{it} à la période i et de stockage de la période i à la période t

f_t coût minimal pour les périodes i à t pour un stock résiduel nul en fin de période t

g_t date optimale de dernière linaison (production ou approvisionnement lorsque l'horizon est t)

On recherche (algorithme "en avant") progressivement avec un coût de commande de 100, un prix unitaire de 150 pour les 20 premiers achats et 120 pour les suivants, un coût de possession de 6, des besoins prévisionnels mensuels de 10, 30, 15, 25, 30, 30 (donc sur 6 mois).

COL 1 : HORIZON t
COL 2 : DATE I DE DERNIERE LIVRAISON (DATE OPTIMALE A LA LIGNE EN POINTILLES DANS COL. 3 A 7)
COL 3 : COMMANDE q(I,t) PASSEE AU DEBUT DE LA PERIODE i
COL 4 : COUT DE PRODUCTION (OU LIVRAISON) DE q(i,t)
COL 5 : COUT DE STOCKAGE DE q(i,t)
COL 6 : COUT DE PRODUCTION ET DE STOCKAGE DE q(i,t) :CI(D(I,T))
COL 7 : F(i-1)
COL 8 : CI(Q(I,T))+F(I-1)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1	10	1600.0	.0	1600.0	.0	1600.0
1	1	....	....	....	....	....	1600.0
2	1	40	5500.0	180.0	5680.0	.0	5680.0
2	2	30	4300.0	.0	4300.0	1600.0	5900.0
2	1	....	....	....	....	....	5680.0
3	1	55	7300.0	360.0	7660.0	.0	7660.0
3	2	45	6100.0	90.0	6190.0	1600.0	7790.0
3	3	15	2350.0	.0	2350.0	5680.0	8030.0
3	1	....	....	....	....	....	7660.0
4	1	80	10300.0	810.0	11110.0	.0	11110.0
4	2	70	9100.0	390.0	9490.0	1600.0	11090.0
4	3	40	5500.0	150.0	5650.0	5680.0	11330.0
4	4	25	3700.0	.0	3700.0	7660.0	11360.0
4	2	....	....	....	....	....	11090.0
5	1	110	13900.0	1530.0	15430.0	.0	15430.0
5	2	100	12700.0	930.0	13630.0	1600.0	15230.0
5	3	70	9100.0	510.0	9610.0	5680.0	15290.0
5	4	55	7300.0	180.0	7480.0	7660.0	15140.0
5	5	30	4300.0	.0	4300.0	11090.0	15390.0
5	4	....	....	....	....	....	15140.0
6	1	140	17500.0	2430.0	19930.0	.0	19930.0
6	2	130	16300.0	1650.0	17950.0	1600.0	19550.0
6	3	100	12700.0	1050.0	13750.0	5680.0	19430.0
6	4	85	10900.0	540.0	11440.0	7660.0	19100.0
6	5	60	7900.0	180.0	8080.0	11090.0	19170.0
6	6	30	4300.0	.0	4300.0	15140.0	19440.0
6	4	....	....	....	....	....	19100.0

Dans ce tableau, les valeurs optimales de ft sont repérées aux lignes de pointillés. On en déduit le programme optimal : de la dernière ligne (coût cumulé = 19 100), on observe que la dernière livraison doit être faite en t = 4 (pour couvrir les besoins de 4, 5 et 6 soit 85 unités) ; la précédente livraison pour couvir les besoins D3 doit être faite en période 1. Le programme optimal est donc le suivant :

Période	Stock début	Livraison	Demande	Stock fin
1	0	55	- 10	45
2	45	0	- 30	15
3	15	0	- 15	0
4	0	85	- 25	60
5	60	0	-30	30
6	30	0	- 30	0

On peut également présenter les calculs comme suit :

		horizon t 1	2	3	4	5	6
DEMANDES DE LA PERIODE t		10	30	15	25	30	30
date de la dernière livraison pour un horizon t: 1	coûts de livraison	1600	3900	1800	3000	3600	3600
	coûts de stockage	0	180	180	450	720	900
	coûts de cumul	1600	5680	7660	11110	15430	19930
2	coûts de livraison		4300	1800	3000	3600	3600
	coûts de stockage		0	90	300	540	720
	coûts de cumul		5900	7790	11090	15230	19550
3	coûts de livraison			2350	3150	3600	3600
	coûts de stockage			0	150	360	540
	coûts de cumul			8030	11330	15290	19430
4	coûts de livraison				3700	3600	3600
	coûts de stockage				0	180	360
	coûts de cumul				11360	15140	19100
5	coûts de livraison					4300	3600
	coûts de stockage					0	180
	coûts de cumul					15390	19170
6	coûts de livraison						4300
	coûts de stockage						0
	coûts de cumul						19440
f_t		160C	5680	7660	11090	15140	19100
g_t		1	1	1	2	4	4

Remarque : ce modéle exclut toute limitation sur les capacités de production et de stockage, ainsi que les différés de demandes. Diverses heuristiques ont été proposées pour les résoudre.

E) Quelques conclusions.

La programmation dynamique apparait fort interessant dans la mesure où elle est, à la différence des méthodes précédentes, un algorithme d'optimisation, et qu'elle est d'une mise en oeuvre relativement aisée. Mais, tout au moins sur ce qu'on a vu précédemment, elle ne traite que d'un bien (un produit ou un approsionnement). Or l'activité productive fait manipuler plusieurs, voir de nombreux biens, qu'il convient de gérer simultanément.

On peut utiliser de manière récurrente la programmation dynamique : ayant déterminé le programme optimal de fabrication d'un produit. Celui-ci génère des demandes en composants (que leur approvisionnement soit interne ou externe) et à chacun on peut appliquer un programme dynamique. Il n'est pas évident que l'ensemble de ces programmes, élaborés successivement, (pour couvrir les besoins de 4, 5 et 6 soit 85 unités) ; la précédente livraison pour couvir les besoins D3 doit être faite en période 1. Le programme optimal est donc le suivant :

Période	Stock début	Livraison	Demande	Stock fin
1	0	55	- 10	45
2	45	0	- 30	15
3	15	0	- 15	0
4	0	85	- 25	60
5	60	0	-30	30
6	30	0	- 30	0

On peut également présenter les calculs comme suit :

			horizon t					
			1	2	3	4	5	6
DEMANDES DE LA PERIODE t			10	30	15	25	30	30
date de la dernière livraison pour un horizon t	1	coûts de livraison	1600	3900	1800	3000	3600	3600
		coûts de stockage	0	180	180	450	720	900
		coûts de cumul	1600	5680	7660	11110	15430	19930
	2	coûts de livraison		4300	1800	3000	3600	3600
		coûts de stockage		0	90	300	540	720
		coûts de cumul		5900	7790	11090	15230	19550
	3	coûts de livraison			2350	3150	3600	3600
		coûts de stockage			0	150	360	540
		coûts de cumul			8030	11330	15290	19430
	4	coûts de livraison				3700	3600	3600
		coûts de stockage				0	180	360
		coûts de cumul				11360	15140	19100
	5	coûts de livraison					4300	3600
		coûts de stockage					0	180
		coûts de cumul					15390	19170
	6	coûts de livraison						4300
		coûts de stockage						0
		coûts de cumul						19440
f_t			1600	5680	7660	11090	15140	19100
g_t			1	1	1	2	4	4

Remarque : ce modéle exclut toute limitation sur les capacités de production et de stockage, ainsi que les différés de demandes. Diverses heuristiques ont été proposées pour les résoudre.

E) Quelques conclusions.

La programmation dynamique apparait fort interessant dans la mesure où elle est, à la différence des méthodes précédentes, un algorithme d'optimisation, et qu'elle est d'une mise en oeuvre relativement aisée. Mais, tout au moins sur ce qu'on a vu précédemment, elle ne traite que d'un bien (un produit ou un approsionnement). Or l'activité productive fait manipuler plusieurs, voir de nombreux biens, qu'il convient de gérer simultanément.

On peut utiliser de manière récurrente la programmation dynamique : ayant déterminé le programme optimal de fabrication d'un produit. Celui-ci génère des demandes en composants (que leur approvisionnement soit interne ou externe) et à chacun on peut appliquer un programme dynamique. Il n'est pas évident que l'ensemble de ces programmes, élaborés successivement, constitue un optimum. Tout au moins serait-ce un programme d'ensemble réalisable, si toutefois les divers produits ou composants sont indépendants entre eux. Ce ne serait pas le cas si divers produits avaient à partager les mêmes capacités de production ou de stockage (ce qui est un cas fréquent).

Section 6 :L'application de la programmation linéaire à la production.

Un programme linéaire consiste à chercher l'optimum (maximum ou minimun) d'une fonction linéaire de n variables dite fonction d'objectif, variables soumises à m contraintes ou relations linéaires (relations d'égalité ou d'inégalité de type > ou <) et à n conditions de non-négativité de chaque variable. Mathématiquement le problème s'écrit :

Fonct. d'obj. [optimum]	$g = \sum_j c_j x_j$	$j = 1,\ldots n$
Contraintes	$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$	$i = 1,2 \ldots . m$
Non négativité	$x_j \geq 0$	$\forall j$

La résolution se fait généralement par l'algorithme de Dantzig (la méthode de Lagrange est inexploitable avec des relations du 1er degré). Il ne sera pas question ici d'étudier comment ce fait cette résolution, (des logiciels existent pour le faire) mais étudier comment des problèmes de production peuvent être formulés (donc résolus) en termes de programme linéaire.

Cette méthode est très adaptée pour déterminer :
- les quantités à produire de n produits soumis à diverses contraintes de fabrication, compte tenu des capacités de production (et de commercialisation éventuellement),
- la composition d'un mélange à partir de divers ingrédients,
- l'allocation de ressources entre diverses possibilités .

La fonction d'objectif est généralement. :
- soit une fonction de marges sur coûts directs, variables (dont la variation est supposée, proportionnelle) à maximiser,
- soit une fonction de coût à minimiser.

A) Modèles statiques.

Ce sont des modèles établissant des programmes d'activité sur une seule période. On traitera ici de 3 types de problèmes.

1 -Détermination d'un programme de production (product mix problem).

a) Illustration d'approche.

Une entreprise peut fabriquer 3 produits P1, P2, P3 qui nécessitent l'intervention de 3 ateliers dont on connait les capacités de production, ainsi que les besoins unitaires de chaque produit en utilisation de ces capacités. Ces données sont les suivantes :

	Temps unitaire (en heures)			Capacités
	P1	P2	P3	(en heures)
Atelier biochimie	2	5	4	400
Atelier façonnage	8	6	7	500
Atelier conditionnement	4	3	3	300

Par suite de contrats déjà passés, la production P1 doit être au moins de 20.

Quel est le programme (quantités à produire) qui maximise la marge globale de l'entreprise, sachant que les marges unitaires sur coûts directs variables sont P1 = 50 F ; P2 = 40 F et P3 = 40 F.

On peut écrire le programme :

Fonction d'objectif	Maximiser $M = 50P_1 + 40\,P_2 + 40P_3$				
Contraintes	At. biochimie :	$2P_1$	$+5P_2$	$+4P_3$	≤ 400
	At. façonn :	$8P_1$	$+6P_2$	$+7P_3$	≤ 500
	At. Condition :	$4P_1$	$+3P_2$	$+3P_3$	≤ 300
	Marché mini	P_1			≥ 20

Les conditions de non négativité des variables sont implicites dans la méthode de résolution, et n'ont donc pas à être formulées.

Le logiciel de résolution fournit les résultats suivants :

```
Maximisation de Marge avec Capacités

 3  itérations

Solution optimale

Objectif =     3266.67

-------------------------------------------------------------------------------
Contraintes (Lignes)          Ecart       S.Memb        Dual        Mini       Maxi
-------------------------------------------------------------------------------
  1 Marge              :    3266.67 *       0.00       -1.00
  2 At.biochimie       :      76.67 <     400.00        0.00      323.33    *******
  3 At.façonnage       :       0.00 <     500.00        6.67      160.00     592.00
  4 At.conditionnem    :      50.00 <     300.00        0.00      250.00    *******
  5 Marché min P1      :       0.00 >      20.00       -3.33      -22.50      36.43

-------------------------------------------------------------------------------
Variables (Colonnes)          Primal      C.Obje      C.Marg        Mini       Maxi
-------------------------------------------------------------------------------
  2 Produit 1          :      20.00       50.00        0.00     *******      53.33
  3 Produit 2          :      56.67       40.00        0.00       37.50    *******
  4 Produit 3          :       0.00       40.00        6.67
-------------------------------------------------------------------------------
```

Interprétation de ces résultats :

2ème tableau :-

Primal : valeur des variables à l'optimum. Il faut produire 20 de P_1, 56,7 de P_2 et 0 de P_3.
C. Obje : rappel des coefficients de fonction d'objectif
C. Marg : ce coefficient marginal indique de combien devrait augmenter (ou diminuer) le coefficient d'objectif pour que la variable prenne une valeur > 0 (si elle est = 0) ; c'est de P_3 dont la marge devrait être au moins de 46,67 pour que P_3 soit avantageux à produire.
Mini et Maxi : valeurs mini et maxi du coefficient d'objectif lors desquelles le programme actuel ne serait plus optimal.

1er tableau : contraintes :

Ecart : différence entre le premier et le second membre de chaque relation. Lorsque la valeur de l'écart est nulle cela veut dire que la contrainte est "saturée" (elle est facteur limitant) : la capacité de l'atelier façonnage est pleinement employée ; pas les autres capacités. La production de P_1 couvre juste le marché imposé.

S. Memb : rappel des valeurs de second membre des relations
Dual : valorisation marginale de la contrainte : elle n'est = 0 que si l'écart est nul. Elle indique de combien augmenterait (ou diminuerait) la fonction dobjectf si on augmentait de 1 le second membre de la contrainte. Ainsi, si on disposait d'une heure de plus en atelier de façonnage, l'objectif augmenterait de 3,33 l'objectif (et le plan changerait).
Mini et Maxi :valeurs extrèmes des seconds membres en dehors des quelles la combinaison des productions non nulles dans le plan optimal changerait (Attention : tout changement de valeur d'un second membre modifierait les quantités produites).

Remarque : dans les tableaux ***** signifie "infini".

Au vu de ces résultats, on pourrait s'étonner : P_1 qui a la meilleure marge unitaire semble être dédaigné par le programme (et si on supprimait la contrainte de minimun de production, le programme ne proposerait qu'une production de 3,57 de P_1 !). Cela s'explique : l'atelier façonnage parait le plus contraignant. Or la productivité en valeur de P_2 par rapport à ce facteur capacité de façonnage est de 40 / 6 = 6,67 ; celle de P_1 : 50 / 8 = 6,25 lui est inférieure : le programme préfère donc valoriser P_2.

La programmation linéaire, dans sa résolution, tient compte simultanément de tout (tout au moins de tout ce qui lui a été fourni comme informations, sous forme de relations linéaires).

b) Formulation générale.

Soient :

x_j la quantité produite (ou éventuellement vendue) d'un produit j (j = 1, 2, ..., n) durant la période

b_i la quantité disponible du facteur productif i (i = 1, 2, ..., m) durant la période (atelier, machine, main d'oeuvre, approvisionnement, ...)

a_{ij} la quantité du facteur i nécessaire par unité produite de j

r_{ij} le prix de vente de j

c_j le coût direct variable par unité de j

U_j les ventes maximales potentielles du produit j durant la période

L_j la production minimale requise pour le produit j

L'objectif est de maximiser la marge globale sur les n produits.

Objectif : $z = \sum (r_j - c_j) x_j$

Contraintes : $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$

$$x_j \leq U_j$$
$$x_j \geq L_j$$

$a_{ij} x_j$ représente les besoins de consommation en facteur i et b_i l'apport ou disponibilité en facteur i. Le modèle est donc de type besoin < apport, et ceci pour chaque facteur. Lorsque l'apport en un facteur k est supposé variable, l'équation pourra s'écrire $\sum a_{ij} x_j - x_k \leq 0$, et la fonction d'objectif $z = \sum (r_j - c_j) x_j - c_k x_k$ (c_k étant le prix d'achat de k).

2 - Détermination des filières de production.

On suppose maintenant que l'on s'interroge en outre sur les modes de fabrication : interne ou externe (sous traitance), heures normales ou supplémentaires ... (process selection problem). On pose : x jk quantité du produit j(j = 1, 2, ..., n) fabriqué par la filière k (k = 1, 2, ..., p).

D_j production requise de j

b_{ik} quantité de ressource i par la filière k

a_{ijk} quantité de ressource i par la filière k par unité j

c_{jk} coût unitaire variable de j par la filière k

Le problème est alors :

$$z = \sum c_{jk} x_{jk}$$
$$\sum x_{jk} = D_j$$
$$\sum a_{ijk} x_{jk} \leq b_{ik}$$

On résoud de la même manière des problèmes de production à étages. On peut combiner les deux types de problèmes et déterminer simultanément les quantités à produire et les filières.

3 - Composition optimale d'un mélange (Blending problem).

Comment fabriquer une unité de produit (aliment, engrais, alliage, textile, ...) en faisant appel à un mélange de composés de base dans des propositions définies par des fourchettes limitées de manière à aboutir au coût le plus faible ?

Le mélange fait appel à n composants et se caractérise par m spécialisations de bornes supérieures et inférieures.

x_j quantité du composant j par unité de produit final

c_j coût unitaire du composant j

a_{ij} composition d'une unité de j en spécification i (exemples teneurs en UF, en PDI,...)du composant j dans le cas de fabrication d'un aliment),
b_i spécification i par unité j (ex. teneur en UF, PDI par unité de l'aliment, ou éventuellement teneurs minimales et maximales).

Le problème s'écrit :
Minimiser $z = \sum c_j x_j$

$\sum a_{ij} x_j \geq b_i$
xj >= 0

B) Modèles dynamiques.

Ces modèles établissent un programme d'activité sur plusieurs périodes.

1 - Modèle général sans différé de demandes périodiques.

L'indice t représente la période.

x_{jkt} quantité de produit j par filière k durant la période t (disponible en fin de période)
c_{jkt} coût de fabrication correspondant
S_{jt} disponible au début de période t du produit j
p_{jt} coût de possession de ce stock
D_{jt} demande du produit j en période t

Le programme s'écrit (avec nkt + kt varitables xjkt et Sjt) :

Minimiser $$\sum_t \sum_j \left[\sum_k c_{jkt} x_{jkt} + p_{jt} S_{jt} \right]$$

Contraintes de fabrication $\sum_j \sum_i a_{ijk} x_{jkt} \leq b_{it}$ i = 1, 2, ..., m et t = 1, 2, ..., T

(donc mT relations)

Contraintes de stockage $S_{jt+1} = S_{jt} - D_{jt} + \sum_k x_{jkt}$ k = 1, 2, ..., p

(donc p équations)

2 - Avec demandes différées.

Le report est noté R_{jt} (variable). La position de stock s'écrit $p_{jt} = S_{jt} - R_{jt}$ laquelle S_{jt} et R_{jt} ne sont pas simultanément positifs (soit $S_{jt}.R_{jt} = 0$, la contrainte de non négativité des variables entrainera le respect de cette contrainte quadratique). L'équation de stock devient :

$$p_{jt+1} = p_{jt} - D_{jt} + \sum_k x_{jkt}$$

Ces deux équations se substituent à l'équation de stock ci-dessus. Si le report entraine un coût rjt, la fonction d'objectif devient :

$$\text{Min} \quad \sum_{t}\sum_{j}\left[\sum_{k} c_{jkt}x_{jkt} + p_{jt}S_{jt} + r_{jt}R_{jt}\ \right]$$

Le modèle peut aisément être enrichi de diverses conditions :

- borner l'utilisation d'un facteur de filière k,
- borner la position du stock,
- introduire des délais de fabrication,
- tenir compte des recettes (et maximiser la marge).

Chapitre 4 : Les décisions stratégiques de la production.

On désigne ainsi celles qui sont relatives au long terme, elles concernent :
- le "portefeuille" de produits (point non étudié ici)
- la définition des ressources permanentes : les équipements, l'appel à la sous-traitance, le personnel, les informations.

On s'intéressera ici simplement aux équipements, au travers de deux aspects : le choix des investissements (en moyens durables), et quelques problèmes technico-économiques de leur emploi.

Section 1 : Le choix des investissements

Par investissement, on entend ici l'acquisition de moyens durables (tout particulièrement les équipements). Le choix des investissements est un problème complexe, car il se situe en univers aléatoire et même incertain, et peut faire intervenir divers critères de valeur (l'analyse multicritère ne sera pas étudiée ici).

A) Analyse économique de projets d'investissement.

1 - Les critères de jugement.

Les économistes proposent deux critères :

a) Le flux Net de Trésorerie Actualisé (FNTA).

Parfois appelé Bénéfice actualisé ou Valeur actuelle nette, dénominations moins précises que FNTA. C'est la somme des Flux Nets de Trésorerie (= Recettes - Dépenses) actualisés, c'est-à-dire pondéré par un facteur d'actualisation prenant en compte l'éloignement dans le temps de ces flux. En appelant α le taux d'actualisation, c'est-à-dire la dépréciation périodique (annuelle par exemple, de la valeur dans le futur, le FNTA se définit :

$$FNTA = \sum_{t=0}^{T} FNT_t (1+\alpha)^{-1}$$
$$= \sum_{t} (R_t - D_t)(1+\alpha)^{-1}$$

dans lesquelles : T : durée de l'investissement

R_t, D_t : recettes, dépenses de la période t

$FNT_t = R_t - D_t$ (flux net de trésorerie)

C'est donc un concept fondé sur les flux monétaires engendrés par le projet, considérant que sur la longue période tout est finalement transformé en flux monétaires. En particulier, il n'y a pas lieu de prendre en compte des amortissements qui ne sont qu'une façon conventionnelle de découper une dépense initiale en sous périodes annuelles. La dépense initiale d'investissement est ici bien prise en compte (pour t = O).

Il est par ailleurs fondé sur la technique de l'actualisation qui est une façon de prendre en compte le fait que les évènements de trésorerie se produisent en des moments distincts, sachant que plus un évènement est éloigné dans le futur, moins il a présentement de valeur (le futur est déprécié par rapport au présent).

L'investissement est avantageux quand FNTA > 0
Mais ce FNTA dépend de la valeur retenue pour α

b) Le Taux de Rentabilité Interne (TRI).

C'est la valeur r de α qui annule le FNTA, c'est un indicateur répondant à la question combien rapporte en pourcentage l'investissement

$$\sum_{t=0}^{T} FNT_t (1+r)^{-1} = 0$$

r se calcule par approches successives.

2 - Problèmes posés par l'actualisation.

a) Signification.

Diverses justifications sont données :

- l'accroissement de l'incertitude avec l'éloignement dans le temps,
- la dépréciation du futur par rapport au présent,
- les alternatives possibles dans l'utilisation des capitaux.

b) Détermination du taux d'actualisation.

Le classement des projets peut varier avec le taux d'actualisation. Certains proposent d'utiliser le coût moyen pondéré des capitaux au bilan. D'autres considèrent que ce taux est lié au portefeuille de projets d'investissement, et qu'il est le prix d'une ressource rare : la monnaie. Des lors le taux d'actualisation doit être égal au taux de rentabilité interne du dernier projet que l'entreprise peut entreprendre. Dans le cas d'emprunt c'est le taux d'intérêt de l'emprunt marginal (ou supplémentaire).

3 - Critères des praticiens.

- critère du délai de récupération : c'est le délai au bout duquel l'entreprise récupère l'investissement initial.
- critère du revenu moyen par franc investi

4 - Analyse de type comptable.

Le bénéfice net B_t d'une période a partir du Compte de Résultat :

P_t produits courants (venant du CR)
D_t dépenses courantes
A_t amortissements
F_t frais financiers
τ taux de l'impôt

$$B_t = (1-\tau)[P_t - (D_t + F_t + A_t)\ ]$$

Variation de flux net de trésorerie due à l'activité :

$\Delta FNT_t = \Delta A_t + \Delta B_t$ (amortissements + bénéfices)

$$\Delta FNT_t = \theta \Delta A_t + (1-\tau)(\Delta P_t - \Delta F_t - \Delta D_t)$$

Ces différenciels sont calculés entre la solution projetée et la solution de référence.

Le flux net est également affecté par l'investissement initial (I augmenté éventuellement d'autres immobilisations financières G (cautions, accroissement du besoin en fonds de roulement), par les emprunts perçus et les annuités de remboursement (frais financiers exclus) R

D'où $\Delta FNTA_t = \theta \Delta A_t + (1-\tau)(\Delta P_t - \Delta F_t - \Delta D_t) - I_t - G_t + E_t - R_t$

Les emprunts génèrent un effet levier : si l'investissement comporte une part F sur fonds propres, une part E d'emprunts au taux i, le ratio d'endettement λ =E/F, le taux moyen de rentabilité ρ des fonds propres, se déduit du taux moyen r de rentabilité du projet $\rho = r + \lambda(r-i)$

B) Comparaison de projets.

La comparaison de divers projets (l'un pouvant être une solution de référence : le maintien identique) nécessite que les FNTA soient calculés de manière homogène.

L'inégalité des durées de vie des projets conduit à divers modes de calculs :

a) Réinvestissement dans le même projet. On peut

- raisonner sur le PPCM des durées avec des renouvellements à l'identique
- raisonner sur une durée infinie (c'est une simplification)

$$FNTA_\infty = FNTA_n \sum_{t=0}^{\infty} (1+\alpha)^{-nt} = \frac{FNTA_n}{1-(1+\alpha)^{-n}}$$

avec $FNTA_n$ = le $FNTA$ sur la durée de vie n

b) Réinvestissement dans un projet "moyen"

$$FNTA_{corrigé} = FNTA - I\frac{1}{(1+\alpha)^n} + I\frac{(1+r)^{N-n}}{(1+\alpha)^N}$$

avec n durée de vie d'un projet
N durée de vie d'un projet le plus long
r taux de rentabilité moyenne de l'entreprise

c) Sur horizon économique borné
On tient compte de valeurs résiduelles au terme.

C) Choix d'un programme optimal d'investissement.

Par appel à la Programmation Linéaire en Nombres Entiers, les interdépendances entre les projets peuvent être prises en compte par des contraintes.

a) Contraintes de dépendance réciproques de 2 projets.
Les projets i et j sont représentés par des variables dichotoniques x_i et x_j.

- Si les projets s'excluent : x_i et x_j =< 1 (général x_j =< 1)
- Si x_j ne peut être réalisé que si x_i l'est : x_j =< x_i

- Si une plus value telle que $x_k < x_i$ et $x_k =< x_j$ (plus value)
ou $(x_k + 1) > x_i + x_j$. (moins value)

b) Contraintes globales de trésorerie.

On peut imposer que le FNT soit supérieur à un minimun. Pour T périodes (T inéquations) : $\sum_i FNT_{it} x_i \geq b_t$

Section 2 : Durée de vie optimale d'un équipement.

A - En univers certain.

1) Critéres de détermination.

Si l'équipement considéré est le seul à constituer à la fabrication d'un bien, et avec Rt recette d'exploitation de la période t
Dt dépenses d'exploitation directes (hors amortissement)

On cherche à maximiser la marge brute actualisée par rapport aux différentes politiques :

CRITERE 1 : $Max_i \left[\sum_{t=0}^{T} (R_{it} - D_{it})(1+\alpha)^{-t} \right]$ qui peut s'utiliser soit sur un horizon limité T soit sur un horizon infini (T = ∞)

Si l'échéancier de recettes est le même selon les politiques

CRITERE 2 : $Min_i = \left[\sum D_{it} (1+\alpha)^{-t} \right]$

2) Détermination de la durée de vie optimale.

a) En cas d'horizon limité.

En posant c_{ij} coût total actualisé d'utilisation d'une machine achetée en période i et revendue en fin de période j, on peut résoudre le problème en utilisant la programmation dynamique (les arcs représentent les coûts des diverses politiques possibles).

b) En cas d'horizon infini.

Il est démontré que la politique optimale est stationnaire (même nombre de périodes de vie pour les machines successives).

L'application du Critére 2 se fait en deux temps :

- Calcul des valeurs actualisées (en t=0) de l'échéancier de la 1ère machines pour chacune des n périodes de vie possible
- Calcul des annuités économiques constantes (fin de période) pour chacune de n périodes de vie possible. La durée de vie optimale correspond à la plus faible de ces annuités.

c) Déclassement

A-t-on avantage à anticiper le déclassement d'une machine quand apparaît un matériel plus performant ? Oui, si la nouvelle annuité est inférieur à la dépense d'exploitation annuelle (défalquée de l'éventuelle valeur de revente).

B) En univers aléatoire.

Lorsque la durée de vie d'un équipement est aléatoire et qu'en outre la durée de vie de l'un ou plusieurs de ses composants est aléatoire, la dépense d'une période est alors aléatoire.

Le choix d'une politique de maintenance et de remplacement se traduit par une espérance mathématique de dépenses $E(D_t)$ et une espérance $E(D_T)$ de temps d'utilisation durant la période t. Si le temps d'utilisation est valorisé à une valeur v, le critère de choix consiste à retenir la politique i qui maximise la valeur actualisée de la différence entre espérances de valorisation et de dépenses :

CRITERE 3 : Maximun $\{\sum_{t=1}^{T} [v.E(\theta_{it})-E(D_{it})](1+\alpha)^{-t}\}$

Si $E(\theta_{it})$ version de 1

CRITERE 4 : $Min_i \sum_{t=1}^{T} E(D_{it})(1+\alpha)^{-t}$

1 - Loi de durée de vie.

a) Approche expérimentale, à partir des observations.

Soit n(t) le nombre suivants à l'age t (compté depuis la miese en service). La courbe de suivie est donnée par :

V(t) = N(t)/N(o)

Elle donne la probabilité de suivie à l'âge t. La probabilité qu'un élément cesse d'être en état ente t - 1 et t est :

p(t) = [N(t-1) - N(t)]/N(o)

C'est la mortalité relative : p(t) = v(t-1)-v(t).

La probabilité d'avarie $P_a(t)$ qu'un élement en état en t-1 ne le soit plus en t est une probabilité conditionnelle :

$P_a(t)$ = 1-N(E)/N(t-1)

En effet : p(t) = v(t-1).$p_a(t)$

La moyenne $\ddot{t} = \sum t.p(t)$ peut être rectifiée si l'on tient compte de la durée centrale : la durée de vie moyenne est alors : $\ddot{\theta} = \sum t.p(t) - 0.5$

b) Approche analytique.

Soit T la durée de vie aléatoire. La fonction $F_{(t)}$ de répartition donne la probabilité p(T=<t) que la durée soit =< à t. La loi de fiabilité (ou de survie) que la durée soit >= t est donc 1 - F(t)

La probabilité d'avarie ou de défaillance, probabilité conditionnelle, est, sachant que la probabilité instantannée d'avarie est la densité de probabilité f(t). : h(t) = $f_{(t)}$/[1-F(t)] = F'(t)/[1-F(t)]

Diverses lois peuvent être utilisées (loi normale, loi Log-normale), la plus intéressante (car s'adaptant à la plupart des cas de figures) est la loi de Weibull :

$$v(t) = e^{-(at)^b}$$

$$F(t) = 1 - e^{-(at)^b}$$
$$f(t) = abt^{b-1}e^{-(at)^b}$$
$$h(t) = abt^{b-1}$$

h(t) est un décroissant si b<1, constant si b=1, croissant si b>1. Pour b=1 , on retrouve la loi exponentielle. Est également utilisée, la loi Gamma n.

2 - Probabilité de consommation.

C'est la probabilité de constater m défaillances durant l'intervalle (o,t). On la note $p_m(t)$. Remarque : $p_o(t) = N(t)/N(o) = v(t)$.

Calcul de $p_1(t)$. On divise l'intervalle (o,t) en r sous périodes de durée . Pour qu'au temps t on ait eu qu'une défaillance, il faut que l'équipement intial ait été défaillant (k - 1) et k (avec 1 < k <r) et que le remplaçant ait survécu de K à t.

$p(k\tau) = [N(k-1)\tau] - N(k\tau)]/N(o)$

et $v(t - k\tau) = N(t - k\tau)/N(o)$

Le produit conduit à :

$$p_1(t) = \sum_{k=1}^{r} p(k\tau).v(t - k\tau)$$

De manière générale :

$$p_m(t) = \sum_{k=1}^{r} p_{m-1}(t - k\tau).p(k\tau)$$

En notation continue :

$$p_m(t) = -\int_0^t p_{m-1}(t).v'(t)dt$$

3 - Taux d'approvisionnement.

En appelant $R(k\tau)$ le nombre d'équipements remplacés jusqu'au temps $k\tau$; le taux d'approvisionnement est : $\rho(k\tau) = R(k\tau) - R[(k-1)\tau]$

Le nombre d'équipements maintenu en état est $N(t)$:

$$N(t) = N.v(t) + \sum_k \rho(k\tau).v(t-k\tau)$$

Section 3 : L'implantation des centres de productions.

On ne donnera ici qu'un aperçu sur deux types de problèmes fréquents.

1 - L'équilibrage d'une chaine de production.

L'activité comporte une succession d'opérations à réaliser. Un poste de travail se définit par la prise en charge par une personne d'une ou plusieurs opérations (consecutives ou non). Le problème posé est celui de la définition de la chaine qui minimise le nombre de postes de travail nécessaire tout en équilibrant les charges de travail.

Ce problème peut être résolu :

- par programmation linéaire en nombres entiers,

- par procédure neuristique simple : les opérations sont classées par niveau (comme dans l'ordonnancement d'une série unitaire), puis on affecte à un poste des opérations en partant du niveau le plus bas, et en complétant son service et ainsi de suite
- par méthode de Monte Carlo en générant un grand nombre de séquences réalisables de postes de travail et en retenant celle ayant le plus faible nombre de postes (méthode COMSOAL).

2 - La localisation optimale des ateliers spécialisés.

Chaque atelier aura un emplacement (localisé géographiquement) donc autant d'emplacements que d'ateliers. Le problème est : à quel atelier affecter chaque emplacement existant ?

Entre les ateliers implantés vont avoir lieu des transports caractérisés par le trafic t_{ij} (quantité par exemple) et la distance d_{ij} (entre deux ateliers i et j). Le coût minimal sera obtenu par la minimisation de $\sum_i \sum_j t_{ij} d_{ij}$

Le problème peut être résolue par programmation linéaire, mais aussi par un algorithme simple itératif partant d'une première solution arbitraire. A chaque itération, on recherche la permutation de 2 affectations qui minimise le plus le coût de manutention parmi le C_n^2 = n(n-1)/2 permutations possibles (n étant le nombre d'ateliers), et ce, jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de permutations avantageuses. Toutefois, cette méthode ne garantit pas l'optimalité.