Peut-on observer l'activité des élèves et du professeur en classe, pour en évaluer l'efficacité et en déduire un conseil utile ?

Alain Mercier

Professeur en sciences de l'éducation
Didactique des mathématiques et didactique comparée

Directeur de l'UMR P3 "Apprentissage, Didactique, Evaluation, Formation"
(Université de Provence, INRP)

Je commencerai cet exposé en citant Guy Brousseau (site personnel de l'auteur) Epistémologie et formation des professeurs. Castel San Pietro, 2006 :

> « …/… L'épistémologie rassemble ce que l'humanité « sait », par ses penseurs, ses philosophes et ses savants, du fonctionnement des connaissances. Nous considérons que ce savoir appartient à tous et que chacun peut librement venir s'en instruire et en débattre : il est « objectif ».
> Considérons maintenant un individu ou un groupe humain. Il a une culture et surtout une expérience propre au sujet de toutes sortes de connaissances. Il a des connaissances, des savoirs et des croyances sur la façon de s'en servir et de les apprendre. Ces « connaissances » forment son épistémologie, personnelle, elles guident ses choix dans le traitement de ses connaissances…/…
> *Pour prendre les décisions qui s'imposent à eux, les professeurs utilisent explicitement un bagage épistémologique qui est construit empiriquement pour répondre aux conditions très spécifiques de la nécessité d'enseigner quelque chose, à quelqu'un qui n'en voit pas vraiment la nécessité…/…* C'est le seul moyen qui leur permet de soutenir leurs procédés didactiques et de les faire admettre par leurs élèves et par leur environnement.
> **Ce que croient le professeur, les élèves ou les parents sur ce qu'il convient de faire pour enseigner, apprendre ou comprendre les « savoirs transmis » joue le rôle d'une épistémologie pratique qu'il est impossible d'ignorer et d'éliminer***…/… C'est un phénomène général, universel, naturel, qu'il est donc indispensable d'étudier…/… »*

Je complèterai cette déclaration en précisant qu'**il faut étudier ce**

phénomène pour pouvoir intervenir efficacement s'il produit des effets indésirables, et en ajoutant que l'épistémologie pratique des élèves, qui doivent étudier ce qu'on leur enseigne, pour apprendre, pèse directement (tout comme l'épistémologie des professeurs) sur la forme des transactions que élèves et professeurs réussiront à faire vivre. Mais je préciserai aussi que l'épistémologie pratique des parents (ou plus largement de la société), qui doivent avoir de l'intérêt pour ce que les élèves ont à apprendre, afin que leurs enfants puissent devenir savants tout en demeurant leurs enfants est essentielle à la réussite finale d'un processus didactique.

Brousseau explique l'un des effets néfastes d'une certaine épistémologie pratique du professeur, que l'on peut observer :

> « Un professeur propose à ses élèves, un problème analogue à un problème qu'il leur avait posé précédemment mais qu'ils avaient mal réussi. Il espère qu'ils « verront » la similitude et qu'ils utiliseront la correction et les explications qu'il avait données pour reproduire la même méthode de résolution. Il recommande d'ailleurs fortement à ses élèves de chercher et d'utiliser ces analogies. Cette « heuristique » leur réussit car le curriculum est conçu pour favoriser la reprise et l'utilisation des connaissances enseignées. »

Ce professeur pense donc que ce procédé permet de désigner efficacement le savoir dont il vise l'apprentissage. Supposons alors que par exemple, on observe qu'il a posé l'exercice suivant :

> *« Pour faire une crème renversée pour quatre, Louis a trouvé une recette. Il faut : 4 œufs que l'on mélange avec 20 g de sucre, et un demi litre de lait chaud. Calcule les quantités de chacun des ingrédients (œufs, sucre, lait) pour 10 personnes.*
> *Réponse : Les quantités sont : .... Explique ton raisonnement :*
> *...*
> *........................... »*

Le professeur « corrige » et explique : « Pour une personne, il faut quatre fois moins. On mélange un oeuf et 10 g de sucre, puis on ajoute 0,5/4 l de lait. Pour dix personnes on prend dix fois plus que pour une soit, 10 oeufs et 100 g de sucre, puis on ajoute 5:4 l de lait. » Les expressions « quatre fois moins pour une et dix fois plus pour dix » portent le savoir sur la question. Le professeur pose alors une nouvelle question :

> *« Pour faire une mousse au chocolat pour quatre, il faut 2 oeufs, 100 g de chocolat et 30 g de sucre. Calcule les*

quantités pour huit personnes »,

et les élèves reprennent : « Pour une personne... » alors que l'observateur s'étonne : il suffisait de *voir* ou de *penser* que 8 est le double de 4, ce que « les élèves devraient savoir, puisqu'ils connaissent la table de quatre ».

On observe alors ce fait : **un procédé didactique (l'analogie) constitue une supercherie épistémologique**. L'élève produit une réponse exacte, mais ce n'est pas parce qu'il a compris sa nécessité mathématique ou logique à partir de l'énoncé, ce n'est pas parce qu'il a « compris et résolu le problème », mais simplement parce qu'il a établi une ressemblance avec le premier exercice et parce qu'il a reproduit une solution toute faite. **L'élève fait une citation mais pas une réponse.** Cet élève peut croire avoir compris la question de mathématiques alors qu'il n'a fait qu'interpréter une intention pour fournir une réponse conditionnée. Cet « effet de l'analogie », observable dans le cas proposé, est une des conséquences du *contrat didactique*. Mais chaque fois que le professeur obtient la réponse attendue il peut s'être produit.
Le professeur peut croire lui-même (et laisser l'élève ou ses parents croire) que l'élève a accompli une activité savante.

Heureusement, cela n'empêche pas certains élèves (selon leur épistémologie pratique personnelle) de comprendre effectivement la contrainte logique ou mathématique que la question peut porter, et d'y répondre par la mise en œuvre d'une opération intellectuelle authentique, mais tout se passe à l'insu du professeur et ne dépend donc plus de son action.

Nous avons d'autres ambitions pour la pratique du métier de professeur, mais pour les réaliser il nous faut comprendre les systèmes de contraintes qui produisent les effets que nous désirerions voir disparaître.

Comment procéderons nous, pour aller dans ce sens?

Dans notre questionnement, nous tentons d'arriver à une compréhension symétrique des positions dissymétriques des deux types d'acteurs des relations didactiques, professeur et élève. En les nommant ainsi nous les pensons comme *acteurs dans une même institution qui les produit solidairement*, sachant que le professeur a pour tâche principale d'*organiser des conditions favorables à l'étude* (ce qui peut induire le fait d'« enseigner » effectivement mais son travail ne se limite pas à cela), et que les élèves ont pour tâche d'*étudier les savoirs désignés par le professeur* (et non pas d'« apprendre », ce qui est l'enjeu de l'étude et ne peut jamais être garanti).

Ainsi, l'identification *par l'élève lui-même* **des savoirs qu'il doit étudier est une condition essentielle de l'étude. Cela en fait une condition de**

réussite de tout enseignement, une condition que l'on doit observer pour repérer par exemple les cas où elle n'est pas réalisée et où l'effet de l'analogie commande les comportements des élèves.

Une conséquence importante de cette découverte :

> ***la part de l'élève dans la réussite de l'enseignement est centrale, nous l'appellerons* étude**

On peut dire que par l'étude, l'élève s'enseigne à lui-même : c'est ainsi que l'on peut, sans enseignant ni système d'enseignement, décider d'étudier seul une question. L'étude comprend donc aussi bien l'enquête sur une question que les exercices d'acquisition d'une technique. Remarquons enfin qu'une personne ne peut s'engager dans l'étude que si elle s'avoue ignorante de ce qu'elle va étudier.

Nous allons donc poser le problème des conditions de l'existence de cette part d'autonomie de l'élève qu'est l'étude, afin que le professeur puisse imaginer des moyens de montrer aux élèves ce qu'est une étude efficace des questions qu'il a présentées. Nous le ferons ici dans le seul cas des mathématiques, puisque c'est la commande, mais il en va de même dans toute matière.

On décrit donc l'activité du professeur pour comprendre ce qui relève du *nécessaire* c'est-à-dire, des *techniques professionnelles acceptables* disponibles pour remplir les obligations déclarées, satisfaire aux attentes implicites et maintenir les conditions d'existence de sa position professionnelle, et ce qui relève du des *techniques personnelles ou sociales contingentes* c'est-à-dire, de l'aléa local, de la décision personnelle ou des habitus d'un professeur donné, quand aux manières de satisfaire aux nécessités de sa position.

Cependant, nous savons que l'activité de l'élève doit elle aussi répondre à des contraintes souvent incompatibles entre elles, explique Brousseau :

- celles portées par les *conditions effectives soit, cognitives* (le jeu a-didactique), qui déterminent une réponse originale mise en œuvre et l'organisation de connaissances spécifiques, mais qui ne la provoquent pas ;

- et celles portées par les *conditions didactiques soit, sociales* (la situation) qui ont pour objet de désigner l'enjeu d'apprentissage du jeu et de faire produire presque sûrement la réponse attendue, indépendamment de son mode de production.

C’est pour cela que, si l’épistémologie et les sciences cognitives peuvent rendre compte des réponses des élèves sous la seule première contrainte, elles ne peuvent pas prétendre aider les professeurs en ignorant la seconde. Inéluctablement les contraintes didactiques (sociales) priment les contraintes cognitives (individuelles).

Les méthodes d’analyse et les grilles d’interprétation des observations découlent de la distinction précédente :

L’*analyse dite « a priori » du système des contraintes* détermine la possibilité de comprendre la dimension personnelle du professeur et des élèves (la contingence) dans la conduite de leur activité commune (Mercier, 1998). Seront *didactiques* les contraintes qui sont, à première vue, dans l’exercice du métier de professeur, déterminantes du savoir transmis. Mais les contraintes pertinentes de l’analyse sont aussi bien selon le cas : linguistiques sociales psychologiques psychiques ou culturelles et c’est pourquoi les questions didactiques qui supposent des analyses comparées sont développées en sciences de l’éducation, dans des approches co-disciplinaires.

En voici un exemple. En début d’année scolaire un professeur engage, avec « ses élèves » (ils lui ont été attribués), une relation qui doit durer une année scolaire complète. Il préfèrera donc « sauver la possibilité d’une relation didactique ultérieure » que sauver immédiatement le contenu d’enseignement d’une relation didactique dont il maîtrise mal l’évolution, locale. C’est un phénomène bien connu : Molière a décrit comment le professeur de philosophie de Monsieur Jourdain maintient l’empathie avec son élève en faisant produire puis en recevant pour pertinente une réponse particulièrement naïve de ce bourgeois non gentilhomme et bien peu instruit. Il a décrit aussi comment les professeurs de danse et d’escrime, habitués à enseigner des aristocrates, n’ont pas cette même attitude pédagogique (qui a bien dû faire rire la cour).

Chacun de nous le sait d’expérience, on peut aujourd’hui, l'observer dans les diverses disciplines d’enseignement. Mais pour l’observer en jugeant de l’effet de ce type de décision d’enseignement, il faut pouvoir décider de la réponse à deux questions :

1) Est-ce que le professeur « tient » l’enjeu de savoir ou « négocie » en proposant un enjeu plus faible ? (Comme le fait aussi, dans le cas d’une toute autre discipline d’enseignement que la philosophie, l’instituteur Topaze dans la dictée célèbre décrite par Pagnol.)

Répondre à cette première question demande que l’on sache *décrire le savoir*. Une telle description se fait a priori, l’observation permet de vérifier que l’on ne s'est pas trompé sur l'objet qui faisait l'enjeu de la relation (et que le professeur peut déclarer par avance). Mais décrire le savoir qu'un professeur enseigne et plus encore le savoir d'un élève qui étudie, pose problème. Les mathématiques ne sont pas plus faites pour décrire les usages des mathématiques, dans les classes ou ailleurs, que le français n'est fait pour décrire notre langue et ses usages.

2) Est-ce que le professeur « réussit » à maintenir ainsi la relation, dans une configuration plus faiblement didactique ? (Comme justement, Topaze échoue à le faire : « l'élève le regarde, ahuri » note Pagnol, dont le père était instituteur et qui a dû observer ce genre de scène.)

Répondre à cette deuxième question suppose que l'on sache cette fois *décrire les relations didactiques*. C'est ce tentent les collègues de mon laboratoire, qui cherchent à identifier ce que je nommerai « le didactique » pour rendre compte des diverses formes observables et aider à imaginer d'autres formes possibles.

La clé de toute observation didactique est alors, vous l'avez compris, dans la possibilité de faire le lien entre les rapports des élèves et du professeur aux contenus de leur interactions et leurs rapports entre eux.

Nous théorisons cette question en disant que *leur action est conjointe*, que leurs interactions viennent du regard de l'autre sur cette action, que leur action est donc toujours adressée à l'autre, et que l'on observe donc ce que nous appellerons des *transactions* avec le monde, *actions* dans le monde en même temps que *signes* envoyés aux autres.

Sans doute, la forme de relation didactique la plus faible consiste sans doute à transmettre un texte exposant le savoir public comme s'il s'agissait d'une information : c'est un geste d'*ostension* du savoir. Le maître élit pour disciple celui qui est capable de voir par lui-même ce qu'il y a à « comprendre le contenu du texte » au delà de l'information qu'il contient : l'élève qui peut seulement « restituer le texte » est jugé « scolaire » et ce n'est pas un compliment.
Mais dans une école actuelle, le maître a obligation *d'enseigner*. Tout comme le professeur de philosophie de Monsieur Jourdain (le seul professeur dont Molière se moque) il doit *aider l'élève à réussir*, si bien que le travail de découverte de ce qu'il y avait à voir est finalement pris en charge presque en totalité par le professeur, qui est sûr d'avoir montré quoi faire mais n'est plus sûr que l'élève ait regardé en personne.

Des formes de relation didactique plus fortes et institutionnelles, telles qu'on les rencontre dans les écoles modernes, supposent des manières et peut-être des techniques ou même, des organisations technico-sociales permettant à des personnes en position de professeurs de réussir au moins partiellement ce que j'ai appelé *organiser et diriger l'étude* que les personnes en position d'élèves doivent, dans leur position, conduire pour *produire du savoir que le professeur se retient de leur désigner directement*.

Ces techniques supposent donc non plus l'exposition directe au savoir qui détermine la position de disciple d'un maître, mais
- **l'organisation d'un rapport de l'élève à des objets qui seront les médiateurs de leur entrée en rapport avec le savoir** *et ensuite,*
- **l'organisation de l'évolution de leur rapport à ces objets***, afin qu'ils passent de l'action sur ces objets à l'étude des manières de traiter une catégorie de problèmes issus de l'action ; puis, au partage de ces manières par un groupe social, avant de comparer leur production au savoir public qui fait l'enjeu de la relation didactique.*

Je présente ici en peu de mots l'essentiel de ce que Guy Brousseau a inventé : pour enseigner convenablement des mathématiques, il faut « en faire faire c'est-à-dire, en faire produire » et non pas « faire répéter un discours ou un comportement tout normalisé. »

Produire des mathématiques, pour en apprendre ?

C'est le travail des mathématiciens.

Pour cela il leur faut :

- produire les moyens de résoudre des types de problèmes les plus vastes possible,
- organiser les problèmes en types que l'on sait résoudre,

pour

- identifier ce que l'on sait,
- reconnaître ce que l'on sait faire,
- poser les problèmes qui demeurent.

Dans l'enseignement tel que nous le voudrions, c'est aussi le travail des élèves, qui ont, comme chaque génération humaine depuis des millénaires, à réinventer les mathématiques dont cette génération aura besoin... faute de quoi ces savoirs se perdront (on en connaît plusieurs cas dont le plus célèbre est celui de l'écriture décimale des nombres entiers, qui mettra deux mille ans à diffuser en occident depuis les chinois vers 1350 ac (décimal non positionnel) puis 800 ac (décimal positionnel non écrit), aux indiens en 595 pc puis par Al Kwarismi 783-850 à Bagdad, Gerbert 1000 à Rome et enfin Fibonacci 1202 à Pise, qui fonde une école d'abacistes pour le commerce). ***L'activité professionnelle des professeurs a donc pour but d'organiser la classe de mathématiques comme une communauté de producteurs de mathématiques.***
La fonction des écoles (relativement aux mathématiques) est en effet de permettre que les mathématiques soient réinventées pour être connues et développées, à chaque génération.

Bien sûr, un professeur ne peut faire cela que si son épistémologie pratique personnelle le lui permet (autrement dit, si son rapport aux mathématiques est celui d'un directeur de recherches, même s'il intervient sur des questions résolues depuis belle lurette).

Pour imaginer ce que cela suppose, avec un problème tel qu'on en rencontre dans les classes et en considérant qu'une classe soit organisée en organisme de production mathématique, prenons un premier exemple (le faire avec une feuille) :

> *« On plie une feuille de papier une fois, le pli la partage en deux morceaux. On plie de nouveau, on obtient trois plis qui partagent la feuille en quatre morceaux. Combien de morceaux obtient-on si on plie la feuille une troisième fois? »*

On remarquera que le travail mathématique est d'abord un travail *expérimental*. La question ne semble pas encore faire « un problème » quoique, si vous n'avez pas de feuille à votre disposition pour faire l'expérience matérielle, l'argument qui prouve le résultat n'est pas si simple. *Le problème n'advient que si la question posée devient plus générale*. Par exemple, si on demande le nombre de morceaux pour un nombre quelconque de pliages. Une question de principe se pose alors : sommes nous au bout de la généralité de la question, et si c'est le cas, quelles mathématiques peut-on en apprendre ?

Voici un problème proche:

> *« On trace, sur une feuille de papier rectangulaire, un trait parallèle à un bord, qui la partage en deux puis, un trait parallèle au bord suivant qui partage en deux chacun des morceaux obtenus. On obtient quatre morceaux (ce sont des rectangles sans trait de partage). Combien de morceaux obtient-on si on partage en trois dans un sens et en deux dans l'autre? »*

Cela est encore un problème de dénombrement à traiter directement mais si la question devient plus difficile... « On partage un rectangle en dix-huit dans un sens et en trente quatre dans l'autre, combien de morceaux élémentaires obtient-on ? » le problème peut commencer à advenir comme *type de question de dénombrement*. Bientôt, la classe pourra l'identifier comme un problème demandant le calcul du produit de deux nombres, un *problème de multiplication de deux entiers* (ici, 18x34=612). Si par exemple vous savez déjà les réponses pour des rectangles plus petits de huit sur vingt, dix sur quatorze, huit sur quatorze et dix sur vingt, vous chercherez à former une réponse à partir de ces problèmes plus élémentaires et précédemment résolus (comme je l'ai fait pour obtenir le résultat : 160+200+112+140=612), reconnaissant par là que le problème appartient à la même catégorie.

(Tandis que la question : « Combien de rectangles a-t-on ainsi tracés ? » débouche sur un autre type de problèmes, un problème demandant le calcul d'une combinaison et l'on note alors $C_2^{35} X C_2^{19}$ le calcul à faire : ici, (35X34/2)X(19X18/2)=(350+245)X(90+81)=595X171=104200-855=103345. Les deux questions ouvrent sur des mondes, mais leur rapprochement ouvre encore un monde nouveau, celui des « problèmes de dénombrement, secteur important du domaine des mathématiques discrètes ».)

Dans le cas du rectangle découpé en rectangles élémentaires, un problème de multiplication, le résoudre sert à apprendre à calculer tous les produits usuels. On apprend en effet qu'il suffit de les décomposer en produits partiels dont on fait la somme. On apprend aussi à identifier les questions de *dénombrement de collections que l'on peut disposer en rectangles* comme des problèmes de multiplication. Ainsi le problème « Paul a trente quatre chemises et dix-huit cravates, de combien de manières différentes peut-il les coordonner? » se traite immédiatement lorsque l'on organise chemises et cravates en un tableau rectangulaire de trente quatre sur dix-huit dit « tableau cartésien ».

Mais le problème tel quel ne provoque pas d'apprentissage : il faut encore que le professeur enseigne. Le professeur désigne aux élèves le type de problèmes, il en prépare la rencontre, il poursuit l'enseignement en le faisant suivre d'autres problèmes permettant aux élèves d'explorer et d'étudier les différents cas de l'algorithme de la multiplication. Cela suppose aussi que la catégorie « problèmes de multiplication » soit identifiée par le professeur et que son exploration systématique ait été explicitement mise au programme de travail des élèves (enfin, et enfin seulement, on peut leur demander de produire eux-mêmes et d'apporter des problèmes de multiplication des types les plus divers). Les travaux sur ce point sont publics, et connus.

Deux questions viennent alors :

Quelles mathématiques faut-il faire produire?

Comment organiser l'enseignement pour que les élèves produisent les mathématiques que l'on voudrait leur voir connaître?

J'ai pris volontairement un exemple relatif à l'opération de «multiplication, qui n'apparaît pas à beaucoup comme « un grand problème des mathématiques ». Pourtant, la technique de multiplication que permet aujourd'hui le système de codage des nombres que nous appelons « la numération décimale » est récente, elle date apparemment des abacistes pisans du XVe, c'est-à-dire, de l'école de Fibonacci. C'est la solution d'un grand problème et l'humanité a mis des millénaires à imaginer l'ensemble technique dont nous disposons aujourd'hui, une oeuvre culturelle.

J'affirme donc ceci : **ce que l'on appelle « le sens de la multiplication » ne peut pas exister en dehors de la réponse technique qui a été donnée au problème du calcul des produits de deux nombres; à l'origine, ce sens vient de la recherche directe du nombre des collections d'objets** nombreux, mais **que l'on peut organiser en rectangles**.

Retrouver ainsi *la valeur anthropologique des savoirs enseignés* est à mon avis la tâche de ceux qui s'occupent de former les professeurs, d'évaluer leur action, d'organiser le système d'enseignement de manière à assurer son évolution vers une meilleure efficacité.

Je vais développer un peu plus longuement et dans deux directions différentes (1- pratique : une analyse de l'activité de la classe de maternelle, 2- théorique ; une analyse a priori du

problème de raisonnement proportionnel) deux cas d'un enseignement et de la manière dont on l'observe, dans le cadre que j'ai donné.

Soit, en maternelle, le « jeu du trésor »

Examinons la gestion du jeu par un enseignant de grande section (ZEP, enfants de Moyenne section, à Marseille).

La suite des activités qui composent *l'ingénierie didactique* mise en oeuvre est issue du COREM (le Centre pour l'observation et la recherche sur l'enseignement des mathématiques) associé à l'Ecole Jules Michelet de Talence entre 1970 et 1999 et dirigé par Guy Brousseau dont on sait qu'il a obtenu de l'International Congress on Mathematics Education le premier prix Felix Klein pour le travail dans cette école. Nous avons reproduit cet enseignement à Genève, Rennes, et Marseille, dans plusieurs écoles contrastées. Les vidéos que je montrerai viennent du suivi en continuité, sur une année scolaire, du travail de deux classes marseillaise durant l'année 2009, notre projet étant la réalisation d'un DVD pour la formation des professeurs des écoles.

L'objectif de l'ingénierie était de mettre les élèves de la classe en situation de faire l'inventaire d'une collection, *désigner les objets d'une sous-collection*, *exprimer des relations à l'aide d'un code*.

On propose donc une situation qui met en oeuvre le tout selon quatre phases.

Voici les phases

Le jeu vise d'abord la constitution d'une **boîte au trésor,** qui sera le référentiel des différents jeux à venir.

La boîte contient une collection, au sens ordinaire d'objets que l'on collecte et rassemble et au sens didactique d'objets que l'on peut énumérer et lister, pour les compter par exemple.

Ce sont des petits objets hétéroclites que le professeur apporte et ajoute au au fur et à mesure, et que les élèves nomment avant qu'ils ne soient ajoutés à la collection.

I. Dans la première phase, le professeur installe le trésor et le jeu de la boite vidée.

Le professeur rassemble tous les élèves autour de lui et prend la boite contenant le trésor.

Le trésor est le nom donné dans la classe à la collection, normalement *associé aux actions de cacher et de découvrir. Ce nom permet de jouer de la surprise et de mobiliser l'action de deviner.*

Le professeur fait jouer chaque jour et ajoute chaque fois un ou deux objets nouveaux, jusqu'à obtenir une collection d'une quarantaine d'objets comprenant à la fois des objets ressemblants et d'un des types de formes géométriques simples suivants

cylindriques, sphériques, plats rectangulaires, ronds,

mais aussi de diverses tailles matières (mou, dur) couleurs ou usages (balle de pingpong, de tennis, de golf),

ou aisément reconnaissables parce que singuliers comme les

jouets humanoïdes (poupée, animaux) ou mobiles (voitures, avions)

Chaque temps de jeu est bref.

La boîte du trésor comprend 36 objets, de nombreux objets semblables, et elle permet, dès le deuxième jour, de jouer au jeu collectif de « la boite vidée ». Voici quelques uns des objets de la boite, dans une des classes expérimentées

Le professeur interroge un élève volontaire, celui-ci dit un nom d'objet. Si le nom n'est pas celui qui a été choisi, le professeur ne fait rien; si l'objet nommé est encore dans la boite le professeur l'en sort, et le pose par terre à la vue de tous ; si l'élève nomme un objet déjà sorti ses camarades peuvent le constater et lui disent « il est déjà sorti ! »
Le jeu s'achève lorsque les élèves déclarent qu'il n'y a plus d'objet. Alors le professeur retourne la boîte : s'il reste des objets ils ont perdu ; si elle est vide ils ont gagné.
Le jeu est pratiqué quotidiennement, au début avec deux objets seulement. C'est **un jeu de mémorisation, qui s'appuie sur les noms propres de chacun des objets** du trésor, des objets valorisés par l'action même de leur dénomination (par les élèves).

> **Au cours du jeu de la boîte vidée, les propositions des élèves ont le sens d'une assertion sur l'appartenance**. Par exemple, c'est le sens d'une réponse à la question « la bougie a-t-elle été sortie de la boîte ? ».
> **La sanction appartient à la situation** en ce sens que l'erreur ainsi que la répétition ou l'oubli sont sanctionnés immédiatement de façon évidente par la présence vérifiable des objets visibles.
> **L'apprentissage visé porte sur ce savoir-faire, en situation.**

Il se produit au cours des 16 séances-jeux de cette phase, chaque séance durant au maximum 15 minutes.

Chaque matin, après avoir joué à « la boîte vidée, le professeur augmente le trésor. Il fait nommer par les élèves les nouveaux objets qu'il a apportés (il organise un débat sur le nom et l'usage ou il les nomme lui même explique leur usage et leur fait répéter le nom) puis remet tous les objets dans la boîte tandis que les enfants les nomment en chœur (certains tentent spontanément de les compter). Ainsi, **tous les enfants se familiarisent avec les objets du trésor et s'accordent sur la façon de les nommer**.

Dans cette première phase le code est verbal, la liste est produite collectivement et elle demeure implicite, les objets manipulés sont matériels et familiers, la dénomination des objets est bien justifiée.

II. La seconde phase modifie la situation, en deux temps, pour rendre nécessaire la production d'une liste

La liste sera d'abord produite individuellement, et reposera sur l'usage d'un code écrit permettant de désigner une sous-collection d'objets du référentiel. Cette phase poursuit donc le jeu de boîte vidée.

Chaque enfant est interpellé en élève par la nécessité d'apprendre c'est-à-dire d'acquérir un comportement nouveau, mais le professeur a un choix:

- Le jeu peut être joué publiquement, ce qui permet aux joueurs d'être volontaires, aux non-joueurs d'être observateurs ou juges du succès et des erreurs et oublis, ce qui constitue les stratégies en savoirs partagés, comme il se doit dans une idéologie républicaine,
- Le jeu peut être joué primitivement, ce qui permet au professeur l'observation de stratégies individuelles dont le développement sera alors poursuivi, pour chaque élève jusqu'à son terme spécifique comme il se doit dans une idéologie libérale.

Dans un premier temps, le professeur prend devant les élèves quelques objets du trésor qu'il place dans une nouvelle boîte.

Le trésor devient donc un référentiel d'objets, l'univers en théorie des ensembles.

Chacun peut les voir, les manipuler. Puis la boîte est fermée, rangée, et personne ne peut plus y toucher. Dans les séances suivantes, chaque enfant volontaire vient jouer.

Un élève peut décider d'apprendre en regardant les autres faire.

S'il nomme tous les objets contenus dans la boîte il a gagné sinon, il a perdu.

Dans la première partir de cette phase, le professeur cache deux ou trois objets et les élèves se souviennent assez facilement, d'un jour sur l'autre, des objets cachés. Mais au bout de cinq à dix fois, il porte ce nombre de trois à douze. C'est ce qu'on appelle **« un saut informationnel qui transforme la situation et nécessite une stratégie nouvelle »**

Bien sûr la mémoire des enfants ne leur permet pas de réussir une telle performance et ils l'anticipent.

Quelques enfants proposent alors de dessiner les objets (ce type de proposition n'est plus, aujourd'hui, spontané: on pense qu'il s'agit de l'intervention de l'enseignement de l'écriture comme moyen universel de désignation or, les élèves de cinq ans ne savent en général pas écrire beaucoup plus que leur propre nom).

S'ils ne le proposent pas, le professeur joue sur le fait que tout le monde sait comment faire pour résoudre ce type de problèmes : **il faut faire une liste** (et si on ne sait pas écrire, on peut dessiner).

En ce sens on peut voir une fois encore que le professeur doit, pour enseigner, non pas guider l'exécution de gestes techniques qu'il aurait démontrés (aider les élèves à recopier l'écriture des noms des objets de la liste) mais bien plutôt leur désigner la classe générale de technique dont relève ce qu'il veut faire produire.
C'est la leçon principale de mon intervention ici car **je désigne ainsi ce que l'on doit observer, d'un enseignement actuel, pour juger de son efficacité.**

La méthode de la liste sera adoptée progressivement par tous au cours des séances suivantes (d'abord, un élève fera une liste chez lui, avec l'aide de sa famille, mais il l'oubliera; ou il fera la liste en classe mais ne s'en servira pas pour jouer; ou il fera une liste incomplète sans compter le nombre de ses dessins, ou il dessinera deux fois un objet sans s'en apercevoir, etc.) Plusieurs séances successives se déroulent alors ainsi : le matin, la maîtresse met douze objets dans la boîte, devant les enfants ; la boîte est à leur disposition jusqu'à midi, sur une table autour de laquelle il y a six chaises. **C'est un des ateliers de la classe** et les enfants disposent de feuilles de papier et de crayons ou stylos. Les enfants éprouvant le besoin de faire une liste peuvent représenter les objets sur une feuille, ils peuvent échanger librement entre eux. Quand tous ont fini, la boîte est enfermée dans un placard. Le lendemain, les enfants qui veulent jouer viennent à tour de

rôle ; la maîtresse sort au fur et à mesure les objets nommés. S'il a fait une réponse exacte l'enfant a gagné et il inscrit une signe de réussite en face de son nom.
La description d'une collection est donc un message qui se fabrique à l'aide d'un code, en voie de constitution. Ici, l'émetteur et le récepteur du message sont la même personne, de sorte que des codes spontanés et implicites peuvent fonctionner plus facilement et être ajustés de façon empirique. L'élève peut identifier les causes d'erreur. Peu à peu les codes personnels évoluent, mais toutes les difficultés ne sont pas surmontées. En effet pour dessiner et reconnaître un objet parmi 36 les élèves doivent choisir des signes bien distincts les uns des autres, faciles à mettre en correspondance avec les caractères choisis et à mémoriser.

III. La troisième phase va alors consister à créer des équipes de joueurs, dont l'un fait la liste et l'autre la lit. Un accord sur les codes doit ainsi être trouvé. Enfin, l'ensemble de la classe sera invité à décider, pour chaque objet, d'un code conventionnel.

L'efficacité de ce dispositif d'enseignement est, sous les conditions données, la même en ZEP à Marseille, en classe ordinaire en Bretagne, en classe rurale au Tessin, et en centre ville à Genève dans l'école de « la maison des petits » fondée par Piaget.

Dans notre équipe,

(et j'en profite pour remercier Denis Leroy, professeur des écoles mis à disposition de l'IUFM Aix-Marseille et Serge Quilio professeur des écoles mis à disposition de l'INRP, les producteurs des données que je vous ai montrées Marie Liandier et Fazia Bahli, ainsi que Francia Leutenegger, professeur à l'université de Genève que nous avons invitée pour mettre en place la comparaison dont je vous ai parlé)

nous interprétons ce phénomène par les faits suivants qui sont des choix de Fazia, le professeur d'essai filmé ici, à Marseille, choix dont j'ai montré quelques réalisations dans les trois minutes d'enregistrement que vous avez pu voir :

> **1) Le professeur a fait jouer les élèves collectivement, c'est-à-dire en public, permettant à chacun d'apprendre des autres ;**
>
> **2) le professeur a montré explicitement que l'enjeu d'apprentissage portait actuellement sur chacun des élèves, qui devait apprendre maintenant : l'enjeu n'est pas que « on sache, comme classe » mais que « je sache, comme élève de la classe où chacun des autres doit aussi savoir » et que « je sache, selon la technique que nous partageons » ;**

3) le professeur a montré que le problème posé ne concernait pas seulement l'école, mais bien tout le monde, au point que tout adulte l'a résolu et que la solution est universelle : la liste, que même des personnes analphabètes utilisent comme l'a montré Bernard Lahire. C'est en ce sens que je dis que le jeu du trésor, la liste et la production d'un code commun permettant de communiquer par écrit sont présentés ici comme des acquis anthropologiques, transcendant toute culture spécifiée. Pour moi, la clé d'un enseignement laique efficace est dans ce type de travail, que l'on peut et doit faire dans toute matière et pour tout objet d'enseignement, afin que les professeurs utilisent les moyens d'enseignement dont leur profession devrait disposer si l'enseignement était considéré comme un travail de professionnels et non pas comme la passion de quelques uns qui se dévouent pour s'occuper des petits et qui sont, de ce fait, principalement des femmes.

Soit, posé à des étudiants bien plus âgés, un questionnaire...

Vos élèves essayent de résoudre le problème de proportion suivant :

Dans l'école, le rapport entre les garçons et les filles est de 3 pour 5. S'il y a 40 étudiants dans le club de mathématiques, combien y il a t-il de garçons ?

a) Décrire une activité que vous voulez mettre en œuvre pour déterminer le type de stratégie que vos étudiants ont utilisé pour résoudre le problème.

Voilà 2 solutions :

La solution de June : Il y a 24 filles, ainsi il y a 16 garçons.

La solution de Kathy : Il y a 15 garçons.

b) Quelle question poserez- vous à Kathy pour déterminer si elle peut justifier sa réponse et son raisonnement ?

c) Quelles suggestions pouvez-vous fournir à June pour l'aider à trouver l'approche correcte ?

d) Quelles stratégies pouvez-vous utiliser pour encourager vos élèves à réfléchir sur les réponses et leurs solutions ?

Ce problème se situe dans le « champ de la proportionnalité ». Il peut être résolu dans un cadre arithmétique ou algébrique. Pour interpréter les réponses possibles et les enseignements nécessaires, nous allons construire ce que nous appelons *le site de la question* c'est-à-dire, *l'ensemble des savoirs et des connaissances pouvant servir à sa résolution*.
Cet ensemble de savoirs et de connaissances, qu'un professeur doit donc en principe l'avoir à l'esprit lorsqu'il pose la question, c'est ce que l'on appelle aux USA le **pedagogical content knowledge** et chez nous l'**épistémologie professionelle** d'un professeur : ce dont il devrait avoir une connaissance approfondie, pour enseigner.
Mais ce n'est en général pas le cas, parce que le plus souvent, son épistémologie personnelle lui suffit si elle lui indique une réponse d'élève possible et exacte : **souvent, comme nous le faisons dans la vie quotidienne, un professeur se comporte non pas comme celui qui est comptable du contenu proposé aux élèves mais comme celui qui est comptable de la conformité de leur réponse aux questions qu'il leur pose**.

Pour s'engager dans une résolution arithmétique il faut :

a) Soit travailler par tâtonnements, du type « si les garçons sont exactement 3 alors les filles sont 5 et la classe comporte 8 élèves, si les garçons sont le double, 6, les filles sont le double, 10, et la classe comporte 16 élèves », etc. et l'on ne peut pas être sûr d'arriver à un total exact de 40 élèves avant de l'avoir fait.

b) Soit disposer d'une technique langagière « le nombre des garçons est à 3 ce que le nombre des filles est à 5 ; sachant que la somme des nombres de garçons et de filles est 40 et que 3+5 = 8, comme 40 = 5X8 il y a cinq fois plus de garçons (donc, 15) et de filles (donc, 25). »

c) Soit penser que « le nombre des garçons est proportionnel au nombre des filles, même dans le club de mathématiques », ce qui se traduit par exemple dans un « tableau de proportionnalité » permettant de calculer par un « produit en croix »

filles	garçons	total
5	3	8
	g	40

ce qui donne 8g = 3X40, g = 3X(40/8) = 3X5 = 15

d) Soit penser que « ces questions se traitent en proportions. La proportion de garçons est de 3 pour 8 élèves soit, $\frac{3}{8}$, cette proportion est respectée dans le club de mathématiques où il y a 40 élèves, comme 40X3/8 = 15, il y a 15 garçons. »

Pour s'engager dans une résolution algébrique il faut :

e) Soit écrire l'égalité des deux fractions suggérées par l'énoncé et « traiter l'égalité g/3 = f/5 comme une équation ». Il faut, pour s'engager dans cette voie, penser que l'équation a au moins une solution telle que g+f = 40.

e) Soit écrire le rapport des garçons aux filles g/f = 3/5 et traiter cette égalité comme une équation, puis chercher une fraction équivalente non réduite telle que g+f = 40.

f) Soit penser qu'il y a deux inconnues liées et écrire les deux équations qui modélisent la situation :
g/3 = f/5 et g+f = 40,
puis résoudre le système :
5g/3 = f et g+5g/3 = 40,
8g/3 = 40, 8g = 120, g = 15.

g) Soit, penser à modéliser la situation « 40, le nombre des élèves du club de mathématiques, est la somme du nombre g des garçons et de celui f des filles, qui sont des multiples respectifs de 3 et de 5 » par une expression

unique comportant autant d'inconnues que de questions ouvertes comme par exemple
$40 = g+f = 3k + 5k = (3+5)k = 8k$, ce qui montre
*que k divise 40, g, et f, et
*que $k = 40/8 = 5$ soit
*que $g = kX3 = 5X3 = 15$

On remarque ainsi que la notion de « proportionnalité » appartient au domaine du travail arithmétique, parce que les modèles algébriques posent implicitement l'hypothèse de conservation du taux de garçons dans l'échantillon qu'est le club de mathématiques, et parce que le tâtonnement ne traite pas la question par une modélisation explicite, tandis que le travail arithmétique demande de formuler presque explicitement cette hypothèse : *« le club de mathématiques est un échantillon valide de l'école. »*

Mais d'où vient donc la réponse « 16 garçons et 24 filles » ? On le comprend, elle vient d'un usage automatique d'une des techniques de mobilisation de la notion de proportion, qui engage à proposer un raisonnement proche de la réponses d) :

« 40 étant le nombre total, la proportion des garçons étant 3 pour 5, on divise 40 par 5 et on le multiplie par 3 pour avoir (40/5)X3 = 8X3 = 24. Cela devrait conduire à une hésitations mais on peut se rattraper en pensant que les élèves restant étant 16 et que ce sont donc les garçons, moins nombreux, tandis que 24 est le nombre des filles. »

Le site mathématique de l'exercice interroge les contenus notamment, dans le cadre arithmétique, la justification du passage du rapport initial, celui de l'énoncé, entre le nombre de garçons et le nombre de filles, au rapport entre les nombres de garçons ou de filles et celui du total des étudiants.

Voici en effet le site du problème :

Substrats (connaissance)	Objets	Techniques	Concepts(1)	Concepts(2)

Nombres	Entiers	Card d’une union disjointe	Lemme de Gauss	
	Rapports	Passage d’une proportion relative à une pp globale	Proportionnalité	Arithmétique
	Fractions	Tableau de proportionnalité		
Corps des Rationnels		Equation du premier degré	Equations	Algèbre
Quantificateurs		Système d’équations		

(Si un entier divise un produit de deux entiers, il divise l’un des deux)

Pour guider les élèves dans la maturation de leurs connaissances, les professeurs U.S. ont tendance à utiliser une approche concrète ou illustrée avec des tableaux (de proportionnalité par exemple) ou des diagrammes et des manipulations tandis que les professeurs chinois tentent de revenir sur la construction du concept. La méthode employée est un jeu de questions. Or les professeurs efficaces « savent comment poser des questions (NTCM, 2000, p18) et comment utiliser ces questions pour améliorer la pensées des étudiants ».
Comment poser les bonnes questions ? Le concept site mathématique permet-il de s’interroger efficacement ? , permet-il de construire des questions adéquates dans le cadre du PPCK ?
La discussion sur ces questions est menée dans le prochain paragraphe.

Discussion :

Le site mathématique d’un exercice comprend l’architecture des savoirs et connaissances. Il se construit à partir de l’énoncé et des réponses possibles. En interrogeant ces éléments, il devient le fruit d’un questionnement.
La première question 4.a du questionnaire porte sur les techniques mises en œuvre par les élèves. Le site mathématique présente les techniques de l’exercice, il est ainsi au cœur de la réponse.
La question 4.b donne implicitement l’opinion de l’équipe qui mène l’enquête (la réponse de Kathy n’est pas justifiée). Le site mathématique en explicitant les concepts, techniques et objets, présents dans l’exercice, permet de répondre à cette question.
Les deux dernières questions sont plus pédagogiques, une optique possible serait de construire à la méthode cartésienne un exercice type tiroir qui permettrait de scinder la difficulté.
Dans ces deux dernières questions, le site permet au professeur de ne pas privilégier l’un des deux champs mathématiques. Le professeur pourra ainsi englober l’exercice dans son site mathématique en construisant deux exercices

basés l'un sur le cadre arithmétique, l'autre sur celui algébrique. Le professeur chinois en donne un des exemples possibles.

Les questions à poser pour appréhender les conceptions des apprenants font partie de l'enquête qui doit être menée pour comprendre les réponses erronées aux questions, elles permettent de découvrir des indices. Pour les concevoir le professeur peut s'appuyer sur le site mathématique de l'exercice et il reste libre de moduler la formulation en fonction de ses objectifs pédagogiques et littéraires. L'enseignant doit tenir compte de ces diverses conceptions, sources possibles d'erreurs pour concevoir son enseignement. Le professeur doit s'appuyer dessus en montrant les limites de ces préconceptions au sens d'une dé-transposition, acte de modifier les connaissances dont le domaine de validité n'est pas connu en une connaissance dont le domaine de validité est connu [Brousseau Antibi 2002] et ainsi « rentrer dans la tête de l'élève »pour le mener vers l'apprentissage. En accord avec Lee. S. Shulman 1986 dans le cas où les préconceptions sont erronées « les professeurs ont besoin de la connaissance des stratégies les plus fructueuses pour réorganiser la compréhension des apprenants, parce que ces apprenants ne sont probablement pas à considérer comme des ardoises vides ». Le site est donc un outil éclairant la connaissance pédagogique du contenu (au sens de Shulman). Remarquons que le questionnaire de l'enquête est proche de l'évaluation concours posée en France aux futurs professeurs des Ecoles tant par la partie théorique que celle didactique.