

**Avertissement :**

Conformément à la gestion des écrits des élèves dans la leçon professée (Cf. paragraphe 2-1), le professeur Alain Mercier a laissé à « une élève » le soin de rédiger le cours. [Merci donc à Catherine-Marie Chiocca.](#) Le texte qui suit a été établi à partir des notes prises et de la transcription d'un enregistrement audio : c'est pourquoi les références des travaux ou articles cités n'ont pas été systématiquement recherchées.

## **OBSERVER LES ÉCRITS DE L'ÉLÈVE, UN MOYEN DE LA FORMATION DES PROFESSEURS ?**

**« Comment décrire l'activité didactique des élèves, à partir de l'observation de leurs écrits ? Comment utiliser cette description dans les formations : quelles en sont les leçons ? »**

Pour proposer quelques éléments de réponse à ces questions - que le thème de ces Journées me suggère - je fais l'hypothèse de l'existence d'un *enseignement « ancien régime »* et d'un *enseignement « nouveau régime »*. Mais dans le changement de régime, nous avons perdu un certain nombre de gestes d'enseignement que nous ne savons plus réaliser. Il nous faut donc réussir à inventer au plus vite les gestes efficaces du nouveau régime, sinon les habitus de l'ancien régime qui ont survécu au changement vont occuper tout l'espace disponible et on sera dans l'illusion d'une nouveauté qui sera inexistante en pratique.

Sous mon hypothèse, la question de l'écrit est une question sensible, comme j'espère le montrer maintenant.

### **1 - Les conditions de l'interprétation d'un comportement (des élèves) : la notion de système didactique.**

J'ai découvert récemment l'usage suivant de la notion de système didactique : parler de système didactique « professeur élève savoir », permet de se dégager de l'idée de classe. En effet, le système didactique n'est pas restreint à la classe. Le système didactique se noue en début d'année entre un professeur des élèves et un savoir, il se termine à la fin de l'année et tout ce qui concerne le rapport des élèves au savoir enseigné pendant la période relève du même système didactique. Ainsi lorsqu'un élève, dans une réunion familiale, à Noël, rencontre son oncle mathématicien qui lui demande : « qu'est ce que tu fais en ce moment en classe ? », et que l'élève répond : « [...] d'ailleurs j'ai une question est-ce que tu pourrais me dire [...] ? », cet échange fait partie du système didactique. Il faut le penser comme tel parce qu'il est un effet du système didactique auquel appartient l'élève.

L'extension de ce qu'on doit regarder quand on regarde un système didactique est beaucoup plus grande que ce qui se passe seulement dans le temps de la classe<sup>1</sup> et qui peut aisément être observé.

Ce qui se passe en dehors de la classe a un effet relatif - relatif et pas absolu, car il y a toujours une souplesse dans le système<sup>2</sup> - sur ce qui se passe en classe et se situe dans le

<sup>1</sup> Il est étonnant de découvrir cela récemment puisque mes travaux ont porté sur ce que les élèves faisaient en dehors du temps de la classe. Mon travail m'a montré que cela faisait partie du système didactique.

<sup>2</sup> C'est en délimitant une description qu'on considère un système comme fermé, c'est en particulier le cas des systèmes physiques : « Vous faites flotter une boîte dans de l'eau, et l'eau est contenue dans un aquarium, est ce que l'aquarium compte dans le système ? - Non pas l'aquarium. Il faut que l'eau ne s'en aille pas bien sur, mais l'aquarium ne compte pas et sa forme peut changer, toutes les choses (pertinentes pour la modélisation du système) demeurent égales par ailleurs ». Un système c'est ça : une unité pour faire des descriptions.

même système didactique. En retour, ce qui se passe hors classe n'est pas sans être influencé par ce qui s'est passé en classe et dans le même système didactique. Le professeur a donc une grande responsabilité dans ce qui se passe hors classe, et cette responsabilité est d'autant plus grande que les élèves trouvent hors classe moins de soutien social ou familial à leur activité. Sans doute, certains groupes sociaux offrent à leurs enfants un grand soutien et leurs membres savent créer des micro systèmes didactiques (auxiliaires du système didactique principal qu'est la classe). Leurs enfants ont de ce fait un énorme avantage en classe. Mais, moins les élèves bénéficient de ces types de soutien et plus le professeur doit être conscient de ce que le système didactique n'est pas limité à ce qui se passe dans sa classe; pour gérer précisément depuis sa classe ce qui se passe à l'extérieur<sup>3</sup> et qui a trait au savoir enseigné comme aux objets para- et protomathématiques qui l'accompagnent<sup>4</sup>.

## 2 - Deux régimes de l'enseignement (des mathématiques) :

### 2.1 La leçon (professée) et les manières d'étudier associées

#### **L'organisation rationnelle d'une discipline dans un enseignement en leçons : théorèmes et démonstrations, l'exposé des raisons du savoir.**

Dans l'*ancien régime didactique*, la leçon commande. On appelle *leçon* l'organisation rationnelle de la discipline exposée en théorèmes et démonstrations, dans laquelle les raisons du savoir sont exposées. La suite des raisons du savoir forme une théorie pouvant rendre compte des techniques efficaces dans le traitement des problèmes dont la discipline s'occupe. Le jeu didactique est alors le suivant : le professeur, qui expose la théorie, montre les techniques de traitement des grands problèmes identifiés comme caractéristiques de la discipline. Les élèves font les exercices en mobilisant les résultats partiels exposés par le professeur – les théorèmes. C'est à dire qu'ils s'exercent en traitant... les petits problèmes qui sont les cas particuliers du grand problème qui a été exposé dans le cours. Ils s'exercent non pas à la résolution du grand problème, (on leur a montré comment on fait), mais à la résolution des petits problèmes. Le jeu : « grands problèmes, cas particuliers des grands problèmes que sont les exercices, mise en œuvre de la théorie et construction de techniques sur des petits problèmes (les exercices) et les différentes sous classes de petits problèmes », est net. Les théorèmes sont ici, pour les élèves, des formats de techniques et donc, les théorèmes ainsi que la connaissance concrète des conditions de viabilité des théorèmes forment la culture de la discipline. Cela discipline (au sens propre : la discipline *contraint* l'action) les usages des résultats techniques que sont les théorèmes.

*Ainsi, l'entrée des élèves dans la culture d'une discipline qui s'expose en leçons suppose que les leçons professées soient accompagnées du travail des exercices, où les théorèmes sont mis à l'épreuve des problèmes particuliers du champ, par un travail qui est le lot des élèves.*

Le professeur désigne, dans ses leçons, les champs de problèmes que les élèves doivent étudier, mais c'est à eux de mener l'étude qu'il leur propose, en cherchant à résoudre les exercices qui accompagnent les leçons. Cette manière d'enseigner a vécu, parce que l'on sait aujourd'hui que « les raisons du savoir ne sont pas les causes de l'apprentissage ». Cette découverte est le produit des travaux de psychologie de la connaissance, sa diffusion a eu un effet inattendu : on a en effet voulu maîtriser les causes de l'apprentissage, et ne pas se contenter d'exposer les raisons du savoir en laissant les causes de l'apprentissage à la libre activité des élèves dans l'exercice.

<sup>3</sup> Cf. cours de Yves Chevallard (1995) sur la figure du professeur, à l'école d'été, et puis l'article de RDM.

<sup>4</sup> Chevallard (1985, 1991) La transposition didactique, chapitres VI à VIII.

Mais cette découverte n'aurait pas eu le succès que l'on sait si le rendement de l'enseignement d'ancien régime ne diminuait pas dramatiquement avec la démocratisation de l'accès à l'enseignement. En effet, on peut observer que le type de travail des exercices qu'un tel enseignement nécessite n'est le fait que d'une faible part des élèves d'un enseignement d'élite et d'une part infime des élèves d'un enseignement généralisé. Le taux de réussite dans l'ancien régime didactique devient donc très faible. Une trop faible proportion des élèves rentre chaque année dans ce schéma et apprend effectivement ce que l'on attend. C'est à dire qu'à l'occasion du travail sur les exercices ces élèves apprennent les théorèmes, leurs conditions d'emploi, et donc identifient les grands problèmes que les théorèmes résolvent et comprennent ce qu'étaient ces problèmes. Car chacun sait qu'on peut pendant très longtemps, faire les exercices proposés sans comprendre quelle est la grande classe de problèmes auxquels ils appartiennent avant qu'un beau jour enfin on prenne conscience des problèmes que les techniques apprises servaient à résoudre.

Dans l'enseignement d'ancien régime, l'observation des écrits des élèves (lorsqu'ils mettent en œuvre les théorèmes) permet de comprendre comment ils mènent l'étude, pour leur propre compte, en éprouvant la pertinence des théorèmes enseignés. Certaines techniques d'enseignement indispensables à la réussite de l'organisation d'ancien régime se sont perdues sans qu'on ait senti leur perte. Or, certains des gestes d'étude correspondants, qui ont disparu et semblent presque inimaginables, étaient remarquablement efficaces. Je voudrais vous montrer sur un exemple comment les écrits des élèves étaient complètement encadrés et comment la question des écrits était gérée dans un enseignement d'ancien régime.

***(Exemple du cours d'algèbre de Bertrand à l'Ecole Polytechnique, en 1884, rédigé par les élèves comme une série de leçons traitant successivement des problèmes d'un champ).***

*Ceci est le cours d'algèbre de M. Bertrand à l'école Polytechnique en 1884-1887, cours rédigé par les élèves de l'Ecole. C'est à dire que l'activité des élèves est de rédiger le cours et comme vous pouvez le voir il y a les numéros des leçons et des problèmes.. ; voilà par exemple le 41<sup>ème</sup> problème, l'intégrale définie machin, que nous allons calculer, [...] et on voit qu'on va sortir des techniques et avoir un problème : il faudrait pouvoir calculer cette intégrale qui n'est plus nulle comme dans les exemples précédents etc... Donc on a un problème et on va développer des techniques mathématiques à partir de là.*

*Je vous donne un autre morceau du même cours. C'est marqué : « un problème général » et je vous ai découpé un problème général que vous n'êtes pas en situation de comprendre parce que vous n'êtes pas dans la série des problèmes que ça ordonne bien sur. Simplement donc, on veut avoir un multiplicateur pour que etc, pour qu'il existe une relation algébrique entre ces deux grandeurs ... Je vous donne la conclusion : [...] donc on a la relation algébrique, et voilà la réponse : ayant la relation algébrique maintenant nous avons [...] et on peut maintenant se poser la question : « est ce que cette équation différentielle a une intégrale algébrique ». Voilà, c'est un vrai grand problème : Jacobi a traité ce problème d'un point de vue plus général, etc. Donc l'exposé du cours c'est bien... des leçons telles que nous les avons décrites.*

On remarque que, par rapport à des cours actuels, le commentaire des calculs est particulièrement développé. Chaque leçon porte explicitement sur un champ de problèmes et le professeur montre les grandes techniques d'attaque des problèmes de ce champ. Ensuite il y aura bien sûr des exercices, pour les élèves. Mais l'écriture, la rédaction du cours, est déjà un geste d'étude, essentiel. Le professeur désigne par là aux élèves le fait que dans leur activité ils n'ont pas simplement à résoudre des exercices mais ils ont à s'occuper de la classe des problèmes dont ces exercices relèvent et de l'exposé général de la manière de résoudre les exercices de cette classe de problèmes. Les raisons du savoir leur sont vraiment données.

Pour autant, peut-on garantir que cela va produire le savoir que l'on attendait ? Seulement chez certains élèves, qu'il faut soigneusement sélectionner pour cela, parce que chez les autres ça ne produit aucun apprentissage. Ainsi, un régime d'enseignement a des propriétés ergonomiques, ou institutionnelles. Il fonctionne parce qu'il assure un certain nombre de gestes que nous ne voyons plus, que nous ne savons plus voir, qui ont disparu puisque « bien

sûr, on n'enseigne plus ainsi » ; il ne fonctionne que pour les élèves qui participent d'une certaine culture de l'étude.

Dorénavant, certaines des techniques d'étude d'ancien régime peuvent donc faire défaut sans que personne – ni élèves, ni professeurs - n'en ressente plus le besoin : ainsi en est-il, par exemple, de l'étude que supposait *la question de cours* qui faisait un bon tiers de la note des compositions trimestrielles, et *la question de baccalauréat* qui pouvait porter sur les deux années de préparation. Leur disparition a sonné le glas de « l'étude des techniques de résolution des grands problèmes qui sont exposées dans les leçons », elle a d'ailleurs sonné aussi le glas des leçons à apprendre. Parfois cependant, il en demeure des traces et les « questions de colle » des classes préparatoires peuvent porter, officiellement du moins, sur le contenu d'une leçon, donné en cours.

On observe donc une organisation didactique plus ou moins complexe, bâtie sur le schéma suivant : les élèves écrivent le cours (le texte officiel du savoir enseigné) dans un cahier qui fait référence, font au tableau la démonstration de l'étude des exercices qu'ils ont menée et rédigent une copie de leur travail personnel relatif à certains exercices importants, dans des devoirs dont ils soumettent au professeur « une copie ». La place de l'écrit dans l'étude est alors clairement définie, qu'il s'agisse de l'écrit réservé à l'élève comme de l'écrit qui est de la responsabilité du professeur.

*Autre exemple, « La mécanique et la gravitation universelle » d'Emile Borel, expose les résultats mathématiques relatifs à un champ de problèmes sans organiser l'étude de ces résultats et par conséquent, bien que Borel ne retranche rien sur les questions mathématiques, l'ouvrage ne comporte pas d'exercices. Emile Borel est directeur honoraire de l'école normale supérieure. Ce petit détail dit quel est le type de locuteur et à qui il s'adresse. Ce n'est pas rien, la gravitation universelle, même sous sa forme « vulgarisée ». Observons d'abord ce que sont les théorèmes qui y figurent : par exemple, « le moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un plan est égal au moment d'inertie passant par un plan parallèle passant par le centre de gravité augmenté... » Les choses ont ici des noms qui permettent d'en parler. Voilà un des éléments qui permet d'avoir du texte. Les calculs sont assez peu développés mais extraordinairement commentés. Cet ouvrage a deux propriétés : beaucoup de commentaires et pas d'exercices. Il fonctionne donc comme une conférence. C'est un ouvrage d'éducation scientifique Borel y présente toutes les techniques mais il n'assume pas que vous les appreniez. C'est pourquoi il les commente longuement et bien sur c'est pourquoi il ne donne pas les exercices qui permettent de se les approprier.*

On comprend mieux pourquoi il est difficile, aujourd'hui, d'avoir autant de texte dans un ouvrage décrivant des mathématiques. D'abord, parce qu'on n'a pas à notre disposition tous ces mots pour désigner toutes ces choses qu'on voit à l'œuvre. C'est en fait parce que la technique est aujourd'hui pratiquée : la pratique est silencieuse ; tandis que Borel ne propose pas à son lecteur d'entrer dans une pratique. Le travail didactique n'est pas pris en charge et l'interaction proposée se suffit de la lecture, c'est à dire d'une interaction professeur élève sans étude de l'élève conduite à l'extérieur de ce premier moment.

### **En résumé :**

Un problème difficile, posé par une organisation didactique fondée sur le rapport *Leçons/Exercices*, est demeuré sans solution : comment organiser l'étude pour les élèves qui ne rentrent pas spontanément dans le cadre disciplinant que constitue cette organisation didactique ? Ces élèves en effet ne produisent pas d'écrits acceptables, et c'est le seul signe d'inadéquation qu'ils donnent. Pour penser un enseignement plus efficace nous nous sommes depuis longtemps engagés sur les voies divergentes que nous proposaient les théories psychologiques de l'apprentissage.

## 2.2. L'exemple (donné à voir). Les organisations scolaires de savoirs : les disciplines

### **L'organisation rationnelle d'une discipline dans un enseignement par l'exemple : techniques et validations, l'exposé des manières du savoir.**

S'il y a un ancien régime c'est qu'il y a un *nouveau régime* ou du moins la tentative de créer la révolution. J'ai tenté de décrire l'ancien régime sans porter de jugement de valeur, dans la mesure où nous sommes tous impliqués dans la promotion d'un nouveau régime qui n'advient toujours pas de manière satisfaisante (comme dispositif stable, robuste, fidèle). Nous sommes tous responsable de la fin de l'ancien régime, et nous sommes tous les mains dans le cambouis à essayer de faire fonctionner le nouveau. Attention de ne pas échouer. Nous avons vécu une révolution ratée, nous avons eu à la suite six contre révolutions en vingt ans, c'est à dire une instabilité complète du régime qui s'en est suivi. Est ce qu'aujourd'hui on est en 1848 ou à la Commune ? Je n'en sais rien mais on est malheureux de ne pas avoir abouti dans notre révolution et il faudrait essayer de faire le bilan. Dans les années septante et huitante<sup>5</sup>, une nouvelle façon de faire est venue progressivement se proposer. Les premiers signes de son apparition sont venus des attaques contre le cours dicté<sup>6</sup>, alors que celui-ci marquait déjà la disparition du cours rédigé par les élèves dans le cahier de cours.

Les élèves devaient « être actifs » disait-on partout - ce qui signifiait que l'activité d'écrire n'apparaissait pas comme activité intellectuelle - parce que (les travaux de Piaget l'avaient paraît-il montré) la connaissance provenait de l'activité d'exploration des problèmes rencontrés en personne par le sujet psychologique. *Agir pour abstraire* était le mot d'ordre<sup>7</sup>. Devenu de ce fait directeur d'une étude que les élèves ne pouvaient mener que chacun pour son propre compte, le professeur ne pouvait qu'organiser les conditions favorables à l'activité d'exploration et, le cas échéant, aider la classe à produire une synthèse des connaissances produites. Les conditions de validité de cette thèse furent explorées en France par Guy Brousseau, qui montra que l'activité des élèves devait, pour aboutir à une synthèse possible, comporter trois phases distinctes :

- l'action sur le monde, sans doute, mais sous certaines conditions (en particulier, la nécessité de reprendre une action inefficace suppose que la validation de l'efficacité de l'action appartienne à l'élève : ce n'est en général pas le cas des actions proposées aux élèves, en classe) ;
- la formulation des stratégies d'action supposées permettre la réussite dans des situations semblables (et la formulation est une action d'un type particulier : elle doit donc trouver dans la situation même les moyens de sa validation) ;
- la validation collective des formulations produites, considérées comme description des stratégies efficaces pour la résolution des problèmes du type étudié (et la validation elle-même est une forme d'action, etc.) C'est alors seulement qu'il pouvait, selon les observations de Brousseau, être question *de produire un texte de synthèse* qui puisse faire référence pour les élèves de la classe : cette synthèse est l'aboutissement du *processus d'institutionnalisation*. Cette réponse, validée mais complexe, ne permettait pas de faire

<sup>5</sup> Je rappelle que c'est français et qu'il n'y a pas de raison. Ça ferait quand même un sacré bénéfice, d'utiliser une dénomination régulière. Voilà, j'emmerde donc Vaugelas et le snobisme de l'école française, qui l'a suivi !

<sup>6</sup> Le cours dicté est une forme faible du cours rédigé par les élèves puisque le professeur prend la responsabilité de la rédaction..

<sup>7</sup> pour plusieurs raisons : la première c'est qu'on pense que c'est l'activité de l'élève qui lui permet d'apprendre et que c'est les théories de l'apprentissage qui doivent permettre de comprendre comment faire évoluer l'enseignement. La seconde c'est qu'on est structuraliste et qu'on pense que les structures vont naître de l'activité et justement les structures Piagetienne sont les structures Bourbakistes donc tout le monde est content.

évoluer rapidement les techniques d'enseignement et de produire une organisation didactique robuste. Elle n'a donc pas été diffusée.

Mais les choses évoluèrent en fait sans grand contrôle, de réforme en réforme, vers un état à peu près stable que l'on peut décrire aujourd'hui rapidement comme un *nouveau régime* : **sa description sera notre appui dans l'interprétation des productions écrites des élèves.**

De fait si je regarde ce qui existe aujourd'hui comme organisation didactique en jugeant d'après les ouvrages qui sont publiés, je trouve la chose suivante :

- Premièrement les activités préparatoires proposent des situations où les élèves doivent, entre guillemets agir (en tout cas ils ont une consigne et ils doivent agir théoriquement pour rencontrer le problème ou la classe de problèmes qui va être mis à l'étude). Evidemment la situation proposée n'a en général pas les propriétés pertinentes pour produire ce qu'il faut ce qui fait qu'elle n'ouvre pas le champ de problème à l'activité des élèves et évidemment, de ce fait, le mieux qu'on puisse espérer des élèves c'est qu'ils observent quelque chose et qu'on puisse leur désigner ce qu'il y avait à voir. On s'aperçoit que finalement ça fonctionne sur : regardes, qu'as-tu remarqué ?

- Deuxièmement le professeur va dire ce qu'il fallait remarquer pour ne pas que l'élève s'y trompe en remarquant autre chose. Les techniques d'enseignement correspondantes sont connues et les histoires de Toto qui en dénoncent les effets sont classiques : « Leçon sur le pluriel et le singulier : les mots *souris* et *gaulois* ont quelque chose en commun ; c'est quoi ? » demande le professeur... - « C'est les moustaches ! s'écrie Toto. » Ben non, ils ont en commun le *s* au singulier. Donc « il faut remarquer ce qu'il faut remarquer », c'est toujours la même chose<sup>8</sup>. L'ostension ne peut plus être ici l'ostension d'une théorie puisqu'on regarde quelque chose pour lequel on n'a pas de théorie. Du coup on se retrouve avec l'ostension ... de ce qu'il y avait à voir !

En fait y a là un petit moment qui n'est pas évident mais qui me semble exister à peu près dans tous les cas : le professeur (ou l'ouvrage) démontre sur un exemple la pratique qui va être mise en place, la pratique standard, normale, attendue. C'est une démonstration au sens de la démonstration des performances de l'aspirateur-balai Tornado par le vendeur Tornado. C'est une démonstration pratique, ce n'est plus la démonstration d'un théorème. C'est toujours une technique qui est démontrée mais ce n'est plus la démonstration des raisons d'être théoriques du théorème, c'est une démonstration pratique de son effet dans un cas particulier. Mais finalement ce que l'on appelle la méthode qu'il faut retenir de la démonstration - ostension déguisée là encore - c'est un théorème, sauf qu'il n'a pas ses conditions d'emploi : il est donné sur un exemple. Tandis qu'un théorème pris dans une leçon était donné avec l'extension de ses usages. Donc, on a une démonstration pratique à la place d'une démonstration de raisons et ce que l'on obtient c'est une procédure pratique à la place d'un théorème.

Les activités préparatoires proposent quelques situations où il est demandé aux élèves d'agir, pour leur permettre de rencontrer le problème mis à l'étude. Mais cette action doit être autonome et le plus souvent, la situation proposée ne permet pas d'éprouver l'efficacité de l'action engagée puis, le cas échéant, de reprendre cette action (Il faut pour cela que la situation ouvre à l'activité des élèves tout un champ de problèmes, dont les premiers sont accessibles aux élèves tandis que les suivants résistent évidemment). De ce fait, les activités préparatoires consistent souvent en *observations*, repérables à la consigne : « Que remarques-tu ? » Ce qu'il fallait remarquer, c'est le problème dont l'étude va être engagée. Il n'est pas

<sup>8</sup> Dans le procédé didactique de l'ostension. le professeur disait ce qu'il y avait à apprendre et la classe de problèmes il l'a désignait et puis il l'exposait. Elle est déguisée au sens où c'est l'élève qui doit découvrir et en fait il faut lui montrer.

nommé et ce n'est pas utile : le professeur le dira tout à l'heure, lorsqu'il montrera aussi ce qu'il fallait faire.

Alors, on peut observer que la *synthèse* consiste en l'*ostension* de la réponse pratique, supposée venir naturellement au devant de la scène didactique. C'est « Ce qu'il faut retenir » de l'action que le professeur *démontre* en réalisant l'action devant la classe ; mais dans cette organisation, *il démontre pratiquement* une technique d'action, sur un exemple, (tandis *qu'il démontrait en raison* la technique de traitement d'une classe de problèmes). Enfin, le professeur fera réaliser l'action par les élèves, sous le contrôle de la description dont il a accompagné sa démonstration. Cette description, c'est la « Méthode » qui résume la leçon qu'il faut tirer de l'activité préalable ou de l'exemple actuel. Les exercices serviront alors à s'exercer... à mettre en œuvre la Méthode (qui est donc *règle d'action*, comme une sorte de théorème, un *théorème pratique*).

L'ensemble organisé des méthodes enseignées, qui forme la discipline, n'est plus ici l'objet d'un exposé, parce que le résultat de cet enseignement est, en principe, *l'incorporation personnelle des méthodes*, par chaque élève, pour soi-même. Les mathématiques sont présentées comme connaissance personnelle et non plus comme savoir socialement défini : les élèves qui entrent avec succès dans cette nouvelle discipline sont donc mathématiquement éduqués (et non plus instruits de l'usage d'un savoir). En quelque sorte, *les bons élèves savent faire pratiquement ce qui leur est demandé sans avoir à se demander ce qu'ils savent : pour eux, il n'y a là plus rien à savoir, il n'y a plus qu'à faire* (comme le Code de la Route, dont les règles n'étaient utiles que dans le moment de l'apprentissage : il n'est utile de les rappeler qu'aux élèves qui ne les ont pas apprises en leur temps ou qui n'ont pas compris leur leçon pratique).

On attend enfin des exercices que *l'incorporation de la méthode* se fasse. C'est à dire que la méthode se transforme en instrument psychologique. Par incorporation. On pourrait dire : si ça fonctionne c'est que c'est Skinnerien ou que c'est de l'imitation. Si ça marchait comme on l'a pensé en « agissant pour abstraire », il n'y aurait plus d'exercices ou plutôt, les exercices seraient les cas particuliers des théorèmes que l'on a abstrait et non plus le moment où l'on incorpore la méthode que le professeur a déposée. D'une certaine façon, le schéma d'organisation actuel est typique du fonctionnement empirique que j'ai décrit.

### Conséquences

Le problème posé par l'organisation *didactique de nouveau régime* : « *Activités\Exemples et Synthèse\Exercices* », vient de ce que les mathématiques sont dorénavant *une pratique*. De ce fait, comme les pratiques sont silencieuses, **les élèves n'écrivent pas** - sinon parce que l'action qu'ils mènent comporte la gestion de traces graphiques (comme c'est le cas avec les figures géométriques ou le travail de calcul algébrique) - et ils produisent des traces sans les commenter. Au mieux, ils indiquent, par des flèches ou d'autres signes, quelque chose de l'action réalisée : mais pourquoi écriraient-ils un commentaire de leur action, dans la mesure où ils n'ont ni texte de savoir faisant référence ni lexique des objets qu'ils manipulent ? Ainsi, et j'énonce là un effet prévisible de l'organisation actuelle de l'enseignement dans sa version la plus courante, le plus remarquable à observer dans les écrits des élèves est sans doute *que les élèves n'écrivent pas*, pas même lorsque le professeur le demande (Pourquoi montreraient-ils l'usage des règles s'ils savent les utiliser et que peuvent-ils en dire s'ils ne le savent pas ?) Sauf, bien sûr, si une part de la responsabilité de l'étude leur a été donnée : en principe, leurs écrits éventuels témoigneront donc de ce fait..

### Qu'en est-il de l'écrit ?

Il y a deux types d'écrits. La manipulation des systèmes sémiotiques mathématiques proprement dit. Il est montré par le professeur et on attend que les élèves le manipulent de façon conforme à l'imitation du professeur. On voit comment ils font les élèves, ils essaient de refaire l'exercice eux mêmes juste en changeant ce qui paraît avoir changé et en reproduire le schéma.

Donc on a l'organisation : « activité, exemple, synthèse, exercice ». Les élèves n'y ont rien à écrire, jamais. Pourquoi ? Parce qu'on leur demande de pratiquer et que dans la pratique on n'a pas besoin d'une théorie de la pratique. La pratique ça se pratique, ça s'incorpore c'est à dire que la pratique est toujours silencieuse du point de vue des explications qu'elle se donne et qu'utiliser une technique dans un cas particulier ne suppose pas de rhétorique. Pour la synthèse, qui est ce que le professeur dit de ce qu'il y avait à voir, pas de quoi écrire non plus. De même pour les exemples, on n'écrit que l'exemple d'une pratique et ensuite, on pratique. Il n'y a donc plus rien jamais à écrire, comme texte accompagnant l'action, texte agissant comme élément de la pensée au travail. Des ostensifs sont manipulés, il y a bien un travail sémiotique. Mais pas d'écriture en langue naturelle qui ait un rapport avec cette manipulation. J'en déduis que si aujourd'hui des élèves écrivent des choses qui ressemblent à des phrases en français c'est qu'ils ont eu l'occasion de s'attaquer à un problème dans le cadre d'une situation où ils avaient des moyens d'agir pour essayer de résoudre le problème mais où ils étaient obligés de communiquer leur résultats.

### **En conclusion**

Les élèves écrivent pour les mêmes motifs que tout le monde, parce qu'ils en ont besoin. C'est à dire que les élèves écrivent s'ils ont des éléments techniques, enfin des outils à mettre en œuvre dans une configuration pour laquelle ils ne disposent pas des techniques toutes prêtes et qu'il leur faut construire des techniques nouvelles. Mais une telle exigence est presque impossible à tenir face à des élèves habitués à se voir proposer par avance, depuis toujours, des exemples techniques tout prêts à l'emploi.

**Ainsi, si aujourd'hui les élèves écrivent, c'est qu'ils ont eu l'occasion de s'attaquer à un problème dans le cadre d'une situation où ils avaient certains moyens de l'étudier et où ils rencontraient la nécessité de communiquer leurs résultats** parce que ils n'avaient pas la mise en œuvre automatique d'une technique donnée par contrat : **les élèves écrivent pour les mêmes motifs que tout un chacun.**

*Exemple tiré de Lettres à une princesse d'Allemagne, de Descartes, cité par Chevallard dans « La dimension ostensive de l'activité mathématique »*

**C'est pour cela que l'observation des écrits des élèves est essentielle dans l'observation et la formation : elle permet de juger des situations didactiques qui leur ont été proposées ; et de la manière dont le professeur fait vivre ces situations.**

Dans le nouveau régime de l'enseignement, le commentaire rédigé porte nécessairement sur la pertinence de telle ou telle technique et de son usage. S'il y a à écrire c'est là dessus. Ce qui signifie que, évidemment, on peut décider entre plusieurs techniques et que ces techniques ont un nom. C'est à dire qu'on ne donne pas aux élèves à titre d'exercices uniquement des questions relevant de la technique qu'on veut qu'ils apprennent et qu'on leur a démontrée.

Donc on n'a presque aucune chance qu'un élève soit dans la situation de produire un tel commentaire. Je dois bien dire que si Descartes le fait dans l'exemple cité ici, c'est aussi parce qu'il écrit à la princesse d'Allemagne Elisabeth et dont il est éloigné. On pourrait considérer

que c'est le discours du professeur, mais c'est un discours du professeur qu'aucun professeur n'a de chances de tenir, parce qu'il faudrait qu'il ait le choix entre plusieurs techniques dans un problème. L'enseignement par ostension déguisée ne met jamais le professeur en situation de tenir ce genre de discours.

C'est ce que je voudrais maintenant montrer, sur quelques exemples. Et je voudrais vous montrer qu'il est possible d'aider les professeurs à développer le travail écrit de leurs élèves. Il suffit (mais ce n'est pas peu de chose !) de travailler sur le motif des techniques connues, **car dans le monde de la pratique, on ne parle des techniques que lorsque l'on cherche à les faire évoluer, pour résoudre des questions nouvelles.** Retrouver, au profit des élèves, un espace de discours suppose, dans le monde des mathématiques pratiques, de trouver des motifs forts pour amener les élèves à nommer les techniques qu'ils ont à mettre à l'épreuve et à commenter l'action nouvelle qu'ils conduisent.

### 3 - Argumentation, et exemples (en forme d'exercices)...

Ce que je viens de dire n'est pas une critique du nouveau régime didactique. C'est pour moi un constat et un problème. Comment former les professeurs à se sortir de cette situation ? C'est à dire comment les aider à amener les élèves à parler des techniques qu'ils emploient ? Quels types de transformations faut-il faire dans l'enseignement. La clé, à mon avis, c'est qu'on ne parle des techniques que lorsqu'on cherche soit à faire évoluer une technique dont on dispose dans une situation nouvelle, soit à produire une technique nouvelle en bricolant à partir des morceaux de techniques, des morceaux venus d'ailleurs et en produisant un bricolage. Mais attention pour ça il faut accepter que des objets proto-mathématiques reçoivent un nom et que les élèves produisent du commentaire. Et pour montrer à quel point les techniques sont silencieuses, je vous montre une technique qui pour moi me sert toujours d'emblème parce que personne ne la connaît.

#### 3.1. Quelques techniques, dans leur exposé silencieux :

*On a mélangé à 80 kg de café robusta à 3F25 le kg, 25kg d'arabica pour obtenir un mélange à 4 frs que l'on pourra vendre après torréfaction et perte de 60% de masse à 12f HT. Quel était le prix au kg de l'arabica ?*

A cette époque les classes de problèmes étaient les problèmes de la vie courante. Il s'agit d'une technique de calcul barycentrique, c'est à dire de calcul de moyenne. 4f est le prix moyen. Comme toute technique, elle est silencieuse. Il n'y a aucune explication à donner, c'est une technique. Si vous savez pas faire vous savez pas, si vous savez vous avez tout de suite compris. Je peux vous donner une explication de la technique bien sur mais c'est une explication qui n'est pas une démonstration.

*Vous écrivez 80kg à 3,25F, 25kg à un prix inconnu. Vous voulez à 4F. De 3.25 à 4 vous avez 0.75. Ce 0.75 vous le multipliez par 80 et vous le divisez par 25, ça vous donne 2F40, il faut les rajouter aux 4 frs pour compenser.*

*Démonstration : On a perdu 0.75, 80 fois, il faut les regagner avec 2F40 25 fois. Donc l'arabica coûtait 4f +2F40, 6F40 au kg*

Je vous rappelle la définition d'une technique d'après Marcel Mauss dans son *Manuel d'ethnographie* : « Certaines techniques ne supposent que la présence du seul corps humain. Les actes dont elle comporte l'accomplissement n'en sont pas moins des actes traditionnels,

expérimentés et efficaces. L'ensemble des *habitus*<sup>9</sup> du corps sont des techniques qui s'enseignent et dont l'évolution n'est pas finie. La technique de la nage se perfectionne chaque jour. Elle sera étudiée à l'aide de la photographie et si possible du cinéma. L'accouchement : position de l'accouchée, réception de l'enfant, sectionnement du cordon, l'allaitement, étude du portage, le sevrage, etc. L'étude des techniques de l'enfant comportera l'étude du berceau et on voit que les techniques s'instrumentent d'outils, le berceau, puis éducation de la vue, de l'oreille de l'ambidextrie, usage de la main gauche, les déformations, scarifications, etc. »

Autres exemples de techniques, mathématiques cette fois :

\* développement décimal de la fraction  $1/19$

\* démonstration du théorème de Pythagore : silence.... Je vous la commente pas, je vous la montre. Elle est attribuée à Bezout :

*les triangles sont dans le rapport du carré de leurs hypoténuses. Ca se dit comme ça donc ça a un nom ça s'appelle les triangles sont dans le même rapport que le carré de leur hypoténuse. Donc la somme de deux est au troisième ce que les carrés sont au troisième et la question est réglée. Le seul problème c'est que ça suppose que, puisque c'est les rapports de carrés, on n'est pas dans les rationnels ni dans les entiers et c'est le problème de Pythagore. Si Pythagore s'est posé ce problème c'est parce qu'il savait ça.*

\* Une autre plus raffinée que je trouve très jolie.

*L'aire d'un triangle rectangle est la moitié de celle du rectangle donc elle est mesurée par sa taille. Il y a donc une fonction de l'angle et de l'aire et à partir de là vous pouvez faire ce petit calcul qui vous démontre très rapidement le théorème de Pythagore avec la notion de fonction et puis la propriété la même.*

Vous n'avez pas besoin de connaître la fonction en question. Cette propriété vous suffit.

\* La multiplication védique

\* La limite d'une suite géométrique

\* Le dessin de la clinique...

« Quand il n'y a qu'à faire, il n'y a rien à dire. » (Delbos et Jorion, la transmission des savoirs)

### 3.2. Les commentaires, qui accompagnent la mise en œuvre technique

Considérons l'enseignement des problèmes avec la banque des problèmes que vous avez vu. On laisse les élèves développer leur propre système sémiotique pour s'attaquer au problème. Seconde phase on pose des problèmes tels que ce système sémiotique ne permet pas de répondre et on lance un débat dans la classe sur les manières de répondre. L'idée d'écrire algébriquement le système d'équations se pose en troisième. Mais le professeur ne donne pas de technique pour traiter les systèmes d'équations. Il l'écrit et renvoie les élèves au fait qu'il faudrait savoir s'en débrouiller. On donne une troisième série de problèmes dans laquelle les élèves ont à développer des manières de faire avec cette écriture algébrique en disant on l'écrit comme ça, c'est le modèle du problème et on essaye de se débrouiller maintenant pour trouver des manipulations qu'il y a. Les élèves se lancent dans des manipulations tout à fait intéressantes au terme desquelles le professeur peut dire : il y a une technique qu'on va standardiser qui s'appellera l'addition, l'autre qui s'appelle la substitution et puis il y en a d'autres que vous avez inventé, bien d'autres, (5 ou 6 sont inventées par les élèves) qui sont aussi pertinentes et on peut se poser quelques problèmes vis-à-vis de ces techniques.

Je voulais vous montrer le résultat de cet enseignement : voilà le contrôle qui est posé à la fin de l'enseignement, 7 séances, ça c'est la huitième séance. Contrôle de mathématiques<sup>10</sup>.

<sup>9</sup> (le terme *habitus* vous voyez il vient de Mauss.

<sup>10</sup> Il y a deux sujets parce qu'on distribue en quinconce pour les copiages.

Résoudre les systèmes suivants, purs, par la méthode de votre choix. Puis deux problèmes que l'on a posé.

*Dans un théâtre la salle compte 400 places. Le balcon à 18€ le parterre à 23€. quand le théâtre est plein la recette est à 12800 et puis une histoire de rectangle, de périmètre, on double sa largeur. Donc des problèmes que le professeur a librement choisi et qui sont standards pour la classe.*

Voilà ce que font les élèves. Et comme vous voyez quelque soit l'enseignement une fois que la technique est en place, elle est silencieuse. De ce point de vue là les effets sont absolument les mêmes. La technique standard n'a pas besoin d'explication. Un élève qui a un doute et qui écrit quelque chose que l'on trouve rarement en algèbre : je choisis la méthode d'addition, je choisis la méthode substitution. C'est à dire qu'il modélise mais il a deux méthodes à sa disposition. Elles ont pris une existence que n'ont pas d'habitude les méthodes. On trouve d'autres choses. Des élèves qui ne sont pas complètement dans l'algébrisation et qui se battent avec le problème encore. 4 classeurs + 2 feutres = 14€<sup>11</sup>. Il s'agit en fait du prix des classeurs et du prix des feutres bien sur. Le grand problème de la modélisation des problèmes avec des grandeurs est qu'on ne sait pas quelles sont les grandeurs qui sont en relation. Ici l'élève ayant une vérification il a une réponse et il vérifie de façon tout à fait convenable. Il sait bien que ça va pas et il tente sur la page d'après une algébrisation. Il écrit bien  $4x+2y=14$  mais après il sait pas le traitement algébrique. Cela dit, il produit la réponse ce qui n'est pas le cas général. Voilà des élèves qui ont besoin d'un peu plus d'explications : on soustrait, on simplifie par 3... Tout ça c'est bien des outils algébriques que l'élève est capable d'investir et qui sont pas explique comment tu as fait. Qui répond pas à une injonction du professeur mais qui sont le moyen de contrôle de l'action qu'il mène. Lorsque la technique n'est pas complètement instrumentée on a besoin d'un contrôle par une plus grande sémiotité de son action<sup>12</sup>.

Les élèves qui sont moins assurés ont la possibilité, le bénéfice est là, d'avoir des manières de conduire la technique avec une plus grande sémiotité. Cette plus grande sémiotité venant du commentaire qu'ils font et qui est un moyen de contrôle de leur action.

Les groupes exposent leurs manières de faire. La consigne était vous avez 4 problèmes il faut une manière de les résoudre tous et donc on essaye de mettre à l'épreuve une manière de les résoudre tous. Vous avez des dispositifs sémiotiques où on retrouve l'accolade pour l'addition qui est très économique.

Ici, les élèves calculent le PGCD et trouvent la réponse et on sait pas ce qu'ils ont fait. C'est assez étonnant. Pour le premières ils ont fait une soustraction. pour le deuxième aussi mais pour le troisième ça marchait pas et ils ont fait le PGCD. Il faut que le professeur résiste au fait qu'il y a un groupe qui produit cette technique qui va disparaître tout simplement par ce que des techniques bien plus efficaces vont être montrées par d'autres élèves et que les élèves de ce groupe ne vont plus jamais refaire des pgcd ou des soustractions et puis les variables didactiques vont changer, l'espace des problèmes nécessaires donc la question va mourir de soi.

### **Conclusion :**

ces phénomènes montrent essentiellement que la problématique de la remédiation est dramatique. Ici le professeur ne fait pas une remédiation aux erreurs des élèves. Il n'est pas en

<sup>11</sup> D'ailleurs je vous signale que c'est assez rigolo parce que vous ajoutez des classeurs et des feutres et vous trouvez des euros, c'est quand même une opération sportive. Ca c'est la question des grandeurs que racontait André (Rouchier ?) tout à l'heure.

<sup>12</sup> Cf. la thèse de Mariana Bosch au fur et à mesure qu'il y a incorporation il y a réduction de la dimension ostensive. On a besoin de moins en moins de choses pour contrôler ce qu'on fait. On n'a plus besoin de rien dire mais au bout d'un certain temps chacun sait que on n'a plus besoin non plus d'écrire  $x$  et  $y$  pour résoudre les équations. Il suffit d'écrire les 4 nombres et de travailler sur le tableau que représente ces 4 nombres.

train de faut laisser venir les erreurs par ce que les erreurs sont l'effet d'une connaissance, puisque ce ne sont pas des erreurs. C'est un travail de production de techniques et évidemment au début on n'a pas les bons outils. Donc il y a des techniques à travailler.

Ce travail et ses inventions de techniques, ce moment de bricolage doit être assuré, mais c'est pas un moment de : on laisse venir les conceptions fausses des élèves et on fait de la remédiation, surtout pas. La théorisation de cette position du professeur face à l'activité des élèves, à mon avis, est dramatique quand à la gestion de ce genre de chose. L'idéologie dominante sur ces questions ne nous amène pas à mon avis vers une solution rapide. Mais si on s'attaque au problème on a quelques éléments quand même pour imaginer ce qu'on pourrait faire.