ECOLE POLYTECHNIQUE

Majeure Sciences de l'Espace — Fluides hétérogènes

Petite Classe Nr. 1

1. ENTROPIE D'EN GAZ PARFAIT

En partant de la loi d'état et en utilisant la seule relation de Gibbs, montrer tout d'abord que l'énergie interne massique d'un gaz parfait ne dépend que de sa température. En notant *Cp* et *Cv* les chaleurs spécifiques massiques respectivement à pression et à volume constants, donner les expressions de l'entropie massique du gaz en fonction de T et ρ, puis de T et p.

2. ENTROPIE "DE MELANGE"

Dans un mélange idéal de gaz parfaits, chaque constituant occupe tout le volume du mélange avec la pression p_i. Donner la loi d'état du constituant i dans le mélange. Si :

$$S_i^0(T) - R\,Log\,\frac{p}{p_0}$$

est l'entropie d'une mole de constituant i à l'état pur, quelle est l'entropie d'une mole de i dans le mélange? En déduire la variation d'entropie due au mélange à T et p donnés pour une mole de i et pour l'unité de masse de mélange.

3. BILAN DE NASSE GLOBAL

A partir des bilans de masse des espèces d'un mélange, établir le bilan de masse global.

4. DENSITES DE FLUX ET DERIVEES PARTICULAIRES

—

-

$\underline{W}=0$, $\underline{W}=\underline{U}i$, $\underline{W}=\underline{U}$, $\underline{W}=\underline{W}$

En déduire l'expression de $\underline{J}_{WF}$ en fonction de $\mathcal{J}_F$, ρ, f, $\underline{U}$ et $\underline{W}$.

5. GENERALISATION DE L'APPROXIMATION DE SHVAB-ZELDOVICH

On part des hypothèses habituelles de l'approximation de Shvab-Zeldovich, sauf en ce qui concerne le régime permanent. De plus on associe un coefficient de diffusion $\mathcal{D}_i$ à chaque espèce. Etablir les équations des espèces et de l'énergie en régime instationnaire en utilisant les mêmes variables que pour l'approximation de Shvab-Zeldovich.

6. TEMPERATURE ADIABATIQUE DE FIN DE COMBUSTION DANS UN MOTEUR-FUSEE

On considère le moteur du 3e étage d'Ariane. Il fonctionne à l'hydrogène et à l'oxygène injectés liquides à leur température de vaporisation. La richesse du rapport de mélange est de 1,6. (La richesse est le rapport du rapport de mélange sur le rapport de mélange stoechiométrique).

On suppose que le moteur fonctionne en régime permanent, que les forces volumiques et la viscosité sont négligeables, que la vitesse d'écoulement est négligeable dans la chambre de combustion et qu'il n'y a pas de transfert de chaleur avec l'extérieur.

1) Quelle est l'évolution de l'enthalpie entre les liquides injectés et les gaz de combustion (dans la chambre de combustion) ?
2) Quelle est l'expression de l'enthalpie des liquides injectés (les chaleurs de formation de H et O, gazeux sont nulles) et de l'enthalpie des gaz de combustion ?
3) En déduire une méthode pour calculer la température des gaz de combustion dans la chambre de combustion.

Ecrire toutes les équations qui permettent de déterminer cette température. Quelles données sont nécessaires pour résoudre le système d'équations ?

7. EVAPORATION D'UNE GOUTTE IMMOBILE

Une goutte, assimilée à une sphère, à température initiale T_i est placée dans une atmosphère à température T_∞ supérieure à la température de vaporisation T_v du liquide.

On néglige les forces extérieures de volume ainsi que la viscosité et l'énergie cinétique de la phase gazeuse.

La phase gazeuse est assimilée à un fluide homogène.

1) Ecrire les équations de bilan de masse et d'énergie d'un domaine de la phase gazeuse limité par les sphères de rayon r et $r+dr$.

2) Ecrire les conditions à la limite imposées à la surface de la goutte.

3) En déduire la loi de variation du diamètre de la goutte en fonction du temps.

Petite Classe Nr. 2

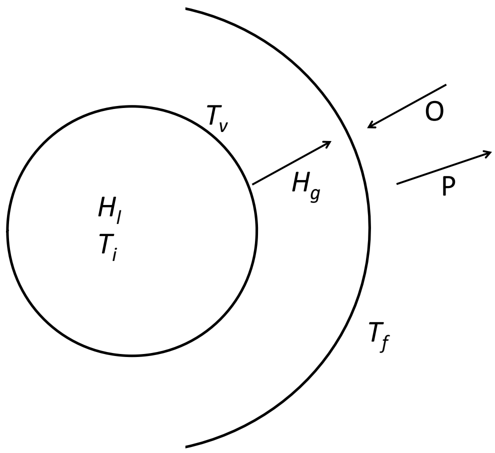
1. COMBUSTION D'UNE GOUTTE DE COMBUSTIBLE IMMOBILE : MODELE DE LA FLAMME DE DIFFUSION (CONVECTION NULLE)

Une goutte de combustible immobile supposée sphérique brûle dans une atmosphère d'oxydant dont les caractéristiques sont définies à l'infini de la goutte par la température T_∞ et la fraction massique d'oxydant $Y_{O,\infty}$.

Les caractéristiques du modèle répondent aux hypothèses de Shvab-Zeldovich, avec $\rho\mathcal{D}=k/Cp$ = constante et Cp = constante.
La réaction chimique est une réaction simple de la forme

$$\beta_O O+\beta_H H \rightarrow \beta'_P P$$

où β_O, β_H et β'_P sont des coefficients stoechiométriques de la réaction chimique équilibrée et *P*, l'ensemble des produits de combustion.
L'objectif du problème est de tracer l'évolution des concentrations massiques Y_i et de la température dans la phase gazeuse comprise entre le rayon r_l de la goutte et



l'infini.

1) Ecrire le bilan de masse global dans la phase gazeuse. On appelle $\dot{m}$ le débit-masse vaporisé.
2) Ecrire le bilan de masse de chaque espèce en posant

$$\alpha_i = \frac{Y_i}{\mathcal{M}_i\left(\beta'_i - \beta_i\right)}$$

3) Ecrire le bilan global d'énergie en posant

$$\alpha_T = \frac{\int_0^T Cp\, dT}{\mathcal{M}_i\left(\beta'_i - \beta_i\right) q^0_{f\,i}}$$

4) On pose $\varphi_T = \alpha_T - \alpha_O$ Calculer l'expression de φ_T en fonction de $\dot{m}/4\pi r \rho \mathcal{D}$ où *r* représente la distance au centre de la goutte.

5) Calculer les constantes d'intégration qui apparaissent dans l'expression de φ_T en écrivant les conditions à la limite sur $\frac{d\varphi_T}{dr}$ et φ_T à $r=r_l$ et sur φ_T à r infini.
En déduire l'expression de $\dot{m}$ en fonction de r_l
On suppose pour cela que la température de surface de la goutte est la température de vaporisation *Tv* et que les combustible H et comburant O sont entièrement consommés dans la flamme, c'est à dire que $Y_{Ol}=0$ et $Y_{H,\infty}=0$
On pose $L=c(Tv-Ti)+\Delta L$ où c est la chaleur massique de la goutte et ΔL la chaleur latente de vaporisation du liquide.

6) Etablir la loi de variation du diamètre de la goutte en fonction du temps.

7) On pose $\varphi_H = \alpha_H - \alpha_O$ Calculer la concentration massique $Y_{H,l}$ de combustible à la surface de la goutte en écrivant les conditions à la limite à $r=r_l$ et r infini.

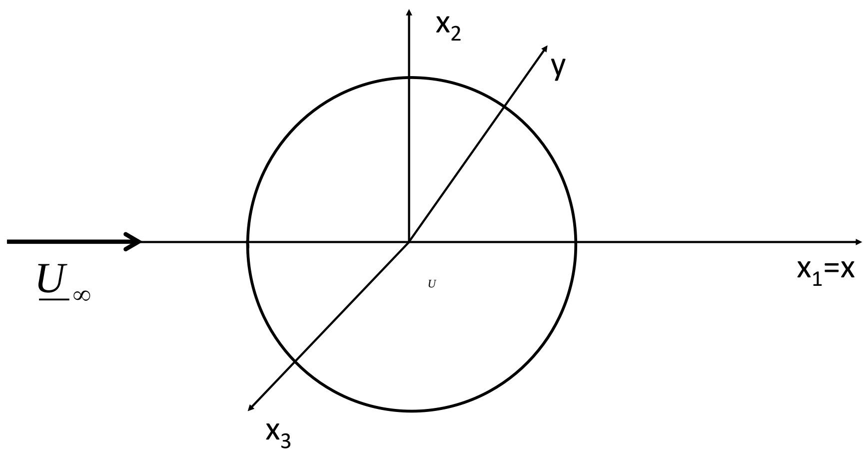
8) On admet que la zone de réactions chimiques (flamme) est une surface infiniment mince de rayon r_f. Cette surface est définie par la condition que le rapport de mélange local est égal au rapport de mélange stoechiométrique.
Quelle y est la valeur de φ_H En déduire l'expression du rayon r_f ainsi que le rapport r_f / r_l

9) Tracer les variations de Y_i et de T en fonction de r.

2. CALCUL DE LA FORCE DE TRAINEE APPLIQUEE A UNE GOUTTE PLACEE DANS UN ECOULENENT GAZEUX

1) Ecoulement autour d'une sphère en fluide parfait

L'écoulement d'un fluide parfait incompressible et irrotationnel autour d'une sphère fixe peut être étudié dans les coordonnées semi-polaires (*y,x*) si l'on admet la symétrie cylindrique. L'axe Ox est suivant la vitesse à l'infini. *y* est dans le plan (x_2 x_3) et sert à définir les coordonnées polaires dans le plan (x_2 x_3)



L'équation de continuité permet de définir la fonction de courant ψ telle que :
$u = (1/y)(\partial\psi/\partial y)$ et $u = (-1/y)(\partial\psi/\partial x)$ soient les composantes du vecteur vitesse suivant x et y respectivement.

Déterminer la fonction courant ψ comme étant celle d'un écoulement uniforme et d'un doublet d'intensité *K* qui sera déterminé en fonction du rayon de la sphère (Cours J. Bouttes p.114 à 116).

2) Résultante des efforts exercés par un fluide visqueux incompressible sur une sphère dans un écoulement à faible nombre de Reynolds

La géométrie du problème est la même que celle de l'exercice précédent mais le fluide est visqueux.
On désigne par Ω le vecteur rotation :

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2}\,\underline{rot}\,\underline{U}$$

2.1) Donner les équations de continuité, de la quantité de mouvement (coefficient de viscosité μ, $\gamma=\mu/\rho$) et en déduire l'équation vérifiée par $\underline{\Omega}$.

2.2) La fonction de courant étant celle de 1., montrer que $\underline{\Omega}$ est perpendiculaire au plan x0y .
On pose :

$$\underline{\Omega}=\Omega\underline{k}$$

Donner l'équation vérifiée par Ω dans les coordonnées x et y.

2.3) Adimensionner cette équation en utilisant les grandeurs de référence suivantes :

$$x_r = y_r = R,\ t_r = R/U_\infty,\ U_r = U_\infty,\ \psi_r = U_\infty R^2,\ \Omega_r = U_\infty/R$$

On ne change pas les symboles. Exprimer Ω et l'équation de la quantité de mouvement.

2.4) On suppose que le nombre de Reynolds :

$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho U_\infty R}{\mu}$ est très petit devant l'unité et on admet un écoulement permanent. Que devient l'équation de la quantité de mouvement ? Donner des solutions connues de cette équation.

L'une des solutions est donnée par le doublet de l'exercice nr.1 qui fournit l'expression de (Ω_y).

En reportant ce résultat dans l'expression de Ω trouvée en 2.3, démontrer que l'on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{K \sin^2\theta}{r}$$

2.5) On pose : $\psi = f(r)\sin^2\theta$

Donner l'équation différentielle vérifiée par *f(r)*et les conditions aux limites du problème. Exprimer la solution générale de cette équation différentielle et déterminer les constantes d'intégration ainsi que *K* pour que les conditions aux limites soient vérifiées.

En déduire la fonction de courant de l'écoulement.

2.6) Déterminer la résultante des efforts exercés par le fluide sur la sphère.

2.7) En déduire l'équation du mouvement d'une sphère placée dans un écoulement gazeux.

3. <u>COMBUSTION D'UNE GOUTTE DE COMBUSTIBLE AVEC CONVECTION FORCEE</u>

Corrections empiriques de Frossling et de Spalding. Calculs numériques.

4. <u>CALCUL DE LA LONGUEUR D'UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE MOTEUR-FUSEE</u>

On injecte dans une chambre d combustion 2 liquides : un oxydant (comburant O)et un réducteur (combustible H) dans un rapport de mélange $m = \dot{m}_H / \dot{m}_O$.

On suppose que dans le plan d'injection des liquides (c'est à dire à l'entrée de la chambre de combustion), le comburant se vaporise instantanément et le combustible est pulvérisé en gouttes de même diamètre initial D_i, qui brûlent suivant une loi en $D^2 = D_i^2 - K\,t$.

Calculer la longueur L minimum de la chambre qui assure une combustion complète des gouttes de combustible (la chambre est un cylindre de section A).

On suppose que la phase gazeuse dans la chambre est homogène à la température T_0 et pression p_0 supposées uniformes.

D'autre part, on suppose que la vitesse des gaz <u>*Ug*</u> et des gouttes U_l sont égales dans une section donnée. La vitesse d'injection est U_i.

Enfin on suppose que le régime est permanent et que les forces volumiques et visqueuses sont négligeables.

Application numérique : $O = N_2O_4 \quad H = UDMH$

$$m = 0{,}54 \quad \dot{m}_t = \dot{m}_O + \dot{m}_H = 600\, g/s$$

$$D_i = 50\mu \quad K = 1mm^2/s \quad U_i = 50m/s$$

$$T_0 = 3200\,°K \quad p_0 = 47\, bars \;\; Cp = 1800\, J/Kg\,°K \quad \gamma = 1{,}25$$

Petite Classe N°3

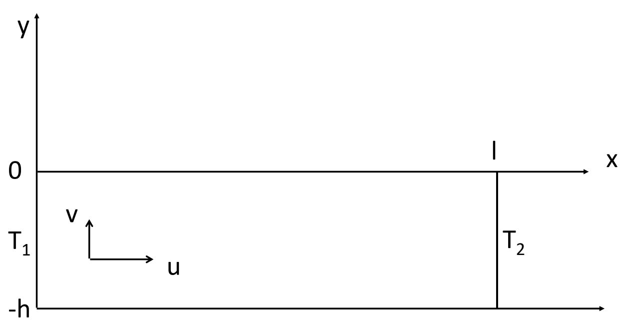
1. COMBUSTION D'UNE GOUTTE DE COMBUSTIBLE IMMOBILE : MODELE DE LA FLAMME DE DIFFUSION (CONVECTION NULLE)
Voir énoncé de la PC N°2
Questions 7, 8 et 9

2. COMBUSTION D'UNE GOUTTE DE COMBUSTIBLE AVEC CONVECTION FORCEE
Voir énoncé de la PC N°2

3. CALCUL DE LA LONGUEUR D'UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE MOTEUR-FUSEE
Voir énoncé de la PC N°2

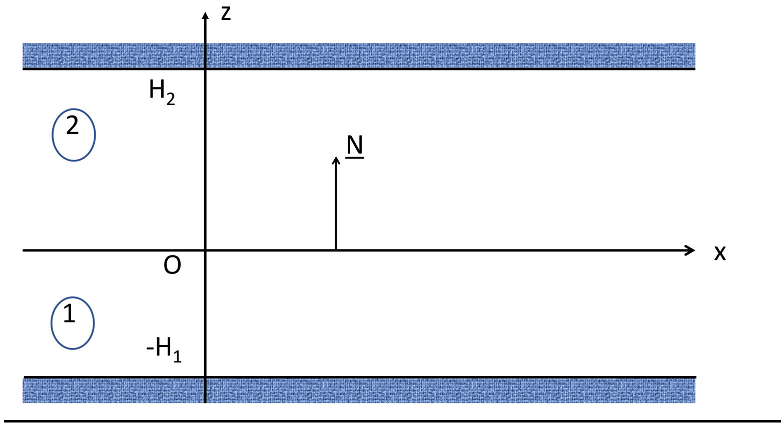
4. EQUILIBRE D'UNE BULLE DE VAPEUR DANS UN LIQUIDE EN ABSENCE DE FORCE DE GRAVITE
On considère une bulle de rayon r remplie de vapeur (pression p^g) d'un liquide maintenu à une pression p^l constante.
La vapeur, le liquide et la surface de la bulle forment trois systèmes notés respectivement (*g*) (*l*) et (*s*).
1. Etablir les conditions d'équilibre en admettant que l'ensemble se trouve à une température *T* commune.
2. Calculer la pression de la vapeur dans la bulle et la comparer à la pression de la vapeur saturante correspondant à l'équilibre d'une surface plane de liquide avec sa vapeur.
3. Application : cas de l'eau à 300°K.
5. Convection de Marangoni ($\underline{grad}T$ parallèle à une surface libre)
On considère une couche liquide horizontale d'épaisseur *h* et de longueur $l>>h$, dont la surface libre est au contact d'un gaz ambiant supposé parfait.
L'interface liquide-gaz est soumise à un gradient de température constant $dT/dX=(T_2-T_1)/l$.
La tension superficielle σ de l'interface est fonction de la température suivant une loi linéaire. On suppose que l'interface est du type "surface capillaire" c'est à dire notamment que la zone interfaciale est supposée être sans masse.

On suppose enfin que le liquide est incompressible et qu'il n'y a pas de force volumique.
En négligeant la composante verticale de la vitesse et en supposant le mouvement stationnaire, déterminer les champs de vitesse et de pression dans le liquide.
Commenter les résultats.



Petite Classe N°4

1. STABILITE DE L'INTERFACE ENTRE 2 LIQUIDES NON MISCIBLES PESANTS



Deux liquides (1) et (2) incompressibles, pesants, non miscibles, sont au repos, contenus entre 2 parois horizontales illimitées de côte fixe : $z=H_1$ et $z=H_2$ et sont séparés par la surface z=0 à l'équilibre. On néglige la tension superficielle de la couche interfaciale. On suppose que les 2 liquides sont parfaits, c'est à dire que les effets visqueux sont négligeables.
L'état d'équilibre ainsi défini est bien entendu solution des équations de la Mécanique. Mais est-il stable ?
Pour étudier la stabilité de l'équilibre, on considère les mouvements instationnaires, irrotationnels, de très faible amplitude (hypothèse des petits mouvements : les écarts entre variables à l'équilibre et celles du mouvement sont des infiniment petits du 1er ordre ainsi que pour les dérivées (cf cours Bouttes). On se limite à des perturbations planes dans le plan (z, x) et on pose $z=\eta\,(x, t)$, écart entre la position d'une particule de l'interface en mouvement et sa position dans l'interface en équilibre (z à l'équilibre = 0).

1. Ecrire les équations du petit mouvement ainsi que les conditions à la limite linéarisées. On pose φ potentiel des vitesses.
2. Rechercher des solutions harmoniques en x et t

$$\varphi = Z(z)e^{i[\omega t + kx]}$$

3.Discuter de la stabilité de l'équilibre en fonction de la valeur relative de ρ_1 par rapport à ρ_2.

2. MOUVEMENT DE CONVECTION LIBRE LE LONG D'UN MUR CHAUD

On se propose de déterminer les caractéristiques de l'écoulement stationnaire induit au voisinage d'un mur vertical chaud par le processus de convection libre.
On considère une plaque verticale de hauteur *l*. Ox est l'axe vertical de la plaque, orienté vers le haut et Oy est l'axe perpendiculaire à la plaque. On s'intéresse à l'écoulement plan dans Oxy.

La plaque est à la température $T_1 > T_0$, température à l'infini de la plaque. T_0 et T_1 sont supposées constantes et uniformes.
Le fluide est supposé visqueux Newtonien (μ constant) et conducteur de la chaleur suivant une loi de Fourier (k constant).
On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le fluide est supposé quasi-incompressible c'est à dire que les variations de masse volumique ρ ne sont sensibles que dans l'expression des forces volumiques (dues à la gravité)
  $\rho = \rho_0 \left[1 - \beta(T - T_0)\right]$ avec β constant
- la pression du fluide n'est fonction de l'altitude x
- dans le transfert d'énergie, la conduction de la chaleur est prépondérante devant l'énergie cinétique et l'énergie dissipée par viscosité que l'on néglige toutes deux.

1. Ecrire les équations de bilan (masse, quantité de mouvement, énergie) du fluide en supposant que le fluide à l'infini est au repos.

2. On s'intéresse à l'écoulement au voisinage du mur : on suppose que la vitesse et la différence de température T-T_0 ne sont notablement non nulles que dans une couche mince (couche limite) d'épaisseur (à la surface du mur).
   On étudie ce qui se passe pour $y = O[\delta(x)]$.
   On admet que dans la couche limite $(v/u) \approx (\delta/x) << 1$, et on suppose que les dérivées première et seconde des variables sont de l'ordre de grandeur des rapports des variables concernées.
   Par exemple $\frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{T}{\delta}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u}{x^2}$
   Ainsi les termes en $\partial^2/\partial x^2$ négligeables devant ceux en $\partial^2/\partial y^2$ puisque δ/x<<1.

   Donner alors la forme des équations de bilan qui permettent de décrire l'écoulement dans la couche limite du mur.

3. Pour résoudre les équations du mouvement, on introduit la variable
   $\xi = Cy/x^{1/4}$ avec $C = \left[\frac{g(T_1 - T_0)\beta}{4\nu^2}\right]^{1/4}$ où $\nu=\mu/\rho$, on pose
   $$\begin{cases} u = 4\nu C^2 \sqrt{x}\, \varphi'(\xi) \\ T - T_0 = (T_1 - T_0)\theta(\xi) \end{cases}$$
   où $\varphi(\xi)$ et $\theta(\xi)$ sont des fonctions à déterminer.
   En déduire que la composante horizontale du vecteur vitesse s'écrit :
   $v = \frac{\nu C}{x^{1/4}}(\xi\, \varphi' - 3\varphi)$.
   Déterminer alors les deux équations différentielles que doivent vérifier $\varphi(\xi)$ et $\theta(\xi)$ ainsi que les cinq conditions aux limites correspondantes.

4. En déduire, après avoir évalué l'épaisseur de la couche limite que le nombre de Grashof est grand

$$Gr = \frac{\beta(T_1 - T_0) g\, l^3}{\nu^2}$$

5. Montrer que le nombre de Nusselt *Nu= αl/k* avec $\alpha = q/(T_1 - T_0)$ où *q* est le flux de chaleur unitaire à la paroi s'exprime en fonction de *Gr* et du nombre de Prandtl Pr suivant

$$Nu = f(\mathrm{Pr}) Gr^{1/4}$$

3. <u>ECOULEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX LE LONA D'UNE PAROI INCLINEE DANS UN CHAMP DE GRAVITE *g*</u>

Un plan incliné fait l'angle α avec l'horizontale, la verticale étant définie par le vecteur <u>*g*</u>.

Une couche liquide d'épaisseur constante h s'écoule le long du plan en régime permanent. L'écoulement est plan, dans Oxz (Ox suivant le plan incliné). La composante de la vitesse suivant z est nulle.
Le liquide est incompressible et visqueux newtonien de viscosité constante.
Le gaz présent pour z>h a une pression constante p_a et reste au repos, se comportant comme un fluide parfait.
La tension superficielle de la couche interfaciale est négligeable.

1. Déterminer le profil des vitesses de l'écoulement.
2. Donner l'expression du débit de liquide en fonction de g (pour une largeur l).
3. Application numérique :

Cas de l'eau à 30°C, *h*=1 mm, largeur = 1cm pour $g=g_0$=9,81 m/s^2 et $g=10^{-3}\, g_0$.

4. <u>INSTABILITE DE MARANGONI (gradT NORMAL A UNE SURFACE LIBRE)</u>

On considère une couche horizontale de liquide incompressible d'épaisseur *h* et de longueur infinie, dont la surface libre est au contact d'un gaz ambiant au repos, supposé parfait (viscosité négligeable).
On suppose que les mouvements possibles dans cette couche sont plans, dans O*xy* , O*x* étant l'horizontale et O*y* étant la verticale.
Les forces volumiques sont nulles (pas de gravité).
On crée un <u>*grad*</u> *T* normal à la surface libre (*y*=0) du liquide en maintenant le fond de la couche (*y=-h*) à une température uniforme et constante T_1 et en fixant la température à l'infini dans le gaz ambiant ($y = \infty$) égale à T_0 uniforme et constante (on ne peut pas imposer une température uniforme et constante à la surface libre). Le transfert de chaleur entre le gaz ambiant et la surface du liquide est proportionnel à la différence de température T_0-T_S où T_S est la température à la surface du liquide. Le transfert de chaleur à l'intérieur du liquide suit la loi de Fourier.
La tension superficielle de la couche interfaciale entre le liquide et le gaz est une fonction linéaire de la température de surface T_S, dσ/*dT* étant une constante négative.

1. Ecrire les deux conditions à la limite à la surface libre y=0).

2. Ecrire les équations de bilan dans le liquide, en supposant que les coefficients de transfert sont constants.

3. Déterminer la solution purement conductive, c'est à dire sans mouvement du liquide (pas de "convection"). Soit $T_C(y)$ le profil de température correspondant à cette solution.

4. On pose $T=T_C+T'$, $p=p_0+p'$, $u=u'$, $v=v'$ avec $v'=V(y,t)\cos Kx$, $T'=\theta(y,t)\cos Kx$ K est un nombre d'onde constant inconnu.

   On néglige les termes d'ordre 2 en T', p', u'et v'

a) Etablir les équations et conditions aux limites en θ et V.

b) Résoudre les équations dans le cas stationnaire. Quelle est la condition critique d'apparition de mouvements dans le liquide pour $Kh<<1$?

c) Donner la valeur du nombre de Marangoni critique

$$Ma = \frac{d\sigma}{dT} G \frac{h^2}{k\mu}$$

où G est le gradient thermique à la surface libre et k la constante de la loi de Fourier.