Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude du spectre essentiel d'opérateurs de Schrödinger et tout particulièrement à l'obtention d'un Principe d'Absorption Limite pour ces opérateurs. Ce Principe d'Absorption Limite consiste en l'existence d'une limite de l'opérateur résolvante lorsque le paramètre spectral se rapproche du spectre essentiel et permet de connaitre des informations sur le groupe engendré par l'Hamiltonien de Schrödinger. Une méthode pour montrer ce Principe d'Absorption Limite est d'utiliser la théorie de Mourre. Cette théorie nécessite l'utilisation d'un autre opérateur appellé opérateur conjugué. Lorsqu'on veut appliquer la théorie de Mourre aux opérateurs de Schrödinger, on utilise habituellement un opérateur conjugué nommé le générateur des dilatations. Cet opérateur implique que les dérivées du potentiel doivent avoir une certaine décroissance ce qui peut être gênant dans certains cas. Dans cette thèse, nous appliquerons le théorème de Mourre avec d'autres types d'opérateurs conjugués, dont certains n'impliquent pas de conditions de dérivabilité.
Dans une première partie, nous nous intéresserons aux opérateurs de Schrödinger sur l'espace euclidien pour lesquels nous montrerons un Principe d'Absorption Limite à énergie strictement positive, un Principe d'Absorption Limite à énergie nulle et l'absence de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel. Dans une seconde partie, nous nous intéresserons aux opérateurs de Schrödinger sur des guides d'ondes pour lesquels nous montrerons un Principe d'Absorption Limite loin des seuils et un Principe d'Absorption Limite près des seuils.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of the essential spectrum of Schrödinger operators and more particulary in the obtention of a Limiting Absorption Principle for these operators. This Limiting Absorption Principle consists on the existence of a limit for the resolvent operator when the spectral parameter is near the essential spectrum and permits to know some properties about the group generated by the Schrödinger Hamiltonian we study. A technique to prove this Limiting Absorption Principle is to use the Mourre theory. This theory needs to use an other operator called the conjugate operator. When we want to apply the Mourre theory to Schrödinger operators, we usually used a conjugate operator named the generator of dilations. This operator implies some conditions of decay on the derivatives of the potential which can be a problem in certain cases. In this thesis, we will apply the Mourre theory with other types of conjugate operators wich, for some of them, does not imply any conditions on the derivatives of the potential.
In a first part, we will be interested in Schrödinger operators on the euclidian space. We will show a Limiting Absorption Principle at positive energy, a Limiting Absorption principle at zero energy and the absence of eigenvalue embedded in the essential spectrum. In a second part, we will be interested in Schrödinger operators on wave guides for which we will prove a Limiting Absorption Principle far thresholds and near thresholds.

Sommaire

Chapitre 1

Introduction générale

Sommaire

1.1 L'équation de Schrödinger

Le cadre de la physique classique est grandement basé sur le principe fondamental de la dynamique. Ce principe relie l'accélération d'un objet aux forces exercées sur ce dernier de la façon suivante:

$$\sum_k F_k = ma,$$

où m est la masse de l'objet, a son accélération et F_k sont les forces exercées sur l'objet. En utilisant que la position x d'un objet est reliée à son accélération a par $a = \partial_t^2 x$, le principe fondamental de la dynamique a permis de comprendre le mouvement d'objets (mouvements des planètes, chute libre...).

Au début du XX$^{\text{ième}}$ siècle, de nouveaux problèmes sont apparus (comportement ondulatoire et corpusculaire de la lumière, caractère discontinu du rayonnement émit par le corps noir) nous imposant de changer notre vision de la physique. La résolution de ces problèmes par un formalisme unique marque la naissance de la physique quantique. L'état d'un système ne peut plus être représenté uniquement par la donnée de la position, comme c'est le cas en physique classique, la position et la vitesse ne pouvant être décrite simultanément avec une grande précision (principe d'incertitude de Heisenberg). Pour représenter l'état du système, on doit faire appel à une autre notion: la fonction d'onde $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dans l'interprétation de Copenhague, cette fonction d'onde représente une amplitude de probabilité, la probabilité de trouver une particule au voisinage d'un point x au temps t étant proportionnelle à $|\psi(x,t)|^2$. Dans d'autres théories de la mécanique quantique, comme par exemple la théorie de de Broglie-Bohm, l'état quantique est composé de cette fonction d'onde et d'autres quantités physiques (position, vitesse,...).

En 1926, Erwin Schrödinger établit l'équation que doit vérifier cette fonction d'onde pour une particule plongée dans un champs électrique, équation qui sera appelée par la suite équation de Schrödinger. En cela, cette équation est l'équivalent en physique quantique du principe fondamental de la dynamique. Si on note U le potentiel associé au champs électrique, pour une particule de masse m cette équation prend la forme

$$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x,t) + U(x)\psi(x,t) = H_\hbar\psi(x,t),$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite. Dans cette thèse, nous supposerons toujours que le potentiel est indépendant du temps. Par la suite, pour simplifier les notations, nous supposerons que $\frac{\hbar}{2m} = 1$ et nous remplacerons U par $V = \frac{U}{\hbar}$. L'équation devient donc

$$i\partial_t\psi(x,t) = \Delta\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t) = H\psi(x,t), \tag{1.1}$$

Notons que, si le potentiel V est réel et "petit" par rapport au Laplacien (Δ-borné avec des bornes petites par exemple), alors l'Hamiltonien H est un opérateur auto-adjoint. De plus, $|\psi|^2$ devant être intégrable, il est nécessaire de résoudre cette équation sur un espace de Hilbert $\mathcal{H} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

De manière générale, une solution de l'équation $i\partial_t\psi(x,t) = M\psi(x,t)$, où M est un opérateur auto-adjoint, avec conditions initiales $\psi(\cdot,0) = \phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est donnée par $\psi(x,t) = e^{-itM}\phi(x)$. Notons que si $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est un vecteur propre de l'Hamiltonien M avec valeur propre E, cette équation admet pour solution la fonction $(x,t) \mapsto \psi(x,t) = e^{-iEt}\phi(x)$. En particulier, si ϕ est localisée dans une zone de l'espace, alors, en tout temps t, la fonction $x \mapsto \psi(x,t)$ restera localisée dans la même zone.

L'Hamiltonien M peut aussi avoir du spectre continu. Si on note $\mathcal{H}_{cont}$ l'orthogonal de $\mathcal{H}_{pp}$, l'ensemble des vecteurs propres de M, on obtient alors le résultat suivant

Théorème 1.1.1 (RAGE)**.** *Supposons que M est un opérateur auto-adjoint. Soit $\phi \in \mathcal{H}_{cont}$.*

1. *Si C est un opérateur compact alors*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \|Ce^{-itM}\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt = 0.$$

2. *Si C est un opérateur borné et M-compact alors*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \|Ce^{-itM}\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt = 0.$$

Soit $R > 0$. En appliquant le théorème RAGE avec $M = H$, notre Hamiltonien, et $C = \mathbb{1}_{\{x:|x|<R\}}$, la fonction indicatrice de l'ensemble $\{x : |x| < R\}$, qui est un opérateur borné et Δ-compact, ce qui implique H-compact lorsque V est petit par rapport au Laplacien, on peut montrer que si $\phi \in \mathcal{H}_{cont}$, alors une solution de l'équation (1.1) va "quitter" la boule de rayon R en temps long pour tout $R > 0$ ce qui va correspondre à des états diffusés. Il est donc intéressant de connaitre la nature du spectre de l'opérateur H afin de connaitre le comportement des solutions de l'équation de Schrödinger en temps long. Dans cette thèse, nous privilégierons l'étude du spectre continu de H, en regardant notamment si le spectre continu contient une partie du spectre purement ponctuel.

Dans certains cas, les estimations données par le Théorème RAGE sont trop faibles. On peut alors les remplacer par des estimations de propagation de type Kato de la forme:

$$\forall\phi \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } \forall t, e^{-itM}\phi \in \mathcal{D}(B), \sup_{\|\phi\|=1}\int_{-\infty}^{+\infty} \|Be^{-\mathrm{it}M}\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt < \infty,$$

où B est un certain opérateur fermé. Ces estimations de propagations impliquent la nature purement absoluement continu du spectre continu de l'opérateur M.

Un moyen de montrer ces estimations de type Kato est de montrer un Principe d'Absorption Limite, c'est à dire de montrer que la résolvante de H, qui n'est à priori définie que sur le plan complexe privé du spectre de H, admet une limite lorsque le paramètre spectral se rapproche du spectre continu. Nous allons maintenant donner quelques autres motivations nous poussant à montrer ce Principe d'Absorption Limite.

1.2 Motivations pour le Principe d'Absorption Limite

Dans cette partie, nous allons voir deux applications du Principe d'Absorption Limite : l'une en théorie de la diffusion et l'autre dans le domaine des EDP non-linéaires.

1.2.1 Une application à la théorie de la diffusion

Une expérience typique en théorie de la diffusion est de prendre une particule et un diffuseur, éloignés l'un de l'autre au début de l'expérience. On envoie ensuite la particule en direction du diffuseur. En se rapprochant la particule va alors entrer en interaction avec le diffuseur. Ce qu'on s'attend à voir, c'est qu'après un certain temps, la particule va s'éloigner du diffuseur et va se comporter comme une particule libre, sans interaction avec le diffuseur.

Ce résultat peut être traduit en terme mathématiques sous la forme suivante. Soit H et H_1 deux Hamiltoniens de Schrödinger, H représentant l'évolution libre de la particule et H_1 l'évolution de la particule soumise à l'interaction du diffuseur. Pour un état ϕ, on s'attend à ce qu'il existe deux états ϕ_+ et ϕ_- tel que

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-itH_1}\phi = \lim_{t\to-\infty} e^{-itH}\phi_-,$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-itH_1}\phi = \lim_{t\to+\infty} e^{-itH}\phi_+.$$

En particulier, on doit avoir

$$\phi = \lim_{t\to-\infty} e^{itH_1}e^{-itH}\phi_- = \lim_{t\to+\infty} e^{itH_1}e^{-itH}\phi_+.$$

L'existence de $\phi_\pm$ se résume donc à l'existence d'une limite forte d'opérateur. Dans beaucoup de cas, l'opérateur H a un spectre purement absolument continu. Mais si ce n'est pas le cas, on est obligé de supposer que $\phi_\pm$ est dans le sous espace absolument continu de H.

Il est donc assez naturel de chercher à connaitre des propriétés sur les opérateurs

$$\Omega_\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itH_1}e^{-itH}P_{ac}(H),$$

où $P_{ac}(H)$ est la projection sur le sous espace absolument continu de H. Ces opérateurs sont appelés opérateurs d'onde. Plusieurs questions fondamentales de la théorie de la diffusion concernent ces opérateurs:

1. Les opérateurs d'ondes existent-ils?
2. A-t-on $Im(\Omega_+) = Im(\Omega_-)$? Cette propriété est appelée complétude asymptotique faible.
3. A-t-on $Im(\Omega_+) = Im(\Omega_-) = \mathcal{H}_{cont}$? Cette propriété est appelée complétude asymptotique.

On peut remarquer que si les opérateurs d'ondes $\Omega_\pm$ existent alors $Im(\Omega_\pm) \subset \mathcal{H}_{ac}$ où $\mathcal{H}_{ac}$ est le sous espace absoluement continu de H. En particulier, si la propriété de complétude asymptotique est satisfaite, alors on peut montrer que le spectre singulier continu est vide.

Si l'on sait que les opérateurs d'ondes existent et que la propriété de complétude asymptotique faible est assurée, on peut alors définir un troisième opérateur: l'opérateur de diffusion. Cet opérateur noté S est défini par

$$S = (\Omega_-)^{-1}\Omega_+$$

et vérifie $S\phi_- = \phi_+$. Cet opérateur permet donc d'exprimer l'état du système sortant à partir de l'état du système entrant. L'opérateur H étant auto-adjoint, on peut définir une décomposition du sous espace absolument continu de cet opérateur, c'est à dire une famille d'espace de Hilbert $(\mathfrak{H}(\lambda))_{\lambda\in\sigma_{ac}(H)}$ et un opérateur inversible $\mathcal{F}$ tels que la restriction de $\mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1}$ à l'espace $\mathfrak{H}(\lambda)$ soit la multiplication par λ. Cette décomposition diagonalise l'opérateur H. Les opérateurs S et H commutant, on peut définir pour tout $\lambda \in \sigma_{ac}(H)$ la matrice de diffusion $S(\lambda) : \mathfrak{H}(\lambda) \to \mathfrak{H}(\lambda)$ définie par:

$$S(\lambda)(\mathcal{F}f)(\lambda) = (\mathcal{F}Sf)(\lambda), \forall f \in \mathcal{H},$$

où , pour $g \in \mathcal{H}$, $(\mathcal{F}g)(\lambda)$ désigne la représentation de g dans la décomposition des $\mathfrak{H}(\lambda)$. Si la matrice de diffusion est une fonction régulière du paramètre λ, on peut aussi définir l'opérateur de temps retard T_r définie par

$$(\mathcal{F}T_rf)(\lambda) = -\mathrm{i}S(\lambda)^*\frac{dS}{d\lambda}(\lambda)(\mathcal{F}f)(\lambda), \forall f \in \mathcal{H}.$$

Une méthode pour obtenir l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'ondes est de montrer un Principe d'Absorption Limite c'est à dire de montrer que les résolvantes des opérateurs H et H_1 ont un bon comportement lorsque le paramètre spectral se rapproche de l'axe réel. Rappelons pour cela un des résultats permettant d'obtenir l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'ondes à partir du Principe d'Absorption Limite:

Théorème 1.2.1 (Theorem 7.1.5 de [ABdMG96]). *Soit H_1, H_2 deux opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Supposons qu'il existe $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ deux espaces de Banach tel que $\mathcal{K}_j \subset \mathcal{D}(H_j)^*$ continuement et densément de cotype 2 et ayant de bonne propriétés. Supposons de plus que:*

1. *il existe un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ et $C_1, C_2 > 0$ tels que*
$$\sup_{\lambda\in J,\mu>0} \left\|\Im(H_j - \lambda - i\mu)^{-1}\right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K}_j,\mathcal{K}_j^*)} < \infty. \quad (PALG).$$
2. *$H_1 - H_2$, considéré comme une forme sesquilinéaire de $\mathcal{D}(H_1)\times\mathcal{D}(H_2)$, est continu pour la topologie induite par $\mathcal{K}_1^* \times \mathcal{K}_2^*$.*

Alors, si on note E_j la mesure spectrale de H_j, les opérateurs d'ondes

$$\Omega_\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itH_1}e^{-itH_2}E_2(J)$$

existent et sont des isométries bijectives de $E_2(J)\mathcal{H}$ dans $E_1(J)\mathcal{H}$.

Cette méthode n'est pas la seule possibilité pour montrer l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'ondes (voir par exemple Theorem 4.6.1 de [DG97] pour une autre méthode). En revanche, une autre vision de la théorie de la diffusion, l'approche stationnaire, nécessite l'obtention d'un Principe d'Absorption Limite. L'idée de cette approche est de définir les opérateurs d'ondes à partir des résolvantes des opérateurs H et H_1. En effet, dans la plupart des cas, l'études des résolvantes de ces deux opérateurs se révèle plus simple que l'étude des groupes unitaires qui leur sont associés. Cette approche permet aussi d'obtenir des formules de représentation des opérateurs d'ondes et de l'opérateur de diffusion. Pour la matrice de diffusion, on obtient, sous certaines conditions sur $W = H_1 - H$ l'expression suivante:

$$S(\lambda) = Id - 2\pi\mathrm{i}t(\lambda),$$

avec $t(\lambda)$ défini par

$$(t(\lambda)(\mathcal{F}f)(\lambda), (\mathcal{F}g)(\lambda)) = \lim_{\epsilon\to0}((W - WR_1(\lambda + \mathrm{i}\epsilon)W)\delta(\lambda,\epsilon)f, \delta(\lambda,\epsilon)g)$$

où $R_1(z) = (H_1 - z)^{-1}$ est la résolvante de H_1 et $\delta(\lambda,\epsilon)$ est l'opérateur intégral de Poisson, i.e.

$$\delta(\lambda,\epsilon) = \pi^{-1}\epsilon(H - \lambda - \mathrm{i}\epsilon)^{-1}(H - \lambda + \mathrm{i}\epsilon)^{-1}.$$

En particulier, on peut voir que le Princie d'Absorption Limite semble nécessaire à la définition de l'opérateur $t(\lambda)$ et donc à cette représentation de la matrice de diffusion. De plus, si l'on veut définir l'opérateur temps-retard, on doit montrer que les limites $\operatorname*{w^*-lim}_{\epsilon\to0}(H - \lambda \pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1}$ et $\operatorname*{w^*-lim}_{\epsilon\to0}(H_1 - \lambda \pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1}$ sont des fonctions régulières (au moins dérivables) en le paramètre λ.

1.2.2 Une application en analyse non-linéaire

Dans certains cas, l'équation de Schrödinger linéaire ne suffit pas pour étudier un système. Il est parfois nécessaire d'ajouter un terme non-linéaire. Avec un terme non linéaire de type polynomial, l'équation (1.1) devient alors:

$$i\partial_t\psi(x,t) = H\psi(x,t) + |\psi(x,t)|^{\alpha-1}\psi(x,t), \alpha \in \mathbb{N}^*. \tag{1.2}$$

Nous nous limiterons ici au cas défocalisant pour plus de simplicité.

Nous allons voir ici un outil utile dans ce cadre: les estimations de Strichartz. Ces estimations sont des inégalités permettant de contrôler la taille des solutions de l'équation linéaire par la taille des données initiales. Avant de donner précisemment ces inégalités, commencons par définir la notion de paire admissible

Definition 1.2.2. *On dit qu'une paire (q,r) est admissible si*

$$\frac{2}{q} + \frac{n}{r} = \frac{n}{2}$$

et

$$2 \leqslant r \leqslant \frac{2n}{n-2}, (2 \leqslant r \leqslant \infty \textit{ si } n = 1, 2 \leqslant r < \infty \textit{ si } n = 2).$$

Pour (q,r) une paire admissible, les estimations de Strichartz sont de la forme: Pour tout $\phi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, l'application $(t,x) \mapsto e^{-itH}\phi_0(x)$ appartient à $L_t^q L_x^r \cap C_t^0 L_x^2$ où $L_t^q L_x^r$ désigne l'ensemble des applications $f(t,x)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t,x)|^r dx \right)^{\frac{q}{r}} dt < \infty.$$

De plus, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\phi_0 \in L_x^2$,

$$\|e^{itH}\phi_0\|_{L_t^q L_x^r} \leqslant C\|\phi_0\|_{L_x^2}. \tag{1.3}$$

De cette inégalité, on peut en déduire deux autres. En effet, si on note $T : L_x^2 \to L_t^q L_x^r$ l'opérateur défini par $T\phi_0(t,x) = e^{itH}\phi_0(x)$, l'inégalité (1.3) signifie juste que T est borné. Ainsi cette inégalité est équivalente à l'existence d'un $C' > 0$ tel que pour tout $\phi \in L_t^m L_x^p$,

$$\| \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}\tau H}\phi(\tau,\cdot)d\tau\|_{L_x^2} \leqslant C'\|\phi\|_{L_t^m L_x^p},$$

qui correspond au fait que T^* est borné et est aussi équivalente à l'existence d'un $C'' > 0$ tel que pour tout $\phi \in L_t^m L_x^p$,

$$\| \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}(t-\tau)H}\phi(\tau,\cdot)d\tau\|_{L_t^q L_x^r} \leqslant C''\|\phi\|_{L_t^m L_x^p},$$

qui correspond au fait que TT^* est borné, avec m et p satisfaisant:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1.$$

Si l'on suppose que ces estimations sont vraies, alors on peut montrer qu'une solution de (1.2) avec condition initiale $\phi(0,x) = \phi_0(x)$ sur un intervalle de temps I doit satisfaire la formule de Duhamel, i.e. pour tout $t \in I, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi(t,x) = e^{-\mathrm{i}tH}\phi_0(x) + \mathrm{i}\int_0^t e^{-i(t-s)H}|\phi(s,x)|^{\alpha-1}\phi(s,x)ds.$$

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une telle solution, il suffit donc de montrer que l'application

$$\Phi : \phi \mapsto e^{-\mathrm{i}tH}\phi_0(x) + \mathrm{i}\int_0^t e^{-i(t-s)H}|\phi(s,x)|^{\alpha-1}\phi(s,x)ds$$

admet un unique point fixe. Pour cela, on va montrer que cette application est contractante. Prenons ϕ_1, ϕ_2 et calculons la différence entre $\Phi(\phi_1)$ et $\Phi(\phi_2)$. Pour simplifier les notations, nous utiliserons la notation C pour les différentes constantes qui apparaitront dans les calculs.

$$\begin{aligned} & \|\Phi(\phi_1) - \Phi(\phi_2)\|_{L^q_t L^r_x} \\ = \; & \| \int_0^t e^{-i(t-s)H} \left(|\phi_1(s,x)|^{\alpha-1}\phi_1(s,x) - |\phi_2(s,x)|^{\alpha-1}\phi_2(s,x) \right) ds \|_{L^q_t L^r_x}. \end{aligned}$$

En utilisant les estimations de Strichartz, on en déduit

$$\begin{aligned} \|\Phi(\phi_1) - \Phi(\phi_2)\|_{L^q_t L^r_x} & \leqslant C \||\phi_1|^{\alpha-1}\phi_1 - |\phi_2|^{\alpha-1}\phi_2\|_{L^m_t L^p_x} \\ & \leqslant C \left\| (|\phi_1|^{\alpha-1} + |\phi_2|^{\alpha-1})(\phi_1 - \phi_2) \right\|_{L^m_t L^p_x}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on en déduit

$$\|\Phi(\phi_1) - \Phi(\phi_2)\|_{L^q_t L^r_x} \leqslant C \||\phi_1|^{\alpha-1} + |\phi_2|^{\alpha-1}\|_{L^k_t L^l_x} \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^q_t L^r_x}$$

avec $\frac{1}{k} = 1 - \frac{2}{q}$ et $\frac{1}{l} = 1 - \frac{2}{r}$. En particulier, pour un bon choix de q et r, on peut montrer que, pour des données initiales petites, $\||\phi_1|^{\alpha-1} + |\phi_2|^{\alpha-1}\|_{L^k_t L^l_x}$ est petite. Cela montre donc que Φ est contractante et n'admet donc qu'un seul et unique point fixe: la solution de (1.2). Il nous reste maintenant à montrer ces estimations de Strichartz.

Grâce à la transformée de Fourier, les estimations (1.3) peuvent, en général, être prouvées dans le cas où $H = H_0 = \Delta$. Mais si l'on rajoute un potentiel, cela devient plus compliqué. Pour les montrer, nous allons procéder par perturbation du Laplacien. Pour cela, nous allons avoir besoin d'une notion d'opérateur lisse par rapport à un opérateur auto-adjoint:

Definition 1.2.3. *Soit M un opérateur auto-adjoint avec $R(z) = (M - z)^{-1}$ sa résolvante. Soit B un opérateur fermé. On dit que B est M-lisse si et seulement si pour tout $\phi \in \mathcal{H}$, $\epsilon \neq 0$, $R(\lambda + \mathrm{i}\epsilon)\phi \in \mathcal{D}(B)$ et*

$$\sup_{\|\phi\|=1, \lambda \in \mathbb{R}, \epsilon > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\|BR(\lambda + \mathrm{i}\epsilon)\phi\|^2_{L^2} + \|BR(\lambda - \mathrm{i}\epsilon)\phi\|^2_{L^2} \right) d\lambda < \infty.$$

On peut aussi définir une notion de M-lisse sur un intervalle I en prenant le sup non pas sur les $\lambda \in \mathbb{R}$ mais sur les $\lambda \in I$. Dans [RS70d], on peut voir au Théorème XIII.25:

Proposition 1.2.4. *Soit M un opérateur auto-adjoint avec $R(z) = (M - z)^{-1}$ sa résolvante. Soit B un opérateur fermé. Alors on a les équivalences suivantes:*

1. *B est M-lisse*
2. $$\sup_{\phi \in \mathcal{D}(B^*), \|\phi\|=1, \lambda \in \mathbb{R}, \epsilon \neq 0} |(B^*\phi, (R(\lambda + \mathrm{i}\epsilon) - R(\lambda - \mathrm{i}\epsilon))B^*\phi)| < \infty;$$
3. *pour tout $\phi \in \mathcal{H}$, $e^{-\mathrm{i}tH}\phi \in \mathcal{D}(B)$ pour tout t et*
$$\sup_{\|\phi\|=1} \int_{-\infty}^{+\infty} \|Be^{-\mathrm{i}tM}\phi\|^2_{L^2_x} dt < \infty.$$

En particulier, l'obtention d'un Principe d'Absorption Limite pour H permet de montrer que certains opérateurs sont H-lisses.

On a alors:

Théorème 1.2.5 (Theorem 4.1 de [RS04])**.** *Soit $H_0 = \Delta$ et $H = \Delta + V$ avec $V = B_0^* B$. Supposons que B_0 est H_0-lisse et que, pour $I \subset \mathbb{R}$, B est H-lisse sur I. En notant E la mesure spectrale de H, on peut montrer qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$\|e^{-itH} E(I)\phi_0\|_{L_t^q L_x^r} \leqslant C\|\phi_0\|_{L_x^2},$$

pour toute paire admissible (q, r).

Cette notion de H-lisse permet donc d'obtenir les estimations de Strichartz pour H à partir de celle obtenue pour le Laplacien ce qui permet de montrer l'existence et l'unicité des solutions de (1.2) losque les données initiales sont petites.

1.3 La Théorie de Mourre

Nous allons maintenant détailler l'outil principal que nous allons utiliser: la Théorie de Mourre. Cette théorie permet de caractériser le spectre essentiel de différents opérateurs (présence de valeur propre dans le spectre essentiel et nature du spectre continu) et d'obtenir un Principe d'Absorption Limite. Sous certaines conditions, cette théorie permet de montrer que les valeurs de la résolvante au bords du spectre essentiel sont des fonctions régulières. Nous allons tout d'abord rappeler un bref historique de cette théorie.

En 1956, C.R. Putnam montra le résultat suivant:

Théorème 1.3.1. *Soit H un opérateur auto-adjoint, borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Supposons qu'il existe A un opérateur auto-adjoint borné et C un opérateur borné et injectif tel que*

$$[H, iA] \geqslant CC^*.$$

Alors,

$$\sup_{\mu>0, \lambda\in\mathbb{R}} \left|(Cf, \Im(H - \lambda - i\mu)^{-1}Cf)\right| \leqslant 4\|A\|\|f\|^2,$$

pour tout $f \in \mathcal{H}$.

Notons que ce résultat implique la nature purement absoluement continu du spectre de H, ce qui limite les possibilités d'appliquer ce résultat, notemment lorsque $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

En s'inspirant du résultat de Putnam, E. Mourre montra au début des années 1980 que la positivité du commutateur n'était pas nécessaire, comme c'est le cas dans le Théorème de Putnam, mais qu'on pouvait seulement supposer une positivité locale. Cette remarque donna naissance au théorème portant son nom: le Théorème de Mourre.

Théorème 1.3.2. *Soit M un opérateur auto-adjoint borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ tel que $\sigma(M) \neq \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un opérateur auto-adjoint A et un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tels que*

1. *la fonction $M(\cdot) : \mathbb{R} \to L(\mathcal{H})$ définit par $M(t) = e^{-itA}Me^{itA}$ est de classe C^2;*
2. *il existe un réel $a_0 > 0$ et K un opérateur compact tels que*

$$E(I)[M, iA]E(I) \geqslant a_0E(I) + K, \tag{1.4}$$

où E est la mesure spectrale de M.

Alors,

- *l'ensemble Λ des valeurs propres de M dans I est fini et toutes ces valeurs propres sont de multiplicité finie;*

- *Pour tout* $f \in \mathcal{D}(A)$*, la limite* $\lim_{\mu\to\pm 0}(f,(M-\lambda-i\mu)^{-1}f)$ *existe localement uniformément en* $\lambda \in I\backslash\Lambda$.

Dans le cadre où M n'est pas borné, ce théorème peut être appliquer en remplacant la condition de régularité par une condition similaire sur l'opérateur $(M+i)^{-1}$, avec le même résultat. De plus, la condition de régularité peut être interprétée en terme de conditions sur les commutateurs entre M et A.

Dans les années qui suivirent, ce résultat fut généralisé dans différentes directions: affaiblissement de la condition de régularité (voir [ABdMG96]), généralisation dans le cadre de l'opérateur conjugué non auto-adjoint (voir [GGM04]), extension de la théorie près des seuils (voir [BdMM97, Ric06])... Certaines de ces généralisations permettent de montrer que si la fonction $M(\cdot)$ est plus régulière, alors

$$\lambda \mapsto \text{w*-}\lim_{\epsilon\to 0}(M-\lambda\pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1}$$

est une fonction régulière. On peut voir par exemple dans [JMP84] que, pour $k\in\mathbb{N}$, $k>1$, si $M(\cdot)$ est de classe C^k, alors l'application $\lambda \mapsto \text{w*-}\lim_{\epsilon\to 0}(M-\lambda\pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1}$ est de classe C^{k-2}. En particulier, si $M(\cdot)$ est de classe C^3, on peut définir l'opérateur de temps-retard. Ce résultat fut par la suite amélioré en utilisant notamment les régularités de type Hölder (voir [BdMG93]).

Pour répondre aux questions posées précedement (nature du spectre, obtention d'un Principe d'Absorption Limite et régularité des valeurs au bords de la résolvante), il suffit donc de trouver un bon opérateur conjugué A tel que le premier commutateur de H avec A soit positif et dans un certain espace d'opérateurs bornés (borné de $\mathcal{D}(H)$ dans $\mathcal{D}(H)^*$ par exemple). Puisque dans cette thèse, nous ne nous interesserons qu'au cas où le potentiel V est compact par rapport au Laplacien, on peut construire l'opérateur A tel que les hypothèses du Théorème de Mourre soient satisaites avec $H=\Delta$.

Un opérateur conjugué assez naturel apparait alors: le générateur des dilatations A_D. En effet, le commutateur avec le Laplacien donne pour cet opérateur conjugué $[\Delta, iA_D]=2\Delta$ qui est positif. Le commutateur avec un potentiel est lui aussi explicite et donne $[V, iA_D]=-q\cdot\nabla V$. En utilisant cet opérateur conjugué, E. Mourre montra le résultat suivant

Théorème 1.3.3 (Theorem I.1 de [Mou81])**.** *Soit* V *un potentiel* Δ*-compact. Supposons que* $B=q\cdot\nabla V$ *est* Δ*-compact et qu'il existe* B_L, B_S *deux opérateurs auto-adjoints tels que* $B=B_L+B_S$*,* qB_S *est* Δ*-borné et* $[B_L, iA_D]$ *est* Δ*-compact. Alors on peut montrer un Principe d'Absorption Limite pour* $S=H=\Delta+V$ *sur tout compact de* $(0,+\infty)$*.*

Remarquons que pour qu'un opérateur M soit Δ-compact, il suffit qu'il existe $\theta>0$ tel que $\langle q\rangle^\theta M$ soit borné. En particulier, si on suppose qu'il existe $\theta>0$ tel que $\langle q\rangle^\theta V$, $\langle q\rangle^\theta B$, $\langle q\rangle^\theta q\cdot\nabla B_L$ et qB_S soient bornés, alors les conditions du Théorème 1.3.3 sont satisfaites.

Un premier cas auquel nous allons nous intéresser dans cette thèse est le cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. En utilisant la généralisation du Théorème de Mourre donnée dans [ABdMG96], on peut montrer le résultat suivant:

Théorème 1.3.4. *Soit* V *un potentiel* Δ*-compact. Supposons qu'il existe* $\mu>0$ *tel que* $\langle q\rangle^\mu q\cdot\nabla V : \mathcal{H}^2\to\mathcal{H}^{-2}$ *est borné. Alors on peut montrer un Principe d'Absorption Limite pour* $S=H=\Delta+V$ *sur tout compact de* $(0,+\infty)$*.*

En particulier, il suffit de montrer que l'application $x\mapsto\langle x\rangle^\mu x\cdot\nabla V(x)$ est borné ou peut s'écrire comme la dérivée d'ordre 1 ou d'ordre 2 d'une application bornée, pour pouvoir appliquer ce résultat.

Outre la nature du spectre continu de H, on peut s'intéresser à la nature du spectre discret et notamment à la présence de valeurs propres strictement positives. Dans une série d'articles publiés au début des années 80, R. Froese, I. Herbst, M. Hoffman-Ostenhof et T. Hoffman-Ostenhof ont apportés une réponse à cette question en montrant les deux résultats suivants:

Théorème 1.3.5 (Theorem 2.1 de [FH82]). *Soit V un potentiel Δ-borné avec borne inférieure à 1. Supposons que $q \cdot \nabla V : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^{-2}$ est borné. Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $E \in \mathbb{R}$ tel que $H\psi = E\psi$. Alors*

$$\sup\{\alpha^2 + E : \alpha > 0, \exp(\alpha|x|)\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

est $+\infty$ ou est un point où l'estimation de Mourre (1.4) est fausse.

Théorème 1.3.6 (Theorem 2.3 de [FHHOHO82]). *Soit V un potentiel Δ-borné avec borne inférieure à 1. Supposons que $q \cdot \nabla V : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^{-2}$ est compact et qu'il existe $a < 2$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que*

$$q \cdot \nabla V \leqslant -a\Delta + b.$$

Alors H n'admet pas de valeur propre strictement positive.

Le Théorème 1.3.5 nous montre que, si l'application $x \mapsto x \cdot \nabla V(x)$ est borné ou peut s'écrire comme la dérivée d'ordre 1 ou d'ordre 2 d'une application bornée, alors les vecteurs propres de l'opérateur $H = \Delta + V$ doivent avoir une certaine décroissance à l'infini. En particulier, cela implique que sous les conditions du Théorème 1.3.4, les vecteurs propres associés à des valeurs propres strictement positives doivent avoir une décroissance exponentielle à l'infini.

Un dernier résultat utilisant le générateur des dilatations comme opérateur conjugué est celui donné par la théorie de l'opérateur faiblement conjugué:

Théorème 1.3.7 (Theorem C.1 de [BG10]). *Soit $n \geqslant 3$. Soit $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Supposons que :*

1. *V_k sont Δ bornés avec bornes inférieures à 1;*
2. *$\nabla V_k, q \cdot \nabla V_k$ sont Δ-bornés et $\langle q\rangle^2 (q \cdot \nabla)^2 V_k$ sont bornés;*
3. *il existe $c_1 \in [0, 2)$ et $c_1' \in [0, (2 - c_1)(n-2)^2/2)$ tels que*

$$x \cdot \nabla V_1(x) + c_1 V_1(x) \leqslant \frac{c_1'}{|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et

$$V_2(x) \geqslant 0 \text{ et } -c_1 x \cdot \nabla V_2(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, on définit $H = \Delta + V_1 + iV_2$ et on garde la même notation pour la fermeture de H ayant pour domaine $\mathcal{H}^2$. Le spectre de H est inclu dans le demi-plan complexe supérieur. De plus H n'a pas de valeur propre sur $[0, +\infty)$ et

$$\sup_{\lambda \in [0,\infty), \mu > 0} \left\| |q|^{-1} (H - \lambda + i\mu)^{-1} |q|^{-1} \right\| < \infty.$$

Si $c_1 = 0$, alors les résultats précédents reste vrai en remplaçant $[0, \infty)$ par $\mathbb{R}$.

Ce qu'on peut remarquer sur ces différents résultats c'est que l'utilisation du générateur des dilatations comme opérateur conjugué fait apparaitre des conditions de décroissance à l'infini sur les dérivées du potentiel. Dans certains cas, si le potentiel est à longue portée par exemple, l'apparition de ces dérivées peut être bénéfique, les dérivées du potentiel ayant plus de décroissance que le potentiel lui même. En revanche lorsque le potentiel est peu régulier ou à de fortes oscillations, ces dérivées peuvent rendre le commutateur non borné, empêchant donc l'application de la théorie de Mourre.

Un second cas auquel nous allons nous intéresser dans cette thèse est le cas des guides d'ondes. Soit Γ un tube incurvé suivant la direction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$. Soit H_Γ le Laplacien sur Γ avec conditions de Dirichlet ou Neumann au bord. On va supposer que la première courbure de p est bornée avec une borne suffisamment petite et que Γ ne se recoupe pas. Sous ces conditions, on peut identifier $L^2(\Gamma)$ avec $L^2(\Omega)$ où Ω est un guide d'onde droit ($\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$ avec Σ un compact de $\mathbb{R}^{n-1}$) et associer à H_Γ l'opérateur H sur $L^2(\Omega)$ défini par

$$H\psi = -\partial_y h^{-2}(q)\partial_y \psi - \sum_{k=2}^{n} \partial^2_{\sigma_k}\psi + W(q)\psi,$$

avec $(y, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \subset \mathbb{R} \times \Sigma$, h une fonction strictement positive dépendante des courbures de p et W une fonction dépendante des dérivées d'ordres 1 et 2 de h.

Théorème 1.3.8 (Theorem 3.4 de [KTdA04]). *Soit Γ et H définis comme précedemment. Supposons que, uniformément en $\sigma \in \Sigma$,*

1. $\lim_{|y|\to\infty} h(y, \sigma) = 1$*;*
2. $\partial_y^2 h(y, \sigma), \sum_{k=2}^{n}(\partial_{\sigma_k} h(y, \sigma))^2 \to 0$ *quand* $|y| \to \infty$*;*
3. *il existe $\theta > 0$ tel que*

$$\partial_y h(y, \sigma), \partial_y^3 h(y, \sigma), \partial_y \sum_{k=2}^{n} (\partial_{\sigma_k} h)^2(y, \sigma) = O(|y|^{-1-\theta}).$$

Si on note $\mathcal{T} = \{\nu_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des valeurs propres du Laplacien de Dirichlet/Neumann sur la section Σ, alors on a:

(i) le spectre essentiel de H_Γ est $[\nu_1, +\infty)$;

(ii) H_Γ n'a pas de spectre singulier continu;

(iii) $\sigma_p(H_\Gamma) \cup \mathcal{T}$ est fermé et dénombrable;

(iv) $\sigma_p(H_\Gamma)\backslash\mathcal{T}$ est composé de valeurs propres de multiplicité finie ne pouvant s'accumuler qu'au niveau des points de $\mathcal{T}$.

Encore une fois, on peut remarquer que l'utilisation du générateur des dilatations comme opérateur conjugué impose des conditions de décroissance sur les dérivées d'ordre 2 et 3 de la fonction h, ce qui peut rendre les conditions sur h difficile à vérifier si cette fonction est peu régulière ou admet de fortes oscillations.

Nous allons maintenant expliquer certaines notations et faire quelques rappels concernant les différents types de spectre d'un opérateur auto-adjoint.

1.4 Notations et rappels

1.4.1 Notations

Les opérateurs de Schrödinger comportant des dérivées, les espaces de Sobolev occupent une place importante. Pour $s \in \mathbb{R}$, on notera $\mathcal{H}^s$ l'espace de Sobolev d'ordre s. Nous utiliserons beaucoup les espaces $\mathcal{H}^0 = L^2$, $\mathcal{H}^1$ et $\mathcal{H}^2$. On peut remarquer qu'on peut identifier l'espace dual de $\mathcal{H}^s$ à l'espace $\mathcal{H}^{-s}$. En particulier, on a les inclusions suivantes:

$$\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^{-1} \subset \mathcal{H}^{-2}.$$

On notera Δ l'opérateur Laplacien positif, défini sur l'espace $\mathcal{D}(\Delta) = \mathcal{H}^2$ par:

$$\forall \psi \in \mathcal{H}^2, \forall x \in \mathbb{R}^n, \Delta\psi(x) = -\sum_{k=1}^{n} \partial^2_{x_k}\psi(x).$$

L'opérateur Laplacien peut aussi être vu comme une forme quadratique sur l'espace $\mathcal{H}^1$.

On dira qu'un opérateur B sur L^2 est Δ-borné (respectivement Δ-compact) si l'opérateur $B(\Delta+1)^{-1}$ est borné (respectivement compact). Notons que B est Δ-borné (respectivement Δ-compact) si et seulement si la restriction de B à l'espace $\mathcal{H}^2$ est bornée (respectivement compact).

Deux autres opérateurs seront beaucoup utilisés: l'opérateur q de multiplication par x et l'opérateur d'impulsion p défini par

$$\forall \psi \in \mathcal{H}^1, \forall x \in \mathbb{R}^n, p\psi(x) = -\mathrm{i}\nabla\psi(x).$$

Une notation assez usuelle que nous utiliserons est la notation $\langle \cdot \rangle$ définie par

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}.$$

1.4.2 Les différents types de spectre

Nous allons maintenant faire quelques rappels sur les différents types de spectre d'un opérateur auto-adjoint.

Soit M un opérateur auto-adjoint. On définit l'ensemble résolvant de M, noté $\rho(M)$ comme l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $M - zId$ est un opérateur inversible. On définit le spectre de M, noté $\sigma(M)$ comme le complémentaire de $\rho(M)$. Notons que puisque M est auto-adjoint, $\sigma(M) \subset \mathbb{R}$.

On peut décomposer ce spectre en différents sous ensembles. Tout d'abord, on peut définir le spectre purement ponctuel, noté $\sigma_{pp}(M)$, comme l'ensemble des $\lambda \in \sigma(M)$ tel que $M - \lambda Id$ n'est pas injectif. Il est composé des valeurs propres de M. On peut aussi définir le spectre continu, noté $\sigma_c(M)$, comme l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M - \lambda Id$ est injectif, d'image dense, mais n'est pas surjectif. On peut remarquer qu'en dimension finie, un opérateur injectif étant toujours surjectif, $\sigma_c(M) = \emptyset$. Le spectre continu peut lui même être décomposé en deux sous ensembles en utilisant la mesure spectrale. En effet, la mesure spectrale de M étant une mesure supportée par le spectre, on peut interprété le spectre purement ponctuel comme la partie purement ponctuelle du support de la mesure spectrale et interprété le spectre continu comme la partie continue du support de la mesure spectrale. On peut ainsi définir le spectre absolument continu, noté $\sigma_{ac}(M)$, comme l'ensemble des $\lambda \in \sigma$ tels que la mesure spectrale de M en λ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et le spectre singulier continu, noté $\sigma_{sc}(M)$, comme l'ensemble des $\lambda \in \sigma$ tels que la mesure spectrale de M en λ est étrangère à la mesure de Lebesgue et tels que λ ne soit pas une valeur propre de M. On a ainsi:

$$\sigma(M) = \sigma_{pp}(M) \cup \sigma_c(M) = \sigma_{pp}(M) \cup \sigma_{ac}(M) \cup \sigma_{sc}(M),$$

ce qui permet de décomposer l'ensemble de définition de M selon les sous-espaces associés:

$$\mathcal{D}(M) = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}.$$

Une autre décomposition du spectre est possible. Définissons le spectre essentiel de M, noté $\sigma_{ess}(M)$, comme l'ensemble des $\lambda \in \sigma(M)$ tels que $M - \lambda Id$ ne soit pas un opérateur de Fredholm, i.e. ait un noyau ou un conoyau de dimension infinie. Le spectre essentiel est donc composé du spectre continu, des valeurs propres de multiplicité infinie et des valeurs propres non isolées.

On peut alors définir le spectre discret, noté $\sigma_d(M)$ comme l'ensemble des valeurs propres isolées de M de multiplicité finie, c'est à dire l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $0 < dimKer(M - \lambda Id) < \infty$ et tel qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que si $\mu \in \sigma(M)$ et $|\mu - \lambda| < \epsilon$ alors $\mu = \lambda$. On a alors la décomposition

$$\sigma(M) = \sigma_d(M) \cup \sigma_{ess}(M).$$

Dans cette thèse nous nous concentrerons sur l'étude du spectre essentiel. Nous allons donc rappeler un résultat permettant de le calculer.

Théorème 1.4.1 (Weyl)**.** *Soit A un opérateur auto-adjoint et B un opérateur fermé. Supposons que*

1. *il existe $z \in \rho(B) \cap \rho(A)$ tel que $(A - z)^{-1} - (B - z)^{-1}$ est compact;*
2. *$\sigma(A) \neq \mathbb{R}$ et $\rho(B) \neq \emptyset$.*

Alors $\sigma_{ess}(B) = \sigma_{ess}(A)$.

En appliquant ce résultat avec $A = \Delta$ et $B = \Delta + V$, et en utilisant que

$$(\Delta + i)^{-1} - (\Delta + V + i)^{-1} = (\Delta + V + i)^{-1} V (\Delta + i)^{-1},$$

on en déduit que si V est Δ-compact ou compact de $\mathcal{H}^1$ dans $\mathcal{H}^{-1}$ alors $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(\Delta) = [0, \infty)$.

Avec ces différentes décompositions du spectre d'un opérateur, on peut se poser les questions suivantes: le spectre discret coincide-t-il avec le spectre purement ponctuel ou y a-t-il des valeurs propres plongées dans le spectre essentiel? Quelle est la nature du spectre continu? Est-il uniquement composé de spectre absolument continu ou y a-t-il une part de spectre singulier continu?

Chapitre 2

Présentation des travaux de thèse

Sommaire

Dans ce chapitre, nous présenterons les principaux résultats obtenues durant cette thèse. Nous y verrons comment un autre choix d'opérateur conjugué que le générateur des dilatations permet d'éviter ou de limiter les conditions de décroissance sur les dérivées du potentiel. Nous nous interesserons tout d'abord au cas de l'espace Euclidien pour lequel nous montrerons l'obtention d'un Principe d'Absorption Limite loin des seuils avec cette nouvelle classe d'opérateurs. Nous verrons ensuite une généralisation du résultat de R. Froese et I. Herbst permettant de montrer l'absence de valeur propre strictement positive pour une grande classe de potentiel incluant des potentiels non bornés. Dans une troisième partie nous nous interesserons à l'obtention d'un Principe d'Absorption Limite global dans le cas de l'espace Euclidien. Enfin, dans une quatrième partie, nous verrons comment obtenir un Principe d'Absorption Limite loin des seuils et un Principe d'Absorption Limite global dans le cadre du guide d'onde incurvé. La plupart de nos résultats pouvant s'illustrer grâce à une famille de potentiels oscillants, nous détaillerons dans une cinquième partie les différents résultats obtenus sur cette famille de potentiels.

2.1 Un Principe d'Absorption Limite pour une nouvelle classe d'opérateurs de Schrödinger

Dans cette partie, nous présenterons les résultats principaux de l'article [Mar18b]. L'idée principale de cet article est d'appliquer le théorème de Mourre avec la classe d'opérateurs suivante:

$$A_u = \frac{1}{2}(q \cdot u(p) + u(p) \cdot q),$$

où q est l'opérateur de multiplication par la variable x, p est l'opérateur d'impulsion et u un champs de vecteur. On peut déjà remarquer que si u est un champs de vecteur réel, les opérateurs q et p étant auto-adjoints, l'opérateur A_u est symétrique. De plus si l'on rajoute quelques hypothèses sur u, on peut montrer que A_u vérifie les conditions nécessaire à l'application de la théorie de Mourre. On a en particulier le résultat suivant:

Proposition 2.1.1. *Soient u un champs de vecteur réel et A_u l'opérateur défini comme précedemment.*

1. *Si u est Lipschitzienne, alors A_u est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ avec pour domaine $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Schwartz (Proposition 7.6.3 de [ABdMG96]);*
2. *Si u est de classe C^∞ avec toutes ses dérivées bornées, alors, si on pose $W(t) = \exp(itA_u)$ le groupe généré par A_u, W laisse invariant l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et les espaces de Sobolev à poids $\mathcal{H}_s^t(\mathbb{R}^n)$ (Proposition 4.2.4 de [ABdMG96]).*

En particulier, si u est de classe C^∞ avec toutes ses dérivées bornées, A_u peut être utilisé en tant qu'opérateur conjugué. De plus, si $x \cdot u(x)$ est strictement positif lorsque $|x|^2$ est dans un certain intervalle, alors on peut montrer une estimation de Mourre sur ce même intervalle. Une autre propriété intéressante repose sur le fait que le commutateur avec le Laplacien est explicite:

$$[\Delta, iA_u] = 2p \cdot u(p).$$

En particulier, si u a toutes ses dérivées bornées, alors, u ayant une croissance au plus linéaire, les commutateurs itérés entre le Laplacien et l'opérateur conjugué A_u sont tous bornés sur le domaine de forme du Laplacien ce qui nous fournit la régularité du Laplacien par rapport à A_u. De plus, si on suppose que u est borné, on peut montrer que le commutateur entre le potentiel et A_u ne contient pas forcément de dérivée du potentiel. Cette propriété permet notamment de traiter des potentiels peu réguliers ou comportant de fortes oscillations mais permet aussi de traiter le cas de potentiels non bornés. Si on applique le théorème de Mourre avec A_u comme opérateur conjugué on obtient le résultat suivant:

Théorème 2.1.2. *Soit $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction réelle telle que $\xi(x) = 0$ si $|x| < 1$ et $\xi(x) = 1$ si $|x| > 2$. Soit $V : \mathcal{H}^2 \to L^2$ un potentiel symétrique, compact tel qu'il existe u un champs de vecteur borné C^∞ avec toutes ses dérivées bornées, satisfaisant:*

$$\int_1^\infty \|\xi(q/r)[V, iA_u]\|_{\mathscr{B}} \frac{\mathrm{d}r}{r} < \infty, \tag{2.1}$$

où $\mathscr{B}$ est l'ensemble des opérateurs bornés de $\mathcal{H}^2$ dans $\mathcal{H}^{-2}$ Soit J un intervalle réel tel que

$$\inf\{k \cdot u(k) \mid k \in X, |k|^2 \in J\} > 0. \tag{2.2}$$

Alors:

1. *L'ensemble des valeurs propres de $H = \Delta + V$ dans J est fini et chaque valeur propre est de multiplicité finie;*
2. *Le spectre singulier continu de H dans J est vide;*
3. *La limite*
$$R(\lambda \pm \mathrm{i}0) := \text{w*-}\lim_{\mu \downarrow 0} R(\lambda \pm \mathrm{i}\mu) \tag{2.3}$$
existe dans un certain ensemble d'opérateurs bornés, localement uniformément en $\lambda \in J$, en dehors des valeurs propres de H.

On peut s'apercevoir que les hypothèses de ce théorème sont satisfaites si l'on suppose qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\langle q\rangle^\mu V$ est borné et $\langle q\rangle^{1+\mu} V$ s'écrit comme la dérivée seconde d'une fonction bornée. En particulier, l'utilisation du A_u permet de traiter des potentiels Δ-compact avec de fortes oscillations à l'infini.

Un autre cas où un tel opérateur conjugué est utile est le cas des potentiels compact de $\mathcal{H}^1$ dans $\mathcal{H}^{-1}$. En effet, une partie de ces potentiels sont non-bornés, et donc en général non Δ-compact, mais peuvent s'écrire comme la dérivée de potentiels bornés. Certains de ces potentiels peuvent même correspondre à des distributions. En particulier, dans ce cadre, il n'est pas toujours possible d'utiliser le générateur des dilatations, le fait que le potentiel ne soit pas Δ-borné nous empêchant de considérer le premier commutateur comme une dérivée seconde d'un potentiel borné, ne permettant donc même pas la régularité $C^1(A_D)$, pourtant nécessaire pour utiliser les résultats de la théorie de Mourre.

En utilisant l'opérateur conjugué A_u, on obtient le résultat suivant:

Théorème 2.1.3. *Soit $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction réelle telle que $\xi(x) = 0$ si $|x| < 1$ et $\xi(x) = 1$ si $|x| > 2$. Soit $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ un potentiel symétrique, compact tel qu'il existe u un champs de vecteur borné C^∞ avec toutes ses dérivées bornées, satisfaisant:*

$$\int_1^\infty \|\xi(q/r)[V, iA_u]\|_{\mathscr{B}} \frac{\mathrm{d}r}{r} < \infty, \tag{2.4}$$

où $\mathscr{B}$ est l'ensemble des opérateurs bornés de $\mathcal{H}^1$ dans $\mathcal{H}^{-1}$ Soit J un intervalle réel tel que

$$\inf\{k \cdot u(k) \mid k \in X, |k|^2 \in J\} > 0. \tag{2.5}$$

Alors:

1. *L'ensemble des valeurs propres de $H = \Delta + V$ dans J est fini et chaque valeur propre est de multiplicité finie;*
2. *Le spectre singulier continu de H dans J est vide;*
3. *La limite*
$$R(\lambda \pm \mathrm{i}0) := \operatorname*{w^*\text{-}lim}_{\mu \downarrow 0} R(\lambda \pm \mathrm{i}\mu) \tag{2.6}$$
existe dans un certain ensemble d'opérateurs bornés, localement uniformément en $\lambda \in J$, en dehors des valeurs propres de H.

Encore une fois, on peut remarquer qu'il suffit qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\langle q\rangle^{1+\mu}V$ s'écrit comme la dérivée d'une fonction bornée pour satisfaire les hypothèses du théorème 2.1.3. Un choix judicieux de champs de vecteur u peut même permettre de traiter des potentiels qui peuvent s'écrire comme la dérivée d'une fonction avec peu de décroissance.

Corollaire 2.1.4. *Soit $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ compact. Supposons qu'il existe $\mu > 0$ tel que $x \mapsto \langle x\rangle^{1+\mu}V(x)$ est dans $\mathcal{H}^{-1}$. Alors, il existe un champs de vecteur u borné C^∞ avec toutes ses dérivées bornées tel que V satisfait les hypothèses du théorème 2.1.3 avec J un sous ensemble compact de $(0, +\infty)$.*

2.2 Une nouvelle classe d'opérateurs de Schrödinger sans valeur propre strictement positive

Dans cette partie, on présente les résultats obtenus dans l'article [Mar17] consacré à la preuve de l'absence de valeur propre plongée dans le spectre essentiel.

L'idée principale est de s'inspirer de la preuve donnée par R. Froese, I. Herbst, M. Hoffman-Ostenhof et T. Hoffman-Ostenhof en prenant pour opérateur conjugué l'opérateur A_u décrit précedement à la place du générateur des dilatations. Pour suivre leur preuve, il est préférable de choisir u de la forme $u(x) = x\lambda(x)$ avec λ une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, strictement positive, bornée, avec toutes ces dérivées bornées.

On commence tout d'abord par montrer qu'un possible vecteur propre de H doit nécessairement avoir une forte décroissance à l'infini:

Théorème 2.2.1. *Soit $H = \Delta + V$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, avec V un potentiel symétrique, Δ-borné avec borne plus petite que 1. Soient $E \in \mathbb{R}$ et ψ tels que $H\psi = E\psi$. Supposons qu'il existe un champs de vecteur u comme décrit précedemment tel que $(\Delta + 1)^{-1}[V, iA_u](\Delta + 1)^{-1}$ est borné, alors, pour tout $0 < \beta < 1$,*

$$S_E = \sup\left\{\alpha^2 + E\ ;\ \alpha > 0, \exp(\alpha\langle x\rangle^\beta)\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)\right\}$$

est $+\infty$ ou dans l'ensemble $\mathcal{E}_u(H)$, le complément de l'ensemble où l'estimation de Mourre est satisfaite avec A_u comme opérateur conjugué.

Comme dans le cas de la démonstration du principe d'absorption limite, l'utilisation du A_u permet de traiter aussi des potentiels compacts de $\mathcal{H}^1$ dans $\mathcal{H}^{-1}$. Pour ces potentiels, on peut montrer le résultat suivant:

Théorème 2.2.2. *Soit $H = \Delta + V$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, où V est une fonction à valeur réelle telle que $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ est borné avec des bornes plus petites que 1. Soient $E \in \mathbb{R}$ et ψ tels que $H\psi = E\psi$. Supposons qu'il existe un champs de vecteur u avec $u(x) = x\lambda(x)$ tel que $\langle p\rangle^{-1}[V, iA_u]\langle p\rangle^{-1}$ est borné. Alors, pour tout $0 < \beta < 1$,*

$$S_E = \sup\left\{\alpha^2 + E\ ;\ \alpha > 0, \exp(\alpha\langle x\rangle^\beta)\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)\right\}$$

vaut$+\infty$ ou est dans $\mathcal{E}_u(H)$.

Notons que contrairement à ce qui était prouvé dans [FH82], on ne montre pas ici de bornes exponentielles mais seulement des bornes sous exponentielles. On peut tout de même, à partir de ces bornes sous exponentielles montrer l'absence de valeur propre plongée pour les deux types de potentiels:

Théorème 2.2.3. *Pour $0 < \beta < 1$ et $\alpha > 0$, posons $F_\beta(x) = \alpha\langle x\rangle^\beta$. Soit V un potentiel Δ-compact. Soit ψ tel que $H\psi = E\psi$ avec $E > 0$ et tel que $\psi_F = \exp(F_\beta(q))\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ pour tout $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$. Supposons qu'il existe $\delta > -2$, $\delta', \sigma, \sigma' \in \mathbb{R}$ tels que $\delta + \delta' > -2$ et, pour tout $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$,*

$$(\psi_F, [V, iA_D]\psi_F) \geqslant \delta(\psi_F, \Delta\psi_F) + \delta'(\psi_F, (\nabla F_\beta)^2\psi_F) + (\sigma\alpha + \sigma')\|\psi_F\|^2. \tag{2.7}$$

Alors $\psi = 0$.

Similairement, pour le cas $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ borné, on a:

Théorème 2.2.4. *Supposons que $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ est borné.*
Soit ψ tel que $H\psi = E\psi$ avec $E > 0$. Pour $0 < \beta < 1$ et $\alpha > 0$, soit $F_\beta(x) = \alpha\langle x\rangle^\beta$ et notons $\psi_F = \exp(F_\beta(q))\psi$.
Supposons que $\psi_F \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ pour tout $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, et qu'il existe $\delta > -2$, $\delta', \sigma, \sigma' \in \mathbb{R}$ tels que $\delta + (1 + \|\langle p\rangle^{-1}V\langle p\rangle^{-1}\|)\delta' > -2$ et, pour tout $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$,

$$(\psi_F, [V, iA_D]\psi_F) \geqslant \delta(\psi_F, \Delta\psi_F) + \delta'(\psi_F, (\nabla F_\beta)^2\psi_F) + (\sigma\alpha + \sigma')\|\psi_F\|^2. \tag{2.8}$$

Alors $\psi = 0$.

On peut remarquer que ces résultats permettent de montrer l'absence de valeur propre strictement positive lorsque le potentiel V peut sécrire sous la forme $V = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} V_{sr}$ où $\langle q\rangle^{1+\mu}V_{sr}$ est borné pour un certain $\mu > 0$. En particulier, cette classe inclue des potentiels non dérivable ou avec de fortes oscillations.

2.3 Un Principe d'Absorption Limite global

Dans cette partie, on présente les résultats obtenus dans [Mar18a]. L'idée principale est d'utiliser différentes classes d'opérateurs comme opérateur conjugué avec la version de la théorie de Mourre appellée théorie de l'opérateur faiblement conjugué.

Une première classe d'opérateur que l'on peut utiliser est la classe des A_u décrite précedemment. Comme dans les deux sections précédentes, on peut remarquer que l'utilisation de cette classe avec un certain champs de vecteur u permet d'éviter des conditions sur les dérivées du potentiel, permettant de traiter ainsi des potentiels avec de fortes oscillations ou des potentiels associés à des fonctions qui ne sont pas de classe C^1. On obtient le résultat suivant:

Théorème 2.3.1. *Soit $n \geqslant 3$. Soient $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$ avec $V_2 \geqslant 0$. Supposons que $|q|^2 V_1$ et $|q|V_1$ sont bornés avec des bornes suffisamment petites et que $\langle q\rangle^3 V_i$ est borné pour $i = 1, 2$. Alors, pour tout $1 \leqslant \mu < 2$,*

$$\sup_{\rho\in\mathbb{R},\eta>0} \|\langle p\rangle^{-\mu/2}|q|^{-1}R(\rho - \mathrm{i}\eta)|q|^{-1}\langle p\rangle^{-\mu/2}\| < \infty.$$

De plus, H n'a aucune valeur propre réelle.

Une autre classe d'opérateurs que l'on peut utilisé est la classe des opérateurs A_F définis par

$$A_F = \frac{1}{2}(p \cdot F(q) + F(q) \cdot p)$$

avec $F(q) = q\langle q\rangle^{-\mu}$, $\mu \in [0, 1)$. Comme dans le cas du A_u, on peut vérifier que ces opérateurs sont auto-adjoints et que le groupe généré par A_F stabilise les espaces de Sobolev, ce qui permet l'application de la théorie de Mourre. Avec cette classe d'opérateur conjugué, on a le résultat suivant:

Théorème 2.3.2. *Soit $n \geqslant 3$ et $0 \leqslant \mu < (1 + \frac{n}{n-2})^{-2}$. Soient $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$. Supposons que*

1. *V_k sont Δ-compact et $V_2 \geqslant 0$;*
2. *$q\langle q\rangle^{-\mu} \cdot \nabla V_k$ sont Δ-compact;*
3. *il existe*
$$c_1 > -\frac{(n-2)^2(1 - \mu(1 + \frac{n}{n-2})^2)}{2}$$
tel que $-x \cdot \nabla V_1(x) \geqslant \frac{c_1}{|x|^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$;
4. *il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|(x\langle x\rangle^{-\mu} \cdot \nabla)^2 V_k(x)| \leqslant C|x|^{-2}\langle x\rangle^{-\mu}$.*

Alors

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R},\eta>0} \|\langle q\rangle^{-\mu/2}|q|^{-1}(H - \lambda + \mathrm{i}\eta)|q|^{-1}\langle q\rangle^{-\mu/2}\| < \infty.$$

De plus, H n'a aucune valeur propre réelle.

La théorie de l'opérateur faiblement conjugué ne nécessitant pas la stricte positivité du commutateur, mais seulement sa positivité et son injectivité, on peut également choisir un opérateur conjugué dans certaines directions seulement. Par exemple, si l'on suppose $n \geqslant 3$, on peut montrer le résultat suivant:

Théorème 2.3.3. *Soient $3 \leqslant k \leqslant n$ et $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Soient $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$ avec $V_2 \geqslant 0$.*

Notons $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ avec $x \in \mathbb{R}^k$ et $y \in \mathbb{R}^{n-k}$. Notons q_x l'opérateur de multiplication par la variable x et p_x l'opérateur d'impulsion dans la variable x. Supposons que $|q_x|^2 V_1$ et $|q_x|V_1$ sont bornés avec des bornes suffisamment petites et que $\langle q_x\rangle^3 V_i$ est borné pour $i = 1, 2$. Alors, pour tout $1 \leqslant \mu < 2$,

$$\sup_{\rho\in\mathbb{R},\eta>0} \|\langle p_x\rangle^{-\mu/2}|q_x|^{-1}R(\rho - \mathrm{i}\eta)|q_x|^{-1}\langle p_x\rangle^{-\mu/2}\| < \infty.$$

De plus, H n'a aucune valeur propre réelle.

En particulier, il n'est pas nécessaire de supposer que les potentiels V_i ont beaucoup de décroissance dans toutes les directions mais seulement dans au moins 3.

2.4 Un Principe d'Absorption Limite pour des opérateurs de Schrödinger sur des guides d'ondes

Dans cette partie, on présente les résultats obtenus sur les guides d'ondes. L'idée principale est d'utiliser différentes classes d'opérateurs comme opérateur conjugué afin d'obtenir un Principe d'Absorption Limite loin des seuils et un Principe d'Absorption Limite global.

Pour obtenir un Principe d'Absorption Limite loin des seuils, nous allons utiliser la classe d'opérateurs conjugués A_u vus comme des opérateurs différentiels uniquement dans la direction non bornée du guide d'onde. Comme vu précedemment , cette classe d'opérateur conjugué va permettre de limiter les hypothèses sur les dérivées du potentiel ainsi que les hypothèses portant sur les courbures du guides. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée avec toutes ses dérivées bornées et

$$A = \frac{q_y u(p_y) + u(p_y) q_y}{2}.$$

On peut montrer le résultat suivant:

Théorème 2.4.1. *Soit Σ un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$. Considérons le guide d'onde $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$. Soit V un potentiel compact de $\mathcal{H}^1_y$ dans $\mathcal{H}^{-1}_y$ de classe $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1_y, \mathcal{H}^{-1}_y)$. Soit $h : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *h^{-2} est borné.*
2. *Il existe $b > 0$ tel que $h^{-2}(y,\sigma) \geqslant b$ pour tout $(y,\sigma) \in \Omega$.*
3. *Il existe $\theta > 0$ tel que, uniformément en $\sigma \in \Sigma$,*
   $\sum_{k=2}^n (\partial_k h)^2(y,\sigma) = O(|y|^{-(1+\theta)})$ et $\partial_y h(y,\sigma) = O(|y|^{-(1+\theta)})$.

Posons $H = -\partial_y h^{-2}(q)\partial_y - \sum_{k=2}^n \partial^2_{\sigma_k} + W + V$ avec conditions de Dirichlet au bord où W dépend des dérivées de h. Alors, en notant $\mathcal{T}$ l'ensemble des valeurs propres du Laplacien de Dirichlet sur Σ, on a

(i) $\sigma_{ess}(H) = [\kappa, \infty)$ *avec* $\kappa = \inf \mathcal{T}$;

(ii) $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$;

(iii) $\sigma_p(H) \cup \mathcal{T}$ *est fermé et dénombrable.*

(iv) $\sigma_p(H) \backslash \mathcal{T}$ *est composé de valeurs propres de multiplicité finie ne pouvant s'accumuler qu'au niveau des points de* $\mathcal{T}$;

(v) *La limite* $R(\lambda \pm \mathrm{i}0) = \text{w*-}\lim_{\mu \to 0} R(\lambda \pm \mathrm{i}\mu)$ *existe, locallement uniformément en* $\lambda \in (\kappa, \infty)\backslash \mathcal{T}$ *en dehors des valeurs propres de* H *avec* $R(z) = (H - z)^{-1}$.

Remarquons que, si on cherche à obtenir un Principe d'Absorption Limite sur un guide d'onde incurvé pour un opérateur de Schrödinger, on peut se rammener à l'étude d'un opérateur de la même forme que H où h dépend des courbures du guide. L'utilisation d'un opérateur conjugué de type A_u permet donc d'éviter d'avoir à supposer que la fonction h est très régulière et possède des dérivées ayant suffisamment de décroissance à l'infini, ce qui permet notamment d'avoir des courbures avec de fortes oscillations.

En utilisant la théorie de l'opérateur faiblement conjugué, on peut aussi montrer un Principe d'Absorption Limite près des seuils, en utilisant cette fois ci la classe d'opérateurs A_F, encore une fois vus comme des opérateurs différentiels uniquement dans la direction non bornée du guide d'onde. On obtient alors:

Théorème 2.4.2. *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ avec toutes ces dérivées bornées. Supposons que $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est un potentiel Δ-borné avec borne plus petite que 1. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ avec toutes ces dérivées bornées tel que, pour tout $(y,\sigma) \in \Omega$,*

1. *$F'(y) + F(y)\partial_y h(y,\sigma)h^{-1}(y,\sigma) > 0$ est borné;*
2. *$(y,\sigma) \mapsto F(y)\partial_y(V+W)(y,\sigma)$ est bornée;*
3. *$-\frac{1}{2}F'''(y)h^{-2}(y,\sigma) + F''(y)\partial_y h(y,\sigma)h^{-3}(y,\sigma) - F(y)\partial_y(V+W)(y,\sigma) \geqslant 0$ est borné;*
4. *il existe $C_1 > 0$ tel que*
$$\left|F(y)h^{-2}(F''(y) + F'(y)\partial_y hh^{-1} + F(y)\partial_y^2 hh^{-1} - F(y)(\partial_y h)^2 h^{-2}\right)\right| \leqslant C_1 G(y,\sigma);$$
5. *il existe $C_2 > 0$ tel que*
$$\begin{aligned} & \left| -\partial_y\left(F''(y)h^{-2}(y,\sigma)(F'(y) + F(y)\partial_y h(y,\sigma)h^{-1}(y,\sigma))\right) \right. \\ & +F(y)\partial_y\left(\frac{1}{2}F'''(y)h^{-2}(y,\sigma) - F''(y)\partial_y h(y,\sigma)h^{-3}(y,\sigma)\right) \\ & \left. +(F(y)\partial_y)^2(V+W)(y,\sigma)\right| \\ \leqslant\ & C_2 W_1(y,\sigma); \end{aligned}$$

où
$$G(y,\sigma) = F'(y) + F(y)\partial_y h(y,\sigma)h^{-1}(y,\sigma)$$
et
$$W_1(y,\sigma) = -\frac{1}{2}F'''(y)h^{-2}(y,\sigma) + F''(y)\partial_y h(y,\sigma)h^{-3}(y,\sigma) - F(y)\partial_y(V+W)(y,\sigma).$$
Posons $H = -\partial_y h^{-2}(q)\partial_y - \sum_{k=2}^n \partial^2_{sigma_k} + W + V$ avec condition de Dirichlet au bord où W dépend des dérivées de h. Alors, il existe $c > 0$ tel que
$$\left|(f,(H-\lambda+\mathrm{i}\eta)^{-1}f)\right| \geqslant \|S^{-1/2}f\|^2 + \|S^{-1/2}Af\|^2,$$
avec
$$\begin{aligned} S &= 2p_y h^{-2}\left(F'(y) + F(y)\partial_y hh^{-1}\right)p_y \\ &\quad -\frac{1}{2}F'''(y)h^{-2} + F''(y)\partial_y hh^{-3} - F(y)\partial_y(V+W) \end{aligned}$$
et
$$A = \frac{p_y F(q_y) + F_(q_y)p_y}{2}.$$
De plus, H n'a pas de valeurs propres réelles.

2.5 Un potentiel oscillant

Comme on l'a dit précédemment, l'utilisation de la classe d'opérateurs A_u permet d'obtenir un Principe d'Absorption Limite et l'absence de valeur propre plongée pour des potentiels avec de fortes oscillations. Pour cette raison, dans cette thèse nous avons étudier à plusieurs reprises le cas d'une classe de potentiels oscillants donnés par l'équation suivante
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, W_{\zeta\theta}(x) = w(1-\kappa(|x|))\frac{\sin(k|x|^\zeta)}{|x|^\theta},$$
avec $\zeta, \theta \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $w \in \mathbb{R}^*$ et $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $\kappa = 1$ sur $[-1,1]$ et $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$.

Nous rappellerons dans cette partie les différents résultats obtenus sur l'opérateur de Schrödinger associé à ce potentiel.

Commençons tout d'abord par rappeler les résultats obtenus avec le générateur des dilatations comme opérateur conjugué:

Proposition 2.5.1. *Soit $H = \Delta + W_{\zeta\theta}$. Alors on peut montrer les résultats suivants:*

1. *Supposons que $\theta > 0$. A moins que $|\zeta - 1| + \theta > 1$, supposons de plus que $\alpha > 1$ et $\beta > 1/2$. Alors on peut montrer un principe d'absorption limite pour H sur tout compact inclu dans $(0, +\infty)$. De plus, si il existe $E > 0$, $\psi \in L^2$ tel que $H\psi = E\psi$, alors, pour tout $\alpha > 0$, $\exp(\alpha\langle x\rangle)\psi \in L^2$.*

2. *Supposons que $\theta > 0$. A moins que $\theta - \zeta > 0$, supposons de plus que $\zeta > 1$ et $\theta > 1/2$. Alors H n'a pas de valeur propre strictement positive pour tout $w \in \mathbb{R}$.*

3. *Supposons que $\theta > 2$ et que $\theta - \zeta > 2$. Alors on peut montrer un principe d'absorption limite pour H sur $\mathbb{R}$ si $|w|$ est suffisamment petit. En particulier, H n'a pas de valeur propre réelle.*

Ce que l'on peut remarquer de ces différents résultats c'est que lorsque le potentiel a de fortes oscillations (ζ grand), il est en général nécessaire que le potentiel ait beaucoup de décroissance (θ grand). De plus, ces résultats ne concernent que des potentiels bornés ($\theta > 0$).

Voyons maintenant les résultats obtenus avec l'opérateur A_u comme opérateur conjugué. On supposera toujours que le champs de vecteur u est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, borné avec toutes ses dérivées bornées. Les résultats obtenus obtenus avec le générateur des dilatations pouvant aussi être obtenus avec l'opérateur A_u, nous ne les répèterons pas et nous concentrerons sur les résultats propres à la classe des A_u.

Théorème 2.5.2. *Soit $H = \Delta + W_{\zeta\theta}$. Alors on peut montrer les résultats suivants:*

1. *Supposons que $\theta > 0$ et que $\theta + 2\zeta > 3$. Alors on peut montrer un principe d'absorption limite pour H sur tout compact inclu dans $(0, +\infty)$.*

2. *Supposons que $\theta + \zeta > 2$. Alors on peut montrer un principe d'absorption limite pour H sur tout compact inclu dans $(0, +\infty)$.*

3. *Supposons que $\theta + \zeta > 3/2$. Alors, si il existe $E > 0$, $\psi \in L^2$ tel que $H\psi = E\psi$, alors, pour tout $\alpha > 0, \beta \in (0, 1)$, $\exp(\alpha\langle x\rangle^\beta)\psi \in L^2$.*

4. *Supposons que $\theta + \zeta \geqslant 2$. Alors H n'a pas de valeur propre strictement positive pour tout $w \in \mathbb{R}$ si $\theta + \zeta > 2$, et pour w suffisamment petit si $\theta + \zeta = 2$.*

5. *Supposons que $\theta > 3$. Alors on peut montrer un principe d'absorption limite pour H sur $\mathbb{R}$ si $|w|$ est suffisamment petit. En particulier, H n'a pas de valeur propre réelle.*

Chapitre 3

On the Limiting absorption principle for a new class of Schrödinger Hamiltonians

In this chapter is given my article [Mar18b], published in Confluentes Mathematici.

Abstract. We prove the limiting absorption principle and discuss the continuity properties of the boundary values of the resolvent for a class of form bounded perturbations of the Euclidean Laplacian Δ that covers both short and long range potentials with an essentially optimal behaviour at infinity. For this, we give an extension of Nakamura's results (see [Nak15]).

Sommaire

3.1 Introduction

The purpose of this article is to prove a limiting absorption principle for a certain class of Schrödinger operator with real potential and to study their essential spectrum. Because this operators are self-adjoint, we already know that their spectrum is in the real axis. We also know that the non negative Laplacian operator Δ (Schrödinger operator with no potential) has for spectrum the real set $[0, +\infty)$ with purely absolutely continuous spectrum on this set. If we add to Δ a "small" potential (with compact properties with respect to Δ), the essential spectrum of this new operator is the same that Δ essential spectrum which is continuous. We are interested in the nature of the essential spectrum of the perturbed operator and in the behaviour of the resolvent operator near the essential spectrum.

We will say that a self-adjoint operator has *normal spectrum* in an open real set O if it has no singular continuous spectrum in O and its eigenvalues in O are of finite multiplicities and have no accumulation points inside O. Note that if we have a Limiting Absorption Principle for an operator H on O, H has normal spectrum on O.

A general technique for proving this property is due to E. Mourre [Mou81] and it involves a local version of the positive commutator method due to C.R. Putnam [Put56, Put67]. For various extensions and applications of these techniques we refer to [ABdMG96]. Roughly speaking, the idea is to search for a second self-adjoint operator A such that H is regular in a certain sense with respect to A and such that H satisfies the Mourre estimate on a set I in the following sense

$$E(I)[H, iA]E(I) \geqslant c_0 E(I) + K$$

where $E(I)$ is the spectral measure of H on I, $c_0 > 0$ and K a compact operator. Then one says that the operator A is *conjugate* to H on I.

When $H = \Delta + V$ is a Schrödinger operator, we usually apply the Mourre theorem with the generator of dilations

$$A_D = \frac{1}{2}(p \cdot q + q \cdot p),$$

where $p = -\mathrm{i}\nabla$ and q is the vector of multiplication by x (see [ABdMG96, Proposition 7.4.6] and [CFKS08, Section 4]). But in the commutator expressions, derivatives of V appears which can be a problem, if, for example, V has high oscillations at infinity.

In a recent paper S. Nakamura [Nak15] pointed out the interesting fact that a different choice of conjugate operator for H can be used to have a limiting absorption principle. This allows us to avoid imposing conditions on the derivative of the long range part of the potential. More precisely, if the operator of multiplication by $V(q)$ is Δ-compact and two other multiplication operators, which include differencies on V and not derivatives, are Δ-bounded, then H has normal spectrum in $(0, \pi^2/a^2)$ and the limiting absorption principle holds for H locally on this set, outside the eigenvalues. This fact is a consequence of the Mourre theorem with A_N (see (3.1)) as conjugate operator.

Our purpose in this article is to put the results of Nakamura in a more general abstract setting and get a generalisation of his result. Moreover, we will show that this generalisation can be applied to potentials for which the Mourre theorem with the generator of dilations as conjugate operator cannot apply (our potentials are not of long range type). Furthermore, Nakamura's result cannot apply to this type of potentials which are not Δ-bounded. Finally, as usual, we will derive from the limiting absorption principle an application of this theory to wave operators.

We denote $X = \mathbb{R}^\nu$ and $\mathcal{H} = L^2(X)$. Let $\mathcal{H}^1$ be the first order Sobolev space on X, denote $\mathcal{H}^{-1}$ its adjoint space and similarly, we denote $\mathcal{H}^2$ the second order Sobolev space on X and $\mathcal{H}^{-2}$ its adjoint space. All this spaces realised the following

$$\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{-1} \subset \mathcal{H}^{-2}.$$

Set $\mathscr{B}_1 = B(\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ and $\mathscr{B}_2 = B(\mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$. If needed for clarity, if u is a measurable function on X we denote $u(q)$ the operator of multiplication by u whose domain and range should be obvious from the context. If $a \in X$ let T_a be the operator of translation by a, more precisely $(T_a f)(x) = f(x + a)$.

We say that $V \in \mathscr{B}$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1$ or $\mathscr{B} = \mathscr{B}_2$, is a *multiplication operator* if $V\theta(q) = \theta(q)V$ for any $\theta \in C_c^\infty(X)$. Note that V is not necessarily the operator of multiplication by a function, it could be the operator of multiplication by a distribution of strictly positive order. For example, in the one dimensional case V could be equal to the derivative of a bounded measurable function. Anyway, if V is a multiplication operator then there is a uniquely defined temperate distribution v on X such that $Vf = vf$ for all $f \in C_c^\infty(X)$ and then $T_a V T_a^* = v(\cdot + a)$. In general we simplify notations and do not distinguish between the operator V and the distribution v, so we write $V = V(q)$ and $T_a V T_a^* = V(q + a)$.

We will extend Nakamura's result in two directions. First, we will use the Mourre theory with a class of potential $V : \mathcal{H}^2 \to L^2$ or $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ (cf. [ABdMG96]) and satisfying a weaker regularity. In particular, this includes potentials with Coulomb singularities, and also short range potentials (see Definition 3.1.3). Secondly, we will use the Mourre theory with a more general class of conjugate operators including A_N (see (3.5)).

Let $a > 0$ and let $\sin(ap) = \big(\sin(-ia\partial_{x_1}), \cdots, \sin(-ia\partial_{x_\nu})\big)$. Let

$$A_N = \frac{1}{2}\big(\sin(ap) \cdot q + q \cdot \sin(ap)\big). \tag{3.1}$$

Fix a real function $\xi \in C^\infty(X)$ such that $\xi(x) = 0$ if $|x| < 1$ and $\xi(x) = 1$ if $|x| > 2$.

Theorem 3.1.1. *Let $a \in \mathbb{R}$ and $V : \mathcal{H}^2 \to L^2$ (respectively $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$) be a compact symmetric multiplication operator with, for all vector e of the canonical basis of $\mathbb{R}^\nu$,*

$$\int_1^\infty \|\xi(q/r)|q|(V(q+ae) - V(q))\|_{\mathscr{B}} \frac{\mathrm{d}r}{r} < \infty \tag{3.2}$$

where $\mathscr{B} = \mathscr{B}_2$ (respectively $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1$). Then the self-adjoint operator $H = \Delta + V$ on $\mathcal{H}$ has normal spectrum in $(0, (\pi/a)^2)$ and, for some appropriate Besov space $\mathcal{K}$, the limits

$$(H - \lambda \pm \mathrm{i}0)^{-1} := \operatorname*{w^*\text{-}lim}_{\mu \downarrow 0} (H - \lambda \pm \mathrm{i}\mu)^{-1} \tag{3.3}$$

exist in $\mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K}^*)$, locally uniformly in $\lambda \in (0, (\pi/a)^2)$ outside the eigenvalues of H.

We make some comments in connection with the Theorem 3.1.1.

1. The Besov space is defined in Section 3.2 by (3.14).

2. Condition (3.2) is satisfied if $\|\langle q\rangle^\mu (V(q+a) - V(q))\|_{\mathscr{B}} < \infty$ for a fixed $\mu > 1$. To satisfy this conditions, it suffices that $\|\langle q\rangle^\mu V\|_{\mathscr{B}} < \infty$. In particular, in dimension $\nu \neq 2$, if V is a real function on $\mathbb{R}^\nu$ and if there is $\mu > 1$ such that $\big(\langle \cdot \rangle^\mu V(\cdot)\big)^p$ is in the Kato class, with $p = 1$ if $\nu = 1$, and $p = \nu/2$ if $\nu \geqslant 3$, then condition (3.2) is satisfied (see Proposition 3.4.7). If this is the case for all $a \in \mathbb{R}$, then the limiting absorption principle is true on $(0, +\infty)$.

3. In the case where $V : \mathcal{H}^2 \to L^2$ is compact, in [Nak15], V is assumed to satisfy $q(V(q+ae) - V(q))$ and $q^2(V(q+ae) + V(q-ae) - 2V(q))$ be Δ-bounded. This assumptions implies to the $C^2(A_N, \mathcal{H}^2, L^2)$ regularity. Observe that, since $q(V(q+ae) - V(q))$ appears in $[V, iA_N]$, (3.2) implies the $C^{1,1}(A_N, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$ regularity which is implied by the $C^2(A_N, \mathcal{H}^2, L^2)$ regularity.

4. In one dimension, let V such that

$$\widehat{qV}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \chi(\xi - n), \tag{3.4}$$

where $\widehat{\cdot}$ is the Fourier transform, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ and χ is compactly support, then V satisfies assumptions of Theorem 3.1.1 with $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1$ but V is neither Δ-bounded nor of class $C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. In particular, we can neither apply the Mourre Theorem with the generator of dilation (see [ABdMG96, p.258]) nor Nakamura's Theorem (see lemma 3.5.3).

As in [Nak15], the limiting absorption principle is limited to $(0, (\pi/a)^2)$. The bound $(\pi/a)^2$ is artificial and appears with the choice of vector field $\sin(ap)$. In fact, by a simple computation with the Laplacian Δ in $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, we have

$$\begin{aligned}
[\Delta, iA_N] &= [\Delta, i\frac{1}{2}\big(\sin(ap) \cdot q + q \cdot \sin(ap)\big)] \\
&= \frac{1}{2}\big(\sin(ap) \cdot [\Delta, iq] + [\Delta, iq] \cdot \sin(ap)\big) \\
&= 2p \cdot sin(ap)
\end{aligned}$$

which implies a loss of positivity on $(\pi/a)^2$. This is a drawback except if we can apply (3.2) for all $a > 0$. We will use Nakamura's method in a broader framework that allows the removing of this drawback.

Let us denote $H_0 = \Delta = p^2$. Then H_0 is a self-adjoint operator in $\mathcal{H}$ with domain $\mathcal{H}^2$ which extends to a linear symmetric operator $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ for which we keep the notation H_0. Let $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ *be a linear symmetric compact operator*. Then $H = H_0 + V$ is a symmetric operator $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ which induces a self-adjoint operator in $\mathcal{H}$ for which we keep the notation H. Let E_0 and E be the spectral measures of H_0 and H.

Note that for each non real z the resolvent $R(z) = (H - z)^{-1}$ of the self-adjoint operator H in $\mathcal{H}$ extends to a continuous operator $R(z) : \mathcal{H}^{-1} \to \mathcal{H}^1$ which is in fact the inverse of the bijective operator $H - z : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$.

A_N and A_D belongs to a general class of conjugate operator, which appears in [ABdMG96, Proposition 4.2.3]. This is the class of operator which can be written like

$$A_u = \frac{1}{2}\left(u(p)\cdot q + q \cdot u(p)\right) \tag{3.5}$$

where u is a C^∞ vector field with all the derivates bounded. We will see that this conjugate operator is self-adjoint on some domain (see Section 3.6). Conjugate operators of this form were already used in Mourre's paper [Mou81, page 395].

Remark that the commutator of such conjugate operator with a function of p is quite explicit: denoting $h' = \nabla h$ then

$$[h(p), \mathrm{i}A_u] = [h(p), \mathrm{i}u(p)q] = u(p)\cdot h'(p) = (u \cdot h')(p). \tag{3.6}$$

In particular $[H_0, \mathrm{i}A_u] = 2p \cdot u(p)$. We denote by the same notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau A_u}$ the C_0-group in $\mathcal{H}^1$ and in $\mathcal{H}^{-1}$.

One says that A is *strictly conjugate to* H_0 on J if there is a real number $a > 0$ such that $E_0(J)[H_0, \mathrm{i}A]E_0(J) \geqslant aE_0(J)$, which in our case means $2k \cdot u(k) \geqslant a$ for each $k \in X$ such that $|k|^2 \in J$. Taking A_u in this class, we have the following

Theorem 3.1.2. *Let $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ be a compact symmetric operator such that there is u a C^∞ bounded vector field with all derivatives bounded such that V is of class $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ in the following sense:*

$$\int_0^1 \|V_\tau + V_{-\tau} - 2V\|_{\mathscr{B}_1} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} < \infty, \quad \textit{where } V_\tau = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau A_u} V \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau A_u}. \tag{3.7}$$

Let J be an open real set such that

$$\inf\{k \cdot u(k) \mid k \in X, |k|^2 \in J\} > 0. \tag{3.8}$$

Then H has normal spectrum in J and the limits

$$R(\lambda \pm \mathrm{i}0) := \operatorname*{w^*\text{-}lim}_{\mu \downarrow 0} R(\lambda \pm \mathrm{i}\mu) \tag{3.9}$$

exist in $B\left(\mathcal{H}^{-1}_{1/2,1}, \mathcal{H}^1_{-1/2,\infty}\right)$, locally uniformly in $\lambda \in J$ outside the eigenvalues of H, where $\mathcal{H}^{-1}_{1/2,1}$ and $\mathcal{H}^1_{-1/2,\infty}$ are interpolation spaces which are defined on Section 3.2.

We make some remarks about this Theorem:

1. To check the $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ property, it is useful to have $e^{itA_u}\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}^1$. For that, we will make a comment in the Section 3.6 on the flow generated by the vector field u associated to A_u.

2. If $k \cdot u(k)$ is positive for all $k \neq 0$, Theorem 3.1.2 applies with $J = (0, +\infty)$.

3. If V is the divergence of a short range potential (see Definition 3.1.3), then Theorem 3.1.2 applies. A certain class of this type of potential were already studied in [Com80] and [CG76].

4. Since $R(\lambda \pm \mathrm{i}0)$ exists in $B\left(\mathcal{H}^{-1}_{1/2,1}, \mathcal{H}^{1}_{-1/2,\infty}\right)$, this operator exists in $B\left(C_c^\infty(\mathbb{R}^\nu), D'\right)$, with D' the space of distributions.

5. If V can be seen as a compact operator from $\mathcal{H}^2$ to L^2, Theorem 3.1.2 is still valid if we replace the assumption "V is of class $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$" by the weak assumption "$V \in C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$" with the same proof.

6. Consider the Δ-compact operator $V(q)$ where
$$V(x) = (1-\kappa(|x|))\frac{sin(|x|^\alpha)}{|x|^\beta},$$
with $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ with $\kappa(|x|) = 1$ if $|x| < 1$, $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$, $\alpha > 0$ and $\beta > 0$. Note that this type of potential was already studied in [BAD79, DMR91, DR83a, DR83b, JM17, RT97a, RT97b]. In [JM17], they proved that if $|\alpha - 1| + \beta > 1$, then V has the good regularity with A_D but, if $|\alpha - 1| + \beta < 1$, $H \notin C^1(A_D)$. In the latter case, we cannot apply the Mourre theory with the generator of dilation. Here, we prove that, with a certain choice of u, $V \in C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$ if $2\alpha + \beta > 3$ (see lemma 3.5.4). In that case, Theorem 3.1.2 applies. In particular, in the region $2\alpha + \beta > 3$ and $\alpha + \beta \leqslant 2$, we have the limiting absorption principle but H is not of class $C^1(A_D)$. In Section 3.5, we will see that Theorem 3.1.2 also applies if $\beta \leqslant 0$ under certain condition on α.

7. Let $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\kappa = 1$ on $[-1, 1]$ and $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$. Let
$$V(x) = (1-\kappa(|x|))\exp(3|x|/4)\sin(\exp(|x|)).$$
We can show that, for all u bounded, $V \in C^\infty(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ and Theorem 3.1.2 applies (see Lemma 3.5.6). Moreover, this implies good regularity properties on the boundary values of the resolvent. Since V is not Δ-bounded, we cannot use the $C^1(A_D, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$ (see [ABdMG96, Theorem 6.3.4]). We can also prove that $V \notin C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. In particular, Theorem 3.1.2 does not apply with $A_u = A_D$.

8. If $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact and if there is $\mu > 0$ such that $x \mapsto \langle x\rangle^{1+\mu}V(x)$ is in $\mathcal{H}^{-1}$ (V is assumed to be short range in a quite weak sense), then we can apply Theorem 3.1.2 with an appropriate u (see lemma 3.5.8). We will provide in this class an concrete example which cannot be treated with the generator of dilations or Nakamura's result (see lemma 3.5.10).

Now we will see a third result concerning existence of wave operators which are useful in scattering theory (see [RS70c]).

Definition 3.1.3. *A linear operator $S \in \mathscr{B}_1$ is* short range *if it is compact, symmetric, and*
$$\int_1^\infty \|\xi(q/r)S\|_{\mathscr{B}_1}\,\mathrm{d}r < \infty. \tag{3.10}$$

Remark that (3.2) is satisfied if
$$\int_1^\infty \|\xi(q/r)|q|V\|_{\mathscr{B}}\,\frac{\mathrm{d}r}{r} < \infty \tag{3.11}$$
which is a short range type condition.

Note that we do not require S to be local. Clearly this condition requires less decay than the condition (3.11). Then we have:

Theorem 3.1.4. *Let H be as in Theorem 3.1.1 and let S be a short range operator. Then the self-adjoint operator $H_1 = H + S$ has normal spectrum in $(0, \infty)$ and the wave operators*

$$\Omega_\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}E_H^{\mathrm{c}} \tag{3.12}$$

exist and are complete, where E_H^{c} is the projection onto the continuity subspace of H.

We now prove Theorem 3.1.4. We have $H_1 = \Delta + V + S$ and from [ABdMG96, 7.5.8] it follows that S, hence $V + S$, is of class $C^{1,1}(A_N, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ for all $a > 0$ so that we can use Theorem 3.1.2 to deduce that K has normal spectrum in $(0, \infty)$ and that the boundary values of its resolvent exist as in the case of H. For the existence and completeness of the wave operators we use [ABdMG96, Proposition 7.5.6] with the following change of notations: H_0, H, V from the quoted proposition are our H, H_1, S respectively. It remains only to check that S satisfies the last condition required on V in that proposition: but this is a consequence of [GM01, Theorem 2.14]. □

We will give on Section 3.4 more explicit conditions which ensure that the assumptions of Theorem 3.1.1 and 3.1.4 are satisfied in the case where V and S are real functions.

We make two final remarks. First, the assumption of compactness of V and S as operators $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is too strong for some applications, for example it is not satisfied if
$X = \mathbb{R}^3$ and $V(x)$ has local singularities of order $|x|^{-2}$. But compactness can be replaced by a notion of smallness at infinity similar to that used in [GM01] which covers such singularities and the arguments there extend to the present setting. Second, let us mention that we treat only the case when H_0 is the Laplacian $\Delta = p^2$ but an extension to more general functions $h(p)$ is straightforward with the same class of conjugate operator A_u.

The paper is organized as follows. In Section 3.2, we will give some notations we will use below and we recall some basic fact about regularity with respect to a conjugate operator. In Section 3.3, we will prove Theorem 3.1.2 and extend Nakamura's results by geting properties about the boundary values of the resolvent. In Section 3.4 , we will give an extension of Nakamura's theorem by using the Mourre theory with $C^{1,1}$ regularity with respect to the conjugate operator A_N. In Section 3.5, we will give some examples of potentials which satisfies Theorem 3.1.1 and Theorem 3.1.2 and which are not covered by Mourre Theorem with the generator of dilation and Nakamura's Theorem. In Section 3.6, we will study the flow associated to the unitary group generated by A_u.

3.2 Notation and basic notions

3.2.1 Notation

Let $X = \mathbb{R}^\nu$ and for $s \in \mathbb{R}$ let $\mathcal{H}^s$ be the usual Sobolev spaces on X with $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H} = L^2(X)$ whose norm is denoted $\|\cdot\|$. We are mainly interested in the space $\mathcal{H}^1$ defined by the norm $\|f\|_1^2 = \int \left(|f(x)|^2 + |\nabla f(x)|^2\right) \mathrm{d}x$ and its dual space $\mathcal{H}^{-1}$.

Recall that we set $\mathscr{B}_1 = B(\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ and $\mathscr{B}_2 = B(\mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$ which are Banach spaces with norm $\|\cdot\|_{\mathscr{B}}$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$. These spaces satisfy $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$.

We denote q_j the operator of multiplication by the coordinate x_j and $p_j = -\mathrm{i}\partial_j$ considered as operators in $\mathcal{H}$. For $k \in X$ we denote $k \cdot q = k_1 q_1 + \cdots + k_\nu q_\nu$. If u is a measurable function on X let $u(q)$ be the operator of multiplication by u in $\mathcal{H}$ and $u(p) = \mathcal{F}^{-1}u(q)\mathcal{F}$, where $\mathcal{F}$ is the Fourier transformation:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{\nu}{2}} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} u(x) \mathrm{d}x.$$

If there is no ambiguity we keep the same notation for these operators when considered as acting in other spaces.

Throughout this paper $\xi \in C^\infty(X)$ is a real function such that $\xi(x) = 0$ if $|x| < 1$ and $\xi(x) = 1$ if $|x| > 2$. Clearly the operator $\xi(q)$ acts continuously in all the spaces $\mathcal{H}^s$.

We are mainly interested in potentials V which are multiplication operators in the following more general sense.

Definition 3.2.1. *A map $V \in \mathscr{B}$ is called a* multiplication operator *if $V e^{ik\cdot q} = e^{ik\cdot q} V$ for all $k \in X$. Or, equivalently, if $V\theta(q) = \theta(q)V$ for all $\theta \in C_c^\infty(X)$.*

For the proof of the equivalence, note first that from $V e^{ik\cdot q} = e^{ik\cdot q} V, \forall k \in X$ we get $V\theta(q) = \theta(q)V$ for any Schwartz test function θ because $(2\pi)^{\frac{\nu}{2}}\theta(q) = \int e^{ikq}(\mathcal{F}\theta)(k)\mathrm{d}k$ and second that if $\eta \in C^1(X)$ is bounded with bounded derivative then $\eta(q)$ is the strong limit in $\mathscr{B}$ of a sequence of operators $\theta(q)$ with $\theta \in C_c^\infty(X)$.

As we mentioned in the introduction, such a V is necessarily the operator of multiplication by a distribution that we also denote V and we sometimes write the associated operator $V(q)$. For example, the distribution V could be the divergence $\operatorname{div} W$ of a measurable vector field $W : X \to X$ such that multiplication by the components of W sends $\mathcal{H}^1$ into $\mathcal{H}$. For example, W could be a bounded function and if this function tends to zero at infinity then V will be a compact operator $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$. we say that a multiplication operator V is Δ-compact if $V : \mathcal{H}^2 \to L^2$ is a compact operator.

As usual $\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}$. Then $\langle q\rangle$ is the operator of multiplication by the function $x \mapsto \langle x\rangle$ and $\langle p\rangle = \mathcal{F}^{-1}\langle q\rangle\mathcal{F}$. For real s, t we denote $\mathcal{H}_s^t$ the space defined by the norm

$$\|f\|_{\mathcal{H}_s^t} = \|\langle q\rangle^s f\|_{\mathcal{H}^t} = \|\langle p\rangle^t\langle q\rangle^s f\| = \|\langle q\rangle^s\langle p\rangle^t f\|. \tag{3.13}$$

Note that the adjoint space of $\mathcal{H}_s^t$ may be identified with $\mathcal{H}_{-s}^{-t}$.

A finer Besov type version $\mathcal{H}_{1/2,1}^{-1}$ of $\mathcal{H}_{1/2}^{-1}$ appears naturally in the theory. To alleviate the writing we denote it $\mathcal{K}$. This space is defined by the norm

$$\|f\|_{\mathcal{K}} = \|\theta(q)f\|_{\mathcal{H}^{-1}} + \int_1^\infty \|\tau^{1/2}\psi(q/\tau)f\|_{\mathcal{H}^{-1}}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \tag{3.14}$$

where $\theta, \psi \in C_c^\infty(X)$ with $\theta(x) = 1$ if $|x| < 1$, $\psi(x) = 0$ if $|x| < 1/2$, and $\psi(x) = 1$ if $1 < |x| < 2$. The adjoint space $\mathcal{K}^*$ of $\mathcal{K}$ is the Besov space $\mathcal{H}_{-1/2,\infty}^1$ (see [ABdMG96, Chapter 4]).

We will see in Section 3.6 that if $u : X \to X$ is a C^∞ vector field all of whose derivatives are bounded then the operator

$$A_u = \frac{1}{2}\left(u(p)\cdot q + q\cdot u(p)\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}\left(u_j(p)q_j + q_j u_j(p)\right) = u(p)\cdot q + \frac{i}{2}(\operatorname{div}u)(p) \tag{3.15}$$

with domain $C_c^\infty(X)$ is essentially self-adjoint in $\mathcal{H}$; we keep the notation A_u for its closure. Remark that the unitary group $e^{i\tau A_u}$ generated by A_u leaves invariant all the spaces $\mathcal{H}_t^s$ and $\mathcal{K}$ (see Section 3.6).

Since we will use a lot the case of u bounded, let $\mathcal{U}$ be the space of vector fields u bounded with all derivatives bounded such that $x \cdot u(x) > 0$ for all $x \neq 0$.

3.2.2 Regularity

Let F', F'' be two Banach space and $T : F' \to F''$ a bounded operator.

Let A a self-adjoint operator.

Let $k \in \mathbb{N}$. we say that $T \in C^k(A, F', F'')$ if, for all $f \in F'$, the map $\mathbb{R} \ni t \to e^{itA}Te^{-itA}f$ has the usual C^k regularity. The following characterisation is available:

Proposition 3.2.2. *$T \in C^1(A, F', F'')$ if and only if $[T, A]$ has an extension in $\mathcal{B}(F', F'')$.*

It follows that, for $k > 1$, $T \in C^k(A, F', F'')$ if and only if $[T, A] \in C^{k-1}(A, F', F'')$.

We can define another class of regularity called the $C^{1,1}$ regularity:

Proposition 3.2.3. *we say that $T \in C^{1,1}(A, F', F'')$ if and only if*

$$\int_0^1 \|T_\tau + T_{-\tau} - 2T\|_{\mathcal{B}(F',F'')} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} < \infty,$$

where $T_\tau = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau A_u} T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau A_u}$.

An easier result can be used:

Proposition 3.2.4 (Proposition 7.5.7 from [ABdMG96])**.** *Let $\xi \in C^\infty(X)$ such that $\xi(x) = 0$ if $|x| < 1$ and $\xi(x) = 1$ if $|x| > 2$. If T satisfies*

$$\int_1^\infty \|\xi(q/r)[T, iA]\|_{\mathcal{B}(F',F'')} \frac{\mathrm{d}r}{r} < \infty$$

then T is of class $C^{1,1}(A, F', F'')$.

If T is not bounded, we say that $T \in C^k(A, F', F'')$ if for $z \notin \sigma(T)$, $(T - z)^{-1} \in C^k(A, F', F'')$.

Proposition 3.2.5. *For all $k > 1$, we have*

$$C^k(A, F', F'') \subset C^{1,1}(A, F', F'') \subset C^1(A, F', F'').$$

If $F' = F'' = \mathcal{H}$ is an Hilbert space, we note $C^1(A) = C^1(A, \mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$. If T is self-adjoint, we have the following:

Theorem 3.2.6 (Theorem 6.3.4 from [ABdMG96])**.** *Let A and T be self-adjoint operator in a Hilbert space $\mathcal{H}$. Assume that the unitary group $\{\exp(iA\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ leaves the domain $D(T)$ of T invariant. Set $\mathcal{G} = D(T)$ endowed with it graph topology. Then*

1. *T is of class $C^1(A)$ if and only if $T \in C^1(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$.*
2. *T is of class $C^{1,1}(A)$ if and only if $T \in C^{1,1}(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$.*

Remark that, if $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ is not bounded, since $T : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ is bounded, in general, it is easier to prove that $T \in C^1(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ than $T \in C^1(A)$.

If $\mathcal{G}$ is the form domain of H, we have the following:

Proposition 3.2.7 (see p. 258 of [ABdMG96])**.** *Let A and T be self-adjoint operators in a Hilbert space $\mathcal{H}$. Assume that the unitary group $\{\exp(iA\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ leaves the form domain $\mathcal{G}$ of T invariant. Then*

1. *T is of class $C^k(A)$ if $T \in C^k(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$, for all $k \in \mathbb{N}$.*
2. *T is of class $C^{1,1}(A)$ if $T \in C^{1,1}(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$.*

As previously, since $T : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ is always bounded, it is, in general, easier to prove that $T \in C^k(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ than $T \in C^k(A)$.

3.3 Nakamura's ideas in a more general setting: Boundary values of the resolvent

In this section, we will prove the Theorem 3.1.2 and we will see how the regularity of the potential, in relation to A_u, can implies a good regularity for the boundary values of the resolvent.

We now prove Theorem 3.1.2 By taking into account the equation (3.6) and the statement of Theorem 7.5.6 in [ABdMG96] we only have to explain how the space $\mathcal{K}$ introduced before (3.14) appears into the picture (this is not the space also denoted $\mathcal{K}$ in [ABdMG96]). In fact the quoted theorem gives a more precise result, namely instead of our $\mathcal{K}$ one may take the real interpolation space $\big(D(A_u,\mathcal{H}^{-1}),\mathcal{H}^{-1}\big)_{1/2,1}$, where $D(A_u,\mathcal{H}^{-1})$ is the domain of the closure of A_u in $\mathcal{H}^{-1}$. From (3.15) and since u is bounded with all its derivatives bounded it follows immediately that $D(A_u,\mathcal{H}^{-1})$ contains the domain of $\langle q\rangle$ in $\mathcal{H}^{-1}$, which is $\mathcal{H}^{-1}_1$. Hence $\big(D(A_u,\mathcal{H}^{-1}),\mathcal{H}^{-1}\big)_{1/2,1}$ contains $\big(\mathcal{H}^{-1}_1,\mathcal{H}^{-1}\big)_{1/2,1}$ which is $\mathcal{H}^{-1}_{1/2,1}=\mathcal{K}$. □

We say that V is of class $C^k(A_u,\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$ for some integer $k\geqslant 1$ if the map $\tau\mapsto V_\tau\in B(\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$ is k times strongly differentiable. We clearly have $C^2(A_u,\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})\subset C^{1,1}(A_u,\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$. In [Mou81] the Limiting Absorption Principle is proved essentially for $V\in C^2(A)$ (see [GG99] for more details); notice that in [Mou83] the limiting absorption principle is proved in a space better (i.e larger) than $\mathcal{K}$ (see (3.13)), but not of Besov type.

If $s>1/2$ then $\mathcal{H}^{-1}_s\subset\mathcal{K}$ with a continuous and dense embedding. Hence:

Corollary 3.3.1. *For each $s>1/2$ the limit $R(\lambda\pm \mathrm{i}0)=\text{w*-}\lim_{\mu\downarrow 0}R(\lambda\pm\mathrm{i}\mu)$ exists in the spaces $B\big(\mathcal{H}^{-1}_s,\mathcal{H}^1_{-s}\big)$, locally uniformly in $\lambda\in J$ outside the eigenvalues of H.*

The $C^{1,1}(A_u)$ regularity condition (3.7) on V is not explicit enough for some applications. We now give a simpler condition which ensures that (3.7) is satisfied.

We recall some easily proven facts concerning the class $C^1(A_u,\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$. First, V is of class $C^1(A_u,\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$ if and only if the function $\tau\mapsto V_\tau\in B(\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$ is (norm or strongly) Lipschitz. Notice that we used $e^{i\tau A}\mathcal{H}^1\subset\mathcal{H}^1$ to prove this. Second, note that for an arbitrary V the expression $[V,\mathrm{i}A_u]$ is well-defined as symmetric sesquilinear form on $C^\infty_{\mathrm{c}}(X)$ and V is of class $C^1(A_u,\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$ if and only if this form is continuous for the topology induced by $\mathcal{H}^1$. In this case we keep the notation $[V,\mathrm{i}A_u]$ for its continuous extension to $\mathcal{H}^1$ and for the continuous symmetric operator $\mathcal{H}^1\to\mathcal{H}^{-1}$ associated to it.

As a consequence of Proposition 7.5.7 from [ABdMG96] with the choice $\Lambda=\langle q\rangle$ we get:

Proposition 3.3.2. *Let $V:\mathcal{H}^1\to\mathcal{H}^{-1}$ be a symmetric bounded operator of class $C^1(A_u,\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$ such that*

$$\int_1^\infty \|\xi(q/r)[V,\mathrm{i}A_u]\|_{\mathscr{B}}\frac{\mathrm{d}r}{r}<\infty \tag{3.16}$$

with $\mathscr{B}=\mathscr{B}_1$. Then V is of class $C^{1,1}(A_u,\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$.

If the potential V is of a higher regularity class with respect to A_u then, by using results from [BdMG93], we also get an optimal result on the order of continuity of the boundary values of the resolvent $R(\lambda\pm\mathrm{i}0)$ as functions of λ. From [Mou83] and the improvements in [BdMGS97] one may also get a precise description of the propagation properties of the dynamical group $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}$ in this context, but we shall not give the details here.

To state this regularity result we recall the definition of the *Hölder-Zygmund continuity classes* of order $s\in(0,\infty)$. Let $\mathcal{E}$ be a Banach space and $F:\mathbb{R}\to\mathcal{E}$ a continuous function. If $0<s<1$ then F is of class Λ^s if F is Hölder continuous of order s. If $s=1$ then F is of class Λ^1 if it is of Zygmund class, i.e. $\|F(t+\varepsilon)+F(t-\varepsilon)-2F(t)\|\leqslant C\varepsilon$ for all real t and $\varepsilon>0$. If $s>1$, let us write $s=k+\sigma$ with $k\geqslant 1$ integer and $0<\sigma\leqslant 1$; then F is of class Λ^s if F is k times continuously differentiable and $F^{(k)}$ is of class

Λ^σ. The corresponding local classes are defined as follows: if F is defined on an open real set U then F is *locally of class* Λ^s if θF is of class Λ^s for any $\theta \in C_c^\infty(U)$.

We say that V is of class $\Lambda^s(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ if the function $\tau \mapsto V_\tau \in \mathscr{B}_1$ is of class Λ^s. We mention that in a more general context this class is denoted by $C^{s,\infty}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$, but this does not matter here. In any case, one may easily check that
$\Lambda^s(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}) \subset C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}) \subset C^1(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ if $s > 1$. If $s \geqslant 1$ is an integer then $C^s(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}) \subset \Lambda^s(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ strictly.

Theorem 3.3.3. *Assume that u and J are as in Theorem 3.1.2 and let s be a real number such that $s > 1/2$. If $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is a compact symmetric operator of class $\Lambda^{s+1/2}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ then the functions*

$$\lambda \mapsto R(\lambda \pm \mathrm{i}0) \in B(\mathcal{H}_s^{-1}, \mathcal{H}_{-s}^1) \tag{3.17}$$

are locally of class $\Lambda^{s-1/2}$ on J outside the eigenvalues of H.

Proof. We shall deduce this from the theorem on page 12 of [BdMG93]. First, note that H has a spectral gap because $H_0 \geqslant 0$ and $(H+\mathrm{i})^{-1} - (H_0+\mathrm{i})^{-1}$ is a compact operator hence H and H_0 have the same essential spectrum. Thus we may use the quoted theorem and we get the assertion of the present theorem but with $B(\mathcal{H}_s^{-1}, \mathcal{H}_{-s}^1)$ replaced by $B(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{-s})$. Then it suffices to observe that if z belongs to the resolvent set of H then we have

$$R(z) = R(\mathrm{i}) + (z-\mathrm{i})R(\mathrm{i})^2 + (z-\mathrm{i})^2 R(\mathrm{i})R(z)R(\mathrm{i})$$

and to note that $R(\mathrm{i})$ sends $\mathcal{H}_s^{-1}$ into $\mathcal{H}_s^1$. □

We state explicitly the particular case corresponding to the Mourre condition $V \in C^2(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. We mention that this is equivalent to the fact that the sesquilinear form $[[V, A_u], A_u]$, which is always well-defined on $C_c^\infty(X)$, extends to a continuous sesquilinear form on $\mathcal{H}^1$.

Corollary 3.3.4. *Assume that we are in the conditions of the Theorem 3.1.2 but with the condition* (3.7) *replaced by the stronger one $V \in C^2(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. Then the map* (3.17) *is Hölder continuous of order $s - 1/2$ for all s such that $1/2 < s < 3/2$ and if $s = 3/2$ then the map* (3.17) *is of Zygmund class (but could be nowhere differentiable).*

Previously, we saw that H_0 verified the Mourre estimate on I if and only if $k \cdot u(k) > 0$ for all k such that $|k|^2 \in I$. Moreover, we saw that if H_0 verified the Mourre estimate on I, because the potential V is H_0-compact or compact on $\mathcal{H}^1$, the form domain of H_0, to $\mathcal{H}^{-1}$, H verified the Mourre estimate on the same interval I.

Because

$$u_N(x) = (\sin(ax_j))_{j=1,\cdots,\nu}$$

we have the Mourre estimate only on $I_a = (0, (\pi/a)^2)$, i.e. where $u_N(x) \neq 0$; this function constructs some artificial thresholds. If we can choose a vector field u such that $x \cdot u(x) > 0$ if $x \neq 0$ which satisfied some good conditions of regularity for the potential V, we can extend the interval I_a to $I = (0, +\infty)$. For example, we can choose the vector field $u(x) = (\arctan(x_j))_{j=1,\cdots,\nu}$, the function arctan being non zero for $x \neq 0$, or $u(x) = x/\langle x \rangle$. In particular, with this type of vector field, if $\langle p \rangle^{-1} q V \langle p \rangle^{-1}$ is bounded, then $V \in C^1(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ and we have the Mourre estimate on all compact subset of $(0, +\infty)$.

3.4 An extension of Nakamura's results

In this section, we will prove Theorem 3.1.1 and we will give some conditions easy to verify which assure that assumptions of Theorem 3.1.1 and 3.1.4 are satisfied. Moreover, we will give a stronger version of Nakamura's Theoerem with estimates on the boundary values of the resolvent.

In all this section, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 = B(\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.

We fix a real number $a > 0$ and denote $I_a = (0, \frac{\pi^2}{a^2})$. We apply the general results from Section 3.3 with the vector field u as in [Nak15]:

$$u_N(p) = (\sin(ap_1), \dots, \sin(ap_\nu)). \tag{3.18}$$

Then $(\operatorname{div} u_N)(p) = \sum_j \partial_{p_j} \sin(ap_j) = \sum_j a\cos(ap_j)$ hence

$$2A_N = \textstyle\sum_j \big(q_j \sin(ap_j) + \sin(ap_j) q_j\big) = \sum_j \big(2q_j \sin(ap_j) - \mathrm{i}a\cos(ap_j)\big). \tag{3.19}$$

The operator A_N behaves well with respect to the tensor factorization $L^2(X) = L^2(\mathbb{R})^{\otimes\nu}$ and this simplifies the computations. Indeed, if we denote B the operator A acting in $L^2(\mathbb{R})$ we have $A_N = A_1 + \cdots + A_\nu$ with $A_1 = B \otimes 1 \cdots \otimes 1$, $A_2 = 1 \otimes B \otimes 1 \cdots \otimes 1$, etc.

Let $T_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ap_j}$ be the operator of translation by a in the j direction, i.e. $(T_j f)(x) = f(x + ae_j)$ where $e_1, \dots, e_\nu$ is the natural basis of $X = \mathbb{R}^\nu$. For any $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ set

$$\delta_j(V) = T_j V T_j^* - V \tag{3.20}$$

which is also an operator $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ hence we may consider $\delta_k\delta_j(V)$, etc. If $V = V(q)$ is a multiplication operator then

$$\delta_j(V) = V(q + ae_j) - V(q).$$

Remark that, when V is a multiplication operator, $\delta_j(V)$ appears in the first commutator $[V, iA_N]$. The operation δ_j can also be applied to various unbounded operators, for example we obviously have $\delta_j(q_k) = a\delta_{jk}$, where δ_{jk} is the Kronecker symbol, and $\delta_j(u(p)) = 0$.

If $S \in \mathscr{B}$ then $[q_j, S]$ and $q_j S$ are well-defined as sesquilinear forms on $C_\mathrm{c}^\infty(X)$ and we say that one of these expressions is a bounded operator $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ if the corresponding form is continuous in the topology induced by $\mathcal{H}^1$.

Theorem 3.4.1. *Let $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ be a compact symmetric operator such that for any j the forms $[q_j, V]$ and $q_j\delta_j(V)$ are bounded operators $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ and*

$$\int_1^\infty \Big(\|\xi(q/r)[q_j, V]\|_{\mathscr{B}} + \|\xi(q/r) q_j \delta_j(V)\|_{\mathscr{B}} \Big) \frac{\mathrm{d}r}{r} < \infty. \tag{3.21}$$

Then H has normal spectrum in I_a and the limits $R(\lambda \pm \mathrm{i}0) = \text{w*-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} R(\lambda \pm \mathrm{i}\varepsilon)$ exist in $B(\mathcal{K}, \mathcal{K}^*)$, locally uniformly in $\lambda \in I_a$ outside the set of eigenvalues of H.

Remark 3.4.2. *This Theorem give a stronger result than Theorem 3.1.1, since, if V is a multiplication operator, $[q_j, V] = 0$ and* (3.21) *reduces to* (3.2).

Proof. This is a consequence of Theorem 3.1.2 and Proposition 3.3.2 once we have checked that V is of class $C^1(A_N)$ and the relation (3.16) is satisfied. In order to prove that $V \in C^1(A_N, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ it suffices to show that the sesquilinear form on $C_\mathrm{c}^\infty(X)$ defined by

$$[2A_N, V] = \textstyle\sum_j \big(2[q_j \sin(ap_j), V] - \mathrm{i}a[\cos(ap_j), V]\big) \tag{3.22}$$

is continuous for the $\mathcal{H}^1$ topology. This is clear for the second term in the sum and for the first one we use

$$[q_j \sin(ap_j), V] = [q_j, V]\sin(ap_j) + q_j[\sin(ap_j), V]. \tag{3.23}$$

The first term on the right hand side defines a bounded operator $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ by one of the hypotheses of the theorem. For the second one we first note that

$$[T_j, V] = \delta_j(V) T_j \quad \text{and} \quad [T_j^*, V] = -T_j^* \delta_j(V) \tag{3.24}$$

from which we get

$$2\mathrm{i}[\sin(ap_j), V] = [T_j - T_j^*, V] = \delta_j(V)T_j + T_j^*\delta_j(V) \tag{3.25}$$

from which it follows easily that $q_j[\sin(ap_j), V]$ is bounded.
Thus V is of class $C^1(A_N, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.

It remains to show that (3.16) is satisfied. We use (3.22) again: the terms with $\sin(ap_j)$ are treated with the help of (3.23) and (3.25). The term with $\cos(ap_j)$ is treated similarly by using

$$2[\cos(ap_j), V] = [T_j + T_j^*, V] = \delta_j(V)T_j - T_j^*\delta_j(V). \tag{3.26}$$

Using (3.21), this proves (3.16). □

Remark 3.4.3. The "usual" version of the preceding theorem involves derivatives $[p_j, V]$ of the potential, instead of the finite differences $\delta_j(V)$, cf. [ABdMG96, Theorem 7.6.8]. Note that the quoted theorem is a consequence of Theorem 3.4.1 because $\|\delta_j(V)\|_{\mathscr{B}} \leqslant a\|[p_j, V]\|_{\mathscr{B}}$.

The condition (3.21) says that the operators $[q_j, V]$ and $q_j\delta_j(V)$ are not only bounded as maps $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ but also tend to zero at infinity in some weak sense. Then it is clear that the maps $\lambda \mapsto R(\lambda \pm \mathrm{i}0) \in B(\mathcal{K}, \mathcal{K}^*)$ are strongly continuous outside the eigenvalues of H, but nothing else can be said in general. Stronger conditions on this decay improve the smoothness properties of the boundary values $R(\lambda \pm \mathrm{i}0)$ as maps $\mathcal{H}_s^1 \to \mathcal{H}_{-s}^{-1}$. This question is solved in general by using Theorem 3.3.3 but here we consider only a particular case as an example. One may see in [GM01, Theorem 1.7] the type of assumptions V has to satisfy in order to improve the smoothness properties of the boundary values.

Remark that if V is a multiplication operator, we have

$$\delta_j\delta_k(V) = V(q + ae_j + ae_k) - V(q + ae_j) - V(q + ae_k) + V(q)$$

which appears in the second commutator $[[V, iA_N], iA_N]$.

The next result is an extension of [Nak15, Theorem 1]: we make the regularity assumption $V \in C^2(A_N)$ but V is not necessarily an operator in $\mathcal{H}$ and we give the precise Hölder continuity order of the boundary values.

Theorem 3.4.4. *Let $V = V(q) : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ be a symmetric compact multiplication operator. Assume that there is a real number $a > 0$ such that for all j, k*

$$\textbf{(H)} \qquad \begin{cases} q_j\big(V(q + ae_j) - V(q)\big) \text{ and} \\ q_jq_k\big(V(q + ae_j + ae_k) - V(q + ae_k) - V(q + ae_k) + V(q)\big) \end{cases}$$

are bounded operators $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$. Then H has normal spectrum in the interval I_a and the limits $R(\lambda \pm \mathrm{i}0) = \text{w*-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} R(\lambda \pm \mathrm{i}\varepsilon)$ exist in $B(\mathcal{K}, \mathcal{K}^*)$, locally uniformly in $\lambda \in I_a$ outside the eigenvalues of H. If $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$ then the operators $R(\lambda \pm \mathrm{i}0) \in B(\mathcal{H}_s^{-1}, \mathcal{H}_{-s}^1)$ are locally Hölder continuous functions of order $s - \frac{1}{2}$ of the parameter $\lambda \in I_a$ outside the eigenvalues of H.

Proof. We first show that (3.8) is satisfied for any open interval J whose closure is included in I_a, i.e. $\inf\{k \cdot u_N(k) \mid k \in X, |k|^2 \in J\} > 0$. Since $k \mapsto k \cdot u_N(k)$ is a continuous function and $\bar{J}$ is a compact in I_a, it suffices to check that $ak \cdot u_N(k) = \sum ak_j \sin(ak_j) > 0$ for all k such that $|k|^2 \in I_a$. The last condition may be written $0 < |ak| < \pi$ and this implies $|ak_j| < \pi$ for all j and $|ak_j| > 0$ for at least one j. Clearly then we get $ak \cdot u_N(k) > 0$.

For the rest of the proof it suffices to check that V is of class $C^2(A_N, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. Indeed, then we may use Theorems 3.1.2, Corollary 3.3.1, and Theorem 3.3.3 (see also Corollary 3.3.4).

Thus we have to prove that the commutators $[A_N, V]$ and $[A_N, [A_N, V]]$, which are a priori defined as sesquilinear forms on $C_c^\infty(X)$, extend to continuous forms on $\mathcal{H}^1$. Although the computations are very simple, we give the details for the convenience of the reader.

We have $[A_N, V] = \sum[A_j, V]$ and $[A_N, [A_N, V]] = \sum[A_j, [A_k, V]]$ and we recall the relations (3.24). Since $\sin(ap_j) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(T_j - T_j^*)$ and $\cos(ap_j) = \frac{1}{2}(T_j + T_j^*)$ we have

$$2\mathrm{i}A_j = q_j 2\mathrm{i}\sin(ap_j) + a\cos(ap_j) = q_j(T_j - T_j^*) + b(T_j + T_j^*) \tag{3.27}$$

where $b = a/2$. Thus by using the relations $[T_j, V] = \delta_j(V)T_j$ and $[T_j^*, V] = -T_j^*\delta_j(V)$ and since $T_j q_j T_j^* = q_j + a$, we get

$$\begin{aligned}[2\mathrm{i}A_j, V] &= q_j[T_j - T_j^*, V] + b[T_j + T_j^*, V] \\ &= (b + q_j)\delta_j(V)T_j + T_j^*(-b + q_j)\delta_j(V)\end{aligned} \tag{3.28}$$

Because $T_j = e^{\mathrm{i}ap_j}$ and $T_j^* = e^{-\mathrm{i}ap_j}$ are bounded, by the assumption (**H**) the right hand side of this relation is a bounded operator from $\mathcal{H}^1$ to $\mathcal{H}^{-1}$, hence V is of class $C^1(A_N, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. It remains to treat the second order commutators.
Since $[\mathrm{i}A_N, S^*] = [\mathrm{i}A_N, S]^*$, we have

$$\begin{aligned}[\mathrm{i}A_j, [\mathrm{i}A_k, V]] &= [\mathrm{i}A_j, (b + q_k)\delta_k(V)T_k] + [\mathrm{i}A_j, T_k^*(-b + q_k)\delta_k(V)] \\ &= [\mathrm{i}A_j, (b + q_k)\delta_k(V)]T_k + (b + q_k)\delta_k(V)[\mathrm{i}A_j, T_k] \\ &+ [\mathrm{i}A_j, T_k]^*(-b + q_k)\delta_k(V) + T_k^*[\mathrm{i}A_j, (-b + q_k)\delta_k(V)].\end{aligned} \tag{3.29}$$

Since we have $[\mathrm{i}A_j, T_k] = b\delta_{jk}(1 - T_k^2)$, we get

$$\begin{aligned}[\mathrm{i}A_j, (b + q_k)\delta_k(V)]T_k + (b + q_k)\delta_k(V)[\mathrm{i}A_j, T_k] = [\mathrm{i}A_j, (b + q_k)\delta_k(V)]T_k \\ + b\delta_{jk}(b + q_k)\delta_k(V)(1 - T_k^2).\end{aligned} \tag{3.30}$$

The last term here is again a bounded operator $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ by assumption (**H**), hence it remains to prove that the first term of the right hand side has the same property. For this we use (3.28) with $(b+q_k)\delta_k(V)$ instead of V and we get:

$$\begin{aligned}[\mathrm{i}A_j, (b + q_k)\delta_k(V)] = (b + q_j)\delta_j((b + q_k)\delta_k(V))T_j \\ + T_j^*(-b + q_j)\delta_j((b + q_k)\delta_k(V)).\end{aligned} \tag{3.31}$$

Since $\delta_j(MN) = \delta_j(M)T_j N T_j^* + M\delta_j(N)$ we have

$$\begin{aligned}\delta_j\big((b + q_k)\delta_k(V)\big) &= \delta_j(b + q_k)T_j\delta_k(V)T_j^* + (b + q_k)\delta_j\delta_k(V) \\ &= a\delta_{jk}T_j\delta_j(V)T_j^* + (b + q_k)\delta_j\delta_k(V).\end{aligned}$$

Since $(b + q_j)T_j = T_j(q_j - b)$ we then get

$$(b + q_j)\delta_j\big((b + q_k)\delta_k(V)\big) = a\delta_{jk}T_j(q_j - b)\delta_j(V)T_j^* + (b + q_j)(b + q_k)\delta_j\delta_k(V)$$

which is bounded as operator $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ by (**H**), hence the right hand side of (3.31) has the same property.

Using the same argument, we can prove that

$$[\mathrm{i}A_j, T_k]^*(-b + q_k)\delta_k(V) + T_k^*[\mathrm{i}A_j, (-b + q_k)\delta_k(V)]$$

is bounded.
By (3.29), $[\mathrm{i}A_j, [\mathrm{i}A_k, V]]$ is bounded and we deduce that V is of class $C^2(A_N, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. □

Remark 3.4.5. *This Theorem is a stronger version of Nakamura's result. In fact, in Nakamura's paper, V is a multiplication operator with the Δ-compact property (compact from $\mathcal{H}^2$ to L^2) which is a stronger assumption than compact from $\mathcal{H}^1$ to $\mathcal{H}^{-1}$. Moreover, we add in Theorem 3.4.4 a result concerning the regularity of the boundary values of the resolvent.*

Now we assume that V and S are real functions and we give more explicit conditions which ensure that the assumptions of the Theorems 3.1.1 and 3.1.4 are satisfied. Let $p = 1$ if $\nu = 1$, any $p > 1$ if $\nu = 2$, and $p = \nu/2$ if $\nu \geqslant 3$ and denote

$$[\![f]\!]_p^x = \left(\int_{|y-x|<1} |f(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}.$$

Proposition 3.4.6. *Consider V and S multiplication operators such that:*

- *$V \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ satisfies $\lim_{x\to\infty} [\![V]\!]_p^x = 0$ and for any $a \in X$ and any $r > 1$,*

$$\int_1^\infty \varphi_a(r) \frac{\mathrm{d}r}{r} < \infty$$

where

$$\varphi_a(r) = \sup_{|x|>r} \left\{ |x| [\![V(\cdot + a) - V(\cdot)]\!]_p^x \right\};$$

- *$S \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ and $\int_1^\infty \sup_{|x|>r} [\![S]\!]_p^x \, \mathrm{d}r < \infty$.*

Then all the conditions of Theorems 3.1.1 and 3.1.4 are satisfied.

Proof. If $U : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}$ is a local operator then it is easy to see that there is $C' \in \mathbb{R}$ such that

$$\|U\|_{\mathcal{H}^1\to\mathcal{H}} \leqslant C' \sup\{\|Uf\| \mid f \in \mathcal{H}^1 \text{ with } \|f\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant 1 \text{ and } \operatorname{diam}\operatorname{supp} f \leqslant 1\}.$$

If V is a function and $\nu \geqslant 3$ then the Sobolev inequality gives a number C'' such that

$$|\langle f|Vf\rangle| \leqslant \||V|^{1/2} f\|^2 \leqslant \|V\|_{L^{\frac{\nu}{2}}} \|f\|^2_{L^{\frac{2\nu}{\nu-2}}} \leqslant C'' \|V\|_{L^{\frac{\nu}{2}}} \|f\|^2_{\mathcal{H}^1}.$$

If $\nu = 1, 2$ then the argument is simpler but $\nu/2$ has to be replaced by 1 or any $p > 1$ respectively. Thus, if we introduce the notation

$$[\![V]\!]_p = \sup_x \left(\int_{|y-x|<1} |V(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p} \tag{3.32}$$

with $p = 1$ if $\nu = 1$, any $p > 1$ if $\nu = 2$, and $p = \nu/2$ if $\nu \geqslant 3$, we get the following estimate: there is a number $C = C(\nu, p)$ such that

$$\|V\|_{\mathscr{B}} \leqslant C [\![V]\!]_p. \tag{3.33}$$

Clearly that $C_c^\infty(X)$ is dense for the norm $[\![\cdot]\!]_p$ in the space of functions V with finite $[\![\cdot]\!]_p$ norm and such that $\int_{|y-x|<1} |V(y)|^p \mathrm{d}y \to 0$ as $x \to \infty$. Thus for such functions the operator $V(q) : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact.

Suppose that, $\varphi_a(r) = \sup_{|x|>r} \{|x| [\![V(\cdot + a) - V(\cdot)]\!]_p^x\}$ verifies

$$\int_1^\infty \varphi_a(r) \frac{\mathrm{d}r}{r} < \infty.$$

We will prove that V verifies (3.2).

Because $\xi(x) = 0$ if $\|x\| \leqslant 1$, and according to (3.33), we have

$$\|\xi(q/r)|q|(V(q + ae) - V(q))\|_{\mathscr{B}} \leqslant C \sup_{|x|>r} [\![|\cdot| (V(\cdot + a) - V(\cdot))]\!]_p^x. \tag{3.34}$$

By definition, we have

$$[\![|\cdot| (V(\cdot + a) - V(\cdot))]\!]_p^x = \left(\int_{|y-x|<1} |y|^p |V(y + a) - V(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}. \tag{3.35}$$

Because $p \geqslant 1$, $|y|^p \leqslant (|y-x|+|x|)^p$. Moreover, using the convexity of the function $x \mapsto x^p$ on $\mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}(|y-x|+|x|)^p &= 2^p\left(\frac{|y-x|+|x|}{2}\right)^p \\ &\leqslant 2^{p-1}(|y-x|^p+|x|^p).\end{aligned}$$

So from (3.35), we have

$$[\![|\cdot|(V(\cdot+a)-V(\cdot))]\!]_p^x \leqslant C_2(1+|x|^p)^{1/p}[\![(V(\cdot+a)-V(\cdot))]\!]_p^x \tag{3.36}$$

where C_i are constants independent of x

By hypothesis on V, we have the following

$$\|\xi(q/r)|q|(V(q+ae)-V(q))\|_{\mathscr{B}} \leqslant C_3 \sup_{|x|>r}\frac{(1+|x|^p)^{1/p}}{|x|}\varphi_a(r) \leqslant C_4\varphi_a(r) \tag{3.37}$$

and then

$$\int_1^\infty \|\xi(q/r)|q|(V(q+ae)-V(q))\|_{\mathscr{B}}\frac{\mathrm{d}r}{r} < C_4\int_1^\infty \varphi_a(r)\frac{\mathrm{d}r}{r} < \infty. \tag{3.38}$$

□

A class of potentials that we may consider is the *Kato class* whose definition is as follows [CFKS08, Sec. 1.2]. A measurable function $V:\mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ is of class K_ν if

- $\lim_{\alpha\downarrow 0}\sup_x \int_{|y-x|<\alpha}|y-x|^{2-\nu}|V(y)|\mathrm{d}y = 0$ in case $\nu > 2$,
- $\lim_{\alpha\downarrow 0}\sup_x \int_{|y-x|<\alpha}\ln|y-x|^{-1}|V(y)|\mathrm{d}y = 0$ in case $\nu = 2$,
- $\lim_{\alpha\downarrow 0}\sup_x \int_{|y-x|<\alpha}|V(y)|\mathrm{d}y = 0$ in case $\nu = 1$.

The K_ν norm of such a function is given by $\|V\|_{K_\nu} = \sup_x \int_{|y-x|<1}L_\nu(y-x)|V(y)|\mathrm{d}y$ with the obvious definition of L_ν. Note that the operator $V(q)$ is form relatively bounded with respect to the Laplacian with relative bound zero if $V \in K_\nu$ [CFKS08, p. 8] hence $H = \Delta + V(q)$ is a well-defined self-adjoint and bounded from below operator.

Proposition 3.4.7. *Let V be a real function on $\mathbb{R}^\nu$, with $\nu \neq 2$, such that there is $\mu > 1$ and $\big(\langle\cdot\rangle^\mu V(\cdot)\big)^p \in K_\nu$. Then condition (3.2) is satisfied.*

Proof. According to (3.33), there is $C > 0$ such that

$$\begin{aligned}\|\langle q\rangle^\mu V\|_{\mathscr{B}} &\leqslant C[\![\langle\cdot\rangle^\mu V]\!]_p \\ &\leqslant C\sup_x\left(\int_{|y-x|<1}|\langle y\rangle^\mu V(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\ &\leqslant C\left(\sup_x\int_{|y-x|<1}|\langle y\rangle^\mu V(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\end{aligned} \tag{3.39}$$

Because, if $\nu \neq 2$, $L_\nu(y-x) \geqslant 1$ if $|y-x|<1$, we have the following

$$\int_{|y-x|<1}|\langle y\rangle^\mu V(y)|^p\mathrm{d}y \leqslant \int_{|y-x|<1}L_\nu(y-x)|\langle y\rangle^\mu V(y)|^p\mathrm{d}y \tag{3.40}$$

So

$$\sup_x\int_{|y-x|<1}|\langle y\rangle^\mu V(y)|^p\mathrm{d}y \leqslant \sup_x\int_{|y-x|<1}L_\nu(y-x)|\langle y\rangle^\mu V(y)|^p\mathrm{d}y \tag{3.41}$$

According to (3.39), we have

$$\|\langle q\rangle^\mu V\|_{\mathscr{B}} \leqslant C\left(\|(\langle\cdot\rangle^\mu V(\cdot))^p\|_{K_\nu}\right)^{1/p}. \tag{3.42}$$

So if there is $\mu > 1$ such that $\big(\langle\cdot\rangle^\mu V(\cdot)\big)^p \in K_\nu$, then $\|\langle q\rangle^\mu V\|_{\mathscr{B}} < \infty$ and V satisfies (3.2). □

3.5 Concrete potentials

In this section, we will give examples of concrete potential which satisfy the assumptions of Theorem 3.1.1 and the assumptions of Theorem 3.1.2. For these examples, we will discuss the application of the Mourre Theorem with the generator of dilation and/or Nakamura's result.

Note that since $H_0 = \Delta : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded, if $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact, then $H : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded. Furthermore $H_0 \in C^\infty(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ and we can deduce that:

Proposition 3.5.1. *Let $k \in \mathbb{N}^*$. We suppose that $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact. The folowing properties are equivalent:*

1. *$H = \Delta + V \in C^k(A_u)$;*
2. *$H = \Delta + V \in C^k(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$;*
3. *$V \in C^k(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.*

When $V : \mathcal{H}^2 \to L^2$ is compact, we have the following

Proposition 3.5.2. *Let $k \in \mathbb{N}^*$. We suppose that V is Δ-compact. The folowing properties are equivalent:*

1. *$H = \Delta + V \in C^k(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$;*
2. *$V \in C^k(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$.*

Remark that if V is Δ-compact and $k \neq 1$, $H \in C^k(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$ is not equivalent to $H \in C^k(A_u)$ (see [ABdMG96, Theorem 6.3.4]).

3.5.1 A non Laplacian-compact potential

In this part, we work in one dimension.
Let $\chi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\chi(x) = 0$ if $|x| > 1$, $\chi(x) > 0$ if $|x| < 1$ and $\chi(-x) = \chi(x)$.

Lemma 3.5.3. *Let V such that*

$$\widehat{qV}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \chi(\xi - n),$$

where $\lambda_{-n} = \lambda_n \geqslant 0$, $\lambda_0 = 0$, and $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ is not bounded. Moreover, we suppose that there is $0 < \epsilon < 1/2$ such that

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \langle n \rangle^{-1/2+\epsilon} < \infty. \tag{3.43}$$

Then, for all $u \in \mathcal{U}$,

1. *V is symmetric and $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact.*
2. *$V \in C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.*
3. *$V \notin C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.*
4. *V is not Δ-bounded.*

We will give few remarks about this lemma.

(a) Note that, since χ is compactly support, the sum which defines V is locally finite and so V is well defined.

(b) Lemma 3.5.3 applies with A_N replacing A_u but since V is not Δ-bounded, and so V is not Δ-compact, we can not apply [Nak15, Theorem 1]. Furthermore, because of (3), we can not apply the Mourre Theorem with A_D as conjugate operator.

(c) The requirements on $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ are satisfied in the case

$$\lambda_n = \begin{cases} p & \text{if } |n| = 2^p \\ 0 & \text{else} \end{cases}.$$

Proof. [Lemma 3.5.3]

1. Let

$$T_n(x) = \begin{cases} \int_0^x \chi(s-n)ds & \text{if } n > 0 \\ -\int_x^0 \chi(s-n)ds & \text{if } n < 0 \end{cases}.$$

Remark that $T_n' = \chi(\cdot - n)$. For $n > 0$ and $f, g \in \mathcal{H}^1$, we have

$$\begin{aligned} \left|(\hat{f}, T_n * \hat{g})\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)\int_0^{\xi-\eta} \chi(s-n)dsd\xi d\eta\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)\int_{-n}^{\xi-\eta-n} \chi(s)dsd\xi d\eta\right|. \end{aligned}$$

Since $\chi(s) = 0$ if $s \leqslant -1$, $\int_{-n}^{\xi-\eta-n} \chi(s)ds = 0$ if $\xi-\eta-n \leqslant -1$. If $\xi-\eta-n > -1$, $\int_{-n}^{\xi-\eta-n} \chi(s)ds = \int_{-1}^{\xi-\eta-n} \chi(s)ds$. So

$$\begin{aligned} \left|(\hat{f}, T_n * \hat{g})\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)\int_{-1}^{\xi-\eta-n} \chi(s)dsd\xi d\eta\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle|\hat{f}(\xi)|\langle\eta\rangle|\hat{g}(\eta)|\langle\xi\rangle^{-1}\langle\eta\rangle^{-1}\int_{-1}^{\xi-\eta-n} \chi(s)dsd\xi d\eta. \end{aligned}$$

Since $\epsilon < 1/2$, there is $C > 0$ such that $\langle\xi\rangle^{-1/2+\epsilon}\langle\eta\rangle^{-1/2+\epsilon} \leqslant C\langle\xi-\eta\rangle^{-1/2+\epsilon}$.

$$\begin{aligned} \left|(\hat{f}, T_n * \hat{g})\right| &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle|\hat{f}(\xi)|\langle\eta\rangle|\hat{g}(\eta)|\langle\xi\rangle^{-1/2-\epsilon}\langle\eta\rangle^{-1/2-\epsilon} \\ &\quad \langle\xi-\eta\rangle^{-1/2+\epsilon}\int_{-1}^{\xi-\eta-n} \chi(s)dsd\xi d\eta \\ &\leqslant \langle n-1\rangle^{-1/2+\epsilon}\int_{-1}^{1} \chi(s)ds\int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle|\hat{f}(\xi)|\langle\eta\rangle|\hat{g}(\eta)| \\ &\quad \langle\xi\rangle^{-1/2-\epsilon}\langle\eta\rangle^{-1/2-\epsilon}d\xi d\eta. \end{aligned}$$

So, since $K : (\xi,\eta) \to \langle\xi\rangle^{-1/2-\epsilon}\langle\eta\rangle^{-1/2-\epsilon}$ is in $L^2(\mathbb{R}^2)$, the operator $L^2 \ni \psi \mapsto \int_{\mathbb{R}} K(\xi,\eta)\psi(\eta)d\eta$ is compact (see [RS70a, Theorem VI.23]). So T_n is compact from $\mathcal{H}^1$ to $\mathcal{H}^{-1}$ if $n > 0$ and we can remark that we have similar inequalities for $n < 0$.

So

$$\begin{aligned}
\left|(\hat{f}, \hat{V} * \hat{g})\right| &\leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda_n| \left|(\hat{f}, T_n * \hat{g})\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \langle\xi\rangle|\hat{f}(\xi)|\langle\eta\rangle|\hat{g}(\eta)|K(\xi,\eta)d\xi d\eta \\
&\int_{-1}^{1} \chi(s)ds \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda_n| \max(\langle n-1\rangle^{-1/2+\epsilon}, \langle n+1\rangle^{-1/2+\epsilon}).
\end{aligned}$$

So, since $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda_n|\langle n\rangle^{-1/2+\epsilon} < \infty$, $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact.
Moreover, since $\chi(-x) = \chi(x)$ and $\lambda_n = \lambda_{-n}$, we have

$$\begin{aligned}
\widehat{qV}(-\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \chi(-\xi - n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \chi(\xi + n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_{-n} \chi(\xi - n) \\
&= \widehat{qV}(\xi)
\end{aligned}$$

So, since $\widehat{qV}(\xi) \in \mathbb{R}$, $xV(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, and we conclude that V is a symmetric multiplication operator.

2. By a simple computation, in all dimension, we have

$$\begin{aligned}
(g, [V, A_u]f) &= (Vg, A_u f) - (A_u g, Vf) \\
&= (Vg, qu(p)f) - (qu(p)g, Vf) \\
&\quad -\frac{i}{2}\left((Vg, u'(p)f) + (u'(p)g, Vf)\right) \\
&= (qVg, u(p)f) - (u(p)g, qVf) \\
&\qquad -\frac{i}{2}\left((Vg, u'(p)f) + (u'(p)g, Vf)\right).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

If u' is bounded, since $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is a compact operator, there is $C > 0$ such that

$$\left|(Vg, u'(p)f) + (u'(p)g, Vf)\right| \leqslant C\|f\|_{\mathcal{H}^1}\|g\|_{\mathcal{H}^1}.$$

Moreover, we can remark that $\langle\cdot\rangle^{-1}\widehat{qV} \in L^1(\mathbb{R})$. So, there is $C > 0$ such that

$$\begin{aligned}
|(u(p)f, qVg)| &= |(u(q)\hat{f}, \widehat{qV} * \hat{g})| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^2} u(\xi)\hat{f}(\xi)\widehat{qV}(\xi - \eta)\hat{g}(\eta)d\xi d\eta\right| \\
&\leqslant C \int_{\mathbb{R}^2} |u(\xi)|\langle\xi\rangle|\hat{f}(\xi)|\langle\xi - \eta\rangle^{-1}|\widehat{qV}(\xi - \eta)| \\
&\qquad \langle\eta\rangle|\hat{g}(\eta)|d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Since $f, g \in \mathcal{H}^1$ and u is bounded, $u(q)\langle q\rangle\hat{f}$ and $\langle q\rangle\hat{g}$ are in L^2. So by Young inequality, we conclude that

$$\begin{aligned}
|(u(p)f, qVg)| &\leqslant C\|u(q)\langle q\rangle\hat{f}\|_2\|(\langle q\rangle^{-1}\widehat{qV}) * (\langle q\rangle\hat{g})\|_2 \\
&\leqslant C\|\langle q\rangle^{-1}\widehat{qV})\|_1\|\langle q\rangle\hat{f}\|_2\|\langle q\rangle\hat{g}\|_2 \\
&\leqslant C\|\langle q\rangle^{-1}\widehat{qV})\|_1\|f\|_{\mathcal{H}^1}\|g\|_{\mathcal{H}^1}.
\end{aligned}$$

So $V \in C^1(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. Similarly, we have

$$\begin{aligned}
(g, [[V, A_u], A_u]f) &= ([V, A_u]g, A_u f) - (A_u g, [V, A_u]f) \\
&= ([V, A_u]g, qu(p)f) - (qu(p)g, [V, A_u]f) \\
&\quad -\frac{i}{2}\Big(\big(u'(p)g, [V, A_u]f\big) + \big([V, A_u]g, u'(p)f\big)\Big).
\end{aligned}$$

Since $V \in C^1(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$, $(u'(p)g, [V, A_u]f) + ([V, A_u]g, u'(p)f)$ is bounded. Using (3.44), we have

$$\begin{aligned}
(qu(p)g, [V, A_u]f) &= (qVqu(p)g, u(p)f) - (u(p)qu(p)g, qVf) \\
&\quad -\frac{i}{2}\Big(\big(Vqu(p)g, u'(p)f\big) + \big(u'(p)qu(p)g, Vf\big)\Big) \\
&= \big(q^2Vu(p)g, u(p)f\big) - (u(p)qu(p)g, qVf) \\
&\quad -\frac{i}{2}\Big(\big(u(p)g, qVu'(p)f\big) + \big(u'(p)qu(p)g, Vf\big)\Big).
\end{aligned}$$

By a simple computation, we have

$$\begin{aligned}
(u(p)qu(p)g, qVf) &= (qu(p)u(p)g, qVf) + ([u(p), q]u(p)g, qVf) \\
&= \big(u(p)u(p)g, q^2Vf\big) + \frac{i}{2}\left(u(p)u'(p)g, qVf\right)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\big(u'(p)qu(p)g, Vf\big) &= \big(qu'(p)u(p)g, Vf\big) + \big([u'(p), q]u(p)g, Vf\big) \\
&= \big(u(p)u'(p)g, qVf\big) + \frac{i}{2}\left(u''(p)u(p)g, Vf\right).
\end{aligned}$$

As previously, we can remark that $\langle q\rangle^{-1}\widehat{q^2V} \in L^1$. So, since u and all of whose derivatives are bounded, we deduce that $[[V, A_u], A_u]$ is a bounded operator on $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ and $V \in C^2(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. Remark that all previous inequalities are true for any bounded u such that $u \in C^\infty$ with all derivatives bounded. In particular, by taking $u(x) = sin(ax)$, we deduce that

$$V \in C^2(A_N, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}) \subset C^{1,1}(A_N, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}).$$

3. Now we will prove that V is not in $C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.
For $N \in \mathbb{N}^*$, let

$$\widehat{f_N} = \mathbb{1}_{[N,N+1]}\langle N+1\rangle^{-1} \quad \text{and} \quad \hat{g} = \mathbb{1}_{[0,1]}.$$

Note that $\|\langle\cdot\rangle\widehat{f_N}\|^2_{L^2}\|\langle\cdot\rangle\widehat{g}\|^2_{L^2} \leqslant 2$ which implies that $\|f_N\|_{\mathcal{H}^1}\|g\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant 4\sqrt{2}$.
We have

$$\begin{aligned}
\Big(\widehat{f_N}, \widehat{\nabla(qV)} * \hat{g}\Big) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \int_{\mathbb{R}^2} (\xi-\eta)\widehat{f_N}(\xi)\chi(\xi-\eta-n)\hat{g}(\eta)d\xi d\eta \\
&\geqslant \frac{\lambda_N}{\langle N+1\rangle}\int_N^{N+1}\left(\int_0^1(\xi-\eta)\chi(\xi-\eta-N+1)d\eta\right)d\xi \\
&\geqslant \frac{\lambda_N}{\langle N+1\rangle}(N-1)\int_N^{N+1}\left(\int_{\xi-N}^{\xi-N+1}\chi(\sigma)d\sigma\right)d\xi \\
&\geqslant \frac{N-1}{\langle N+1\rangle}\lambda_N\int_0^2\chi(\sigma)\left(\int_{N+\sigma-1}^{N+\sigma}d\xi\right)d\sigma \\
&\geqslant \frac{N-1}{\langle N+1\rangle}\lambda_N\int_0^2\chi(\sigma)d\sigma.
\end{aligned}$$

So, since $\int_0^2 \chi(\sigma)d\sigma > 0$, $\Big((f_N, [V, iA_D]g)\Big)_{N\in\mathbb{N}}$ is not bounded with $\|f_N\|_{\mathcal{H}^1}\|g\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant 4$. So V does not belong to the class $C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.

4. Now, we will prove that V is not Δ-compact.
Let $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$ and let
$$\widehat{f_N} = \mathbb{1}_{[N+1,N+2]} \quad \text{and} \quad \hat{g} = \mathbb{1}_{[0,1]}.$$
Remark that $\|f_N\|_{L^2}\|g\|_{\mathcal{H}^2}$ is a bounded sequence.

$$\begin{aligned}
|(f_N, Vg)| &= \left|(\widehat{f_N}, \hat{V} * \hat{g})\right| \\
&= \int_{\xi\in[N+1,N+2]}\int_{\eta\in[0,1]}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_n\int_0^{\xi-\eta}\chi(s-n)ds \\
&= -\int_{\xi\in[N+1,N+2]}\int_{\eta\in[0,1]}\sum_{n=-\infty}^{-1}\lambda_n\int_{\xi-\eta}^{0}\chi(s-n)ds \\
&\quad+\int_{\xi\in[N+1,N+2]}\int_{\eta\in[0,1]}\sum_{n=1}^{N-1}\lambda_n\int_0^{\xi-\eta}\chi(s-n)ds \\
&\quad+\sum_{n=N}^{N+2}\lambda_n\int_{\xi\in[N+1,N+2]}\int_{\eta\in[0,1]}\int_0^{\xi-\eta}\chi(s-n)ds \\
&\quad+\int_{\xi\in[N+1,N+2]}\int_{\eta\in[0,1]}\sum_{n=N+3}^{+\infty}\lambda_n\int_0^{\xi-\eta}\chi(s-n)ds. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

Remark that, for $\xi \in [N+1, N+2]$ and $\eta \in [0,1]$, $N+2 \geqslant \xi-\eta \geqslant N$. So, if $\xi \in [N+1, N+2]$ and $\eta \in [0,1]$, we have:

- If $n \leqslant -1$, $\chi(s-n) = 0$ for all $s \in [0, \xi-\eta]$. So $\int_{\xi-\eta}^0 \chi(s-n)ds = 0$.
- If $1 \leqslant n \leqslant N-1$, $\xi-\eta \geqslant n+1$.So, since $\chi(s) = 0$ if $|s| \geqslant 1$,
$$\int_0^{\xi-\eta}\chi(s-n)ds = \int_{n-1}^{n+1}\chi(s-n)ds = \int_{-1}^{1}\chi(s)ds > 0.$$
- If $n \geqslant N+3$, $\xi-\eta \leqslant n-1$. So, since $\chi(s-n) = 0$ for all $s \in [0, \xi-\eta]$, $\int_0^{\xi-\eta}\chi(s-n)ds = 0$.

So, since $\lambda_n \geqslant 0$ for all n and $\chi(x) \geqslant 0$ for all x, from (3.46), we have:

$$\begin{aligned}
|(f_N, Vg)| &= \int_{\xi\in[N+1,N+2]}\int_{\eta\in[0,1]}\sum_{n=1}^{N-1}\lambda_n\int_{-1}^{1}\chi(s)ds \\
&\quad+\sum_{n=N}^{N+2}\lambda_n\int_{\xi\in[N+1,N+2]}\int_{\eta\in[0,1]}\int_0^{\xi-\eta}\chi(s-n)ds \\
&\geqslant \lambda_{N-1}\int_{-1}^{1}\chi(s)ds.
\end{aligned}$$

So, since $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is not bounded, we can extract a subsequence $(\lambda_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ such that
$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_{\phi(n)} = +\infty \quad \text{and we have} \quad \lim_{N\to+\infty}\left|(f_{\phi(N)+1}, Vg)\right| = +\infty.$$

So V is not Δ-bounded. $\square$

3.5.2 A class of oscillating potential

Let $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^*$ and $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\kappa = 1$ on $[-1, 1]$ and $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$. Let

$$W_{\alpha\beta}(x) = (1 - \kappa(|x|))\frac{\sin(k|x|^\alpha)}{|x|^\beta}. \tag{3.47}$$

This potential can be seen as a Δ-compact potential (if $\beta > 0$) or as a potential on $\mathcal{H}^1$ to $\mathcal{H}^{-1}$ for which we keep the same notation.

We will see that under certain condition on (α, β), we can apply Theorems 3.1.1 and 3.1.2 with $W_{\alpha\beta}$ as potential. We will also compare our results (lemma 3.5.4) with results given in [JM17].

Recall that $\mathcal{U}$ is the space of vector fields u bounded with all derivatives bounded such that $x \cdot u(x) > 0$ for all $x \neq 0$. We have the following:

Lemma 3.5.4. *Let $W_{\alpha\beta}$ be as in* (3.47) *and let $H = \Delta + W_{\alpha\beta}$. For all $u \in \mathcal{U}$, we have:*

1. *if $\alpha + \beta > 2$, then $W_{\alpha\beta} : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact and $W_{\alpha\beta} \in C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.*
2. *if $2\alpha + \beta > 3$ and $\beta > 0$, $W_{\alpha\beta} \in C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$.*

In particular, in this both cases, Theorems 3.1.1 and 3.1.2 apply.

Note that in (1), we do not require to have $\beta > 0$. In particular, if $\beta < 0$, $W_{\alpha\beta}$ is an unbounded function.

In [JM17], if we suppose $\beta > 0$, we can see that the Limiting Absorption Principle can be proved with the generator of dilation A_D as conjugate operator for $H = \Delta + W_{\alpha\beta}$ if $|\alpha - 1| + \beta > 1$. If $|\alpha - 1| + \beta < 1$, they showed that $H \notin C^1(A_D)$. This implies that we cannot apply the Mourre Theorem with A_D as conjugate operator on this area. Moreover, they also proved a limiting absorption principle if $\alpha > 1$ and $\beta > 1/2$, in a certain energy window. If $|\alpha - 1| + \beta < 1$ and $2\alpha + \beta > 3$, Theorem 3.1.2 improves this result in two waves: first, there is no restriction of energy; second, we have some result on the boundary value of the resolvent. Furthermore, the region where $|\alpha - 1| + \beta < 1$, $2\alpha + \beta > 3$ and $\beta \leqslant \frac{1}{2}$ is not covered by [JM17] but Theorem 3.1.2 applies.

Proof. [Lemma 3.5.4] Let $f, g \in \mathcal{S}$ and let $0 < \mu < 1$. Let $u \in \mathscr{U}$. We will always suppose that μ is small enough. We have

$$\begin{aligned}
& (f, \langle q\rangle^\mu [W_{\alpha\beta}, iA_u] g) \\
= \; & (\langle q\rangle^\mu W_{\alpha\beta} f, iA_u g) - (A_u \langle q\rangle^\mu f, iW_{\alpha\beta} g) \\
= \; & (\langle q\rangle^\mu W_{\alpha\beta} f, iq \cdot u(p) g) - (q \cdot u(p)\langle q\rangle^\mu f, iW_{\alpha\beta} g) \\
& + (\langle q\rangle^\mu W_{\alpha\beta} f, \frac{1}{2}u'(p) g) + (\frac{i}{2}u'(p)\langle q\rangle^\mu f, iW_{\alpha\beta} g) \\
= \; & (\langle q\rangle^\mu W_{\alpha\beta} f, iq \cdot u(p) g) - (q \cdot u(p) f, i\langle q\rangle^\mu W_{\alpha\beta} g) && (3.48) \\
& + (\langle q\rangle^\mu W_{\alpha\beta} f, \frac{1}{2}u'(p) g) + (\frac{i}{2}u'(p) f, i\langle q\rangle^\mu W_{\alpha\beta} g) && (3.49) \\
& - (q \cdot [u(p), \langle q\rangle^\mu] f, iW_{\alpha\beta} g) + (\frac{i}{2}[u'(p), \langle q\rangle^\mu] f, iW_{\alpha\beta} g). && (3.50)
\end{aligned}$$

Remark that, since u and all its derivatives are bounded, for $\mu < 1$, $[u(p), \langle q\rangle^\mu]$ and $[u'(p), \langle q\rangle^\mu]$ are bounded and $\|u(p)f\|_{\mathcal{H}^s}$ and $\|u'(p)f\|_{\mathcal{H}^s}$ are controlled by $\|f\|_{\mathcal{H}^s}$ for $s = 1, 2$. We will use this argument to treat terms in (3.49) and (3.50) and we note that they are bounded in the $\mathcal{H}^1$ norm when terms in (3.48) are bounded. For this reason, we focus on this to terms which are quite similar. To control them, we will show that $qW_{\alpha\beta}(q)$ can be write with a different form.

Let $\tilde{\kappa} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\tilde{\kappa}(|x|) = 0$ if $|x| \geqslant 1$, $\tilde{\kappa} = 1$ on $[-1/2, 1/2]$ and $0 \leqslant \tilde{\kappa} \leqslant 1$. So, we can observe that $(1 - \tilde{\kappa}(|x|))(1 - \kappa(|x|)) = (1 - \kappa(|x|))$ for all $x \in \mathbb{R}^\nu$.

For $\gamma \in \mathbb{R}$, let

$$\tilde{W}_{\alpha\gamma}(x) = (1 - \tilde{\kappa}(|x|))\frac{\cos(k|x|^{\alpha})}{|x|^{\gamma}}.$$

By a simple computation, we have

$$(1-\kappa(|x|))|x|\nabla\tilde{W}_{\alpha\gamma}(x) = -(1-\kappa(|x|))\gamma\frac{x}{|x|}\tilde{W}_{\alpha\gamma}(x) - k\alpha x W_{\alpha\beta}(x) \tag{3.51}$$

with $\gamma = \alpha + \beta - 1$.

In a first time, remark that, since, in both cases, $\gamma > 0$,

$$\langle q\rangle^{\mu}\frac{\gamma}{k\alpha}\frac{q}{|q|}\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)$$

is bounded for all $0 < \mu \leqslant \gamma$. Thus, by using (3.51) in (3.48), it suffices to proof that

$$\langle q\rangle^{\mu}(1-\kappa(|q|))|q|\nabla\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q) : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$$

is bounded to show that $W_{\alpha\beta} \in C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.

To do this, remark that, for all function F, $\nabla F(q) = i[p, F(q)]$. So, we have for $\phi, \psi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
& (u(p)\phi, (1-\kappa(|q|))\langle q\rangle^{\mu}|q|\nabla\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)\psi) \\
= \; & (u(p)\phi, i[p, (1-\kappa(|q|))\langle q\rangle^{\mu}|q|\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)]\psi) + (u(p)\phi, q\kappa'(|q|)\langle q\rangle^{\mu}\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)\psi) \\
& -\mu(u(p)\phi, q(1-\kappa(|q|))\langle q\rangle^{\mu-1}|q|\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)\psi) \\
& -(u(p)\phi, (1-\kappa(|q|))\langle q\rangle^{\mu}\frac{q}{|q|}\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)\psi).
\end{aligned}$$

So, we have

$$\begin{aligned}
& (u(p)\phi, (1-\kappa(|q|))\langle q\rangle^{\mu}|q|\nabla\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)\psi) \\
= \; & (pu(p)\phi, i(1-\kappa(|q|))\langle q\rangle^{\mu}|q|\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)\psi) \\
& -(u(p)\phi, i(1-\kappa(|q|))\langle q\rangle^{\mu}|q|\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)p\psi) + (u(p)\phi, q\kappa'(|q|)\langle q\rangle^{\mu}\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)\psi) \\
& -\mu(u(p)\phi, q(1-\kappa(|q|))\langle q\rangle^{\mu-1}|q|\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)\psi) \\
& -(u(p)\phi, (1-\kappa(|q|))\langle q\rangle^{\mu}\frac{q}{|q|}\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)\psi).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

So, since u is bounded, by density, if $(1-\kappa(|q|))\langle q\rangle^{\mu}|q|\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q)$ is bounded, then $(1-\kappa(|q|))\langle q\rangle^{\mu}|q|\nabla\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q) : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded.

1. Suppose that $\alpha + \beta > 2$. Since $\gamma > 1$, by (3.51), $\langle q\rangle^{\mu} q W_{\alpha\beta} : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded for $\mu > 0$ small enough. This implies that $W_{\alpha\beta}$ belongs to the class $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.

   Moreover, by (3.51), we have

   $$W_{\alpha\beta}(x) = -(1-\kappa(|x|))\frac{\gamma}{k\alpha}\frac{1}{|x|}\tilde{W}_{\alpha\gamma}(x) - (1-\kappa(|x|))\frac{x}{k\alpha|x|}\nabla\tilde{W}_{\alpha\gamma}(x).$$

   So, since $\gamma > 0$, $(1-\kappa(|q|))\frac{\gamma}{k\alpha}\frac{1}{|q|}\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q) : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact. As in (3.52), we can prove that $(1-\kappa(|q|))\frac{q}{k\alpha|q|}\nabla\tilde{W}_{\alpha\gamma}(q) : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact. Thus, by sum, $W_{\alpha\beta} : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact.

2. Suppose that $\beta > 0$ and $2\alpha + \beta > 3$. In this case, remark that $W_{\alpha\beta}(q)$ is Δ-compact. Let $u \in \mathcal{U}$. Let $\underset{\sim}{\kappa} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\underset{\sim}{\kappa}(x) = 0$ if $|x| \geqslant 1/2$, $\underset{\sim}{\kappa} = 1$ on $[-1/4, 1/4]$ and $0 \leqslant \underset{\sim}{\kappa} \leqslant 1$. For $\delta \in \mathbb{R}$, let

$$\underset{\sim}{W}_{\alpha\delta}(x) = (1 - \underset{\sim}{\kappa}(|x|))\frac{\sin(k|x|^\alpha)}{|x|^\delta}.$$

By a simple computation, we can write:

$$\tilde{W}_{\alpha\gamma}(x) = (1 - \tilde{\kappa}(|x|))\frac{\delta}{k\alpha}\frac{1}{|x|}\underset{\sim}{W}_{\alpha\delta} + (1 - \tilde{\kappa}(|x|))\frac{x}{k\alpha|x|}\nabla \underset{\sim}{W}_{\alpha\delta}(x)$$

with $\delta = \gamma + \alpha - 1 = \beta + 2\alpha - 2 > 1$.
Since we want to prove that $[W_{\alpha\beta}, iA_u] : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^{-2}$ is bounded, we can make twice the argument of (3.52). This implies that $W_{\alpha\beta}$ is in $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$. □

If we want more regularity on the potentials, we have the following

Lemma 3.5.5. *Let $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ be a compact symmetric multiplication operator. If $|q|^n V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded for some $n \in \mathbb{N}^*$, then, for any $u \in \mathcal{U}$, $V \in C^n(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. In particular, if $\alpha + \beta - 1 \geqslant n \in \mathbb{N}^*$, $W_{\alpha\beta} \in C^n(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. In this case, if $n > 1$, we deduce that $\lambda \mapsto R(\lambda \pm i0)$ is locally of class Λ^s on $\mathbb{R}^{+*}$ outside the eigenvalues of H, where s is the integer part of $\alpha + \beta - 2$.*

Proof. [Lemma 3.5.5] Let $u \in \mathcal{U}$ and $n \in \mathbb{N}^*$. Let $ad^n_{A_u}(V)$ the iterated commutator of order n, with $ad^1_{A_u}(V) = [V, A_u]$. By induction, we can prove that there is $(B_k(p))_{k\in\{0,\cdots,n\}}$ and $(B'_k(p))_{k\in\{0,\cdots,n\}}$ two sequences of bounded operators such that

$$ad^n_{A_u}(V) = \sum_{k=0}^{n} B_k(p) q^k V B'_k(p). \tag{3.53}$$

Moreover, we can see that $B_k(p)$ and $B'_k(p)$ depends only of u and its derivatives of order less than n. So, if $|q|^n V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded, then $V \in C^n(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.

Moreover, by (3.51), we can see that if $\gamma = \alpha + \beta - 1 \geqslant s + 1, s \in \mathbb{N}^*$, then $|q|^{s+1} V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded. So $W_{\alpha\beta} \in C^{s+1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}) \subset \Lambda^{s+1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ and by Theorem 3.3.3, we can deduce that $\lambda \mapsto R(\lambda \pm i0)$ is locally of class Λ^s on $\mathbb{R}^{+*}$ outside the eigenvalues of H. □

3.5.3 An unbounded potential with high oscillations

Now, we will show an example of potential V of class $C^\infty(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ for any $u \in \mathcal{U}$ such that V is neither in $C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ nor Δ-bounded. In particular we cannot have the Mourre estimate with A_D as conjugate operator but we can prove a limiting absorption principle with A_u as conjugate operator and have a good regularity for the boundary value of the resolvent.

Lemma 3.5.6. *Let $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\kappa = 1$ on $[-1, 1]$ and $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$. Let*

$$V(x) = (1 - \kappa(|x|)) \exp(3|x|/4) \sin(\exp(|x|)). \tag{3.54}$$

Then:

1. *$V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact;*

2. *For any $u \in \mathcal{U}$, $V \in C^\infty(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$;*

3. *V is not Δ-bounded;*

4. *V is not of class $C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.*

In particular, we can use neither the Mourre Theorem with the generator of dilation as conjugate operator nor Nakamura's Theorem. By Theorem 3.3.3, we have the following

Corollary 3.5.7. *Let V as in (3.54) and $H = \Delta + V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$. Then Theorem 3.1.2 applies and, for all $s > 0$, the functions*

$$\lambda \mapsto R(\lambda \pm \mathrm{i}0) \in B(\mathcal{H}^{-1}_s, \mathcal{H}^1_{-s}) \tag{3.55}$$

are locally of class $\Lambda^{s-1/2}$ on $(0, +\infty)$ outside the eigenvalues of H.

In particular, if we see $R(\lambda \pm \mathrm{i}0)$ as an operator from C_c^∞ to $\mathcal{D}'$ the space of distributions, the functions

$$\lambda \mapsto R(\lambda \pm \mathrm{i}0) \in B(C_c^\infty, \mathcal{D}')$$

are of class C^∞ on $(0, +\infty)$ outside the eigenvalues.

Proof. [Lemma 3.5.6] Let $\tilde{\kappa} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\tilde{\kappa}(|x|) = 0$ if $|x| \geqslant 1$, $\tilde{\kappa} = 1$ on $[-1/2, 1/2]$ and $0 \leqslant \tilde{\kappa} \leqslant 1$. So, we can observe that $(1 - \tilde{\kappa}(|x|))(1 - \kappa(|x|)) = (1 - \kappa(|x|))$ for all $x \in \mathbb{R}^\nu$.

If we denote

$$\tilde{V}(x) = (1 - \tilde{\kappa}(|x|)) \cos(\exp(|x|)),$$

we have:

$$(1 - \kappa(|x|))\nabla\tilde{V}(x) = -(1 - \kappa(|x|))\frac{x}{|x|}\exp(|x|)\sin(\exp(|x|)).$$

So,

$$xV(x) = -|x|(1 - \kappa(|x|))\exp(-|x|/4)\nabla\tilde{V}(x).$$

1. By a simple calculus, we have
$$V(x) = -\frac{x}{|x|}(1 - \kappa(|x|))\exp(-|x|/4)\nabla\tilde{V}(x).$$
So, since $\tilde{V}$ is bounded, by writing $\nabla\tilde{V}(q) = i[p, \tilde{V}(q)]$, as in (3.52), we can prove that $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact.

2. Similarly, since $\tilde{V}$ is bounded, by writing $\nabla\tilde{V}(q) = i[p, \tilde{V}(q)]$, $q|q|^n V(q) : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded for all $n \in \mathbb{N}$. So, by Lemma 3.5.5, for any $u \in \mathcal{U}$, $V \in C^n(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ for all $n \in \mathbb{N}^*$. So $V \in C^\infty(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.

3. Let $\chi \in C_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\operatorname{supp}(\chi) \subset [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, $\chi \geqslant 0$ and $\chi(\pi/2) = 1$.
Let $N \in \mathbb{N}^*$ and
$$f(x) = \langle x \rangle^{-(\nu+1)/2}$$
and
$$g_N(x) = \ln\left(\frac{3\pi}{4} + 2N\pi\right)^{(1-\nu)/2} \exp(|x|/2)\chi\Big(\exp(|x|) - 2N\pi\Big).$$
We denote $C > 0$ constants independant of N. Remark that $f \in \mathcal{H}^2$ and
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^\nu} g_N^2(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^\nu} \ln\left(\frac{3\pi}{4} + 2N\pi\right)^{(1-\nu)} \exp(|x|)\chi^2(\exp(|x|) - 2N\pi)dx \\ &= C\ln\left(\frac{3\pi}{4} + 2N\pi\right)^{(1-\nu)} \int_{\mathbb{R}} \exp(r)\chi^2(\exp(r) - 2N\pi)r^{\nu-1}dr \\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}} \exp(r)\chi^2(\exp(r) - 2N\pi)dr.\end{aligned}$$

So, if $\sigma = e^r - 2N\pi$, we have
$$\int_{\mathbb{R}^\nu} g_N^2(x)dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}} \chi^2(\sigma)d\sigma. \tag{3.56}$$
So $\|f\|_{\mathcal{H}^2}\|g_N\|_{L^2} \leqslant C$. Remark that, since $f(x)V(x)g_N(x) \geqslant 0$ for all $x \in \mathbb{R}^\nu$, we have for N large enough

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)V(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^\nu} \langle x\rangle^{-(\nu+1)/2} \ln\left(\frac{3\pi}{4} + 2N\pi\right)^{(1-\nu)/2} \exp(5|x|/4) \\
&\quad \chi\Big(\exp(|x|) - 2N\pi\Big)(1 - \kappa(|x|))\sin(\exp(|x|))dx \\
&\geqslant C\ln\left(\frac{3\pi}{4} + 2N\pi\right)^{(1-\nu)/2} \int_{\mathbb{R}^\nu} \langle x\rangle^{-(\nu+1)/2} \exp(5|x|/4) \\
&\quad \chi\Big(\exp(|x|) - 2N\pi\Big)dx \\
&\geqslant C\ln\left(\frac{3\pi}{4} + 2N\pi\right)^{(1-\nu)/2} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \langle r\rangle^{-(\nu+1)/2} \exp(5r/4)\chi(e^r - 2N\pi)r^{\nu-1}dr \\
&\geqslant C\int_{\mathbb{R}} \exp(r/8)e^r\chi(e^r - 2N\pi)dr \\
&\geqslant C\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\sigma + 2N\pi)^{1/8}\chi(\sigma)d\sigma \\
&\geqslant C(\frac{\pi}{4} + 2N\pi)^{1/8} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \chi(\sigma)d\sigma.
\end{aligned}$$

So $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)V(x)g_N(x)dx = +\infty$. So V is not Δ-bounded.

4. By a simple calculus, we have

$$\begin{aligned}
&x \cdot \nabla V(x) \\
= \;&-\kappa'(|x|)|x|\exp(3|x|/4)\sin(\exp(|x|)) \\
&+(1 - \kappa(|x|))|x|\exp(7|x|/4)\cos(\exp(|x|)) \\
&+(1 - \kappa(|x|))\frac{3}{4}|x|\exp(3|x|/4)\sin(\exp(|x|)).
\end{aligned}$$

Let $\chi \in C_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\mathrm{supp}\,(\chi) \subset [0, \frac{\pi}{4}]$, $\chi \geqslant 0$ and $\chi(\pi/8) = 1$. Let $N \in \mathbb{N}^*$ and
$$f(x) = \langle x\rangle^{-(\nu+1)/2}$$
and
$$g_N(x) = \ln\left(\frac{\pi}{4} + 2N\pi\right)^{(1-\nu)/2} \exp(-|x|/2)\chi\Big(\exp(|x|) - 2N\pi\Big).$$
As in (3.56), we can show that $\|f\|_{\mathcal{H}^1}\|g_N\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant C$. Remark that, $f(x)x \cdot \nabla V(x)g_N(x) \geqslant 0$ for all $x \in \mathbb{R}^\nu$. Since $\kappa \in C_c^\infty$, we have for $N \in \mathbb{N}^*$ large enough
$$\int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)\kappa'(|x|)|x|\exp(3|x|/4)\sin(\exp(|x|))g_N(x)dx = 0.$$
Moreover, we have
$$\int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)(1 - \kappa(|x|))\frac{3}{4}|x|\exp(3|x|/4)\sin(\exp(|x|))g_N(x)dx \geqslant 0.$$

Thus, for N large enough,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)x\cdot\nabla V(x)g(x)dx \quad &\geqslant \quad \int_{\mathbb{R}^\nu} |x|\ln\left(\frac{\pi}{4}+2N\pi\right)^{(1-\nu)/2}\chi\Big(\exp(|x|)-2N\pi\Big) \\
&\qquad (1-\kappa(|x|))\langle x\rangle^{-(\nu+1)/2}\exp(5|x|/4)\cos(\exp(|x|))dx \\
&\geqslant \quad C\ln\left(\frac{\pi}{4}+2N\pi\right)^{(1-\nu)/2}\int_{\mathbb{R}^\nu}\langle x\rangle^{-(\nu+1)/2} \\
&\qquad \chi\Big(\exp(|x|)-2N\pi\Big)|x|\exp(5|x|/4)dx \\
&\geqslant \quad C\ln\left(\frac{\pi}{4}+2N\pi\right)^{(1-\nu)/2}\int_{\mathbb{R}^\nu}\langle r\rangle^{-(\nu+1)/2} \\
&\qquad \chi\Big(e^r-2N\pi\Big)r^\nu\exp(5r/4)dx \\
&\geqslant \quad C\int_{\mathbb{R}^\nu}\chi\Big(e^r-2N\pi\Big)\exp(5r/4)dx \\
&\geqslant \quad C\int_0^{\pi/4}(\sigma+2N\pi)^{1/4}\chi(\sigma)d\sigma \\
&\geqslant \quad C(2N\pi)^{1/4}\int_0^{\pi/4}\chi(\sigma)d\sigma.
\end{aligned}$$

Thus $\lim_{N\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)x\cdot\nabla V(x)g_N(x)dx = +\infty$.
Therefore $V\notin C^1(A_D,\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$. □

Remark that, if $f(x)=\langle x\rangle^{-(\nu+1)/2}$, $f\in\mathcal{H}^k$ for all $k\in\mathbb{N}$. This yields that, by the same proof, we can show that $V:\mathcal{H}^k\to L^2$ is not bounded for all $k\in\mathbb{N}$.

3.5.4 A short range potential in a weak sense

Now, we will show an example of potential with no decay at infinity for which Theorem 3.1.2 applies.

We have the following:

Lemma 3.5.8. *Suppose that $V:\mathcal{H}^1\to\mathcal{H}^{-1}$ is a symmetric bounded operator. There exists $u\in\mathcal{U}$ such that:*

1. *if $x\mapsto |x|V(x)$ is in $\mathcal{H}^{-1}$ then $V\in C^1(A_u,\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$.*
2. *if there is $\mu>0$ such that $x\mapsto\langle x\rangle^{1+\mu}V(x)$ is in $\mathcal{H}^{-1}$ then $V\in C^{1,1}(A_u,\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})$.*

For this type of potential, we can take u of the form $u(x)=x\langle x\rangle^{-\nu-1}$. Note that this u is in $L^2(\mathbb{R}^\nu)$.

We have the following

Corollary 3.5.9. *Let $V:\mathcal{H}^1\to\mathcal{H}^{-1}$ is a symmetric compact operator. Suppose that there is $\mu>0$ such that $x\mapsto\langle x\rangle^{1+\mu}V(x)$ is in $\mathcal{H}^{-1}$. Then Theorem 3.1.2 applies on $(0,+\infty)$.*

We will give an example of a potential which satisfies assumption of the previous corollary and for which we cannot apply the Mourre Theorem with A_D as conjugate operator.

Lemma 3.5.10. *Let $\nu \geqslant 3$ and let $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $\chi \in C^3$, $\chi(|x|) = 0$ if $|x| > 1$ and $\chi'(0) = \chi''(0) = 1$. Let*

$$V(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n^{(3\nu-1)/2}\chi'(n^{3\nu/2}(|x|-n)) \quad \text{with a finite sum for each } x.$$

Then

1. *$V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact;*
2. *there is $u \in \mathcal{U}$ such that V is of class $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$;*
3. *V is not Δ-bounded;*
4. *V is not of class $C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.*

Proof. [Lemma 3.5.8] Let $u(x) = x\langle x\rangle^{-\nu-1}$.

1. Suppose that $x \mapsto |x|V(x)$ is in $\mathcal{H}^{-1}$. By (3.44), we can see that, if $[qV, u(p)] : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded, then $V \in C^1(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.
   Let $f, g \in C_c^\infty$. By (3.45) and Young inequality, there is $C > 0$ such that

   $$\begin{aligned} |(u(p)f, qVg)| &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^{2\nu}} |u(\xi)|\langle\xi\rangle|\hat{f}(\xi)|\langle\xi-\eta\rangle^{-1}|\widehat{qV}(\xi-\eta)|\langle\eta\rangle|\hat{g}(\eta)|d\xi d\eta \\ &\leqslant C\|u(q)\langle q\rangle\hat{f}\|_1\|(\langle q\rangle^{-1}|\widehat{qV}|) * (\langle q\rangle|\hat{g}|)\|_\infty \\ &\leqslant C\|u\|_2\|\langle q\rangle\hat{f}\|_2\|\langle q\rangle^{-1}\widehat{qV}\|_2\|\langle q\rangle\hat{g}\|_2 \\ &\leqslant C\|u\|_2\|f\|_{\mathcal{H}^1}\|qV\|_{\mathcal{H}^{-1}}\|g\|_{\mathcal{H}^1}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

   We have a similar inequality for $|(qVf, u(p)g)|$. By density, we have the same inequality for all $f, g \in \mathcal{H}^1$. Thus $[qV, u(p)] : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded which implies that $V \in C^1(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.

2. Suppose that there is $\mu > 0$ such that $x \mapsto \langle x\rangle^{1+\mu}V(x)$ is in $\mathcal{H}^{-1}$. In particular, $x \mapsto |x|V(x)$ is in $\mathcal{H}^{-1}$. Therefore $V \in C^1(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. As we saw previously, we can deduce that $[\langle q\rangle^\mu qV, u(p)] : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded.
   By a simple calculus, we have:

   $$\begin{aligned} [qV, u(p)] &= [\langle q\rangle^{-\mu}\langle q\rangle^\mu qV, u(p)] \\ &= \langle q\rangle^{-\mu}[\langle q\rangle^\mu qV, u(p)] + [\langle q\rangle^{-\mu}, u(p)]\langle q\rangle^\mu qV \end{aligned}$$

   By the pseudo-differential calculus, we can prove that $\langle q\rangle^\mu[\langle q\rangle^{-\mu}, u(p)]\langle p\rangle^{1+\nu}$ is a bounded operator. From that, we deduce

   $$[\langle q\rangle^{-\mu}, u(p)]\langle q\rangle^\mu qV = \langle q\rangle^{-\mu}\langle q\rangle^\mu[\langle q\rangle^{-\mu}, u(p)]\langle p\rangle^{1+\nu}\langle p\rangle^{-1-\nu}\langle q\rangle^\mu qV.$$

   As in (3.57), since $x \mapsto \langle x\rangle^{-1-\nu}$ is in $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, $\langle p\rangle^{-1-\nu}\langle q\rangle^\mu qV : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded and $\langle q\rangle^\mu[\langle q\rangle^{-\mu}, u(p)]\langle p\rangle^{1+\nu}\langle p\rangle^{-1-\nu}\langle q\rangle^\mu qV : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded.
   Thus we can write $[qV, u(p)] = \langle q\rangle^{-\mu}B$ where $B : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded. Thus, for all ξ a real function of class $C^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ such that $\xi(x) = 0$ if $|x| < 1$ and $\xi(x) = 1$ if $|x| > 2$, we have

   $$\begin{aligned} \|\xi(q/r)[qV, u(p)]\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})} &= \|\xi(q/r)\langle q\rangle^{-\mu}B\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})} \\ &\leqslant \langle r\rangle^{-\mu}\|B\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^{-1})}. \end{aligned}$$

   In particular, by (3.57), V satisfies (3.16) and, by Proposition 3.3.2, V is of class $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.
   □

Proof. [Lemma 3.5.10] Remark that we can write $V(x) = \frac{x}{|x|}\nabla W(x)$ where

$$W(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{n}^{-1}\chi(\sqrt{n}^{3\nu}(|x| - n)).$$

1. Since $\lim\limits_{|x|\to+\infty} W(x) = 0$, by writing $\nabla W(q) = i[p, W(q)]$, $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact.

2. Let $\mu > 0$.

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} \left||x|^{1+\mu}W(x)\right|^2 dx = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \int_{\mathbb{R}^\nu} |x|^{2+2\mu}\chi^2(n^{3\nu/2}(|x| - n))dx$$

Since $\chi(|x|) = 0$ if $|x| > 1$, there is $C > 0$ such that

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^\nu} \left||x|^{1+\mu}W(x)\right|^2 dx &\leqslant C\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}(n + n^{-3\nu/2})^{2+2\mu} \int_{n-n^{-3\nu/2}}^{n+n^{-3\nu/2}} r^{\nu-1}dr \\ &\leqslant 2C\sum_{n=2}^{\infty} (n + n^{-3\nu/2})^{1+2\mu+\nu}n^{-3\nu/2-1}.\end{aligned}$$

In particular, since $\nu \geqslant 3$, for $\mu > 0$ sufficiently small, this sum is finite, and we can conclude that $\langle q\rangle^{1+\mu}W \in L^2$. Therefore

$$\langle x\rangle^{1+\mu}V(x) = \langle x\rangle^{1+\mu}\frac{x}{|x|}\nabla W = \frac{x}{|x|}\nabla\left\{\langle\cdot\rangle^{1+\mu}W\right\}(x) - (1+\mu)|x|\langle x\rangle^{\mu-1}W(x).$$

Since $x \mapsto |x|\langle x\rangle^{\mu-1}W(x)$ is in L^2, $x \mapsto \langle x\rangle^{1+\mu}V(x)$ is in $\mathcal{H}^{-1}$.
Thus, by Lemma 3.5.8, $V \in C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.

3. Let $N \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) = \langle x\rangle^{-(\nu+1)/2} \quad \text{and} \quad g_N(x) = N^{\nu/4+1/2}\chi'(N^{3\nu/2}(|x| - N)).$$

Remark that $f \in \mathcal{H}^2$ and

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^\nu} g_N^2(x)dx &= N^{\nu/2+1}\int_{\mathbb{R}^\nu} \chi'(N^{3\nu/2}(|x| - N))^2dx \\ &\leqslant CN^{\nu/2+1}\int_{\mathbb{R}^\nu} r^{\nu-1}\chi'(N^{3\nu/2}(r - N))^2dx \\ &\leqslant CN^{\nu/2+1}(N+1)^{\nu-1}N^{-3\nu/2}\int_{-1}^{1} \chi'(t)^2dt \\ &\leqslant C. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Thus $\|g_N\|_{L^2} \leqslant C$. To simplify notation, let $I = [N - N^{-3\nu/2}, N + N^{-3\nu/2}]$ Then

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)V(x)g_N(x)dx &= N^{\nu/4+1/2}N^{(3\nu-1)/2} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^\nu} \langle x\rangle^{-(\nu+1)/2}\chi'(N^{3\nu/2}(|x|-N))^2dx \\
&\geqslant N^{\nu/4+1/2}N^{(3\nu-1)/2}\langle N + N^{-3\nu/2}\rangle^{-(\nu+1)/2} \\
&\quad \int_{|x|\in I} \chi'(N^{3\nu/2}(|x|-N))^2dx \\
&\geqslant CN^{\nu/4+1/2}N^{(3\nu-1)/2}\langle N + N^{-3\nu/2}\rangle^{-(\nu+1)/2} \\
&\quad \int_{r\in I} r^{\nu-1}\chi'(N^{3\nu/2}(r-N))^2dr \\
&\geqslant C\langle N+1\rangle^{-(\nu+1)/2}(N-1)^{5\nu/4-1} \\
&\quad \int_{r\in I} \chi'(N^{3\nu/2}(r-N))^2dr \\
&\geqslant C\langle N+1\rangle^{-(\nu+1)/2}(N-1)^{5\nu/4-1}\int_{r\in[-1,1]} \chi'(r)^2dr
\end{aligned}$$

Therefore, since $\nu \geqslant 3$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)V(x)g_N(x)dx = +\infty$.

Since $\|f\|_{\mathcal{H}^2}\|g_N\|_{L^2} \leqslant C$, then V is not Δ-bounded.

4. By a simple calculus, we have

$$x \cdot \nabla V(x) = |x| \sum_{n=2}^{+\infty} n^{3\nu/2}n^{(3\nu-1)/2}\chi''(n^{3\nu/2}(|x|-n)).$$

Let $N \in \mathbb{N}^*$ and

$$f(x) = \langle x\rangle^{-(\nu+1)/2} \quad \text{and} \quad g_N(x) = N^{\nu/4+1/2}N^{-3\nu/2}\chi''(N^{3\nu/2}(|x|-N)).$$

Remark that $f \in \mathcal{H}^1$ and by (3.58) $\|g_N\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant C$. To simplify notation, let $I = [N - N^{-3\nu/2}, N + N^{-3\nu/2}]$. We have

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)x\cdot\nabla V(x)g_N(x)dx &= N^{\nu/4+1/2}N^{(3\nu-1)/2} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^\nu} |x|\langle x\rangle^{-(\nu+1)/2}\chi''(N^{3\nu/2}(|x|-N))^2dx \\
&\geqslant N^{\nu/4+1/2}N^{(3\nu-1)/2}\langle N + N^{-3\nu/2}\rangle^{-(\nu+1)/2} \\
&\quad \int_{|x|\in I} \chi''(N^{3\nu/2}(|x|-N))^2dx \\
&\geqslant CN^{\nu/4+1/2}N^{(3\nu-1)/2}\langle N + N^{-3\nu/2}\rangle^{-(\nu+1)/2} \\
&\quad \int_{r\in I} r^{\nu-1}\chi''(N^{3\nu/2}(r-N))^2dr \\
&\geqslant C\langle N+1\rangle^{-(\nu+1)/2}(N-1)^{5\nu/4-1} \\
&\quad \int_{r\in I} \chi''(N^{3\nu/2}(r-N))^2dr \\
&\geqslant C\langle N+1\rangle^{-(\nu+1)/2}(N-1)^{5\nu/4-1} \\
&\quad \int_{r\in[-1,1]} \chi''(r)^2dr.
\end{aligned}$$

Thus, since $\nu \geqslant 3$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)x \cdot \nabla V(x) g_N(x) dx = +\infty$ with $\|f\|_{\mathcal{H}^1}\|g_N\|_{\mathcal{H}^1} \leqslant C$. Thus $V \notin C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. □

3.6 Flow

In this section we make a comment concerning the unitary group generated by the operator A_u which could be useful in checking the $C^{1,1}(A_u)$ property, subject that however we shall not pursue further in this note. For A_u as in (3.15) one may give an explicit description of $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau A_u}$ in terms of the classical flow generated by the vector field u as follows (we refer to Subsection 4.2 in [ABdMG96] for details). For each $x \in X$ denote $\phi_\tau(x)$ the solution of the system

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}\phi_\tau(x) = u\left(\phi_\tau(x)\right) \\ \phi_0(x) = x \end{cases}, \tag{3.59}$$

which exists for all real τ and $\phi_\tau(x)$ is a C^∞ function of τ, x. Then $\phi_\tau : X \to X$ is a C^∞ diffeomorphism and we have $\phi_\sigma \circ \phi_\tau = \phi_{\sigma+\tau}$.

Remark that because $\mathcal{F}A_u\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2}(p \cdot u(q) + u(q) \cdot p)$, A_u is essentially self-adjoint (see [ABdMG96, Proposition 4.2.3]). Morever, because $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{H}_t^s\mathcal{F} = \mathcal{H}_s^t$, for $u \in \mathcal{U}$, the C_0 groups $e^{i\tau A_u}$ leaves invariant the $\mathcal{H}_t^s$ spaces (see [ABdMG96, Proposition 4.2.4]).

Denote $\phi'_\tau(x)$ the derivative of ϕ_τ at the point x, so that $\phi'_\tau(x) : X \to X$ is a linear map with $J_\tau(x) = \det \phi'_\tau(x) > 0$. Then:

$$\mathcal{F}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau A_u}\mathcal{F}^{-1} f = J_\tau^{1/2} f \circ \phi_\tau \tag{3.60}$$

where $\mathcal{F}$ is the Fourier transformation.

For the operator A_N given by (3.19) it suffices to consider the one dimensional case, because of the factorization properties mentioned at the beginning of Section 3.4. Then $X = \mathbb{R}$ and $u(k) = \sin(ak)$. For simplicity, and without loss of generality, we take $a = 1$. Then the system (3.59) has an elementary solution: if $0 \leqslant x \leqslant \pi$ then

$$\phi_\tau(x) = \arccos\left(\frac{\left(1 - e^{2\tau}\right) + \cos(x)\left(1 + e^{2\tau}\right)}{\left(1 + e^{2\tau}\right) + \cos(x)\left(1 - e^{2\tau}\right)}\right) = 2\arctan\left(\mathrm{e}^\tau \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{3.61}$$

and similarly outside $[0, \pi]$. Note that if $x = k\pi$ with $k \in \mathbb{Z}$ then $\phi_\tau(x) = x$.

Chapitre 4

A new class of Schrödinger operators without positive eigenvalues

In this chapter is given preprint [Mar17].

Abstract. Following the proof given by Froese and Herbst in [FH82] with another conjugate operator, we show for a class of real potential that possible eigenfunction of the Schrödinger operator has to decay sub-exponentially. We also show that, for a certain class of potential, this bound can not be satisfied which implies the absence of strictly positive eigenvalues for the Schrödinger operator.

Sommaire

4.1 Introduction

In this article, we will study the Schrödinger operator $H = \Delta + V$ with a real potential, on $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, where Δ is the non negative Laplacian operator. Here V is a multiplication operator, i.e. V can be the operator of multiplication by a real function or by a distribution of strictly positive order. When $V = 0$, we know that $H = \Delta$ has a purely absolutly continuous spectrum on $[0, +\infty)$ with no embedded eigenvalues. We will try to see what happened if we add to Δ a "small" potential V, which is compact with respect to Δ. In this case, H is a compact perturbation of Δ and we already know that the essential spectrum of H is $[0, +\infty)$.

An argument of quantum mechanics can make us believe that our Hamiltonians has no strictly positive eigenvalues, when V is Δ-compact or compact on $\mathcal{H}^1$, the first order Sobolev space, to $\mathcal{H}^{-1}$, its dual space. This argument is reinforced by a result of S. Agmon [Agm70], T. Kato [Kat59], R. Lavine [RS70d, Theorem XIII.29] and B. Simon [Sim67]. They proved the absence of positive eigenvalues for the operator $H = \Delta + V$ if the potential is a sum of a short range potential and a long range potential, i.e. V can be written $V = V_1 + V_2$ with

$$\begin{cases} \lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|V_1(x) = 0 \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} V_2(x) = 0 \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} x \cdot \nabla V_2(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Similarly, L. Hörmander [Hör83, Theorem 14.7.2] proved that a possible eigenvector of H, associated to a positive eigenvalue, and its first order derivatives cannot have unlimited polynomial bounds if $|x|V$ is bounded. A.D. Ionescu and D. Jerison [IJ03] proved also this absence of positive eigenvalues for the 1-body Schrödinger operator, for a class of potentials with low regularity ($V \in L^{\nu/2}_{loc}$ if $\nu \geqslant 3$, $V \in L^r_{loc}$, $r > 1$ if $\nu = 2$).

R. Froese, I. Herbst , M. Hoffman-Ostenhof and T. Hoffman-Ostenhof ([FH82] and [FHHOHO82]) proved a similar result, concerning the N-body Schrödinger operator. We will explain below their result for the 1-body Schrödinger operator and we will generalize their proof to obtain larger conditions on the potential. More recently, using a similar proof than in [FH82], two other results were proved. T. Jecko and A. Mbarek [JM17] proved the absence of positive eigenvalues for $H = \Delta + V$ where V is the sum of a short range potential, a long range potential and an oscillating potential which are not covered by the previous results. In the case of the discrete Schrödinger operator, M.A. Mandich [Man16] proved that under certain assumption on the potential, eigenfunctions decay sub-exponentially and that implies the absence of eigenvalues on a certain subset of the real axis. This three proofs use the generator of dilations A_D, or the discrete generator of dilations in [Man16], as conjugate operator. In our case, the continuous case, the generator of dilations has the following expression

$$A_D = \frac{1}{2}(p \cdot q + q \cdot p),$$

where q is the multiplication operator by x and $p = -i\nabla$ is the derivative operator with $p^2 = \Delta$.

On the other hand, it is well known that we can construct a potential such that H has positive eigenvalues. For example, in one dimension, the Wigner-von Neuman potential $W(x) = w\sin(k|x|)/|x|$ with $k > 0$ and $w \in \mathbb{R}^*$ has a positive eigenvalue equal to $k^2/4$ (see [NW29]). Moreover, B. Simon proved in [Sim97] that for all sequence $(\mathcal{K}_n)_{n=1\cdots+\infty}$ of distinct positive reals, we can construct a potential V such that $(\mathcal{K}_n^2)_{n=1\cdots+\infty}$ are eigenvalues of H. Moreover, B. Simon showed that if $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n < \infty$, then $|q|V$ is bounded, which implies that V is Δ-compact.

In their article [FH82], R. Froese and I. Herbst proved the following

Theorem 4.1.1 ([FH82], Theorem 2.1)**.** *Let $H = \Delta + V$ with V a real-valued measurable function. Suppose that*

1. *V is Δ-bounded with bound less than one,*
2. *$(\Delta + 1)^{-1} q \cdot \nabla V (\Delta + 1)^{-1}$ is bounded.*

Suppose that $H\psi = E\psi$. Then

$$S_E = \sup\left\{\alpha^2 + E \;;\; \alpha > 0, \exp(\alpha|x|)\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)\right\} \tag{4.1}$$

is $+\infty$ or the Mourre estimate is not valid at this energy with A_D as conjugate operator.

From this result, they deduce the following

Corollary 4.1.2 ([FH82], Theorem 3.1)**.** *Let $H = \Delta + V$ with V a real-valued measurable function. Let $E > 0$. Suppose that*

1. *V is Δ-compact,*

2. *$(\Delta + 1)^{-1} q \cdot \nabla V (\Delta + 1)^{-1}$ is compact,*

3. *for some $a < 2$ and $b \in \mathbb{R}$, we have in the form sense*

$$q \cdot \nabla V \leqslant a\Delta + b. \tag{4.2}$$

Suppose that $H\psi = E\psi$. Then $\psi = 0$.

Following their proof, we will extend their result in two directions. First, we will see that for a larger class of Δ-compact potential, we can prove that possible eigenvector of H must satisfy some sub-exponential bounds in the L^2-norm. We will also show that this implies the absence of positive eigenvalue if V satisfies a condition of type (4.2). Secondly, we will extend their results in the case where the potential is not Δ-bounded but compact from $\mathcal{H}^1$ to $\mathcal{H}^{-1}$. To prove these results we will use another conjugate operator of the form

$$A_u = \frac{1}{2}(u(p) \cdot q + q \cdot u(p)),$$

where u is a C^∞ vector field with all derivatives bounded. Remark that this type of conjugate operator is essentially self-adjoint with the domain $\mathcal{D}(A_u) \supset \mathcal{D}(A_D)$ (see [ABdMG96, Proposition 4.2.3]). This conjugate operator was also used in [Mar18b]. In this paper, it is proved that for a certain choice of u (u bounded), the commutator between V and A_u can avoid us to impose conditions on the derivatives of the potential, which can be useful when V has high oscillations. Moreover, the commutator with the Laplacian, considered as a form with domain $\mathcal{H}^1$, is quite explicit:

$$[\Delta, iA_u] = 2p \cdot u(p)$$

which implies that the commutator is bounded from $\mathcal{H}^1$ to $\mathcal{H}^{-1}$. Since the unitary group generated by A_u leaves invariant the domain and the form domain of the Laplacian (see [ABdMG96, Proposition 4.2.4]), this proves that Δ is of class $C^1(A_u)$ and, similarly if if we add a potential V which is Δ-compact(respectively compact from $\mathcal{H}^1$ to $\mathcal{H}^{-1}$), with the regularity $C^1(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$ (respectively $C^1(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$), since the domain (respectively the form domain) is the same than the domain of the Laplacian, we deduce that $H = \Delta + V$ is of class $C^1(A_u)$. If we take u such that $x \cdot u(x) > 0$ for all $x \neq 0$, remark that the Mourre estimate is true with A_u as conjugate operator on all compact subset of $(0, +\infty)$ for Δ. For this reason, and to follow the proof of [FH82], it will be convenient to choose u of the form $x\lambda(x)$ with $\lambda : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ a positive function. All differences with [FH82] will be explain in Section 4.4 and Section 4.5.

4.2 Main results

Now we will give our main results. Notice that we will recall the notion of regularity (C^k, C^k_U, $C^{1,1}$) with respect to an operator on Section 4.3.2.

To simplify notations, let $\mathcal{U}$ be the set of vector fields u with all derivatives bounded which can be writed $u(x) = x\lambda(x)$ with λ a C^∞ bounded positive function. In particular, $p \cdot \nabla\lambda(p)$ is bounded. We have the following:

Theorem 4.2.1. *Let $H = \Delta + V$ on $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, where V is a symmetric potential such that V is Δ-bounded with bound less than one. Let $E \in \mathbb{R}$ and ψ such that $H\psi = E\psi$. Suppose that there is $u \in \mathcal{U}$ such that $(\Delta + 1)^{-1}[V, iA_u](\Delta + 1)^{-1}$ is bounded, then, for all $0 < \beta < 1$,*

$$S_E = \sup\left\{\alpha^2 + E \; ; \; \alpha > 0, \exp(\alpha\langle x\rangle^\beta)\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)\right\}$$

is either $+\infty$ or in $\mathcal{E}_u(H)$, the complement of the set of points for which the Mourre estimate (see Definition 4.3.2) is satisfied with respect to A_u.

We will give some comments about this Theorem:

(a) Let $u \in \mathcal{U}$. Since the unitary group generated by A_u leaves invariant the Sobolev space $\mathcal{H}^2$, $V \in C^1(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$ if and only if $(\Delta + 1)^{-1}[V, iA_u](\Delta + 1)^{-1}$ is bounded. Thus, in this case, we can replace the assumption $(\Delta + 1)^{-1}[V, iA_u](\Delta + 1)^{-1}$ in Theorem 4.2.1 by an assumption of regularity.

(b) Since we do not have an explicit expression for the commutator between an operator of multiplication and the conjugate operator A_u, in the proof of Theorem 4.2.1, it is convenient to chose the function F, which appears in the proof, with a vanishing gradient at infinity. This is the case if $\beta < 1$ but not if $\beta = 1$. Remark that for certain type of potential, by using the interaction between the potential and Δ, we can prove the exponential bounds or sub-exponential bounds ($\beta = 1$), even if $V \notin C^1(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$ (see [JM17, Proposition 7.1] and Proposition 4.6.3).

(c) Remark that if V is Δ-compact and $V \in C^1_{\mathrm{u}}(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$, for $u \in \mathcal{U}$, V satisfies assumptions of Theorem 4.2.1 and the Mourre estimate is true for all $\lambda \in (0, +\infty)$ (see [ABdMG96, Theorem 7.2.9]). So, in this case, if $E > 0$, then $\exp(\alpha\langle x\rangle^\beta)\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ for all $\alpha > 0$ and $\beta \in (0, 1)$. Moreover, in this case, by the Virial Theorem, we can see that the set of eigenvalues in $J = (0, +\infty)$ has no accumulation point inside J and are of finite multiplicity.

(d) If V vanishes at infinity and can be seen as the Laplacian of a short range potential (i.e. $V = \Delta W$ with $\lim_{|x|\to+\infty} \langle x\rangle W = 0$), then V is Δ-compact and $\langle q\rangle V : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^{-2}$ is compact. In this case, we can apply Theorem 4.2.1 to $H = \Delta + V$.

(e) For $\zeta \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, $k \in \mathbb{R}^*$ and $w \in \mathbb{R}$, let

$$V(x) = w(1 - \kappa(|x|))\frac{\sin(|x|^\zeta)}{|x|^\theta},$$

with $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ with $\kappa(|x|) = 1$ if $|x| < 1$, $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$. Note that this type of potential was already studied in [BAD79, DMR91, DR83a, DR83b, JM17, RT97a, RT97b]. If $\zeta < \theta$ or if $\theta > 1$, we can see that V is a long range or a short range potential. Moreover, in [JM17], it is proved that if $\zeta + \theta > 2$, then V has a good regularity with respect to A_D. So we can apply Theorem 4.1.1 in these two areas. In [JM17], they also showed that if $\zeta > 1$ and $\theta > 1/2$, then a possible eigenvector associated with positive energy has unlimited exponential bounds. But, if $|\zeta - 1| + \theta < 1$, they proved that $H \notin C^1(A_D)$ and so we cannot apply Theorem 4.1.1 with this potential. If $2\zeta + \theta > 3$, $\zeta > 1$ and $0 < \theta \leqslant 1/2$, then V is of class $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2}) \subset C^1_{\mathrm{u}}(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$ for all u bounded (see [Mar18b, Lemma 5.4]). So, Theorem 4.2.1 applies if $2\zeta + \theta > 3$ with $\zeta > 1$ and $0 < \theta \leqslant 1/2$.

Since the Laplacian operator Δ can be seen as a form on $\mathcal{H}^1$, the first order Sobolev space, to $\mathcal{H}^{-1}$, the dual space of $\mathcal{H}^1$, we can also study the case where $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact. In this case, the difference between the resolvent of H and the resolvent of Δ is compact and the essential spectrum of H is still $[0, +\infty)$. We have the following

Theorem 4.2.2. *Let $H = \Delta + V$ on $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, where V is a real-valued function such that $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded with relative bound less than one. Let $E \in \mathbb{R}$ and ψ such that $H\psi = E\psi$. If there is $u \in \mathcal{U}$ such that $\langle p\rangle^{-1}[V, iA_u]\langle p\rangle^{-1}$ is bounded, then, for all $0 < \beta < 1$,*

$$S_E = \sup\left\{\alpha^2 + E \;;\; \alpha > 0, \exp(\alpha\langle x\rangle^\beta)\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)\right\}$$

is either $+\infty$ or in $\mathcal{E}_u(H)$.

We make some comments about this theorem:

(a) Since $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded with relative bound less than one, by the KLMN Theorem, H can be considered as a form with form domain $\mathcal{H}^1$ and is associated to a self-adjoint operator.

(b) Let $u \in \mathcal{U}$. Since the unitary group generated by A_u leaves invariant the Sobolev space $\mathcal{H}^1$, $V \in C^1(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ if and only if

$$(\Delta + 1)^{-1/2}[V, iA_u](\Delta + 1)^{-1/2}$$

is bounded. Thus, in this case, we can replace the assumption $(\Delta + 1)^{-1/2}[V, iA_u](\Delta + 1)^{-1/2}$ in Theorem 4.2.2 by an assumption of regularity.

(c) If $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact and if $V \in C^1_{\mathrm{u}}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$, then

$$(\Delta + 1)^{-1/2}[V, iA_u](\Delta + 1)^{-1/2}$$

is compact. Thus the Mourre estimate is true on all compact subset of $(0, +\infty)$. So, if $E > 0$, in this case, the sub-exponential bounds are true for all $\alpha > 0$.

(d) For $\zeta \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^*$ and $w \in \mathbb{R}$, let

$$V(x) = w(1 - \kappa(|x|))\frac{\sin(|x|^\zeta)}{|x|^\theta},$$

with $\kappa \in C^\infty_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ with $\kappa(|x|) = 1$ if $|x| < 1$, $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$. If $\zeta + \theta > 2$, then $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact and V is of class $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}) \subset C^1_{\mathrm{u}}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ for all u bounded (see [Mar18b, Lemma 5.4]). So, Theorem 4.2.2 applies if $\zeta + \theta > 2$, even if $\theta \leqslant 0$.

(e) Let

$$V(x) = w(1 - \kappa(|x|))e^{3|x|/4}\sin(e^{|x|})$$

with $w \in \mathbb{R}$, $\kappa \in C^\infty_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$ and $\kappa(|x|) = 1$ if $|x| < 1$. Note that this type of potential was already studied in [Com80, CG76]. We can show that $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact and V is of class $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}) \subset C^1_{\mathrm{u}}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ for all u bounded (see[Mar18b, Lemma 5.6]). So, for all $w \in \mathbb{R}$, Theorem 4.2.2 applies. Moreover, since V is not Δ-bounded, we cannot apply Theorem 4.1.1.

(f) Assume that $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is symmetric, bounded with bound less than one and that there is $\mu > 0$ such that $\langle x\rangle^{1+\mu}V(x) \in \mathcal{H}^{-1}$. Then there is $u \in \mathcal{U}$ such that $V \in C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ (see [Mar18b, Lemma 5.8]). In particular, for this type of potential, Theorem 4.2.2 applies. For example, in dimension $\nu \geqslant 3$, if we take $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $\chi \in C^3$, $\chi(|x|) = 0$ if $|x| > 1$ and $\chi'(0) = \chi''(0) = 1$, the potential defined by

$$V(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n^{(3\nu-1)/2}\chi'(n^{3\nu/2}(|x| - n)),$$

is compact on $\mathcal{H}^1$ to $\mathcal{H}^{-1}$ and of class $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ for an appropriate u. Moreover, we can show that this potential is neither Δ-bounded, neither of class $C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ (see [Mar18b, Lemma 5.10]). In particular, Theorems 4.1.1 and 4.2.1 do not apply with this potential.

(g) Remark that all examples we gave are central potentials. But it is not necessary to have this property and we gave only examples which are central because it is easier. In particular, if W satisfies $\langle q\rangle^{1+\epsilon}W$ is bounded for one choice of $\epsilon > 0$, then Theorem 4.2.2 applies for $V = \mathrm{div}(W)$.

Since in the proof of Corollary 4.1.2, one use only assumption (4.2) by applying it on certain vectors that are constructed with a possible eigenvector of H, we can weaken the conditions on the potential. For $0 < \beta < 1$ and $\alpha > 0$, let $F_\beta(x) = \alpha\langle x\rangle^\beta$. We have the following

Theorem 4.2.3. *Suppose that V is Δ-compact.*
Let ψ such that $H\psi = E\psi$ with $E > 0$ and such that $\psi_F = \exp(F_\beta(q))\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ for all $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$. Suppose that there is $\delta > -2$, $\delta', \sigma, \sigma' \in \mathbb{R}$ such that $\delta + \delta' > -2$ and, for all $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$,

$$(\psi_F, [V, iA_D]\psi_F) \geqslant \delta(\psi_F, \Delta\psi_F) + \delta'(\psi_F, (\nabla F_\beta)^2\psi_F) + (\sigma\alpha + \sigma')\|\psi_F\|^2. \tag{4.3}$$

Then $\psi = 0$.

If we only suppose that $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded (but not necessarily Δ-bounded), we have the following:

Theorem 4.2.4. *Suppose that $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded.*
Let ψ such that $H\psi = E\psi$ with $E > 0$. For $0 < \beta < 1$ and $\alpha > 0$, let $F_\beta(x) = \alpha\langle x\rangle^\beta$. Denote $\psi_F = \exp(F_\beta(q))\psi$.
Suppose that $\psi_F \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ for all $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, and that there is $\delta > -2$, $\delta', \sigma, \sigma' \in \mathbb{R}$ such that $\delta + (1 + \|\langle p\rangle^{-1}V\langle p\rangle^{-1}\|)\delta' > -2$ and, for all $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$,

$$(\psi_F, [V, iA_D]\psi_F) \geqslant \delta(\psi_F, \Delta\psi_F) + \delta'(\psi_F, (\nabla F_\beta)^2\psi_F) + (\sigma\alpha + \sigma')\|\psi_F\|^2. \tag{4.4}$$

Then $\psi = 0$.

We make some comments on the two previous theorems:

(a) Since we suppose that ψ has sub-exponential bounds, for α, β fixed, ψ_F has sub-exponential bounds too. Moreover, we can remark that ψ_F is an eigenvector for

$$H(F) := e^F He^{-F} = H - (\nabla F)^2 + (ip\nabla F + i\nabla F p).$$

This makes easier to prove (4.3) and (4.4).

(b) Remark that in (4.2), the inequality is required to be true in the sense of the form. In (4.3) and (4.4), we do not ask to have this inequalities for all $\phi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A_u)$, but only for a type of vector with high decrease at infinity.

(c) Assumption (4.2) corresponds to the case where $\delta' = \sigma = 0$ and $\delta > -2$ in (4.3). In particular, if V satisfies (4.2), it satisfies (4.3) too.

(d) Remark that if $\delta' \geqslant 0$, conditions $\delta + \delta' > -2$ and $\delta + (1 + \|\langle p\rangle^{-1}V\langle p\rangle^{-1}\|)\delta' > -2$ are always satisfied.

(e) Actually, one only need to require (4.3) and/or (4.4) for β near 1 and α large enough.

(f) We can replace (4.3) by the similar inequality

$$(\psi_F, [V, iA_D]\psi_F) \geqslant \delta(\psi_F, \Delta\psi_F) + \delta'(\psi_F, (\nabla F_\beta)^2\psi_F) + \delta''\|g^{1/2}A_D\psi_F\|^2 + (\sigma\alpha + \sigma')\|\psi_F\|^2 \tag{4.3'}$$

with $\delta > -2$, $\delta + \delta' > -2$ and $\delta'' > -4$. (4.4) may be replaced by

$$(\psi_F, [V, iA_D]\psi_F) \geqslant \delta(\psi_F, \Delta\psi_F) + \delta'(\psi_F, (\nabla F_\beta)^2\psi_F) + \delta''\|g^{1/2}A_D\psi_F\|^2 + (\sigma\alpha + \sigma')\|\psi_F\|^2 \quad (4.4')$$

with $\delta > -2$, $\delta + (1 + \|\langle p\rangle^{-1}V\langle p\rangle^{-1}\|)\delta' > -2$ and $\delta'' > -4$ and the both Theorems remain true. This enlarges the class of admissible potentials (see Section 4.6).

(g) Let V_{sr} and V_{lr} be two functions such that there is $\rho_{sr}, \rho_{lr}, \rho'_{lr} > 0$ and $|x|^{1+\rho_{sr}}V_{sr}(x)$, $|x|^{\rho_{lr}}V_{lr}(x)$ and $|x|^{\rho'_{lr}}x\nabla V_{lr}(x)$ are bounded. Suppose that V satisfies assumptions of Theorem 4.2.3 (respectively Theorem 4.2.4).
Then $\tilde{V} = V + V_{sr} + V_{lr}$ satisfies assumptions of Theorem 4.2.3 (respectively Theorem 4.2.4) too. To see that, notice that V_{lr} and V_{sr} are compact on $\mathcal{H}^1$ and are of class $C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}) \cap C^1_{\mathrm{u}}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ for all $u \in \mathcal{U}$ and that there is $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned}(\psi_F, [V_{lr}, iA_D]\psi_F) &\geqslant \sigma_1\|\psi_F\|^2 \\ (\psi_F, [V_{sr}, iA_D]\psi_F) &\geqslant -\epsilon(\psi_F, \Delta\psi_F) + \frac{\sigma_2}{\epsilon}\|\phi\|^2\end{aligned}$$

for all $\epsilon > 0$. In particular, we can choose $\epsilon > 0$ small enough such that, if V satisfies (4.3) (respectively (4.4)), $\tilde{V}$ satisfies (4.3) (respectively (4.4)).

(h) If V can be seen as the derivative of a bounded function (the derivative of a short range potential for example), the conclusion of Theorem 4.2.4 is still true if one assume (4.4) and if one replaces the condition $\delta + (1 + \|\langle p\rangle^{-1}V\langle p\rangle^{-1}\|)\delta' > -2$ by the weaker condition $\delta + \delta' > -2$.

(i) For $\zeta, \theta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^*$ and $w \in \mathbb{R}$, let

$$V(x) = w(1 - \kappa(|x|))\frac{\sin(|x|^\zeta)}{|x|^\theta},$$

with $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ with $\kappa(|x|) = 1$ if $|x| < 1$, $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$. As for the sub-exponential bounds, we can see that if $\theta > 0$ and $\zeta < \theta$ or $\theta > 1$, then Corollary 4.1.2 applies. In [JM17], they showed that if $\zeta > 1$ and $\theta > 1/2$, $H = \Delta + V$ has no positive eigenvalues. Moreover, they claimed that if $\theta > 0$, $\zeta + \theta > 2$ and $|w|$ is small enough then V satisfies (4.2) and so Corollary 4.1.2 applies. But their proof is not sufficient if $\theta \leqslant 1/2$ because we need to have the commutator bounded from $\mathcal{H}^1$ to $\mathcal{H}^{-1}$ and in this case, it is only bounded from $\mathcal{H}^2$ to $\mathcal{H}^{-2}$. Here, we can show a better result: if $\zeta + \theta > 2$, $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact, of class $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ for all u bounded and satisfies (4.4) for all w. Therefore V satisfies assumptions of Theorem 4.2.4 for all $w \in \mathbb{R}$. In particular, if $\theta < 0$, V is not bounded. Moreover, if $\zeta + \theta = 2$ and $1/2 \geqslant \theta$, then V satisfies assumptions of Theorem 4.2.3 for $|w|$ sufficiently small. All this results are collected in Proposition 4.6.3.

(j) Let

$$V(x) = w(1 - \kappa(|x|))e^{3|x|/4}\sin(e^{|x|})$$

with $w \in \mathbb{R}$, $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$ and $\kappa(|x|) = 1$ if $|x| < 1$. For all $w \in \mathbb{R}$, we can apply Theorem 4.2.4 (see Lemma 4.6.4). Moreover, since V is not Δ-bounded, we cannot apply Corollary 4.1.2.

Now, we assume that V has more regularity with respect to A_u. In this case, we can prove a limiting absorption principle and we can show that the boundary values of the resolvent will be a smooth function outside the eigenvalues. To this end, we need to use the *Hölder-Zygmund continuity classes* denoted Λ^σ. The definition of this particular classes of regularity is recalled on Section 4.3.2. We also need some weighted Sobolev space, denoted $\mathcal{H}^t_s$ which are defined on Section 4.3.1

Theorem 4.2.5 ([Mar18b], Theorem (3.3))**.** *Let $R(z) = (H - z)^{-1}$ be the resolvent operator associate to H. Let $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ be a compact symmetric operator. Suppose that there is $u \in \mathcal{U}$ and $s > 1/2$ such that V is of class $\Lambda^{s+1/2}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$. Then the limits*

$$R(\lambda \pm \mathrm{i}0) := \text{w*-}\lim_{\mu \downarrow 0} R(\lambda \pm i\mu) \tag{4.5}$$

exist, locally uniformly in $\lambda \in (0, +\infty)$ outside the eigenvalues of H. Moreover, the functions

$$\lambda \mapsto R(\lambda \pm \mathrm{i}0) \in B(\mathcal{H}^{-1}_s, \mathcal{H}^1_{-s}) \tag{4.6}$$

are locally of class $\Lambda^{s-1/2}$ on $(0, +\infty)$ outside the eigenvalues of H.

Since $\Lambda^{s+1/2}(A_u) \subset C^1_{\mathrm{u}}(A_u)$ for all $s > 1/2$, by combining Theorems 4.2.2, 4.2.4 and 4.2.5, we have the following

Corollary 4.2.6. *Let $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ be a compact symmetric potential and $s > 1/2$. If there is $u \in \mathcal{U}$ such that V is of class $\Lambda^{s+1/2}(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$, and if (4.4) is satisfied, then the limits*

$$R(\lambda \pm \mathrm{i}0) := \text{w*-}\lim_{\mu \downarrow 0} R(\lambda \pm i\mu) \tag{4.7}$$

exist locally uniformly in $\lambda \in (0, +\infty)$ and

$$\lambda \mapsto R(\lambda \pm i0) \in B(\mathcal{H}^{-1}_s, \mathcal{H}^1_{-s}) \tag{4.8}$$

are of class $\Lambda^{s-1/2}$ on $(0, +\infty)$.

The paper is organized as follows. In Section 4.3, we will give some notations and we recall some basic fact about regularity. In Section 4.4, we will prove Theorem 4.2.1 and Theorem 4.2.2. In Section 4.5, we will prove Theorem 4.2.3 and Theorem 4.2.4. In Section 4.6, we will give some explicit classes of potential for which we can apply our main results. Finally in Appendix 4.7, we will recall the Helffer-Sjöstrand formula and some properties of this formula that we will use in the proof of our main Theorems.

4.3 Notations and basic notions

4.3.1 Notation

Let $X = \mathbb{R}^\nu$ and for $s \in \mathbb{R}$ let $\mathcal{H}^s$ be the usual Sobolev space on X with $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H} = L^2(X)$ whose norm is denoted $\|\cdot\|$. We are mainly interested in the space $\mathcal{H}^1$ defined by the norm $\|f\|_1^2 = \int \left(|f(x)|^2 + |\nabla f(x)|^2\right) \mathrm{d}x$ and its dual space $\mathcal{H}^{-1}$.

We denote q_j the operator of multiplication by the coordinate x_j and $p_j = -\mathrm{i}\partial_j$ considered as operators in $\mathcal{H}$. For $k \in X$ we denote $k \cdot q = k_1 q_1 + \cdots + k_\nu q_\nu$. If u is a measurable function on X let $u(q)$ be the operator of multiplication by u in $\mathcal{H}$ and $u(p) = \mathcal{F}^{-1} u(q) \mathcal{F}$, where $\mathcal{F}$ is the Fourier transformation:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{\nu}{2}} \int \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} u(x) \mathrm{d}x.$$

If there is no ambiguity we keep the same notation for these operators when considered as acting in other spaces. If u is a C^∞ vector fields with all the derivates bounded, we denote by A_u the symmetric operator:

$$A_u = \frac{1}{2}(q \cdot u(p) + u(p) \cdot q) = u(p) \cdot q + \frac{i}{2}(\mathrm{div} u)(p). \tag{4.9}$$

Notice that A_u is essentially self-adjoint (see [ABdMG96, Proposition 4.2.3]). Since we will use vector fields u which have a particular form, we use the space $\mathcal{U}$ define by

Definition 4.3.1. *We define $\mathcal{U}$ the space of C^∞ vector fields u with all derivates bounded such that there is a strictly positive bounded function $\lambda : X \to \mathbb{R}$ of class C^∞ with $u(x) = x\lambda(x)$ for all $x \in X$.*

Let $A_D = \frac{1}{2}(p \cdot q + q \cdot p)$ be the generator of dilations.

As usual, we denote $\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$. Then $\langle q \rangle$ is the operator of multiplication by the function $x \mapsto \langle x \rangle$ and $\langle p \rangle = \mathcal{F}^{-1}\langle q \rangle \mathcal{F}$. For real s, t we denote $\mathcal{H}_s^t$ the space defined by the norm

$$\|f\|_{\mathcal{H}_s^t} = \|\langle q \rangle^s f\|_{\mathcal{H}^t} = \|\langle p \rangle^t \langle q \rangle^s f\|. \tag{4.10}$$

Note that the norm $\|f\|_{\mathcal{H}_s^t}$ is equivalent to the norm $\|\langle q \rangle^s \langle p \rangle^t f\|$ and that the adjoint space of $\mathcal{H}_s^t$ may be identified with $\mathcal{H}_{-s}^{-t}$.

We denote $\Delta = p^2$ the non negative Laplacian operator, i.e. for all $\phi \in \mathcal{H}^2$, we have

$$\Delta \phi = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}.$$

For I a Borel subset of $\mathbb{R}$, we denote $E(I)$ the spectral mesure of H on I.

Definition 4.3.2. *Let A be a self adjoint operator on $L^2(\mathbb{R}^\nu)$. Assume that H is of class $C^1(A)$. We say that H satisfies the Mourre estimate at λ_0 with respect to the conjugate operator A if there exists a non-empty open set I containing λ_0, a real $c_0 > 0$ and a compact operator K_0 such that*

$$E(I)[H, iA]E(I) \geqslant c_0 E(I) + K_0 \tag{4.11}$$

We denote $\mathcal{E}_u(H)$ the complement of the set of λ_0 for which the Mourre estimate is satisfied with respect to A_u.

In the Helffer-Sjöstrand formula (Appendix 4.7), there is a term of rest which appears. To control it we define the following space of application:

Definition 4.3.3. *For $\rho \in \mathbb{R}$, let $\mathcal{S}^\rho$ be the class of the function $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{C})$ such that*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad C_k(\varphi) := \sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^\nu \\ |\alpha| = k}} \langle t \rangle^{-\rho+k} |\partial_t^\alpha \varphi(t)| < \infty. \tag{4.12}$$

Note that C_k define a semi-norm for all k.

4.3.2 Regularity

Let F', F'' be to Banach space and $T : F' \to F''$ a bounded operator.

Let A a self-adjoint operator such that the unitary group generated by A leaves F' and F'' invariants.

Let $k \in \mathbb{N}$. We said that $T \in C^k(A, F', F'')$ if, for all $f \in F'$, the map $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{itA} T e^{-itA} f$ has the usual C^k regularity.

We said that $T \in C^k_{\mathrm{u}}(A, F', F'')$ if $T \in C^k(A, F', F'')$ and all the derivatives of the map $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{itA} T e^{-itA} f$ are norm-continuous function. The following characterisation is available:

Proposition 4.3.4 (Proposition 5.1.2, [ABdMG96])**.** *$T \in C^1(A, F', F'')$ if and only if $[T, A] = TA - AT$ has an extension in $\mathcal{B}(F', F'')$.*

For $k > 1$, $T \in C^k(A, F', F'')$ if and only if $T \in C^1(A, F', F'')$ and $[T, A] \in C^{k-1}(A, F', F'')$.

We can defined another class of regularity called the $C^{1,1}$ regularity:

Proposition 4.3.5. *We said that $T \in C^{1,1}(A, F', F'')$ if and only if*

$$\int_0^1 \|T_\tau + T_{-\tau} - 2T\|_{\mathcal{B}(F',F'')} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} < \infty,$$

where $T_\tau = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau A_u} T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau A_u}$.

An easier result can be used:

Proposition 4.3.6 (Proposition 7.5.7 from [ABdMG96])**.** *Let A be a self-adjoint operator. Let $\mathcal{G}$ be a Banach space and let Λ be a closed densely defined operator in $\mathcal{G}^*$ with domain included in $\mathcal{D}(A, \mathcal{G}^*)$ and such that $-ir$ belongs to the resolvent set of Λ and $r\|(\Lambda + ir)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{G}^*)} \leqslant C \in \mathbb{R}$ for all $r > 0$. Let $\xi \in C^\infty(X)$ such that*
$\xi(x) = 0$ if $|x| < 1$ and $\xi(x) = 1$ if $|x| > 2$. If $T : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ is symmetric, of class $C^1(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ and satisfies

$$\int_1^\infty \|\xi(\Lambda/r)[T, iA]\|_{\mathcal{B}(\mathcal{G},\mathcal{G}^*)} \frac{\mathrm{d}r}{r} < \infty$$

then T is of class $C^{1,1}(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$.

If T is not bounded, we said that $T \in C^k(A, F', F'')$ if for $z \notin \sigma(T)$,
$(T - z)^{-1} \in C^k(A, F'', F')$.

Proposition 4.3.7. *For all $k > 1$, we have*

$$C^k(A, F', F'') \subset C^{1,1}(A, F', F'') \subset C^1_{\mathrm{u}}(A, F', F'') \subset C^1(A, F', F'').$$

If $F' = F'' = \mathcal{H}$ is an Hilbert space, we note $C^1(A) = C^1(A, \mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$. If T is self-adjoint, we have the following:

Theorem 4.3.8 (Theorem 6.3.4 from [ABdMG96])**.** *Let A and T be two self-adjoint operators in a Hilbert space $\mathcal{H}$. Assume that the unitary group $\{\exp(iA\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ leaves the domain $D(T)$ of T invariant. Set $\mathcal{G} = D(T)$. Then*

1. *T is of class $C^1(A)$ if and only if $T \in C^1(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$.*
2. *T is of class $C^{1,1}(A)$ if and only if $T \in C^{1,1}(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$.*

Remark that, if $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ is not bounded, since $T : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ is bounded, in general, it is easier to prove that $T \in C^1(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ than $T \in C^1(A)$.

If $\mathcal{G}$ is the form domain of H, we have the following:

Proposition 4.3.9 (see p. 258 of [ABdMG96])**.** *Let A and T be self-adjoint operator in a Hilbert space $\mathcal{H}$. Assume that the unitary group $\{\exp(iA\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ leaves the form domain $\mathcal{G}$ of T invariant. Then*

1. *T is of class $C^k(A)$ if $T \in C^k(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$, for all $k \in \mathbb{N}$.*
2. *T is of class $C^{1,1}(A)$ if $T \in C^{1,1}(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$.*

As previously, since $T : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ is always bounded, it is, in general, easier to prove that $T \in C^k(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ than $T \in C^k(A)$.

Now we will recall the *Hölder-Zygmund continuity classes* of order $s \in (0, \infty)$. Let $\mathcal{E}$ be a Banach space and $F : \mathbb{R} \to \mathcal{E}$ a continuous function. If $0 < s < 1$ then F is of class Λ^s if F is Hölder continuous of order s. If $s = 1$ then F is of class Λ^1 if it is of Zygmund class, i.e. $\|F(t+\varepsilon) + F(t-\varepsilon) - 2F(t)\| \leqslant C\varepsilon$ for all real t and $\varepsilon > 0$. If $s > 1$, let us write $s = k + \sigma$ with $k \geqslant 1$ integer and $0 < \sigma \leqslant 1$; then F is of class Λ^s if F is k times continuously differentiable and $F^{(k)}$ is of class Λ^σ. We said that $V \in \Lambda^s(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ if the function $\tau \mapsto V_\tau = e^{i\tau A_u} V e^{-i\tau A_u} \in \mathscr{B}(\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ is of class Λ^s. Remark that, if $s \geqslant 1$ is an integer, $C^s(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1}) \subset \Lambda^s(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.

4.4 Sub-exponential bounds on possible eigenvectors

In this section we will prove Theorem 4.2.1 and Theorem 4.2.2.

4.4.1 The operator version

Our proof of Theorem 4.2.1 closely follows the one of Theorem 2.1 in [FH82]. Therefore, we focus on the main changes. We will use notations of Theorem 4.2.1.

For $\epsilon > 0$ and $\tau > 0$, define the real valued functions F and g by

$$F(x) = \tau \ln\Big(\langle x\rangle(1+\epsilon\langle x\rangle)^{-1}\Big) \text{ and } \nabla F(x) = xg(x). \tag{4.13}$$

Let $E \in \mathbb{R}$ and $\psi \in \mathcal{D}(H)$ such that $H\psi = E\psi$. Let $\psi_F = \exp(F)\psi$. On the domain of H, we consider the operator

$$H(F) = e^F He^{-F} = H - (\nabla F)^2 + (ip\nabla F + i\nabla F p). \tag{4.14}$$

As in [FH82], $\psi_F \in \mathcal{D}(\Delta) = \mathcal{D}(H(F))$,

$$H(F)\psi_F = E\psi_F \tag{4.15}$$

$$\text{and } (\psi_F, H\psi_F) = (\psi_F, ((\nabla F)^2 + E)\psi_F). \tag{4.16}$$

If we suppose in addition that

$$\langle q\rangle^{\beta\tau} \exp(\alpha\langle q\rangle^{\beta})\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu) \tag{4.17}$$

for all τ and some fixed $\alpha \geqslant 0$, $0 < \beta < 1$, then (4.15) and (4.16) holds true for the new functions F and g given by

$$F(x) = \alpha\langle x\rangle^{\beta} + \tau\ln(1+\gamma\langle x\rangle^{\beta}\tau^{-1}) \text{ and } \nabla F(x) = xg(x) \tag{4.18}$$

for all $\gamma > 0$ and $\tau > 0$.

To replace Formula (2.9) in [FH82], we prove the following

Lemma 4.4.1. *Suppose that V is Δ-compact. Let $u \in \mathcal{U}$. Assume that $H = \Delta + V$ is of class $C^1(A_u)$. For both definitions of F and g, we have*

$$\begin{aligned}(\psi_F, [H, iA_u]\psi_F) &= (\psi_F, [(\nabla F)^2 - q\cdot\nabla g, iA_u]\psi_F)\\ &\quad -4\Big\|\lambda(p)^{1/2}g^{1/2}A_D\psi_F\Big\|^2 - 2\Re\Big(gA_D\psi_F, i\nabla\lambda(p)\cdot p\psi_F\Big)\\ &\quad +4\Re\Big([g^{1/2},\lambda(p)]g^{1/2}A_D\psi_F, A_D\psi_F\Big).\end{aligned} \tag{4.19}$$

We make some remarks about this Lemma:

(a) In the case (4.13), note that $\langle x\rangle g^{1/2}(x)$ is bounded. Thus $\Big\|\lambda(p)^{1/2}g^{1/2}A_D\psi_F\Big\|$ is well defined.

(b) In the case (4.18), suppose that (4.17) is true for all τ and some fixed $\alpha \geqslant 0$, $0 < \beta < 1$, we have

$$\begin{aligned}A_D\psi_F &= p\cdot q\psi_F + \frac{i}{2}\psi_F\\ &= p\cdot\frac{q}{\langle q\rangle}\langle q\rangle\Big(1+\gamma\langle q\rangle^{\beta}\tau^{-1}\Big)^{\tau}\exp(\alpha\langle q\rangle^{\beta})\psi + \frac{i}{2}\psi_F.\end{aligned}$$

Thus, $\psi_F \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ and

$$\langle q\rangle\Big(1+\gamma\langle q\rangle^\beta\tau^{-1}\Big)^\tau \exp(\alpha\langle q\rangle^\beta)\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu).$$

Moreover, since $H\psi = E\psi$ and ∇F is bounded for all $\tau > 0$, we can show that

$$\langle q\rangle\Big(1+\gamma\langle q\rangle^\beta\tau^{-1}\Big)^\tau \exp(\alpha\langle q\rangle^\beta)\psi \in \mathcal{H}^1.$$

Thus $\Big\|\lambda(p)^{1/2}g^{1/2}A_D\psi_F\Big\|$ is well defined.

(c) If $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact and $V \in C^1(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$, Lemma 4.4.1 is still true with the same proof.

Proof. [Lemma 4.4.1] Since V is of class $C^1(A_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ whith $\mathcal{G} = \mathcal{H}^2$ if V is Δ-compact, $\mathcal{G} = \mathcal{H}^1$ if $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact, by a simple computation, we can show that $e^F\Delta e^{-F}$ is of class $C^1(A_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$, which implies that $H(F) = e^F\Delta e^{-F} + V$ is of class $C^1(A_u, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$. For $\phi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A_u)$, we have

$$\begin{aligned}(\phi, [H, iA_u]\phi) &= (\phi, [(H - H(F)), iA_u]\phi) + (\phi, [H(F), iA_u]\phi)\\ &= ((H - H(F))\phi, iA_u\phi) - (A_u\phi, i(H - H(F))\phi)\\ &\quad +(\phi, [H(F), iA_u]\phi)\end{aligned}$$

By using (4.14) and (4.15), we have:

$$(H - H(F))\phi = ((\nabla F)^2 - (ip\nabla F + i\nabla Fp))\phi$$

A simple computation gives

$$(ip\nabla F + i\nabla Fp)\phi = i(p(qg) + (qg)p)\phi = q\cdot\nabla g\phi + 2igA_D\phi$$

We have

$$(H - H(F))\phi = ((\nabla F)^2 - q\cdot\nabla g - 2igA_D)\phi$$

thus

$$\begin{aligned}(\phi, [H, iA_u]\phi) = (\phi, [(\nabla F)^2 - q\cdot\nabla g, iA_u]\phi)&\\ - (2gA_D\phi, A_u\phi) - (A_u\phi, 2gA_D\phi) + (\phi, [H(F), iA_u]\phi)&\end{aligned} \tag{4.20}$$

Since $u(x) = x\lambda(x)$,

$$A_u = \frac{1}{2}(\lambda(p)p\cdot q + q\cdot\lambda(p)p) = \lambda(p)A_D + \frac{1}{2}[q, \lambda(p)]p$$

Using the Fourier transform, we see that $[q, \lambda(p)] = i\nabla\lambda(p)$.

Therefore

$$A_u = \lambda(p)A_D + \frac{i}{2}\nabla\lambda(p)\cdot p$$

which implies

$$\begin{cases}(2gA_D\phi, A_u\phi) = (2gA_D\phi, \lambda(p)A_D\phi) + (2gA_D\phi, \frac{i}{2}\nabla\lambda(p)\cdot p\phi)\\ (A_u\phi, 2gA_D\phi) = (\lambda(p)A_D\phi, 2gA_D\phi) + (\frac{i}{2}\nabla\lambda(p)\cdot p\phi, 2gA_D\phi)\end{cases}$$

By sum, we get

$$\begin{aligned}(2gA_D\phi, A_u\phi) + (A_u\phi, 2gA_D\phi) &= 2(A_D\phi, (g\lambda(p) + \lambda(p)g)A_D\phi)\\ &\quad +(gA_D\phi, i\nabla\lambda(p)\cdot p\phi)\\ &\quad +(i\nabla\lambda(p)\cdot p\phi, gA_D\phi).\end{aligned}$$

Since g and λ are positive,

$$g\lambda(p)+\lambda(p)g = 2g^{1/2}\lambda(p)^{1/2}\lambda(p)^{1/2}g^{1/2}+g^{1/2}[g^{1/2},\lambda(p)]+[\lambda(p),g^{1/2}]g^{1/2}.$$

This yields

$$\begin{aligned}(A_D\phi,(g\lambda(p)+\lambda(p)g)A_D\phi) &= 2\left\|\lambda(p)^{1/2}g^{1/2}A_D\phi\right\|^2\\ &\quad +2\Re\Big(g^{1/2}A_D\phi,[g^{1/2},\lambda(p)]A_D\phi\Big).\end{aligned}$$

So from (4.20), we obtain

$$\begin{aligned}(\phi,[H,iA_u]\phi) &= (\phi,[(\nabla F)^2-q\cdot\nabla g,iA_u]\phi)\\ &\quad -4\left\|\lambda(p)^{1/2}g^{1/2}A_D\phi\right\|^2-2\Re\Big(gA_D\phi,i\nabla\lambda(p)\cdot p\phi\Big)\\ &\quad -4\Re\Big(g^{1/2}A_D\phi,[g^{1/2},\lambda(p)]A_D\phi\Big)+(\phi,[H(F),iA_u]\phi).\end{aligned}\tag{4.21}$$

Remark that if F satisfies (4.13), since $\langle q\rangle g^{1/2}$ is bounded, all operators which appears on the right hand side of (4.21) are bounded in the $\mathcal{H}^1$ norm. In particular, this equation can be extended to a similar equation for $\phi\in\mathcal{G}\subset\mathcal{H}^1$. Thus, since $\psi_F\in\mathcal{G}$, we obtain a similar equation by replacing ϕ by ψ_F.

If F satisfies (4.18), we can see that all operators which appears on the right hand side of (4.21) are bounded in the $\mathcal{H}^1_1$ norm. In particular, this equation can be extended to a similar equation for $\phi\in\mathcal{H}^2_1$ if V is Δ-compact, $\phi\in\mathcal{H}^1_1$ if $V:\mathcal{H}^1\to\mathcal{H}^{-1}$ is compact.

In all cases, since, by the Virial theorem and (4.15), $(\psi_F,[H(F),iA_u]\psi_F)=0$, we obtain (4.19). □

Since in (4.19), we do not know an explicit form for the commutator $[(\nabla F)^2-q\cdot\nabla g,iA_u]$, as in [FH82], we need to control the size of this expression.

Lemma 4.4.2. *Let $f:\mathbb{R}^\nu\to\mathbb{R}$ be a C^∞ application such that $f\in\mathcal{S}^\rho$.*
Then $\langle q\rangle^{-\rho}[f(q),iA_u]$ is bounded for all C^∞ vector fields u with bounded derivatives.

Proof. Suppose that $f\in\mathcal{S}^\rho$. Then

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad \sup_{t\in\mathbb{R}^\nu}\{\langle t\rangle^{-\rho+k}|\partial_t^\alpha f(t)|\}<\infty$$

for all α multi-index such that $|\alpha|=k$.

Since $[f(q),q]=0$ and

$$A_u=q\cdot u(p)-\frac{i}{2}div(u)(p),$$

we have

$$[f(q),iA_u]=[f(q),iq\cdot u(p)+\frac{1}{2}div(u)(p)]=iq\cdot[f(q),u(p)]+\frac{1}{2}[f(q),div(u)(p)]\tag{4.22}$$

By using the Helffer-Sjöstrand formula on $[f(q),u(p)]$, with $B=q$, $T=u(p)$ and $\varphi(x)=f(x)$, we have:

$$[f(q),u(p)]=i\nabla f(q)div(u)(p)+I_2\tag{4.23}$$

where I_2 is the rest of the development of order 2 in (4.51). Similarly,

$$[f(q),div(u)(p)]=i\nabla f(q)\nabla div(u)(p)+I_2'\tag{4.24}$$

So, from (4.22), we have

$$[f(q), iA_u] = -q \cdot \nabla f(q) div(u)(p) - q \cdot I_2 + \frac{i}{2}\nabla f(q)\nabla div(u)(p) + I_2' \tag{4.25}$$

From Proposition 4.7.3, we deduce, since $f \in \mathcal{S}^\rho$, that $\langle q\rangle^s I_2$ and $\langle q\rangle^s I_2'$ are bounded if $s < -\rho + 2$. Moreover, since $f \in \mathcal{S}^\rho$, $\langle x\rangle^{-\rho+1}\nabla f(x)$ is bounded, and we conclude that $\langle q\rangle^{-\rho} q \cdot \nabla f(q)$ is bounded. Since, by assumptions, $div(u)(p)$ and $\nabla div(u)(p)$ are bounded, by sum, $\langle q\rangle^{-\rho}[f(q), iA_u]$ is bounded. □

Proof. [Theorem 4.2.1] Suppose that $E \notin \mathcal{E}_u(H)$.

Let $F(x) = \tau \ln(\langle x\rangle(1 + \epsilon\langle x\rangle)^{-1})$ and $\Psi_\epsilon = \psi_F/\|\psi_F\|$.

Following [FH82, equations (2.11) and (2.12)], we can prove that $\nabla\Psi_\epsilon$ is bounded and that $(\Delta + 1)\Psi_\epsilon$ converges weakly to zero as $\epsilon \to 0$. Thus, for all $\eta > 0$, since $\langle q\rangle^{-\eta}(\Delta + 1)^{-1}$ is compact, $\|\langle q\rangle^{-\eta}\Psi_\epsilon\|$ converges to 0 and, similarly, $\|\langle q\rangle^{-\eta}\nabla\Psi_\epsilon\|$ converges to 0.

From Lemma 4.4.1, we deduce that

$$\begin{aligned}\Big(\Psi_\epsilon, [H, iA_u]\Psi_\epsilon\Big) \quad &\leqslant \quad \Big(\Psi_\epsilon, [(\nabla F)^2 - q \cdot \nabla g, iA_u]\Psi_\epsilon\Big) \\ &\quad -2\Re\Big(gA_D\psi_F, i\nabla\lambda(p) \cdot p\psi_F\Big) \\ &\quad -2\Re\Big(gA_D\Psi_\epsilon, i\nabla\lambda(p) \cdot p\Psi_\epsilon\Big).\end{aligned} \tag{4.26}$$

Since $((\nabla F)^2 - q \cdot \nabla g)$ is in $\mathcal{S}^{-2}$, by Lemma 4.4.2, we have $\langle q\rangle^2[(\nabla F)^2 - q \cdot \nabla g, iA_u]$ is bounded. Thus the first term on right side of (4.26) converges to zero as $\epsilon \to 0$. By assumptions, $\nabla\lambda(p) \cdot p$ is bounded. Since $\nabla\Psi_\epsilon$ is bounded, $\langle q\rangle^{-1}A_D\Psi_\epsilon$ is bounded and , for all $\mu > 0$, $\|\langle q\rangle^{-1-\mu}A_D\Psi_\epsilon\|$ converges to zero as $\epsilon \to 0$. Thus, since $\langle q\rangle^2 g$ is bounded, the last term on the right side of (4.26) converges to zero as $\epsilon \to 0$.

Moreover, by the Helffer-Sjostrand formula, we have

$$[g^{1/2}, \lambda(p)] = -i\nabla(g^{1/2})\nabla\lambda(p) + I$$

with $\langle q\rangle I\langle q\rangle^{s'}$ bounded for $s' < 1$. In particular, $\langle q\rangle[g^{1/2}, \lambda(p)]\langle q\rangle^{s'}$ is bounded for all $s' < 1$. Thus,

$$\left\|\langle q\rangle[g^{1/2}, \lambda(p)]g^{1/2}A_D\Psi_\epsilon\right\| = \left\|\langle q\rangle[g^{1/2}, \lambda(p)]g^{1/2}\langle q\rangle^{3/2}\langle q\rangle^{-3/2}A_D\Psi_\epsilon\right\|,$$

and since $\langle q\rangle g^{1/2}$ is bounded, the second term on the right side of (4.26) converges to zero as $\epsilon \to 0$.

Thus, we deduce that

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\Big(\Psi_\epsilon, [H, iA_u]\Psi_\epsilon\Big) \leqslant 0.$$

We follow [FH82, equations (2.16) to (2.19)]to prove that, if $E \notin \mathcal{E}_u(H)$, then

$$\langle x\rangle^\tau\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu) \qquad \forall\tau > 0.$$

Suppose now that the Theorem 4.2.1 is false so that

$$S_E = \alpha_1^2 + E \tag{4.27}$$

where $\alpha_1 > 0$ and $S_E \notin \mathcal{E}_u(H)$. By definition of $\mathcal{E}_u(H)$, we have (4.11) for some $\delta > 0$, some $c_0 > 0$ and some compact operator K_0 with $I = [S_E - \delta, S_E + \delta]$.

As in [FH82, equations (2.22) and (2.23)], let $\alpha \in (0, \alpha_1)$ such that

$$\alpha^2 + E \in [S_E - \delta/2, S_E + \delta/2].$$

Let $0 < \beta < 1$. We have for all $\tau > 0$

$$\langle x\rangle^{\beta\tau} \exp(\alpha\langle x\rangle^{\beta})\psi \in L^2(\mathbb{R}^{\nu}). \tag{4.28}$$

Suppose $\gamma > 0$ such that $\alpha + \gamma > \alpha_1$. So we have

$$\| \exp((\alpha + \gamma)\langle x\rangle^{\beta})\psi\| = +\infty. \tag{4.29}$$

In the following, we suppose that γ is sufficiently small, $\gamma \in (0, 1]$. We denote by b_j, $j = 1, 2, \cdots$ constants which are independant of α, γ and τ.

Let $F(x) = \alpha\langle x\rangle^{\beta} + \tau \ln(1 + \gamma\langle x\rangle^{\beta}\tau^{-1})$ and $\psi_F = \exp(F)\psi$, $\Psi_\tau = \psi_F/\|\psi_F\|$.

By a simple estimate, we have $|x\nabla g(x)| \leqslant b_1\langle x\rangle^{\beta-2}$ and

$$(\nabla F)^2(x) \leqslant (\alpha + \gamma)^2\langle x\rangle^{2\beta-2} \leqslant (\alpha + \gamma)^2.$$

As previously, (4.26) is true. Since $((\nabla F)^2 - q\cdot\nabla g)$ is in $\mathcal{S}^{2\beta-2}$, by Lemma 4.4.2, we have $\langle q\rangle^{2-2\beta}[(\nabla F)^2 - q \cdot \nabla g, iA_u]$ is bounded. Therefore, the first term on right side of (4.26) converges to zero as $\tau \to \infty$. By assumptions, $\nabla\lambda(p) \cdot p$ is bounded. As previously $\langle q\rangle^{-1}A_D\Psi_\tau$ is bounded and , for all $\mu > 0$, $\|\langle q\rangle^{-1-\mu}A_D\Psi_\tau\|$ converges to zero as $\tau \to +\infty$. Thus, since $\langle q\rangle^{2-\beta}g$ is bounded, the last term on the right side of (4.26) converges to zero as $\tau \to +\infty$.

Moreover, by the Helffer-Sjostrand formula, we have

$$[g^{1/2}, \lambda(p)] = -i\nabla(g^{1/2})\nabla\lambda(p) + I$$

with $\langle q\rangle^{s}I\langle q\rangle^{s'}$ bounded for $s < 2$, $s' < 1$ and $s + s' < 3 - \frac{\beta}{2}$.
In particular, $\langle q\rangle^{1}[g^{1/2}, \lambda(p)]\langle q\rangle^{1/2}$ is bounded. Thus,

$$\left\|\langle q\rangle[g^{1/2}, \lambda(p)]g^{1/2}A_D\Psi_\epsilon\right\| = \left\|\langle q\rangle[g^{1/2}, \lambda(p)]\langle q\rangle^{1/2}g^{1/2}\langle q\rangle^{-1/2}A_D\Psi_\epsilon\right\|,$$

and since $\langle q\rangle^{1-\frac{\beta}{2}}g^{1/2}$ is bounded, the second term on the right side of (4.26) converges to zero as $\tau \to +\infty$.

Thus, we deduce that

$$\limsup_{\tau\to\infty}\Big(\Psi_\tau, [H, iA_u]\Psi_\tau\Big) \leqslant 0.$$

As in [FH82], we have

$$\limsup_{\tau\to+\infty}\|(H - E - (\nabla F)^2)\Psi_\tau\| = \limsup_{\tau\to+\infty}\|(p\cdot\nabla F + \nabla F\cdot p)\Psi_\tau\|$$

and by a simple computation, we have

$$p\cdot\nabla F + \nabla F\cdot p = 2\nabla F\cdot p + i\Delta F$$

and we have

$$\|(2\nabla F\cdot p + i\Delta F)\Psi_\tau\| \leqslant 2\|\nabla F\cdot\nabla\Psi_\tau\| + \|\Delta F\Psi_\tau\|.$$

Since $|\nabla F|(x) \leqslant b_3\langle x\rangle^{\beta-1}$ and $|\Delta F|(x) \leqslant b_4\langle x\rangle^{\beta-2}$,

$$\limsup_{\tau\to+\infty}\|(H - E - (\nabla F)^2)\Psi_\tau\| = 0$$

which implies that

$$\limsup_{\tau\to+\infty}\|(H - E - \alpha^2)\Psi_\tau\| \leqslant b_5\gamma$$

By following [FH82, equations (2.37) to (2.41)], we deduce that

$$\liminf_{\tau\to\infty}(\Psi_\tau, E(I)[H, iA_u]E(I)\Psi_\tau) \geqslant c_0(1-(b_6\gamma)^2). \tag{4.30}$$

Moreover, since

$$\limsup_{\tau\to\infty}(\Psi_\tau, [H, iA_u]\Psi_\tau) \leqslant 0,$$

we have

$$\limsup_{\tau\to\infty}(\Psi_\tau, E(I)[H, iA_u]E(I)\Psi_\tau) \leqslant b_7\gamma. \tag{4.31}$$

From (4.30) and (4.31), we have

$$c_0(1-(b_6\gamma)^2) \leqslant b_7\gamma.$$

Since c_0 is a fixed positive number, we have a contradiction for all small enough $\gamma > 0$. Thus the theorem is proved. □

4.4.2 The form version

If we only suppose that $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded with bound less than one, we have the following

Proof. [Theorem 4.2.2] Suppose that $E \notin \mathcal{E}_u(H)$. We denote $C_i > 0$ constant independant of ϵ.

Let $F(x) = \tau\ln(\langle x\rangle(1+\epsilon\langle x\rangle)^{-1})$ and $\Psi_\epsilon = \psi_F/\|\psi_F\|$. As in [FH82], we can prove that for any bounded set B

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_B |\Psi_\epsilon|^2 d^n x = 0.$$

By a simple calculus, we have

$$\nabla\psi_F = \nabla F\psi_F + e^F\nabla\psi.$$

So, for any bounded set B, since ∇F and e^F are uniformly bounded in ϵ on B, we have

$$\begin{aligned}
\left(\int_B |\nabla\Psi_\epsilon|^2 d^n x\right)^{1/2} &\leqslant \left(\int_B |\nabla F\Psi_\epsilon|^2 d^n x\right)^{1/2} + \left(\int_B |e^F\nabla\psi|^2 d^n x\right)^{1/2}\|\psi_F\|^{-1} \\
&\leqslant C_1\left(\int_B |\Psi_\epsilon|^2 d^n x\right)^{1/2} + C_2\left(\int_B |\nabla\psi|^2 d^n x\right)^{1/2}\|\psi_F\|^{-1} \\
&\leqslant C_1\left(\int_B |\Psi_\epsilon|^2 d^n x\right)^{1/2} + C_2\left(\int_{\mathbb{R}^\nu} |\nabla\psi|^2 d^n x\right)^{1/2}\|\psi_F\|^{-1}.
\end{aligned}$$

Since $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded with bound less than one, we have

$$H + 1 = \langle p\rangle(1 + \langle p\rangle^{-1}V\langle p\rangle^{-1})\langle p\rangle$$

which implies that

$$\langle p\rangle\psi = (1+\langle p\rangle^{-1}V\langle p\rangle^{-1})^{-1}\langle p\rangle^{-1}(H+1)\psi = (E+1)(1+\langle p\rangle^{-1}V\langle p\rangle^{-1})^{-1}\langle p\rangle^{-1}\psi$$

and so,

$$\|\nabla\psi\| = \|\frac{p}{\langle p\rangle}\langle p\rangle\psi\| \leqslant C_3\|\psi\|.$$

All of this implies that

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_B |\nabla\Psi_\epsilon|^2 d^n x = 0.$$

Moreover, since $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded with bound less than one, there is $0 < a < 1$ and $0 < b$ such that
$$|(\Psi_\epsilon, V\Psi_\epsilon)| \leqslant a\|\nabla\Psi_\epsilon\|^2 + b.$$
So, by (4.16), we have
$$(1-a)\|\nabla\Psi_\epsilon\|^2 - b \leqslant (\Psi_\epsilon, H\Psi_\epsilon) \leqslant (E+\tau^2).$$
So $\|\nabla\Psi_\epsilon\|$ is bounded as $\epsilon \to 0$ and with a similar argument, $\|\langle p\rangle\Psi_\epsilon\|$ is bounded as $\epsilon \to 0$ So, for all $N > 0$, if χ_N is the characteristic function of $\{x : \langle x\rangle \leqslant N\}$, we have
$$\begin{aligned}\|\nabla F\nabla\Psi_\epsilon\| &\leqslant \|\chi_N\nabla F\nabla\Psi_\epsilon\| + \|(1-\chi_N)\nabla F\nabla\Psi_\epsilon\| \\ &\leqslant C_4\|\chi_N\nabla\Psi_\epsilon\| + \tau N^{-1}\|\nabla\Psi_\epsilon\|.\end{aligned}$$
Since this inequality is true for all $N > 0$ and $\|\nabla\Psi_\epsilon\|$ is bounded as $\epsilon \to 0$,
$$\lim_{\epsilon\to 0}\|\nabla F\nabla\Psi_\epsilon\| = 0$$
and as in [FH82, equation (2.13)], we deduce that
$$\lim_{\epsilon\to 0}\|(H-E)\Psi_\epsilon\| = 0$$
which implies
$$\begin{cases}\lim_{\epsilon\to 0}\|E(\mathbb{R}\backslash I)\Psi_\epsilon\| = 0 \\ \lim_{\epsilon\to 0}\|(H+i)E(\mathbb{R}\backslash I)\Psi_\epsilon\| = 0\end{cases}.$$
As previously, by writing $\langle p\rangle = (1+\langle p\rangle^{-1}V\langle p\rangle^{-1})^{-1}\langle p\rangle^{-1}(H+1)$, we deduce that
$$\lim_{\epsilon\to 0}\|\langle p\rangle E(\mathbb{R}\backslash I)\Psi_\epsilon\| = 0.$$
So if $f_1(\epsilon) = (\Psi_\epsilon, E(\mathbb{R}\backslash I)[H, iA_u]\Psi_\epsilon)$, we have
$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}|f_1(\epsilon)| &\leqslant \lim_{\epsilon\to 0}\|\langle p\rangle E(\mathbb{R}\backslash I)\Psi_\epsilon\|\cdot\|\langle p\rangle^{-1}[H, iA_u]\langle p\rangle^{-1}\|\cdot\|\langle p\rangle\Psi_\epsilon\| \\ &= 0\end{aligned}$$
and simlarly with $f_2(\epsilon) = (\Psi_\epsilon, E(I)[H, iA_u]E(\mathbb{R}\backslash I)\Psi_\epsilon)$. Remark that we can prove similar things with $F(x) = \alpha\langle x\rangle^\beta + \tau\ln(1+\gamma\langle x\rangle\tau^{-1})$. Thus, by using a similar proof than for Theorem 4.2.1, Theorem 4.2.2 is proved. □

4.5 Possible eigenvectors can not satisfies sub-exponential bounds

In this section, we will prove Theorem 4.2.3 and Theorem 4.2.4.

Proof. [Theorem 4.2.3] In this proof, we will follow the method used in [CFKS08, Theorem 4.18].

Suppose that Theorem 4.2.3 is false: there is $\psi \neq 0$ such that
$$\exp(\alpha\langle x\rangle^\beta)\psi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$$
for all $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ and $H\psi = E\psi$ with $E > 0$. For $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, let $F_\beta(x) = \alpha\langle x\rangle^\beta$. As previously, we denote $\psi_F = \exp(F_\beta(q))\psi$ and $xg_\beta(x) = \nabla F_\beta(x)$. By direct calculation, we have $\nabla F_\beta(x) = \alpha\beta x\langle x\rangle^{\beta-2}$ and
$$\begin{cases}|\nabla F_\beta|^2 = \alpha^2\beta^2\langle x\rangle^{2\beta-2}(1-\langle x\rangle^{-2}) \\ x\nabla(\nabla F_\beta(x))^2 = 2\alpha^2\beta^2\langle x\rangle^{2\beta-2}(1-\langle x\rangle^{-2})\left(\beta-1+(2-\beta)\langle x\rangle^{-2}\right)\end{cases}. \tag{4.32}$$

By assumptions, $\psi_F \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ for all $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ which implies by (4.16) that $\psi_F \in \mathcal{H}^1$. Suppose that there is $\delta > -2$, $\delta', \sigma, \sigma' \in \mathbb{R}$ such that $\delta + \delta' > -2$ and (4.3) is true.

Take $\alpha > 0$ and $0 < \beta < 1$. We denote C (possibly different) constants that do not depend on α or β. From (4.3), we derive

$$(\psi_F, [H, iA_D]\psi_F) \geqslant (2+\delta)(\psi_F, \Delta\psi_F) + \delta'(\psi_F, (\nabla F_\beta)^2\psi_F) + (\sigma\alpha + \sigma')\|\psi_F\|^2. \tag{4.33}$$

Since V is Δ-compact, we can find (see [Kat13]), for all $0 < \mu < 1$, some $C_\mu > 0$ such that

$$(\psi_F, \Delta\psi_F) \geqslant \mu(\psi_F, H\psi_F) - C_\mu\|\psi_F\|^2.$$

Inserting this information in (4.33) and using (4.16), we get, for all $0 < \mu < 1$,

$$(\psi_F, [H, iA_D]\psi_F) \geqslant \left((2+\delta)\mu + \delta'\right)(\psi_F, (\nabla F_\beta)^2\psi_F) + (\sigma\alpha + C - C_\mu)\|\psi_F\|^2. \tag{4.34}$$

By (4.19) with $\lambda(x) \equiv 1$, we have

$$(\psi_F, [H, iA_D]\psi_F) \leqslant (\psi_F, ((x\nabla)^2 g_\beta - x\nabla(\nabla F_\beta(x))^2)\psi_F).$$

Since $|(x\nabla)^2 g_\beta| \leqslant C\alpha$,

$$(\psi_F, [H, iA_D]\psi_F) \leqslant \alpha C\|\psi_F\|^2 - (\psi_F, x\nabla(\nabla F_\beta(x))^2\psi_F).$$

Using (4.32) and the fact that

$$2\alpha^2\beta^2(2-\beta)(\psi_F, \langle q\rangle^{2\beta-4}(1 - \langle q\rangle^{-2})\psi_F) \geqslant 0,$$

we obtain

$$(\psi_F, [H, iA_D]\psi_F) \leqslant \alpha C\|\psi_F\|^2 - 2\alpha^2\beta^2(\beta-1)(\psi_F, \langle q\rangle^{2\beta-2}(1 - \langle q\rangle^{-2})\psi_F). \tag{4.35}$$

Therefore, if we denote $\Psi_\alpha = \psi_F/\|\psi_F\|$, it follows from (4.34) and (4.35) that

$$\alpha^2\beta^2\left(\mu(2+\delta) + \delta' + 2\beta - 2\right)(\Psi_\alpha, \langle q\rangle^{2\beta-2}(1 - \langle q\rangle^{-2})\Psi_\alpha) \leqslant \alpha C + C. \tag{4.36}$$

Since $2 + \delta + \delta' > 0$, we can choose $0 < \mu < 1$ such that $(2+\delta)\mu + \delta' > 0$. Taking $\beta - 1$ small enough, we can ensure that

$$\tau = \beta^2\left(\mu(2+\delta) + \delta' + 2\beta - 2\right) > 0. \tag{4.37}$$

Remark that we can suppose that $\beta \geqslant 1/2$. Since $t^{\beta-1}\exp(t^\beta) \geqslant 1$ for all $t \geqslant 1$, we derive from (4.36) that, for $\alpha \geqslant 1$,

$$(\alpha+1)C \geqslant \alpha^2\tau(\Psi_{\alpha-1}, (1 - \langle q\rangle^{-2})\Psi_{\alpha-1}). \tag{4.38}$$

Since $\psi \neq 0$, we can find $\epsilon > 0$ such that $\|\mathbb{1}_{|\cdot|\geqslant 2\epsilon}(q)\psi\| > 0$. For all $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\|\mathbb{1}_{|\cdot|\leqslant\epsilon}(q)\exp(\alpha\langle q\rangle^\beta)\psi\|^2}{\|\exp(\alpha\langle q\rangle^\beta)\psi\|^2} &\leqslant \frac{\exp(2\alpha\langle\epsilon\rangle^\beta)\|\mathbb{1}_{|\cdot|\leqslant\epsilon}(q)\psi\|^2}{\exp(2\alpha\langle 2\epsilon\rangle^\beta)\|\mathbb{1}_{|\cdot|\geqslant 2\epsilon}(q)\psi\|^2} \\
&\leqslant \exp\left(2\alpha(\langle\epsilon\rangle^\beta - \langle 2\epsilon\rangle^\beta)\right)\frac{\|\psi\|^2}{\|\mathbb{1}_{|\cdot|\geqslant 2\epsilon}(q)\psi\|^2}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(\Psi_\alpha, (1 - \langle q\rangle^{-2})\Psi_\alpha) &\geqslant (1 - \langle\epsilon\rangle^{-2})\frac{\|\mathbb{1}_{|\cdot|\geqslant\epsilon}(q)\psi_F\|^2}{\|\psi_F\|^2} \\
&\geqslant (1 - \langle\epsilon\rangle^{-2})\left(1 - \frac{\|\mathbb{1}_{|\cdot|\leqslant\epsilon}(q)\psi_F\|^2}{\|\psi_F\|^2}\right) \\
&\geqslant (1 - \langle\epsilon\rangle^{-2})\Big(1 - C_\epsilon\exp\left(2\alpha(\langle\epsilon\rangle^\beta - \langle 2\epsilon\rangle^\beta)\right)\Big)
\end{aligned}$$

where $C_\epsilon = \frac{\|\psi\|^2}{\|\mathbb{1}_{|\cdot|\geqslant 2\epsilon}(q)\psi\|^2}$. So there exist $C_1 > 0$ and $\alpha_0 > 0$ such that for all $\alpha \geqslant \alpha_0$,

$$(\Psi_\alpha, (1 - \langle q\rangle^{-2})\Psi_\alpha) \geqslant C_1.$$

This implies, together with (4.38) that, for $\alpha \geqslant \alpha_0$,

$$(\alpha + 1)C \geqslant \alpha^2 \tau C_1$$

which is false for α large enough. □

Proof. [Theorem 4.2.4] Suppose that $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is bounded and that Theorem 4.2.4 is false. We have:

$$\begin{aligned}
(\psi_F, H\psi_F) &= (\psi_F, \Delta\psi_F) + (\psi_F, V\psi_F) \\
&\leqslant (\psi_F, \Delta\psi_F) + \|\langle p\rangle^{-1} V \langle p\rangle^{-1}\| \|\langle p\rangle\psi_F\|^2 \\
&\leqslant (\psi_F, \Delta\psi_F) + \|\langle p\rangle^{-1} V \langle p\rangle^{-1}\| \Big((\psi_F, \Delta\psi_F) + \|\psi_F\|^2 \Big),
\end{aligned}$$

which implies

$$(\psi_F, \Delta\psi_F) \geqslant v(\psi_F, H\psi_F) - v\|\langle p\rangle^{-1} V \langle p\rangle^{-1}\| \|\psi_F\|^2,$$

where $v = (1 + \|\langle p\rangle^{-1} V \langle p\rangle^{-1}\|)^{-1}$. Using (4.4), we obtain

$$\begin{aligned}
(\psi_F, [H, iA_D]\psi_F) &\geqslant (2+\delta)(\psi_F, \Delta\psi_F) + \delta'(\psi_F, (\nabla F_\beta)^2\psi_F) + (\sigma\alpha + \sigma')\|\psi_F\|^2 \\
&\geqslant (2+\delta)v(\psi_F, H\psi_F) + \delta'(\psi_F, (\nabla F_\beta)^2\psi_F) \\
&\quad +(\sigma\alpha + C)\|\psi_F\|^2 \\
&\geqslant \big((2+\delta)v + \delta'\big) (\psi_F, |\nabla F_\beta|^2\psi_F) + (\sigma\alpha + C)\|\psi_F\|^2. \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

By assumptions, $(2+\delta)v + \delta' > 0$. Thus, we can choose $0 < \beta < 1$ such that

$$\tau = \beta^2 \big((2+\delta)v + \delta' + 2\beta - 2\big) > 0.$$

Following the last lines of the proof of Theorem 4.2.3, we get a contradiction for α large enough. □

4.6 Concrete potentials

In this section, we study the concrete potentials that we mentioned in the several remarks following our results in Section 4.1.

4.6.1 Preliminary results

We want to apply Theorem 4.2.3 and Theorem 4.2.4 to this concrete potentials. We thus have to check the validity of (4.3) and (4.4) for them. To this end, we shall need the following

Lemma 4.6.1. *Let W be a bounded real valued function such that $|q|W$ is bounded (W is of short range type for example) and the distributionnal ∇W is locally in L^∞. Let $V = |q|^{-1} q \cdot \nabla W + B + V_L$ with B a bounded real valued function such that qB is bounded and V_L a bounded real valued function such that there is $\theta > 0$ with $\langle q\rangle^\theta V_L$ and $q\nabla V_L$ are bounded (V_L is a long range potential). Let $\psi \in L^2$ such that $H\psi = E\psi$ with $E > 0$. For $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, let $F_\beta(x) = \alpha\langle x\rangle^\beta$ and $\psi_F = e^F\psi$. As in Theorem 4.2.4, suppose that $\psi_F \in L^2$ for all $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$. Then, for all $\epsilon > 0$, there is $C_\epsilon \in \mathbb{R}$, independent of α, β, such that*

$$2\Re(qV\psi_F, \nabla\psi_F) \geqslant -\Big(3\epsilon + 4\||q|W\|\Big)\|\nabla\psi_F\|^2 - 4\||q|W\| \cdot \|\nabla F\psi_F\|^2 - C_\epsilon(\alpha+1)\|\psi_F\|^2. \qquad (4.40)$$

Proof. [Lemma 4.6.1] To begin, remark that since $|q|W$ is bounded, W vanishes at infinity. Thus, by writing $\nabla W = [p, iW]$, we can show that $|q|^{-1}q \cdot \nabla W : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact and, by sum, that $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact.

Let $\epsilon > 0$. To simplify notations, we denote by C, D_ϵ possibly different constants independent of α, β, where D_ϵ may depends on ϵ. As in the proof of Theorem 4.2.2, we can show that $\nabla\psi_F \in L^2$ for all $\alpha > 0, 0 < \beta < 1$. Recall that for $a, b \in \mathcal{H}$, $\eta > 0$, we have

$$\begin{aligned} 2|(a,b)| &\leqslant 2\|a\| \cdot \|b\| \\ &\leqslant \eta\|a\|^2 + \eta^{-1}\|b\|^2. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Since $|q|V = q \cdot \nabla W + |q|B + |q|V_L$, we can write $qV = |q|\nabla W + qB + qV_L$. Let $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\kappa(t) = 1$ if $|t| < 1$, $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$.

$$\begin{aligned} \left|2\Re\Big(qV\psi_F, \nabla\psi_F\Big)\right| &\leqslant 2\left|\Re\Big((\kappa(|q|) + (1-\kappa(|q|)))|q|\nabla W\psi_F, \nabla\psi_F\Big)\right| \\ &\quad +2\left|\Re\Big(qB + qV_L\psi_F, \nabla\psi_F\Big)\right|, \end{aligned}$$

and using $\nabla W = [p, iW]$,

$$\begin{aligned} &\left|2\Re\Big(qV\psi_F, \nabla\psi_F\Big)\right| \\ \leqslant\ & 2\left|\Big((1-\kappa(|q|))|q|W\nabla\psi_F, \nabla\psi_F\Big)\right| + 2\left|\Big((1-\kappa(|q|))|q|W\psi_F, \Delta\psi_F\Big)\right| \\ &+2\left|\Big((\kappa(|q|)|q|\nabla W + qB + [(1-\kappa(|q|))|q|, p]W)\psi_F, \nabla\psi_F\Big)\right| \\ &+\left|2\Re\Big(qV_L\psi_F, \nabla\psi_F\Big)\right|. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Since $\kappa(|q|)|q|\nabla W + qB + [(1-\kappa(|q|))|q|, p]W$ is bounded, by (4.41), we can see that the third term on the r.h.s. is less or equal to a term of the form $\epsilon\|\nabla\psi_F\|^2 + D_\epsilon\|\psi_F\|^2$.

For the last term on the r.h.s., remark that

$$\left|2\Re\Big(qV_L\psi_F, \nabla\psi_F\Big)\right| \leqslant \left|\Big(\psi_F, q\cdot\nabla V_L\psi_F\Big)\right| + \nu\left|\Big(\psi_F, V_L\psi_F\Big)\right|.$$

Thus, since V_L and $q\nabla V_L$ are bounded, there is $C > 0$ such that the last term on the r.h.s. of (4.42) is less or equal to $C\|\psi_F\|^2$.

Since $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$, we can remark that the first term on the r.h.s. of (4.42) is less or equal to $2\||q|W\| \cdot \|\nabla\psi_F\|^2$.

By (4.14) and (4.15), we can write

$$\begin{aligned} \Delta\psi_F &= H\psi_F - V\psi_F \\ &= (\nabla F)^2\psi_F - (ip\nabla F + i\nabla F p)\psi_F + E\psi_F - V\psi_F \\ &= (\nabla F)^2\psi_F - 2\nabla F\nabla\psi_F - \Delta F\psi_F + E\psi_F - V\psi_F. \end{aligned}$$

Inserting this information in the second term on the r.h.s. of (4.42), we get

$$\begin{aligned} & 2\left|((1-\kappa(|q|))|q|W\psi_F, \Delta\psi_F)\right| \\ \leqslant\ & 2\|(1-\kappa(|q|))|q|W\|\|\nabla F\psi_F\|^2 + 4\left|((1-\kappa(|q|))|q|W\nabla F\psi_F, p\psi_F)\right| \\ &+2\left|((1-\kappa(|q|))|q|W\psi_F, V\psi_F)\right| \\ &+2\left|((1-\kappa(|q|))|q|W\psi_F, \Delta F\psi_F)\right| + 2\|(1-\kappa(|q|))|q|W\||E|\|\psi_F\|^2. \end{aligned} \tag{4.43}$$

By (4.41) with $\eta = 1$, we can remark that the second term on the r.h.s. of (4.43) is bounded above by $2\||q|W\|\|\nabla F\psi_F\|^2 + 2\||q|W\|\|\nabla\psi_F\|^2$. Since $\alpha^{-1}\Delta F$ is bounded, the 2 last terms on the r.h.s. of (4.43) are less or equal to $C(\alpha+1)\|\psi_F\|^2$.

For the third term, we use that B, V_L and $|q|W$ are bounded to arrive at

$$\begin{aligned} & 2\left|((1-\kappa(|q|))|q|W\psi_F, V\psi_F)\right| \\ = \;& 2\left|((1-\kappa(|q|))W\psi_F, (q\cdot\nabla W + |q|B + |q|V_L)\psi_F)\right| \\ \leqslant \;& 2\left|((1-\kappa(|q|))q\psi_F, W\nabla W\psi_F)\right| + C\|\psi_F\|^2 \\ \leqslant \;& 2\left|((1-\kappa(|q|))q\psi_F, [p, iW^2]\psi_F)\right| + C\|\psi_F\|^2. \end{aligned}$$

Since qW^2 and W are bounded, by (4.41),

$$\begin{aligned} \left|((1-\kappa(|q|))q\psi_F, [p, iW^2]\psi_F)\right| &\leqslant \left|(p(1-\kappa(|q|))q\psi_F, W^2\psi_F)\right| \\ &\quad + \left|((1-\kappa(|q|))qW^2\psi_F, p\psi_F)\right| \\ &\leqslant 2\left|((1-\kappa(|q|))qW^2\psi_F, p\psi_F)\right| \\ &\quad + \left|(W^2[p, (1-\kappa(|q|))q]\psi_F, \psi_F)\right| \\ &\leqslant C\|\psi_F\|^2 + \epsilon\|\nabla\psi_F\|^2. \end{aligned}$$

Thanks to these inequalities, we derive from (4.42)

$$\begin{aligned} \left|2\Re(|q|\nabla W\psi_F, \nabla\psi_F)\right| &\leqslant (3\epsilon + 4\||q|W\|)\|\nabla\psi_F\|^2 \\ &\quad + C_\epsilon(\alpha+1)\|\psi_F\|^2 + 4\||q|W\|\|\nabla F\psi_F\|^2. \end{aligned}$$

which implies (4.40). □

Remark that, in (4.40), we can replace $\||q|W\|$ by $\|((1-\kappa(|q|))|q|W\|$. In particular, if $|q|W$ vanishes at infinity, we can choose the function κ such that $\|((1-\kappa(|q|))|q|W\| \leqslant \epsilon$.

Corollary 4.6.2. *Let W be a bounded real valued function such that $|q|W$ is bounded (W is of short range type for example) and the distributionnal ∇W is locally in L^∞. Let $V = |q|^{-1}q\cdot\nabla W + B + V_L$ with B a bounded real valued function such that qB is bounded and V_L a bounded real valued function such that $q\nabla V_L$ is bounded. If $\||q|W\|$ is small enough, we can choose $\epsilon > 0$ small enough such that V satisfies* (4.3) *and* (4.4).

Remark that, if we denote g the function such that $xg(x) = \nabla F_\beta(x)$, the first term on the r.h.s. of (4.42) is less or equal to $\frac{C_1}{\alpha\beta}\left\|g^{1/2}A_D\psi_F\right\| + C_2\|\psi_F\|^2$ where C_1, C_2 are independent of α, β. In particular, if $\alpha\beta$ is large enough, this term appears in (4.3') and (4.4'), and we can use these assumptions instead of (4.3) and (4.4).

Proof. [Corollary 4.6.2] Let ψ and ψ_F as in Lemma 4.6.1. Then

$$\begin{aligned} (\psi_F, [V, iA_D]\psi_F) &= (\psi_F, iVq\cdot p\psi_F) - (\psi_F, iq\cdot pV\psi_F) \\ &= (qV\psi_F, \nabla\psi_F) - (\nabla\psi_F, qV\psi_F) - \nu(\psi_F, V\psi_F) \\ &= 2\Re(qV\psi_F, \nabla\psi_F) - \nu(\psi_F, V\psi_F). \end{aligned}$$

Let $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\kappa(t) = 1$ if $|t| < 1$, $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$. For second term, we have

$$\begin{aligned} \nu(\psi_F, V\psi_F) &= \nu(\psi_F, \kappa(|q|)V\psi_F) + \nu(\psi_F, (1-\kappa(|q|))V\psi_F) \\ &= \nu(\psi_F, (1-\kappa(|q|))(|q|^{-1}q\cdot\nabla W + B + V_L)\psi_F) + \\ &\quad \nu(\psi_F, \kappa(|q|)V\psi_F). \end{aligned}$$

By writing $\nabla W = [p, iW]$, since $B, \kappa(|q|)V, V_L$ and $[(1-\kappa(|q|))|q|^{-1}q, p]$ are bounded, for all $\epsilon > 0$, by (4.41),

$$|\nu(\psi_F, V\psi_F)| \leqslant \epsilon\|\nabla\psi_F\|^2 + C_\epsilon\|\psi_F\|^2.$$

Using this and Lemma 4.6.1, we obtain (4.3) and/or (4.4) if $\||q|W\|$ and ϵ are small enough. □

4.6.2 A class of oscillating potential

Let $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ with bounded derivative. Let $V_{lr}, V_{sr}, V_c, \tilde{V}_{sr}$ such that V_c is compactly support and such that there is $\rho_{lr}, \rho_{sr} > 0$ with $\langle q\rangle^{1+\rho_{sr}} V_{sr}$, $\langle q\rangle^{1+\rho_{sr}} \tilde{V}_{sr}$, $\langle q\rangle^{\rho_{lr}} V_{lr}$, $\langle q\rangle^{\rho_{lr}} q \cdot \nabla V_{lr}$ are bounded (V_{lr} is a long-range potential and V_{sr} and $\tilde{V}_{sr}$ are short-range potentials). Moreover, we suppose that $V_c : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact and that there is $\epsilon_c > 0$ and $\lambda_c \in \mathbb{R}$ such that, for all $\phi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A_D)$,

$$(\phi, [V_c, iA_D]\phi) \geqslant (\epsilon_c - 2)(\phi, \Delta\phi) + \lambda_c \|\phi\|^2.$$

Let $\zeta, \theta \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $w \in \mathbb{R}^*$ and $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\kappa = 1$ on $[-1, 1]$ and $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$. Let

$$W_{\zeta\theta}(x) = w(1 - \kappa(|x|)) \frac{\sin(k|x|^\zeta)}{|x|^\theta}. \tag{4.44}$$

Remark that if we take $\zeta = \theta = 1$, this potential has the form of the Wigner-von Neuman potential for which we know that $\frac{k^2}{4}$ is an eigenvalue. As pointed out in [JM17], Corollary 4.1.2 applies with $V_{lr} + V_{sr} + W_{\zeta\theta}$ as potential if $\theta > 0$ and $\theta > \zeta$ or if $\theta > 1$. In [JM17], it is claimed that Corollary 4.1.2 applies when $1/2 \geqslant \theta > 0$, $\zeta > 1$, $\zeta + \theta > 2$ and $|w|$ small enough. The corresponding proof, however, is not sufficient. Here, thanks to our main result, we are able to prove the following

Proposition 4.6.3. *Let $V = V_{lr} + V_{sr} + v \cdot \nabla\tilde{V}_{sr} + V_c + W_{\zeta\theta}$ and let $H = \Delta + Van$.*

1. *If $\zeta + \theta > 1$, then $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact.*
2. *If $\zeta + \theta \geqslant 3/2$, then a possible eigenvector of H has sub-exponential bounds.*
3. *If $\zeta + \theta > 3/2$, then A_u is conjugate to H on all compact subset of $(0, +\infty)$ for all u bounded. In particular the sub-exponential bounds are unlimited.*
4. *Let $\theta \in \mathbb{R}$, $\zeta > 1$ and $\zeta + \theta = 2$. If $\left|\frac{w}{k\zeta}\right| < \frac{\epsilon_c}{6}$, then $H = \Delta + W_{\zeta\theta}$ has no positive eigenvalue;*
5. *If $\zeta + \theta > 2$, then $H = \Delta + W_{\zeta\theta}$ has no positive eigenvalue.*

We will give some comments about this Proposition

1. In the case $\zeta + \theta = 2$, $\theta \leqslant 1/2$ and $\zeta > 1$, Theorems 4.2.2 and 4.2.4 apply if $\left|\frac{w}{k\zeta}\right| < \frac{\epsilon_c}{8}$. But, by using (4.4'), we can show that the result of these Theorems stay true if $\left|\frac{w}{k\zeta}\right| < \frac{\epsilon_c}{6}$.
2. If $\theta > 0$, we can replace the assumption $V_c : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact by V_c Δ-compact and $\langle q\rangle^{\rho_{sr}} v \cdot \nabla\tilde{V}_{sr}$ bounded with the same result.
3. If $\theta \leqslant 0$, $W_{\zeta\theta}$ is not Δ-compact. Therefore Corollary 4.1.2 does not apply in this case.
4. Making use the specific form of the potential, the absence of positive eigenvalue for H was proved in [JM17] if $\zeta > 1$ and $\theta > 1/2$.
5. If $2 \geqslant \zeta + \theta \geqslant 3/2$, the regularity required by Theorem 4.2.2 is not granted. However we can prove the sub-exponential bounds along the lines of the proof of [JM17, Proposition 3.2].
6. Remark that, in [Whi83], Schrödinger operators with oscillating potentials are studied, and it was used that potentials are central. But in our case, we do not suppose that other parts of the potential are central.

Proof. [Proposition 4.6.3] Let $u \in \mathcal{U}$ a bounded vector field. Suppose that $\zeta + \theta > 1$. Let $\tilde{\kappa} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\tilde{\kappa}(|x|) = 0$ if $|x| \geqslant 1$, $\tilde{\kappa} = 1$ on $[-1/2, 1/2]$ and $0 \leqslant \tilde{\kappa} \leqslant 1$. So, we can observe that $(1 - \tilde{\kappa}(|x|))(1 - \kappa(|x|)) = (1 - \kappa(|x|))$ for all $x \in \mathbb{R}^\nu$. For $\gamma \in \mathbb{R}$, let

$$\tilde{W}_{\zeta\gamma}(x) = w(1 - \tilde{\kappa}(|x|))\frac{\cos(k|x|^\zeta)}{|x|^\gamma}. \tag{4.45}$$

For $x \in \mathbb{R}^\nu$,

$$W_{\zeta\theta}(x) = -(1 - \kappa(|x|))\frac{1}{k\zeta}\frac{x}{|x|} \cdot \nabla\tilde{W}_{\zeta\gamma}(x) - (1 - \kappa(|x|))\gamma\frac{1}{k\zeta|x|}\tilde{W}_{\zeta\gamma}(x) \tag{4.46}$$

with $\gamma = \theta + \zeta - 1 > 0$. Thus, by writing $\nabla\tilde{W}_{\zeta\gamma} = [p, i\tilde{W}_{\zeta\gamma}]$, we can show that $W_{\zeta\theta} : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact. Remark that since $\tilde{W}_{\zeta\gamma}$ has the same form as $W_{\zeta\theta}$, by iterated this calculus, we can show that, if $\zeta > 1$, for all $l \in \mathbb{N}$, for all $k \in \mathbb{R}$, $l \geqslant (k - \theta)(\zeta - 1)^{-1}$, $\langle p\rangle^{-l}\langle q\rangle^k W_{\zeta\theta}\langle p\rangle^{-l}$ is bounded. Similarly, since the derivative of v is bounded, by writing

$$v \cdot \nabla\tilde{V}_{sr} = div(v)\tilde{V}_{sr} - div(v\tilde{V}_{sr}),$$

we can show that $v \cdot \nabla\tilde{V}_{sr} : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact. Therefore, by sum, the first point of Proposition 4.6.3 is proved.

To prove the next point, in a first time, we can see that, by [Mar18b, Lemma 5.4], if $\zeta + \theta > 2$, $W_{\zeta\theta}$ has enough regularity to satisfies assumptions of Theorem 4.2.2. Similarly, since $qV_c : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact (V_c is compactly suport), we can show that all the terms of the potential has enough regularity to satisfies assumptions of Theorem 4.2.2.

If $3/2 \leqslant \zeta + \theta \leqslant 2$, we will adapt the proof of [JM17, Proposition 7.1] to our context. In this proof, we can see that it is sufficient to prove that $(\Psi_\lambda, [V, iA_u]\Psi_\lambda)$ is uniformly bounded in λ to prove the polynomial bounds.

Suppose that $2 \geqslant \zeta + \theta \geqslant 3/2$. Then $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact which implies that $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(\Delta) = [0, +\infty)$. In particular, we can find $m > 0$, as large as we want, such that $-m \notin \sigma(H)$. In particular, by the resolvent formula, $-m \notin \sigma(H(F))$.

Let F as in (4.13). Let $H_0(F) = e^{F(Q)}H_0e^{-F(Q)}$. Remark that $F(x)$ and $\nabla F(x)$ is bounded uniformly with respect to $\lambda > 1$. As in [JM17], $(\Psi_\lambda, [V - W_{\zeta\theta} - V_c, iA_u]\Psi_\lambda)$ is uniformly bounded in λ. Therefore, we have to show that $(\Psi_\lambda, [V_c + W_{\zeta\theta}, iA_u]\Psi_\lambda)$ is uniformly bounded in λ. By pseudodifferential calculus, we can show that, for all $l \in \mathbb{R}$, $\langle P\rangle^{l+2}(m + H_0(F))^{-1}\langle P\rangle^{-l}$ is uniformly bounded in λ. Notice that $\langle P\rangle(m + H(F))^{-1}\langle P\rangle$ is uniformly bounded in λ. Moreover, for $\epsilon \in [0, 1]$,
$\langle q\rangle^\epsilon\langle P\rangle(m + H_0(F))^{-1}\langle P\rangle\langle q\rangle^{-\epsilon}$ is uniformly bounded in λ.

We can write

$$\begin{aligned} & (\Psi_\lambda, [V_c, iA_u]\Psi_\lambda) \\ = \ & \left((H(F) + m)\Psi_\lambda, (H(F) + m)^{-1}[V_c, iA_u](H(F) + m)^{-1}(H(F) + m)\Psi_\lambda\right). \end{aligned}$$

Since $\langle p\rangle(H(F)+m)^{-1}\langle p\rangle$ is uniformly bounded and since V_c is compactly support, we can easily see that $(H(F) + m)^{-1}[V_c, iA_u](H(F) + m)^{-1}$ is uniformly bounded. Using that $(H(F) + m)\Psi_\lambda = (E + m)\Psi_\lambda$, this implies that $(\Psi_\lambda, [V_c, iA_u]\Psi_\lambda)$ is uniformly bounded in λ.

For $(\Psi_\lambda, [W_{\zeta\theta}, iA_u]\Psi_\lambda)$, notice that in the expression of $[W_{\zeta\theta}, iA_u]$ there is only terms of the form $qW_{\zeta\theta} \cdot u(p)$ and $W_{\zeta\theta}div(u)(p)$. For terms with $W_{\zeta\theta}div(u)(p)$, since $W_{\zeta\theta} : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact, we know that $(H(F) + m)^{-1}W_{\zeta\theta}div(u)(p)(H(F) + m)^{-1}$ is uniformly bounded.

For the other type of terms, we can write for $l > 0$

$$\begin{aligned} & (\Psi_\lambda, qW_{\zeta\theta} \cdot u(p)\Psi_\lambda) \\ = \ & \left((H(F) + m)^l\Psi_\lambda, (H(F) + m)^{-l}qW_{\zeta\theta} \cdot u(p)(H(F) + m)^{-l}(H(F) + m)^l\Psi_\lambda\right) \\ = \ & (E + m)^{2l}\left(\Psi_\lambda, (H(F) + m)^{-l}qW_{\zeta\theta} \cdot u(p)(H(F) + m)^{-l}\Psi_\lambda\right). \end{aligned}$$

In particular, we only have to show that for l large enough,

$$(H(F)+m)^{-l} q W_{\zeta\theta} u(p) (H(F)+m)^{-l}$$

is uniformly bounded in λ. To do this, we will use the resolvent estimate and write for all $M \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
& (H(F)+m)^{-1} \\
= \; & (H_0(F)+m)^{-1} + \sum_{k=1}^{M} (-1)^k \left((H_0(F)+m)^{-1} V\right)^k (H_0(F)+m)^{-1} \\
& + (-1)^{M+1} \left((H_0(F)+m)^{-1} V\right)^{M+1} (H(F)+m)^{-1} \\
= \; & (H_0(F)+m)^{-1} + \sum_{k=1}^{M} (-1)^k (H_0(F)+m)^{-1} \left(V(H_0(F)+m)^{-1}\right)^k \\
& + (-1)^{M+1} (H(F)+m)^{-1} \left(V(H_0(F)+m)^{-1}\right)^{M+1}.
\end{aligned}$$

Remark that, since

$$\langle q\rangle^{\zeta+\theta-1} \langle p\rangle^{-1} \left(V_{sr} + v\cdot\nabla\tilde{V}_{sr} + V_c + W_{\zeta\theta}\right) \langle p\rangle^{-1}$$

is bounded and since, for all $\epsilon \in [0,1]$, $\langle q\rangle^{\epsilon} \langle P\rangle (m + H_0(F))^{-1} \langle P\rangle \langle q\rangle^{-\epsilon}$ is uniformly bounded, we can write

$$\begin{aligned}
& (H(F)+m)^{-1} \\
= \; & (H_0(F)+m)^{-1} + \sum_{k=1}^{M} (-1)^k \left((H_0(F)+m)^{-1} V_{lr}\right)^k (H_0(F)+m)^{-1} \\
& + (-1)^{M+1} \left((H_0(F)+m)^{-1} V_{lr}\right)^{M+1} (H(F)+m)^{-1} + \langle p\rangle^{-1} \langle q\rangle^{1-\zeta-\theta} B_1 \\
= \; & (H_0(F)+m)^{-1} + \sum_{k=1}^{M} (-1)^k (H_0(F)+m)^{-1} \left(V_{lr}(H_0(F)+m)^{-1}\right)^k \\
& + (-1)^{M+1} (H(F)+m)^{-1} \left(V_{lr}(H_0(F)+m)^{-1}\right)^{M+1} + B_2 \langle q\rangle^{1-\zeta-\theta} \langle p\rangle^{-1}
\end{aligned}$$

where B_1, B_2 are uniformly bounded in λ. Now, we will choose $M \in \mathbb{N}^*$ such that $(M+1)\rho_{lr} \geqslant \zeta+\theta-1$. By a simple computation, we can see that

$$\begin{aligned}
& (-1)^{M+1} (H(F)+m)^{-1} \left(V_{lr}(H_0(F)+m)^{-1}\right)^{M+1} \langle q\rangle^{1-\zeta-\theta} \langle p\rangle^{-1} \text{ and} \\
& \langle p\rangle^{-1} \langle q\rangle^{1-\zeta-\theta} (-1)^{M+1} \left((H_0(F)+m)^{-1} V_{lr}\right)^{M+1} (H(F)+m)^{-1}
\end{aligned}$$

are uniformly bounded.

By taking the power $l > 0$, we have

$$\begin{aligned}
& (H(F)+m)^{-l} \\
= \; & \left((H_0(F)+m)^{-1} + \sum_{k=1}^{M} (-1)^k \left((H_0(F)+m)^{-1} V_{lr}\right)^k (H_0(F)+m)^{-1}\right)^l \\
& + \langle p\rangle^{-1} \langle q\rangle^{1-\zeta-\theta} B_1' \\
= \; & \left((H_0(F)+m)^{-1} + \sum_{k=1}^{M} (-1)^k (H_0(F)+m)^{-1} \left(V_{lr}(H_0(F)+m)^{-1}\right)^k\right)^l \\
& + B_2' \langle q\rangle^{1-\zeta-\theta} \langle p\rangle^{-1}
\end{aligned}$$

with B_1', B_2' are uniformly bounded in λ.

Notice that $V_{lr}\langle p\rangle^{-2}\langle p\rangle^{2}(H_0(F)+m)^{-1}$ is bounded. By a simple computation, we can remark that $\langle q\rangle[V_{lr},\langle p\rangle^{-2}]$ is bounded. In particular, we can write

$$V_{lr}(H_0(F)+m)^{-1}=\langle p\rangle^{-2}V_{lr}\langle p\rangle^{2}(H_0(F)+m)^{-1}+\langle q\rangle^{-1}B_3$$

with B_3 uniformly bounded. Similarly, we can write

$$(H_0(F)+m)^{-1}V_{lr}=(H_0(F)+m)^{-1}\langle p\rangle^{2}V_{lr}\langle p\rangle^{-2}+B_4\langle q\rangle^{-1}$$

with B_4 uniformly bounded. Repeating this computation, we can see that

$$\begin{aligned}&(H(F)+m)^{-l}\\ =\;&\langle p\rangle^{-2l}B_5'+\langle p\rangle^{-1}\langle q\rangle^{-1}B_3'+\langle p\rangle^{-1}\langle q\rangle^{1-\zeta-\theta}B_1'\\ =\;&B_6'\langle p\rangle^{-2l}+B_4'\langle q\rangle^{-1}\langle p\rangle^{-1}+B_2'\langle q\rangle^{1-\zeta-\theta}\langle p\rangle^{-1}\end{aligned}$$

with $(B_k')_{k=1,\cdots,6}$ uniformly bounded in λ. Thus,

$$\begin{aligned}&(H(F)+m)^{-l}qW_{\zeta\theta}u(p)(H(F)+m)^{-l}\\ =\;&\left(B_6'\langle p\rangle^{-2l}+B_4'\langle q\rangle^{-1}\langle p\rangle^{-1}+B_2'\langle q\rangle^{1-\zeta-\theta}\langle p\rangle^{-1}\right)qW_{\zeta\theta}u(p)\\ &\left(\langle p\rangle^{-2l}B_5'+\langle p\rangle^{-1}\langle q\rangle^{-1}B_3'+\langle p\rangle^{-1}\langle q\rangle^{1-\zeta-\theta}B_1'\right)\end{aligned}$$

Since $\langle p\rangle^{-1}qW_{\zeta\theta}\langle p\rangle^{-1}\langle q\rangle^{1-\zeta-\theta}$ is bounded, we can write

$$(H(F)+m)^{-l}qW_{\zeta\theta}u(p)(H(F)+m)^{-l}=B_6'\langle p\rangle^{-2l}qW_{\zeta\theta}u(p)\langle p\rangle^{-2l}B_5'+B$$

where B is uniformly bounded in λ. By taking l large enough such that $\langle p\rangle^{-2l}qW_{\zeta\theta}\langle p\rangle^{-2l}$ is bounded, we show that $(H(F)+m)^{-l}qW_{\zeta\theta}u(p)(H(F)+m)^{-l}$ is uniformly bounded in λ. This implies that $(\Psi_\lambda,[V,iA_u]\Psi_\lambda)$ is uniformly bounded in λ and we infer the polynomial bounds. Using a similar proof with F as in (4.18), we prove the sub-exponential bounds (point (2) of Proposition 4.6.3).

To prove that this sub-exponential bounds are unlimited, we only have to show that the Mourre estimate is true on all compact subset of $(0,+\infty)$. Let $\chi\in C_c^\infty$ supported on a compact subset of $(0,+\infty)$. Suppose that $\zeta+\theta>3/2$. Then there is $a>0$ such that:

$$\begin{aligned}\chi(H)[H,iA_u]\chi(H)\;=\;&\chi(H_0)[\Delta,iA_u]\chi(H_0)+(\chi(H)-\chi(H_0))[\Delta,iA_u]\chi(H_0)\\ &+\chi(H_0)[\Delta,iA_u](\chi(H)-\chi(H_0))\\ &+(\chi(H)-\chi(H_0))[\Delta,iA_u](\chi(H)-\chi(H_0))\\ &+\chi(H)[W_{\zeta\theta},iA_u]\chi(H)\\ \geqslant\;&a\chi(H_0)^2+(\chi(H)-\chi(H_0))[\Delta,iA_u]\chi(H_0)\\ &+\chi(H_0)[\Delta,iA_u](\chi(H)-\chi(H_0))\\ &+(\chi(H)-\chi(H_0))[\Delta,iA_u](\chi(H)-\chi(H_0))\\ &+\chi(H)[W_{\zeta\theta},iA_u]\chi(H).\end{aligned}$$

Remark that since H is a compact perturbation of $H_0=\Delta$, $(\chi(H)-\chi(H_0))$ is compact on $\mathcal{H}^1$ to $\mathcal{H}^{-1}$. In particular the second, the third and the fourth terms of the r.h.s. of the previous inequality are compact. Moreover, since $\chi(H)(H+m)^l$ is bounded for all $l>0$, using that $\langle P\rangle^{-1}QW_{\zeta\theta}(Q)\langle P\rangle^{-1}\langle Q\rangle^{1-\theta-\zeta}$ is compact if $\zeta+\theta>3/2$ and using a similar proof than in the previous point, we can show that $\chi(H)[W_{\zeta\theta},iA_u]\chi(H)$ is compact. So there is $a>0$ and K compact such that

$$\chi(H)[H,iA_u]\chi(H)\geqslant a\chi(H)^2+K. \tag{4.47}$$

Let $\lambda_0\in(0,+\infty)$ and I an open real set containing λ_0 such that the closure of I is included in $(0,+\infty)$. Take χ as previously such that $\chi=1$ on I. Remark that $\chi(H)E(I)=E(I)\chi(H)=E(I)$. Thus, by multiplying on the left and on the right of (4.47) by $E(I)$, we obtain the Mourre estimate at λ_0 w.r.t. the conjugate operator A_u(point (3) of Proposition 4.6.3).

Now, suppose that $\zeta + \theta \geqslant 2$. By Corollary 4.6.2 and (4.46), we already know that if $\||q|\tilde{W}_{\zeta\gamma}\|$ is small enough, then $W_{\zeta\theta}$ satisfies (4.3) and (4.4) and Theorems 4.2.3 and 4.2.4 apply. Thus we only have to show that this norm is small enough.

Suppose that $\zeta + \theta = 2$ and $\zeta > 1$. Since $\langle q\rangle^{1+\rho_{sr}}\tilde{V}_{sr}$ is bounded, we can use Corollary 4.6.2 on $v \cdot \nabla\tilde{V}_{sr}$. Remark that

$$\left\|\frac{|q|}{k\zeta}(1-\kappa(|q|))\tilde{W}_{\zeta\gamma}(q)\right\| = \left|\frac{w}{k\zeta}\right|.$$

In particular, if $\left|\frac{w}{k\zeta}\right| < \frac{\epsilon_c}{8}$, for all $C > 0$, we can find $\epsilon > 0$ small enough such that

$$-\left(C\epsilon + 4\left|\frac{w}{k\zeta}\right|\right) - 4\left|\frac{w}{k\zeta}\right| + \epsilon_c - 2 > -2.$$

Therefore, by Corollary 4.6.2, Theorem 4.2.4 applies and we prove this part of the Proposition. Using the assumption (4.4') instead of (4.4) in Theorem 4.2.4, we can remark that it suffices to have $\left|\frac{w}{k\zeta}\right| < \frac{\epsilon_c}{6}$.

Suppose that $\zeta + \theta > 2$. In this case, $\gamma = \zeta + \theta - 1 > 1$. In particular, $|q|\tilde{W}_{\zeta\gamma}$ vanishes at infinity. So, for all $\epsilon > 0$, we can find $\tilde{\chi} \in C_c^\infty$, such that $\tilde{\chi}(t) = 1$ if $|t| < 1$, $0 \leqslant \tilde{\chi} \leqslant 1$ and $\|(1-\tilde{\chi}(q))|q|W\| < \epsilon$. Thus, by Corollary 4.6.2, for ϵ small enough, (4.4) is satisfied and Theorem 4.2.4 applies (point (5) of Proposition 4.6.3). □

4.6.3 A potential with high oscillations

Let

$$V(x) = w(1-\kappa(|x|))\exp(3|x|/4)\sin(\exp(|x|))$$

with $w \in \mathbb{R}$, $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$ and $\kappa(|x|) = 1$ if $|x| < 1$.

For all $w \in \mathbb{R}$, we have the following:

Lemma 4.6.4. *Let V as previously. Then*

1. *$V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact;*
2. *for all $u \in C^\infty$ bounded with all derivatives bounded, $V \in C^\infty(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$;*
3. *$H = \Delta + V$ has no positive eigenvalues.*

Remark that since V is not Δ-compact and since V is not in $C^1(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ (see [Mar18b, Lemma 5.6]), we can not apply Corollary 4.1.2 and we can not use the Mourre Theorem with A_D as conjugate operator. But, by Corollary 4.2.6, we can prove that

$$\lambda \mapsto R(\lambda \pm i0)$$

are of class C^∞ on $(0, +\infty)$.

Proof. [Lemma 4.6.4] Let $\tilde{\kappa} \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ such that $\tilde{\kappa}(|x|) = 0$ if $|x| \geqslant 1$, $\tilde{\kappa} = 1$ on $[-1/2, 1/2]$ and $0 \leqslant \tilde{\kappa} \leqslant 1$. Let $\tilde{V}(x) = (1-\tilde{\kappa}(|x|))\cos(e^{|x|})$. Then, we have

$$(1-\kappa(|x|))\nabla\tilde{V}(x) = -(1-\kappa(|x|))\frac{x}{|x|}\exp(|x|)\sin(\exp(|x|)).$$

So

$$\begin{aligned} xV(x) &= -w|x|(1-\kappa(|x|))\exp(-|x|/4)\nabla\tilde{V}(x) \\ &= -w|x|\nabla\Big((1-\kappa(|x|))\exp(-|x|/4)\tilde{V}(x)\Big) \\ &\quad -wx\kappa'(|x|)\exp(-|x|/4)\tilde{V}(x) - \frac{w}{4}x(1-\kappa(|x|))\exp(-|x|/4)\tilde{V}(x). \end{aligned}$$

As previously, by writing $\nabla\tilde{V} = [p, iV]$, we can show that $V : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ is compact. Moreover, by [Mar18b, Lemma 5.6], we already know that $V \in C^\infty(A_u, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$ for all $u \in \mathcal{U}$ bounded. Those implies that Theorem 4.2.2 applies. Moreover, since $|q|\tilde{V}$ vanishes at infinity, as previously, for all $\epsilon > 0$, we can find $\tilde{\chi} \in C_c^\infty$, such that $\tilde{\chi}(t) = 1$ if $|t| < 1$, $0 \leqslant \tilde{\chi} \leqslant 1$ and $\|(1-\tilde{\chi}(q))|q|W\| < \epsilon$. Thus, by Corollary 4.6.2, we can find $\epsilon > 0$ small enough such that (4.4) is true. Therefore Theorem 4.2.4 applies and $H = \Delta + V$ has no positive eigenvalues. □

4.7 Appendix : The Helffer-Sjöstrand formula

Let T and B two self-adjoint operators. Let $ad_B^1(T) = [T, B]$ be the commutator. We denote $ad_B^p(T) = [ad_B^{p-1}(T), B]$ the iterated commutator. Furthermore, if T is bounded, T is of class $C^k(B)$ if and only if for all $0 \leqslant p \leqslant k$, $ad_B^p(T)$ is bounded.

Proposition 4.7.1 ([DG97] and [Mø00]). *Let $\varphi \in \mathcal{S}^\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$. For all $l \in \mathbb{R}$, there is a smooth function $\varphi^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, called an almost-analytic extension of φ, such that :*

$$\varphi^{\mathbb{C}}_{|\mathbb{R}} = \varphi \qquad \frac{\partial \varphi^{\mathbb{C}}}{\partial \bar{z}} = c_1 \langle \Re(z)\rangle^{\rho-1-l}|\Im(z)|^l \tag{4.48}$$

$$supp\varphi^{\mathbb{C}} \subset \{x+iy \| y| \leqslant c_2\langle x\rangle\} \tag{4.49}$$

$$\varphi^{\mathbb{C}}(x+iy) = 0, \text{ if } x \notin supp(\varphi) \tag{4.50}$$

for constant c_1 and c_2 depending of the semi-norms of φ.

Theorem 4.7.2 ([GJ07] and [Mø00]). *Let $k \in \mathbb{N}^*$ and T a bounded operator in $C^k(B)$. Let $\rho < k$ and $\varphi \in \mathcal{S}^\rho$. We have*

$$[\varphi(B), T] = \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(B)ad_B^j(T) + \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial\varphi^{\mathbb{C}}}{\partial\bar{z}}(z-B)^{-k}ad_B^k(T)(z-B)^{-1}dz\wedge d\bar{z} \tag{4.51}$$

In the general case, the rest of the previous expansion is difficult to calculate. So we will give an estimate of this rest.

Proposition 4.7.3 ([GJ07] and [Mø00]). *Let $T \in C^k(A)$ be a self-adjoint and bounded operator. Let $\varphi \in \mathcal{S}^\rho$ with $\rho < k$. Let*

$$I_k(\varphi) = \int_{\mathbb{C}}\frac{\partial\varphi^{\mathbb{C}}}{\partial\bar{z}}(z-B)^{-k}ad_B^k(T)(z-B)^{-1}dz\wedge d\bar{z}$$

be the rest of the development of order k in (4.51). Let $s, s' > 0$ such that $s' < 1$, $s < k$ and $\rho+s+s' < k$. Then $\langle B\rangle^s I_k(\varphi)\langle B\rangle^{s'}$ is bounded.

In particular, if $\rho < 0$, and if we choose s' near 0, we have $\langle B\rangle^s I_k(\varphi)\langle B\rangle^{s'}$ bounded, for all $s < k - s' - \rho$.

Chapitre 5

On the Limiting absorption principle at zero energy for a new class of possibly non self-adjoint Schrödinger operators

In this chapter is given preprint [Mar18a]

Abstract. We recall a Moure theory adapted to non self-adjointed operators and we apply this theory to Schrödinger operators with non real potentials, using different type of conjugate operators. We show that some conjugate operators permits to impose less conditions on the decrease of the derivatives of the potential, or permits to avoid conditions on the derivatives of the potentials.

Sommaire

5.1 Introduction

In this article, we will study the Schrödinger operator $H = \Delta + V$ with possibly a non-real potential, on $L^2(\mathbb{R}^n)$, where Δ is the non negative Laplacian operator. Here V is a multiplication operator, i.e. V can be the operator of multiplication by a function or by a distribution of strictly positive order. When $V = 0$, we know that $H = \Delta$ on $L^2(\mathbb{R}^n)$ has for spectrum the real set $[0, +\infty)$ with purely absolutely continuous spectrum on this set. In this article, we are always in the application framework of the Weyl's Theorem. In particular, the essential spectrum of H is the same that the essential spectrum of Δ, the interval $[0, +\infty)$. Thus, 0 is the bound of the essential spectrum and, for this reason, 0 is a threshold for H. Here, we are interested in the nature of the essential spectrum of the perturbed operator and in the existence of a Limiting Absorption Principle near the threshold 0.

A general technique to prove a Limiting Absorption Principle if H is self-adjoint is due to E. Mourre [Mou81] and it involves a local version of the positive commutator method due to C.R. Putnam [Put56, Put67]. This method is based on the research of another self-adjoint operator A, named the conjugate operator, for which the operator H is "regular" with respect to A and for which the Mourre estimate is satisfied on a set I in the following sense:

$$E(I)[H, iA]E(I) \geqslant c_0 E(I) + K,$$

where $c_0 > 0$, E is the spectral mesure of H and K is a compact operator. When H is a Schrödinger operator, we usually apply the Mourre theory with the generator of dilations A_D as conjugate operator. With this conjugate operator, we obtain for the first order commutator of the Laplacian $[\Delta, iA_D] = 2\Delta$. In particular, by considering potential such that H is a compact perturbation of the Laplacian, and under some assumptions on it, we can prove the Mourre estimate if I is a compact interval of $(0, +\infty)$. This implies a Limiting Absorption Principle on all compact interval of $(0, +\infty)$ (see [ABdMG96]). But, we can see that since $E(I)[\Delta, iA_D]E(I)$ is not strictly positive when $0 \in I$, we can not use the Mourre theorem to prove a Limiting Absorption Principle at zero energy. To do this, several methods linked to Mourre theory exist. A first method uses the standard Mourre theory with a parameter. The goal is to obtain a Limiting Absorption Principle for a modified operator which depends on the parameter and to deduce from this Limiting Absorption Principle a similar estimate for the initial operator, without the parameter (see [BH10]). A second method is to show a Limiting Absorption Principle with weights which depends on a parameter and to deduce from this a Limiting Absorption Principle for our operator (see [FS04]). Here, we will use a third method which is, contrary to the others, a general method: the method of the weakly conjugate operator. With this method, we do not have to assume that the first order commutator is strictly positive but only positive and injective (see [MR00, Ric06, BG10]).

Let $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leqslant n$, and consider the decomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. With this decomposition, denote $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ where $x \in \mathbb{R}^k$ and $y \in \mathbb{R}^{n-k}$. For $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, denote

$$\nabla_x h(x, y) = \Big(\partial_i h(x, y)\Big)_{i=1,\cdots,k}.$$

In [MR00], using the method of weakly conjugate operator, M. Măntoiu and S. Richard proved the following

Theorem 5.1.1 ([MR00], Theorem II.2). *Let $k \geqslant 2$. Let $H = \Delta + V$ whith $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ a real potential. Assume that*

1. *$x \cdot \nabla_x V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
2. *For all $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, $-x \cdot \nabla_x V(x, y) \geqslant 0$.*
3. *There is a constant c such that, for all $(x, y) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\left|(x \cdot \nabla_x)^2 V(x, y)\right| \leqslant -cx \cdot \nabla_x V(x, y).$$

Then, there exists a Banach space $\mathcal{A} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ such that $\|(H - \lambda \pm i\nu)^{-1}\|_{B(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)}$ is bounded uniformly in $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$, where $\mathcal{A}^*$ is the dual space of $\mathcal{A}$.

These conditions do not permit to cover some situations: in fact, assumption (2) does not allow to have an oscillating potential of the form $V(x) = \sin(|x|^2)e^{-|x|^2}$. Moreover, because of the derivative, for an oscillating potential, $(x \cdot \nabla_x)^2 V$ can be unbounded. In this article, we will use the abstract result of the method of the weakly conjugate operator with different type of conjugate operators.

A first conjugate operator we use is the operator A_F defined by

$$A_F = \frac{1}{2}(p \cdot F(q) + F(q) \cdot p)$$

with F a C^∞ vector field with some good properties. Remark that this type of conjugate operator was already used by R. Lavine in [Lav69, Lav71, Lav73, ABdMG96]. This conjugate operator permits to apply the method of the weakly conjugate operator to potentials for which the derivative does not have enough decay at infinity. With this conjugate operator, we can prove the following:

Theorem 5.1.2. *Let $n \geqslant 3$ and $0 \leqslant \mu < (1 + \frac{n}{n-2})^{-2}$. Let $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ and $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$. Assume that*

1. *V_k are Δ-compact and $V_2 \geqslant 0$;*
2. *$q\langle q\rangle^{-\mu} \cdot \nabla V_k$ are Δ-compact;*
3. *There is*
$$C > -\frac{(n-2)^2(1 - \mu(1 + \frac{n}{n-2})^2)}{2}$$
such that $-x \cdot \nabla V_1(x) \geqslant \frac{C}{|x|^2}$ for all $x \in \mathbb{R}^n$;
4. *There is $C' > 0$ such that for all $x \in \mathbb{R}^n$, $|(x\langle x\rangle^{-\mu} \cdot \nabla)^2 V_k(x)| \leqslant C'|x|^{-2}\langle x\rangle^{-\mu}$.*

Then

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}, \eta > 0} \|\langle q\rangle^{-\mu/2}|q|^{-1}(H - \lambda + \mathrm{i}\eta)^{-1}|q|^{-1}\langle q\rangle^{-\mu/2}\| < \infty.$$

Moreover, H does not have eigenvalue in $\mathbb{R}$.

We make few remarks about this theorem:

1. If $0 < \mu$, we do not require to have $q \cdot \nabla V_i$ bounded.
2. Let $V_1(x) = \langle q\rangle^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ and $V_2(x) = \langle x\rangle^{-\beta}$, $\beta > 0$. If we want to use the generator of dilations with these potentials, we can see that we have to assume that $\alpha, \beta \geqslant 2$ to use the method of the weakly conjugate operator (see [BG10, Theorem C.1]). Here, we only have to assume that there is $0 \leqslant \mu < (1 + \frac{n}{n-2})^{-2}$ such that $\alpha + \mu \geqslant 2$ and $\beta + \mu \geqslant 2$. In particular, if $\alpha > 2 - (1 + \frac{n}{n-2})^{-2}$ and $\beta > 2 - (1 + \frac{n}{n-2})^{-2}$, then Theorem 5.1.2 applies.

Another conjugate operator we use is the operator A_u defined by

$$A_u = \frac{1}{2}(q \cdot u(p) + u(p) \cdot q)$$

where u is a C^∞ vector field with some good properties. Remark that this conjugate operator was already used in [ABdMG96]. Moreover, it turns out that this type of conjugate operator is particulary usefull when the potential has high oscillations because conditions on commutators does not impose derivatives (see [Mar17, Mar18b]). Using this conjugate operator, we obtain the following:

Theorem 5.1.3. *Let $n \geqslant 3$. Let $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ and $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$ with $V_2 \geqslant 0$. Assume that $|q|^2 V_1$ and $|q|V_1$ are bounded with bound small enough and that $\langle q\rangle^3 V_i$ is bounded. Then Theorem 5.3.1 applies. In particular, for all $1 \leqslant \mu < 2$,*

$$\sup_{\rho \in \mathbb{R}, \eta > 0} \|\langle p\rangle^{-\mu/2}|q|^{-1}(H - \rho + \mathrm{i}\eta)^{-1}|q|^{-1}\langle p\rangle^{-\mu/2}\| < \infty.$$

Moreover, H does not have eigenvalue in $\mathbb{R}$.

We will make few remarks about Theorem 5.1.3

1. Let W_1, W_2 potentials such that $\langle q\rangle^3 W_i$ is bounded and $W_2 \geqslant 0$. Let $w \in \mathbb{R}$. Then $V_1 = wW_1$ and $V_2 = W_2$ satisfy assumptions of Theorem 5.1.3 for $|w|$ small enough.

2. In the case $V_2 = 0$ and $V_1 \in L^{n/2}$, the absence of negative eigenvalues can be proved with an other method: using the Lieb-Thirring inequality (see [Lie00]), we already know that if V_1 is small enough, the number of negative eigenvalue have to be 0.

3. Using Sobolev inequalities and taking $u(x) = x\langle x\rangle^{-\mu}$, $1 < \mu < 2$, we can replace the assumption $\langle q\rangle^3 V$ bounded by $\langle q\rangle^2 V$ bounded and $x \mapsto |x|^3 V(x) \in L^p$ with $p \geqslant \frac{n}{\mu-1}$ (see [Mar18b, Corollary 5.9]).

4. Since assumptions on the potential do not impose conditions on the derivatives of the potential, we can use this result with potentials which have high oscillations. For example, if $V_2 = 0$ and $V_1(x) = w(1-\kappa(|x|))\frac{\sin(k|x|^\alpha)}{|x|^\beta}$ with $w, k, \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ and $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\kappa = 1$ on $[-1, 1]$ and $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$, it suffices to suppose that w is small enough and that $\beta \geqslant 3$ to obtain a Limiting Absorption Principle on all $\mathbb{R}$. Remark that because of the oscillations, Theorem C.1 of [BG10] does not apply nor Theorem 1.1 of [FS04].

5. Notice that the absence of eigenvalue was also proved for this type of potential. For example, we can see in [FKV15, Theorem 1 and Theorem 2] that is is sufficient in dimension $n \geqslant 3$ to assume that $|x|^2 V$ is bounded with bound small enough to prove the absence of eigenvalue. Here, we suppose more decay on the potential V and the absence of real eigenvalue is only a consequence of the obtention of a Limiting Absorption Principle on all the real axis.

The paper is organized as follows. In Section 5.2, we will give some notations we will use below and we recall some basic fact about regularity with respect to a conjugate operator. In Section 5.3, we will recall the abstract result corresponding to Theorem 5.1.1. In Section 5.4, we will recall a result concerning the application of the method of the weakly conjugate operator with the generator of dilations as conjugate operator, and we will see that, with this conjugate operator, we can avoid conditions on the second order derivatives. In Sections 5.5 and 5.6, we will use the method of the weakly conjugate operator with A_F and A_u as conjugate operator. In Section 5.7, we will see that we can use a conjugate operator which is a differential operator only in certain directions. In Section 5.8, we will give examples of potentials for which our previous results apply. In Appendix 5.9, we recall the Helffer-Sjostrand formula and some properties of this formula we will use in the text.

5.2 Notation and basic notions

5.2.1 Notation

Let $X = \mathbb{R}^n$ and for $s \in \mathbb{R}$ let $\mathcal{H}^s$ be the usual Sobolev spaces on X with $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H} = L^2(X)$ whose norm is denoted $\|\cdot\|$. We are mainly interested in the space $\mathcal{H}^1$ defined by the norm $\|f\|_1^2 = \int \left(|f(x)|^2 + |\nabla f(x)|^2\right) \mathrm{d}x$ and its dual space $\mathcal{H}^{-1}$.

We denote q_j the operator of multiplication by the coordinate x_j, $p_j = -\mathrm{i}\partial_j$ and we denote $p = (p_j)_{j=1,\cdots,n}$ and $q = (q_j)_{j=1,\cdots,n}$ considered as operators in $\mathcal{H}$. For $k \in X$ we denote $k \cdot q = k_1 q_1 + \cdots + k_\nu q_n$. If u is a measurable function on X let $u(q)$ be the operator of multiplication by u in $\mathcal{H}$ and $u(p) = \mathcal{F}^{-1} u(q) \mathcal{F}$, where $\mathcal{F}$ is the Fourier transformation:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{\nu}{2}} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} u(x) \mathrm{d}x.$$

If there is no ambiguity we keep the same notation for these operators when considered as acting in other spaces.

We are mainly interested in potentials V which are multiplication operators in the following general sense.

Definition 5.2.1. *A map $V \in \mathscr{B}$ is called a* multiplication operator *if $V e^{ik\cdot q} = e^{ik\cdot q} V$ for all $k \in X$. Or, equivalently, if $V\theta(q) = \theta(q)V$ for all $\theta \in C_c^\infty(X)$.*

As usual $\langle x \rangle = \sqrt{1+|x|^2}$. Then $\langle q \rangle$ is the operator of multiplication by the function $x \mapsto \langle x \rangle$ and $\langle p \rangle = \mathcal{F}^{-1}\langle q \rangle \mathcal{F}$. For real s, t we denote $\mathcal{H}_s^t$ the space defined by the norm

$$\|f\|_{\mathcal{H}_s^t} = \|\langle q \rangle^s f\|_{\mathcal{H}^t} = \|\langle p \rangle^t \langle q \rangle^s f\| = \|\langle q \rangle^s \langle p \rangle^t f\|. \tag{5.1}$$

Note that the dual space of $\mathcal{H}_s^t$ may be identified with $\mathcal{H}_{-s}^{-t}$.

5.2.2 Regularity

Let F', F'' be two Banach space and $T : F' \to F''$ a bounded operator.

Let A a self-adjoint operator.

Let $k \in \mathbb{N}$. we say that $T \in C^k(A, F', F'')$ if, for all $f \in F'$, the map $\mathbb{R} \ni t \to e^{itA} T e^{-itA} f$ has the usual C^k regularity. The following characterisation is available:

Proposition 5.2.2. *$T \in C^1(A, F', F'')$ if and only if $[T, A]$ has an extension in $\mathcal{B}(F', F'')$.*

It follows that, for $k > 1$, $T \in C^k(A, F', F'')$ if and only if $[T, A] \in C^{k-1}(A, F', F'')$.

If T is not bounded, we say that $T \in C^k(A, F', F'')$ if for one $z \notin \sigma(T)$, and thus for any $z \notin \sigma(T)$, $(T - z)^{-1} \in C^k(A, F', F'')$.

Proposition 5.2.3. *For all $k > 1$, we have*

$$C^k(A, F', F'') \subset C^{1,1}(A, F', F'') \subset C^1(A, F', F'').$$

If $F' = F'' = \mathcal{H}$ is an Hilbert space, we note $C^1(A) = C^1(A, \mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$. If T is not bounded, T is of class $C^1(A)$ if and only if $[T, iA] : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{D}(T)^*$ is bounded and, for some $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma(T)$, the set $\{f \in \mathcal{D}(A), R(z)f \in \mathcal{D}(A) \text{ and } R(\bar{z})f \in \mathcal{D}(A)\}$ is a core for A. Remark that, in general, because of the second assumption, it is more difficult to show that T is of class $C^1(A)$ than to show that T is of class $C^1(A, \mathcal{D}(T), \mathcal{D}(T)^*)$. This is not the case if we suppose that the unitary group generated by A leaves $\mathcal{D}(T)$ invariant. For T is self-adjoint, we have the following:

Theorem 5.2.4 (Theorem 6.3.4 from [ABdMG96]). *Let A and T be self-adjoint operator in a Hilbert space $\mathcal{H}$. Assume that the unitary group $\{\exp(iA\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ leaves the domain $D(T)$ of T invariant. Set $\mathcal{G} = D(T)$ endowed with it graph topology. Then*

1. *T is of class $C^1(A)$ if and only if $T \in C^1(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$.*
2. *T is of class $C^{1,1}(A)$ if and only if $T \in C^{1,1}(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$.*

If $\mathcal{G}$ is the form domain of H, we have the following:

Proposition 5.2.5 (see p. 258 of [ABdMG96]). *Let A and T be self-adjoint operators in a Hilbert space $\mathcal{H}$. Assume that the unitary group $\{\exp(iA\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ leaves the form domain $\mathcal{G}$ of T invariant. Then T is of class $C^k(A)$ if and only if $T \in C^k(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$, for all $k \in \mathbb{N}$.*

As previously, since $T : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^*$ is always bounded, it is, in general, easier to prove that $T \in C^k(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ than $T \in C^k(A)$.

5.2.3 The Hardy inequality

To have concrete conditions on the potential, we will use the Hardy inequality. For this reason we recall it:

Proposition 5.2.6. *Assume that $n \geqslant 3$. Let $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. We have*

$$\frac{(n-2)^2}{4}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|x|^2}|f(x)|^2dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^2dx.$$

In particular, this inequality implies that if $B(q)$ is a multiplication operator such that $|q|^2B(q)$ is bounded, if $n \geqslant 3$, then, there is $C > 0$ such that

$$|(f, B(q)f)| \leqslant C\|\nabla f\|^2.$$

5.3 The method of the weakly conjugate operator

In this section, we will recall a version of the Mourre theory in order to obtain a limiting absorption principle near thresholds, called the method of the weakly conjugate operator. This Mourre theory was developed by A. Boutet de Monvel and M. Mantoiu in [BdMM97]. An improvement of this theory was developped by S. Richard in [Ric06] fo the self-adjoint case. Here, we recall a version of this theory present in [BG10] adapted to the non-self-adjoint case.

Let $H^\pm$ two closed operators with a common domain $\mathcal{D}$. We suppose that $(H^+)^* = H^-$. Since $H^\pm$ are densely defined, has common domain and are adjoint of the other, $\Re(H^\pm)$ and $\Im(H^\pm)$ are closable and symmetric on $\mathcal{D}$. Even if they are not self-adjoint, we can remark that $\mathcal{D}$ is a core for them. Therefore $\mathcal{G}$ is a core for them too. We keep the same notation for their closure.

We assume that H^+ is dissipative i.e $\Im(H^+) \geqslant 0$. This implies that $\Im(H^-) \leqslant 0$ and, by the numerical range theorem, we can say that $\sigma(H^\pm)$ is include in the half-plane $\{z \in \mathbb{C}, \pm\Im(z) \geqslant 0\}$. Let S a non negative, injective, self-adjoint operator with form domain $\mathcal{G} = \mathcal{D}(S^{1/2}) \supset \mathcal{D}$. Let $\mathcal{S}$ the completion of $\mathcal{G}$ under the norm $\|f\|_{\mathcal{S}} = \left(\|S^{1/2}f\|\right)^{1/2}$.

We get the following inclusions with continuous and dense embeddings

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{G}^* \subset \mathcal{D}^*.$$

We will need an external operator A, the conjugate operator. Assume A is self-adjoint in $\mathcal{H}$ and $S \in C^1(A)$. Let $W_t = e^{\mathrm{i}tA}$ be the C_0-group associated to A in $\mathcal{H}$. We suppose that W_t stabilizes $\mathcal{G}$ and $\mathcal{S}$. This implies, by duality, that W_t stabilizes $\mathcal{G}^*$ and $\mathcal{S}^*$. Remark that if $[S, \mathrm{i}A] : \mathcal{S} \to \mathcal{S}^*$ is bounded, then the invariance of $\mathcal{S}$ under the C^0-group W_t is a consequence of the invariance of $\mathcal{G}$ (see [BG10, Remark B.1]).

Theorem 5.3.1 (Theorem B.1 of [BG10])**.** *Let $H^\pm$ and A as above. Suppose that $H^\pm \in C^2(A, \mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$ and that there is $c > 0$ such that*

$$\left|(H^\mp f, Ag) - (Af, H^\pm g)\right| \leqslant c\|f\| \cdot \|(H^\pm \pm \mathrm{i})g\|, \tag{5.2}$$

for all $f, g \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}(A)$. Assume that $\pm\Im(H^\pm) \geqslant 0$ and that there is $c_1 \geqslant 0$ such that

$$[\Re(H^\pm), \mathrm{i}A] - c_1\Re(H^\pm) \geqslant S > 0, \tag{5.3}$$

$$\pm c_1[\Im(H^\pm), iA] \geqslant 0,$$

in sense of forms on $\mathcal{G}$. Suppose also there exists $C > 0$ such that

$$\left|(f, [[H^\pm, A], A]f)\right| \leqslant C\|S^{1/2}f\|^2 \tag{5.4}$$

for all $f \in \mathcal{G}$*. Then, there are* c' *and* $\mu_0 > 0$ *such that*

$$\left|(f, (H^{\pm} - \lambda \pm \mathrm{i}\mu)^{-1} f)\right| \leqslant c' \left(\|S^{-1/2} f\|^2 + \|S^{-1/2} A f\|^2 \right) \tag{5.5}$$

for all $0 < \mu < \mu_0$ *and* $\lambda \geqslant 0$ *if* $c_1 > 0$*, and* $\lambda \in \mathbb{R}$ *if* $c_1 = 0$*.*

Remark that, if we want to have (5.3) with $c_1 > 0$, it seems necessary that, if $\Re(H^{\pm}) \geqslant 0$, $[\Re(H^{\pm}), \mathrm{i}A]$ reproduce $\Re(H^{\pm})$. This is the case with the generator of dilations for which we have $[\Delta, \mathrm{i}A_D] = 2\Delta$. But with conjugate operators we want to use, the commutator with the Laplacian does not reproduce the Laplacian Δ. For this reason, we will use Theorem 5.3.1 only in the case $c_1 = 0$.

5.4 The generator of dilations as conjugate operator

In this section, we will see what conditions are sufficient to apply Theorem 5.3.1 with the generator of dilations as conjugate operator. For this, we will recall a result from [BG10] in dimension higher or equal to 3 which illustrate the method of the weakly conjugate operator and we will give a variation of this result. We will also recall a result from B. Simon which show that dimensions 1 and 2 are quite particular.

Using the Hardy inequality and the generator of dilations as conjugate operator, one can show the following result

Theorem 5.4.1 (Theorem C.1, [BG10])**.** *Let* $n \geqslant 3$*. Assume that* $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *satisfy:*

1. V_k *are* Δ*-bounded with bound less than one and* $V_2 \geqslant 0$*;*

2. $\nabla V_k, q \cdot \nabla V_k$ *are* Δ*-bounded and* $|q|^2 (q \cdot \nabla)^2 V_k$ *are bounded;*

3. *There is* $c_1 \in [0, 2)$ *and* $C \in [0, \frac{(2-c_1)(n-2)^2}{4})$ *such that*

$$x \cdot \nabla V_1(x) + c_1 V_1(x) \leqslant \frac{C}{|x|^2}$$

   and

$$-c_1 x \cdot \nabla V_2(x) \geqslant 0$$

   for all $x \in \mathbb{R}^n$*.*

Then H *has no eigenvalue in* $[0, +\infty)$ *and*

$$\sup_{\lambda \in [0, +\infty), \mu > 0} \| |q|^{-1} (H - \lambda + \mathrm{i}\mu)^{-1} |q|^{-1} \| < \infty. \tag{5.6}$$

If $c_1 = 0$*,* H *has no eigenvalue in* $\mathbb{R}$ *and* (5.6) *holds true for* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Using that A_D can be writen as $A_D = q \cdot p - \frac{n\mathrm{i}}{2} = p \cdot q + \frac{n\mathrm{i}}{2}$, we can avoid the condition on the second order derivative of V_1 and V_2 to obtain the following

Theorem 5.4.2. *Let* $n \geqslant 3$*. Let* $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *and* $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$*. Suppose that*

1. V_k *are* Δ*-bounded with bound less than* 1 *and* $V_2 \geqslant 0$*;*

2. ∇V_k *and* $q \nabla V_k$ *are* Δ*-bounded and*

$$|x \nabla V_k(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\};$$

3. *There is* $c_1 \in [0,2)$ *and* $C \in [0, \frac{(2-c_1)(n-2)^2}{4})$ *such that*

$$x \cdot \nabla V_1(x) + c_1 V_1(x) \leqslant \frac{C}{|x|^2}$$

and

$$-c_1 x \cdot \nabla V_2(x) \geqslant 0$$

for all $x \in \mathbb{R}^n$.

Then H *has no eigenvalue in* $[0, +\infty)$ *and*

$$\sup_{\lambda \in [0,+\infty), \mu > 0} \| |q|^{-1} (H - \lambda + \mathrm{i}\mu)^{-1} |q|^{-1} \| < \infty. \tag{5.7}$$

If $c_1 = 0$, H *has no eigenvalue in* $\mathbb{R}$ *and* (5.7) *holds true for* $\lambda \in \mathbb{R}$.

We make few remarks about Theorem 5.4.2:

1. We do not assume any conditions on the second order derivatives which can be usefull if V is a multiplication by a function wich is not C^2 or if V is an oscillating potential (see Theorem 5.8.1).

2. Remark that if $|q|^2 q \cdot \nabla V_1$ is bounded with bound small enough, then Assumption 2 and 3 are satisfied with $c_1 = 0$.

3. Remark that if V is a short range type potential, $q\nabla V_k$ is not necessary Δ-bounded. For this reason, Theorems 5.4.1 and 5.4.2 do not apply to short range potentials.

Proof. [Theorem 5.4.2] Since the proof is quite similar to the proof of Theorem 5.4.1, we will only explain what changes. In particular, for conditions on the first order commutator (Assumptions 3), nothing changes. The idea is to prove, using Hardy inequality that the first order commutator is positive and that S has the form $c\Delta$. In [BG10], they use, in a second time, that V is of class $C^2(A_D)$ and the Hardy inequality to show the second order commutator estimate. Since we want to use $S = c\Delta$ with $c = 2 - c_1$, we can see that $\mathcal{G} = \mathcal{H}^1$ and $\|f\|_{\mathcal{S}} = \|pf\|_{L^2}$. Remark that $e^{\mathrm{i}tA_D}\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}^1$. In particular, we do not need to suppose that $[[V, \mathrm{i}A_D], \mathrm{i}A_D]$ is Δ-bounded to obtain the regularity $C^2(A_D)$ but only that this commutator is bounded on $\mathcal{G}$ to $\mathcal{G}^*$.

For $V = V_1, V_2$, we have

$$[V, \mathrm{i}A_D] = -q \cdot \nabla V.$$

Thus

$$\begin{aligned} [[V, \mathrm{i}A_D], \mathrm{i}A_D] &= -[q \cdot \nabla V, \mathrm{i}A_D] \\ &= -\mathrm{i}q \cdot \nabla V A_D + \mathrm{i}A_D q \cdot \nabla V \\ &= -\mathrm{i}(q \cdot \nabla V)(q \cdot p) + \mathrm{i}(p \cdot q)(q \cdot \nabla V) - nq \cdot \nabla V. \end{aligned} \tag{5.8}$$

In particular, if we assume that $|q| q \cdot \nabla V_k$ is bounded, then $H \in C^2(A_D, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^{-1})$.

Let $f \in \mathcal{S}$. For the first term of the right side of (5.8), we have:

$$\begin{aligned} |(f, (q \cdot \nabla V)(q \cdot p) f)| &= |((q \cdot \nabla V) q f, pf)| \\ &\leqslant \|(q \cdot \nabla V) q f\| \|pf\| \\ &\leqslant \||q|^2 (q \cdot \nabla V)\|_\infty \||q|^{-1} f\| \|pf\| \\ &\leqslant \frac{2}{n-2)} \||q|^2 (q \cdot \nabla V)\|_\infty \|pf\|^2. \end{aligned}$$

A similar proof can be made for the second term. For the last term, from Hardy inequality, we deduce that

$$|(f,(q\cdot\nabla V)f)| \leqslant \frac{4}{(n-2)^2}\||q|^2(q\cdot\nabla V)\|_\infty\|pf\|^2.$$

This implies that the second order comutator is bounded from $\mathcal{S}$ to $\mathcal{S}^*$. For the rest of the proof, we follow the proof of Theorem C.1 of [BG10]. □

Remark that in all cases, we assume that the dimension n is higher than 3 to use the Hardy inequality. The case of dimension $n=1$ or $n=2$ is quite particular. In fact, in dimension $n=1$ or $n=2$, for a large class of potential, we can prove the existence of a negative eigenvalue which is a contradiction with the result which said that if $c_1=0$, H has no real eigenvalue.

Theorem 5.4.3 (Theorem 2.5,[Sim76])**.** *Let $n=1$. Let V obey $\int(1+x^2)|V(x)|dx<\infty$, V not a.e zero. Then $H=\Delta+\lambda V$ has a negative eigenvalue for all $\lambda>0$ if and only if $\int V(x)dx\leqslant 0$.*

Similarly in dimension 2, we have

Theorem 5.4.4 (Theorem 3.4, [Sim76])**.** *Let $n=2$. Let V obey $\int|V(x)|^{1+\delta}d^2x<\infty$ and $\int(1+|x|^\delta)|V(x)|d^2x<\infty$ for some $\delta>0$, V not a.e zero. Then $H=\Delta+\lambda V$ has a negative eigenvalue for all small positive λ if and only if $\int V(x)dx\leqslant 0$.*

These dimensions are very different from the others. In fact, by the Lieb-Thirring inequality (see [Lie00]), we know that, in dimension $n\geqslant 3$, if the negative part of V is in $L^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ with norm small enough, then $H=\Delta+V$ does not have any negative eigenvalue. This two results imply that in dimensions 1 and 2, a Schrödinger operator with a non positive potential which satisfies assumptions like in Theorems 5.4.1 and 5.4.2 can have negative eigenvalue. Thus, we have to assume some positivity of the first order commutator or to use $c_1>0$.

5.5 A conjugate operator with decay in the position variable

Now we will see how we can change the conjugate operator to obtain other conditions on the potential which require less decay on the derivatives of potentials. To do this, we will apply Theorem 5.3.1 with the following conjugate operator A_F.

Let $n\geqslant 3$, $0\leqslant\mu<1$ and let $F(q)=q\langle q\rangle^{-\mu}$. Let

$$A_F=\frac{1}{2}(p\cdot F(q)+F(q)\cdot p)=\langle q\rangle^{-\mu/2}A_D\langle q\rangle^{-\mu/2}.$$

Notice that, by Proposition 4.2.3 of [ABdMG96], we know that A_F is essentially self-adjoint on C_c^∞. By a simple computation on the form domain C_c^∞, we have

$$\begin{aligned}[\Delta,\mathrm{i}A_F] &= [\Delta,\mathrm{i}\langle q\rangle^{-\mu/2}]A_D\langle q\rangle^{-\mu/2}+\langle q\rangle^{-\mu/2}[\Delta,\mathrm{i}A_D]\langle q\rangle^{-\mu/2}\\ &\quad+\langle q\rangle^{-\mu/2}A_D[\Delta,\mathrm{i}\langle q\rangle^{-\mu/2}]\\ &= 2\langle q\rangle^{-\mu/2}\left(\Delta-\mu A_D\langle q\rangle^{-2}A_D\right)\langle q\rangle^{-\mu/2}.\end{aligned}$$

For all $f\in\mathcal{H}^1$, by Hardy inequality, we have

$$\begin{aligned}(f,A_D\langle q\rangle^{-2}A_Df) &= \|\langle q\rangle^{-1}A_Df\|^2\\ &\leqslant \left(\|q\langle q\rangle^{-1}\cdot pf\|+\frac{n}{2}\|\langle q\rangle^{-1}f\|\right)^2\\ &\leqslant \left(1+\frac{n}{n-2}\right)^2\|\nabla f\|^2.\end{aligned}$$

In particular, if $0 \leqslant \mu < (1+\frac{n}{n-2})^{-2}$,

$$[\Delta, \mathrm{i}A_F] \geqslant 2(1-\mu(1+\frac{n}{n-2})^2)\langle q\rangle^{-\mu/2}\Delta\langle q\rangle^{-\mu/2} \geqslant 0.$$

Thus, we can take $S = c\langle q\rangle^{-\mu/2}\Delta\langle q\rangle^{-\mu/2}$ with $c > 0$ with domain $\mathcal{D}(S) = \mathcal{H}^2$. Remark that since $S^{1/2} = \sqrt{c}|p|\langle q\rangle^{-\mu/2}$, $\mathcal{G} = \mathcal{D}(S^{1/2}) = \mathcal{H}^1$. In particular, by Proposition 4.2.4 of [ABdMG96], we know that the C_0-group associated to A_F leaves $\mathcal{G}$ invariant. To prove that the C_0-group associated to A_F leaves $\mathcal{S}$ invariant, we will show that $[S, \mathrm{i}A_F]$ is bounded from $\mathcal{S}$ to $\mathcal{S}^*$. We will consider this commutator as a form with domain C_c^∞ and we use the same notation for its closure. By a simple computation,

$$\begin{aligned}
[S, \mathrm{i}A_F] &= c[\langle q\rangle^{-\mu/2}, \mathrm{i}A_F]\Delta\langle q\rangle^{-\mu/2} + c\langle q\rangle^{-\mu/2}[\Delta, \mathrm{i}A_F]\langle q\rangle^{-\mu/2} \\
&\quad + c\langle q\rangle^{-\mu/2}\Delta[\langle q\rangle^{-\mu/2}, \mathrm{i}A_F] \\
&= c\langle q\rangle^{-\mu/2}[\Delta, \mathrm{i}A_F]\langle q\rangle^{-\mu/2} \\
&\quad + c\frac{\mu}{2}\left(\langle q\rangle^{-\mu/2}|q|^2\langle q\rangle^{-2}\Delta\langle q\rangle^{-\mu/2} + \langle q\rangle^{-\mu/2}\Delta|q|^2\langle q\rangle^{-2}\langle q\rangle^{-\mu/2}\right).
\end{aligned}$$

Using the form of $[\Delta, \mathrm{i}A_F]$, by a simple computation, we can see that the first term on the right hand side is bounded from $\mathcal{S}$ to $\mathcal{S}^*$. For the other term, by a simple computation, we have:

$$\begin{aligned}
&\langle q\rangle^{-\mu/2}|q|^2\langle q\rangle^{-2}\Delta\langle q\rangle^{-\mu/2} + \langle q\rangle^{-\mu/2}\Delta|q|^2\langle q\rangle^{-2}\langle q\rangle^{-\mu/2} \\
=\ &\langle q\rangle^{-\mu/2}\left(2p|q|^2\langle q\rangle^{-2}p + [p,[p,|q|^2\langle q\rangle^{-2}]]\right)\langle q\rangle^{-\mu/2}
\end{aligned}$$

By Hardy inequality, since $|q|^2[p,[p,|q|^2\langle q\rangle^{-2}]$ is bounded, we can see that this term is bounded from $\mathcal{S}$ to $\mathcal{S}^*$. Thus, by [BG10, Remark B.1], the C_0-group associated to A_F leaves $\mathcal{S}$ invariant. Therefore, we have the following:

Theorem 5.5.1. *Let $n \geqslant 3$. Let $0 \leqslant \mu < (1+\frac{n}{n-2})^{-2}$. Let $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ and $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$. Assume that*

1. *V_k are Δ-compact and $V_2 \geqslant 0$;*
2. *$q\langle q\rangle^{-\mu} \cdot \nabla V_k$ are Δ-compact;*
3. *There is*
$$C > -\frac{(n-2)^2(1-\mu(1+\frac{n}{n-2})^2)}{2}$$
such that $-x \cdot \nabla V_1(x) \geqslant \frac{C}{|x|^2}$ for all $x \in \mathbb{R}^n$;
4. *There is $C' > 0$ such that for all $x \in \mathbb{R}^n$, $|(x\langle x\rangle^{-\mu} \cdot \nabla)^2 V_k(x)| \leqslant C'|x|^{-2}\langle x\rangle^{-\mu}$.*

Then Theorem 5.3.1 applies and

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R},\eta>0} \|\langle q\rangle^{-\mu/2}|q|^{-1}(H-\lambda+\mathrm{i}\eta)^{-1}|q|^{-1}\langle q\rangle^{-\mu/2}\| < \infty.$$

Moreover, H does not have eigenvalue in $\mathbb{R}$.

To prove this theorem, we use the abstract result of the method of the weakly conjugate operator and the Hardy inequality as in the proof of Theorems 5.4.1 and 5.4.2.

If $n = 1$, as we saw in the previous section, it is not sufficient to suppose only that the derivatives of V have sufficient decay at infinity. To avoid the possible negative eigenvalue, we can assume some positivity of the first order commutator of the potential V_1. To simplify notation, remark that

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (1-\mu)\langle x\rangle^{-\mu} + \mu\langle x\rangle^{-\mu-2}, \\
F''(x) &= -\mu x\langle x\rangle^{-\mu-2}\left(1-\mu+(\mu+2)\langle x\rangle^{-2}\right), \\
F'''(x) &= \mu(1-\mu)(1+\mu)\langle x\rangle^{-\mu-2} + 4\mu(\mu+2)\langle x\rangle^{-\mu-4} \\
&\quad + \mu(\mu+2)(\mu+4)\langle x\rangle^{-\mu-6}
\end{aligned}$$

Theorem 5.5.2. *Let $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Let $F(x) = x\langle x\rangle^{-\mu}$. Let $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ and $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$. Assume that*

1. *V_i are Δ-compact and $V_2 \geqslant 0$;*
2. *$F(q)V_i'$ are Δ-compact;*
3. $$W(x) = -F(x)V_1'(x) - \frac{1}{2}F'''(x) \geqslant 0$$
   for all $x \in \mathbb{R}$;
4. *There is $C_1, C_2 > 0$ such that*
   $$\left|2F(x)W'(x) + F'''(x)F'(x) + (F''(x))^2\right| \leqslant C_1 W(x), \forall x \in \mathbb{R}$$
   and
   $$\left|F(x)^2 V_2''(x) + F(x)F'(x)V_2'(x)\right| \leqslant C_2 W(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Then Theorem 5.3.1 applies and there are $c > 0$ and $\mu_0 > 0$ such that

$$\left|(f, (H - \lambda + \mathrm{i}\eta)^{-1} f)\right| \leqslant c\left(\|S^{-1/2}f\|^2 + \|S^{-1/2}A_F f\|^2\right),$$

with $S = 2pF'(q)p + W(q)$ and $A_F = \frac{1}{2}(pF(q) + F(q)p)$.

Moreover, H does not have eigenvalue in $\mathbb{R}$.

Remark that, a priori, if $\mu > 0$, we do not impose that $xV_i'(x)$ is bounded; Theorem 5.5.2 applies if $xV_i'(x)$ as the same size as $\langle x\rangle^{\mu}$. In particular, if $\mu = 1$, we only require that V_i' is a bounded function.

Proof. [Theorem 5.5.2] To prove this result, we only have to show that our assumptions imply assumptions of Theorem 5.3.1. Remark that we can write

$$A_F = \frac{1}{2}(pF(q) + F(q)p) = pF(q) + \frac{\mathrm{i}}{2}F'(q) = F(q)p - \frac{\mathrm{i}}{2}F'(q).$$

By a simple computation, we have:

$$\begin{aligned}
[\Delta, \mathrm{i}A_F] &= [p^2, \mathrm{i}A_F] \\
&= p[p, \mathrm{i}A_F] + [p, \mathrm{i}A_F]p \\
&= p[p, \mathrm{i}F(q)p] + [p, \mathrm{i}pF(q)]p + \frac{\mathrm{i}}{2}\left([p, \mathrm{i}F'(q)]p - p[p, \mathrm{i}F'(q)]\right) \\
&= 2p[p, \mathrm{i}F(q)]p - \frac{1}{2}[p, \mathrm{i}[p, \mathrm{i}F'(q)]] \\
&= 2pF'(q)p - \frac{1}{2}F'''(q).
\end{aligned}$$

Thus, we have:

$$\begin{aligned}
[H, \mathrm{i}A_F] &= 2pF'(q)p - \frac{1}{2}F'''(q) - F(q)V_1'(q) - \mathrm{i}F(q)V_2'(q) \\
&= 2pF'(q)p + W(q) - \mathrm{i}F(q)V_2'(q) \\
&= S - \mathrm{i}F(q)V_2'(q).
\end{aligned}$$

Therefore, by assumptions, we know that (5.2) and (5.3) are satisfied. To prove that (5.4) is true, we have to calculate the second order commutator. Since $W(q)$ is a multiplication operator, we have

$$[W, \mathrm{i}A_F] = -F(q)W'(q).$$

By a similar calculus on $-\mathrm{i}F(q)V_2'(q)$, we deduce that, by assumptions, $[[V_2, \mathrm{i}A_F], \mathrm{i}A_F]$ is bounded from $\mathcal{S}$ to $\mathcal{S}^*$.

For the last part of the second order commutator, we have:

$$\begin{aligned}
[pF'(q)p, \mathrm{i}A_F] &= [p, \mathrm{i}A_F]F'(q)p + p[F'(q), \mathrm{i}A_F]p + pF'(q)[p, \mathrm{i}A_F] \\
&= p[p, \mathrm{i}F(q)]F'(q)p + \frac{\mathrm{i}}{2}[p, \mathrm{i}F'(q)]F'(q)p - pF(q)F''(q)p \\
&\quad +pF'(q)[p, \mathrm{i}F(q)]p - \frac{\mathrm{i}}{2}pF'(q)[p, \mathrm{i}F'(q)] \\
&= p\left(2F'(q)^2 - F(q)F''(q)\right)p + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(F''(q)F'(q)p - pF'(q)F''(q)\right) \\
&= p\left(2F'(q)^2 - F(q)F''(q)\right)p - \frac{1}{2}[p, \mathrm{i}F''(q)F'(q)] \\
&= p\left(2F'(q)^2 - F(q)F''(q)\right)p - \frac{1}{2}\left(F'''(q)F'(q) + F''(q)^2\right).
\end{aligned}$$

Thus, we have

$$\begin{aligned}
[[H, \mathrm{i}A_F], \mathrm{i}A_F] &= p\left(2F'(q)^2 - F(q)F''(q)\right)p \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(2F(q)W'(q) + F'''(q)F'(q) + F''(q)^2\right) + \mathrm{i}[[V_2, \mathrm{i}A_F], \mathrm{i}A_F].
\end{aligned}$$

Since $(2F'(q)^2 - F(q)F''(q))F'(q)^{-1}$ is bounded, by assumptions, (5.4) is satisfied and, thus, Theorem 5.5.2 is a consequence of Theorem 5.3.1 □

5.6 A conjugate operator with decay in the momentum variable

In this section, we will prove Theorem 5.1.3.

Let $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a positive function of class C^∞, bounded with all derivatives bounded. We assume moreover that, for all, $i = 1, \cdots, n$, $x_i\partial_{x_i}\lambda(x)$ is bounded.

Let

$$A_u = \frac{1}{2}(q \cdot p\lambda(p) + p\lambda(p) \cdot q).$$

By [ABdMG96, Proposition 7.6.3], we know that A_u is essentially self-adjoint on $L^2(\mathbb{R}^n)$ with domain C_c^∞. Moreover,

$$[\Delta, \mathrm{i}A_u] = 2\Delta\lambda(p).$$

Thus, let $S = c\Delta\lambda(p)$ with $c \in (0, 2]$. Since $\lambda(p) > 0$, $\lambda(p)$ is injective. This implies that S is injective and positive. Moreover $\mathcal{G} = \mathcal{D}(S^{1/2}) = \mathcal{H}^m$ with $m \in [0, 1]$. In particular, since $\exp(\mathrm{i}tA_u)$ leaves $\mathcal{H}_s^t$ invariants (see [ABdMG96, Proposition 4.2.4]), it also leaves $\mathcal{G}$ invariant. Moreover, if we denote $S_1 = \Delta\lambda(p)$, we have:

$$[S_1, \mathrm{i}A_u] = 2\Delta\lambda^2(p) + \lambda(p)\sum_{k=1}^{n} p_k^3\partial_{x_k}\lambda(p).$$

In particular, for $f \in \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(A_u)$:

$$\begin{aligned}
|(f, [S_1, \mathrm{i}A_u]f)| &\leqslant 2\|S_1^{1/2} f\| \|\lambda(p) S_1^{1/2} f\| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \left| (p_k \lambda^{1/2}(p) f, p_k \partial_{x_k} \lambda(p) p_k \lambda^{1/2}(p) f) \right| \\
&\leqslant 2\|\lambda(p)\| \|S_1^{1/2} f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|p_k \partial_{x_k} \lambda(p)\| \|p_k \lambda^{1/2}(p) f\|^2 \\
&\leqslant \left(2\|\lambda(p)\| + \sup_k \|p_k \partial_{x_k} \lambda(p)\| \right) \|S_1^{1/2} f\|^2.
\end{aligned}$$

This implies $S \in C^1(A_u, \mathcal{S}, \mathcal{S}^*)$ which implies by [BG10, Remark B.1] the invariance of $\mathcal{S}$ under the unitary group generated by A_u. Therefore $S \in C^1(A_u)$ and by [BG10, Remark B.1], we can show that $\exp(\mathrm{i}tA_u)$ leaves $\mathcal{S}$ invariant. Using A_u as conjugate operator in Theorem 5.3.1, we have the following

Lemma 5.6.1. *Let $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ and $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$. Assume that*

1. *V_i are Δ-bounded with bound less than 1 and $V_2 \geqslant 0$;*
2. *$[V_i, \mathrm{i}A_u]$ and $[[V, \mathrm{i}A_u], \mathrm{i}A_u]$ are Δ-bounded (or $\mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ bounded) and*
$$|(f, [[V_i, \mathrm{i}A_u], \mathrm{i}A_u]f)| \leqslant C\|p\lambda^{1/2}(p) f\|^2; \tag{5.9}$$
3. *There is $C' < 2$ such that*
$$(f, [V_1, \mathrm{i}A_u]f) \geqslant C'\|p\lambda^{1/2}(p) f\|^2. \tag{5.10}$$

Then Theorem 5.3.1 applies and

$$\sup_{\rho\in\mathbb{R}, \eta>0} \|\lambda^{1/2}(p)|q|^{-1}(H - \rho + \mathrm{i}\eta)^{-1}|q|^{-1}\lambda^{1/2}(p)\| < \infty.$$

Moreover, H does not have eigenvalue in $\mathbb{R}$.

As in the previous section, we will give some concrete conditions on the potential which permits to apply Theorem 5.3.1.

Theorem 5.6.2. *Let $n \geqslant 3$. Let $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ and $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$ with $V_2 \geqslant 0$. Assume that $|q|^2 V_1$ and $|q|V_1$ are bounded with bound small enough and that $\langle q\rangle^3 V_i$ is bounded. Then Theorem 5.3.1 applies. In particular, for all $1 \leqslant \mu < 2$,*

$$\sup_{\rho\in\mathbb{R}, \eta>0} \|\langle p\rangle^{-\mu/2}|q|^{-1} R(\rho - \mathrm{i}\eta)|q|^{-1}\langle p\rangle^{-\mu/2}\| < \infty.$$

Moreover, H does not have eigenvalue in $\mathbb{R}$.

Proof. Let $0 < \mu < 2$ and $\lambda(p) = \langle p\rangle^{-\mu}$. We can write:

$$A_u = u(p) \cdot q + \frac{i}{2}(divu)(p) = q \cdot u(p) - \frac{i}{2}(divu)(p).$$

To alleviate the notations, let $S_1 = p\langle p\rangle^{-\mu/2}$. Assume that $|q|^3 V_i$ is bounded. Remark that, by assumptions on λ, we ever prove that Δ is of class $C^2(A_u, \mathcal{H}^2, L^2)$. If $\mu \geqslant 1$, we can show that if V_i satisfies $|q|^2 V_i$ is bounded, then V_i is of class $C^2(A_u, \mathcal{H}^2, L^2)$ (voir [Mar18b]). This implies by sum that $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$ is of class $C^2(A_u, \mathcal{H}^2, L^2)$. In particular, for $V = V_i$,

$$\begin{aligned}
[V, \mathrm{i}A_u] &= V\mathrm{i}A_u - \mathrm{i}A_u V \\
&= qV \cdot iu(p) + \frac{1}{2}V(divu)(p) - iu(p) \cdot qV + \frac{1}{2}(divu)(p)V \\
&= [qV, iu(p)] + \frac{1}{2}\left(V(divu)(p) + (divu)(p)V\right).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

For the first term, we will use the Helffer-Sjöstrand formula (see 5.9):

$$\begin{aligned}
[qV, iu(p)] &= \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi^{\mathbb{C}}}{\partial\bar{z}}(z-p)^{-1}[qV, ip](z-p)^{-1}dz\wedge d\bar{z} \\
&= -\frac{1}{2\pi}p\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi^{\mathbb{C}}}{\partial\bar{z}}(z-p)^{-1}qV(z-p)^{-1}dz\wedge d\bar{z} \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi^{\mathbb{C}}}{\partial\bar{z}}(z-p)^{-1}qV(z-p)^{-1}dz\wedge d\bar{z}p \\
&= -\frac{1}{2\pi}S_1\langle p\rangle^{\mu/2}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi^{\mathbb{C}}}{\partial\bar{z}}(z-p)^{-1}qV(z-p)^{-1}dz\wedge d\bar{z} \\
&\quad \langle p\rangle^{\mu/2}(p+i)^{-1}(S_1+\mathrm{i}\langle p\rangle^{-\mu/2}) \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}(S_1+\mathrm{i}\langle p\rangle^{-\mu/2})(p+i)^{-1}\langle p\rangle^{\mu/2} \\
&\quad \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi^{\mathbb{C}}}{\partial\bar{z}}(z-p)^{-1}qV(z-p)^{-1}dz\wedge d\bar{z}\langle p\rangle^{\mu/2}S_1
\end{aligned}$$

where $\phi^{\mathbb{C}}$ is an almost analytic extension of u.
We can remark that, since $\mu < 2$, $(p+i)^{-1}\langle p\rangle^{\mu/2}$ is bounded with bound less than 1. Denote

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi^{\mathbb{C}}}{\partial\bar{z}}(z-p)^{-1}qV(z-p)^{-1}dz\wedge d\bar{z}.$$

Since $|q|V$ is bounded, we have

$$\begin{aligned}
\left\|\langle p\rangle^{\mu/2}I\right\| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int\left|\frac{\partial\phi^{\mathbb{C}}}{\partial\bar{z}}\right|\frac{\langle x\rangle^{\mu/2}}{|y|}\|qV\||y|^{-1}dx\wedge dy \\
&\leqslant C_1\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{|y|\leqslant C_2\langle x\rangle}\langle x\rangle^{-(2+\mu/2)}dx\wedge dy \\
&\leqslant C_3,
\end{aligned}$$

and similarly for $\|I\langle p\rangle^{\mu/2}\|$. Remark that this bound depends on $\|qV\|_\infty$.
Moreover, since $|q|^2V$ is bounded, by Hardy inequality, for all $f\in\mathcal{D}(S^{1/2})$

$$|(f,[qV, iu(p)]f)| \leqslant (1+\frac{2}{n-2})(\left\|\langle p\rangle^{\mu/2}I\right| + \left\|I\langle p\rangle^{\mu/2}\right|)\|S_1f\|^2 \leqslant C\||q|^2V\|_\infty\|S_1f\|^2,$$

where C depends only of μ and n. For the second term of (5.11),

$$\begin{aligned}
V(divu)(p) &= V\langle p\rangle^{-\mu}(n-\mu\Delta\langle p\rangle^{-2}) \\
&= \langle p\rangle^{-\mu/2}V(n-\mu\Delta\langle p\rangle^{-2})\langle p\rangle^{-\mu/2} \\
&\quad +[V,\langle p\rangle^{-\mu/2}](n-\mu\Delta\langle p\rangle^{-2})\langle p\rangle^{-\mu/2}.
\end{aligned}$$

By Hardy inequality, if $|q|^2V$ is bounded,

$$\left|(f,\langle p\rangle^{-\mu/2}V(n-\mu\Delta\langle p\rangle^{-2})\langle p\rangle^{-\mu/2}f)\right| \leqslant \|n-\mu\Delta\langle p\rangle^{-2}\|\||q|^2V\|\|S_1f\|^2.$$

As previously, we also have

$$\left|(f,[V,\langle p\rangle^{-\mu/2}](n-\mu\Delta\langle p\rangle^{-2})\langle p\rangle^{-\mu/2}f)\right| \leqslant C'\|n-\mu\Delta\langle p\rangle^{-2}\|\||q|V\|\|S_1f\|^2,$$

where C' depends only of μ. Therefore, as for $(divu)(p)V$, by (5.11), we have

$$|(f,[V,\mathrm{i}A_u]f)| \leqslant C(\||q|^2V\|_\infty + \||q|V\|_\infty)\|S_1f\|^2.$$

In particular, if $\||q|^2V\|_\infty$ and $\||q|V\|_\infty$ are small enough, then V_1 satisfies (5.10).

For the second order commutator, we have

$$\begin{aligned}[][V,\mathrm{i}A_u],\mathrm{i}A_u] &= -VA_uA_u+2A_uVA_u-A_uA_uV\\ &= -V(q\cdot u(p)-\frac{i}{2}(divu)(p))^2\\ &\quad +(u(p)\cdot q+\frac{i}{2}(divu)(p))V(q\cdot u(p)-\frac{i}{2}(divu)(p))\\ &\quad -(u(p)\cdot q+\frac{i}{2}(divu)(p))^2V\\ &= [q^2V,u(p)]u(p)+u(p)[q^2V,u(p)]+B\end{aligned}$$

where B depends only of the first and second order derivatives of u. As previously, by Helffer-Sjöstrand formula and Hardy inequality, we can see that

$$|(f,[q^2V,u(p)]f)| \leqslant C''\||q|^3V\|\|S_1f\|^2.$$

For the term with B, as for $V(divu)(p)$, we can show that

$$|(f,Bf)| \leqslant C'''(\||q|^3V\|+\||q|^2V\|+\||q|V\|)\|S_1f\|^2.$$

Thus V satisfies (5.9). □

5.7 Other possible conjugate operators

Let $k\in\mathbb{N}^*$, $k<n$. We can write $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$. Denote $(x,y)\in\mathbb{R}^n$ where $x\in\mathbb{R}^k$ and $y\in\mathbb{R}^{n-k}$.

Since we only have to assume that S is injective, we can take a conjugate operator A of the form $A=A_k\otimes\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n-k}}$ where A_k is one of the previous conjugate operators (A_D,A_F,A_u) on $L^2(\mathbb{R}^k)$. We obtain the same results, with similar proofs, that previously with the operator q of multiplication by (x,y) replaced by the operator q_x of multiplication by x and the gradient ∇ replaced by the gradient ∇_x having only derivatives on x. For Theorem 5.4.1, we get

Theorem 5.7.1. *Let $k\geqslant 3$. Let $V_1,V_2\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ and $H=\Delta+V_1+\mathrm{i}V_2$. Assume that*

1. *V_i are Δ-bounded with bound less than one 1 et $V_2\geqslant 0$;*
2. *∇_xV_i and $q_x\nabla_xV_i$ are Δ-bounded and*
$$\left|(x\nabla_x)^2V_i(x,y)\right| \leqslant \frac{C}{|x|^2} \quad \forall x\in\mathbb{R}^k\backslash\{0\};$$
3. *There is $C'\in[0,(k-2)^2/2)$ such that*
$$x\nabla_xV_1(x,y) \quad \leqslant \quad \frac{C'}{|x|^2};$$

Then Theorem 5.3.1 applies and

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R},\eta>0}\||q_x|^{-1}(H-\lambda+\mathrm{i}\eta)^{-1}|q_x|^{-1}\|<\infty.$$

Moreover, H does not have eigenvalue in $\mathbb{R}$.

Remark that, as in Sections 5.5 and 5.6, since we can not obtain the laplacian in the expression of the first order commutator between H and A, we can not use a constant $c_1 > 0$.

For Theorem 5.1.3, we have the following

Theorem 5.7.2. *Let $k \geqslant 3$. Let $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ and $H = \Delta + V_1 + \mathrm{i}V_2$ with $V_2 \geqslant 0$. Assume that $|q_x|^2 V_1$ and $|q_x| V_1$ are bounded with bound small enough and that $\langle q_x\rangle^3 V_i$ is bounded. Then Theorem 5.3.1 applies. In particular, for all $1 \leqslant \mu < 2$,*

$$\sup_{\rho\in\mathbb{R},\eta>0} \|\langle p_x\rangle^{-\mu/2}|q_x|^{-1}(H-\rho+\mathrm{i}\eta)^{-1}|q_x|^{-1}\langle p_x\rangle^{-\mu/2}\| < \infty.$$

Moreover, H does not have eigenvalue in $\mathbb{R}$.

This choice of conjugate operator permits to consider potentials V of the form $V = W \otimes W'$ where $W : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ has good properties of decrease and of regularity and $W' : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ is bounded with a bound small enough. In particular, no conditions of decrease or on the derivatives of W' are imposed.

5.8 An oscillating potential

In this section, we will see what conditions our different results impose on an oscillating potential to use Theorem 5.3.1 with this potential for V_1.

Let $n \geqslant 3$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k, w \in \mathbb{R}^*$ and $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $\kappa = 1$ on $[-1, 1]$ and $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$. Let

$$W_{\alpha\beta}(x) = w(1-\kappa(|x|))\frac{\sin(k|x|^\alpha)}{|x|^\beta}. \tag{5.12}$$

Notice that this potential was already studied in [BAD79, DMR91, DR83a, DR83b, JM17, Mar18b, RT97a, RT97b] but the limiting absorption principle was only proved for high energy, far from the threshold zero.

Remark that $W_{\alpha\beta}$ does not satisfy assumptions of Theorem 5.1.1. In fact, because of the oscillations, $-x \cdot \nabla W_{\alpha\beta}$ is not positive. Moreover, if $\alpha > 0$, $x \cdot \nabla W_{\alpha\beta}$ can be unbounded.

By a simple calculus, we can see that

$$x \cdot \nabla W_{\alpha\beta}(x) = -w\kappa'(|x|)\frac{\sin(k|x|^\alpha)}{|x|^{\beta-1}} - \beta W_{\alpha\beta}(x) + kw\alpha(1-\kappa(|x|))\frac{\cos(k|x|^\alpha)}{|x|^{\beta-\alpha}}. \tag{5.13}$$

We have the following

Theorem 5.8.1. *Let $W_{\alpha\beta}$ as above.*

- *If $\beta \geqslant 2$ and $\beta - 2\alpha \geqslant 2$, then, for w small enough, Theorem 5.4.1 applies with $V_1 = W_{\alpha\beta}$ and $V_2 = 0$.*
- *If $\beta \geqslant 2$ and $\beta - \alpha \geqslant 2$, then, for w small enough, Theorem 5.4.2 applies with $V_1 = W_{\alpha\beta}$ and $V_2 = 0$.*
- *If $\beta \geqslant 3$, then, for w small enough, Theorem 5.1.3 applies with $V_1 = W_{\alpha\beta}$ and $V_2 = 0$.*

We make some remarks about this result:

1. Remark that the condition $\beta \geqslant 2$ and $\beta - \alpha \geqslant 2$ is satisfied if we assume $\beta \geqslant 2$ and $\beta - 2\alpha \geqslant 2$.

2. For this type of potential, the Limiting Absorption Principle was already proved on all compact subset of $(0,+\infty)$ (see [JM17, Mar18b]). Moreover, by the Lieb-Thirring inequality, we already know that, for w small enough, there is no negative eigenvalue. Here, we show that, moreover, a Limiting Absorption Principle can be proved on all $\mathbb{R}$ and thus that zero is not an eigenvalue.

3. We always assume that $V_2 = 0$ but we can choose
$$V_2(x) = (1-\kappa(|x|))\frac{\sin(k|x|^{\gamma})+1}{|x|^{\delta}}$$
with similar conditions on γ, δ.

4. If we want to use Theorem 5.1.3, remark that no conditions are impose on α. In particular, $W_{\alpha\beta}$ can have high oscillations at infinity and we can replace $|x|^{\alpha}$ by $e^{|x|^2}$ or another function with the same conditions on β.

5. As it was explain in section 5.7, if we write $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, with $k \geqslant 3$, we have the same conditions if $V_1(x,y) = W_{\alpha\beta}(x)W(y)$ for all $(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ with W bounded and Δ-compact.

Proof. [Theorem 5.8.1] By (5.13), we can see that if $\beta \geqslant 2$ and $\beta - \alpha \geqslant 2$, then $q \cdot \nabla V_1 \geqslant \frac{c}{|x|^2}$, with $c \geqslant 0$ small enough if w is small enough.

- By a simple computation, we can remark that $(q\cdot\nabla)^2 V_1(x) = B_1(x) - k^2\alpha^2(1-\kappa(|x|))\frac{\sin(k|x|^{\alpha})}{|x|^{\beta-2\alpha}}$ where $|q|^2 B_1$ is bounded if $\beta \geqslant 2$ and $\beta - \alpha \geqslant 2$. Therefore, if $\beta - 2\alpha \geqslant 2$, Theorem 5.4.1 applies.

- Remark that we already prove that if $\beta \geqslant 2$ and $\beta - \alpha \geqslant 2$, then $q \cdot \nabla V_1 \geqslant \frac{c}{|x|^2}$, with $c \geqslant 0$. Therefore, Theorem 5.4.2 applies.

- If $\beta \geqslant 3$, then $|q|^3 W_{\alpha\beta}$ is bounded. Moreover, if w is small enough, $\||q|^2 W_{\alpha\beta}\|_{\infty}$ is small enough. Thus Theorem 5.1.3. □

5.9 Appendix : The Helffer-Sjöstrand formula

Let $ad_B^1(T) = [T,B]$ be the commutator. We denote $ad_B^p(T) = [ad_B^{p-1}(T), B]$ the iterated commutator. Furthermore, if T is bounded, T is of class $C^k(B)$ if and only if for all $0 \leqslant p \leqslant k$, $ad_B^p(T)$ is bounded.

Proposition 5.9.1 ([DG97] and [Mø00]). *Let $\varphi \in \mathcal{S}^{\rho}$, $\rho \in \mathbb{R}$. For all $l \in \mathbb{R}$, there is a smooth function $\varphi^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, called an almost-analytic extension of φ, such that :*

$$\varphi^{\mathbb{C}}_{|\mathbb{R}} = \varphi \qquad \frac{\partial \varphi^{\mathbb{C}}}{\partial \bar{z}} = c_1 \langle \Re(z)\rangle^{\rho-1-l} |\Im(z)|^l \tag{5.14}$$

$$supp\varphi^{\mathbb{C}} \subset \{x+iy \| y| \leqslant c_2\langle x\rangle\} \tag{5.15}$$

$$\varphi^{\mathbb{C}}(x+iy) = 0, \ \text{if } x \notin supp(\varphi) \tag{5.16}$$

for constant c_1 and c_2 depending of the semi-norms of φ.

Theorem 5.9.2 ([GJ07] and [Mø00]). *Let $k \in \mathbb{N}^*$ and T a bounded operator in $C^k(B)$. Let $\rho < k$ and $\varphi \in \mathcal{S}^{\rho}$. We have*

$$[\varphi(B), T] = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(B) ad_B^j(T) + \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \varphi^{\mathbb{C}}}{\partial \bar{z}} (z-B)^{-k} ad_B^k(T)(z-B)^{-1} dz \wedge d\bar{z} \tag{5.17}$$

In the general case, the rest of the previous expansion is difficult to calculate. So we will give an estimate of this rest.

Proposition 5.9.3 ([GJ07] and [Mø00]). *Let $T \in C^k(A)$ be a self-adjoint and bounded operator. Let $\varphi \in \mathcal{S}^\rho$ with $\rho < k$. Let*

$$I_k(\varphi) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \varphi^{\mathbb{C}}}{\partial \bar{z}} (z-B)^{-k} ad_B^k(T)(z-B)^{-1} dz \wedge d\bar{z}$$

be the rest of the development of order k in (5.17). Let $s, s' > 0$ such that $s' < 1$, $s < k$ and $\rho + s + s' < k$. Then $\langle B \rangle^s I_k(\varphi) \langle B \rangle^{s'}$ is bounded.

In particular, if $\rho < 0$, and if we choose s' near 0, we have $\langle B \rangle^s I_k(\varphi) \langle B \rangle^{s'}$ bounded, for all $s < k - s' - \rho$.

Chapitre 6

A propos du Principe d'absorption Limite pour des opérateurs de Schrödinger sur des guides d'ondes

Sommaire

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier des opérateurs de Schrödinger sur un guide d'ondes de la forme $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$ où Σ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$, avec différents types de conditions au bord (Dirichlet ou Neumann principalement). On notera Δ_D le Laplacien de Dirichlet et Δ_N le Laplacien de Neumann. Lorsque les calculs peuvent être fait de la même manière avec le Laplacien de Dirichlet, de Neumann et le Laplacien de Robin, on notera Δ le Laplacien. Le but ici va être de montrer un principe d'absorption limite en appliquant la théorie de Mourre avec un opérateur conjugué adapté.

Comme dans le cas de l'espace euclidien, un opérateur conjugué assez naturel apparait : il s'agit du générateur des dilatations dans toutes les variables. Comme nous le verrons par la suite (voir section 6.2), cet opérateur conjugué n'admet pas d'extension auto-adjointe ce qui oblige à utiliser une théorie de Mourre avec opérateur conjugué non-auto-adjoint. De plus un tel choix d'opérateur conjugué ne permet pas de satisfaire les différentes hypothèses de la théorie de Mourre (régularité et/ou positivité du commutateur) pour les Laplaciens de Neumann et Robin ce qui en fait un assez mauvais choix d'opérateur conjugué. En revanche, on peut considérer, ce qui est souvent fait dans la littérature, l'opérateur suivant

$$A = A_D^y \otimes \mathbb{1}_\Sigma = \frac{y\partial_y + \partial_y y}{2i}.$$

Cet opérateur est un générateur des dilatations uniquement dans la direction non borné du guide d'onde. On peut facilement montrer que c'est un opérateur auto-adjoint pour lequel le Laplacien a une régularité C^∞. De plus il possède l'avantage que les conditions sur le potentiel sont assez explicites. Par exemple, pour le cas du Laplacien de Dirichlet, on a:

Théorème 6.1.1 (Theorem 2.16 de [KTdA04]). *Soit Σ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \geqslant 2$, et notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des valeurs propres de Δ_D^Σ, le Laplacien de Dirichlet sur Σ. Soit $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$ et $H = \Delta + V$ sur $L^2(\Omega)$ avec conditions de Dirichlet au bord avec V l'opérateur de multiplication par une fonction réelle. Supposons que V satisfasse les conditions suivantes:*

- $V \in L^\infty(\Omega)$;
- $\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in(\mathbb{R}\backslash[-R,R])\times\Sigma} |V(x)| = 0$;
- *Il existe $\theta > 0$ et $C > 0$ tel que* $|\partial_y V(x)| \leqslant C(1+y^2)^{-\frac{1+\theta}{2}}, \forall x = (y,\sigma) \in \Omega$.

Alors

(i) $\sigma_{ess}(H) = [\kappa, \infty)$ *avec* $\kappa = \inf \mathcal{T}$;

(ii) $\sigma_{sc}(H) = \varnothing$;

(iii) $\sigma_p(H) \cup \mathcal{T}$ *est fermé et dénombrable.*

(iv) $\sigma_p(H)\backslash\mathcal{T}$ *est composé de valeurs propres de multiplicité finie ne pouvant s'accumuler qu'au niveau des points de* $\mathcal{T}$;

(v) La limite $R(\lambda \pm \mathrm{i}0) = \text{w*-}\lim_{\mu\to 0} R(\lambda \pm \mathrm{i}\mu)$ *existe, localement uniformément en* $\lambda \in (\kappa,\infty)\backslash\mathcal{T}$ *en dehors des valeurs propres de* H *avec* $R(z) = (H-z)^{-1}$.

Un résultat similaire peut être montré avec des conditions de Neumann au bords en prenant $\mathcal{T}$ l'ensemble des valeurs propres du Laplacien de Neumann sur Σ. Dans ce cas, on a $\kappa = 0$.

Notons que le choix du générateur des dilatations uniquement dans la direction non bornée du guide d'onde comme opérateur conjugué provoque l'apparition de seuils au niveau des valeurs propres de Δ^Σ. En effet, par un calcul simple, on peut montrer que

$$[\Delta^\Omega, iA] = -2\partial_y^2.$$

On peut penser que ce problème de seuils est dû au fait que l'opérateur Laplacien n'apparait pas dans sa totalité et que pour cette raison, l'estimation de Mourre est fausse pour le Laplacien en chaque point de l'ensemble $\mathcal{T}$.

Le but de ce chapitre va être de voir par quels moyens on peut régler ce problème de seuils afin d'obtenir un principe d'absorption limite sur tout le spectre essentiel de H. Dans la section 6.2, nous allons voir pourquoi l'utilisation d'un générateur des dilatations dans toutes les directions est impossible ou peu recommandée dans le cadre de la théorie de Mourre. Dans la section 6.3, nous verrons comment le choix d'un opérateur conjugué avec de la décroissance dans la variable de vitesse permet d'assouplir les conditions sur le potentiel lorsqu'on veut montrer un principe d'absorption limite loin des seuils en permettant notamment d'éviter des conditions sur les dérivées du potentiel. Nous verrons aussi comment montrer un principe d'absorption limite près des seuils dans le cas du guide d'onde incurvé.

6.2 Un générateur des dilatations dans toutes les directions

Comme dit dans l'introduction, on peut penser que l'apparition de seuils est due au fait que le commutateur ne contienne pas le Laplacien dans son intégralité mais seulement sa composante dans la direction non bornée du guide d'onde. Pour remédier à cela, on pourrait modifier le choix de l'opérateur conjugué en prenant un générateurs des dilatations dans toutes les directions ce qui permettrait de faire apparaitre le Laplacien dans son intégralité et donc d'avoir une estimation de Mourre sur (κ, ∞), comme c'est le cas sur $\mathbb{R}^n$. Nous allons voir, dans cette section, qu'un tel choix d'opérateur conjugué semble peu recommandée à utiliser dans le cadre de la théorie de Mourre, voir impossible à utiliser pour certaines conditions au bords.

6.2.1 Résultats

Soit Σ un ouvert borné convexe (ou étoilé par rapport à l'origine) de $\mathbb{R}^{n-1}$ dont on supposera le bord assez régulier. On considère le guide d'onde $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$. On considère l'opérateur $A_0 = -i2^{-1}(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x)$ le générateur des dilatations dans toutes les directions avec domaine $\mathcal{D}(A_0) = C_c^\infty(\Omega)$. Donnons maintenant quelques propriétés sur cet opérateur et ses relations avec les Laplaciens de Dirichlet, de Neumann et de Robin.

Proposition 6.2.1. *1. A_0 est un opérateur symétrique sans extension auto-adjointe;*

2. *Le Laplacien de Dirichlet est de classe $C^1(\bar{A}_0)$. De plus, si on note $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les valeurs propres du Laplacien de Dirichlet sur Σ, rangées par ordre croissant, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $I \subset]\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ et $|I| \leqslant \inf_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_{k+1} - \lambda_k$, alors l'estimation de Mourre est vraie sur I avec $\bar{A}_0$ comme opérateur conjugué;*

3. *Les Laplaciens de Neumann et Robin ne sont pas de classe $C^1(\bar{A}_0)$.*

On ne peut donc pas appliquer le théorème de Mourre aux Laplaciens de Neumann et Robin avec A_1 comme opérateur conjugué.

Remarquons que, dans certains cas, l'estimation de Mourre pour le Laplacien de Dirichlet peut être montrée pour un intervalle I de taille plus grande que $\inf_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_{k+1} - \lambda_k$. Par exemple, lorsque $\Sigma = [-1, 1]$, cette hypothèse sur la taille de l'intervalle I peut être remplacer par $|I| \leqslant \inf_{1\leqslant k\leqslant n-1} \lambda_{k+2} - \lambda_k$.

Nous allons maintenant montrer ces différents résultats.

Montrons tout d'abord que A_0 est symétrique. Soit $f, g \in \mathcal{D}(A_0)$. On a:

$$\begin{aligned}(f, A_0 g) &= \left(f, \frac{x \cdot \nabla + \nabla \cdot x}{2i} g\right) \\ &= -\left(\frac{1}{2i} f, (x \cdot \nabla + \nabla \cdot x) g\right).\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, notons $F = \frac{1}{2i} f$.

$$\begin{aligned}(f, A_0 g) &= -(F, (x \cdot \nabla + \nabla \cdot x) g) \\ &= -\int_\Omega \bar{F}(x)\,(x \cdot \nabla g(x) + \nabla \cdot x g(x))\,dx \\ &= \int_\Omega \left(x \cdot \nabla \bar{F}(x) + \nabla \cdot x \bar{F}(x)\right) g(x) dx + \sum_{k=1}^n \int_{\partial\Omega} x_k \bar{F}(x) g(x) \\ &= (A_0 f, g). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Donc A_0 est symétrique. De plus, on peut remarquer que la condition $f \in \mathcal{D}(A_0)$ n'est pas nécessaire. En effet, sous l'hypothèse que $x\cdot\nabla f \in L^2(\Omega)$, le calcul précédent reste juste, les termes de bords disparaissant grâce aux conditions de Dirichlet supposées sur g. On a donc $\mathcal{D}(A_0^*) \supset \{u \in L^2(\Omega), x\cdot\nabla u \in L^2(\Omega)\}$. De plus, par définition de l'adjoint, on peut remarquer que si $u \in \mathcal{D}(A_0^*)$, alors u est nécessairement dans l'ensemble $L^2(\Omega)$ et, en utilisant (6.1), on peut montrer l'égalité $\mathcal{D}(A_0^*) = \{u \in L^2(\Omega), x\cdot\nabla u \in L^2(\Omega)\}$ On peut remarquer que d'autres conditions au bord (Neumann, Robin,...) pour A_0 empêche cet opérateur d'être symétrique, des termes de bord se rajoutant. Essayons maintenant de voir si A_0 possède une extension auto-adjointe. Pour cela, nous allons utiliser la caractérisation des opérateurs symétriques donnée par le Corollaire au début de la page 141 de [RS70b]:

Proposition 6.2.2. *Soit A un opérateur fermé symétrique. Notons $n_\pm = dimKer(A^* \mp \mathrm{i}Id)$ ses indices de défauts. Alors*

1. *A est auto-adjoint si et seulement si $n_+ = n_- = 0$;*
2. *A possède une extension auto-adjointe si et seulement si $n_+ = n_-$;*
3. *Si $n_+ = 0 \neq n_-$ ou $n_- = 0 \neq n_+$, alors A n'admet pas d'extension symétrique non-triviale (A est maximal symétrique).*

De plus, par le Théorème X.1 de [RS70b], on sait que, pour A un opérateur fermé symétrique, la dimension des espaces $Ker(A^*-\lambda ID)$ est constante sur chacun des demi-plans $\{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ et $\{z \in \mathbb{C}, \Im(z) < 0\}$. A_0 étant symétrique et densément défini, on sait que $A_0^* = \bar{A_0}^*$ (voir [RS70a, Theorem VIII.1]). On va donc chercher à connaitre la dimension de $Ker(A_0^* - \mathrm{i}\lambda)$ pour différentes valeurs de λ ($\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$).

Commençons par le cas $\lambda > 0$. Pour $\phi \in \mathcal{D}(A_0)$, soit $\tilde{\phi}$ son prolongement par 0 à $\mathbb{R}^n$. $\tilde{\phi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $t > 0$, on note $\phi_t(x) = \tilde{\phi}(tx)$. Pour $\phi \in \mathcal{D}(A_0)$, $\phi_t \in \mathcal{D}(A_0)$ ssi $t \geqslant 1$.

On sait que ϕ_t converge simplement presque partout vers l'application nulle quand t tend vers $+\infty$. En particulier, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, (f, ϕ_t) tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ par convergence dominée. Soit $\lambda > 0$ et $f \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\left(\frac{x\cdot\nabla + \nabla\cdot x}{2i} - i\lambda\right) f = 0.$$

En particulier, $x\cdot\nabla f = -(\frac{n}{2} + \lambda) f \in L^2(\Omega)$. De plus $f \in \mathcal{D}(A_0^*)$. Donc, pour $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\begin{array}{rcl}
\partial_t(f,\phi_t) & = & (f, \partial_t\phi_t) \\
 & = & (f, x\cdot\nabla\phi)(tx)) \\
 & = & \dfrac{1}{t}\,(f, x\cdot\nabla(\phi_t)(x)) \\
 & = & \dfrac{1}{t}\left(f, (\mathrm{i}A_0 - \dfrac{n}{2})\phi_t\right) \\
 & = & -\dfrac{1}{t}\left((\mathrm{i}A_0^* + \dfrac{n}{2})f, \phi_t\right) \\
 & = & \dfrac{1}{t}(\lambda - \dfrac{n}{2})(f,\phi_t).
\end{array}$$

On en déduit donc que, pour $t \geqslant 1$,

$$(f,\phi_t) = (f,\phi)\exp\left((\lambda - \frac{n}{2})\ln(t)\right).$$

En prenant la limite quand t tend vers $+\infty$, on en déduit que si $\lambda \geqslant \frac{n}{2}$, $(f,\phi) = 0$ pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ et donc $f = 0$.

On a donc montré que $Ker(A_0^* - i\lambda I) = \{0\}$ pour $\lambda \geqslant \frac{n}{2}$. Donc $Ker(\bar{A_0}^* - i\lambda I) = \{0\}$ pour $\lambda \geqslant \frac{n}{2}$. Par [RS70b, Theorem X.1] appliqué à la fermeture de A_0, on en déduit que $Ker(\bar{A_0}^* - i\lambda I) = \{0\}$ pour tout $\lambda > 0$.

Regardons maintenant le cas $\lambda < 0$. Soit f une solution de l'équation $A_0^* f = i\lambda f$. On peut réécrire cette équation sous la forme

$$x \cdot \nabla f = -(\lambda + \frac{n}{2}) f.$$

En composant avec l'opérateur unitaire de passage en coordonnées polaires, en notant $(\theta_i)_{i=1,\cdots,n-1}$ les variables d'angles, on peut voir que cette équation se réécrit sous la forme $r\partial_r f = -(\lambda + \frac{n}{2})f$. Ainsi, pour $\lambda < -1 - \frac{n}{2}$ et $C :]-\pi,\pi]^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ à support compact dans $]-\pi,\pi[^{n-1}\backslash\{0\}$, cette équation admet pour solution la fonction

$$h_\lambda(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = C(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) r^{-\lambda - \frac{n}{2}}.$$

Remarquons que $r\partial_r h_\lambda(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = -(\lambda + \frac{n}{2}) h_\lambda(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$. De plus, puisque $\lambda < -1 - \frac{n}{2}$ et C est borné, $h_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Puisque C est à support compact dans $]-\pi,\pi[^{n-1}\backslash\{0\}$, on peut aussi remarquer que $h_\lambda \in L^2(\Omega)$ ce qui implique que $x \cdot \nabla h_\lambda = r\partial_r h_\lambda \in L^2(\Omega)$. On a donc $h_\lambda \in \mathcal{D}(A_0^*)$. Donc $h_\lambda \in Ker(A_0^* - i\lambda)$ ce qui implique que $dimKer(\bar{A_0}^* + i) > 0$. On est donc dans le cadre du point (3) de la Proposition 6.2.2 ce qui implique que $\bar{A}_0$ est maximal symétrique.

Le point (1) de la Proposition 6.2.1 est donc montré.

Avec $\bar{A}_0$ comme opérateur conjugué, on ne peut donc pas utiliser la théorie de Mourre classique mais une théorie de Mourre adaptée aux opérateurs maximaux symétriques (voir [GGM04]).

Pour appliquer cette théorie de Mourre à un Laplacien (avec condition de Dirichlet, Neumann ou Robin au bord) avec A_0 comme opérateur conjugué, il est nécessaire d'avoir $\Delta \in C^1(A_0)$. Rappelons une caractérisation de cette régularité adaptée à notre contexte

Proposition 6.2.3 (Proposition 2.22 de [GGM04])**.** *Soit S un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ et A un opérateur maximal symétrique sur $\mathcal{H}$. Alors $H \in C^1(A)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*

1. *Il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{D}(A^*) \cap \mathcal{D}(S)$ et $v \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(S)$, $|(u, [S, A]v)| \leqslant c\|u\|_S \|v\|_S$,*

2. *Il existe $z \in \rho(S)$ tel que $\{f \in \mathcal{D}(A), R(z)f \in \mathcal{D}(A)\}$ est un coeur pour A et $\{f \in \mathcal{D}(A^*), R(\bar{z})f \in \mathcal{D}(A^*)\}$ est un coeur pour A^*.*

Pour simplifier les notations, soit $A_1 = \bar{A}_0$ la fermeture de A_0. Soit $z \in \rho(\Delta)$.

Soit $u \in \mathcal{D}(A_1^*)$. Soit $v = (\Delta - \bar{z})^{-1}u$. Donc v satisfait $(\Delta - \bar{z})v = u$ avec les conditions au bord de type Dirichlet, Neumann ou Robin selon le Laplacien considéré. Vérifions que $v \in \mathcal{D}(A_1^*)$. Pour cela, il suffit de montrer que $x \cdot \nabla v \in L^2$. Par définition de v, on a

$$\begin{aligned} x \cdot \nabla v &= x \cdot \nabla (\Delta - \bar{z})^{-1} u \\ &= x \cdot (\Delta - \bar{z})^{-1} \nabla u \\ &= (\Delta - \bar{z})^{-1} x \cdot \nabla u + [x, (\Delta - \bar{z})^{-1}] \cdot \nabla u \\ &= (\Delta - \bar{z})^{-1} x \cdot \nabla u - (\Delta - \bar{z})^{-1} [x, \Delta] \cdot (\Delta - \bar{z})^{-1} \nabla u \\ &= (\Delta - \bar{z})^{-1} x \cdot \nabla u - 2i (\Delta - \bar{z})^{-2} \Delta u. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Par hypothèse, $x \cdot \nabla u \in L^2$. Donc $v \in \mathcal{D}(A_1^*)$. En particulier, $\{f \in \mathcal{D}(A_1^*), (\Delta - \bar{z})^{-1} f \in \mathcal{D}(A_1^*)\} = \mathcal{D}(A_1^*)$ et est donc bien un coeur pour A_1^*.

6.2.2 Le cas du Laplacien de Dirichlet

Notons $(y, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ un point du guide d'onde, A_D^y le générateur des dilatations dans la direction y et A_D^σ le générateur des dilatations dans la direction σ avec conditions de Dirichlet au bords. On peut remarquer que A_1 s'écrit $A_1 = A_D^y \otimes \mathbb{1}_\Sigma + \mathbb{1}_\mathbb{R} \otimes A_D^\sigma$. Remarquons que, puisque Σ est borné, $\mathcal{D}(A_D^\sigma) = \mathcal{H}_0^1(\Sigma)$. Soit $u \in \mathcal{D}(A_D^y \otimes \mathbb{1}_\Sigma) \cap \mathcal{D}(\mathbb{1}_\mathbb{R} \otimes A_D^\sigma)$ et $w = (\Delta_D - z)^{-1}u$. Puisque $A_D^y \otimes \mathbb{1}_\Sigma$ est auto-adjoint, par un calcul similaire au calcul précédent avec A_1^*, on peut montrer que $w \in \mathcal{D}(A_D^y \otimes \mathbb{1}_\Sigma)$. De plus, $w \in \mathcal{D}(\Delta_D) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_0^1(\Sigma))$. Donc $w \in \mathcal{D}(\mathbb{1}_\mathbb{R} \otimes A_D^\sigma)$. Donc, puisque $\mathcal{D}(A_D^y \otimes \mathbb{1}_\Sigma) \cap \mathcal{D}(\mathbb{1}_\mathbb{R} \otimes A_D^\sigma) \subset \mathcal{D}(A_1)$, on a

$$C_c^\infty \subset \mathcal{D}(A_D^y \otimes \mathbb{1}_\Sigma) \cap \mathcal{D}(\mathbb{1}_\mathbb{R} \otimes A_D^\sigma) \subset \{f \in \mathcal{D}(A_1), (\Delta_D - z)^{-1} f \in \mathcal{D}(A_1)\}.$$

Donc $\{f \in \mathcal{D}(A_1), (\Delta_D - z)^{-1} f \in \mathcal{D}(A_1)\}$ est bien un coeur pour A_1.

Pour montrer que $\Delta_D \in C^1(A_1)$ par la Proposition 6.2.3, il nous reste donc à montrer que le commutateur est borné du domaine de Δ_D dans son dual.

Tout d'abord, on peut remarquer que

$$\Delta_D = -\partial_y^2 \otimes \mathbb{1}_\Sigma + \mathbb{1}_\mathbb{R} \otimes (\Delta_D^\Sigma),$$

où Δ_D^Σ est le Laplacien sur Σ avec conditions de Dirichlet au bord. En particulier, notre opérateur conjugué ayant la même forme, on a au sens des formes sur $\mathcal{D}(\Delta_D) \cap \mathcal{D}(A_1)$:

$$\begin{aligned} [\Delta_D, iA_1] &= [-\partial_y^2, iA_D^y] \otimes \mathbb{1}_\Sigma + \mathbb{1}_\mathbb{R} \otimes [\Delta_D^\Sigma, iA_D^\sigma] \\ &= -2\partial_y^2 \otimes \mathbb{1}_\Sigma + \mathbb{1}_\mathbb{R} \otimes [\Delta_D^\Sigma, iA_D^\sigma]. \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer $[\Delta_D^\Sigma, iA_D^\sigma]$. Soit $f \in \mathcal{D}(\Delta_D^\Sigma) \cap \mathcal{D}(A_D^\sigma)$. On a:

$$\begin{aligned} (f, [\Delta_D^\Sigma, iA_D^\sigma] f) &= (\Delta_D^\Sigma f, iA_D^\sigma f) + (iA_D^\sigma f, \Delta_D^\Sigma f) \\ &= \int_\Sigma (\Delta_\Sigma \bar{f}) \frac{\sigma \cdot \nabla_\sigma f + \nabla_\sigma \cdot (\sigma f)}{2} d\sigma \\ &\quad + \int_\Sigma (\Delta_\Sigma f) \frac{\sigma \cdot \nabla_\sigma \bar{f} + \nabla_\sigma \cdot (\sigma \bar{f})}{2} d\sigma \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_\Sigma (-\partial_{\sigma_k}^2 \bar{f})(\sigma_k \partial_{\sigma_k} f + \frac{f}{2}) d\sigma \\ &\quad + \int_\Sigma (-\partial_{\sigma_k}^2 f)(\sigma_k \partial_{\sigma_k} \bar{f} + \frac{\bar{f}}{2}) d\sigma. \end{aligned}$$

Ce calcul dépendant de la forme de Σ, nous ne détaillerons ici le calcul que dans deux cas particuliers de Σ de dimension 2 (le rectangle et le disque unité). Pour les autres cas, les calculs sont relativement similaires.

Supposons que $\Sigma = [a, b] \times [c, d]$:

$$\begin{aligned} (f, [\Delta_D^\Sigma, iA_D^\sigma] f) &= \sum_{k=1}^{2} \int_a^b \left(\int_c^d (-\partial_{\sigma_k}^2 \bar{f})(\sigma_k \partial_{\sigma_k} f + \frac{f}{2}) d\sigma_2 \right) d\sigma_1 \\ &\quad + \int_a^b \left(\int_c^d ((-\partial_{\sigma_k}^2 f)(\sigma_k \partial_{\sigma_k} \bar{f} + \frac{\bar{f}}{2}) d\sigma_2 \right) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Par le Théorème de Fubini et par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} (f, [\Delta_D^\Sigma, iA_D^\sigma] f) &= \sum_{k=1}^{2} \int_a^b \left(\int_c^d ((-2\partial_{\sigma_k}^2 f) \bar{f} d\sigma_2 \right) d\sigma_1 \\ &\quad - \int_c^d (b |\partial_{\sigma_1} f|^2 (b, \sigma_2) - a |\partial_{\sigma_1} f|^2 (a, \sigma_2)) d\sigma_2 \\ &\quad - \int_a^b (d |\partial_{\sigma_2} f|^2 (\sigma_1, d) - c |\partial_{\sigma_2} f|^2 (\sigma_1, c)) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Par somme, on obtient, pour $g \in \mathcal{D}(\Delta_D) \cap \mathcal{D}(A_1)$

$$\begin{aligned}(g, [\Delta_D, iA_1]g) &= 2(g, \Delta_D g)\\ &- \int_{\mathbb{R}} \int_c^d \big(b|\partial_{\sigma_1} g|^2(y, b, \sigma_2) - a|\partial_{\sigma_1} g|^2(y, a, \sigma_2)\big)\, d\sigma_2 dy\\ &- \int_{\mathbb{R}} \int_a^b \big(d|\partial_{\sigma_2} g|^2(y, \sigma_1, d) - c|\partial_{\sigma_2} g|^2(y, \sigma_1, c)\big)\, d\sigma_1 dy.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\Sigma = \{(\sigma_1, \sigma_2), \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \leqslant 1\}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}(f, [\Delta_D^\Sigma, iA_D^\sigma]f) &= \sum_{k=1}^2 \int_\Sigma (-\partial_{\sigma_k}^2 \bar{f})(\sigma_k \partial_{\sigma_k} f + \frac{f}{2}) d\sigma\\ &+ \int_\Sigma ((-\partial_{\sigma_k}^2 f)(\sigma_k \partial_{\sigma_k} \bar{f} + \frac{\bar{f}}{2}) d\sigma.\end{aligned}$$

Pour le terme en $k = 1$, par le Théorème de Fubini, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma (-\partial_{\sigma_1}^2 \bar{f})(\sigma_1 \partial_{\sigma_1} f + \frac{f}{2}) d\sigma\\ =& \int_{-1}^1 \left(\int_{-(1-\sigma_2^2)^{1/2}}^{(1-\sigma_2^2)^{1/2}} (-\partial_{\sigma_1}^2 \bar{f})(\sigma_1 \partial_{\sigma_k} f + \frac{f}{2}) d\sigma_1 \right) d\sigma_2.\end{aligned}$$

Par intégration par partie, on obtient donc:

$$\begin{aligned}&(f, [\Delta_D^\Sigma, iA_D^\sigma]f)\\ =& \sum_{k=1}^2 \int_\Sigma (-2\partial_{\sigma_k}^2 f)\bar{f} d\sigma\\ &- \int_{-1}^1 \Big((1 - \sigma_2^2)^{1/2} |\partial_{\sigma_1} f|^2 ((1 - \sigma_2^2)^{1/2}, \sigma_2)\\ &+ (1 - \sigma_2^2)^{1/2} |\partial_{\sigma_1} f|^2 (-(1 - \sigma_2^2)^{1/2}, \sigma_2) \Big) d\sigma_2\\ &- \int_{-1}^1 \Big((1 - \sigma_1^2)^{1/2} |\partial_{\sigma_2} f|^2 (\sigma_1, (1 - \sigma_1^2)^{1/2})\\ &+ (1 - \sigma_1^2)^{1/2} |\partial_{\sigma_2} f|^2 (\sigma_1, -(1 - \sigma_1^2)^{1/2}) \Big) d\sigma_1.\end{aligned}$$

Par somme, on obtient, pour $g \in \mathcal{D}(\Delta_D) \cap \mathcal{D}(A_1)$

$$\begin{aligned}(g, [\Delta_D, iA_1]g) &= 2(g, \Delta_D g)\\ &- \int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^1 \Big((1 - \sigma_2^2)^{1/2} |\partial_{\sigma_1} g|^2 (y, (1 - \sigma_2^2)^{1/2}, \sigma_2)\\ &+ (1 - \sigma_2^2)^{1/2} |\partial_{\sigma_1} g|^2 (y, -(1 - \sigma_2^2)^{1/2}, \sigma_2) \Big) d\sigma_2 dy\\ &- \int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^1 \Big((1 - \sigma_1^2)^{1/2} |\partial_{\sigma_2} g|^2 (y, \sigma_1, (1 - \sigma_1^2)^{1/2})\\ &+ (1 - \sigma_1^2)^{1/2} |\partial_{\sigma_2} g|^2 (y, \sigma_1, -(1 - \sigma_1^2)^{1/2}) \Big) d\sigma_1 dy.\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on peut remarquer que chacun des termes de bords peut être vu comme l'intégrale sur une partie du bord de Ω de la fonction $(y, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1 |\partial_{\sigma_1} g|^2 (y, \sigma_1, \sigma_2)$ ou de la fonction $(y, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto$

$\sigma_2|\partial_{\sigma_2}g|^2(y,\sigma_1,\sigma_2)$. Par exemple, le terme

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}\left((1-\sigma_2^2)^{1/2}|\partial_{\sigma_1}g|^2(y,(1-\sigma_2^2)^{1/2},\sigma_2)d\sigma_2 dy,\right.$$

qui apparait dans le calcul du commutateur lorsque Σ est le disque unité de $\mathbb{R}^2$, peut être interprété comme l'intégrale sur l'ensemble $\{(y,\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}^3\backslash\sigma_1^2+\sigma_2^2=1,\sigma_1\geqslant 0\}$ de la fonction $(y,\sigma_1,\sigma_2)\mapsto\sigma_1|\partial_{\sigma_1}g|^2(y,\sigma_1,\sigma_2)$, une paramétrisation de cet ensemble étant donnée par $\{(y,(1-\sigma_2)^{1/2},\sigma_2)\backslash\sigma_2\in[-1,1]\}$. On peut donc majorer en valeur absolue tous les termes de bords par l'intégrale sur $\partial\Omega$ de ces deux fonctions. En utilisant que la trace d'une application est un opérateur continue de $\mathcal{H}^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, Σ étant borné par hypothèses, on peut voir que ces termes sont bornés en norme $\mathcal{H}^2(\Omega)$. En particulier, le commutateur est borné de $\mathcal{D}(\Delta_D)$ dans son dual. Donc $\Delta_D\in C^1(A_1)$.

Ayant la régularité C^1, on peut chercher à savoir où l'estimation de Mourre est vraie pour le Laplacien de Dirichlet avec A_1 comme opérateur conjugué. Posons

$$H(m)=\begin{cases}\Delta_y+mE_{\Delta_D^\Sigma}(\{m\}) \text{ si } m\in(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*};\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}.$$

La fonction $H(\cdot)$ étant nulle presque partout, on en déduit que l'application $(H(\cdot)+i)^{-1}$ est mesurable. On peut donc écrire l'intégrale directe

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus}H(m)dm=\Delta_y+\Delta_D^\Sigma=\Delta_D.$$

Pour un intervalle $I\subset\mathbb{R}$, cette décomposition permet d'écrire la mesure spectrale de Δ_D en I sous la forme

$$E_{\Delta_D}(I)=\int_{\mathbb{R}}^{\oplus}E_{\Delta_y}(I_m)E_{\Delta_D^\Sigma}(\{m\})dm,$$

avec $I_m=\{z\in\mathbb{R},z+m\in I\}$. Remarquons que puisque Δ_D^Σ est à résolvante compacte, les termes de la précédente intégrale directe sont tous nuls sauf ceux pour lesquels $m\in(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier, on peut réécrire cette intégrale comme la somme

$$E_{\Delta_D}(I)=\sum_{k=1}^{\infty}E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})\otimes E_{\Delta_D^\Sigma}(\{\lambda_k\}).$$

Remarquons que si I est borné, puisque Δ_y est positif, $E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})=0$ pour k suffisamment grand (dès que $I_{\lambda_k}\subset(-\infty,0)$). En particulier lorsque I est borné, la somme précédente est une somme finie.

Si on note ψ_k les vecteurs propres de Δ_D^Σ, pour tout $f\in\mathcal{D}(\Delta_D)$, il existe $f_k\in L_y^2$ tels que

$$f(y,\sigma)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(y)\psi_k(\sigma). \tag{6.3}$$

Prenons un intervalle I borné et essayons de montrer une estimations de Mourre sur I avec A_1 comme opérateur conjugué. Soit $f\in\mathcal{D}(\Delta_D)\cap\mathcal{D}(A_1)$. On a:

$$\begin{aligned}(f,E_{\Delta_D}(I)[\Delta_D,\mathrm{i}A_1]E_{\Delta_D}(I)f) &= (f,E_{\Delta_D}(I)[\Delta_y,\mathrm{i}A_D^y]E_{\Delta_D}(I)f)\\ &\quad+(f,E_{\Delta_D}(I)[\Delta_D^\Sigma,\mathrm{i}A_D^\sigma]E_{\Delta_D}(I)f).\end{aligned}\tag{6.4}$$

En utilisant que $[\Delta_y,\mathrm{i}A_D^y]=2\Delta_y$ ainsi que la décomposition (6.3), on a:

$$\begin{aligned}&(f,E_{\Delta_D}(I)[\Delta_D,\mathrm{i}A_1]E_{\Delta_D}(I)f)\\ =\;& 2\sum_{k,l=1}^{\infty}\Big((E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})f_k)\otimes\psi_k,\Delta_y(E_{\Delta_y}(I_{\lambda_l})f_l)\otimes\psi_l\Big)\\ &+\sum_{k,l=1}^{\infty}\Big((E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})f_k)\otimes\psi_k,[\Delta_D^\Sigma,\mathrm{i}A_D^\sigma](E_{\Delta_y}(I_{\lambda_l})f_l)\otimes\psi_l\Big).\end{aligned}$$

Notons encore une fois que, puisque Δ_y est positif, $E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k}) = 0$ pour tout k suffisamment grand. Les sommes sont donc finies.

Les ψ_k formant une famille orthonormée, le premier terme du membre de droite peut se simplifier en:

$$\begin{aligned}
& 2\sum_{k,l=1}^{\infty}\Big((E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})f_k)\otimes\psi_k, \Delta_y(E_{\Delta_y}(I_{\lambda_l})f_l)\otimes\psi_l\Big) \\
= \;& 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_R (E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})\bar{f}_k)(y)\Delta_y(E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})f_k)(y)dy \\
= \;& 2\sum_{k=1}^{\infty}\big(E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})f_k\otimes\psi_k, \Delta_y E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})f_k\otimes\psi_k\big) \\
\geqslant \;& 2\sum_{k=1}^{\infty}\inf(I_{\lambda_k})\big(E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})f_k\otimes\psi_k, E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})f_k\otimes\psi_k\big),
\end{aligned}$$

avec la convention $\inf(I_{\lambda_k}) = 0$ si $I_{\lambda_k} = \varnothing$. En particulier, si I ne contient aucun λ_j, alors I_{λ_k} ce qui implique que $\inf(I_{\lambda_k}) = 0$ si et seulement si $E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k}) = 0$. En prenant $a = \min_{k\in\mathbb{N}*, I_{\lambda_k}\neq\varnothing}\{\inf(I_{\lambda_k})\} > 0$, on peut montrer l'inégalité suivante

$$E_{\Delta_D}(I)\Delta_y E_{\Delta_D}(I) \geqslant aE_{\Delta_D}(I).$$

Il reste donc à traiter la seconde partie du membre de droite de (6.4). Supposons pour simplifier que I est un intervalle compact. Les fonctions f_k ne dépendant pas de la variable σ, on a:

$$\begin{aligned}
& \Big((E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})f_k)\otimes\psi_k, [\Delta_D^{\Sigma}, \mathrm{i}A_D^{\sigma}](E_{\Delta_y}(I_{\lambda_l})f_l)\otimes\psi_l\Big) \\
= \;& \int_{\mathbb{R}}(E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})\bar{f}_k)(y)(E_{\Delta_y}(I_{\lambda_l})f_l)(y)dy\cdot\int_{\Sigma}\bar{\psi}_k(\sigma)[\Delta_D^{\Sigma}, \mathrm{i}A_D^{\sigma}]\psi_l(\sigma)d\sigma.
\end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que si il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $I\subset(\lambda_n, \lambda_{n+1})$ et $|I| \leqslant \inf_{1\leqslant k\leqslant n}\lambda_{k+1}-\lambda_k$, alors les intervalles I_{λ_k} sont disjoints. Cela implique que si $k\neq l$, $(E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})f_k)$ et $(E_{\Delta_y}(I_{\lambda_l})f_l)$ sont orthogonaux. Il ne reste donc plus que les termes diagonaux. Puisque pour tout k, $\psi_k\in\mathcal{D}(\Delta_D^{\Sigma})\subset\mathcal{D}(A_D^{\sigma})$, en dévelopant le commutateur, on obtient:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma}\bar{\psi}_k(\sigma)[\Delta_D^{\Sigma}, \mathrm{i}A_D^{\sigma}]\psi_k(\sigma)d\sigma \\
= \;& \int_{\Sigma}\big(\Delta_D^{\Sigma}\bar{\psi}_k\big)(\sigma)\mathrm{i}\left(A_D^{\sigma}\psi_k\right)(\sigma)d\sigma - \int_{\Sigma}\big(A_D^{\sigma}\bar{\psi}_k\big)(\sigma)\mathrm{i}\left(\Delta_D^{\Sigma}\psi_k\right)(\sigma)d\sigma \\
= \;& \lambda_k\int_{\Sigma}\bar{\psi}_k(\sigma)\mathrm{i}\left(A_D^{\sigma}\psi_k\right)(\sigma)d\sigma - \lambda_k\int_{\Sigma}\big(A_D^{\sigma}\bar{\psi}_k\big)(\sigma)\mathrm{i}\psi_k(\sigma)d\sigma \\
= \;& 0.
\end{aligned}$$

Le second terme ne va donc pas contribuer à la positivité du commutateur ni l'empêcher. On a donc

$$\begin{aligned}
& (f, E_{\Delta_D}(I)[\Delta_D, \mathrm{i}A_1]E_{\Delta_D}(I)f) \\
= \;& 2\sum_{k,l=1}^{\infty}\Big((E_{\Delta_y}(I_{\lambda_k})f_k)\otimes\psi_k, \Delta_y(E_{\Delta_y}(I_{\lambda_l})f_l)\otimes\psi_l\Big) \\
\geqslant \;& 2a\|E_{\Delta_D}(I)f\|^2,
\end{aligned}$$

ce qui implique que l'estimation de Mourre est vraie sur I lorsque I ne contient aucun des λ_j. La partie de la Proposition 6.2.1 concernant Δ_D est donc montrée.

Remarquons que si I contient λ_j, en prenant $f = f_j \otimes \psi_j$, par un calcul similaire, on obtient

$$(f, E_{\Delta_D}(I)[\Delta_D, \mathrm{i}A_1]E_{\Delta_D}(I)f) = \|E_{\Delta_y}(I_{\lambda_j})\partial_y f_j\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ce terme n'étant pas strictement positif (I_{λ_j} contenant zéro), on retrouve le problème de seuil déjà présent lorsqu'on utilisait A_D^y comme opérateur conjugué. Pour régler ce problème de seuil en utilisant la théorie de l'opérateur faiblement conjugué (voir [BG10]), on peut essayer de voir si le commutateur est positif et injectif.

Pour simplifier les calculs, nous traiterons uniquement le cas $\Sigma = [-1, 1]$ pour lequel les valeurs propres et les vecteurs propres de Δ_D^Σ sont connus (voir p.266 de [RS70d]). Dans ce cas, les valeurs propres sont les $\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 k^2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et les vecteurs propres associés sont les

$$\psi_k(\sigma) = \begin{cases} \cos(k\pi\sigma/2) \text{ si } k \in 2\mathbb{N}+1, \\ \sin(k\pi\sigma/2) \text{ si } k \in 2\mathbb{N}^*. \end{cases}.$$

Par un simple calcul, on a pour $k, l \in \mathbb{N}^*$

$$\int_\Sigma \bar{\psi}_k(\sigma)[\Delta_D^\Sigma, \mathrm{i}A_D^\sigma]\psi_l(\sigma)d\sigma = \begin{cases} 2\lambda_k\lambda_l(-1)^{\frac{k+l}{2}+1} \text{ si } k - l \in 2\mathbb{Z}^*, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit $g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$. Posons $f = g \otimes \psi_{k+2} - (-1)^k g \otimes \psi_k$. Par (6.4), on a:

$$\begin{aligned} & (f, [\Delta_D, \mathrm{i}A_1]f) \\ = \; & 4\int_\mathbb{R} \bar{g}(y)\Delta_y g(y)dy - 2(-1)^k(g \otimes \psi_{k+2}, [\Delta_D^\Sigma, \mathrm{i}A_D^\sigma]g \otimes \psi_k) \\ = \; & 4\int_\mathbb{R} |g'(y)|^2 dy - 4\lambda_k\lambda_{k+2}\int_\mathbb{R} |g(y)|^2 dy. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Prenons $h \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R})$ et posons $g_w(y) = wh(w^2 y)$ pout tout $y \in \mathbb{R}$. On peut remarquer que

$$\int_\mathbb{R} |g_w(y)|^2 dy = \int_\mathbb{R} |h(y)|^2 dy \text{ et } \int_\mathbb{R} |g_w'(y)|^2 dy = w^4 \int_\mathbb{R} |h'(y)|^2 dy.$$

Donc en utilisant g_w à la place de g dans (6.5) et en faisant tendre w vers 0, on peut montrer que $(f, [\Delta_D, \mathrm{i}A_1]f)$ est strictement négatif pour w suffisamment petit. Le commutateur n'est donc pas positif (ni injectif) ce qui nous empêche d'utiliser la théorie de l'opérateur faiblement conjugué.

6.2.3 Le cas des Laplaciens de Neumann et Robin

Maintenant, montrons le point (3) de la Proposition 6.2.1 et commençons par regarder le cas du Laplacien de Neumann. Pour cela, on va chercher à appliquer la Proposition 6.2.3. Remarquons que, comme pour le Laplacien de Dirichlet, (6.4) permet de montrer la deuxième partie de la condition (2) de la Proposition 6.2.3. Nous allons donc montrer que les autres conditions ne sont pas satisfaites. Soit $z \in \rho(\Delta_N)$ et $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{D}(A_1), (\Delta_N - z)^{-1}f \in \mathcal{D}(A_1)\}$. Prenons $u \in \mathcal{E}$. Définissons $v \in L^2$ par $v = (\Delta_N - z)^{-1}u$. v satisfait alors

$$\begin{cases} \Delta_N v - zv = u \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \Sigma \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Sigma \end{cases}$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée normale. De plus $v \in \mathcal{D}(A_1)$. Donc $v\restriction_{\mathbb{R}\times\partial\Sigma} = 0$. Pour $f \in L^2(\mathbb{R} \times \Sigma)$, notons $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f par rapport à la première variable. v satisfait donc:

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma \hat{v} + (\xi^2 - z)\hat{v} = \hat{u} \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \Sigma \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Sigma \end{cases}.$$

Soit $\alpha(\xi) \in \mathbb{C}$ tel que $(\alpha(\xi))^2 = \xi^2 - \bar{z}$. Notons

$$w(\xi,\sigma) = \exp\left(\frac{\alpha(\xi)}{(n-1)^{1/2}}\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k\right).$$

On peut remarquer que w satisfait $\Delta_\Sigma w + (\xi^2 - \bar{z})w = 0$. De plus, puisque Σ est borné, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $w(y,\cdot) \in L^2(\Sigma)$. On peut alors définir l'application linéaire $L : L^2(\Omega) \to L^1(\mathbb{R})$ par $L(f) = \int_\Sigma \hat{f}(\xi,\sigma)w(\xi,\sigma)d\sigma$. On a alors, par la formule de Green, que pour tout $u \in \mathcal{E}$, $L(u) = 0$. Cela implique que $\mathcal{E} \subset L^{-1}(\{0\})$. Or, si $g \in C_c^\infty(\Sigma)$, $g \neq 0$ et $g \geqslant 0$, en posant $u_1(y,\sigma) = \exp(-\frac{y^2}{2})g(\sigma)$, alors $\hat{u}_1(\xi,\sigma) = u_1(\xi,\sigma) \geqslant 0$ pout tout $(\xi,\sigma) \in \Omega$. On obtient donc $L(u_1) > 0$ et de plus $u_1 \in \mathcal{D}(A_1)$. L étant continu, on en déduit que $\mathcal{E}$ ne peut pas être dense dans $\mathcal{D}(A_1)$. Ce n'est donc pas un coeur pour A_1. Cela implique donc déjà que $\Delta_N \notin C^1(A_1)$.

Remarquons que si on remplace les conditions de Neumann par des conditions de Robin, le même résultat se produit. En effet, puisque $v \in \mathcal{D}(A_1)$, v satisfait des conditions de Dirichlet au bords. Demander que v satisfasse les conditions de Neumann est donc équivalent au fait de demander que v satisfasse des conditions de Robin. Le Laplacien de Robin n'est donc pas non plus de classe $C^1(A_1)$.

Pour le Laplacien de Neumann, on peut tout de même chercher à savoir si le commutateur est borné de $\mathcal{D}(\Delta_N)$ dans son dual. Calculons donc le commutateur entre Δ_N et A_1. Pour simplifier les calculs, nous nous placerons dans le cas $\Sigma = \prod_{k=1}^{n-1}[a_i,b_i]$.

Soit $f \in \mathcal{D}(\Delta_N) \cap \mathcal{D}(A_1)$. On a:

$$\begin{aligned}(f,[\Delta_N,iA_1]f) &= (f,-2\partial_y^2 f) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\mathbb{R}\times\Sigma}(-\partial_{\sigma_k}^2\bar{f})(\sigma_k\partial_{\sigma_k}f + \frac{f}{2})d\sigma \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}\times\Sigma}(-\partial_{\sigma_k}^2 f)(\sigma_k\partial_{\sigma_k}\bar{f} + \frac{\bar{f}}{2})d\sigma.\end{aligned}$$

En remarquant que lorsque Σ est un rectangle, le vecteur normal extérieur à Σ est un vecteur de la base cannonique (ou l'opposé d'un vecteur de la base), par le Théorème de Fubini et par intégration par parties, on obtient

$$(f,[\Delta_N,iA_1]f) = 2\left((f,-\partial_y^2 f) + \sum_{k=1}^{n-1}(f,-\partial_{\sigma_k}^2 f)\right) = -2\int_{\mathbb{R}\times\Sigma}\bar{\nabla} f\nabla f dy d\sigma.$$

Ce commutateur a pour domaine de forme $\mathcal{D}(\Delta_N) \cap \mathcal{D}(A_1)$. Or $C_c^\infty \subset \mathcal{D}(\Delta_N) \subset \mathcal{H}^1$ et $C_c^\infty \subset \mathcal{D}(A_1) \subset \{f \in L^2, f\restriction_{\mathbb{R}\times\partial\Sigma} = 0\}$. On en déduit donc que

$$C_c^\infty \subset \mathcal{D}(\Delta_N) \cap \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{H}_0^1.$$

On a donc

$$(f,[\Delta_N,iA_1]f) = 2(f,\Delta_D f).$$

Le premier commutateur est donc strictement positif, et on pourrait penser que l'estimation de Mourre stricte est vraie sur tout intervalle. Malheureusement, le Laplacien de Dirichlet n'est pas borné par rapport au Laplacien de Neumann ($\mathcal{D}(\Delta_N) \not\subset \mathcal{D}(\Delta_D)$).

La condition (1) de la Proposition 6.2.3 n'est donc pas vérifié.

Le commutateur étant tout de même positif, on peut se demander si l'on ne peut pas appliquer le Lemme 3.12 de [GGM04] pour lequel il n'est pas nécessaire de supposer que H est régulier par rapport à A mais uniquement régulier par rapport à un opérateur H' tel qu'il existe $c > 0$ satisfaisant

$$H' + c\langle H\rangle \geqslant \langle H\rangle,$$

avec $H' = [\Delta_N, iA_1]$. En effet, pusique $H' = 2\Delta_D$, $[\Delta_N, iH'] = 0$ avec domaine approprié, on peut montrer que la condition (1) de la Proposition 6.2.3 est satisfaite avec $A = H'$. En revanche, comme précedement, on peut montrer que $\{f \in \mathcal{D}(\Delta_D), (\Delta_N + z)^{-1} f \in \mathcal{D}(\Delta_D)\}$ n'est pas un coeur pour Δ_D. La condition (2) de la Proposition 6.2.3 n'est donc pas satisfaite. On en déduit donc que $\Delta_N \notin C^1(H')$ ce qui nous empêche utiliser ce Lemme 3.12 de [GGM04].

6.3 Le cas du guide d'onde incurvé

Dans cette section, nous allons montrer un principe d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger sur un guide d'onde incurvé. Dans la suite, nous supposerons toujours que $n \geqslant 2$ et nous nous placerons dans le cadre de l'article [KTdA04]. Le but est d'améliorer le Théorème 6.1.1, en limitant les conditions portant sur les dérivées de courbure du guide.

6.3.1 Préliminaires géométriques

Nous allons tout d'abord rappeler quelques notions concernant les propriétés géométriques de ces guides d'ondes en s'appuyant sur le formalisme de [KTdA04].

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^∞. Supposons

Hypothèse 6.3.1. *il existe une famille (e_k) d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$ telle que*

(i) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $(e_k(y))$ forme une famille orthonormée;

(ii) Pour tout $k = 1, \cdots, n-1$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, la k-ième dérivée de $p(y)$ ne dépend que de $e_1(y), \cdots, e_k(y)$;

(iii) $e_1 = p'$;

(iv) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la famille $(e_k(y))$ a une orientation positive;

(v) Pour tout $k = 1, \cdots, n-1$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $e_k'(y)$ ne dépend que de $e_1(y), \cdots, e_{k+1}(y)$.

Par la formule de Serret-Frenet, on sait qu'il existe une matrice $\mathcal{K}$ de taille $n \times n$ telle que

$$\frac{\partial}{\partial y}(e_k(y)) = \mathcal{K}(e_k(y)).$$

De plus $\mathcal{K}$ vérifie:

$$\mathcal{K}_{ij} = \begin{cases} \kappa_i & \text{si } j = i+1 \\ -\kappa_i & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

A partir de $\mathcal{K}$, on peut définir la matrice $n \times n$ de rotation $\mathcal{R}$ qui satisfait $\mathcal{R}_{1k} = \mathcal{R}_{k1} = \delta_{1k}$ et pour tout $i, j = 2, \cdots, n$, on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{R}_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{n} \mathcal{R}_{i\alpha}\mathcal{K}_{\alpha j} = 0.$$

A partir de la matrice $\mathcal{R}$, on peut définir la famille $(\tilde{e_k})$ par $(\tilde{e_k}) = \mathcal{R}(e_k)$.

Soit Σ un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$ et Ω le guide d'onde droit $\mathbb{R} \times \Sigma$. On peut définir Γ comme l'image de Ω par l'application

$$\mathcal{L} : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad (y, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \mapsto p(y) + \sum_{k=2}^{n} \sigma_k \tilde{e_k}(y).$$

Supposons que Γ ne se recoupe pas et que $\kappa_1 \in L^\infty$ avec $\sup_{\sigma\in\Sigma} |\sigma| \|\kappa_1\|_\infty < 1$. Alors, $\mathcal{L} : \Omega \to \Gamma$ est un difféomorphisme permettant d'identifier Γ à une variété Riemannienne (Ω, g). De plus, $g = diag(h^2, 1, \cdots, 1)$ avec

$$h(y,\sigma) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_k \mathcal{R}_{k\alpha}(y) \mathcal{K}_{\alpha 1}(y) = 1 - \sum_{k=2}^{n} \sigma_k \mathcal{R}_{k2}(y) \kappa_1(y).$$

On supposera toujours que l'application h est minorée par une constante strictement positive rendant la métrique Riemannienne g inversible.

Il nous reste maintenant à savoir à quel opérateur sur $L^2(\Omega, g)$ peut-on identifier un opérateur de Schrödinger $\Delta + \tilde{V}$ sur $L^2(\Gamma)$ avec $\tilde{V}$ un potentiel sur le guide d'onde Γ. Remarquons qu'en identifiant $L^2(\Gamma)$ et $L^2(\Omega, g)$, si on note dv un élément de volume de Γ, cet opérateur est associé à la forme quadratique $\tilde{Q}$ définie par

$$\tilde{Q}(\phi, \psi) = \int_\Omega g_{11}^{-1} \partial_y \bar{\phi} \partial_y \psi dv + \sum_{k=2}^{n} \int_\Omega g_{kk}^{-1} \partial_{\sigma_k} \bar{\phi} \partial_{\sigma_k} \psi dv + \int_\Omega \bar{\phi} V \psi dv$$

avec le domaine approprié ($\mathcal{H}_0^1$ pour les conditions de Dirichlet, $\mathcal{H}^1$ pour les conditions de Neumann) et avec $V = \mathcal{L}\tilde{V}\mathcal{L}$. La forme $\tilde{Q}$ étant densément définie, positive, symétrique et fermée sur son domaine, on peut lui associer un unique opérateur auto-adjoint positif $\tilde{H}$ défini, pour $\psi \in \mathcal{D}(\tilde{H})$, par

$$\tilde{H}\psi = -|g|^{1/2} \left(\partial_y |g|^{1/2} g_{11}^{-1} \partial_y \psi + \sum_{k=2}^{n} \partial_{\sigma_k} |g|^{1/2} g_{kk}^{-1} \partial_{\sigma_k} \psi \right) + V\psi.$$

Pour simplifier les calculs, nous pouvons transformer $\tilde{H}$ en un opérateur unitairement équivalent H. Pour cela, on utilise la transformation unitaire $\mathcal{U} : \psi \mapsto |g|^{1/4}\psi$. En définissant $H = \mathcal{U}\tilde{H}\mathcal{U}^{-1}$, on obtient

$$H\psi = -\partial_y g_{11}^{-1} \partial_y \psi - \sum_{k=2}^{n} \partial_{\sigma_k} g_{kk}^{-1} \partial_{\sigma_k} \psi + (V + W)\psi \tag{6.6}$$

avec

$$W = -\frac{5}{4} \frac{(\partial_y h)^2}{h^4} + \frac{1}{2} \frac{\partial_y^2 h}{h^3} - \frac{1}{4} \frac{\sum_{k=2}^{n} (\partial_{\sigma_k} h)^2}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=2}^{n} \partial_{\sigma_k}^2 h}{h}.$$

Remarquons qu'avec notre choix de h, pour tout $k = 2, \cdots, n$, $\partial_{\sigma_k}^2 h = 0$ et $g_{kk} = 1$.

6.3.2 Un principe d'absorption limite loin des seuils

Maintenant, nous allons montrer un principe d'absorption limite loin des seuils. Pour cela, nous allons utiliser le théorème de Mourre et il nous faut donc trouver un opérateur conjugué. Comme on l'a vu précedement (c.f. Section 6.2), il semble nécessaire de prendre pour opérateur conjugué un opérateur dans la direction non bornée du guide d'onde.

Comme pour le cas $\mathbb{R}^n$, un opérateur conjugué naturel à utiliser est le générateur des dilatations (voir [CFKS08, Mou81, Mou83, KTdA04]). Pour appliquer le théorème de Mourre, il est donc suffisant d'imposer les hypothèses suivantes:

Hypothèse 6.3.2 (Assumption 3.3 de [KTdA04])**.** *Uniformément en $\sigma \in \Sigma$,*

1. $h(y, \sigma) \to 1$ *quand* $|y| \to \infty$*;*
2. $\partial_y^2 h(y, \sigma), \sum_{k=2}^{n} (\partial_{\sigma_k} h(y, \sigma))^2 \to 0$ *quand* $|y| \to \infty$*;*
3. *il existe* $\theta \in (0, 1]$ *tel que*

$$\partial_y h(y, \sigma), \partial_y^3 h(y, \sigma), \sum_{k=2}^{n} \partial_y (\partial_{\sigma_k} h)^2(y, \sigma) = O(|y|^{-1-\theta}).$$

Sous ces hypothèses et sous les mêmes hypothèses de décroissance pour V que dans le Théorème 6.1.1, les résultats spectraux du Théorème 6.1.1 restent vrais pour H un opérateur de Schrödinger sur $L^2(\Gamma)$. Remarquons que le fait que $\sigma_{ess}(H) = [\nu, \infty)$, avec ν la première valeur propre du Laplacien de Dirichlet sur $L^2(\Sigma)$ ne dépend pas du fait que $\partial_y^2 h(y,\sigma) \to 0$ lorsque $|y| \to \infty$. En effet, si l'on enlève cette hypothèse, en utilisant que

$$\frac{\partial_y^2 h}{h^3} = \partial_y(\frac{\partial_y h}{h^3}) + 2\frac{(\partial_y h)^2}{h^4},$$

et en écrivant que $\partial_y(\frac{\partial_y h}{h^3}) = [ip_y, \frac{\partial_y h}{h^3}]$, on peut montrer que $W : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ est compact ce qui ne modifie pas le spectre essentiel de $H_0 = -\partial_y g_{11}^{-1}\partial_y - \sum_{k=2}^n \partial_{\sigma_k} g_{kk}^{-1}\partial_{\sigma_k}$.

Les dérivées de h s'exprimant en fonction des coefficient de la matrice $\mathcal{R}$ et des dérivées des coefficients de la matrice $\mathcal{K}$, toutes ces conditions portant sur les dérivées de h peuvent s'interpréter en des conditions sur les courbures:

Hypothèse 6.3.3 (Assumption 3.4 de [KTdA04]). *Pour tout* $\alpha \in \{2, \cdots, n\}$,

1. $\mathcal{K}_\alpha^1(y), \partial_y^2\mathcal{K}_\alpha^1(y) \to 0$ *quand* $|y| \to \infty$;
2. *pour tout* $\beta \in \{2, \cdots, n\}$,$\mathcal{K}_\alpha^\beta, \partial_y\mathcal{K}_\alpha^2 \in L^\infty(\mathbb{R})$;
3. *il existe* $\theta \in (0,1]$ *tel que*

$$\partial_y\mathcal{K}_\alpha^1(y), \partial_y^3\mathcal{K}_\alpha^1(y), \mathcal{K}_\alpha^2(y), \partial_y^2\mathcal{K}_\alpha^2(y), \sum_{k=2}^n \mathcal{K}_\alpha^k(y)\partial_y\mathcal{K}_k^2(y), \sum_{k=2}^n \partial_y\mathcal{K}_\alpha^k(y)\mathcal{K}_k^2(y) = O(|y|^{-1-\theta}).$$

On peut donc voir que l'utilisation du générateur des dilatations impose que les courbures soient des fonctions régulières et que certaines de leurs dérivées aient une décroissance à l'infini.

Afin d'améliorer ce résultat, on peut choisir un autre opérateur conjugué qui ne nous force pas à dériver le potentiel W. Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, strictement positive, borné, avec toutes ses dérivées bornées telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $y \to y\partial_y^\alpha\lambda(y)$ est bornée . Soit $A_u = \frac{1}{2}(yp_y\lambda(p_y) + \lambda(p_y)p_y y)$ avec $p_y = -i\partial_y$. Dans [ABdMG96, Theorem 4.2.3], on peut voir que A_u est essentiellement auto-adjoint avec domaine $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Soit $H_1 = H - V$. Calculons le premier commutateur défini en tant que forme sur $\mathcal{D}(H_1) \cap \mathcal{D}(A_u)$:

$$\begin{aligned}
[H_1, iA_u] &= [p_y, iA_u]h^{-2}p_y + p_y[h^{-2}, iA_u]p_y + p_y h^{-2}[p_y, iA_u] \\
&\quad + [W, iA_u] \\
&= p_y\lambda(p_y)h^{-2}p_y + p_y h^{-2}p_y\lambda(p_y) + p_y[h^{-2}, iA_u]p_y \\
&\quad + [W, iA_u] \\
&= 2p_y\lambda(p_y)^{1/2}h^{-2}\lambda(p_y)^{1/2}p_y \\
&\quad + p_y[\lambda(p_y)^{1/2}, [\lambda(p_y)^{1/2}, h^{-2}]]p_y + p_y[h^{-2}, iA_u]p_y \\
&\quad + [W, iA_u].
\end{aligned} \tag{6.7}$$

On peut remarquer que si l'on suppose qu'il existe une constante $a > 0$ telle que $h^{-2}(y,\sigma) \geqslant a$, pour tout $(y,\sigma) \in \Omega$ alors

$$2p_y\lambda(p_y)^{1/2}h^{-2}\lambda(p_y)^{1/2}p_y \geqslant 0.$$

En particulier, loin des seuils (loin de $\mathcal{T}$), ce terme nous fournit la positivité, nécessaire à l'obtention de l'estimation de Mourre. Enoncons maintenant quelques hypothèses suffisantes pour avoir la bonne régularité

Hypothèse 6.3.4. *Soit* h *tel que*

1. h^{-2} *est borné.*

2. $h(y,\sigma) \to 1$ *quand* $|y| \to \infty$*;*

3. Il existe $b > 0$ *tel que* $h^{-2}(y,\sigma) \geqslant b$ *pour tout* $(y,\sigma) \in \Omega$.

4. Il existe $\theta > 0$ *tel que, uniformément en* $\sigma \in \Sigma$,
$\sum_{k=2}^{n} (\partial_k h)^2(y,\sigma) = O(|y|^{-(1+\theta)})$ *et* $\partial_y h(y,\sigma) = O(|y|^{-(1+\theta)})$.

Sous ces hypothèses, on a le résultat suivant:

Théorème 6.3.5. *Soit* Γ *un guide d'onde comme défini précedemment. Supposons que les Hypothèses 6.3.1 et 6.3.4 sont satisfaites. Supposons de plus que, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}$, $y \mapsto \langle y \rangle^{1+\alpha} \partial_y^\alpha \lambda(y)$ *est bornée. Soit* V *un potentiel compact de* $\mathcal{H}_y^1$ *dans* $(\mathcal{H}_y^1)^*$ *de classe* $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}_y^1, \mathcal{H}_y^{-1})$. *Alors les conclusions du Théorème 6.1.1 sont vraie pour l'opérateur* $H = \Delta + \tilde{V}$ *avec conditions de Dirichlet au bord où* $\tilde{V} = \mathcal{L}^{-1} V \mathcal{L}^{-1}$.

On peut remarquer que si l'on suppose que $\partial_y^2 h(y,\sigma)$ tend vers 0 quand $|y| \to \infty$, uniformément en $\sigma \in \Sigma$, alors, si l'on suppose que V est Δ-compact et de classe $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}^2, \mathcal{H}^{-2})$, le Théorème 6.3.5 reste vrai.

Preuve (Théorème 6.3.5)**.** *Posons* $\mathcal{H}_y^1$ *le domaine de* $\langle p_y \rangle$. *Notons que le domaine de forme du Laplacien de Dirichlet* $\mathcal{Q}(\Delta_D)$ *est inclu dans* $\mathcal{H}_y^1$. *Si* h^{-2} *est borné, on peut remarquer que*

$$\langle p_y \rangle^{-1} p_y \lambda(p_y)^{1/2} h^{-2} \lambda(p_y)^{1/2} p_y \langle p_y \rangle^{-1}$$

et

$$\langle p_y \rangle^{-1} p_y [\lambda(p_y)^{1/2}, [\lambda(p_y)^{1/2}, h^{-2}]] p_y \langle p_y \rangle^{-1}$$

sont bornés. De plus, si h *vérifie les hypothèses 6.3.4, en écrivant*

$$\frac{\partial_y^2 h}{h^3} = \partial_y\left(\frac{\partial_y h}{h^3}\right) + 2\frac{(\partial_y h)^2}{h^4},$$

$\langle p_y \rangle^{-1} W \langle p_y \rangle^{-1}$ *est compact. Par un raisonnement similaire, on peut montrer que* $\langle p_y \rangle^{-1} \langle q \rangle^{1+\theta} W \langle p_y \rangle^{-1}$ *est borné ce qui implique que* $\langle y \rangle^\theta \langle p_y \rangle^{-1} [W, iA_u] \langle p_y \rangle^{-1}$ *est borné,* $p_y \lambda(p_y)$ *étant borné. En remarquant que*

$$[h^{-2}, iA_u] = y[h^{-2}, ip_y\lambda(p_y)] + \frac{1}{2}[h^{-2}, \lambda(p_y) + p_y \lambda'(p_y)],$$

par la formule d'Helffer-Sjostrand, on peut voir que $\langle y \rangle^\theta [h^{-2}, iA_u]$ *est borné. De plus, en utilisant que*

$$[\lambda(p_y)^{1/2}, [\lambda(p_y)^{1/2}, h^{-2}]] = \lambda(p_y)^{1/2}[\lambda(p_y)^{1/2}, h^{-2}] - [\lambda(p_y)^{1/2}, h^{-2}]\lambda(p_y)^{1/2}$$

et par la formule d'Helffer-Sjostrand, on en déduit que $\langle y \rangle [\lambda(p_y)^{1/2}, [\lambda(p_y)^{1/2}, h^{-2}]]$ *est borné.*

Par un calcul de commutateur, on a

$$\begin{aligned}
& [p_y \lambda(p_y)^{1/2} h^{-2} \lambda(p_y)^{1/2} p_y, iA_u] \\
= \; & [p_y \lambda(p_y)^{1/2}, iA_u] h^{-2} \lambda(p_y)^{1/2} p_y + p_y \lambda(p_y)^{1/2} [h^{-2}, iA_u] p_y \lambda(p_y)^{1/2} \\
& + p_y \lambda(p_y)^{1/2} h^{-2} [\lambda(p_y)^{1/2} p_y, iA_u] \\
= \; & \left(\lambda(p_y)^{1/2} + \frac{1}{2} p_y \partial_y \lambda(p_y) \lambda(p_y)^{-1/2} \right) p_y \lambda(p_y) h^{-2} \lambda(p_y)^{1/2} p_y \\
& + p_y \lambda(p_y)^{1/2} [h^{-2}, iA_u] p_y \lambda(p_y)^{1/2} \\
& + p_y \lambda(p_y)^{1/2} h^{-2} \left(\lambda(p_y)^{1/2} + \frac{1}{2} p_y \partial_y \lambda(p_y) \lambda(p_y)^{-1/2} \right) p_y \lambda(p_y).
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut montrer que ce commutateur est borné de $\mathcal{H}^1$ *dans* $\mathcal{H}^{-1}$ *ce qui implique que le premier terme du membre de droite de (6.7) est de classe* $C^1(A_u, \mathcal{H}_y^1, \mathcal{H}_y^{-1}) \subset C^{0,1}(A_u, \mathcal{H}_y^1, \mathcal{H}_y^{-1})$. *En particulier, cela implique que* $H_1 = H - V$ *est de classe* $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}_y^1, \mathcal{H}_y^{-1})$. V *étant un potentiel compact de* $\mathcal{H}^1$ *dans* $\mathcal{H}^{-1}$ *et étant de classe* $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}_y^1, \mathcal{H}_y^{-1})$, *on en déduit par somme que* H *est de classe* $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}_y^1, \mathcal{H}_y^{-1})$.

Il nous reste à montrer que l'estimation de Mourre est satisfaite pour H_1 avec A_u comme opérateur conjugué sur tout intervalle compact de $(\nu, +\infty)\backslash\mathcal{T}$ avec $\nu = \inf\mathcal{T}$. Si on note $H' = p_y h^{-2} p_y + \Delta_D^\Sigma$, puisque H et H_0 sont de classe $C^{1,1}(A_u)$ on peut remarquer qu'il suffit de montrer que l'estimation de Mourre est vraie en tous points de $(\nu, +\infty)\backslash\mathcal{T}$ pour H' avec A_u comme opérateur conjugué pour obtenir l'estimation de Mourre en tous points de $(\nu, +\infty)\backslash\mathcal{T}$ pour H avec A_u comme opérateur conjugué (voir Théorème 7.2.9 de [ABdMG96]). Puisque l'opérateur A_u peut s'écrire sous la forme $A_1 \otimes \mathbb{1}_\Sigma + \mathbb{1}_\mathbb{R} \otimes A_2$ avec $A_2 = 0$, en utilisant le Théorème 2.9 de [KTdA04], on peut voir qu'il suffit de montrer que l'estimation de Mourre est vraie en tous points de $\mathbb{R}^{+*}$ pour $H_0 = p_y h^{-2} p_y$ avec A_u comme opérateur conjugué pour obtenir l'estimation de Mourre en tous points de $(\nu, +\infty)\backslash\mathcal{T}$ pour H avec A_u comme opérateur conjugué, Δ_D^Σ ayant un spectre purement ponctuel.

Soient $\lambda \in (0, +\infty)$ et $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\phi(\lambda) \neq 0$. Montrons qu'il existe $a > 0$ et K compact tels que

$$\phi(H_0)[H_0, iA_u]\phi(H_0) \geqslant a\phi(H_0)^2 + K.$$

Par la suite, pour simplifier les notations, nous noterons K_k, $k \in \mathbb{N}$ les opérateurs compacts. Par (6.7), on a

$$\begin{aligned}[H_0, iA_u] &= 2p_y\lambda(p_y)^{1/2}h^{-2}\lambda(p_y)^{1/2}p_y \\ &\quad + p_y[\lambda(p_y)^{1/2}, [\lambda(p_y)^{1/2}, h^{-2}]]p_y + p_y[h^{-2}, iA_u]p_y.\end{aligned}$$

Remarquons que les deux derniers termes du membres de droite sont compacts de $\mathcal{H}_y^1$ dans $\mathcal{H}_y^{-1}$ ce qui implique qu'on a

$$\phi(H_0)[H_0, iA_u]\phi(H_0) = 2\phi(H_0)p_y\lambda(p_y)^{1/2}h^{-2}\lambda(p_y)^{1/2}p_y\phi(H_0) + K_1. \tag{6.8}$$

Par un simple calcul, on a

$$(H_0 + i)^{-1} - (p_y^2 + i)^{-1} = (H_0 + i)^{-1}p_y(1 - h^{-2})p_y(p_y^2 + i)^{-1}.$$

Puisque $h(y, \sigma) \to 1$ quand $|y| \to \infty$ uniformément en $\sigma \in \Sigma$, cela implique que $(H_0 + i)^{-1} - (p_y^2 + i)^{-1}$ est compact. Par le Lemme 7.2.8 de [ABdMG96], on en déduit que $\phi(H_0) - \phi(p_y^2)$ est compact. En utilisant (6.8), on a donc

$$\phi(H_0)[H_0, iA_u]\phi(H_0) = 2\phi(p_y^2)p_y\lambda(p_y)^{1/2}h^{-2}\lambda(p_y)^{1/2}p_y\phi(p_y^2) + K_2.$$

Soit $\epsilon > 0$. En choisissant ϕ tel que $\phi(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha < \epsilon$, puisque h est bornée et λ est strictement positive, on en déduit qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\phi(H_0)[H_0, iA_u]\phi(H_0) \geqslant a\phi(p_y^2)^2 + K_2 = a\phi(H_0)^2 + K_3.$$

L'estimation de Mourre est donc vraie pour H_0 avec A_u comme opérateur conjugué en tous points de $\mathbb{R}^{+*}$ ce qui implique l'estimation de Mourre pour H avec A_u comme opérateur conjugué en tous points de $(\nu, +\infty)\backslash\mathcal{T}$.

Le Théorème 6.3.5 peut alors être montré comme une conséquence du Théorème de Mourre. □

On peut remarquer qu'une fois encore, l'opérateur conjugué ne dépendant que de la direction non bornée du guide, les conditions au bords n'interviennent pas. En particulier, si Γ est un guide d'onde courbe dont le bord est suffisament régulier (au moins C^1), on peut définir en tout point de $\partial\Gamma$ un espace tangent et donc une dérivée normale au bord. $\mathcal{L}$ étant un difféomorphisme, il envoie les espaces tangents de Γ sur les espaces tangents de Ω. Les conditions de Neumann/Robin sur Γ sont donc transformées en condtions de Neumann/Robin sur Ω. En particulier, par un raisonnement similaire, le résultat du Théorème 6.3.5 reste vrai si on remplace les conditions de Dirichlet par des conditions de Neumann ou de Robin.

En utilisant la forme particulière de h, on peut traduire les hypothèses 6.3.4 en des hypothèses concernant les courbures κ_k:

Hypothèse 6.3.6. *Supposons que* $\kappa_1 \in L^\infty$ *avec* $\sup_{\sigma\in\Sigma} |\sigma| \|\kappa_1\|_\infty < 1$. *Supposons de plus qu'il existe* $\theta > 0$ *tel que*

1. $\lim_{|y|\to\infty} \kappa_1(y) = 0$;
2. $\kappa_1'(y) = O(|y|^{-(1+\theta)})$;
3. $\kappa_2(y)\kappa_1(y) = O(|y|^{-(1+\theta)})$.

On peut remarquer que si $\kappa_1 \in L^\infty$ et si $\sup_{\sigma\in\Sigma} |\sigma| \|\kappa_1\|_\infty < 1$ alors h^{-2} est borné et il existe $b > 0$ tel que $h^{-2}(y,\sigma) \geqslant b$ pour tout $(y,\sigma) \in \Omega$. En notant que $\sum_{k=2}^n (\partial_{\sigma_k} h)^2(y,\sigma) = \kappa_1^2$, on peut remarquer que ces hypothèses impliquent bien les hypothèses 6.3.4. On peut réécrire le Théorème 6.3.5 avec ces hypothèses portant sur la courbure:

Théorème 6.3.7. *Soit* Γ *un guide d'onde comme définit précedemment. Supposons que les Hypothèses 6.3.1 et 6.3.6 sont satisfaites. Soit* V *un potentiel compact de* $\mathcal{H}_y^1$ *dans* $(\mathcal{H}_y^1)^*$ *de classe* $C^{1,1}(A_u, \mathcal{H}_y^1, \mathcal{H}_y^{-1})$. *Alors les conclusions du Théorème 6.1.1 sont vraie pour l'opérateur* $H = \Delta + V$ *avec conditions de Dirichlet au bords.*

Notons que l'utilisation d'un opérateur A_u à la place du générateur des dilatations habituellement utilisé permet deux améliorations. Premièrement, on peut éviter d'imposer des conditions sur les $(\kappa_k)_{k=3,\cdots,n}$ et sur les dérivées de κ_2. De plus, on peut remarquer que si κ_1 tend rapidement vers 0 en l'infini, κ_2 n'est pas nécessairement borné. De plus, puisqu'aucune condition sur les dérivées d'ordre supérieure à 2 de κ_1 n'est imposé, on peut prendre pour courbures κ_k des fonctions avec de fortes oscillations. La deuxième remarque que l'on peut faire est que, comme dans [Mar18b], l'utilisation du A_u permet de traiter une plus grande classe de potentiel en ne supposant pas, par exemple, que le potentiel est régulier ou Δ-compact.

6.3.3 Un principe d'absorption limite au seuils

Dans cette partie, nous allons utiliser la version de la théorie de Mourre dite de l'opérateur faiblement conjugué, afin de montrer un principe d'absorption limite près des seuils. Pour plus de détails sur cette version de la théorie de Mourre, nous renvoyons aux articles [BdMM97, Ric06, BG10, Mar18a].

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ avec toutes ces dérivées bornées. Posons $A = A_F \otimes 1_\Sigma$ où A_F est défini par

$$A_F = \frac{1}{2}\left(p_y F(y) + F(y) p_y\right)$$

où $p_y = -i\partial_y$. Dans ce cas, on a sur $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A_F)$:

$$\begin{aligned}
[H, iA] &= [p_y g_{11}^{-1} p_y, iA] + [V + W, iA] \\
&= [p_y, iA] g_{11}^{-1} p_y + p_y [g_{11}^{-1}, iA] p_y + p_y g_{11}^{-1} [p_y, iA] + [V + W, iA].
\end{aligned}$$

Par un calcul de commutateur sur le domaine de forme de Δ_D, on voit que

$$\begin{aligned}
[p_y, iA] &= \frac{1}{2}\left(p_y [p_y, iF(y)] + [p_y, iF(y)] p_y\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(p_y F'(y) + F'(y) p_y\right) \\
&= p_y F'(y) + \frac{i}{2} F''(y) \\
&= F'(y) p_y - \frac{i}{2} F''(y).
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}
[H, iA] &= 2p_y F'(y) g_{11}^{-1} p_y + \frac{i}{2} F''(y) g_{11}^{-1} p_y - \frac{i}{2} p_y g_{11}^{-1} F''(y) \\
&\quad + p_y [g_{11}^{-1}, iA] p_y + [V + W, iA] \\
&= 2p_y F'(y) g_{11}^{-1} p_y + \frac{1}{2}[iF''(y) g_{11}^{-1}, p_y] + p_y [g_{11}^{-1}, iA] p_y + [V + W, iA] \\
&= 2p_y F'(y) g_{11}^{-1} p_y - \frac{1}{2} F'''(y) g_{11}^{-1} - \frac{1}{2} F''(y)[p_y, i g_{11}^{-1}] \\
&\quad + p_y [g_{11}^{-1}, iA] p_y + [V + W, iA].
\end{aligned}$$

En utilisant que $[G(y), iA] = -F(y)G'(y)$ pour toute fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et que $g_{11} = h^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
[H, iA] &= 2p_y F'(y) h^{-2}(y,\sigma) p_y - \frac{1}{2} F'''(y) h^{-2}(y,\sigma) + F''(y) \partial_y h(y,\sigma) h^{-3}(y,\sigma) \\
&\quad + 2p_y F(y) \partial_y h(y,\sigma) h^{-3}(y,\sigma) p_y - F(y) \partial_y (V + W) \\
&= 2p_y h^{-2} \left(F'(y) + F(y) \partial_y h h^{-1} \right) p_y \\
&\quad - \frac{1}{2} F'''(y) h^{-2} + F''(y) \partial_y h h^{-3} - F(y) \partial_y (V + W).
\end{aligned}$$

Pour pouvoir appliquer la théorie de l'opérateur faiblement conjugué, il faut que ce commutateur soit positif. Considérons les hypothèses suivantes:

Hypothèse 6.3.8. *Supposons que pour tout $(y, \sigma) \in \Omega$,*

1. $F'(y) + F(y)\partial_y h(y,\sigma) h^{-1}(y,\sigma) > 0$ *est borné;*
2. $(y,\sigma) \mapsto F(y)\partial_y(V + W)(y,\sigma)$ *est bornée;*
3. $-\frac{1}{2}F'''(y)h^{-2}(y,\sigma) + F''(y)\partial_y h(y,\sigma)h^{-3}(y,\sigma) - F(y)\partial_y(V + W)(y,\sigma) \geqslant 0$ *est borné.*

Sous ces hypothèses, $S = [H, iA]$ est bien positif et injectif. De plus, $\mathcal{G} = \mathcal{D}(S^{1/2}) = \mathcal{H}_y^1$ est laissé invariant par $\exp(itA)$ (voir [ABdMG96, Proposition 4.2.4]). Il ne reste donc qu'à montrer que $S \in C^1(A_F, \mathcal{S}, \mathcal{S}^*)$ où $\mathcal{S}$ est la complétion de $\mathcal{G}$ pour la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{S}} = \|S^{1/2} \cdot \|$. Par un calcul de commutateur, on obtient sur $\mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(A_F)$

$$\begin{aligned}
[S, iA_F] &= 4p_y \left(F'(y) h^{-2}(F'(y) + F(y)\partial_y h h^{-1}) \right) p_y \\
&\quad - 2p_y F(y) \partial_y \left(h^{-2}(F'(y) + F(y)\partial_y h h^{-1}) \right) p_y \\
&\quad - \partial_y \left(F''(y) h^{-2}(F'(y) + F(y)\partial_y h h^{-1}) \right) \\
&\quad + F(y)\partial_y \left(\frac{1}{2} F'''(y) h^{-2} - F''(y)\partial_y h h^{-3} \right) \\
&\quad + (F(y)\partial_y)^2 (V + W). \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

On peut remarquer que si F' est borné, alors, le premier terme dans le membre de droite est borné de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}^*$.

Par un simple calcul, on a:

$$\begin{aligned}
& F(y)\partial_y \left(h^{-2}(F'(y) + F(y)\partial_y h h^{-1}) \right) \\
= \; & -2F(y)\partial_y h h^{-1} \left(h^{-2}(F'(y) + F(y)\partial_y h h^{-1}) \right) \\
& + F(y) h^{-2} \left(F''(y) + F'(y)\partial_y h h^{-1} + F(y)\partial_y^2 h h^{-1} - F(y)(\partial_y h)^2 h^{-2} \right). \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

F' étant borné, on peut voir que les hypothèses 6.3.8 impliquent que $F(y)\partial_y h h^{-1}$ est borné. En particulier, le premier terme du membre de droite est majoré par $\left(h^{-2}(F'(y) + F(y)\partial_y h h^{-1})\right)$. Pour avoir les conditions sur le commutateur d'ordre 2, il suffit donc de supposer les hypothèses suivantes:

Hypothèse 6.3.9. *Pour tout* $(y, \sigma) \in \Omega$*, notons*

$$G(y, \sigma) = F'(y) + F(y)\partial_y h(y, \sigma)h^{-1}(y, \sigma)$$

et

$$W_1(y, \sigma) = -\frac{1}{2}F'''(y)h^{-2}(y, \sigma) + F''(y)\partial_y h(y, \sigma)h^{-3}(y, \sigma) - F(y)\partial_y(V + W)(y, \sigma).$$

Supposons que pour tout $(y, \sigma) \in \Omega$*,*

1. *il existe* $C_1 > 0$ *tel que*

$$\left|F(y)(F''(y) + F'(y)\partial_y hh^{-1} + F(y)\partial_y^2 hh^{-1} - F(y)(\partial_y h)^2 h^{-2})\right| \leqslant C_1 G(y, \sigma);$$

2. *il existe* $C_2 > 0$ *tel que*

$$\begin{aligned} &\Big| -\partial_y \left(F''(y)h^{-2}(y, \sigma)(F'(y) + F(y)\partial_y h(y, \sigma)h^{-1}(y, \sigma))\right) \\ &+F(y)\partial_y \left(\frac{1}{2}F'''(y)h^{-2}(y, \sigma) - F''(y)\partial_y h(y, \sigma)h^{-3}(y, \sigma)\right) \\ &+(F(y)\partial_y)^2(V + W)(y, \sigma)\Big| \\ \leqslant\ & C_2 W_1(y, \sigma). \end{aligned}$$

On peut remarquer que $S = 2p_y h^{-2} G p_y + W_1$. Pour montrer que $[S, \mathrm{i}A]$ est borné de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}^*$ il suffit donc de montrer que $[S, \mathrm{i}A]$ peut être majorer au sens des formes par $Cp_y h^{-2} G p_y + C'W_1$ avec $C, C' > 0$ deux constantes. Comme dit précédement, puisque F' est borné, le premier terme du membre de droite de (6.9) peut être majoré au sens des formes par $4\|F'\|_{L^\infty} p_y h^{-2} G p_y$. De plus, en utilisant (6.10), on peut remarquer que, sous les hypothèses 6.3.9, la fonction $y \mapsto F(y)\partial_y \left(h^{-2}(y)(F'(y) + F(y)\partial_y h(y)h^{-1}(y))\right)$ peut être majorer par $(2 + C_1)Gh^{-2}$. De plus, par hypothèses, la somme des trois derniers termes du membre de droite de (6.9) peut être majorée au sens des formes par $C_2 W_1$. On peut donc montrer que $[S, \mathrm{i}A]$ est borné de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}^*$ ce qui implique que S est de classe $C^1(A, \mathcal{S}, \mathcal{S}^*)$. Comme dit précedemment, cette régularité de l'opérateur S implique que $\exp(itA)$ laisse aussi invariant l'espace $\mathcal{S}$. S est donc un bon candidat pour appliquer la théorie de l'opérateur faiblement conjugué. De plus, puisque $S = [H, \mathrm{i}A]$, cette régularité implique aussi que H est de classe $C^2(A, \mathcal{S}, \mathcal{S}^*)$. On obtient donc le résutat suivant:

Théorème 6.3.10. *Supposons que* $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *est un potentiel* Δ*-borné avec borne plus petite que 1. Soit* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞ *avec toutes ces dérivées bornées tel que les Hypothèses 6.3.8 et 6.3.9 soient satisfaites. Alors, il existe* $c > 0$ *tel que*

$$\left|(f, (H - \lambda + \mathrm{i}\eta)^{-1} f)\right| \leqslant \|S^{-1/2} f\|^2 + \|S^{-1/2} A f\|^2,$$

avec $S = [H, \mathrm{i}A]$.

De plus, H *n'a pas de valeurs propres réelles.*

Bibliography

[ABdMG96] W. Amrein, A. Boutet de Monvel, and V. Georgescu. *C_0-groups, commutator methods, and spectral theory of N-body Hamiltonians.* Birkhäuser Verlag, 1996.

[Agm70] S. Agmon. Lower bounds for solutions of Schrödinger equations. *J. Analyse Math.*, 1970.

[BAD79] M. Ben-Artzi and A. Devinatz. Spectral and scattering theory for the adiabatic oscillator and related potentials. *Journal of Mathematical Physics*, 20(4):594–607, 1979.

[BdMG93] A. Boutet de Monvel and V. Georgescu. Boundary values of the resolvent of a self-adjoint operator: Higher order estimates. In *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*. 1993.

[BdMGS97] A. Boutet de Monvel, V. Georgescu, and J. Sahbani. Higher order estimates in the conjugate operator theory. 1997.

[BdMM97] A. Boutet de Monvel and M. Mantoiu. The method of the weakly conjugate operator. pages 204–226, 1997.

[BG10] N. Boussaid and S. Golénia. Limiting absorption principle for some long range perturbations of Dirac systems at threshold energies. *Communications in Mathematical Physics*, 299(3):677–708, 2010.

[BH10] J.-F. Bony and D. Häfner. Low frecuency resolvent estimates for long range perturbations of the euclidean Laplacian. *Mathematical research letters*, 17(2):301–306, 2010.

[CFKS08] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. *Schrödinger operators, with applications to quantum mechanics and global geometry.* Springer, 2008. 2nd corrected printing.

[CG76] M. Combescure and J Ginibre. Spectral and scattering theory for the Schrödinger operator with strongly oscillating potentials. In *Annales de l'IHP Physique théorique*, volume 24, pages 17–30, 1976.

[Com80] M. Combescure. Spectral and scattering theory for a class of strongly oscillating potentials. *Communications in Mathematical Physics*, 73(1):43–62, 1980.

[DG97] J. Deriziński and C. Gérard. *Scattering theory of classical and quantum N-particle systems.* Springer-Verlag, 1997.

[DMR91] A. Devinatz, R. Moeckel, and P. Rejto. A limiting absorption principle for Schrödinger operators with Von Neumann-Wigner type potentials. *Integral Equations and Operator Theory*, 14(1):13–68, 1991.

[DR83a] A. Devinatz and P. Rejto. A limiting absorption principle for Schrödinger operators with oscillating potentials. part i. *Journal of Differential Equations*, 49(1):29–84, 1983.

[DR83b] A. Devinatz and P. Rejto. A limiting absorption principle for Schrödinger operators with oscillating potentials. part ii. *Journal of Differential Equations*, 49(1):85–104, 1983.

[FH82] R. Froese and I. Herbst. Exponential bounds and absence of positive eigenvalues for n-body Schrödinger operators. *Communications in Mathematical Physics*, 87, 1982.

[FHHOHO82] R. Froese, I. Herbst, M. Hoffman-Ostenhof, and T. Hoffman-Ostenhoff. On the absence of postitive eigenvalues for one-body Schrödinger operators. *Journal d'Analyse Mathématique*, 41, 1982.

[FKV15] L. Fanelli, D. Krejcirik, and L. Vega. Spectral stability of Schrödinger operators with subordinated complex potentials. *arXiv preprint arXiv:1506.01617*, 2015.

[FS04] S. Fournais and E. Skibsted. Zero energy asymptotics of the resolvent for a class of slowly decaying potentials. *Mathematische Zeitschrift*, 248(3):593–633, 2004.

[GG99] V. Georgescu and C. Gérard. On the Virial theorem in quantum mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 1999.

[GGM04] V. Georgescu, C. Gérard, and J. S. Møller. Commutators, c0-semigroups and resolvent estimates. *Journal of Functional Analysis*, 216(2):303–361, 2004.

[GJ07] S. Golénia and T. Jecko. A new look at Mourre's commutator theory. *Complex Analysis and Operator Theory*, 2007.

[GM01] V. Georgescu and M. Măntoiu. On the spectral theory of Dirac type Hamiltonians. *J. of Operator Theory*, 46:289–321, 2001.

[Hör83] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume 2. Springer-Verlag, 1983.

[IJ03] A.D. Ionescu and D. Jerison. On the absence of positive eigenvalues of Schrödinger operators with rough potentials. *Geometric And Functional Analysis*, 2003.

[JM17] T. Jecko and A. Mbarek. Limiting absorption principle for Schrödinger operators with oscillating potentials. *Documenta Mathematica*, 22:727–776, 2017.

[JMP84] A. Jensen, E. Mourre, and P. Perry. Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory. In *Annales de l'Institut Henri Poincare. Section A, Physique Theorique*, volume 41, pages 207–225, 1984.

[Kat59] T. Kato. Growth properties of solutions of the reduced wave equation with variable coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1959.

[Kat13] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*, volume 132. Springer Science & Business Media, 2013.

[KTdA04] D. Krejcirik and R. Tiedra de Aldecoa. The nature of the essential spectrum in curved quantum waveguides. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(20):5449, 2004.

[Lav69] R. Lavine. Absolute continuity of Hamiltonian operators with repulsive potential. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 22(1):55–60, 1969.

[Lav71] R. Lavine. Commutators and scattering theory i: Repulsive interactions. *Communications in Mathematical Physics*, 20(4):301–323, 1971.

[Lav73] R. Lavine. Absolute continuity of positive spectrum for Schrödinger operators with long-range potentials. *Journal of Functional Analysis*, 12(1):30–54, 1973.

[Lie00] E. Lieb. Lieb-Thirring inequalities. *arXiv preprint math-ph/0003039*, 2000.

[Man16] M.A. Mandich. Sub-exponential lower bounds for embedded eigenfunctions of some discrete Schrödinger operators. *arXiv preprint arXiv:1608.04864*, 2016.

[Mar17] Alexandre Martin. A new class of Schödinger operators without positive eigenvalues. *arXiv preprint arXiv:1711.07381*, 2017.

[Mar18a] A. Martin. On the limiting absorption principle at zero energy for a new class of possibly non self-adjoint Schrödinger operators. *arXiv preprint arXiv:1808.07738*, 2018.

[Mar18b] A. Martin. On the limiting absorption principle for a new class of Schrödinger Hamiltonians. *Confluentes Mathematici*, 10:63–94, 2018.

[Mou81] E. Mourre. Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators. *Comm. Math. Phys.*, 78:391–408, 1981.

[Mou83] E. Mourre. Opérateurs conjugués et propriétés de propagation. *Comm. Math. Phys.*, 91:279–300, 1983.

[MR00] M. Măntoiu and S. Richard. Absence of singular spectrum for Schrödinger operators with anisotropic potentials and magnetic fields. *Journal of Mathematical Physics*, 41(5):2732–2740, 2000.

[Mø00] J.S. Møller. An abstract radiation condition and applications to n-body systems. *Reviews in Matthematical Physics*, 2000.

[Nak15] S. Nakamura. A remark on the Mourre theory for two body Schrödinger operators. *J. Spectral Theory*, 4(3):613–619, 2015.

[NW29] J. von Neuman and E.P. Wigner. über merkwürdige diskrete eigenwerte. *Z. Phys.*, 1929.

[Put56] C.R. Putnam. On commutators and Jacobi matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7:1026–1030, 1956.

[Put67] C.R. Putnam. *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics.* Springer, 1967.

[Ric06] S. Richard. Some improvements in the method of the weakly conjugate operator. *Letters in Mathematical Physics*, 76(1):27–36, 2006.

[RS70a] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics: Vol. 1, Functional Analysis.* Academic Press, 1970.

[RS70b] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics: Vol. 2, Fourier Analysis, Self-Adjointness.* Academic Press, 1970.

[RS70c] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics: Vol. 3, Scattering theory.* Academic Press, 1970.

[RS70d] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics: Vol. 4, Analysis of operators.* Academic Press, 1970.

[RS04] I. Rodnianski and W. Schlag. Time decay for solutions of Schrödinger equations with rough and time-dependent potentials. *Inventiones mathematicae*, 155(3):451–513, 2004.

[RT97a] P. Rejto and M. Taboada. A limiting absorption principle for Schrödinger operators with generalized Von Neumann–Wigner potentials i. construction of approximate phase. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 208(1):85–108, 1997.

[RT97b] P. Rejto and M. Taboada. A limiting absorption principle for Schrödinger operators with generalized Von Neumann–Wigner potentials ii. the proof. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 208(2):311–336, 1997.

[Sim67] B. Simon. On positive eigenvalues of one-body Schrödinger operators. *Communications on pure and applied mathematics*, 1967.

[Sim76] B Simon. The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions. *Annals of Physics*, 97(2):279–288, 1976.

[Sim97] B. Simon. Some Schrödinger operators with dense point spectrum. *Procceding of the American Mathematical Society*, 1997.

[Whi83] D. White. Schrödinger operators with rapidly oscillating central potentials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 275(2):641–677, 1983.