Théorie de repère mobile

AZDOUD ABDELLAH
AITLAMINE ABDELHAKIM

Université Hassan II Ben M'Sik
CASABLANCA

17 Mai 2016

Table des matières

Chapitre 1

Cadre Mathématique

Définitions 1.1 *Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel sur un corps K. Un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$ est un ensemble non vide E muni d'une application $(M, N) \to \overrightarrow{MN}$ de $E \times E \to \overrightarrow{E}$ vérifiant :*
***1**-pour tout triplet (M, N, P) de points de E : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$*
***2**- pour tout point $O \subset E$ l'application $M \in E \to \overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{E}$ est bijective.Les éléments de E s'appellent des points, ceux de $\overrightarrow{E}$ des vecteurs. On appelle dimension de l'espace affine E la dimension de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$.*

Définitions 1.2 *On dira qu'un espace affine E est Euclidien lorsque sa direction $\overrightarrow{E}$ est munie d'une structure euclidienne donnée. Si cette direction est de plus orientée, on dit que E est affine Euclidien orienté.*

Remarque 1.3 *on considérons dans ce cours E espace affine euclidien orienté de dimension $n \geq 2$.*

Définitions 1.4 *Soit E un espace affine. On appelle transformation affine de E toute application affine bijective de E dans lui-même. Les transformations affines de E constituent un sous-groupe (pour la composition) du groupe des permutations de E. Le groupe des transformations affines de E est appelé groupe affine de E, et noté $GA(E)$*

Remarque 1.5 *Noton $B(E_n)$ l'ensemble des base Ordonnée de l'espace Vectoriel Euclidien E_n.*

Remarque et Définition 1.6 *Une base de E_n est systéme $(e_{1,...,}e_n)$ de n vecteur linéairement indépendants de E_n ,et peut donc ētre identifier à un point de l'espace produit $(E_n)^n$ que nous noterons $B(E_n)$; il est d'ailleurs facile de prouver que $B(E_n)$ est Ouvert de $(E_n)^n$.*

Définition 1.7 *On appelle Repére affine de E est un n-uple $(A; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ formé d'un point A de E et d'une base $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ de E_n : en d'autre terme c'est un point de $E \times B(E_n)$*

Propriétés 1.8 *soit l'application φ définit sur E et f sa partie linéaire .Si $R = (A; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est un repére de E alors $\varphi(R) = (\varphi(A); \overrightarrow{f(e_1)}, ..., \overrightarrow{f(e_n)}) = R'$ est le repére image de R par φ*

Inversement,si $R = (A; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $R' = (\varphi(A); \overrightarrow{f(e_1)}, ..., \overrightarrow{f(e_n)})$ deux repère de E,il existe une bijection affine φ de E tel que $\varphi(R) = R'$.En particulier φ envoie R sui R'.cette bijection est définit par la condition suivant : $\varphi(A + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = A' + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ $(*)$ avec $x_1, .., x_n \in \mathbb{R}$

Propriétés 1.9 *si φ un bijection affine qui envoie $R = (A; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ sur $R' = (A'; \overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n})$ soit un **isométrie** $\Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, ..; n\}$ tel que $\overrightarrow{e_{i.}}\ \overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{e'_{i.}}\ \overrightarrow{e'_j}$*

Démonstration.
Soit $M=(x_i)_{1\leq i\leq n}, P=(y_j)_{1\leq j\leq n}\in E$ dans le repère R et M',P' leurs image par φ
donc d'aprés $(*)$ on a $\overrightarrow{M\prime P\prime}=\sum_{i=1}^{n}(y_{i-}x_i)\overrightarrow{e'_{i.}}$
Alors $\parallel \overrightarrow{M\prime P\prime} \parallel^2 = \parallel \sum_{i=1}^{n}(y_{i-}x_i)\overrightarrow{e'_i} \parallel^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_{i-}x_i)(y_{j-}x_j)\overrightarrow{e'_i}\ \overrightarrow{e'_j}$ (1)
Alors $\parallel \overrightarrow{MP} \parallel^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_{i-}x_i)(y_{j-}x_j)\overrightarrow{e_i}\ \overrightarrow{e_j}$ (2)
Or φ est un isométrie donc (1) = (2) En effet : on utilise le Lemme suivant . ■

Lemme 1.10 *pour un endomorphisme $f\in l(E)$ soit* ***antisymétrie*** *,il suffit qu'il existe une base $(\overrightarrow{e}_i)\subset E$ tel que $\forall i,j\in\{1,..;n\}\,; f(\overrightarrow{e_i})\ \overrightarrow{e_j}+f(\overrightarrow{e_j})\ \overrightarrow{e_i}=0$*
Inversement si $f\in l(E)$ antisymétrie cette propriété est vrai pour tout $B(E)$

Démonstration.
Soit une base $(\overrightarrow{e}_i)\subset E$ et $f\in l(E)$ alors $\forall\ \overrightarrow{V}\in E$ On a : $f(\overrightarrow{V}).\overrightarrow{V}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\overrightarrow{e_i})\overrightarrow{e_j}.\lambda_i\lambda_j$
or f antisymétrie si et seulement si$\forall\ \overrightarrow{V}\in E,\ f(\overrightarrow{V}).\overrightarrow{V}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\overrightarrow{e_i})\overrightarrow{e_j}.\lambda_i\lambda_j=0$
d'où le résultat. ■

Chapitre 2

Notion de repère mobile à K paramètres

Définition 2.1 *Un* ***repère mobile*** *de E à K-paramètre est une application de la forme $\rho : \Delta \to E \times (E_n)^n, u \to (A(u); \overrightarrow{e_1(u)}, ..., \overrightarrow{e_n}(u))$ avec $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ est un domaine*

telle que : $\forall u \in \Delta, \overrightarrow{(e_1(u)}, ..., \overrightarrow{e_n}(u))$ base de E_n et les deux fonction $A : \Delta \to E$ et $\overrightarrow{e_i} : \Delta \to E_n$ sont Continue sur Δ

Remarque 2.2 **1**$-$ *Le repère mobile ρ continue sur Δ.*

2$-$ *Si les deux application A et $\overrightarrow{e_i}$ de C^p (resp. $p-$fois différentiable) Alors le repère mobile est de C^p (resp. $p-$fois différentiable)*

Définition 2.3 *On appelle* ***base mobile*** *de E définie sur Δ tout application $\Delta \to B(E_n)$ continue*

En particulier est une application $\beta : \Delta \to (E_n)^n, u \to \overrightarrow{(e_1(u)}, ..., \overrightarrow{e_n}(u))$ avec $\overrightarrow{e_i} : \Delta \to E_n$ sont Continue sur Δ et $\forall u \in \Delta, \overrightarrow{(e_1(u)}, ..., \overrightarrow{e_n}(u))$ base de E_n

Remarque 2.4 *β de C^p si $\overrightarrow{e_i} : \Delta \to E_n$ de C^p*

Théorème 2.5 *soit E orienté .*

si $\rho : \Delta \to E\times\ B(E_n)$ Un repére Mobile avec $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ est un domaine Alors $\forall u, v \in \Delta$,$\rho(u)$ et $\rho(v)$ ont ***la méme orientation***

Démonstration.

soit $u \in \Delta$ fixé . les composition $\overrightarrow{e_1(v)}, ..., \overrightarrow{e_n}(v)$ dans la base fixé $H = (\overrightarrow{e_1}(u), ..., \overrightarrow{e_n}(u))$ sont continue $\forall v \in \Delta$. on a les determinant des vecteurs $(\overrightarrow{e_1}(v), ..., \overrightarrow{e_n}(v))$ soit $\delta_u(v)$ avec $v \in \Delta \to \delta_u(v)$ définie et continue sur Δ

on a $\delta_u(u) = 1$,Or $(\overrightarrow{e_1}(v), ..., \overrightarrow{e_n}(v))$ forment une base alors δ_u ne prend jamais la valeur 0

Alors δ_u prend des valeur $\succ 0$.d'ou le résultat ∎

Définition 2.6 *Un repère mobile ρ de E est dit* ***direct*** *(resp.* ***indirect****) si $\forall u \in \Delta$ le repère $\rho(u)$ est* ***direct*** *(resp.* ***indirect****).*

Exemple 2.7 *soit $\Delta \subset \mathbb{R}^2, \dim E = 3$*

on considére $f : \Delta \to E, (u, v) \to M(u, v) \in C^1, f$ définissant une nappe régulière $\sum$ de E

si $\overrightarrow{N}(u, v) = \frac{\partial M(u,v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial M(u,v)}{\partial v}$ désigne le vecteur normale associé à la paramitrisation f

Alors $\forall (u, v) \in \Delta, \rho(u, v) = (M(u, v); \frac{\partial M(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial M(u,v)}{\partial v}, \overrightarrow{N}(u, v))$

ce repère joue un role dans la théorie des surface .

2.0.1 Bijections affines associées à un repère mobile

Définition 2.8 *soit $\rho : \Delta \to E\times\ B(E_n)$ Un repére Mobile de E .pour tout $(u,v) \in \Delta$,on définit la bijection affine $\Psi_{u,v}$ de E qui envoir $\rho(u)$ sur $\rho(v)$ tel que $\Psi_{u,v}(\rho(u)) = \rho(v)$*

Propriétés 2.9 **1**−*les bijections affines $\Psi_{u,v}$ sont tout* ***direct*** *en effet : d'aprés théorème précédent*
2−*on a :$\forall u, v, w \in \Delta$,$\Psi_{u,w} = \Psi_{v,w} o \Psi_{u,v}$, $\Psi_{v,u} = (\Psi_{u,v})^{-1}$ et $\Psi_{u,u} = Id_E$*

2.0.2 Repères mobiles indéformables

Définition 2.10 *Un repère mobile ρ de E est dit* ***indéformable*** *si les bijections affines associées sont des* ***isométries***

Remarque et Définition 2.11 *une isométrie du plan est un déplacement si elle conserve les angles orientés. Les déplacements sont exactement les translations et les rotation*
Pour que un repére $\rho : \Delta \to E\times\ B(E_n)$,$u \to (A(u); \overrightarrow{e_1}(u), ..., \overrightarrow{e_n}(u))$ soit ***indéformable*** *$\Leftrightarrow M(u,v) = (\overrightarrow{e_i(u)}, \overrightarrow{e_j(u)})_{1\le i,j\le n}$* ***indépendant*** *de $u \in \Delta$*

Définition 2.12 *Un repére $\rho = (A; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est dit* ***orthonormal*** *si $\forall u \in \Delta$, $\rho(u) = (A(u); \overrightarrow{e_1}(u), ..., \overrightarrow{e_n}(u))$ est orthonormale.En particulier est indéformable.*

2.0.3 Repère liée

Définition 2.13 *soit $\rho = (A; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\sigma = (B; \overrightarrow{f}_1, ..., \overrightarrow{f}_n)$ deux repére de E définit sur le méme $\Delta \subset \mathbb{R}^k$.*
On dit que le repère " σ liée à ρ "si les coordonnées $B(u)$ et les composantes $(\overrightarrow{f_i}(u))_{1\le i\le n}$ dans le repère $\rho(u)$ sont ***indépendant*** *de $u \in \Delta$.*

Propriétés 2.14 **1**−*la relation " σ liée à ρ " est relation d'equivalence.*
2−*σ liée à $\rho \Leftrightarrow \sigma$ et ρ admettent la méme famille de bijection affine $(\Psi_{u,v})_{u,v\in\Delta}$.En conséquences tout repère mobile lié à un repère indéformable est indéformable.*

Remarque 2.15 *Dans le language de cinématique deux repère mobile indéformables liés sont dit* ***fixes*** *l'un par rapport à l'autre.*

Chapitre 3

Repères mobiles à un paramétre

Soit $\Delta \subset I \subset \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, et de $n+1$ fonction continue $A : I \to E$ et $\overrightarrow{e_i} : I \to E_n$ tel que $\forall t \in I, (\overrightarrow{e}_1(t), ..., \overrightarrow{e}_n(t))$ forment une base de E_n.

Définition 3.1

1−*le repère est dit de C^k si A et $\overrightarrow{e_i}$ de C^k.*

2− *le repère est indéformable $\Leftrightarrow$ la matrie $E(t) = (\overrightarrow{e}_i(t), \overrightarrow{e}_j(t))_{1\leq i,j\leq n}$ est constante .*

3−*soit $\rho = (A; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ un repère mobile dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, $\forall t \in I$,$\exists! D_t \in l(E_n)$, telle que : $D_t(\overrightarrow{e}_i(t)) = \frac{d\overrightarrow{e}_i}{dt}$*

Proposition 3.2 *un repère mobile ρ indéformable il faut et il suffit $\forall D_t \in l(E_n)$ antisymétrie .*

Démonstration.

$\forall D_t \in l(E_n)$ antisymétrie il faut et il suffit que l'on ait $\frac{d\overrightarrow{e}_i}{dt}.\overrightarrow{e}_j(t) + \frac{d\overrightarrow{e}_j}{dt}.\overrightarrow{e}_i(t) = 0$

ie : $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{e}_i.\overrightarrow{e}_j) = 0$.d'ou le résultat ∎

Corollaire 3.3 *si le repère mobile ρ est orthonormale donc indéformable alors il résulte que la matrice de $[D_t]_{(\overrightarrow{e}_1(t),...,\overrightarrow{e}_n(t))}$ est antisymétrie .*

Remarque et Définition 3.4 *considérant $W(t) = (w_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $\forall 1 \leq i \leq n$, $\frac{d\overrightarrow{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}.\overrightarrow{e}_j(t)$*

Théorème 3.5 *soit $I \subset \mathbb{R}$ et $\beta : I \to B(E_n), t \to (\overrightarrow{e}_1(t), ..., \overrightarrow{e}_n(t))$ une* ***base mobile*** *dérivable sut I.*

pour que cette base soit ***orthonormale*** *il faut et il suffit $\exists t_0 \in I, \beta(t_0)$ orthonormale et $\forall t \in I, W(t)$ définit par $\forall 1 \leq i \leq n, \frac{d\overrightarrow{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}.\overrightarrow{e}_j(t)$ soit antisymétrie.*

Démonstration.

il suffit de montrer la condition suffisante,pour cela on désigne $\alpha = (\varepsilon_{1,...,}\varepsilon_n)$ une base orthonormale fixe de E_n.

Notons $\forall t \in I, B(t) = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ lamatrice de passage de la base α à la base $\beta(t)$.

on a $B(t)$ définit par $\overrightarrow{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}.\overrightarrow{\varepsilon}_j$ avec $1 \leq i \leq n$.

d'aprés définition des w_{ij} on a : $\frac{d\overrightarrow{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_{ji}(t).b_{kj}(t).\overrightarrow{\varepsilon}_k$

d'ou $\frac{db_{ki}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} w_{ji}(t).b_{kj}(t)$ sous forme d'interprétation matriciel on a : $\frac{dB}{dt} = B(t).W(t)$

alors $\frac{dB^T}{dt} = (\frac{dB}{dt})^T = (B(t).W(t))^T = W(t)^T.B(t)^T$ or $W(t)$ antisymétrie

Alors $W(t)^T + W(t) = 0$

on a donc $B(t).\frac{dB^T}{dt} + \frac{dB}{dt}.B(t)^T = B(t).\{W(t)^T + W(t)\}.B(t)^T = 0$

d'ou $\frac{d}{dt}(B(t).B(t)^T) = 0$ alors $B(t).B(t)^T = cte$

or la matrice $B(t_0)$est orthogonal donc $B(t_0).B(t_0)^T = I_{E_n}$
donc $\forall t \in I, B(t).B(t)^T = I_{E_n}$
d'ou la base $(\overrightarrow{e}_1(t), ..., \overrightarrow{e}_n(t))$ orthonormale pour tout $t \in I$.d'ou le résultat ■

3.0.1 Fonctions liées à un repère mobile indéformable

Désignons $\rho = (A; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ un repère mobile indéformable définit sur I

Définition 3.6 *Une fonction vectoriel $\overrightarrow{V} : I \to E_n$ est dit liée au repère ρ si il s'écrit sous la forme $\overrightarrow{V}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{e_i}(t)$ où les λ_i désignent des constantes.*

on a alors si ρ est dérivable : $\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\frac{d\overrightarrow{e_i}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.D_t(\overrightarrow{e}_i) = D_t(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{e_i}(t)) = D_t(\overrightarrow{V}(t))$

***Définition 3.7 (Définition intrinsèque de l'opérateur** D_t)

On considére $\Psi_{t,u}$ la bijection affine de E qui envoie $\rho(t)$ sur $\rho(u)$ et par $\overrightarrow{\Psi}_{t,u} \in l(E_n)$ sa partie linéaire
$t \in I$ fixé ,$\forall \overrightarrow{W} \in E_n$ s'écrit $\overrightarrow{w}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{e_i}(t)$ où les λ_i désignent des constantes.
on a évidement $\overrightarrow{\Psi}_{t,u}(\overrightarrow{W}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{e_i}(u)$
si le repère ρ est dérivable on a $\frac{\partial \overrightarrow{\Psi}_{t,u}(\overrightarrow{W})}{\partial u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\frac{d\overrightarrow{e_i}(t)}{du} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.D_u(\overrightarrow{e}_i) = D_u(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{e_i}(t)) = D_u(\overrightarrow{W}(t))$
Alors $[\frac{\partial \overrightarrow{\Psi}_{t,u}(\overrightarrow{W})}{\partial u}]_{t=u} = D_t(\overrightarrow{W}(t))$
le vecteur $\overrightarrow{W} \in E_n$ est arbitraire donc on conclu d'aprés ce qui précéde $I \to l(E_n), u \to \overrightarrow{\Psi}_{t,u}$ est dérivable et aussi $[\frac{\partial \overrightarrow{\Psi}_{t,u}}{\partial u}]_{t=u} = D_t$
Alors D_t ne dépent que de t et de la famille $(\overrightarrow{\Psi}_{t,u})$ des bijection affine associé au repère ρ.

3.0.2 Détermination d'un repère mobile par la donnée du champ de ses vitesses

Théorème 3.8 *Soit $(\xi_i, w_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ un systéme de $n+n^2$ fonction numérique continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit R_0* ***un repère fixé quelconque*** de E_n
pour chaque $t_0 \in I, \exists!\ \rho = (A; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ un repère mobile définit sur I tel que $\rho(t_0) = R_0$ et vérifiant $\{\ \forall t \in I : \frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t).\overrightarrow{e_i}(t)$ et
$\frac{d\overrightarrow{e_i}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} w_{ji}(t).\overrightarrow{e_j}(t)$ avec $1 \le i \le n\}^{(*)}$
De plus si $(\xi_i, w_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ de classe C^p alors ρ de classe C^{p+1}
Démonstration.
soit $A(t) = (x_i)_{1 \le i \le n} \in R_0$ et $\forall 1 \le i \le n, \overrightarrow{e_i}(t) = (b_{ji})_{1 \le j \le n} \in \rho$
On a $\{\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(t).b_{ij}$ et $\frac{db_{ji}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} w_{ki}(t).b_{jk}$ avec $1 \le i,j \le n\ \}^{(**)}$ puisque $(*)$
on a $(**)$ est un systéme différentiel linéaire à coefficient continue sur I ,il admet donc une solution unique ,définie sur I et prenant un système de valeur
donnée au point t_0 tel que $x_i(t_0) = 0$ et $b_{ji}(t_0) = \delta_{i,j}$ d'où la premiére assertion .
la solution est bien définit En effet : on pose $\Delta(t) = \det([b_{ij}(t)])_{1 \le i,j \le n}$
$\frac{d\Delta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\{\det([b_{ij}(t)])_{1 \le i,j \le n}\} = (\sum_{i=1}^{n} w_{ii}(t)).\Delta(t)$
or $\Delta(t_0) \neq 0$ alors $\Delta(t) = \Delta(t_0).\exp(\int_{t_0}^{t}(\sum_{i=1}^{n} w_{ii}(\tau))d\tau)$
si $(\xi_i, w_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ de classe C^p alors la $2^{éme}$ assertion résulte de la proposition précédent.

Remarque 3.9 (important)

1$-$*Si* R_0 *est orthonormal et* $\forall t \in I, (w_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$ *est antisymétrie alors le repère mobile* ρ *obtenu est orthonormal et de méme orientation que* R_0

2$-$*Si* ρ *indéformable alors* $\forall t \in I, (w_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$ *est appelée* ***la matrice de rotation*** *à l'instant* t*du repère mobile* ρ.

3$-$*Si* $n = 3$ *nous aurons une interprétation cinématique de la matrice* $\forall t \in I, (w_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$ *et la donnée des fonctions* $(\xi_i, w_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$*équivaudra à la*

donnée du champ des vitesse de ρ *à chaque instant* t *par rapport au repère* $\rho(t)$.

■

Chapitre 4

repères mobiles indéformables en dimension 2 ou 3

nous commencerons par l étude des repères de E de dimension 3 *; le cas des repères mobiles de E de dimension* 2 *sera étudié à la fin du chapitre*

4.1 Rotation instantanée d'un repère mobile indéformable de E de dimension 3

Soit $\rho : I \longmapsto E \times B(E_3); t \longmapsto (A(t); \overrightarrow{e}_1(t); \overrightarrow{e}_2(t); \overrightarrow{e}_3(t))$ *un repère mobile (à un paramètre) de* ξ_3*;défini et dérivable sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*;et ;pour chaque* $t \in I$*;soit* D_t *l'endomorphisme de* E_3 *défini par :*

$$D_t(\overrightarrow{e}_i(t)) = \frac{d\overrightarrow{e}_i}{dt}(i = 1; 2; 3)$$

nous savons que le repère mobile ρ *est indéformable si pour tout* $t \in I$ *l'endomorphisme* D_t *est antisymétrique.Or les endomorphisme antisymétrique de* E_3 *(supposé orienté) sont de la forme :* $\overrightarrow{X} \longrightarrow \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{X}$ *;où* $\overrightarrow{K}$ *désigne un vecteur fixé de* E_3

si le repère mobile ρ *est indéformable ;il existe une fonction vectorielle*

$\overrightarrow{\Omega} : I \longrightarrow E_3;\ \ t \longrightarrow \overrightarrow{\Omega}(t)$

vérifiant pour tout $t \in I$ *; la relation suivante (2)*

$$\frac{d\overrightarrow{e}_i}{dt} = \overrightarrow{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{e_i}(t)\ \ (i = 1; 2; 3)$$

les vecteurs $\overrightarrow{e}_1(t); \overrightarrow{e_2}(t); \overrightarrow{e}_3(t)$ *étant indépendants .on notera que le vecteur* $\overrightarrow{\Omega}(t)$ *est défini par la relation précédente.*

Définition 4.1 *1 : si* $\rho = (A; \overrightarrow{e_1}(t); \overrightarrow{e}_2(t); \overrightarrow{e}_3(t))$ *est un repère mobile indéformable de l'espace affine euclidien orienté E ;le vecteur* $\overrightarrow{\Omega}(t)$ *défini par (2) est appelé la* ***rotation instantanée*** *de ce repère pour la valeur* t *du paramètre*

4.1.1 cas d'un repère orthonormal

soit $\rho = (A; \overrightarrow{e}_1; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e}_3)$ *un repère mobile* ***orthonormal*** *de E ;si on désigne par* $(p(t); q(t); r(t))$ *les composantes du vecteur* $\overrightarrow{\Omega}(t)$ *dans la base* $(e_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$ *;on a par application de (2) :*

$$\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} = r\overrightarrow{e_2} - q\overrightarrow{e_3}; \frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt} = p\overrightarrow{e_3} - r\overrightarrow{e_1}; \frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt} = q\overrightarrow{e_1} - p\overrightarrow{e_2}$$

d'où :

$p = \overrightarrow{e_3}.\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt} = -\overrightarrow{e_1}.\frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt}; q = \overrightarrow{e_1}.\frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt} = \overrightarrow{e_3}.\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt}; r = \overrightarrow{e_2}.\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} = -\overrightarrow{e_1}.\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt}$ *(4)*

lesrelations (4) permettent de déterminer les fonctions $p; q; r$ *par dérivation des fonctions* $\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}$.

Remarque 4.2 *On aurait pu définir a priori trois fonctions* $p; q; r$ *par les relations (4) et vérifier que la fonction* $\overrightarrow{\Omega}(t) = p\overrightarrow{e_1} + q\overrightarrow{e_2} + r\overrightarrow{e_3}$ *satisfait (2) :c'est un procédé élémentaire pour prouver l'existence de la fonction* $\overrightarrow{\Omega}$

Exemple 4.3 *: Repères de Frenet et de Darboux*

L'introduction du vecteur rotation va nous permettre de donner une interprétation simple des formules de Frenet et de Darboux

a) soit γ *un arc orienté de classe* C^3 *de E ;régulier et sans point d'inflexion ;défini par une paramétrisation normale :* $I \longrightarrow E; s \longrightarrow M(s)$*;et soit* $F : s \longrightarrow (M(s); \overrightarrow{\tau}(s); \overrightarrow{\nu}(s); \overrightarrow{\beta}(s))$ $(s \in I)$

la fonction ***repère de Frenet*** *associée à cette paramétrisation c'est un repère mobile de classe* C^1 *sur I ;vérifiant les formules de* ***Frenet*** $\frac{dM}{ds} = \overrightarrow{\tau}$*;et* $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = \rho\overrightarrow{\nu}; \frac{d\overrightarrow{\nu}}{ds} = -\rho\overrightarrow{\tau} + \theta\overrightarrow{\beta}$

$\frac{d\overrightarrow{\beta}}{ds} = \theta\overrightarrow{\nu}$*; où* ρ *et* θ *désignent les fonctions courbure et torsion de* γ

Par comparaison avec (3) ;on voit que la rotation instantanée de ce repère mobile est la fonction : $I \longrightarrow E_3; s \longrightarrow \overrightarrow{\omega}(s) = -\theta(s)\overrightarrow{\tau}(s) + \rho(s)\overrightarrow{\beta}(s)$ *donc (5)*

$$\overrightarrow{\omega} = -\theta\overrightarrow{\tau} + \rho\overrightarrow{\beta}$$

b)soit $\sum$ *une nappe géométrique de classe* C^2 *de E ; et soit* γ *un arc régulier de classe* C^2 *tracé sur* $\sum$*;défini par une paramétrisation normale* $I \longrightarrow \$E$ *;s*$\longrightarrow P(s)$

A cet arc est attaché un repére mobile ;appelé ***repère de Darboux*** *soit :*

$s \longrightarrow (P(s); \overrightarrow{\tau}(s); \overrightarrow{g}(s); \overrightarrow{h}(s))$ $(s \in I)$ *vérifiant les relations :*

$\frac{dP}{ds} = \overrightarrow{\tau}$ *;*$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = \rho_g\overrightarrow{g} + \rho_n\overrightarrow{h}; \frac{d\overrightarrow{g}}{ds} = -\rho_g\overrightarrow{\tau} - \theta_g\overrightarrow{h}; \frac{d\overrightarrow{h}}{ds} = -\rho_n\overrightarrow{\tau} + \theta_g\overrightarrow{g}$

$\rho_n; \rho_g; \theta_g$ *désignent respectivement la courbure normale ;la courbure géodésique et la torsion géodésique de* γ *.par comparaison avec (3) ;on voit que la rotation instantanée de ce repère mobile est donnée par :*

$$\overrightarrow{\Omega}(s) = -\theta_g\overrightarrow{\tau} - \rho_n\overrightarrow{g} + \rho_g\overrightarrow{h}$$

4.1.2 Fonctions liées à un repère indéformable

Revenons au cas général d'un repère mobile dérivable et indéformable $\rho = (A; \overrightarrow{e}_1; \overrightarrow{e}_2; \overrightarrow{e}_3)$ *de E ;*$dfinisurunintervalleIdeR$ *; etsoit*$\overrightarrow{\Omega}$ *sa rotation instantanée .*

Par définition ;une fonction vectorielle liée à ρ *est une fonction de la forme :*

$\overrightarrow{V} : I \longrightarrow E_3; t \longrightarrow X_1\overrightarrow{e}_1(t) + X_2\overrightarrow{e}_2(t) + X_3\overrightarrow{e}_3(t)$

où $X_1; X_2; X_3$ *désignent des constantes arbitraires ;une telle fonction esst dérivable sur I et vérifie :*$\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} X_i\frac{d\overrightarrow{e}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{3} X_i\overrightarrow{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{e}_i = \overrightarrow{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{V}(t)$

De même ;une application de I dans E;sera dite liée à ρ *si elle est de la forme*

$$t \longrightarrow M(t) = A(t) + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i(t)$$

*où $x_1; x_2; x_3$ désignent des constantes arbitraires.Dans le langage de la cinématique ;une telle fonction est appelée **un mouvement ponctuel** lié à ρ .Une telle fonction est dérivable sur I et vérifie ;pour tout $t \in I$: $\frac{dM}{dt} = \frac{dA}{dt} + \overrightarrow{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{A}(t)\overrightarrow{M}(t)$*

Pour connaître les dérivées au point t de toutes les fonctions de cette forme ;il suffit donc de connaître les vecteurs $\frac{dA}{dt}$ et $\overrightarrow{\Omega}(t)$.En général ces vecteurs sont définis par leurs composantes dans la base $(\overrightarrow{e}_i(t))_{1\leq i\leq 3}$;et on pose :

$\frac{dA}{dt} = \alpha\overrightarrow{e}_1 + \beta\overrightarrow{e}_2 + \delta\overrightarrow{e}_3; \overrightarrow{\Omega}(t) = p\overrightarrow{e}_1 + q\overrightarrow{e}_2 + r\overrightarrow{e}_3$

4.1.3 Détermination d'un repère orthonormal de E de dimension 3 par la donnée des fonctions $\alpha; \beta; \delta; p; q; r$

Théorème 4.4 *Soit $(\alpha; \beta; \delta; p; q; r)$ un systéme de 6 fonctions numériques continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; et soit R_0 un repére orthonomal direct de E Pour chaque $t_0 \in I$;*

il existe un repère mobile unique $\rho = (A; \overrightarrow{e}_1; \overrightarrow{e}_2; \overrightarrow{e}_3)$ de E ; de classe C^1sur I ; vérifiant
$\rho(t_0) = R_0$ et :$(t \in I)$ $\frac{dA}{dt} = \alpha\overrightarrow{e}_1 + \beta\overrightarrow{e}_2 + \delta\overrightarrow{e}_3; \frac{d\overrightarrow{e}_1}{dt} = r\overrightarrow{e}_2 - q\overrightarrow{e}_3; \frac{d\overrightarrow{e}_2}{dt} = p\overrightarrow{e_3} - r\overrightarrow{e}_1$
$\frac{d\overrightarrow{e}_3}{dt} = q\overrightarrow{e}_1 - p\overrightarrow{e}_2$
*de plus ; ce repère est **orthonormal et direct***
cela résulte immédiatemment du théorème X.3.3 et du fait que la matrice $W(t)$ est donnée ici par

$$W(t) = \begin{pmatrix} 0 & -r(t) & q(t) \\ r(t) & 0 & -p(t) \\ -q(t) & p(t) & 0 \end{pmatrix} \text{ elle est danc antisymétrique.}$$

4.1.4 Repère mobile orthonormal de E de dimension 2

E de dimension 2.
Dans le plan orienté E ;choisissons un repère orthonormal direct (fixé) $(o; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$
la donnée d'une fonction vectorielle $I \longrightarrow E_2; t \longrightarrow \overrightarrow{e}(t)$ de norme constante r et de classe C^p sur l'intervalle I ; équivaut à la donnée d'une fonction numérique θ;de classe C^P sur I vérifiant : $(\forall t \in I)$ $\overrightarrow{e}(t) = r(\cos\theta(t)\overrightarrow{i} + \sin\theta(t)\overrightarrow{j})$
cette fonction θ est une détermination continue de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{e}(t))$
on voit alors que la donnée d'un repère mobile orthonormal direct $(A; \overrightarrow{e}_1; \overrightarrow{e}_2)$ de E ;
équivaut à la donnée d'une fonction $A : I \longrightarrow; t \longrightarrow A(t)$ (définissant l'origine du repère)
et d'une fonction numérique $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$; vérifiant :

$$(*) \qquad \overrightarrow{e}_1 = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{e}_2 = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$$

le repère est de classe C^P si; et seulement si; les fonctions A et θ sont de classe C^p
Par dérivation de $(*)$ on obtient :

$$(**) \qquad \frac{d\overrightarrow{e}_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e}_2\ ;\ \frac{d\overrightarrow{e}_2}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e}_1$$

Pour interpéter les relations $(**)$; identifions E avec un plan affine P de l'espace orienté
E ; et choisissons un vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ orthogonal à P tel que le repère $(o; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ soit direct .posant $\overrightarrow{\Omega}(t) = \theta\prime(t)\overrightarrow{k}$;les relations $(**)$ équivaut à :

$$\frac{d\overrightarrow{e}_1}{dt} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{e}_1 \qquad ; \ \frac{d\overrightarrow{e}_2}{dt} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{e}_2$$

4.2 Repères mobiles indéformables à k paramètres de E de dimension 3

E de dimension 3

N'ayant en vue que des applications cinématiques ; nous nous bornerons à l'étude des repères mobiles à k paramètres de E

L'espace E sera supposé orienté.

soit donc Δ *un domaine de* $\mathbb{R}^k(k \succeq 2)$;*et soit*

$\rho : \Delta \longrightarrow E \times B(E_3); u \longrightarrow (A(u); \overrightarrow{e}_1(u); \overrightarrow{e}_2(u); \overrightarrow{e}_3(u))$

un repère mobile indéformable et différentiable défini sur Δ.

Notons $(u_1; ......; u_k)$ *les coordonnées d'un point quelconque* $u \in \Delta$ *et* $\frac{\partial f}{\partial u_\lambda}$ *la* $\lambda -$ *ième dérivée partielle d'une fonction quelconque* f *différentiable sur* Δ

Pour chaque $\lambda = 1; 2; ....; k$ *et chaque* $u \in \Delta$ *; nous définissons un endomorphisme* $D_{\lambda;u}$ *de* E_3*par les conditions :*

$$D_{\lambda;u}(\overrightarrow{e}_i(t)) = \frac{\partial \overrightarrow{e}_i}{\partial u_\lambda}(u)(i = 1; 2; 3)$$

et ; du fait que le repère ρ *est indéformable on déduit que cet endomorphisme est antisymétrique :les calculs sont les mêmes qu'au X.3.il existe donc un vecteur* $\overrightarrow{\Omega}_\lambda(t)$; *vérifiant :* (1) $\frac{\partial \overrightarrow{e}_i}{\partial u_\lambda}(u) = \overrightarrow{\Omega}_\lambda(t) \wedge \overrightarrow{e}_i$ $(i = 1; 2; 3)$

Ce vecteur $\overrightarrow{\Omega}_\lambda(u)$ *est appelé* ***la rotation*** *(instantanée)* ***virtuelle*** *du repère* ρ *au point u par rapport à la variable* u_λ *;nous dirons aussi que c'est la* $\lambda -$ *iéme rotation instantanée partielle .*

En langage intuitif :le vecteur $\overrightarrow{\Omega}_\lambda(u)$ *est la rotation instantanée du repère mobile à un paramètre obtenu en faisant varier seulement* u_λ *; cette interprétation permet très souvent de déterminer sans calcul les vecteurs* $\overrightarrow{\Omega}_\lambda(u)$ $(\lambda = 1; 2; ...; k)$ *en s'appuyant sur le principe suivant.*

Si ; pour tout réel α *assez voisin de* 0 *; le déplacement qui envoie le repère* $\rho(u_1; ...; u_k)$ *sur le repère* $\rho(u_1; ....; u_\lambda + \alpha; ...; u_k)$ *est* ***une rotation d'angle*** α *autour d'un axe* $\overrightarrow{\Delta}$ *; alors la* $\lambda -$ *ième rotation instantanée partielle* $\overrightarrow{\Omega}_\lambda(u)$ *du repère* ρ *au point* $u = (u_1; ......; u_k)$ *est le vecteur directeur unitaire de l'axe* $\overrightarrow{\Delta}$.

Remarque 4.5 *Soit :* $\overrightarrow{V} : \Delta \longrightarrow E_n; u \longrightarrow \sum_{i=1}^3 X_i \overrightarrow{e}_i(u)$

(où $X_1; X_2; X_3$ *désignent des constantes) une fonction vectorielle liée au repère mobile* ρ.
cette fonction est différentiable ; et ses dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial u_\lambda}(u) = \sum_{i=1}^{3} X_i \frac{\partial \overrightarrow{e}_i}{\partial u_\lambda}(u) = \sum_{i=1}^{3} X_i \overrightarrow{\Omega}_\lambda(u) \wedge \overrightarrow{e}_i(u)$$

soit :

$$\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial u_\lambda}(u) = \overrightarrow{\Omega}_\lambda(u) \wedge \overrightarrow{V}(u)$$

sa différentielle au point u est définie par :

$$d\overrightarrow{V} = \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial u_\lambda}(u) du_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{k} \overrightarrow{\Omega}_\lambda(u) du_\lambda \wedge \overrightarrow{V}(u)$$

le symbole $\sum_{\lambda=1}^k \overrightarrow{\Omega}_\lambda(u) du_\lambda$*(qui représente une forme différentielle à valeurs dans* E_n*) sera appelé* ***la rotation infinitésimale*** *du repère mobile* ρ.

l'exemple qui suit est fondamental.

4.2.1 Repère défini par des angles d'Euler

Supposons donné un repère orthonormal direct $R = (o; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ *de* E

A chaque point $(\psi; \theta; \varphi)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *nous associons les vecteurs* $\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}; \overrightarrow{I}; \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K}$ *(dépendant de ce point) définis par :*

$\overrightarrow{u} = \cos\psi\,\overrightarrow{i} + \sin\psi\,\overrightarrow{j}; \overrightarrow{v} = -\sin\psi\,\overrightarrow{i} + \cos\psi\,\overrightarrow{j}; \overrightarrow{K} = \cos\theta\,\overrightarrow{k} - \sin\theta\,\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{I} = \cos\varphi\,\overrightarrow{u} + \sin\varphi\,\overrightarrow{w}; \overrightarrow{J} = -\sin\varphi\,\overrightarrow{u} + \cos\varphi\,\overrightarrow{w}$

Alors le repère $\rho_1(\psi) = (o; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{k})$ *est celui qui se déduit de* φ *par la rotation d'angle* ψ *autour de l'axe* $(o; \overrightarrow{k})$*; le repère* $\rho_2(\psi;\theta) = (o; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{w}; \overrightarrow{k})$ *se déduit de* $\rho_1(\psi)$ *autour de l'axe* $(o; \overrightarrow{u})$

et le repère $\rho(\psi;\theta;\varphi) = (o; \overrightarrow{I}; \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K})$ *se déduit de* $\rho_2(\psi;\theta)$ *par rotation d'angle* φ *autour de l'axe* $(o; \overrightarrow{K})$ *: tous ces repères sont orthonormaux et directs.*

L'application $\mathbb{R}^3 \longrightarrow E \times B(E_3); (\psi;\theta;\varphi) \longrightarrow \rho(\psi;\theta;\varphi)$ *définit un repère mobile à trois paramètres de* E*.nous allons calculer ses rotations virtuelles par application des principes*

ci - dessus

a) si $(\theta; \varphi$ *restant fixes);* ψ *augmente de* $\Delta\psi$ *; le repère* $\rho(\psi;\theta;\varphi)$ *subit une rotation d'angle* $\Delta\psi$ *autour de l'axe* $(o; \overrightarrow{k})$*;sa première rotation partielle est donc le vecteur* $\overrightarrow{\Omega}_1 = \overrightarrow{k}$

b) si $(\psi$ *et* φ *restant fixe);* θ *augmente de* $\Delta\theta$*; le repère* $\rho(\psi;\theta;\varphi)$ *subit une rotation d'angle* $\Delta\theta$ *autour de l'axe* $(o; \overrightarrow{u})$*;sa seconde rotation partielle est donc le vecteur* $\overrightarrow{\Omega}_2 = \overrightarrow{u}$.

c) si $(\psi$ *et* θ *restant fixes) ;* φ *augmente de* $\Delta\varphi$*;le repère* $\rho(\psi;\theta;\varphi)$ *subit une rotation d'angle* $\Delta\varphi$ *autour de l'axe* $(o; \overrightarrow{K})$*;sa troisième rotation partielle est donc le vecteur* $\overrightarrow{\Omega_3} = \overrightarrow{K}$

nous résumerons ces résultats en disant que la rotation infinitésimale du repère mobile ρ

au point $(\psi;\theta;\varphi)$ *est :*

$$\overrightarrow{k}\,d\psi + \overrightarrow{u}\,d\theta + \overrightarrow{K}\,d\varphi$$

On voit immédiatement que la rotation infinitésimale du repère $\rho_1(\psi)$ *est* $\overrightarrow{k}\,d\psi$ *; et que la rotation infintésimale du repère* $\rho_2(\psi;\theta)$ *est* $\overrightarrow{k}\,d\psi + \overrightarrow{u}\,d\theta$.

Remarque 4.6 *Pour tout réel r ; le point* M *de* E *défini par* $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{K}$ *est le point de coordonnées sphériques* $(r;\psi;\theta)$ *dans le repère donné* R *.si on considère ce point comme une fonction des trois variables réelles* $r;\psi;\theta$*;on a donc :*

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \overrightarrow{K}; \frac{\partial M}{\partial \psi} = r\frac{\partial \overrightarrow{K}}{\partial \psi} = r\overrightarrow{\Omega_1} \wedge \overrightarrow{K} = r\,\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{K} = -r\overrightarrow{u}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = r\frac{\partial \overrightarrow{K}}{\partial \theta} = r\overrightarrow{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{K} = r\,\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{K} = -r\overrightarrow{w}$$

d'où :

$$dM = \overrightarrow{K}\,dr - r\,\overrightarrow{u}\,d\psi - r\,\overrightarrow{w}\,d\theta$$

si on suppose donnée trois fonctions dérivables $t \longrightarrow r(t); t \longrightarrow \psi(t); t \longrightarrow \theta(t)$ *définies sur un même intervalle* I *de* $\mathbb{R}^3$ *; la fonction composée* $t \longrightarrow P(t) = M(r(t);\psi(t);\theta(t))$ *vérifie*

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \overrightarrow{K}\frac{dr}{dt} - r\,\overrightarrow{u}\frac{d\psi}{dt} - r\,\overrightarrow{w}\frac{d\theta}{dt}$$

Nous obtenons ainsi la vitesse d'un mouvement ponctuel défini en coordonnées sphériques

4.3 Retour aux repères mobiles à un paramètres de E avec dim$E$ = 3.principe d'addition des vecteurs rotations

Un repère mobile à un paramètre de E *est souvent défini par la donnée ; pour chaque valeur de la variable* t *; d'un système* $(u_1(t); ....; u_k(t))$ *de paramètres définissant la position de ce repère à l'instant* t.

dans ce cas ; la rotation instantanée du repère mobile s'obtient facilement en appliquant la proposition qui suit :

Théorème 4.7 *(principe d'addition des vectures rotations)*
Soit Δ *un domaine de* $\mathbb{R}^k(k \succeq 2)$ *et* $\rho : \Delta \longrightarrow E \times B(E_3)$ *un repère mobile* ***différentiable et indéformable*** *de* E.
Soit d'autre part $u : I \longrightarrow \Delta; t \longrightarrow (u_1(t); u_2(t); ....; u_k(t))$ *une fonction dérivable ;définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *; et à valeurs dans* Δ *; alors le repère mobile (à un paramètre)*
$t \longrightarrow \rho(u(t))(t \in I)$ *est* ***indéformable*** *; et sa* ***rotation instantanée*** *à l'instant* t *est le vecteur* $(*)$

$$\overrightarrow{\omega}(t) = \sum_{\lambda=1}^{k} \overrightarrow{\Omega_\lambda}(u(t))u\prime_\lambda(t)$$

où $\overrightarrow{\Omega_1}(u); ....; \overrightarrow{\Omega_k}(u)$ *désignent les* ***rotations partielles*** *du repère donné au point* u .

Démonstration.
Poson $\rho(u) = (A(u); \overrightarrow{e}_1(u); \overrightarrow{e_2}(u); \overrightarrow{e_3}(u))$*;et ; pour tout* $t \in I$ *; soit* $\varepsilon_i(t) = \overrightarrow{e_i}(u(t))$ $(i = 1; 2; 3)$*.le repère mobile donné* ρ *étant indéformable ; il est tout d'abord évident que le repère mobile* $\sigma : t \longrightarrow (A(u(t)); \overrightarrow{\varepsilon_1}(t); \overrightarrow{\varepsilon_2}(t); \overrightarrow{\varepsilon_3}(t))$ *est indéformable .*
D'après le théorème de dérivation des fonctions composées ; on a d'autre part ; pour $i = 1; 2; 3$: $\frac{d\overrightarrow{\varepsilon}_i}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\partial \overrightarrow{e_i}}{\partial u_\lambda}(u(t))\frac{du_\lambda}{dt}$*;soit (d'après la définition des rotations partielles) :*
$\frac{d\overrightarrow{\varepsilon}_i}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{k} \overrightarrow{\Omega_\lambda}(u(t)) \wedge \overrightarrow{e}_i(u(t))u\prime_\lambda(t).$
le vecteur $\overrightarrow{\omega}(t)$ *défini par* $(*)$ *vérifie donc* $\frac{d\overrightarrow{\varepsilon_i}}{dt} = \overrightarrow{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{\varepsilon_i}$ $\quad (i = 1; 2; 3)$
c'est donc la rotation instantanée ; à la l'instant t *; du repère mobile* $\sigma : t \longrightarrow \rho(u(t))$ ■

Exemple 4.8 *Supposons données trois fonctions numériques* $\psi; \theta; \varphi$ *dérivables sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et pour chaque* $t \in I$ *; soit* $\sigma(t) = (O; \overrightarrow{I}(t); \overrightarrow{J}(t); \overrightarrow{K}(t))$ *le repère orthonormal direct relativement à un repère d'origine* O *admettant les nombres* $\psi(t); \theta(t); \varphi(t)$ *pour angles d'Euler relativement à un repère donné* $R = (O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ *.on voit immédiatement que la rotation instantanée de ce repère à l'instant* t *est le vecteur*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\omega}(t) &= \psi\prime\overrightarrow{k} + \theta\prime\overrightarrow{u} + \varphi\prime\overrightarrow{K}\\ &= \theta\prime\overrightarrow{u} + \psi\prime\sin\theta\overrightarrow{w} + (\psi\prime\cos\theta + \varphi\prime)\overrightarrow{K}\\ &= (\theta\prime\cos\varphi + \psi\prime\sin\theta\sin\varphi)\overrightarrow{I} + (\psi\prime\sin\theta\cos\varphi - \theta\prime\sin\varphi)\overrightarrow{J} + (\psi\prime\cos\theta + \varphi\prime)\overrightarrow{K}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi les composantes $p; q; r$ *de la rotation instantanée dans le repère mobile ;*
soit :$p = \psi\prime\sin\theta\cos\varphi + \theta\prime\cos\varphi; q = \psi\prime\sin\theta\cos\varphi - \theta\prime\sin\varphi; r = \psi\prime\cos\theta + \varphi\prime.$
On en déduirait facilement les composantes de la retation instantanée dans le repère fixe $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$*;soit :*
$p_1 = \varphi\prime\sin\theta\sin\psi + \theta\prime\cos\psi; q_1 = \varphi\prime\sin\theta\cos\psi - \theta\prime\sin\varphi; r_1 = \varphi\cos\theta + \psi\prime.$
ces formules sont très importantes pour la dynamique des solides.

Bibliographie

1– *COURS DE MATHEMATIQUES. Tome 3, Géométrie et cinématique, 2ème édition Broché , 29 janvier 1993 de Jacqueline Lelong-Ferrand (Auteur), Jean-Marie Arnaudiès (Auteur)*
2– *http ://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ga/node3.html*