Equations du premier ordre

Exercice 1

Trouver l'ensemble des solutions réelles des **équations différentielles du premier ordre** suivantes et préciser les intervalles sur lesquels sont définies ces solutions. Donner ensuite la solution particulière telle que $y(t_0) = y_0$ pour les valeurs de t_0 et de y_0 précisées entre parenthèses.

1. $y'(t) - 4y(t) = 12t + 1 \, (t_0 = 0, \, y_0 = 0)$
2. $y'(t) + 2y(t) = 2te^{-2t} \, (t_0 = 0, \, y_0 = 2)$
3. $ty'(t) = 2y(t) + t^3 \; (t_0 = 1, \, y_0 = 3)$

Equations du second ordre ordre

Exercice 2

Trouver l'ensemble des solutions réelles des **équations différentielles du second ordre** suivantes et préciser les intervalles sur lesquels sont définies ces solutions. Donner ensuite la solution particulière telle que $y(t_0) = y_0$, $y'(t_1) = y_1$ pour les valeurs de t_0, t_1, y_0 et y_1 précisées entre parenthèses.

1. $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t}(t + 2) \; (t_0 = 0, \, t_1 = 0, \, y_0 = 3, \, y_1 = -2)$
2. $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 6 \; (t_0 = 0, \, t_1 = 0, \, y_0 = 1, \, y_1 = 0)$
3. $y''(t) + y(t) = \tan^2(t), \, t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Remarque : pour la question 3 on admettra que les primitives de $t \longmapsto \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$ et de $t \longmapsto -\frac{\sin^3(t)}{\cos^2(t)}$ sont données par :

$$t \longmapsto -\sin(t) + \ln(\tan(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{t}{2})) + \text{cte et } t \longmapsto -\cos(t) - \frac{1}{\cos(t)} + \text{cte}.$$

Systèmes différentiels

Exercice 3

Trouver l'ensemble des solutions réelles du système différentielle d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t). \end{aligned}$$