

**Université d'Evry Val d'Essonne**  
**Master Sciences et Ingénierie**  
**Mention : Sciences et Génie des Matériaux**  
**Niveau M1 – UE<sub>c23</sub>**

# **Matériaux magnétiques**

**Propriétés macroscopiques et applications**

**Travaux dirigés**

**F. Nguyen-Vandau<sup>1</sup>, C.Coillot<sup>2</sup> & H. Jaffrès<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Unité Mixte de Recherche CNRS – Thales - Route Départementale 128 -  
91767 PALAISEAU*

<sup>2</sup> *LPP (Laboratoire de Physique des Plasmas) -Ecole Polytechnique -  
Route de Saclay - 91128 PALAISEAU*

## 1. Paramagnétisme des moments localisés (cas $L=0$ , $S=1$ )

On considère un corps dont le paramagnétisme est caractérisé par les nombres quantiques  $L=0$  et  $S=1$ . On a donc  $g=2$ . La projection  $m_j$  du vecteur  $\vec{J}$  le long de l'axe de quantification peut donc prendre trois valeurs : -1, 0 ou 1. On désignera par  $N$  la densité (nombre de molécules par unité de volume).

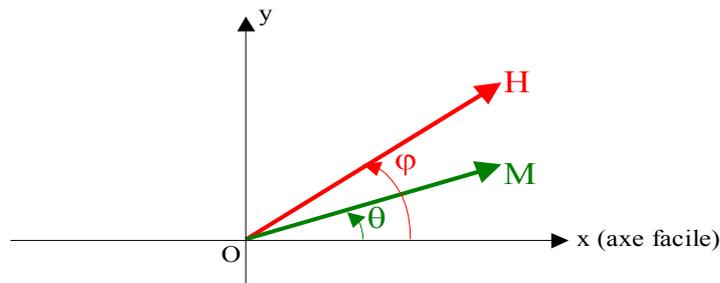
1. En présence d'un champ magnétique extérieur  $H_a$ , la dégénérescence est levée. Indiquer sur un tableau, pour chaque état quantique, la valeur de l'énergie ainsi que la projection  $\mu_z$  du moment magnétique le long de l'axe de quantification.
2. A une température  $T$ , quelle est la population de chaque état ?
3. Calculer l'aimantation du système.
4. Montrer que lorsque l'énergie magnétique est faible devant l'énergie thermique, la susceptibilité a pour expression :  $\chi = \frac{8N\mu_B^2}{3k_B T}$

N.B. : On pourra utiliser les expressions et développements limités ci dessous :

- $a = \frac{2\mu_B H_a}{k_B T}$
- $ch(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$  ;  $sh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$
- Lorsque  $a \ll 1$ ,  $sh(a) \approx a$  et  $ch(a) \approx 1$ .

## 2. Renversement de l'aimantation par rotation cohérente - Modèle de Stoner-Wohlfarth (1948) (cf. annexe 1)

On considère un élément magnétique ayant la forme d'un film mince. On supposera que l'aimantation de cet élément est uniforme et orientée dans son plan. Cette aimantation est repérée dans ce plan  $xOy$  par un angle  $\theta$  compté par rapport à l'axe des  $x$  (voir figure). Cet élément est soumis à un champ magnétique  $\vec{H}$  appliqué dans le plan  $xOy$  et repéré par un angle  $\varphi$  (voir figure).



La seule source d'anisotropie magnétique à considérer est une anisotropie uniaxiale planaire d'axe facile parallèle à l'axe  $Ox$ . L'énergie associée à cette anisotropie s'écrit donc :

$$E_{anis.} = K_u \sin^2 \theta, \text{ avec } K_u > 0$$

- **Question 1 :** Ecrire l'énergie totale du système
- **Question 2 :** On suppose que le champ magnétique  $\vec{H}$  est appliqué le long de l'axe facile ( $\varphi=0$ ). Montrer que le cycle d'hystérésis est carré et que le champ coercitif vaut :

$$H_c = \frac{2K_u}{M}$$

A votre avis, pourquoi observe t'on, expérimentalement, un champ coercitif en général inférieur à cette quantité ?

- **Question 3 :** On suppose que le champ  $\vec{H}$  est appliqué le long de l'axe difficile ( $\varphi=\pi/2$ ). Montrer que la courbe d'aimantation est linéaire jusqu'à la saturation, que le champ de saturation vaut :

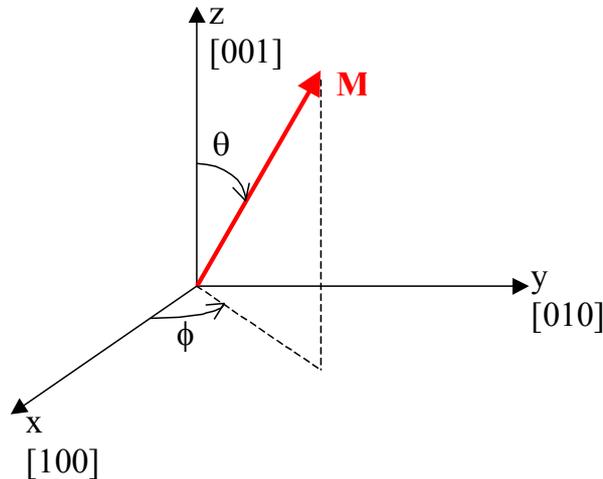
$$H_s = \frac{2K_u}{M},$$

et que le champ coercitif est nul.

**Remarque :** On rappelle que la courbe d'aimantation (ou cycle d'hystérésis) est mesurée le long de la direction d'application du champ magnétique.

### 3. Anisotropie magnétocristalline dans le fer et le cobalt

On considère un monocristal d'un matériau ferromagnétique à structure cristalline cubique. La direction de l'aimantation est repérée par rapport à ses cosinus directeurs selon le schéma suivant :



$$\alpha_1 = \sin \theta \cos \varphi$$

$$\alpha_2 = \sin \theta \sin \varphi$$

$$\alpha_3 = \cos \theta$$

On rappelle que l'énergie d'anisotropie magnétocristalline prend alors la forme suivante :

$$E_{MC} = K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2) + K_2(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2)$$

**Question 1 :** Le monocristal est du fer pur. On a alors  $K_1=4.8 \cdot 10^4 \text{ J/m}^3$  et  $K_2=1.2 \cdot 10^2 \text{ J/m}^3$ . Montrer que les directions faciles sont  $[100]$ ,  $[010]$  et  $[001]$ . Comment se comparent les directions du type  $\langle 110 \rangle$  et  $\langle 111 \rangle$  ?

**Question 2 :** Le monocristal est du nickel pur. On a alors  $K_1=-0.55 \cdot 10^4 \text{ J/m}^3$  et  $K_2=-0.24 \cdot 10^3 \text{ J/m}^3$ . Montrer que les directions faciles sont du type  $\langle 111 \rangle$ . Comment se comparent les directions du type  $\langle 110 \rangle$  et  $\langle 100 \rangle$  ?

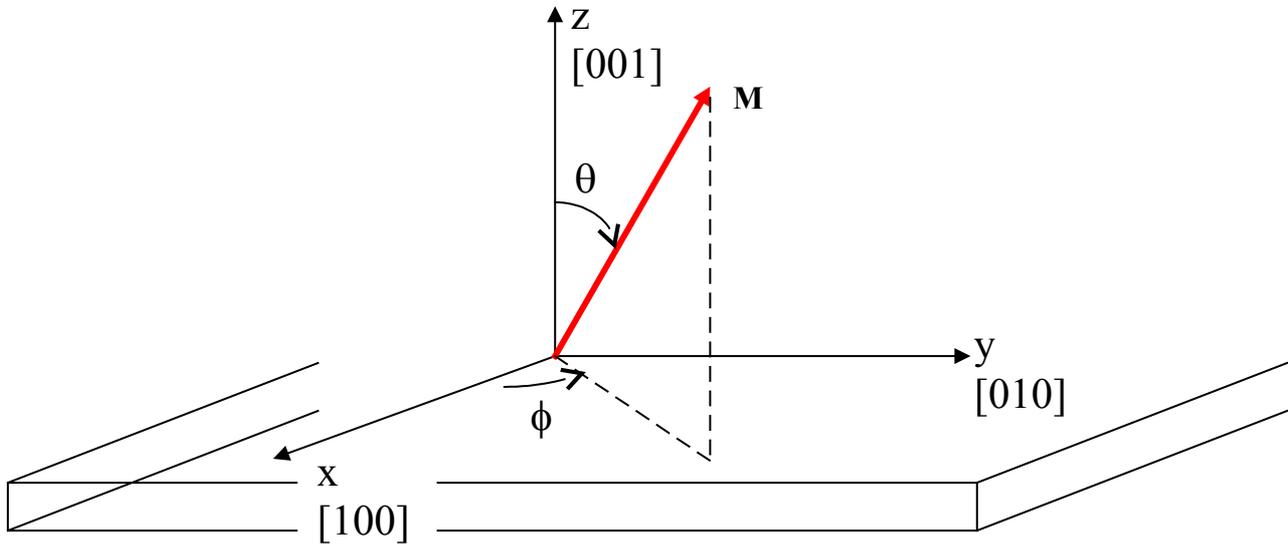
**Question 3 :** Le monocristal est du cobalt pur, de structure hexagonal compact. L'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline s'exprime alors :

$$E_{MC} = K_1 \sin^2 \theta + K_2 \sin^4 \theta + \dots$$

où  $\theta$  mesure l'angle que fait l'aimantation avec l'axe c. Dans quelles conditions cet axe c est-il un axe de facile aimantation ?

#### 4. Anisotropie de forme et magnétocristalline dans un film de fer

On considère un film mince monocristallin de fer orienté [001] et déposé sur un substrat non magnétique (voir figure).



1. En l'absence de champ extérieur, montrez que l'anisotropie de forme induit une direction de facile aimantation dans le plan du film. A partir de là, on considère que  $\theta = \pi/2$ .
2. Quelle est l'expression de l'anisotropie magnétocristalline dans le plan du film. Montrer que les axes de facile aimantation sont les axes [100] et [010].

## 5. Evaluation de l'anisotropie à partir de mesures de couple magnétique

On considère un film mince magnétique monocristallin, de structure cristalline cubique orienté (001), et dont l'aimantation est située dans le plan du film ( $\theta=\pi/2$ ). On s'intéresse à la mesure du couple magnétique défini par :

$$\Gamma = - \frac{dE_a}{d\phi}$$

où  $E_a$  est l'énergie d'anisotropie magnétocristalline dont on limitera le développement au premier ordre.

1. Montrer que dans la limite des forts champs (saturation), ce couple présente une dépendance sinusoïdale en fonction de la direction du champ appliqué  $\phi_H$ . Comment repère t'on, à partir de cette mesure les axes de facile aimantation et les axes difficiles ?
2. Montrer que, lorsque la direction du champ est proche d'un axe facile, l'inverse du couple varie linéairement avec l'inverse du champ.

## 6. Etude dynamique du déplacement de paroi.

On considère un ruban ferromagnétique, constitué de domaines magnétiques d'aimantation opposée deux à deux. En l'absence de champ magnétique, les domaines sont de tailles égales :  $d$ . Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, les domaines de même orientation que le champ magnétique sont favorisés et la paroi séparant les domaines va se déplacer d'une distance  $x$  (cf. Figure 2). L'aimantation à saturation de « domaine 1 + domaine 2 » est égale à  $M_s$ .

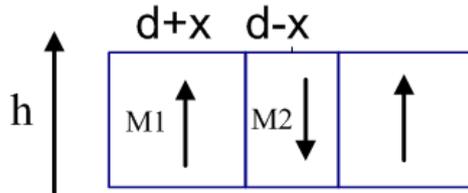


Figure 2

Question 1 : L'aimantation  $M_1$  est l'aimantation du volume 1 rapportée à la fraction de volume qu'il occupe (id. pour  $M_2$ ). Exprimer  $M_1$  et  $M_2$  en fonction de  $M_s$  et des rapports  $x/d$ .

Question 2 : Montrer que l'énergie de Zeeman des domaines magnétiques 1+2, en présence d'un champ magnétique  $h$ , s'exprime :  $U_z = -M_{eq} h$  avec  $M_{eq} = M_s(x/d)$

Question 3 : On considère l'énergie totale ( $U$ ) associée au domaine : énergie de Zeeman des domaines et énergie associée à la paroi  $U_p = kAx^2/2$  ou  $A$  est la surface de la paroi et  $k$  le coefficient de rigidité de la paroi ( $k > 0$ ). Montrer que  $x = M_s h / (kAd)$  est une position d'équilibre stable de la paroi.

Question 4 : Montrer que la susceptibilité statique, définie par le rapport entre l'aimantation du ruban et le champ  $h$ , s'exprime :  $\chi_0 = M_s^2 / (kAd^2)$

Question 5 : L'équation régissant le déplacement de la paroi est donnée par :

$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} + \gamma \frac{dx}{dt}$  ou la variation d'énergie par rapport à  $x$  ( $dU/dx$ ) agit comme une force de rappel, tandis que  $\gamma \times dx/dt$  correspond à un frottement visqueux. Donner la solution en régime harmonique de la position de la paroi, on supposera un champ alternatif  $\underline{h} = h e^{i\omega t}$ .

Question 6 : En déduire l'expression de la susceptibilité dynamique, lorsqu'on néglige la masse de la paroi :  $\chi_{AC} = M_{eq} / h = \frac{\chi_0}{(1 - i\tau\omega)}$  ou  $\tau = \frac{\gamma}{kA}$  est le temps de relaxation de la paroi.

## 7. Anisotropie magnétique dans un cristal hexagonal

On considère un monocristal d'un matériau ferromagnétique de structure cristalline hexagonal compact, caractérisé par son axe  $\mathbf{c}$  d'ordre 6 (axe sénnaire). On désigne par  $\theta$  l'angle entre l'aimantation  $\mathbf{M}$  (supposée uniforme) et l'axe  $\mathbf{c}$ . L'énergie d'anisotropie magnétocristalline d'un tel système peut s'écrire (au deuxième ordre) :

$$E_{MC} = K_1 \sin^2 \theta + K_2 \sin^4 \theta$$

**Question 1 :** Montrer que si  $K_2$  est négligeable devant  $K_1$ , la direction de facile aimantation est soit la direction de l'axe  $\mathbf{c}$  si  $K_1 > 0$ , soit une direction quelconque perpendiculaire à l'axe  $\mathbf{c}$  si  $K_1 < 0$ .

**Question 2 :** Dans le cas où  $K_2$  n'est pas négligeable devant  $K_1$ , montrer que dans certaines conditions à préciser, la direction de facile aimantation est une direction quelconque du cône de demi-angle au sommet  $\theta_M$  tel que :

$$\sin \theta_M = \sqrt{-\frac{K_1}{2K_2}}$$

## 8. Couplage d'échange indirect dans une tricouche Fe/Cr/Fe

On considère une tricouche constituée de deux couches ferromagnétiques (par exemple en Fer) séparées par une couche non ferromagnétique (par exemple en Chrome). Comme nous l'avons vu en cours, il existe dans certains systèmes de ce type un couplage d'échange indirect qui tend à aligner les aimantations des deux couches ferromagnétiques de manière antiparallèle. Comme représenté sur la figure, lorsqu'on applique un champ magnétique  $H$  dans un tel système dans le plan des couches, les aimantations tendent tout d'abord à s'orienter perpendiculairement au champ avec un angle  $\phi$  qui dépend de l'amplitude relative du couplage et du champ appliqué.

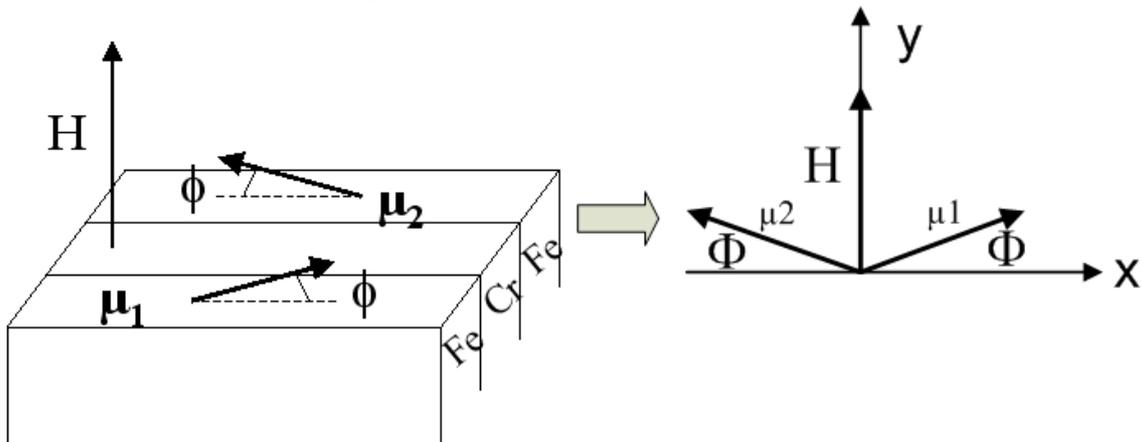


Figure 1

On écrira le terme d'énergie lié au couplage d'échange indirect sous la forme :  $E_{\text{coupl.}} = J \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2$  ( $J > 0$ ), où  $\boldsymbol{\mu}_1$  et  $\boldsymbol{\mu}_2$  sont les aimantations des deux couches magnétiques.

Question 1 : Ecrire l'énergie totale du système.

Question 2 : Montrer qu'elle se met sous la forme :  $E = (\mu_1 + \mu_2)H \sin \phi - J \mu_1 \mu_2 \cos 2\phi$ .

Question 3 : Montrer que les angles  $\cos \phi = 0$  et  $\sin \phi = \frac{(\mu_1 + \mu_2)H}{4J\mu_1\mu_2}$  correspondent à des

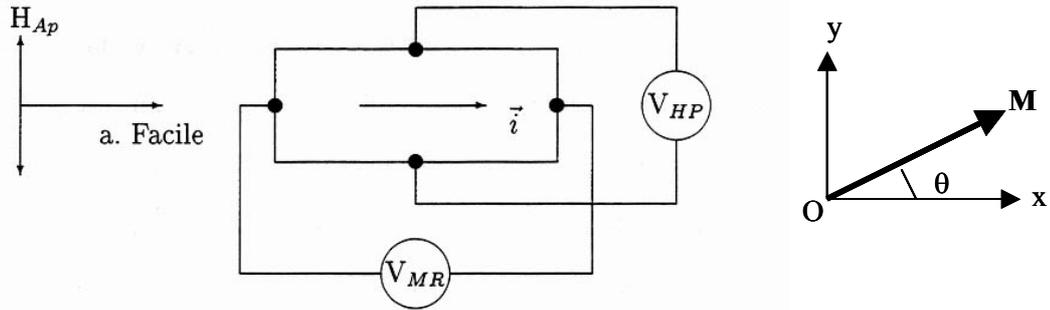
positions d'équilibre et préciser les conditions que doit respecter  $H$  pour que ces positions d'équilibre soient stables.

Question 4 : Représenter la courbe d'aimantation ( $M(H)$ ), montrer qu'elle est linéaire jusqu'à

la saturation des aimantations, pour un champ  $\pm H_s = \frac{4J\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$ .

## 9. Capteur magnétique utilisant la magnétorésistance anisotrope

On considère un élément ferromagnétique de forme rectangulaire parcouru par un courant  $i$  circulant dans le sens de la longueur. On suppose que son aimantation est dans le plan  $xOy$  et qu'il existe une anisotropie uniaxiale planaire dont l'axe de facile aimantation est parallèle à la longueur du rectangle. L'énergie associée à cette énergie d'anisotropie peut être écrite  $E_a = K_u \sin^2 \theta$ . Cet élément est soumis à un champ magnétique extérieur  $H_{AP}$  dirigé le long de l'axe  $y$ .



### Question 1 :

- Donner l'expression de l'énergie totale du système (/2).
- Démontrer que la courbe d'aimantation est linéaire jusqu'à la saturation et que l'on a

$$\text{la relation: } \sin \theta = \frac{H_{AP}}{H_s}, \text{ avec } H_s = \frac{2K_u}{M} \quad (/6).$$

On rappelle les expressions générales de la magnétorésistance anisotrope mesurée en géométrie longitudinale  $V_{MR}$  ou en géométrie transverse  $V_{HP}$ :

$$V_{MR} = R_0 I + \frac{\Delta R \cdot I}{2} \cos 2\theta \quad \& \quad V_{HP} = \frac{\Delta R \cdot I}{2} \sin 2\theta$$

### Question 2 :

- Développer ces expressions dans le cas particulier de la direction du champ appliqué considérée ici (càd  $\sin \theta = H_{AP} / H_s$ ) (/2).
- Donner l'allure des fonctions de transfert  $V_{MR} = f(H_{AP})$  et  $V_{HP} = f(H_{AP})$  (/2).

**Question 3 :** Dans le cas où le champ appliqué est de faible amplitude, calculer la pente de  $V_{MR}$  et  $V_{HP}$  en utilisant une variable réduite  $h = H_{AP} / H_s$  (i.e.  $dV/dh$ ). Que vaut cette pente pour  $h=0$  ? Conclure sur l'intérêt respectif des deux géométries de mesure dans ce cas là. (/4)

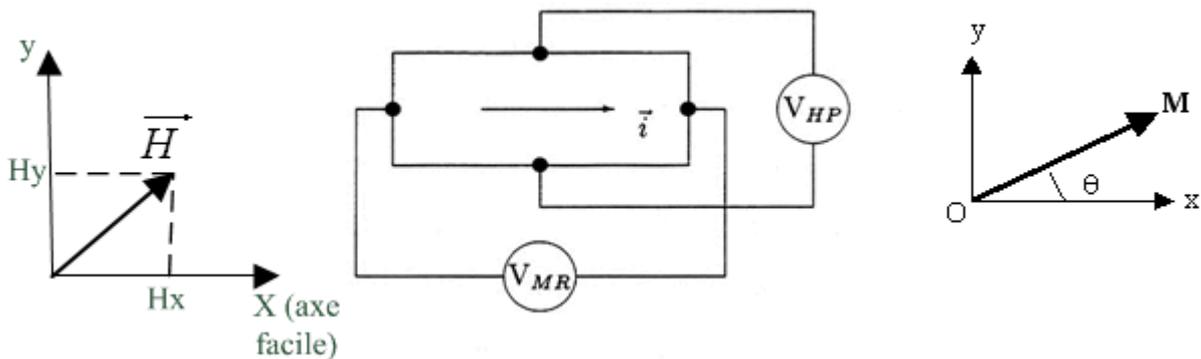
**Question 4 :** Pour mesurer un champ faible amplitude on peut chercher le point de fonctionnement optimal. Celui-ci se caractérise par la valeur de  $h$  pour lequel la pente de la caractéristique  $V_{MR}(h)$  est maximale. Montrer que pour la magnétorésistance en géométrie transverse, ce point de fonctionnement est  $h=0$  et  $h=1$  en géométrie longitudinale (/4).

### Question 5 :

En pratique, on rajoute un champ magnétique au niveau de la magnétorésistance qui aura pour effet de se placer sur le point de fonctionnement optimal de la caractéristique, proposer deux moyens de le réaliser (/2)

## 10. Capteur magnétique utilisant la magnétorésistance anisotrope : étude de l'effet de cross-axis ou sensibilité transverse

On considère un élément ferromagnétique de forme rectangulaire parcouru par un courant  $i$  circulant dans le sens de la longueur utilisé comme capteur de champ magnétique. On suppose que l'aimantation est dans le plan  $xOy$  et qu'il existe une anisotropie uniaxiale planaire dont l'axe de facile aimantation est parallèle à la longueur du rectangle. L'énergie associée à cette énergie d'anisotropie peut être écrite  $E_a = K_u \sin^2 \theta$ . Cet élément est soumis à un champ magnétique extérieur ( $H$ ) de composantes  $H_x$  selon l'axe facile et  $H_y$  selon l'axe difficile.



### Question 1 :

- c) Donner l'expression de l'énergie totale du système (/2).
- d) Montrer que, pour de faibles valeurs de  $\theta$  (on s'appuiera sur  $\cos \theta \approx 1$ ), les positions stables de l'aimantation sont telles que :  $\sin \theta = \frac{H_y}{H_k + H_x}$ , avec  $H_k = \frac{2K_u}{M}$ . (/6).  
(N.B. On fera l'hypothèse que les positions d'équilibre obtenues sont inconditionnellement stables).

On rappelle les expressions générales de la magnétorésistance anisotrope mesurée en géométrie longitudinale  $V_{MR}$  ou en géométrie transverse  $V_{HP}$  :

$$V_{MR} = R_0 I + \frac{\Delta R I}{2} \cos 2\theta \quad \& \quad V_{HP} = \frac{\Delta R I}{2} \sin 2\theta$$

### Question 2 :

- c) Donner les expressions de  $V_{MR}$  et  $V_{HP}$  en l'absence de champ perpendiculaire ( $H_x=0$ ).
- d) Donner les allures des fonctions  $V_{MR}=f(H_y)$  et  $V_{HP}=f(H_y)$  pour  $-H_k < H_y < +H_k$ .
- e) On s'intéresse désormais à la composante  $V_{HP}$ . On considère un champ perpendiculaire (ou cross field) tel que  $H_x = H_k/10$ . Superposer au graphe précédent l'allure de  $V_{HP}'=f(H_y)$  pour  $-H_k < H_y < +H_k$ . Quelle est l'erreur relative commise sur la mesure de la composante  $H_y$  ?

### Question 3 :

On s'intéresse à un dispositif permettant de réduire la sensibilité de la magnétorésistance au « cross-field ». Ce type de dispositif qualifié de « Set-Reset » permet de faire basculer l'aimantation dans deux positions symétriques (cf. Figure 2). Cela se traduit par deux valeurs opposées de  $H_k$  :  $+H_k$  et  $-H_k$ . Pour une même valeur de champ magnétique, la tension  $V_{HP}$  prend alors 2 valeurs.

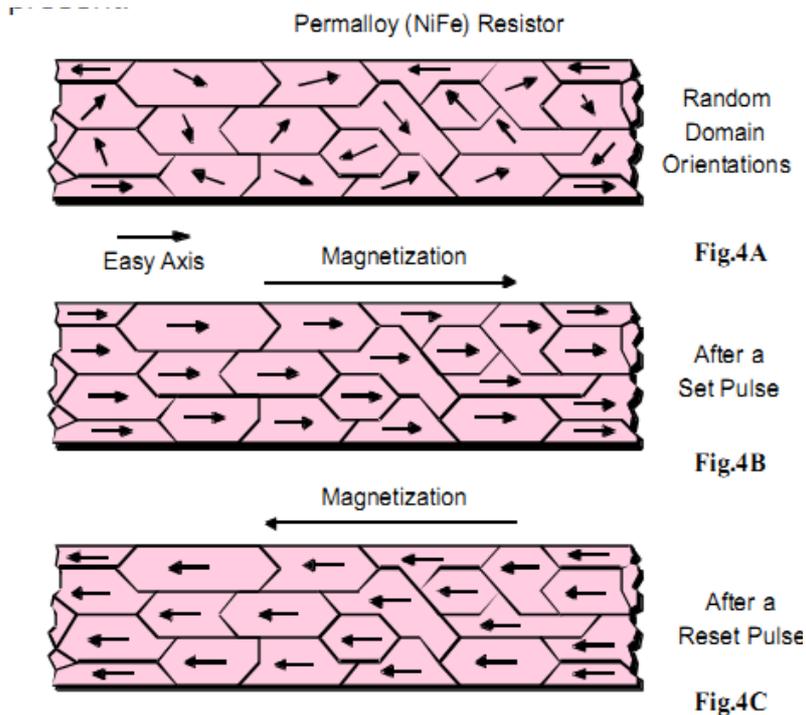


Figure 3 : effet du Set-Reset (Figure extraite de la documentation constructeur).

- a) Donner l'expression de la tension résultante  $V_{res} = V_{HP} (+H_k) - V_{HP} (-H_k)$
- b) Quelle est désormais l'erreur relative commise en présence d'un champ perpendiculaire tel que  $H_x = H_k/10$ .
- c) Comparer les valeurs obtenues aux questions 2.c) et 3.b) aux spécifications constructeurs du tableau ci-dessous (extrait de la documentation constructeur). On précise que FS, signifie Full Scale et que, FS est défini par  $2 * H_k$ . En outre, ce capteur est tel que  $H_k = 10 \text{Oe}$  (Rq. On rappelle que, dans le vide,  $1 \text{Gauss} = 1 \text{Oersted}$ ).

- APPLICATIONS**

  - Compassing
  - Navigation Systems
  - Attitude Reference
  - Traffic Detection
  - Medical Devices
  - Non-Contact Switch

## 1- and 2-Axis Magnetic Sensors

**HMC1001 / 1002**  
**HMC1021 / 1022**



**C**onfigured as a 4-element wheatstone bridge, these magnetoresistive sensors

### LINEAR MAGNETIC FIELD SENSORS

#### HMC1001/1002 SPECIFICATIONS

Characteristics	Conditions*	Min	Typ	Max	Unit
Cross-Axis Effect (4)	Cross field=1gauss (see AN-205)      no Set/Reset with Set/Reset		$\pm 3$ $+0.5$		%FS

Figure 3

## 11. Eléments de modélisation de l'effet de magnéto-impédance géante.

On s'intéresse aux éléments de modélisation de la magnéto-impédance géante utilisé pour la mesure de champ magnétique. Cet effet apparaît, de manière privilégiée, dans les matériaux magnétiques et conducteurs. Il résulte de l'interaction entre un champ magnétique à mesurer et le champ magnétique créé par le courant qui traverse le dispositif. Nous étudierons d'une part le champ d'anisotropie effectif qui permet de polariser le capteur et d'autre part la dynamique de l'aimantation.

### 1) Analyse de l'effet de forme d'un ruban (/2)

On considère un film mince (de longueur  $a$  selon  $x$ , de largeur  $b$  selon  $y$  et d'épaisseur  $c$  selon  $z$ , représenté figure 1) tel que  $c \ll b \ll a$ .

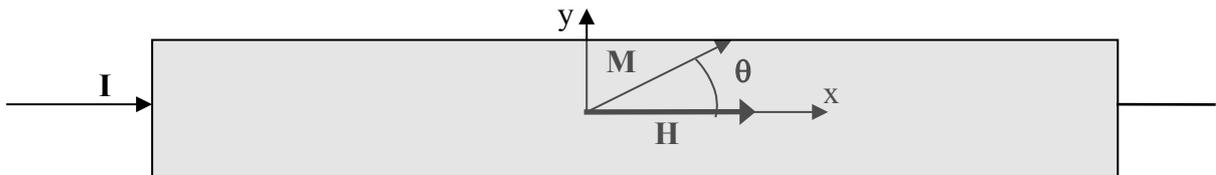
- En vous appuyant sur l'analogie avec l'électrostatique et des charges magnétiques de surface, justifier que  $N_x \ll N_y \ll N_z$ .
- Rappeler la relation qui relie  $N_x, N_y$  et  $N_z$ . Vers quelle valeur tend  $N_z$  ?

### 2) Anisotropie magnétocristalline et de forme dans un ruban (/6)

On considère un ruban constitué d'un matériau ferromagnétique. L'aimantation est supposée tourner dans le plan du film et forme un angle  $\theta$  avec l'axe Ox (figure 1, ci-dessous).

On considère la source d'anisotropie magnétique uniaxiale planaire, l'énergie associée à cette anisotropie s'écrit :  $E_{anis.} = K_u \sin^2 \theta$ , avec  $K_u > 0$ . Un champ magnétique ( $H$ ) est appliqué le long de l'axe (Ox).

On rappelle que le champ démagnétisant est lié à l'aimantation par :  $\vec{H}_d = -\vec{N}\vec{M}$  ou  $\vec{N} = \begin{bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & N_y \end{bmatrix}$  est le tenseur des coefficients démagnétisants. On admettra que la rotation de l'aimantation se produit dans le plan Oxy.



- Etablir l'expression de l'énergie totale du système.
- Montrer que les angles qui annulent la dérivée de l'énergie sont  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$  et 
$$\theta = \text{Arc cos} \frac{-MH}{2[(N_y M^2 + K_u) - N_x M^2]}$$
- Discuter de la stabilité de ces solutions en fonction de la géométrie du film mince (comparer  $N_x$  avec  $N_y$ ).

### 3) Champ effectif (/6)

On définit, par la suite, le champ effectif comme la dérivée fonctionnelle de l'énergie, soit:

$$\vec{H}_{eff} = -\frac{1}{M} \left[ \frac{\delta E}{\delta m_x}; \frac{\delta E}{\delta m_y} \right], \text{ ou } m_x \text{ et } m_y \text{ représentent les composantes unitaires de}$$

l'aimantation telles que:  $\vec{M} = M[m_x; m_y]$ .

a) Reformuler l'équation du bilan d'énergie (obtenue au 2.a)) en remplaçant  $m_x$  et  $m_y$  respectivement par  $\cos\theta$  et  $\sin\theta$ .

b) Montrer que le champ effectif peut se mettre sous la forme :

$$\vec{H}_{eff} = \begin{bmatrix} H - N_x M m_x \\ -(2Ku/M + N_y M) m_y \end{bmatrix}$$

c) Vérifier que pour les positions d'équilibre déterminées au 1.b),  $\vec{H}_{eff}$  vérifie:

$$\vec{M} \times \vec{H}_{eff} = \vec{0}.$$

d) Interpréter.

#### 4) Equation de la précession de l'aimantation et variation de la susceptibilité (/6).

On considère maintenant l'équation de la précession qui lie l'aimantation au champ

magnétique :  $\frac{d\vec{M}'}{dt} = -\gamma \vec{M}' \wedge \vec{H}$  ( $\gamma$  est le facteur gyromagnétique).

Le champ  $\vec{H}$  qui agit sur l'aimantation est le champ effectif précédemment calculé. On ne

s'intéresse, par la suite, qu'aux **petites** variations de l'aimantation ( $\vec{m} = [m_x; m_y; m_z]$ ) autour

de sa position d'équilibre ( $\vec{M} = [M; 0; 0]$ ) provoquée par de **petites** variations du champ

excitateur ( $\vec{h} = [h_x; h_y; h_z]$ ) autour du champ effectif ( $\vec{H}_{eff} = [H_{eff_x}; H_{eff_y}; 0]$ )

On décompose les vecteurs aimantation et champ d'excitation de la façon suivante :

$$\vec{M}' = \vec{M} + \vec{m} \text{ et } \vec{H} = \vec{H}_{eff} + \vec{h}.$$

En outre, puisque le couple  $M, H_{eff}$ , correspond à une position d'équilibre, on utilisera le fait

que:  $\vec{M} \times \vec{H}_{eff} = \vec{0}$  et  $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{0}$ .

a) Compte-tenu des hypothèses formulées, montrer que l'équation de la précession

s'écrit :  $\frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma(\vec{m} \times \vec{H}_{eff} + \vec{M} \times \vec{h})$ .

b) En régime harmonique, l'équation précédente s'écrit :  $j\omega \vec{m} = -\gamma(\vec{m} \times \vec{H}_{eff} + \vec{M} \times \vec{h})$ .

Montrer qu'on peut la mettre sous la forme matricielle suivante:  $[A][m] = [B][h]$ .

$$\text{Avec : } [A] = \begin{pmatrix} j\omega & 0 & -\gamma H_{eff_y} \\ 0 & j\omega & \gamma H_{eff_x} \\ \gamma H_{eff_y} & -\gamma H_{eff_x} & j\omega \end{pmatrix} \text{ et } [B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma M \\ 0 & -\gamma M & 0 \end{pmatrix}.$$

c) En déduire l'expression du tenseur de susceptibilité en fonction de  $[A]$  et  $[B]$ .

d) Montrer comment la variation du champ appliqué  $\vec{H}$  modifiera l'inductance du ruban.

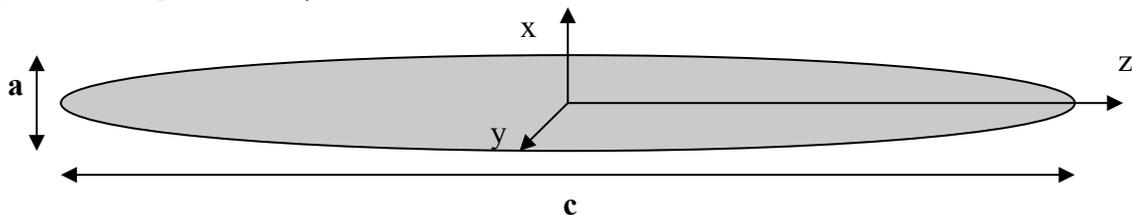
## 12. Anisotropie de forme dans un ellipsoïde allongé pour des applications de magnétométrie.

### 1) Calcul des coefficients démagnétisants dans les 3 directions

L'expression du coefficient démagnétisant selon l'axe z est :

$$N_z = \frac{1}{m^2} [\ln(m) - 0.37] \text{ avec } m=c/a, \text{ on utilisera } \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(m)}{m^2} \right) = 0$$

- a) Compte tenu de la géométrie de l'objet ferromagnétique (dimensions selon les axes x et y identiques), quelle est la valeur limite de  $N_z$  lorsque l'ellipsoïde est très allongée (i.e.  $m \gg 1$ ) ?
- b) Justifier que  $N_x = N_y$  et en déduire leur valeur.



### 2) Calcul de l'amplification magnétique dans la direction z

- a) On définit l'amplification magnétique ( $\mu_{app}$ ) comme le rapport entre le champ magnétique extérieur ( $B_{ext}$ ) et le champ magnétique dans le noyau ( $B_n$ ). On rappelle les relations principales entre les grandeurs magnétiques:

$$\text{Dans le noyau : } B_n = \mu_0 \mu_r H_n,$$

$$\text{A l'extérieur : } B_{ext} = \mu_0 H_{ext}$$

Le champ dans le noyau est la somme du champ extérieur et du champ démagnétisant :  $H_n = H_{ext} + H_d$  avec  $H_d = -N_z M$  et  $M = (\mu_r - 1) H_n$ .

$$\text{Montrer que l'amplification magnétique s'exprime : } \mu_{app} = \frac{B_n}{B_{ext}} = \frac{\mu_r}{1 + (\mu_r - 1) N_z}$$

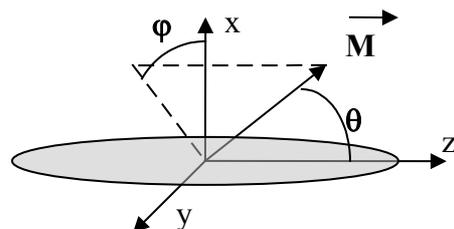
- b) Déterminer les amplifications magnétiques produites dans chacune des directions par un ellipsoïde de rapport  $m=25$ , lorsque la perméabilité relative est telle que :  $\mu_r \gg 1$  et  $\mu_r N_z \gg 1$ . Quel avantage peut on tirer de cette caractéristique pour la mesure de champ magnétique ?

### 3) Anisotropie de forme d'un ellipsoïde allongé.

On note  $\theta$  l'angle entre  $\vec{M}$  et l'axe z.

On note  $\varphi$  l'angle entre la projection de  $\vec{M}$  dans le plan (x0y) et l'axe x.

- a) Exprimer l'énergie magnétique du système en ne considérant que l'énergie liée au champ démagnétisant.
- b) Montrer que la direction de facile aimantation est l'axe z (i.e.  $\theta = 0$ ), on posera :  $N_x = N_y = N$  et  $N_z = 1 - 2N$ .



### 13. Champ démagnétisant dans l'entrefer d'un circuit magnétique

On s'intéresse au circuit magnétique d'une inductance. Une inductance est un composant passif utilisé en électronique pour stocker, de manière transitoire, de l'énergie magnétique. Son application principale concerne le filtrage des signaux. Le circuit magnétique utilisé est de forme torique, de perméabilité relative  $\mu_r (=10^4)$ , de hauteur  $H$ , de rayon extérieur  $R_{ext}$  ( $=25\text{mm}$ ) et intérieur  $R_{int}$  ( $=15\text{mm}$ ) et possédant un entrefer d'épaisseur  $e$ . Un bobinage de  $N_s$  spires ( $N_s=100$ ) traversées par un courant  $I$  ( $=0.1\text{A}$ ) est réalisé autour du circuit magnétique (cf. Figure 2). On note  $B_n$  le champ dans le noyau et  $B_e$  celui dans l'entrefer.

hypothèses:

- $B$  est constant sur la hauteur du noyau
- $\forall r \in [R_{int}; R_{ext}]$  on a  $r \gg e$
- on néglige l'épanouissement des lignes de champ au voisinage de l'entrefer, ainsi la section du tube de flux est conservée au passage dans l'entrefer et  $B_n = B_e$ .
- Les lignes de champ sont des cercles (cf. Figure 2)

a) Etablir l'expression du champ d'induction dans le bobinage seul:  $B_{air}(r)$ .

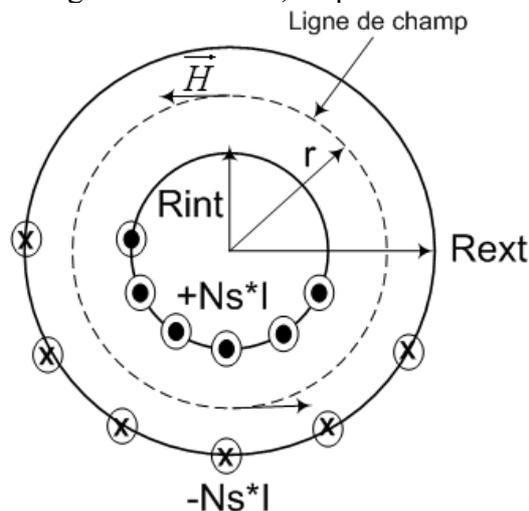
b) Etablir l'expression du champ d'induction en présence d'un noyau magnétique ( $B_n(r)$ ).

Montrer que la relation peut se mettre sous la forme :  $B_n(r) = \frac{\mu_r B_{air}(r)}{1 + \mu_r N}$ . Comment

interpréter  $N$  ?

c) Lorsque l'entrefer est petit (i.e.  $e \rightarrow 0$ ), quelle est la valeur limite de  $N$  ? Comparer au champ démagnétisant (cf. Exercice 1)) d'un ruban dans les 3 directions.

d) Application numérique. Calculer le champ d'induction (on se placera en  $\langle R \rangle = (R_{ext} + R_{int})/2$ ) avec et sans noyau magnétique pour des entrefers de 1mm, 0,1mm et 0mm. Quelle est la limite à l'augmentation de  $B$ , en présence d'un noyau magnétique ?



#### 14. Utilisation d'un circuit magnétique pour la réalisation d'une inductance de filtrage.

Une perle de ferrite est réalisée avec un matériau qui présente à la fréquence de 100MHz une perméabilité magnétique de module  $\mu_r=800$  (avec  $\mu_r=\mu_r'+j\mu_r''$ ). Elle est placée sur un fil reliant une source d'alimentation à découpage, de résistance interne  $0.5\Omega$  connectée à une charge (une carte électronique de commande) de résistance équivalente\*  $10\Omega$ .

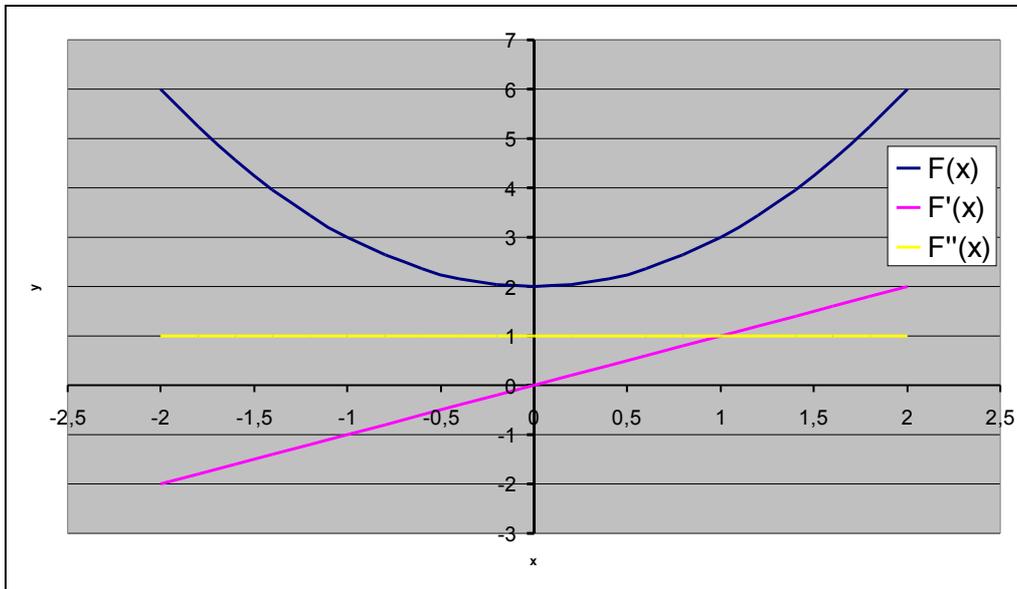
La perle est de longueur  $l=4\text{mm}$ , de diamètre intérieur  $a=1,2\text{mm}$ , de diamètre extérieur  $b=3,5\text{mm}$ , et dont le rapport  $\mu_r'/\mu_r''=10$  (connu sous le nom d'angle de perte du matériau et désigné par  $\tan\delta$ ).

- a) Représenter le schéma équivalent avec la perle de ferrite.
- b) Déterminer  $\mu_r'$  et  $\mu_r''$ .
- c) Calculer l'inductance de la perle de ferrite.
- d) Si on remplace  $\mu_r$  par  $\mu_r'+j\mu_r''$ , donner l'expression de la partie réelle de l'impédance de l'inductance et préciser ce que représente cette partie réelle. Quelle est sa valeur à basse fréquence puis à la fréquence de 100MHz ?
- e) En déduire l'affaiblissement en courant obtenu à 800MHz.

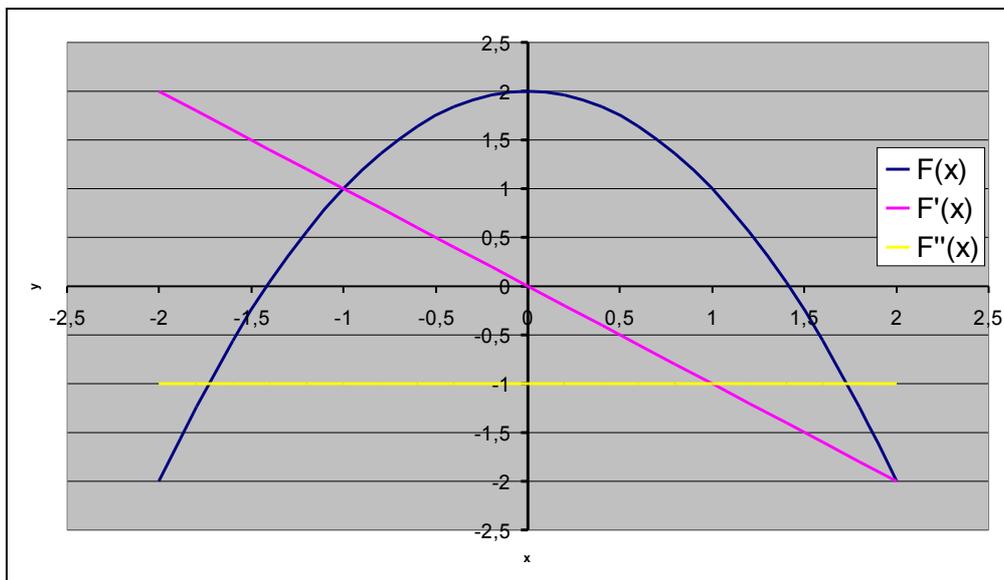
\*Résistance équivalente : c'est la résistance qui consomme la même énergie que la charge (ici une carte électronique).

## Annexe 1 : Position d'équilibre d'un système

Pour trouver une **position d'équilibre** il faut que la **dérivée première de l'énergie soit nulle**. Pour que cette position corresponde à un **minimum** il faut que la **dérivée seconde soit positive**. Dans ce cas la position d'équilibre correspond à un minimum. Sinon la position d'équilibre correspond à un maximum et l'équilibre est instable.



*La dérivée première s'annule en  $x=0$  et la dérivée seconde est positive : l'équilibre est donc stable. Si on y plaçait une bille, il faudrait lui apporter de l'énergie pour la faire sortir de la cuvette.*



*La dérivée première s'annule en  $x=0$  et la dérivée seconde est négative : l'équilibre est donc instable. Si on y plaçait une bille, le moindre apport d'énergie l'écarterait de sa position d'équilibre.*

## Annexe 2 : coefficient de champ démagnétisant

L'expression qui relie le champ démagnétisant à l'aimantation :  $\vec{H}_d = -N\vec{M}$  ou N est un tenseur:

$$N = \begin{bmatrix} N_x & 0 & 0 \\ 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_z \end{bmatrix} \text{ avec } N_x + N_y + N_z = 1.$$

### Quelques cas particuliers :

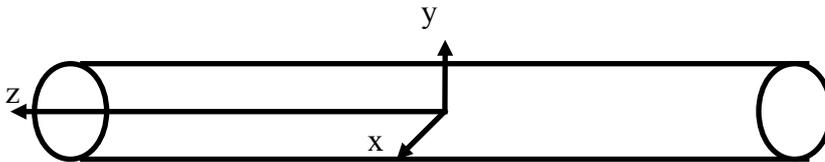
#### 1) Sphère

Que valent les coefficients de champ démagnétisant dans chacune des 3 directions d'une sphère ?

Solution : en raison des symétries, les coefficients démagnétisants sont égaux dans les 3 directions, donc  $N_x = N_y = N_z = N$  et, par ailleurs,  $N_x + N_y + N_z = 1$ , donc  $N_x = N_y = N_z = 1/3$

#### 2) cylindre infini

Quelles sont les valeurs limites des coefficients de champ démagnétisant dans chacune des 3 directions d'un cylindre lorsque sa longueur tend vers l'infini ?



Solution : en raison des symétries, les coefficients démagnétisants sont égaux dans les directions x et y, donc  $N_x = N_y = N$ , par ailleurs comme le cylindre est très « long » le coefficient de champ démagnétisant selon z tend vers 0 puisque les « pôles magnétiques » sont éloignés. Et, puisque  $N_x + N_y + N_z = 1$ , il en découle que  $N_x = N_y = 1/2$  et  $N_z = 0$

#### 3) Illustration de l'utilisation de la notion de coefficient de champ démagnétisant :

Pour des applications de magnétométrie, on utilise un noyau qui sert « d'amplificateur », le facteur d'amplification est relié à la perméabilité relative du matériau et à son coefficient démagnétisant par :

$$\mu_{app} = \frac{\mu_r}{1 + (\mu_r - 1)N} \approx \frac{1}{N} \text{ (avec } \mu_r N \gg 1).$$

N dépend uniquement de la géométrie. Des formes appropriées peuvent permettre de le minimiser et donc d'augmenter « l'amplification » magnétique.

