Modélisation : Algèbre linéaire

Mathématique appliquée à la Gestion

RAKOTOARISOA Anjara Lalaina Jocelyn

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 2 \\ x + 4y + 3y = 2 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

$(x\ ;y\ ;z)$: vecteur des inconnues

1- Ecrire le système sous forme matricielle.
2- Déterminer la matrice M relative au système d'équations.
3- Calculer le déterminant de M et déterminer M^{-1} si M est inversible.
4- Résoudre le système d'équations :
   a. En utilisant M^{-1}
   b. Par la méthode de Cramer

Correction

1- Ecriture du système d'équations sous forme matricielle :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 2 \\ x + 4y + 3y = 2 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{1}x + \mathbf{3}y + \mathbf{3}z = \mathbf{2} \\ \mathbf{1}x + \mathbf{4}y + \mathbf{3}y = \mathbf{2} \\ \mathbf{1}x + \mathbf{3}y + \mathbf{4}z = \mathbf{2} \end{cases}$$

Ce qui nous donne l'écriture matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{Les coefficients des équations}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vecteur des inconnues}}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vecteur des constantes}}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

2- Matrice M relative au système d'équations :

C'est la matrice correspondante aux coefficients des équations

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

3- Calcul du déterminant de la matrice M – Inversibilité et inverse de M :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1^+ & 3^- & 3^+ \\ 1^- & 4^+ & 3^- \\ 1^+ & 3^- & 4^+ \end{vmatrix}$$

-En choisissant la première ligne comme pivot, on a :

$$\det(M) = 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(M) = 1[(4 \times 4) - (3 \times 3)] - 3[(1 \times 4) - (3 \times 1)] + 3[(1 \times 3) - (1 \times 4)] = 1$$

Det(M)=1

Det(M) est différent de 0, alors, M est inversible.

-Détermination de l'inverse M^{-1}

On présente M sous forme de « Gauss »

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pour obtenir l'inverse, on cherche à transformer le côté gauche en une matrice unitaire en faisant des opérations sur les lignes. L'objectif est donc d'avoir une forme comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 1 & g & h & i \end{array}\right)$$

Où l'inverse de M sera la matrice

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Reprenons notre forme de « Gauss » et faisons les opérations sur les lignes

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

L2 :L2-L1 et L3=L3-L1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

L1=L1-3L2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

L1=L1-3L3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi

$$\boldsymbol{M^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

4- Résolution du système d'inéquations :

a. En utilisant M^{-1}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution est donc S=(x ;y ; z)=(2 ;0 ;0)

b. Par la méthode de Cramer

On sait que det(M)=1

$$M_x = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_x) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{\det(M_x)}{\det(M)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$y = \frac{\det(M_y)}{\det(M)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_z) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$z = \frac{\det(M_z)}{\det(M)} = \frac{0}{1} = 0$$

S=(x ;y ;z)=(2 ;0 ;0)