

# Rhéologie des fluides complexes

Élisabeth Guazzelli

Octobre 2001

Ce cours présente les notions de base de la rhéologie des fluides non-newtoniens. J'ai voulu donner une présentation des phénomènes nouveaux rencontrés ainsi que leur description quantitative. Je me suis néanmoins limitée à des situations simples en choisissant en particulier le cisaillement simple comme écoulement de base pour décrire les lois constitutives des matériaux, ce qui offre un cadre mathématique simplifié et facilite l'interprétation physique. J'ai donné également quelques principes de rhéométrie et quelques calculs d'écoulements simples. Par contre, je n'ai pas voulu fournir une analyse structurale microscopique qui permettrait de déduire les lois rhéologique de certains de ces liquides, car cela me semblait bien au-delà des perspectives de ce cours qui n'est qu'introductif. Enfin, bien qu'une présentation des contraintes et déformations soit faite en début, ce cours nécessite quelques connaissances préalables en mécanique des fluides et/ou en mécanique des milieux continus. Quelques bons livres de base et la référence d'un film sur la rhéologie sont donnés à la fin du cours. Remarques, corrections et suggestions sont les bienvenues à [elisabeth.guazzelli@polytech.univ-mrs.fr](mailto:elisabeth.guazzelli@polytech.univ-mrs.fr).

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Phénoménologie</b>	<b>3</b>
2.1	Comportements non linéaires . . . . .	3
2.2	Comportement dépendant du temps . . . . .	3
2.3	Résistance à l'étirement . . . . .	3
2.4	Effets élastiques . . . . .	5
2.5	Contraintes normales . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Contrainte et déformation</b>	<b>9</b>
3.1	Contrainte . . . . .	9
3.2	Déformation . . . . .	10
3.3	Décomposition du champ de gradient de vitesse au voisinage d'un point . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Lois constitutives</b>	<b>11</b>
4.1	Fluides newtoniens et non-newtoniens . . . . .	11
4.2	Viscoélasticité linéaire . . . . .	13
4.2.1	Fonctions fluage et relaxation . . . . .	13
4.2.2	Solide élastique parfait . . . . .	14
4.2.3	Liquide visqueux newtonien . . . . .	14
4.2.4	Solide de Kelvin-Voigt . . . . .	15
4.2.5	Liquide de Maxwell . . . . .	17
4.2.6	Comportement viscoélastique linéaire général . . . . .	18
4.3	Liquides nonlinéaires . . . . .	19
4.3.1	Liquides plastiques . . . . .	19
4.3.2	Fluide rhéofluidifiant . . . . .	21

4.3.3	Fluide rhéoépaississant . . . . .	23
4.4	Comportement dépendant du temps . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Rhéométrie</b>	<b>24</b>
5.1	Rhéomètres simples . . . . .	24
5.1.1	Rhéomètre plan . . . . .	24
5.1.2	Rhéomètre de Couette . . . . .	25
5.1.3	Rhéomètre cône-plan . . . . .	26
5.1.4	Autres types de rhéomètres . . . . .	27
5.2	Cisaillement oscillant . . . . .	27
5.3	Contraintes normales . . . . .	29
5.4	Viscosité élongationnelle . . . . .	29
<b>A</b>	<b>Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques</b>	<b>30</b>
<b>B</b>	<b>Dimensions et unités</b>	<b>31</b>
<b>C</b>	<b>Exercices et problèmes</b>	<b>32</b>
C.1	Course entre un fluide newtonien et un fluide non-newtonien . . . . .	32
C.2	Loi rhéologique à trouver . . . . .	32
C.3	Écoulement dans un tube cylindrique d'un fluide en loi de puissance . . . . .	32
C.4	Écoulement de boues de forage . . . . .	33
C.5	Effet Weissenberg . . . . .	35

# 1 Introduction

La rhéologie, mot inventé par Bingham en 1929 à partir du verbe grec  $\rho\acute{\epsilon}\omega$  qui veut dire couler (voir l'historique sur la figure 1), est l'étude des écoulements et des déformations. Devant l'impuissance de la théorie de l'élasticité et de la mécanique des fluides (théories élaborées au 19<sup>e</sup> siècle) à décrire et à expliquer les propriétés de matériaux aux comportements mal définis et intermédiaires entre celui du solide élastique parfait (où les contraintes sont proportionnelles aux déformations) et celui du fluide newtonien (où les contraintes sont proportionnelles aux vitesses de déformation), il est apparu nécessaire d'élaborer cette nouvelle discipline. Les études expérimentales s'attachent à mesurer les propriétés de l'écoulement des matériaux tandis que les approches théoriques cherchent les équations constitutives reliant contraintes et déformations.

## 2 Phénoménologie

### 2.1 Comportements non linéaires

Un des comportements pratiques les plus intéressants des fluides non-newtoniens est leur relation non linéaire entre contrainte et vitesse de déformation. La structure interne du fluide est complexe et peut être influencée par l'écoulement.

Certains fluides ne s'écoulent qu'à partir d'une certaine *contrainte seuil* (liquide plastique de *Bingham*, comme sur la figure 2). Cette propriété est particulièrement utile pour le transport de particules en empêchant la sédimentation (boues de forage) et se rencontre dans la vie pratique dans les pâtes dentifrices, le ketchup, la graisse et les peintures non-coulantes.

La plupart des fluides sont *rhéofluidifiants* : suspensions diluées de particules solides, suspensions de vésicules déformables (comme le sang), encres, peintures, solutions diluées de polymères, polymères liquides (acétate de cellulose), pâte à papier (voir la figure 2). Leur viscosité effective diminue lorsqu'on augmente la contrainte. Cet effet est dû en général à une brisure de la structure interne par l'écoulement. Quelques fluides sont *rhéoépaississants* comme les suspensions concentrées ou encore le sable mouillé (voir encore la figure 2).

### 2.2 Comportement dépendant du temps

Les fluides *thixotropes* ont une viscosité effective qui diminue avec le temps quand une contrainte constante est appliquée (par exemple, le ketchup, le yoghourt, certaines peintures). Cela s'explique par des changements de structures intervenant dans le fluide avec des temps caractéristiques comparables aux temps d'observation. Comme la réponse du fluide dépend de son histoire, cela complique les mesures rhéologiques car il existe des effets d'hystérésis (effets de mémoire). Il existe aussi, mais plus rarement, des fluides *antithixotropes* (voir un exemple sur la figure 3).

### 2.3 Résistance à l'étirement

La résistance bien plus forte à un étirement du fluide que celle à laquelle on s'attendrait venant d'une viscosité de cisaillement est attribuée à une *viscosité élongationnelle* très grande bien qu'elle soit peut-être due, en fait, à un *effet élastique*. Cet effet rend les bulles d'air pointues à l'arrière lorsqu'elles montent dans un shampoing : la pointe convertit l'écoulement élongationnel en écoulement de cisaillement (voir la figure 4). Ce phénomène réduit la pulvérisation de fines gouttes hors des jets avec les applications qui en découlent : maintenir les jets plus concentrés dans les lances à incendie et réduire la tendance à faire une brume explosive pour le fuel des avions (voir la figure 5). Cela aussi explique la réduction de la traînée dans les écoulements turbulents résultant de l'addition d'une très faible quantité d'un polymère de très grande masse moléculaire au fluide en écoulement.

# The Deborah Number

By M. Reiner

The following lines are from an after-dinner talk presented at the Fourth International Congress on Rheology, which took place last August in Providence, R. I. Marcus Reiner, research professor at the Israel Institute of Technology, is currently in the United States as a visiting professor at the Polytechnic Institute of Brooklyn.

In 1928 I came from Palestine to Easton, Pa., to assist Eugene Cook Bingham at the birth of Rheology. I felt strangely at home. There was Bethlehem quite near, there was a river Jordan and a village called little Egypt. The situation was, however, also slightly confusing. To go from Bethlehem to Egypt, one had to cross the river Jordan, a topological feature which did not conform to the original. Then there were, here, places such as Allentown to which there was no analogy. And this could lead to strange situations, such as when a girl at school was asked where Christ was born and replied, "In Allentown". When corrected by "No, in Bethlehem," she remarked, "I knew it was somewhere around here."

In Palestine I was working as a civil engineer doing science as a hobby. In 1926 a chemist had asked my help in the problem of the flow of a plastic material through a tube. I solved the problem and derived what is now known as the Buckingham-Reiner equation, Buckingham at the US National Bureau of Standards having derived the equation before. When Bingham learned of my work, he invited me to Lafayette College.

When I arrived, Bingham said to me, "Here you, a civil engineer, and I, a chemist, are working together at joint problems. With the development of colloid chemistry, such a situation will be more and more common. We therefore must establish a branch of

physics where such problems will be dealt with."

I said, "This branch of physics already exists; it is called mechanics of continuous media, or mechanics of continua."

"No, this will not do," Bingham replied. "Such a designation will frighten away the chemists."

So he consulted the professor of classical languages and arrived at the designation of rheology, taking as the motto of the subject Heraclitus'  $\pi\alpha\nu\tau\alpha \rho\epsilon\iota$  or "everything flows."

Rheology has become a well-known branch of physics, but most typists think it is a misprint for theology. I constantly receive mail addressed to the Theological Laboratory of the Israel Institute of Technology and, on the occasion of the Second International Congress at Oxford ten years ago, there was a special coach in the train at Paddington Station reserved for the members of the Theological Congress. This seems ridiculous, but there is some relation between rheology and theology, and on this I want to say a few words.

Heraclitus' "everything flows" was not entirely satisfactory. Were we to disregard the solid and deal with fluids only? There *are* solids in rheology, even if they may show relaxation of stress and consequently creep.\*

The way out of this difficulty had been shown by the Prophetess Deborah even before Heraclitus. In her famous song after the victory over the Philistines, she sang, "The mountains flowed before the Lord." When, over 300 years ago, the Bible was translated into English, the translators, who had never heard of Heraclitus, translated the passage as "The mountains *melted* before the Lord"—and so it stands in the authorized version. But Deborah knew two things. First, that the mountains flow, as everything flows. But, secondly, that they flowed before the Lord, and not before man, for the simple reason that man in his short lifetime cannot see them flowing, while

\*and at this Congress a large number of papers deal with solids.

the time of observation of God is *infinite*. We may therefore well define as a nondimensional number the Deborah number

$$D = \text{time of relaxation/time of observation.}$$

The difference between solids and fluids is then defined by the magnitude of  $D$ . If your time of observation is very large, or, conversely, if the time of relaxation of the material under observation is very small, you see the material flowing. On the other hand, if the time of relaxation of the material is larger than your time of observation, the material, for all practical purposes, is a solid. In problems of industrial design, you may introduce the *time of service* for the time of observation. When designing a concrete bridge you make up your mind to decide how long you expect it to serve, and then compare this time-interval with the time of relaxation of concrete.

It therefore appears that the Deborah number is destined to become the fundamental number of rheology, bringing solids and fluids under a common concept, and leaving Heraclitus'  $\pi\alpha\nu\tau\alpha \rho\epsilon\iota$  as a special case for infinite time of observation, or infinitely small time of relaxation. The greater the Deborah number, the more solid the material; the smaller the Deborah number, the more fluid it is.

There is a story they tell about two students of theology. They were praising the Almighty God. Said one: "For God, one thousand years are like a minute. And as He is the Creator of all, a thousand dollars are for Him like a cent." Said the other: "Wonderful; next time I pray to God, I shall pray, 'God, give me a cent!'" Said the first: "What will it help you? He will say 'Wait a minute!'"

This man did not take care of the difference between God's and his own time scale. And this is the connection between rheology and theology. In every problem of rheology make sure that you use the right Deborah number.

FIG. 1 — *Rhéologie et nombre de Deborah*, article de M. Reiner, *Physics Today*, janvier 1964, page 62.

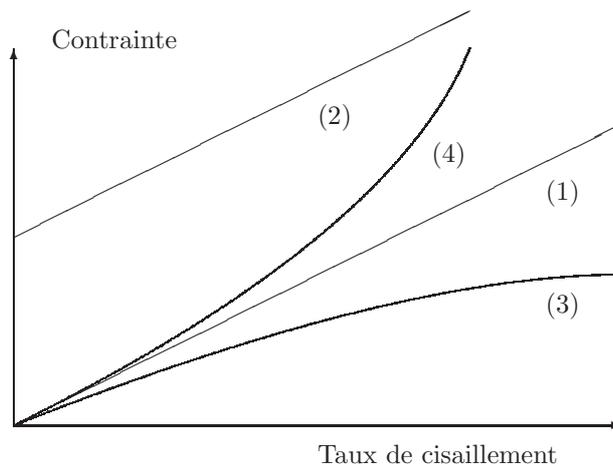


FIG. 2 – Fluide (1) newtonien, (2) de Bingham, (3) rhéofluidifiant, (4) rhéoépaississant.

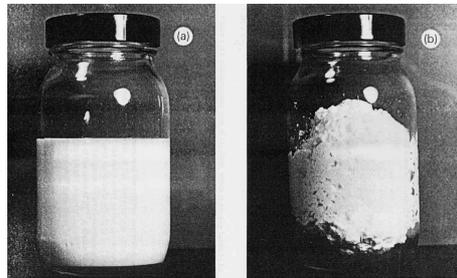


FIG. 3 – Fluide antithixotrope : (a) Au repos ; (b) Après une forte agitation (photographies tirées de [2]).

## 2.4 Effets élastiques

On trouve de nombreux fluides élastiques dans l'industrie alimentaire. Une démonstration des *effets élastiques* dans les liquides est l'expérience du *siphon ouvert* dans laquelle on peut siphonner un liquide élastique d'un bécier à un autre sans utiliser un tuyau (voir la figure 6). Cela est dû à une forte viscosité élongationnelle qui induit une contrainte très forte au niveau du bec du bécier qui tire le fluide. Un autre expérience est celle de la *détente élastique* (voir la figure 7). Un matériau, que l'on verse d'un récipient, peut être coupé à l'aide de ciseaux et remonte dans le récipient.

## 2.5 Contraintes normales

Sous l'effet d'un cisaillement simple, l'élasticité des liquides se manifeste par l'apparition de *contraintes normales* : il peut y avoir une tension le long des lignes de courant et une pression perpendiculaire à celles-ci. Une démonstration spectaculaire de ce phénomène est l'*effet Weissenberg* (voir les figures 8 et 9). Le fluide élastique remonte le long de l'axe d'un batteur rotatif alors qu'il y a creusement de la surface libre dans le cas d'un fluide newtonien à cause des forces centrifuges. Cela est dû à une tension le long des lignes de courant qui augmente lorsqu'on se rapproche du batteur et qui provoque la remontée du fluide le long de l'axe. Une autre expérience frappante de ce phénomène est celle du *gonflement à l'extrusion* d'un tube (voir les figures 10 et 11). À la sortie de l'orifice du tube, la tension le long des lignes de courant se relâche en se contractant dans la direction longitudinale, ce qui résulte en une expansion latérale du liquide à cause de son incompressibilité.

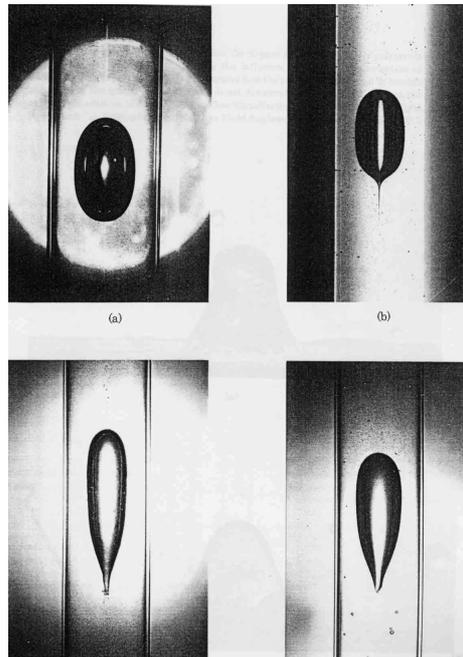


FIG. 4 – Bulles d'air ascendantes dans un tube contenant différents fluides : (a) Huile newtonienne ; (b) Fluide de Boger ; (c) Solution de 6% de CMC ; (d) Solution de 3% de Polyox (photographies tirées de [2]).

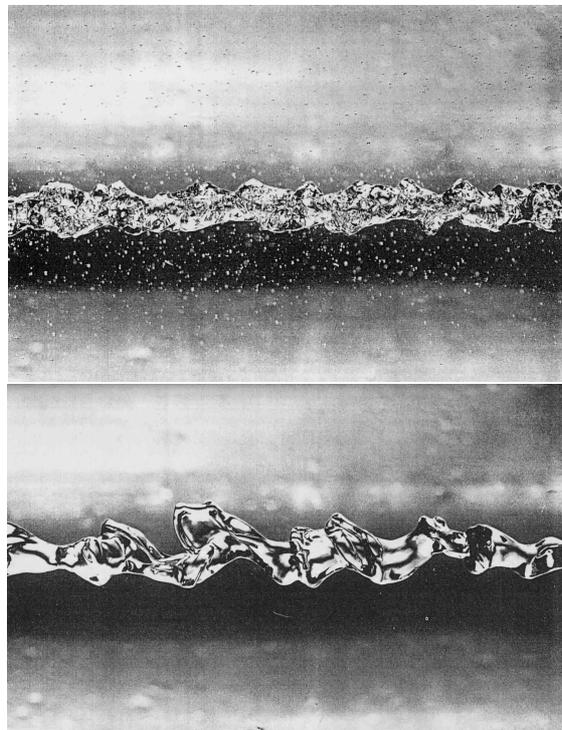


FIG. 5 – Jet à nombre de Reynolds élevé (photographies tirées de [2]) : Eau (photo du haut) ; Solution aqueuse de 200 ppm d'oxyde de polyéthylène (photo du bas).

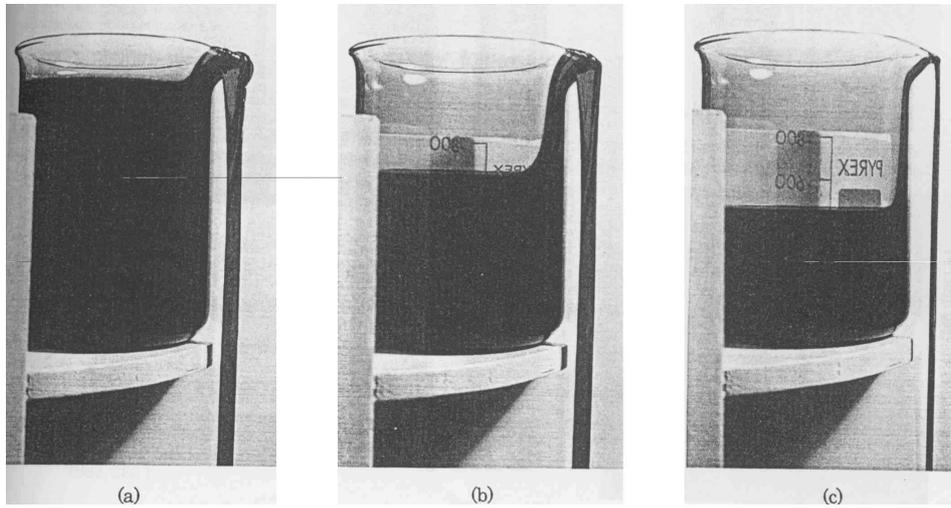


FIG. 6 – Siphon ouvert réalisé avec une solution aqueuse de 0,75% de Polyox WSR 301 (photographies tirées de [2]). La séquence montre le développement du siphon à partir du versement initial hors du bécher.

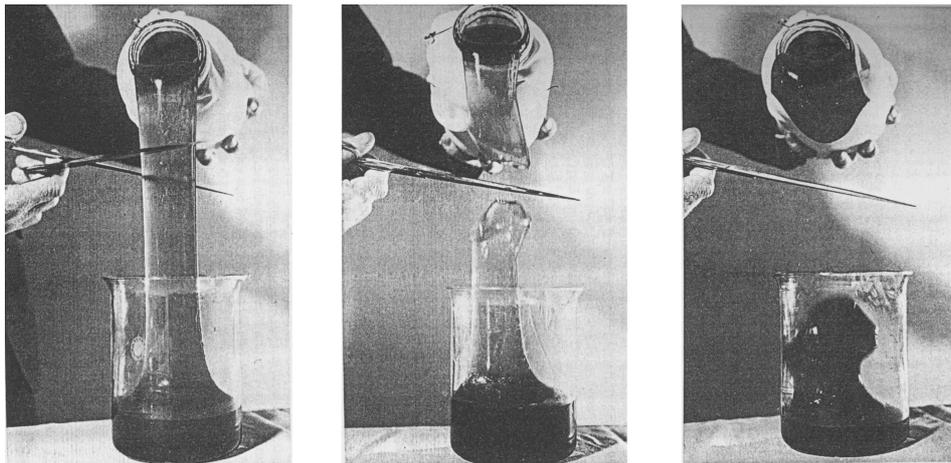


FIG. 7 – Détente élastique (photographies tirées de [2]).

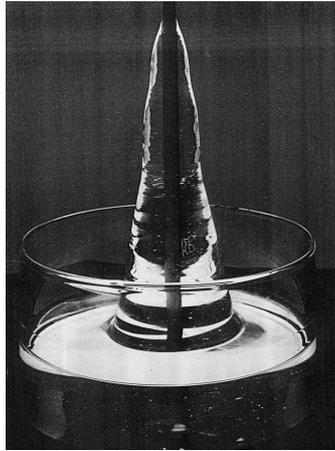


FIG. 8 – *Effet Weissenberg (photographie tirée de [2]).*

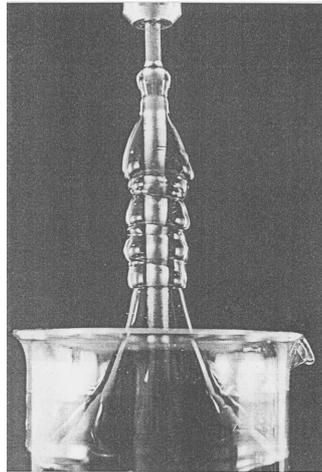


FIG. 9 – *Instabilité de la remontée du liquide (photographie tirée de [2]).*

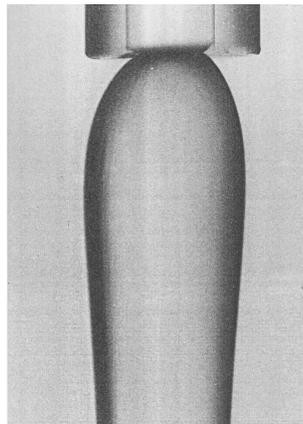


FIG. 10 – *Gonflement à l'extrusion pour une solution aqueuse de 2% de polyacrylamide (photographie tirée de [2]).*

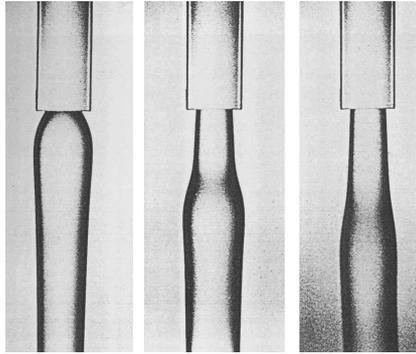


FIG. 11 – *Gonflement retardé à l’extrusion pour une solution aqueuse de 5% de polyacrylamide lorsque le nombre de Reynolds augmente, montrant la compétition entre élasticité et inertie (photographies tirée de [2]).*

### 3 Contrainte et déformation

#### 3.1 Contrainte

Il est possible de classer les forces qui s’exercent sur un élément de fluide de volume  $dV$  en deux catégories selon leur portées :

- Les forces en volume qui sont des forces à longues portées (gravité, forces électriques, magnétiques). Par exemple, la gravité s’exerce sur des distances très grandes devant les dimensions moléculaires et de fait la force de gravité sur un élément de volume est proportionnelle à son volume.
- Les forces de surfaces à courtes portées dont l’origine est dans les interactions moléculaires qui assurent la cohésion du liquide. Ces interactions à courtes portées ne vont concerner qu’une mince couche externe sur un élément de volume donné. La force globale exercée par ces interactions est proportionnelle à l’aire de la surface limitant l’élément de fluide et est indépendante de son volume.

Sur un élément de surface  $dS$ , de normale unité  $\mathbf{n}$ , cette force de surface va s’écrire :

$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1)$$

Le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  (ou  $\sigma_{ij}$ ) est symétrique et donc  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ <sup>1</sup>. Les termes diagonaux  $\sigma_{ii}$  sont les contraintes normales tandis que les termes non diagonaux sont les contraintes tangentiellles.

Dans un fluide au *repos*, le tenseur des contraintes est<sup>2</sup> :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (2)$$

où  $p$  est la pression. Le tenseur des contraintes est alors isotrope<sup>3</sup> :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p. \quad (3)$$

Dans un fluide en *mouvement*, le tenseur des contraintes s’écrit :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}, \quad (4)$$

où le premier terme qui est la partie isotrope continue à s’appeler la *pression* tandis que le second terme, la partie anisotrope due à la viscosité du fluide, est appelé le *déviateur*.

1. Ici et par la suite, nous utilisons une notation indicielle ainsi que la convention de sommation d’Einstein (un indice répété implique une sommation, par exemple  $u_i u_i = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ ).

2. Le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$  est défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

3. Il y a un signe négatif car le fluide est en compression.

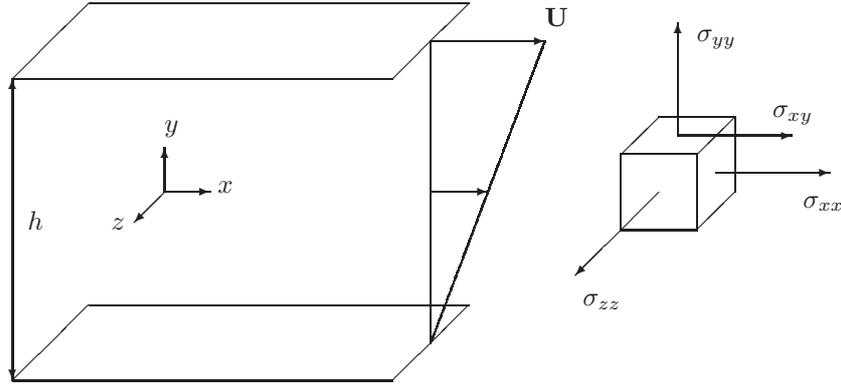


FIG. 12 – *Cisaillement simple.*

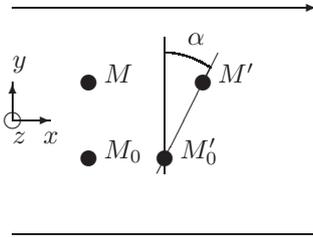


FIG. 13 – *Déformation.*

Considérons le cas où les contraintes sont appliquées par l'intermédiaire d'un plan animé d'une vitesse  $\mathbf{U}$  et d'un plan parallèle fixe distants de  $h$  comme indiqué sur la figure 12. Les contraintes ne dépendent que de  $y$  par symétrie. De plus seules existent la contrainte de cisaillement  $\sigma = \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  ( $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ ) et les contraintes normales  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$ . C'est cette configuration de cisaillement simple que nous utiliserons par la suite.

### 3.2 Déformation

Sous l'action des contraintes, un matériau va se déformer. On considère l'écoulement de cisaillement laminaire de la figure 12. Si un élément matériel est localisé au point  $M_0$  de coordonnées  $(x, y, z)$ , il sera localisé au point  $M'_0$  de coordonnées  $(x + \xi, y, z)$  à l'instant  $t$  puisque la vitesse du fluide est parallèle à l'axe des  $x$  (voir le schéma de la figure 13). Le déplacement  $\xi$  dépend seulement de  $y$ . L'élément matériel situé au point  $M$  de coordonnées  $(x, y + dy, z)$ , sera localisé au point  $M'$  de coordonnées  $[x + \xi + (d\xi/dy)dy, y + dy, z]$  à l'instant  $t$ . On appelle *déformation*, la variation du déplacement lorsqu'on passe d'une couche à une couche infiniment voisine :

$$\gamma = \frac{d\xi}{dy} = \tan \alpha. \quad (5)$$

C'est cette variation qui caractérise un mouvement de cisaillement pour lequel les différentes couches ont des déplacements relatifs les unes par rapport aux autres.

La vitesse de déformation est définie par :

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\xi}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{d\xi}{dt} = \frac{dv_x}{dy}, \quad (6)$$

car la composante suivant  $x$  de la vitesse est  $v_x = d\xi/dt$ . On voit que la vitesse de déformation est égale au taux de cisaillement. Dans le cas particulier du cisaillement simple, le taux de cisaillement

n'a qu'une seule composante suivant  $x$ ,  $dv_x/dy = \dot{\gamma}$ . Dans le cas général, le taux de cisaillement (ou vitesse de déformation) associé(e) aux directions  $i$  et  $j$  est :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 2e_{ij}, \quad (7)$$

où le tenseur  $\mathbf{e}$  est appelé le *tenseur taux de déformation*.

### 3.3 Décomposition du champ de gradient de vitesse au voisinage d'un point

Considérons un élément matériel de fluide situé au point  $\mathbf{r}$  avec une vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  et un élément situé au point  $\mathbf{r} + \mathbf{dr}$  avec une vitesse  $\mathbf{v} + \mathbf{dv}$ , un développement au premier ordre donne :

$$\mathbf{dv} = \mathbf{grad} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dr}, \quad (8)$$

où  $\mathbf{grad} \mathbf{v}$  est le tenseur des gradients de vitesse.

On peut décomposer ce tenseur  $\partial v_i / \partial x_j$  en une partie symétrique, le *tenseur taux de déformation*  $e_{ij}$ , et une partie antisymétrique, le *tenseur taux de rotation*  $\omega_{ij}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= e_{ij} + \omega_{ij}. \end{aligned} \quad (9)$$

L'équation (8) peut s'écrire alors :

$$\mathbf{dv} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{dr} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{dr}, \quad (10)$$

Lorsque le fluide est incompressible, la trace du tenseur symétrique  $e_{ij}$  est nulle, soit  $e_{kk} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0$ . L'écoulement correspondant à  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{dr}$  est un écoulement de déformation pure encore appelé écoulement élongationnel. Le tenseur antisymétrique  $\omega_{ij}$  n'a que trois composantes indépendantes. Il est possible de lui associer un vecteur vitesse de rotation  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot} \mathbf{v} / 2$  où  $\mathbf{rot} \mathbf{v}$  est la vorticité. L'écoulement correspondant à  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{dr} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{dr}$  est un écoulement de rotation en bloc. De manière générale, pour un fluide incompressible, un écoulement peut être considéré comme la superposition d'un écoulement de déformation pure et d'un écoulement de rotation pure<sup>4</sup>.

Dans le cas particulier du cisaillement simple de la figure 12, la décomposition du tenseur des gradients de vitesse en une partie symétrique et une partie antisymétrique s'écrit :

$$\mathbf{grad} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ -\dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Le terme symétrique a une trace nulle, il n'y a donc pas de variation en volume des éléments de fluides. Le terme symétrique a des axes propres à  $45^\circ$  et les valeurs propres sont  $\dot{\gamma}/2$  et  $-\dot{\gamma}/2$ . Le terme antisymétrique donne une rotation à la vitesse angulaire  $-\dot{\gamma}/2$ . La déformation d'un élément de fluide carré dans un écoulement de cisaillement simple est présentée sur la figure 14. On retrouve que le taux de cisaillement ou vitesse de déformation n'a qu'une seule composante  $\dot{\gamma} = 2e_{xy} = 2e_{yx}$ .

## 4 Lois constitutives

### 4.1 Fluides newtoniens et non-newtoniens

Les équations qui gouvernent l'écoulement ou la déformation d'un matériau sont de deux types :

- Les équations de conservation (conservation de la masse et de la quantité de mouvement) qui sont les mêmes pour tous les matériaux.

---

4. Lorsque le fluide est compressible, le terme symétrique isotrope  $e_{kk} \neq 0$  va donner un accroissement relatif de volume d'un élément de fluide, alors que le terme symétrique anisotrope,  $e_{ij}$  avec  $i \neq j$ , correspond à une déformation pure sans changement de volume.

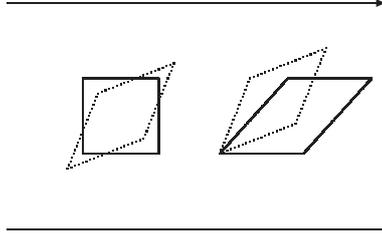


FIG. 14 – Déformation d'un élément de fluide carré dans un écoulement de cisaillement simple : déformation sans changement de volume avec des axes propres à  $45^\circ$  puis rotation.

– Les relations constitutives qui dépendent des propriétés et de la nature du matériau.

Le matériau est traité comme un milieu continu et est caractérisé par une masse volumique  $\rho(\mathbf{r},t)$  et un champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ , qui sont (en général) des fonctions continues de la position  $\mathbf{r} = (x,y,z)$  et du temps  $t$ . Dans la plupart des écoulements, on peut négliger la compressibilité du matériau et la condition d'incompressibilité s'écrit :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (12)$$

On écrit la conservation de la quantité de mouvement sous la forme de Cauchy :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right] = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \quad (13)$$

où  $\mathbf{g}$  est l'accélération de la gravité.

Pour l'équation constitutive, on a besoin d'une relation entre la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et l'écoulement  $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ .

Pour un fluide newtonien, comme l'eau dans des conditions ordinaires de température et de pression par exemple, la relation entre contrainte et taux de cisaillement est linéaire :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (14)$$

c'est-à-dire que le *déviateur* (partie non isotrope du tenseur des contraintes) ou encore *tenseur des contraintes de viscosité* s'écrit :

$$d_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad (15)$$

où la constante  $\mu$  est la viscosité du fluide qui ne dépend pas des contraintes ou du taux de cisaillement. Pour le cisaillement simple de la figure 12, cette relation s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}}. \quad (16)$$

Pour les fluides newtoniens, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (13) devient l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right] = -\mathbf{grad} p_d + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad (17)$$

où la pression dynamique  $p_d$  est en fait un champ de pression modifié de façon à intégrer les forces extérieures conservatives (c'est à dire qui dérivent d'un potentiel comme la gravité).

De nombreux fluides ne sont pas newtoniens. Par exemple, pour les cristaux liquides, il y a une relation tensorielle entre  $\sigma_{ij}$  et  $e_{ij}$ . Pour d'autres fluides isotropes, le rapport des contraintes aux vitesses de déformation dépend des contraintes, des vitesses de déformation et éventuellement du temps. Le but de la rhéologie est de déterminer la relation entre contrainte et déformation ou vitesse de déformation qui détermine toutes les propriétés rhéologiques du matériau. On cherche une relation  $\sigma_{ij} = f(e_{ij})$ .

Dans la suite on note  $\boldsymbol{\sigma}$  la contrainte et  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  la vitesse de déformation car nous considérons que les caractérisations du matériau ont été faites en utilisant un cisaillement simple. Nous cherchons la relation  $\boldsymbol{\sigma} = f(\dot{\boldsymbol{\gamma}})$ .

## 4.2 Viscoélasticité linéaire

Un comportement non-newtonien important est la viscoélasticité. La réponse du fluide à une déformation présente à la fois un aspect visqueux (où les contraintes sont proportionnelles aux vitesses de déformation) et un aspect élastique (où les contraintes sont proportionnelles aux déformations). Un exemple de fluide viscoélastique est la pâte de silicone connue sous le nom de “silly-putty”. Une boule de “silly-putty” rebondit sur le sol comme une balle élastique (aux temps courts) mais s’étale comme un fluide visqueux (aux temps longs) si on la pose sur une surface horizontale.

### 4.2.1 Fonctions fluage et relaxation

Les fonctions fluage et relaxation sont les fonctions essentielles en viscoélasticité linéaire. Elles sont définies de la façon suivante :

- La *fonction fluage*,  $f(t)$ , est la déformation subie par le matériau lorsqu’on impose à ce dernier une contrainte d’amplitude unité au temps  $t = 0$ , contrainte qui est maintenue constante (voir la figure 15).
- La *fonction relaxation*,  $g(t)$ , est la contrainte résultant de l’application d’une déformation d’amplitude unité à l’instant initial  $t = 0$ , déformation qui est maintenue constante au cours du temps (voir la figure 16).

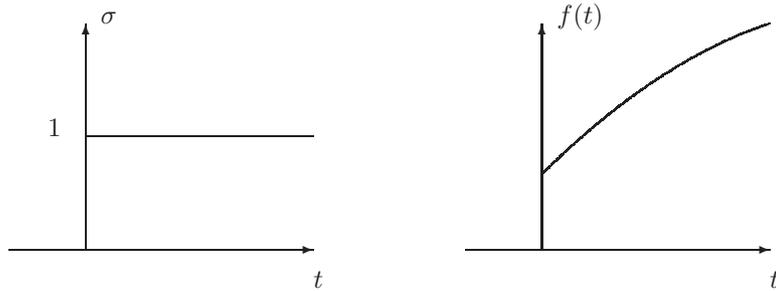


FIG. 15 – *Fonction fluage.*

La connaissance de la fonction fluage ou relaxation d’un matériau permet de déterminer toutes les propriétés viscoélastiques du matériau. Lorsqu’on dispose d’un rhéomètre imposant une contrainte constante,  $\sigma_0$ , on mesure une déformation  $\gamma(t) = \sigma_0 f(t)$ . Lorsqu’on dispose d’un rhéomètre imposant une déformation constante,  $\gamma_0$ , on mesure une déformation  $\sigma(t) = \gamma_0 g(t)$ .

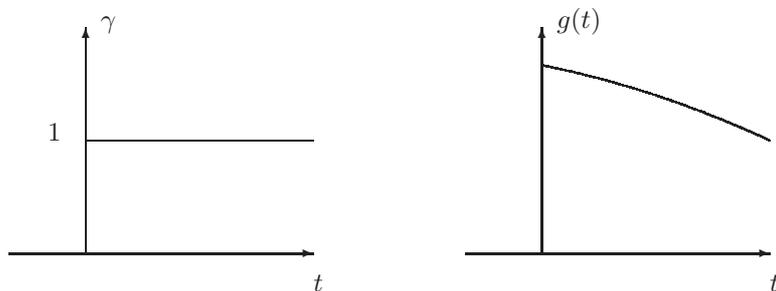


FIG. 16 – *Fonction relaxation.*

### 4.2.2 Solide élastique parfait

L'équation rhéologique d'un *solide élastique parfait* (*loi de Hooke*) s'écrit :

$$\gamma(t) = J\sigma(t), \quad (18)$$

où  $J$  s'appelle la *complaisance élastique*. On utilise également le module de rigidité ou module de cisaillement  $G = 1/J$ . La relation (18) s'applique au cisaillement simple de la figure 12. Pour un solide élastique parfait, la déformation et la contrainte sont reliées par une relation linéaire mais le coefficient de proportionnalité dépend du type de déformation imposée (c'est-à-dire, dépend du module d'Young, du coefficient de Poisson ou du module de compression uniforme).

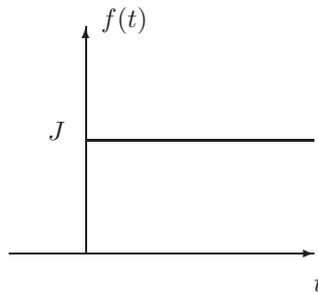


FIG. 17 – Fonction fluage d'un solide élastique parfait.



FIG. 18 – Ressort de complaisance élastique  $J$ .

De la *loi de Hooke*, on déduit les propriétés suivantes :

- Dès qu'une contrainte est appliquée, instantanément une déformation prend naissance, proportionnelle à la contrainte. Inversement, si la contrainte est ramenée à zéro, immédiatement la déformation s'annule. La déformation élastique est *instantanée et récupérable*.
- Le comportement est bien solide. Soumis à une contrainte constante, le matériau atteint instantanément un état d'équilibre.
- La fonction fluage est  $f(t) = J$  pour  $t \geq 0$  (voir la figure 17).

Un solide élastique parfait est symbolisé par un ressort de complaisance élastique  $J$  (voir la figure 18).

### 4.2.3 Liquide visqueux newtonien

L'équation rhéologique d'un *liquide visqueux newtonien* s'écrit :

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \frac{1}{\mu}\sigma(t). \quad (19)$$

En tenant compte des conditions initiales, à  $t < 0$ ,  $\sigma(t) = 0$  et  $\gamma(t) = 0$ , l'équation (19) s'intègre :

$$\gamma(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t \sigma(t') dt'. \quad (20)$$

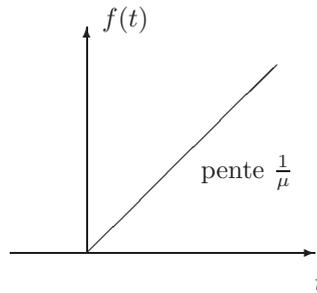


FIG. 19 – Fonction fluage d'un liquide visqueux newtonien.

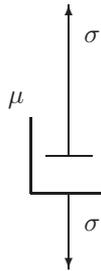


FIG. 20 – Amortisseur de viscosité  $\mu$ .

On en déduit les propriétés suivantes :

- Le liquide visqueux newtonien *se souvient* de toutes les contraintes qui lui ont été imposées dans le passé. En effet, l'expression de  $\gamma(t)$  dépend de toutes les valeurs prises par la contrainte de 0 à  $t$ .
- Si la contrainte est ramenée à 0 à un instant donné, la déformation demeure constante et égale à la valeur à cet instant. *La déformation est irréversible.*
- Le comportement est bien celui d'un liquide. Soumise à une contrainte constante,  $\sigma_0$ , la déformation,  $\gamma(t) = \sigma_0 t / \mu$  croît linéairement avec le temps. *Le matériau s'écoule indéfiniment.*
- La fonction fluage est  $f(t) = t / \mu$  pour  $t \geq 0$  (voir la figure 19).

Un liquide visqueux newtonien est symbolisé par un amortisseur de viscosité  $\mu$  (voir la figure 20).

Nous avons présenté les deux comportements viscoélastiques linéaires élémentaires. Le comportement viscoélastique linéaire général se définit en construisant un modèle constitué d'un assemblage analogique et symbolique de ressorts (solides élastiques parfaits) et d'amortisseurs (liquides visqueux newtoniens) en série ou en parallèle.

#### 4.2.4 Solide de Kelvin-Voigt

Le *solide de Kelvin-Voigt* est constitué par l'association en parallèle d'un ressort de complaisance élastique  $J$  et d'un amortisseur de viscosité  $\mu$  (voir la figure 21). La contrainte imposée à

l'ensemble est la somme des contraintes de chaque branche :

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v, \quad (21)$$

où  $\sigma_e = \gamma_e/J$  dans la branche du ressort et  $\sigma_v = \mu d\gamma_v/dt$  dans la branche de l'amortisseur. La déformation subie est identique dans chaque branche et égale à la déformation totale subie par l'ensemble :

$$\gamma = \gamma_e = \gamma_v. \quad (22)$$

L'équation rhéologique du *solide de Kelvin-Voigt* est :

$$\sigma = \mu \frac{d\gamma_v}{dt} + \frac{1}{J} \gamma_e. \quad (23)$$

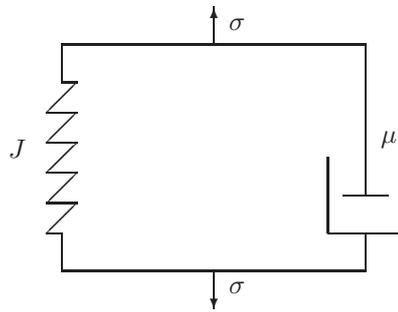


FIG. 21 – Association en parallèle d'un ressort de complaisance élastique  $J$  et d'un amortisseur de viscosité  $\mu$ .

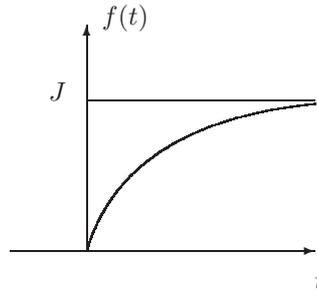


FIG. 22 – Fonction fluage d'un solide de Kelvin-Voigt.

La fonction fluage de ce modèle se trouve par la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$\mu \frac{df}{dt} + \frac{1}{J} f = 1. \quad (24)$$

On obtient :

$$f(t) = J(1 - \exp \frac{-t}{\theta}), \quad (25)$$

où  $\theta = J\mu$  est appelé *temps de retard*. La fonction fluage du *solide de Kelvin-Voigt* est une exponentielle croissante possédant une asymptote horizontale d'amplitude  $J$ . On a donc un comportement élastique aux temps longs après un régime transitoire de durée  $\theta$  (voir la figure 22). Il s'agit d'une *élasticité retardée* par la présence de l'élément visqueux.

#### 4.2.5 Liquide de Maxwell

Le *liquide de Maxwell* est constitué de l'association en série d'un ressort de complaisance élastique  $J$  et d'un amortisseur de viscosité  $\mu$  (voir la figure 23). La contrainte imposée à l'ensemble est supportée en totalité par chaque élément :

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v, \quad (26)$$

où  $\sigma_e = \gamma_e/J$  dans l'élément composé du ressort et  $\sigma_v = \mu d\gamma_v/dt$  dans l'élément composé de l'amortisseur. La déformation totale est la somme des déformations subies par chaque élément :

$$\gamma = \gamma_e + \gamma_v. \quad (27)$$

L'équation rhéologique du *liquide de Maxwell* est :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\mu}\sigma + J\frac{d\sigma}{dt}. \quad (28)$$

Sa résolution est immédiate en tenant compte des conditions aux limites, à  $t < 0$ ,  $\sigma = 0$  et  $\gamma = 0$  :

$$\gamma(t) = J\sigma(t) + \frac{1}{\mu} \int_0^t \sigma(t') dt'. \quad (29)$$

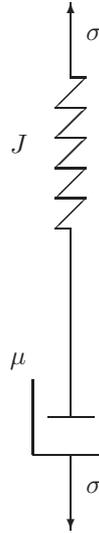


FIG. 23 – Association en série d'un ressort de complaisance élastique  $J$  et d'un amortisseur de viscosité  $\mu$ .

La fonction fluage de ce modèle est :

$$f(t) = J + \frac{t}{\mu}. \quad (30)$$

Aux temps longs, le comportement est celui d'un fluide visqueux newtonien car la déformation augmente linéairement avec le temps (voir la figure 24). La différence avec un fluide newtonien est la présence d'une *élasticité instantanée* donnée par la complaisance élastique  $J$ .

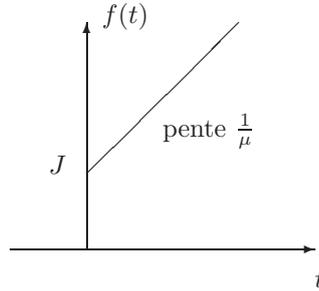


FIG. 24 – Fonction fluage d'un liquide de Maxwell.

#### 4.2.6 Comportement viscoélastique linéaire général

Toutes les différentes associations de ressorts et d'amortisseurs donnent lieu à un comportement viscoélastique linéaire. A partir des lois d'association en série ou en parallèle, on peut déduire l'équation rhéologique et les fonctions fluage et relaxation. On peut montrer que toutes les associations, aussi complexes soient-elles, peuvent être représentées par des modèles de structure bien définie: le *modèle de Kelvin-Voigt généralisé* et le *modèle de Maxwell généralisé*.

Le *modèle de Kelvin-Voigt généralisé* est constitué par l'association en série d'un liquide de Maxwell de viscosité  $\mu_0$  et complaisance  $J_0$  et de  $N$  solides de Kelvin-Voigt de viscosité  $\mu_i$  et complaisance  $J_i$ . Comme la fonction fluage d'une association en série est la somme des fonctions fluages des différents éléments, on peut en déduire immédiatement la fonction fluage de ce modèle général (représentée sur la figure 25):

$$f(t) = J_0 + \frac{t}{\mu_0} + \sum_{i=1}^N J_i (1 - \exp \frac{-t}{\theta_i}), \quad (31)$$

où  $\theta_i = J_i \mu_i$  est le temps de retard du  $i^e$  solide de Kelvin-Voigt. On a une élasticité instantanée donnée par la complaisance  $J_0$ , puis une variation assez rapide correspondant à l'élasticité retardée des différents solides de Kelvin-Voigt et enfin un comportement visqueux newtonien aux temps longs caractérisé par une variation linéaire de pente  $1/\mu_0$ . Ce modèle permet d'obtenir aussi un comportement solide aux temps longs en posant  $\mu_0 \rightarrow \infty$ . La fonction fluage, donnée par :

$$f(t) = J_0 + \sum_{i=1}^N J_i (1 - \exp \frac{-t}{\theta_i}), \quad (32)$$

présente une asymptote horizontale (voir la figure 26).

Le comportement général peut être également décrit par d'autres modèles équivalents, de structures différentes mais conduisant à la même équation rhéologique. Une autre structure équivalente est le *modèle de Maxwell généralisé*. Il est constitué par l'association en parallèle de  $N$  liquides de Maxwell ayant un module de rigidité  $G_i$  et une viscosité  $\mu_i$ . Ce modèle décrit un comportement liquide avec élasticité instantanée et retardée et est équivalent au modèle de Kelvin-Voigt généralisé précédent.

Selon que l'une des branches se réduit à un amortisseur ou à un ressort libre, on peut décrire d'autres types de comportement: liquide sans élasticité instantanée, solide avec élasticité instantanée et retardée, solide sans élasticité instantanée, par exemple.

Avec des rhéomètres à fluage, on privilégiera le modèle de Kelvin-Voigt dont la fonction fluage est simple, tandis qu'avec des rhéomètres à relaxation on utilisera le modèle de Maxwell.

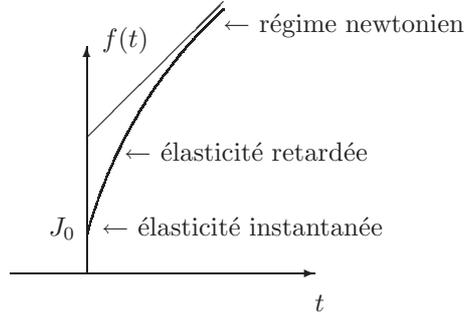


FIG. 25 – Fonction fluage du modèle de Kelvin-Voigt généralisé.

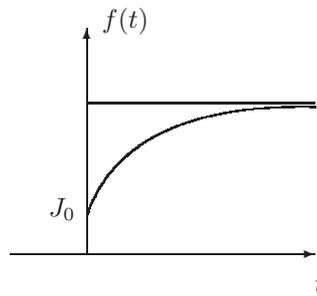


FIG. 26 – Fonction fluage du modèle de Kelvin-Voigt généralisé avec  $\mu_0 \rightarrow \infty$ .

### 4.3 Liquides nonlinéaires

Au delà de la viscoélasticité linéaire et plus loin dans le régime nonlinéaire, on considère des modèles *ad hoc* qui sont des approximations plus ou moins bonnes du comportement de certains matériaux. On utilise principalement des modèles pour lesquels la viscosité dépend du taux de cisaillement :

$$\sigma = \mu(\dot{\gamma})\dot{\gamma}, \quad (33)$$

sans effet dépendant du temps.

#### 4.3.1 Liquides plastiques

Ce sont des liquides présentant une contrainte seuil d'écoulement que nous avons évoqués dans la section 2.1.

La représentation la plus simple d'un fluide à seuil est le modèle de *Bingham* qui donne la relation suivante entre contrainte et taux de cisaillement :

$$\sigma = \sigma_c + \mu_p \dot{\gamma}, \quad (34)$$

où  $\sigma_c$  est la contrainte seuil et  $\mu_p$  la viscosité plastique. Le rhéogramme d'un fluide de *Bingham* est représenté sur la figure 27. Le matériau ne commence à s'écouler qu'au-delà du seuil et présente ensuite un comportement newtonien.

Certains matériaux ne présentent pas un comportement newtonien au-delà du seuil. C'est le cas du *fluide de Casson* pour lequel la relation utilisée est :

$$\sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma_c} + \sqrt{\mu_p \dot{\gamma}}. \quad (35)$$

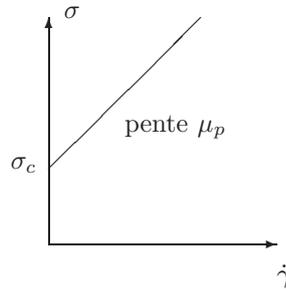


FIG. 27 – Rhéogramme d'un fluide de Bingham.

On rencontre d'autres relations comme celle de *Herchel-Buckley* :

$$\sigma = \sigma_c + k\dot{\gamma}^n, \quad (36)$$

où le coefficient  $k$  et l'exposant  $n$  sont à déterminer.

Des modèles analogiques peuvent aussi rendre compte des déformations d'écoulement plastique. On est amené à introduire dans ces modèles un élément non linéaire : le *patin* représenté sur la figure 28. C'est un limiteur de contrainte. Le patin représente le frottement solide : il glisse au delà d'un seuil de contrainte  $\sigma_c$ , la contrainte reste alors constante et égale à la valeur seuil (voir la figure 29).

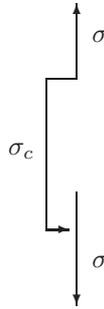


FIG. 28 – Patin ayant un seuil de contrainte  $\sigma_c$ .

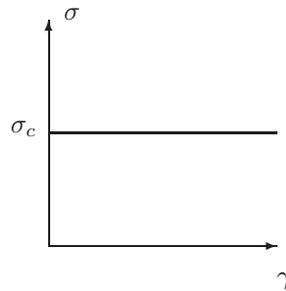


FIG. 29 – Variation de la contrainte avec la déformation aux extrémités d'un patin.

La représentation symbolique d'un fluide de *Bingham* est l'association en parallèle d'un patin ayant un seuil de contrainte  $\sigma_c$  et d'un amortisseur de viscosité  $\mu_p$  représentée sur la figure 30. La contrainte imposée à l'ensemble est la somme des contraintes de chaque branche :

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_v, \quad (37)$$

où  $\sigma_p = \sigma_c$  dans la branche du patin lorsqu'il glisse et  $\sigma_v = \mu_p \dot{\gamma}_v$  dans la branche de l'amortisseur. La déformation subie est identique dans chaque branche et égale à la déformation totale subie par l'ensemble :

$$\gamma = \gamma_p = \gamma_v. \quad (38)$$

L'équation rhéologique correspondante est donnée par l'équation (34) et le rhéogramme est celui de la figure 27.

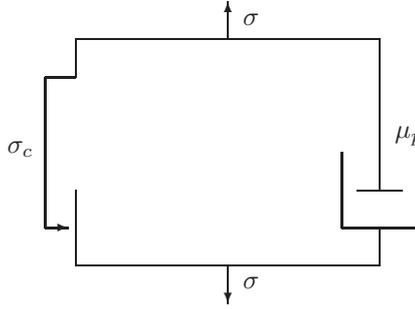


FIG. 30 – Association en parallèle d'un patin ayant un seuil de contrainte  $\sigma_c$  et d'un amortisseur de viscosité  $\mu_p$ .

### 4.3.2 Fluide rhéofluidifiant

Ce sont des liquides qui ont une viscosité qui décroît avec le taux de cisaillement et que nous avons présentés dans la section 2.1.

Une loi empirique très utilisée pour la variation de la viscosité avec le taux de cisaillement est la *loi de puissance* (proposée pour la première fois par Ostwald en 1925) :

$$\sigma = k \dot{\gamma}^n, \quad (39)$$

où le coefficient  $k$  et l'exposant  $n < 1$  sont à déterminer empiriquement. La viscosité s'écrit donc :

$$\mu = k \dot{\gamma}^{n-1}. \quad (40)$$

Le cas où  $n = 1$  correspond au comportement newtonien. Il est judicieux de tracer le rhéogramme en coordonnées log-log comme sur la figure 31 :

$$\log \sigma = \log k + n \log \dot{\gamma}, \quad (41)$$

où la pente de la droite donne l'exposant  $n$  et l'ordonnée à l'origine la constante  $k$ .

Une extension du modèle en loi de puissance est la *relation de Carreau* qui fait intervenir 5 paramètres :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = [1 + (\lambda \dot{\gamma})^a]^{\frac{n-1}{a}}, \quad (42)$$

où  $\mu_0$  est la viscosité à cisaillement nul,  $\mu_\infty$  est la viscosité à cisaillement infini,  $\lambda$  une constante de temps et  $a$  un paramètre qui décrit la transition entre le comportement à faible cisaillement et la région en loi de puissance. Ces différents coefficients sont à déterminer empiriquement.

Une autre approche est celle de *Shandraw* qui admet la relation :

$$\sigma = \sigma_0 + \mu_\infty \dot{\gamma} - \sigma_0 \exp(-b \dot{\gamma}). \quad (43)$$

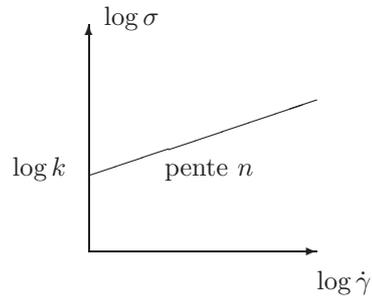


FIG. 31 – Rhéogramme d'un fluide rhéofluidifiant en loi de puissance.

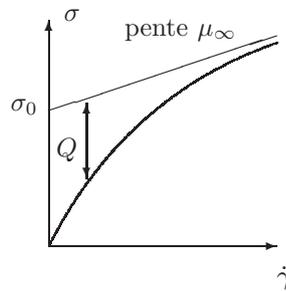


FIG. 32 – Rhéogramme du fluide de Shandraw.

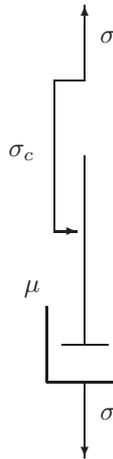


FIG. 33 – Association en série d'un patin ayant un seuil de contrainte  $\sigma_c$  et d'un amortisseur de viscosité  $\mu$ .

Le rhéogramme correspondant présenté sur la figure 32 a une asymptote oblique, l'écart  $Q = \sigma_0 \exp(-b\dot{\gamma})$  avec celle-ci étant exponentiellement décroissant.

On peut utiliser le *patin* pour représenter le comportement fluidifiant par un modèle symbolique. Le schéma de la figure 33 comportant en série un patin et un amortisseur donne le rhéogramme de la figure 34. Tant que la contrainte est inférieure au seuil du patin  $\sigma_c$ , la réponse

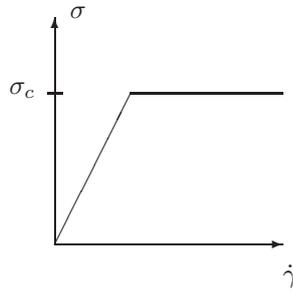


FIG. 34 – Rhéogramme correspondant à l'association en série d'un patin et d'un amortisseur.

est celle de l'amortisseur seul. Quand le patin se met à glisser ( $\sigma = \sigma_c = \mu\dot{\gamma}$ ), la contrainte demeure constante. Cette représentation est sommaire mais on peut la raffiner en associant en parallèle un ensemble de branches de ce type.

#### 4.3.3 Fluide rhéoépaississant

Ce sont des liquides qui ont une viscosité qui croît avec le taux de cisaillement et que nous avons mentionnés dans la section 2.1. On utilise la *loi de puissance* pour les représenter :

$$\sigma = k\dot{\gamma}^n, \quad (44)$$

avec un exposant  $n > 1$  qui est d'autant plus grand que le matériau s'écarte du comportement newtonien.

#### 4.4 Comportement dépendant du temps

Certains liquides peuvent avoir un écoulement dont les caractéristiques dépendent des *traitements antérieurs*. Dans ce cas, la viscosité apparente n'est plus fixée pour une valeur donnée de la contrainte ou du taux de déformation mais dépend également du *temps*.

C'est le cas des fluides *thixotropes* que nous avons mentionnés dans la section 2.2 et pour lesquels la viscosité apparente a tendance à décroître dans le temps quand on lui applique une contrainte (ou une vitesse de cisaillement) constante. Ce comportement complique considérablement les mesures rhéologiques car on voit se manifester des effets d'*hystérésis*.

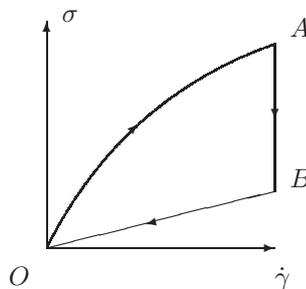


FIG. 35 – Boucle d'hystérésis de référence d'un gel fluidifiant.

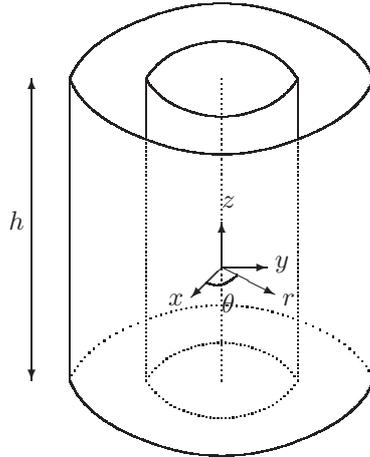


FIG. 36 – Rhéomètre de Couette.

On procédera de préférence en réalisant des rhéogrammes dans des conditions expérimentales fixées et bien reproductibles, comme la boucle de référence d'un gel fluidifiant présentée sur la figure 35 tirée de la référence [3]. Cette boucle est effectuée de la manière suivante :

- Charge en contrainte (ou taux de cisaillement) pendant un temps  $t_c$  court par rapport à toutes les autres durées expérimentales.
- Attente sous cisaillement maximal pendant un temps  $t_a$ .
- Décharge pendant un temps total  $t_d$ .

Au cours de la charge (partie  $OA$ ), le gel est rhéofluidifiant. Pendant l'attente (partie  $AB$ ), la viscosité apparente diminue à cause du changement de structure (transformation de l'état gel à l'état fluide). Pendant la décharge (partie  $BO$ ), la viscosité est constante et le retour est linéaire car la structure est détruite.

Dans quelques cas plus rares, on trouve aussi le comportement opposé, *antithixotrope*. À contrainte (ou vitesse de cisaillement) donnée, la viscosité apparente augmente avec le temps. Le terme d'*antithixotropie* est à préférer à celui de *rhéopexie*, moins bien défini, non totalement équivalent et qui désigne la propriété de solidification progressive par agitation.

## 5 Rhéométrie

### 5.1 Rhéomètres simples

#### 5.1.1 Rhéomètre plan

La situation idéale est celle où contrainte et vitesse de déformation sont constantes dans tout le volume du matériau. C'est ce que l'on rencontre dans un matériau *homogène* soumis à un écoulement de cisaillement simple comme celui de la figure 12. Les contraintes tangentielles,  $\sigma = \sigma_{xy}$ , sont constantes et égales aux contraintes sur les plans. La vitesse de déformation est la même en tout point et vaut  $\dot{\gamma} = U/h$ . La viscosité de cisaillement est définie comme le rapport de la contrainte tangentielle et du taux de cisaillement  $\mu = \sigma/\dot{\gamma}$ . Si le matériau est *inhomogène*, le profil de vitesse n'est plus celui de l'écoulement de cisaillement simple car la viscosité varie de point en point. On en est réduit à mesurer une viscosité effective que l'on peut exploiter si l'on dispose d'un modèle théorique du milieu.

Les autres écoulements viscométriques sont issus de l'écoulement de cisaillement simple et sont des généralisations pratiques de celui-ci.

### 5.1.2 Rhéomètre de Couette

Dans le rhéomètre de Couette, le fluide est placé dans l'entrefer de deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$  avec  $R_1 < R_2$  et de hauteur  $h$  tournant avec des vitesses angulaires respectives  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (voir la figure 36). En pratique, un des cylindres est fixe et l'autre tourne. C'est souvent le cylindre intérieur qui tourne, bien que cela puisse conduire à une instabilité de Taylor-Couette au delà d'une vitesse de rotation critique. On peut soit imposer cette vitesse angulaire et mesurer le moment  $M$  du couple à appliquer pour qu'elle soit maintenue, soit appliquer un couple donné et mesurer la vitesse angulaire prise par le cylindre mobile.

**Détermination de la contrainte** Considérons le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  représentées sur la figure 36. Compte tenu de la symétrie et de l'absence de gradient de pression axial,  $v_z = 0$ . Par ailleurs la vitesse  $v_\theta$  est indépendante de  $\theta$ . La relation d'incompressibilité (12) donne (voir l'appendice A) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0. \quad (45)$$

La vitesse  $v_r$  ne peut donc être que de la forme  $v_r = C/r$  où  $C$  est une constante. Or  $v_r$  s'annule sur les parois solides en  $R_1$  et  $R_2$  ; donc  $v_r$  est nulle dans tout le fluide. Compte tenu de la symétrie du champ de vitesse  $(0, v_\theta, 0)$ ,  $\sigma_{r\theta}$  est la seule composante non nulle du tenseur des contraintes. La composante angulaire de l'équation de la quantité de mouvement, équation (13), se réduit à (voir l'appendice A) :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sigma_{r\theta}) = 0. \quad (46)$$

Le moment est donc conservé :

$$M = M_1 = M_2 = M(r) = 2\pi h r^2 \sigma_{r\theta}, \quad (47)$$

où  $M_1$  et  $M_2$  sont les moments des couples appliqués aux cylindres intérieur et extérieur. La contrainte vaut :

$$\sigma = \sigma_{r\theta} = \frac{M}{2\pi h r^2}. \quad (48)$$

**Détermination du taux de cisaillement** Le taux de cisaillement est donné par (voir l'appendice A) :

$$\dot{\gamma} = 2e_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right), \quad (49)$$

où  $v_\theta/r$  est la vitesse angulaire.

**Entrefer étroit** Lorsque l'entrefer utilisé est étroit, en pratique  $(R_2 - R_1)/R_1 < 0.15$ , on peut considérer que la contrainte et le taux de cisaillement sont constants dans tout le volume de l'entrefer. La valeur constante de la contrainte sera prise égale à :

$$\sigma \approx \sigma(R_1) = \frac{M}{2\pi h R_1^2}. \quad (50)$$

Le taux de cisaillement est égal à une constante  $K$  :

$$\dot{\gamma} = r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) = K. \quad (51)$$

En intégrant cette équation entre le cylindre intérieur et le cylindre extérieur,

$$\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} d\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = K \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}, \quad (52)$$

on trouve l'expression de cette constante :

$$\dot{\gamma} = K = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \approx \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)R_1}{R_2 - R_1}. \quad (53)$$

À partir de la mesure du moment appliqué et de la vitesse angulaire entre les deux cylindres, on en déduit la viscosité :

$$\mu = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} \approx \frac{M}{2\pi h(\Omega_2 - \Omega_1)} \frac{R_2 - R_1}{R_1^3}. \quad (54)$$

**Entrefer large** Il faut se donner *a priori* un modèle rhéologique (matériau newtonien, plastique, rhéofluidifiant, ou autre), en déduire le taux de cisaillement en tout point, intégrer dans l'entrefer et vérifier *a posteriori* que le modèle est le bon. Prenons deux exemples :

– Dans le cas d'un modèle de fluide newtonien, l'équation rhéologique  $\sigma = \mu\dot{\gamma}$  s'écrit :

$$\frac{M}{2\pi hr^2} = \mu r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right). \quad (55)$$

En intégrant cette équation entre le cylindre intérieur et le cylindre extérieur,

$$\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} d\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = \frac{M}{2\pi h\mu} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^3}, \quad (56)$$

on en déduit :

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \frac{M}{4\pi h\mu} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2}. \quad (57)$$

Si la différence de vitesse angulaire des deux cylindres est une fonction linéaire du couple appliqué, le choix d'un modèle newtonien est correct. Sinon, il faut supposer un autre modèle pour le fluide.

– Dans le cas d'un modèle de fluide en loi de puissance, l'équation rhéologique  $\sigma = k\dot{\gamma}^n$  s'écrit :

$$\frac{M}{2\pi hr^2} = k \left[ r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right]^n. \quad (58)$$

En intégrant cette équation entre le cylindre intérieur et le cylindre extérieur,

$$\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} d\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = \left(\frac{M}{2\pi hk}\right)^{\frac{1}{n}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^{1+\frac{2}{n}}}, \quad (59)$$

on en déduit :

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \frac{n}{2} \left(\frac{M}{2\pi hk}\right)^{\frac{1}{n}} \left(R_1^{-\frac{2}{n}} - R_2^{-\frac{2}{n}}\right). \quad (60)$$

Si  $\ln(\Omega_2 - \Omega_1)$  est une fonction linéaire de  $\ln M$ , l'hypothèse d'une loi de puissance est correcte, sinon il faut choisir un autre modèle.

La plupart des rhéomètres de Couette utilisés en laboratoire ont un fonctionnement automatisé et ont un entrefer étroit. La précision des mesures est bonne et est améliorée en diminuant les effets d'extrémités qui perturbent l'écoulement. Ce type de rhéomètre nécessite néanmoins de disposer d'un volume d'échantillon relativement important.

### 5.1.3 Rhéomètre cône-plan

Dans le rhéomètre cône-plan, le fluide est placé entre un plan et un cône de rayon  $R$  comme présenté sur la figure 37. Le cône fait un angle  $\psi$  avec le plan et peut tourner à une vitesse angulaire  $\Omega$ . Ici encore, on peut travailler soit à vitesse imposée soit à moment imposé. À partir de la mesure du moment  $M$  et de la vitesse angulaire  $\Omega$ , on en déduit la viscosité. En effet, si l'angle du cône est

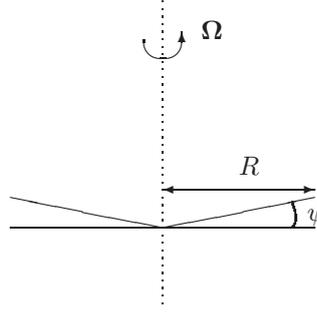


FIG. 37 – *Rhéomètre cône-plan.*

assez petit ( $\psi < 5^\circ$ ), la contrainte et la vitesse de déformation sont constantes dans tout l'espace occupé par l'échantillon (toujours homogène) et sont respectivement égales à :

$$\sigma = \frac{3M}{2\pi R^3}, \quad (61)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\psi}. \quad (62)$$

La viscosité est donnée par :

$$\mu = \frac{3M\psi}{2\pi\Omega R^3}. \quad (63)$$

Ce rhéomètre est très utile lorsqu'on ne dispose que d'une faible quantité de fluide car en général une goutte suffit, le fluide tenant entre le cône et le plan grâce à la tension capillaire. Il est aussi très intéressant car on peut atteindre des vitesses de cisaillement élevées. Les inconvénients sont que la mesure est très sensible à la position du cône (qui est tronqué et remplacé par un petit méplat) et que ce type d'appareil ne convient pas pour des matériaux complexes et fragiles comme les suspensions de particules. Un grand avantage est que l'on peut mesurer la poussée sur la plaque ce qui permet une mesure des contraintes normales.

#### 5.1.4 Autres types de rhéomètres

D'autres types de rhéomètres comme le rhéomètre de type Poiseuille et le viscosimètre à chute de bille sont également utilisés. Mais ils ne donnent des résultats satisfaisants que pour des fluides newtoniens.

## 5.2 Cisaillement oscillant

On peut étudier de façon dynamique un matériau en lui imposant une contrainte (déformation) qui varie sinusoïdalement au cours du temps. La linéarité des équations entraîne que la déformation (contrainte) est également sinusoïdale et de même fréquence. On pose :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 \cos(\omega t + \delta), \\ \gamma(t) &= \gamma_0 \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (64)$$

où  $\sigma_0$  et  $\gamma_0$  sont les amplitudes de la contrainte et de la déformation,  $\omega$  la pulsation et  $\delta$  le déphasage entre les deux. Pour faciliter les calculs, on prend une notation complexe :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &= \sigma_0 \exp[i(\omega t + \delta)], \\ \bar{\gamma}(t) &= \gamma_0 \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (65)$$

La contrainte et la déformation sont reliées par un module de rigidité complexe :

$$\bar{\sigma} = \bar{G}\bar{\gamma} = (G' + iG'')\bar{\gamma}, \quad (66)$$

où les parties réelle et imaginaire de  $\bar{G}$  sont le module de conservation et le module de perte avec  $\tan \delta = G''/G'$  et  $\sqrt{G'^2 + G''^2} = \sigma_0/\gamma_0$ . On peut aussi définir une viscosité complexe :

$$\bar{\sigma} = \bar{\mu}\bar{\gamma} = (\mu' - i\mu'')\bar{\gamma}, \quad (67)$$

avec  $\mu' = G''/\omega$  et  $\mu'' = G'/\omega$ . Le module de conservation  $G'$  est associé à la réponse élastique, en phase avec la déformation. Le module de perte  $G''$  est associé à la réponse de type visqueux, en quadrature de phase avec la déformation. Ce type de mesure dynamique est particulièrement adapté à l'étude rhéologique de la viscoélasticité qui a été présentée dans la section 4.2.

Pendant la déformation, la contrainte extérieure appliquée met en jeu une certaine puissance mécanique par unité de volume :

$$P = \sigma\dot{\gamma}, \quad (68)$$

qui s'écrit :

$$\begin{aligned} P(t) &= -\sigma_0\gamma_0\omega \cos(\omega t + \delta) \sin(\omega t), \\ &= -\sigma_0\gamma_0\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) \cos \delta + \sigma_0\gamma_0\omega \sin^2(\omega t) \cos \delta, \\ &= -\frac{\gamma_0^2\omega}{2}G'(\omega) \sin(2\omega t) + \gamma_0^2\omega G''(\omega) \sin^2(\omega t). \end{aligned} \quad (69)$$

La puissance moyenne fournie au cours d'un quart de période peut se décomposer en deux parties :

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle &= \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} P(t) dt, \\ &= P_e + P_d. \end{aligned} \quad (70)$$

Le premier terme  $P_e = -G'(\omega)\gamma_0^2\omega/\pi$  change de signe tous les quarts de cycle. C'est l'énergie de déformation élastique stockée puis restituée. Le second terme  $P_d = G''(\omega)\gamma_0^2\omega/2$  est toujours positif. C'est l'énergie dissipée par les frottements visqueux.

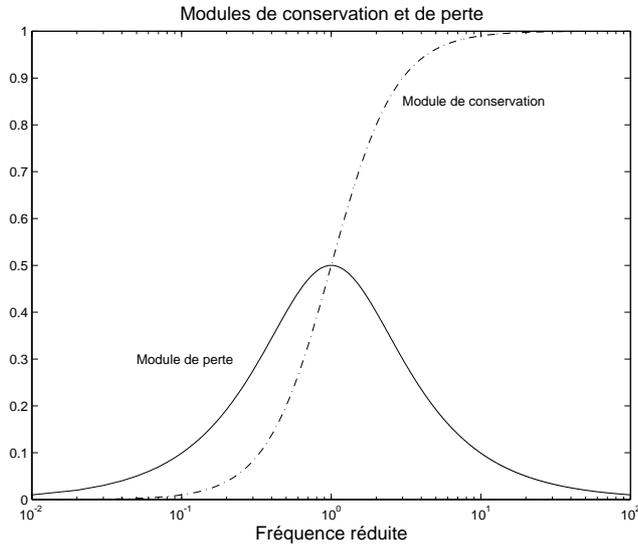


FIG. 38 – Modules de conservation,  $G'$ , et de perte,  $G''$ , (normalisés par  $G$ ) pour un liquide de Maxwell en fonction de la fréquence réduite,  $\omega\tau$ .

Le module de rigidité complexe se calcule facilement pour :

- Un solide élastique parfait,  $\bar{G} = \bar{\sigma}/\bar{\gamma} = 1/J = G$  avec  $G' = G$  et  $G'' = 0$ .
- Un liquide visqueux newtonien,  $\bar{G} = \bar{\sigma}/\bar{\gamma} = \mu\bar{\dot{\gamma}}/\bar{\gamma} = i\omega\mu$  avec  $G' = 0$  et  $G'' = \omega\mu$ .
- Un liquide de Maxwell,  $\bar{G} = \bar{\sigma}/\bar{\gamma} = i\omega\mu/(1 + i\omega\tau)$  où  $\tau = \mu/G$  avec une dépendance en fréquence analogue à celle d'un circuit électrique résistance-capacité,  $G' = G\omega^2\tau^2/(1 + \omega^2\tau^2)$  et  $G'' = G\omega\tau/(1 + \omega^2\tau^2)$ , présentée sur la figure 38.

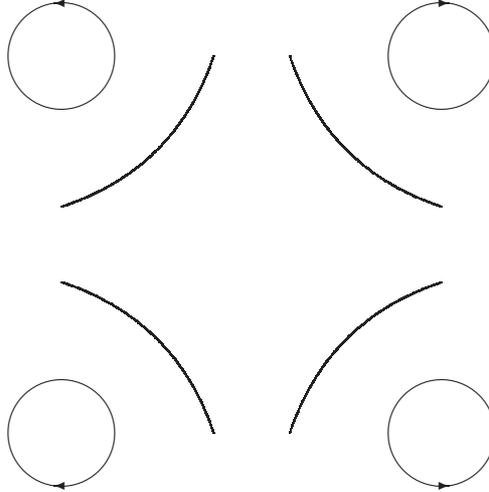


FIG. 39 – Appareil à quatre rouleaux pour produire un écoulement purement élongationnel.

### 5.3 Contraintes normales

Dans un fluide newtonien soumis à un écoulement de cisaillement simple comme celui de la figure 12 pour lequel  $\mathbf{v} = (\dot{\gamma}y, 0, 0)$ , seules les contraintes tangentielles,  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ , sont modifiées par l'écoulement et les contraintes normales restent isotropes et égales à  $-p$ . Pour des fluides non-newtoniens, l'écoulement de cisaillement peut induire des contraintes normales qui ne contribuent pas à la dissipation et sont donc appelées *contraintes élastiques*. En éliminant le terme de pression isotrope, on peut définir les différences entre contraintes normales :

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}, \quad (71)$$

et

$$N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz}. \quad (72)$$

Elles sont indépendantes de la direction de l'écoulement et, à faible taux de cisaillement, sont fonctions quadratiques de  $\dot{\gamma}$ ,  $N = \Psi\dot{\gamma}^2$ . À plus fort taux de cisaillement, la dépendance est en loi de puissance. En général, la première différence  $N_1$  est positive et peut être du même ordre, et même plus grande, que la contrainte de cisaillement. La seconde différence  $N_2$  est d'habitude négative et de 10% plus petite que  $N_1$ .

L'anisotropie des contraintes normales a deux effets spectaculaires que nous avons mentionnés dans la section 2.5 :

- L'ascension le long de l'axe d'un batteur rotatif (*effet Weissenberg*). Dans l'écoulement engendré par le cylindre tournant, la vitesse est essentiellement azimutale avec un gradient radial. L'anisotropie des contraintes normales conduit à  $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$ , dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ ,  $z$  étant l'axe du cylindre. Il y a une tension le long des lignes de courant qui tend à pousser le fluide vers l'axe et à le faire remonter.
- Le *gonflement à l'extrusion* d'un tube. Cet effet est du à la relaxation des contraintes normales  $\sigma_{xx}$  ( $x$  étant la direction de l'axe du tube) accumulées pendant l'écoulement à l'intérieur du tube.

### 5.4 Viscosité élongationnelle

Un écoulement élongationnel peut être réalisé par un appareil à quatre rouleaux rotatifs ou par un système de jets opposés (voir les figures 39 et 40). Nous considérons l'écoulement élongationnel

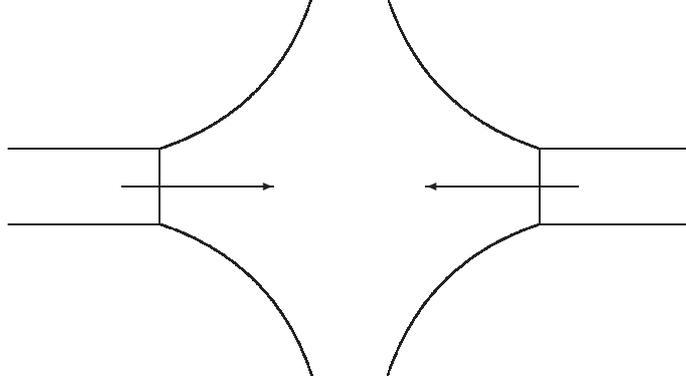


FIG. 40 – *Système de jets opposés pour produire un écoulement purement élongationnel.*

axisymétrique pour lequel  $\mathbf{v} = \dot{\epsilon}(x, -y/2, -z/2)$  où  $\dot{\epsilon}$  est le taux de déformation élongationnel. Dans cette configuration d'écoulement, on a :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad (73)$$

et, en éliminant le terme de pression isotrope, on définit la viscosité élongationnelle,  $\mu_E$  :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \sigma_{xx} - \sigma_{zz} = \mu_E \dot{\epsilon}. \quad (74)$$

Pour un liquide newtonien le *rapport de Trouton*,  $T_r = \mu_E/\mu = 3$ , ne dépend pas du taux de cisaillement ou du taux d'élongation. Ce n'est pas le cas pour des fluides non-newtoniens pour lesquels  $\mu_E(\dot{\epsilon})$  et pour lesquels le *rapport de Trouton* peut être très grand  $T_r \approx 10^3 - 10^4$ .

## A Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (75)$$

et les équations de conservation de la quantité de mouvement sont :

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) v_i = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (76)$$

où  $F_i$  est une force en volume comme la gravité. Sur chaque coordonnée, elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) v_x &= \rho F_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) v_y &= \rho F_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) v_z &= \rho F_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (77)$$

Le tenseur taux de déformation est :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (78)$$

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (79)$$

et les équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_r - \frac{v_\theta^2}{r} \right] &= \rho F_r + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \\ \rho \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] &= \rho F_\theta + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r}, \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z &= \rho F_z + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r}. \end{aligned} \quad (80)$$

Le tenseur taux de déformation est :

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial v_r}{r}, e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ e_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right), e_{zr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (82)$$

et les équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right] &= \rho F_r + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta), \\ \rho \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} - \cot \theta \frac{v_\varphi^2}{r} \right] &= \rho F_\theta + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}], \\ \rho \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) v_\varphi + \cot \theta \frac{v_\theta v_\varphi}{r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right] &= \rho F_\varphi + \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \cot \theta). \end{aligned} \quad (83)$$

Le tenseur des taux de déformation est :

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial v_r}{r}, e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta + \frac{v_r}{r}, \\ e_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right], \\ e_{\varphi r} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) \right], e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (84)$$

## B Dimensions et unités

Les dimensions et unités du cisaillement, de la contrainte et des viscosités dynamique et cinématique sont données dans le système d'unités CGS (centimètre, gramme et seconde) et dans

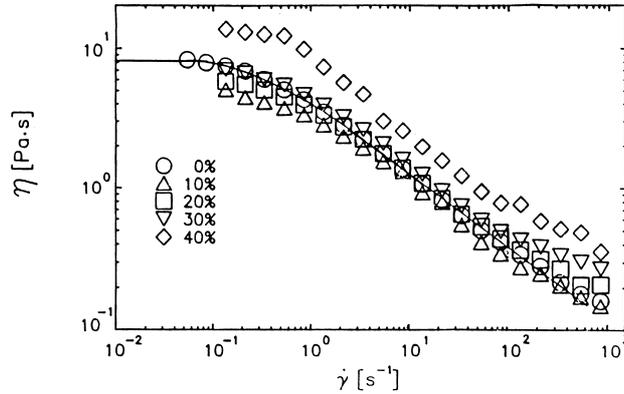


FIG. 41 – Viscosité d'une solution à 1% de polyéthylène oxyde dans un mélange 50%/50% eau/glycérine pour diverses fractions massiques de billes de verre, à une température de 25°.

le système international d'unités SI. Notons que 1 Poise = 0,1 Pa.s et que 1 Stokes =  $10^{-4}\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ .

	CGS	SI
$\dot{\gamma}$	$\text{s}^{-1}$	$\text{s}^{-1}$
$\sigma$	$\text{g.cm}^{-1}.\text{s}^{-2}$	Pascal = $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$
$\mu$	Poise = $\text{g.cm}^{-1}.\text{s}^{-1}$	Pa.s = $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
$\nu = \mu/\rho$	Stokes = $\text{cm}^2.\text{s}^{-1}$	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$

## C Exercices et problèmes

### C.1 Course entre un fluide newtonien et un fluide non-newtonien

On considère deux tubes verticaux identiques ouverts sur le haut et comportant deux robinets identiques en bas. Ces deux tubes sont remplis à la même hauteur d'un liquide newtonien pour le tube de gauche et d'un liquide non-newtonien pour le tube de droite. Les robinets sont ouverts simultanément. Au début le fluide non-newtonien s'écoule plus vite mais quand la hauteur de liquide devient plus faible, il ralentit par rapport au fluide newtonien et à la fin c'est le fluide newtonien qui gagne en s'écoulant plus vite. Quel est le type de fluide non-newtonien? Expliquer l'expérience. Donner un exemple de fluide ayant un comportement rhéologique semblable.

### C.2 Loi rhéologique à trouver

On considère les variations de viscosité avec le gradient de vitesse représentées sur la figure 41. Dans la partie décroissante des courbes, quelle est la loi rhéologique du fluide? Donner en la caractéristique à partir des courbes de la figure 41.

### C.3 Écoulement dans un tube cylindrique d'un fluide en loi de puissance

On considère un écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique de rayon  $R$  induit par une différence de pression  $\Delta p$  sur une longueur  $L$  (voir la figure 42).

1. En considérant que l'écoulement est axisymétrique et que  $\sigma_{zz} = -p$ , montrer que la composante axiale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{zr})}{\partial r}. \quad (85)$$

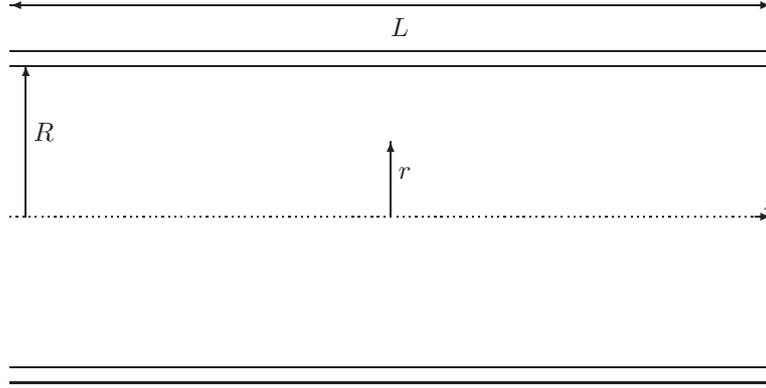


FIG. 42 – Coupe du tube cylindrique.

2. Montrer que la variation de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{zr}$  avec la position radiale  $r$  dans le tube est donnée par :

$$\sigma_{zr} = \frac{\Delta p}{2L} r. \quad (86)$$

3. Montrer que pour un fluide en loi de puissance ( $\sigma_{zr} = \kappa \dot{\gamma}^n$  avec un taux de cisaillement  $\dot{\gamma} = dv_z/dr$ ) la variation de la vitesse du fluide est donnée par :

$$v_z = - \left( \frac{\Delta p}{2L\kappa} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{1+\frac{1}{n}} - r^{1+\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}. \quad (87)$$

4. Quel est le profil de vitesse pour un fluide newtonien ( $n = 1$ )? et pour un fluide rhéofluidifiant ( $n < 1$ )?
5. Montrer que le débit volumique de fluide  $Q$  est donné par :

$$Q = - \left( \frac{\Delta p R}{2L\kappa} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\pi R^3}{3 + \frac{1}{n}}. \quad (88)$$

Montrer que l'on retrouve bien la loi de Poiseuille pour un fluide newtonien.

#### C.4 Écoulement de boues de forage

Les boues de forage utilisées dans l'exploitation pétrolière sont des suspensions concentrées de particules solides. Leur comportement rhéologique est non newtonien et leur rhéogramme (caractéristique contrainte - gradient de vitesse) met en évidence l'existence d'une contrainte seuil,  $\sigma_c$ , en dessous de laquelle le fluide ne s'écoule pas. Au delà de la contrainte seuil, on peut représenter le comportement du fluide soit par une relation linéaire (fluide de Bingham), soit par des relations plus réalistes (comme celle du fluide de Casson).

Le problème de l'écoulement des boues de forage dans un milieu poreux (comme c'est le cas dans un puit de forage) peut se ramener schématiquement à l'écoulement dans une série de tubes de section circulaire. Pour simplifier encore, nous considérons l'écoulement stationnaire de Poiseuille dans un tube cylindrique de rayon  $R$  induit par une différence de pression  $\Delta p$  sur une longueur  $L$  (voir la figure 42) d'un fluide de Bingham. Ce problème est tiré de la référence [5]

1. En considérant que l'écoulement est axisymétrique et que  $\sigma_{zz} = -p$ , montrer que la composante axiale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{zr})}{\partial r}. \quad (89)$$

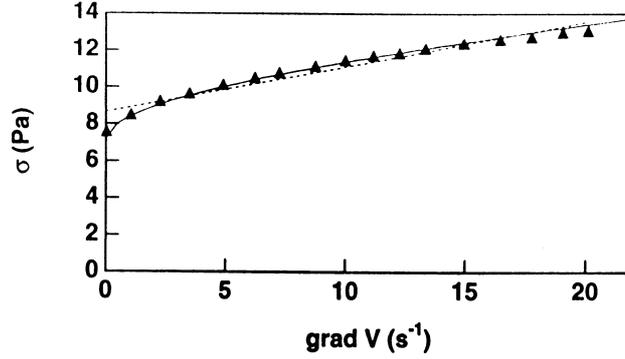


FIG. 43 – Rhéogramme d'une boue de forage. La courbe en trait plein est l'ajustement d'un modèle de Casson sur les points expérimentaux avec  $\sigma_c = 7,19$  Pa et  $\mu_p = 0,048$  Pa.s. La courbe en trait pointillé est un modèle de Bingham avec  $\sigma_c = 8,67$  Pa et  $\mu_p = 0,245$  Pa.s.

2. En déduire que la contrainte de cisaillement varie linéairement avec la position radiale  $r$  :

$$\sigma_{zr}(r) = r\sigma_{zr}(R)/R, \quad (90)$$

où  $\sigma_{zr}(R) = \Delta p R / 2L$ .

3. Montrer que le débit est donné par :

$$Q = -\pi \int_{v_z(0)}^{v_z(R)} r^2 du_z. \quad (91)$$

4. Avec un taux de cisaillement  $\dot{\gamma} = dv_z/dr$ , en déduire que :

$$Q = -\frac{\pi R^3}{\sigma_{zr}^3(R)} \int_0^{\sigma_{zr}(R)} \sigma_{zr}^2 \dot{\gamma}(\sigma_{zr}) d\sigma_{zr}. \quad (92)$$

5. Montrer que pour un fluide de Bingham qui présente une contrainte seuil,  $\sigma_c$ , en dessous de laquelle le fluide ne s'écoule pas, et une viscosité plastique,  $\mu_p$ , le débit s'écrit :

$$Q = -\frac{\pi R^3}{\mu_p \sigma_{zr}^3(R)} \int_{\sigma_c}^{\sigma_{zr}(R)} \sigma_{zr}^2 (\sigma_{zr} - \sigma_c) d\sigma_{zr}. \quad (93)$$

6. En rapportant le débit à son expression pour le fluide newtonien  $Q_p$  (loi de Poiseuille), montrer qu'on obtient :

$$Q/Q_p = 1 - \frac{4\sigma_c}{3\sigma_{zr}(R)} + \frac{\sigma_c^4}{3\sigma_{zr}^4(R)}. \quad (94)$$

Représenter  $Q/Q_p$  en fonction de  $\sigma_{zr}(R)/\sigma_c$ .

7. Montrer que pour un gradient de pression donné, le fluide ne s'écoule que dans des tubes de rayon supérieur à un rayon critique que l'on déterminera.
8. On fait couler de la boue de forage, dont les caractéristiques sont données dans le rhéogramme de la figure 43, dans un milieu poreux de 10 cm, avec une différence de pression entre entrée et sortie de 7 bars (1 bar =  $10^5$  Pascal). Quel est le diamètre minimal des pores dans lesquels s'écoule la boue? Quelles informations sur la distribution de taille des pores peut-on obtenir à partir de la relation expérimentale débit-différence de pression?

## C.5 Effet Weissenberg

Certaines solutions de polymère de grande masse moléculaire présentent un effet connu sous le nom d'*effet Weissenberg* et qui est dû à l'anisotropie de contraintes normales sous cisaillement. Cet effet est illustré sur la figure 44. Un barreau cylindrique de rayon  $R$  est plongé dans le liquide non-newtonien de masse volumique  $\rho$ . Lorsqu'on fait tourner ce barreau à vitesse angulaire constante  $\omega$ , la surface libre du liquide s'élève le long du barreau. Une expérience similaire avec un liquide newtonien montre une dépression de la surface libre autour du barreau tournant.

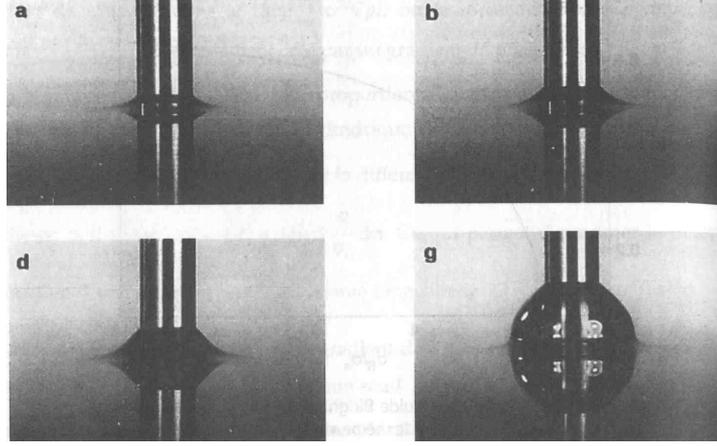


FIG. 44 – Ascension d'une solution de polyisobutylène le long d'un barreau tournant. Le rayon du barreau est 0,32 cm. La vitesse de rotation est : (a) 0, (b) 2 tour/min, (d) 3 tour/min et (g) 7 tour/min. En l'absence de rotation, l'ascension du liquide est due à des effets capillaires. Photographies tirées de G. S. Beavers and D. D. Joseph, *J. Fluid Mechanics*, **69**, 475 (1975)

Nous allons établir une théorie simplifiée de cet effet tirée de la référence [5]. Nous supposons que la déformation de l'interface reste de petite amplitude et nous négligeons les effets de la tension de surface du liquide. Nous supposons que l'interface est initialement plane (l'angle de contact entre la surface du liquide et le barreau tournant est  $90^\circ$ ). Nous considérons des coordonnées cylindriques où la direction suivant  $z$  est contraire à la gravité.

1. En considérant que le mouvement est purement azimutal ( $v_z = v_r = 0$ ) et que l'écoulement est axisymétrique, montrer que les équations de conservation de la quantité de mouvement se réduisent à :

– Composante  $z$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g, \quad (95)$$

– Composante  $r$

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \quad (96)$$

qui peut s'écrire, en faisant apparaître les différences de contraintes normales  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$  et  $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ ,

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \quad (97)$$

– Composante  $\theta$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r} = 0. \quad (98)$$

2. En considérant que la contrainte de cisaillement est reliée au taux de cisaillement par l'expression newtonienne :

$$\sigma_{r\theta} = \mu \dot{\gamma} = 2\mu e_{r\theta}, \quad (99)$$

où  $\mu$  est la viscosité et où le tenseur taux de déformation est donné en coordonnées cylindriques par :

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right), \quad (100)$$

et en cherchant des solutions de la forme  $v_\theta = A_n r^n$  de l'équation (98), montrer que le champ de vitesse est donné par :

$$v_\theta = \frac{\omega R^2}{r}, \quad (101)$$

et que le taux de cisaillement est :

$$\dot{\gamma} = 2e_{r\theta} = -2 \frac{\omega R^2}{r^2}. \quad (102)$$

3. En intégrant l'équation (95) à partir de la surface libre  $z = h(r)$  où  $\sigma_{zz} = 0$ , montrer que la contrainte normale suivant l'axe de rotation est donnée par le champ de pression hydrostatique :

$$\sigma_{zz} = -\rho g [h(r) - z]. \quad (103)$$

4. En intégrant l'équation (97), montrer que la forme de la surface libre est donnée par :

$$h(r) = \frac{\omega^2}{\rho g} \left( \Psi_1 \frac{R^4}{r^4} - \frac{\rho R^4}{2r^2} \right), \quad (104)$$

pour un fluide présentant une anisotropie de contraintes normales de la forme :

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \Psi_1 \dot{\gamma}^2, \quad (105)$$

la seconde différence des contraintes normales,  $\sigma_{rr} - \sigma_{zz}$ , étant beaucoup plus petite et donc négligée. Dans quelles conditions y a-t-il ascension le long du barreau tournant? Calculer la hauteur d'ascension. Que se passerait-il si le fluide était newtonien?

5. Le fluide utilisé est 15000 fois plus visqueux que l'eau (pour un taux de cisaillement compris entre 1 et 10  $\text{s}^{-1}$ ). Sa masse volumique est 0,89  $\text{g cm}^{-3}$ . La hauteur d'ascension en fonction du carré de la vitesse de rotation, pour des barreaux de différents diamètres est présentée sur la figure 45. Comparer le modèle aux résultats expérimentaux et estimer  $\Psi_1$ . Quel rayon de barreau faut-il avoir pour observer une ascension du liquide? Peut-on négliger les effets d'inertie dans le modèle?

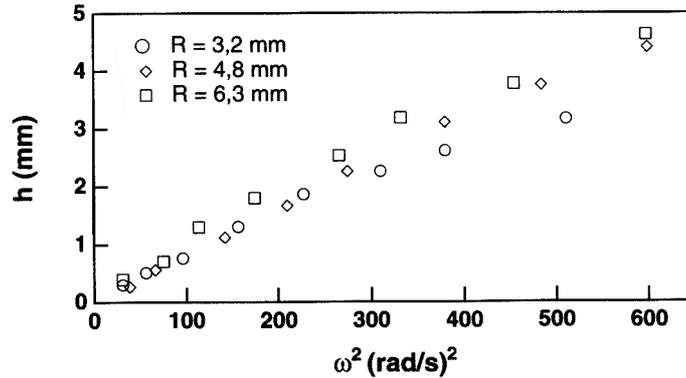


FIG. 45 – Hauteur d'ascension d'une solution de polyisobutylène en fonction du carré de la vitesse de rotation  $\omega$ , pour trois diamètres de barreau tournant. Données tirées de G. S. Beavers and D. D. Joseph, *J. Fluid Mechanics*, **69**, 475 (1975)

## Références

- [1] R. Byron Bird, R. C. Armstrong and Ole Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Volume 1, Fluid Mechanics*, 2nd Edition, Wiley, New York (1987).
- [2] D. V. Boger and K. Walters, *Rheological phenomena in focus*, Elsevier, Amsterdam (1993).
- [3] G. Couarraze et J. L. Grossiord, *Initiation à la rhéologie*, Technique et Documentation, Lavoisier, Paris (1983).
- [4] P. Coussot et C. Ancey, *Rhéophysique des pâtes et suspensions*, EDP Sciences (1999).
- [5] M. Fermigier, *Hydrodynamique Physique - Problèmes résolus avec rappels de cours*, Dunod, Paris (1999).
- [6] E. Guyon, J.-P. Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, Inter Editions / Éditions du CNRS (1991), nouvelle édition revue et augmentée, EDP Sciences / CNRS Éditions (2001).
- [7] H. Markovitz, *Rheological behavior of fluids*, film réalisé sous la direction du National Committee for Fluid Mechanics Films, et distribué par *Encyclopaedia Britannica Educational Corp.* (425 N. Michigan Ave., Chicago, IL 60611, USA).