

## (Texte public)

**Résumé :** On s'intéresse à un modèle mathématique de dépollution de lac. Le principe consiste à pomper de l'eau polluée, à la nettoyer dans un bioréacteur et à la réinjecter dans le lac, tout cela en circuit fermé. Le modèle sous-jacent repose sur des équations différentielles, puis sur une optimisation de paramètre qui permet de rendre le processus industriel le plus performant possible.

**Mots clefs :** Équations différentielles. Propriétés qualitatives. Schémas numériques.

---

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

### 1. Le modèle du bioréacteur

Lors du processus industriel de dépollution d'une grande quantité d'eau (on peut penser à un lac ou plus généralement à un grand volume d'eau contenu dans un réservoir), on utilise de petits bioréacteurs que l'on connecte en circuit fermé au lac à dépolluer, avec un débit  $Q$  qui est contrôlé par l'utilisateur.

À l'intérieur du bioréacteur de volume  $V_R$  se trouve un dépolluant (plus ou moins naturel) appelé biomasse : cette biomasse se développe en dégradant simultanément le polluant présent dans l'eau. À la sortie du bioréacteur, on filtre la biomasse à l'aide d'un décanteur (afin de ne pas la rejeter dans le lac) et on renvoie l'eau ainsi nettoyée dans le lac, de volume  $V_L$ . Ce circuit fermé est représenté sur la figure 1.

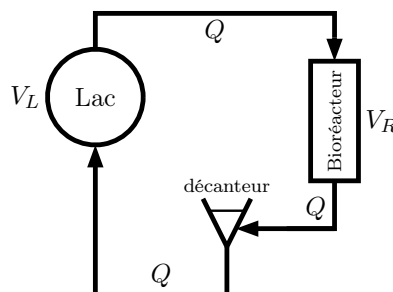


FIGURE 1. Circuit fermé entre le lac à dépolluer et le bioréacteur.

On note  $y(t)$  (respectivement  $z(t)$ ) la concentration au temps  $t$  de polluant dans le bioréacteur (dans le lac), et  $x(t)$  celle de biomasse présente dans le bioréacteur. Ce dernier est équipé d'un agitateur dont le rôle est de rendre homogène la répartition des différents constituants. Ainsi, on pourra supposer que les quantités  $y$  et  $x$  ne dépendent que du temps. On suppose également (mais c'est plus discutable) que la concentration  $z$  en polluant dans le lac ne dépend que du temps. L'évolution de ces quantités est ainsi modélisée par le système différentiel suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = \mu x(t)y(t) - \frac{Q}{V_R} x(t), \\ y'(t) = -\mu x(t)y(t) + \frac{Q}{V_R} (z(t) - y(t)), \\ z'(t) = \frac{Q}{V_L} (y(t) - z(t)), \end{cases}$$

où  $\mu > 0$  est une constante qui définit la loi de croissance de la biomasse. Le système différentiel traduit la transformation du polluant en biomasse et les pompages en entrée/sortie du bioréacteur et du lac. Dans tout le texte, on supposera  $V_R = 1$ , et on posera  $V_L = \frac{1}{\varepsilon}$  si bien que le système précédent devient

$$(2) \quad \begin{cases} x'(t) = \mu x(t)y(t) - Qx(t), \\ y'(t) = -\mu x(t)y(t) + Q(z(t) - y(t)), \\ z'(t) = \varepsilon Q(y(t) - z(t)). \end{cases}$$

## 2. Un phénomène lent-rapide

En pratique, les volumes respectifs du bioréacteur et du lac sont très différents :  $\varepsilon \ll 1$ . Cela induit, pour les processus ayant cours dans le bioréacteur d'une part, et dans le lac d'autre part, des échelles de temps très différentes. On va donc procéder à une simplification du modèle en faisant intervenir ces deux échelles de temps : le temps lent  $t$  et le temps rapide  $s$ , ce qui va permettre de « séparer » les équations du système (2). Bien que l'interprétation soit naturelle, il n'est pas évident de démontrer que la solution donnée par cette approche est bien une approximation de la solution de (2), nous l'admettrons ici (des éléments de preuve sont donnés au paragraphe 4).

On a tout d'abord le système rapide du bioréacteur :

$$(3) \quad \begin{cases} x'(s) = \mu x(s)y(s) - Qx(s), \\ y'(s) = -\mu x(s)y(s) + Q(\zeta - y(s)), \\ x(0) = x_0 > 0, \\ y(0) = \zeta > 0. \end{cases}$$

Ici la concentration du lac  $z(t)$ , paramétrée par  $t$ , est considérée comme constante vis-à-vis de la variable  $s$ , et est notée  $\zeta$ .

Le comportement en temps long de ce système fait apparaître deux régimes possibles, que l'on appelle le lessivage et la dépollution.

**Théorème 1.** Pour tous  $x_0 > 0$  et  $\zeta > 0$  donnés, le système (3) admet une unique solution globale. De plus, il existe un débit critique  $Q_c = \mu\zeta > 0$ , tel que, lorsque  $s \rightarrow \infty$ ,

— si  $Q > Q_c$ , alors  $(x(s), y(s))$  converge vers  $(0, \zeta)$ ,

— si  $0 < Q < Q_c$ , alors  $(x(s), y(s))$  converge vers  $(x^\infty, y^\infty)$  avec  $y^\infty = \frac{Q}{\mu} < \zeta$ .

En particulier, on note que la fonction

$$(4) \quad \varphi: ]0, Q_c[ \longrightarrow ]0, \zeta[, \\ Q \longmapsto y^\infty,$$

où  $y^\infty$  est la limite en temps long du système (3), est bijective.

Bien entendu, le régime qui nous intéresse est la dépollution. On va donc se placer dans le cas où  $Q < Q_c$ . On atteint alors « rapidement » l'équilibre dépolluant. La figure 2 illustre cette convergence.

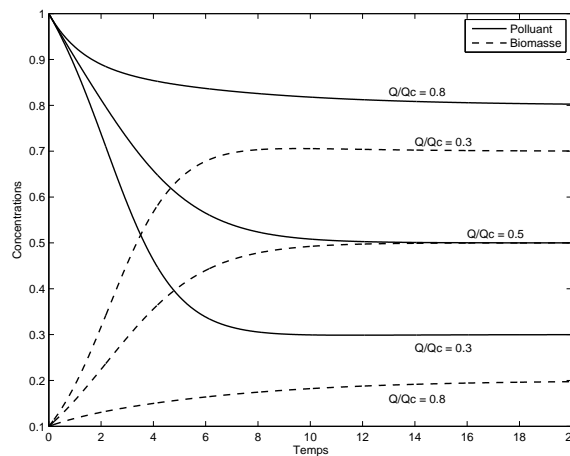


FIGURE 2. Quelques exemples de simulation du régime rapide avec un schéma d'Euler explicite,  $\Delta t = 0.02$ , avec  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 0.1$ , et  $\zeta = 1$ .

Le comportement de la dynamique rapide étant établi, la concentration dans le lac obéit alors à l'équation (dite lente) suivante :

$$(5) \quad z'(t) = Q\varepsilon(y^\infty - z(t)),$$

où  $y^\infty = \varphi(Q)$  correspond à l'équilibre stationnaire du système (3), que nous venons d'étudier.

On se fixe donc une concentration de polluant initiale dans le lac  $z(0)$  et un débit  $Q$  tel que  $\varphi(Q) < z(0)$ . On peut alors montrer la proposition suivante :

**Proposition 1.** La concentration en polluant  $t \mapsto z(t)$  vérifie les propriétés suivantes :

—  $z$  est une fonction strictement décroissante du temps, et converge vers  $\varphi(Q)$  quand  $t \rightarrow \infty$ ,

— pour toute concentration cible  $Y_{obj} \in ]\varphi(Q), z(0)[$ , le temps de dépollution nécessaire pour abaisser la concentration de  $z(0)$  à  $z_{obj}$  est donné par la formule

$$(6) \quad T_{obj}(Q) = \frac{1}{\varepsilon Q} \ln \left( \frac{z(0) - \varphi(Q)}{z_{obj} - \varphi(Q)} \right).$$

### 3. Optimisation du débit

Plaçons-nous maintenant dans une problématique industrielle. Connaissant la concentration initiale de polluant dans un lac, on désire l'amener à une concentration critique, imposée par la réglementation en vigueur. L'objectif est de faire cette opération en un temps minimum. Il s'agit donc d'un problème d'optimisation dont le paramètre est le débit  $Q$ . On commence par considérer un débit indépendant du temps.

#### 3.1. Débit constant

Soient  $y_0$  et  $y_1$  deux réels fixés, avec  $y_0 > y_1 > 0$ . On peut alors démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2.** *Considérons le problème de dépollution (5) avec  $z(0) = y_0$  et  $y_{obj} = y_1$ . Alors il existe un unique débit  $Q^* \in ]0, \varphi^{-1}(y_1)[$  tel que*

$$(7) \quad T_{obj}(Q^*) = \min_{Q \in ]0, \varphi^{-1}(y_1)[} \{T_{obj}(Q)\}.$$

La figure 3 illustre l'optimalité d'un tel choix.

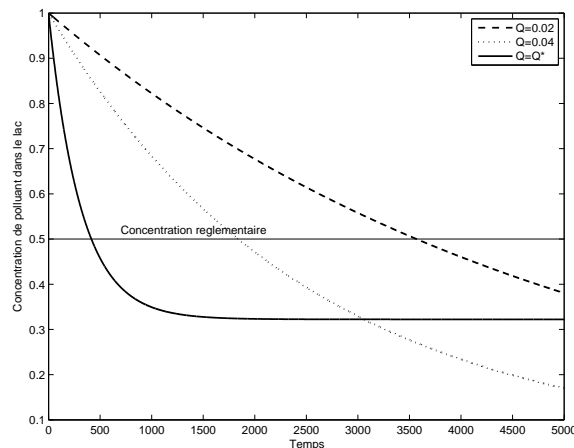


FIGURE 3. Quelques exemples d'évolution de la concentration du lac en fonction du débit, avec un schéma d'Euler explicite,  $\Delta t = 1$ , avec  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $z(0) = 1$  et  $y_{obj} = 0.5$ .

### 3.2. Débit variable

Il semblerait, par exemple en analysant la figure 3, que l'on gagne à faire varier  $Q$ . Or, l'industriel a la possibilité de faire varier le débit de ses pompes au cours du temps. On souhaite donc savoir quelle est la meilleure fonction  $t \mapsto Q(t)$ , toujours dans le but d'abaisser au plus vite la concentration en polluant sous un seuil fixé. On va tout d'abord raisonner en temps discrets afin de trouver une approximation de la fonction du temps définissant le débit optimal.

Soient donc  $z(0) > y_{obj}$  deux réels strictement positifs, et  $N \in \mathbf{N}$ . On définit la suite de seuils de pollution  $y_i$  par

$$(8) \quad y_0 = z(0),$$

$$(9) \quad y_{i+1} = y_i - \Delta y, \quad \forall 0 \leq i \leq N-1,$$

avec  $\Delta y = \frac{z(0) - y_{obj}}{N}$ . Sur chacun des intervalles  $]y_{i+1}, y_i[$ , on peut effectuer une optimisation à débit constant, comme nous l'avons vu plus haut, et obtenir un débit  $Q_i^*$  qui minimise le temps de dépollution de  $y_i$  à  $y_{i+1}$ . On peut en fait montrer que

$$(10) \quad Q_i^* = \frac{\mu}{2} y_i + O(\Delta y).$$

Cela permet donc à l'industriel de diminuer progressivement le débit de ses pompes afin d'optimiser la dépollution.

À vrai dire, on peut retrouver ce résultat en observant simplement que  $y^\infty = z/2$  est le meilleur choix de la concentration du bioréacteur pour faire baisser au plus vite la concentration du lac. On obtient alors un débit qui dépend du temps,  $Q^*(t) = \varphi^{-1}(z(t)/2)$ , qui doit toujours être la moitié du débit critique. Le problème de Cauchy issu de (5) avec un tel débit admet alors une unique solution maximale, que l'on illustre par une dernière simulation dans la figure 4.

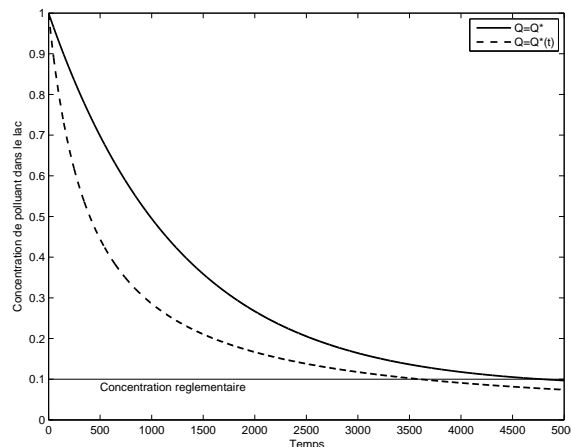


FIGURE 4. Comparaison des stratégies à débit optimal constant ou variable, avec un schéma d'Euler explicite,  $\Delta t = 1$ , avec  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $z(0) = 1$  et  $y_{obj} = 0.1$ .

Finalement, en supposant que le processus industriel permette de mesurer de façon instantanée le taux de pollution de l'eau pompée, on en déduit une stratégie industrielle optimale.

#### 4. Justification de l'approximation « lent-rapide »

On va justifier l'approximation des solutions  $x, y$  du système (2) par les équations (3). L'obtention de l'équation lente (5) est plus délicate et n'est pas discutée ici. Pour faire apparaître la dépendance en le paramètre  $\varepsilon$ , on note  $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$  les solutions de (2). Si les conditions initiales satisfont  $x_\varepsilon(0) = x_0 > 0$ ,  $y_\varepsilon(0) = y_0 > 0$  et  $z_\varepsilon(0) = z_0 > 0$ , on peut montrer que les fonctions  $x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon$  restent strictement positives au cours du temps. Les identités

$$(\varepsilon y_\varepsilon + z_\varepsilon)' = -\varepsilon \mu x_\varepsilon y_\varepsilon < 0, \quad (x_\varepsilon + y_\varepsilon)' = -Q x_\varepsilon + Q z_\varepsilon - Q y_\varepsilon \leq Q z_\varepsilon$$

montrent que  $x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon$  sont bornées sur tout compact indépendamment de  $\varepsilon$ . Il en est donc de même de leurs dérivées. À l'aide du théorème d'Ascoli, on peut donc extraire des suites  $(x_{\varepsilon_n}), (y_{\varepsilon_n})$  et  $(z_{\varepsilon_n})$  qui convergent uniformément sur tout compact vers des fonctions notées  $x, y, z$ . Pour conclure, il suffit de remarquer que nécessairement  $z' = 0$ . Le passage à la limite dans les deux premières équations fournit alors le résultat.

#### Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*
  - Argumenter la dérivation du modèle présentée succinctement dans le texte.
  - Justifier le théorème 1 dans le cas  $Q > Q_C$  (on pourra s'aider d'un portrait de phase).
  - Illustrer la dénomination « lent-rapide » avec des simulations numériques.
  - Établir la preuve de la proposition 1.
  - Proposer une méthode numérique qui permette de déterminer, en fonction des concentrations initiale et cible, le débit constant optimal évoqué dans le théorème 2.
  - Justifier et commenter le processus industriel optimal évoqué dans le paragraphe 3.
  - Détailler les arguments donnés dans le paragraphe 4.