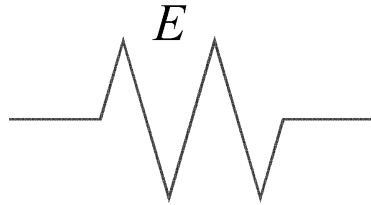


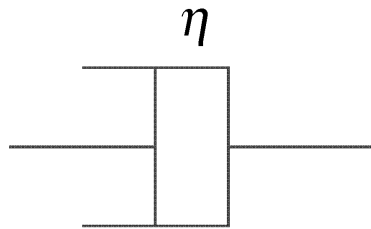
## Modèles rhéologiques élémentaires

---



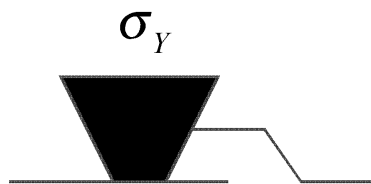
modèle rhéologique de l'énergie emmagasinée  
(élasticité ou écrouissage)

$$\sigma = E\varepsilon$$



modèle rhéologique de la viscosité

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$$



modèle rhéologique de la plasticité

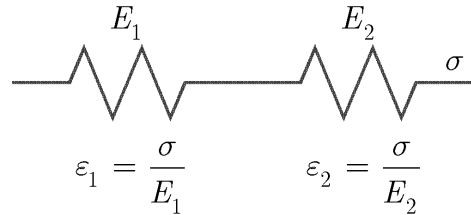
$$|\sigma| - \sigma_Y \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda} (|\sigma| - \sigma_Y) = 0$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \text{sgn}(\sigma)$$

( $\text{sgn}(\sigma) = 1$  si  $\sigma > 0$  ,  $\text{sgn}(\sigma) = -1$  si  $\sigma < 0$  )

## Assemblages

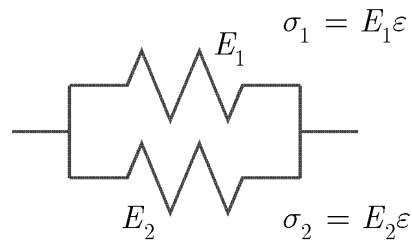
---



### assemblage en série

déformation  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

contrainte  $\sigma = \left( \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \right) \varepsilon$



### assemblage en parallèle

déformation  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E_1 + E_2}$

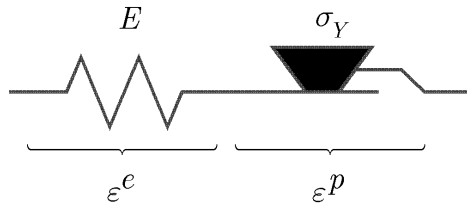
contrainte  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$

# **Modèles rhéologiques de l'élasto-plasticité**

## Modèle élastoplastique parfait

---

Plasticité parfaite=sans écrouissage



additivité des déformations

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$$

élasticité linéaire  $\sigma = E\epsilon^e$

plasticité

$$\underbrace{\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma)}_{\text{écoulement plastique}} \text{ et } \underbrace{|\sigma| - \sigma_Y \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda} (|\sigma| - \sigma_Y) = 0}_{\text{consistance plastique}}$$

### Constantes matérielles

$E$  : module d'élasticité,  $\sigma_Y$  : limite élastique

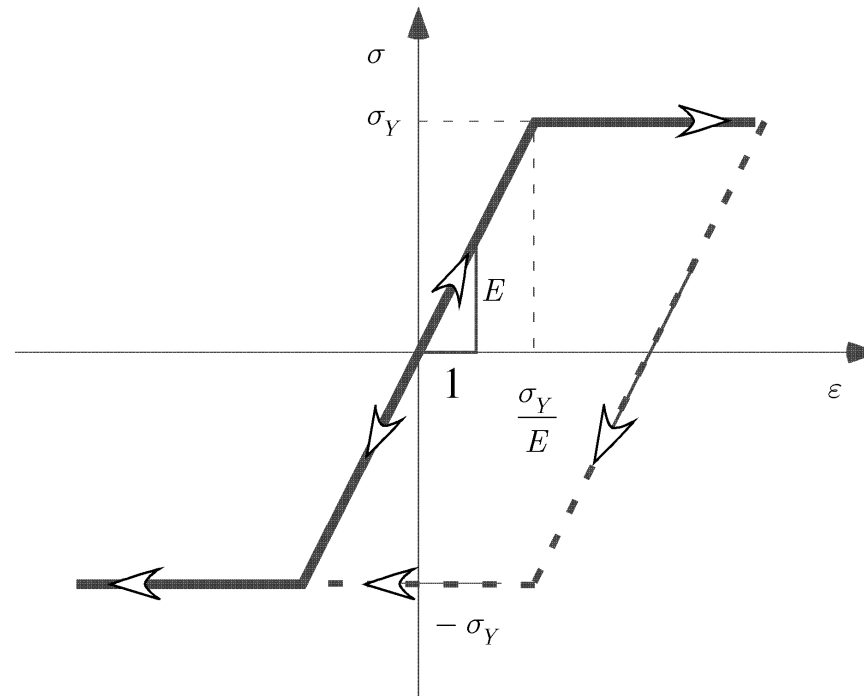
### Comportement

- si  $|\sigma| < \sigma_Y$ , alors  $\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}$ , le comportement est élastique ( $\dot{\epsilon}^p = 0$ )
- sinon  $|\sigma| = \sigma_Y$ ,  $\dot{\sigma} = 0$  et  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^p$  (indéfini), le comportement est plastique parfait

## Modèle élastoplastique parfait

---

**courbes contrainte/déformation**



Lorsque la limite élastique est atteinte, la vitesse de déformation est indéfinie

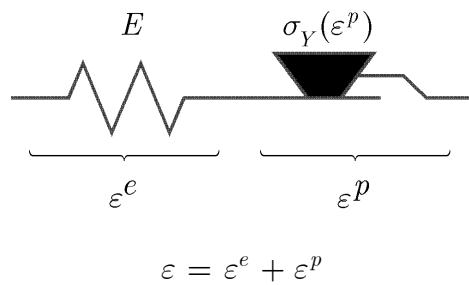
**Modèles 3D** : critères de Von-Mises ou de Tresca (métaux), critères de Drucker-Prager ou de Mohr-Coulomb (sols)

## Modèle élastoplastique avec écrouissage isotrope linéaire

---

Ecrouissage isotrope : la limite élastique évolue avec la déformation plastique cumulée

Déformation plastique cumulée :  $\varepsilon_c^p = \int_0^t \dot{\lambda} d\tau$  (remarque :  $\varepsilon_c^p > 0$ )



élasticité linéaire

$$\sigma = E\varepsilon^e$$

écrouissage isotrope linéaire

$$\sigma_Y(\varepsilon^p) = \sigma_Y^0 + H\varepsilon_c^p$$

comportement plastique

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma) \quad \text{et} \quad |\sigma| - \sigma_Y(\varepsilon^p) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} (|\sigma| - \sigma_Y(\varepsilon^p)) = 0$$

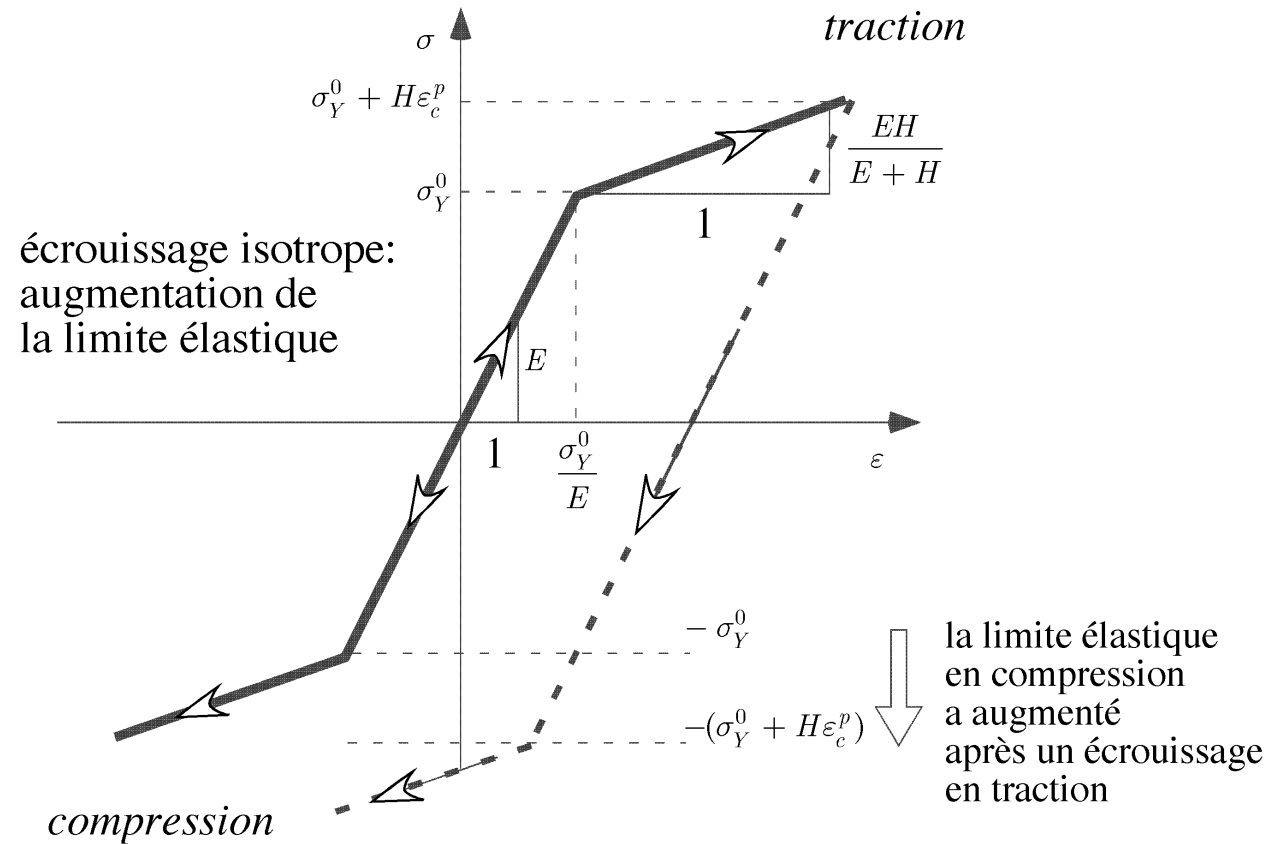
### Constantes matérielles

$E$  : module d'élasticité,  $\sigma_Y^0$  : limite élastique initiale,  $H$  : module d'écrouissage isotrope

### Comportement

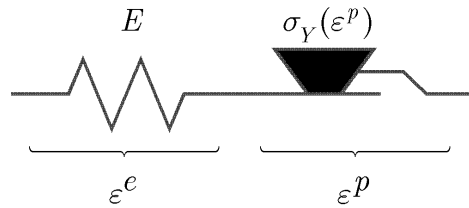
- si  $|\sigma| < \sigma_Y(\varepsilon^p)$ , alors  $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$ , le comportement est élastique ( $\dot{\varepsilon}^p = 0$ )
- sinon  $|\sigma| = \sigma_Y(\varepsilon^p)$ , et  $\dot{\sigma} = \left( \frac{EH}{E+H} \right) \dot{\varepsilon}$ , le comportement est élasto-plastique

## Modèle élastoplastique avec écrouissage isotrope linéaire



## Modèle élastoplastique avec écrouissage isotrope non linéaire

---



additivité des déformations

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

élasticité linéaire

$$\sigma = E\varepsilon^e$$

écrouissage isotrope non linéaire  $\sigma_Y(\varepsilon^p) = \sigma_Y^0 + h(\varepsilon_c^p)$

comportement plastique

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma) \quad \text{et} \quad |\sigma| - \sigma_Y(\varepsilon^p) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} (|\sigma| - \sigma_Y(\varepsilon^p)) = 0$$

### Constantes matérielles

$E$  : module d'élasticité,  $\sigma_Y^0$  : limite élastique initiale,  $H$  : module d'écrouissage isotrope

+ fonction d'écrouissage isotrope  $h(\varepsilon_c^p)$  à définir

### Comportement

- si  $|\sigma| < \sigma_Y(\varepsilon^p)$ , alors  $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$ , le comportement est élastique ( $\dot{\varepsilon}^p = 0$ )
- sinon  $|\sigma| = \sigma_Y(\varepsilon^p)$ , et  $\dot{\sigma} = \left( \frac{EH}{E+H} \right) \dot{\varepsilon}$  avec  $H = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon^p}$



## Ecrouissage isotrope limité

---

Exemple : loi d'écrouissage exponentielle  $h(\varepsilon^p) = (1 - \exp(-a\varepsilon_c^p))(\sigma_u - \sigma_Y^0)$

écriture en vitesse  $\dot{\sigma}_Y = a(\sigma_u - \sigma_Y)\dot{\lambda}$

en évolution élastoplastique  $\dot{\sigma} = \left( \frac{EH}{E + H} \right) \dot{\varepsilon}$  avec  $H = a(\sigma_u - |\sigma|)$

### Constantes matérielles d'écrouissage

$a$  : coefficient d'écrouissage isotrope,  $\sigma_u$  : contrainte ultime

Tant que  $\sigma_Y < \sigma_u$ , l'évolution est élastoplastique avec écrouissage isotrope

Lorsque  $\sigma_Y = \sigma_u$ , l'évolution est élastoplastique parfaite

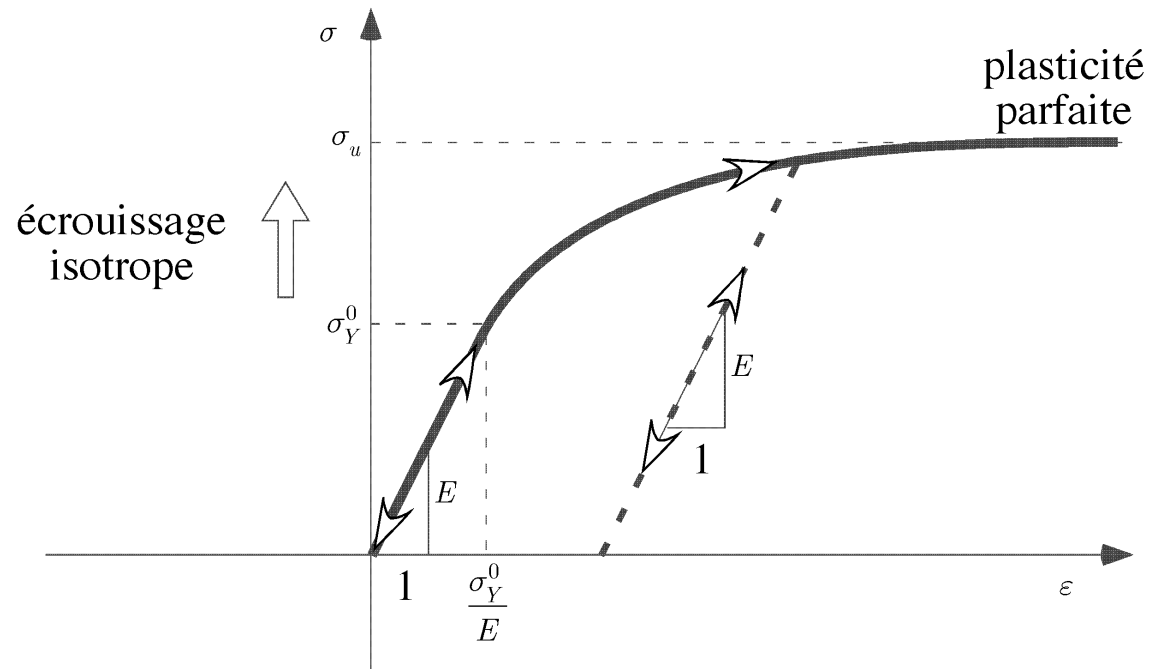
**Ecrouissage limité : la loi d'écrouissage définit implicitement une limite ultime**

**Modèle plus général** : avec un exposant  $\dot{\sigma}_Y = a(\sigma_u - \sigma_Y)^n \dot{\lambda}$

**Modèles 3D** :  $n = 1$  (modèle de Lemaître-Chaboche, métaux),  $n = 2$  (modèles Cambou/Jaffari/Sidoroff ou de Hujeux, sols)

## Écrouissage isotrope limité

---



**L'écrouissage isotrope limité est utilisé pour modéliser un comportement ductile (écrouissage) avec contrainte ultime (rupture)**

## Ecrouissage isotrope non limité

---

Exemple : loi d'écrouissage exponentielle  $h(\varepsilon^p) = (\exp(a^p \varepsilon_c^p) - 1) \sigma_Y^0$

$$\text{écriture en vitesse} \quad \dot{\sigma}_Y = a^p \sigma_Y \dot{\lambda}$$

Ce modèle est utilisé en compression ( $\sigma < 0$  et  $\varepsilon < 0$ ), avec une loi élastique non linéaire  $\dot{\sigma} = a^e (-\sigma) \dot{\varepsilon}^e$

On obtient en évolution élastoplastique  $\dot{\sigma} = (-\sigma) \left( \frac{a^e a^p}{a^e + a^p} \right) \dot{\varepsilon}$

### Constantes matérielles

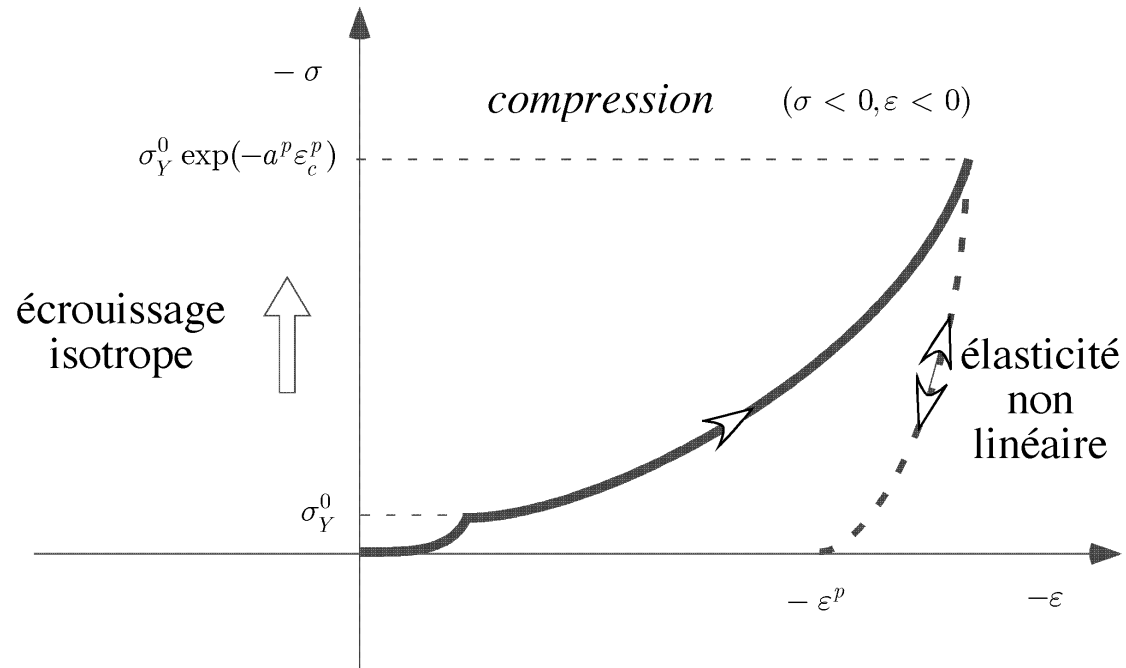
$a^e$  : coefficient d'élasticité,  $a^p$  : coefficient d'écrouissage isotrope,  $\sigma_Y^0$  : limite élastique initiale

### Ecrouissage non limité: la loi d'écrouissage définit un durcissement en compression

Modèle plus général : avec un exposant  $\dot{\sigma} = a^e (-\sigma)^n \dot{\varepsilon}^e$  et  $\dot{\sigma}_Y = a^p (\sigma_Y)^n \dot{\lambda}$

**Modèles 3D** :  $n = 1$  (modèle de Cam-Clay, sols argileux),  $n \approx 0.6$  (modèles Cambou/Jaffari/Sidoroff, sols sableux)

## Écrouissage isotrope non limité



**L'écrouissage isotrope non limité est utilisé pour modéliser un comportement ductile en compression (écrouissage) avec durcissement du matériau (densification)**

## Indices des vides

---

**L'indice des vides  $e$  est une grandeur d'usage courant en mécanique des milieux poreux (sols, bétons, roches).**

Définition	$e = \frac{\text{volume interstitiel}}{\text{volume solide}}$	$\dot{e} = \frac{\text{variation de volume interstitiel}}{\text{volume solide}}$
En grandes déformations	$e = (1 + e_0) \exp(\varepsilon_v) - 1$	$\dot{e} = (1 + e) \dot{\varepsilon}_v$
En petites déformations	$e = e_0 + (1 + e_0) \varepsilon_v$	$\dot{e} = (1 + e_0) \dot{\varepsilon}_v$

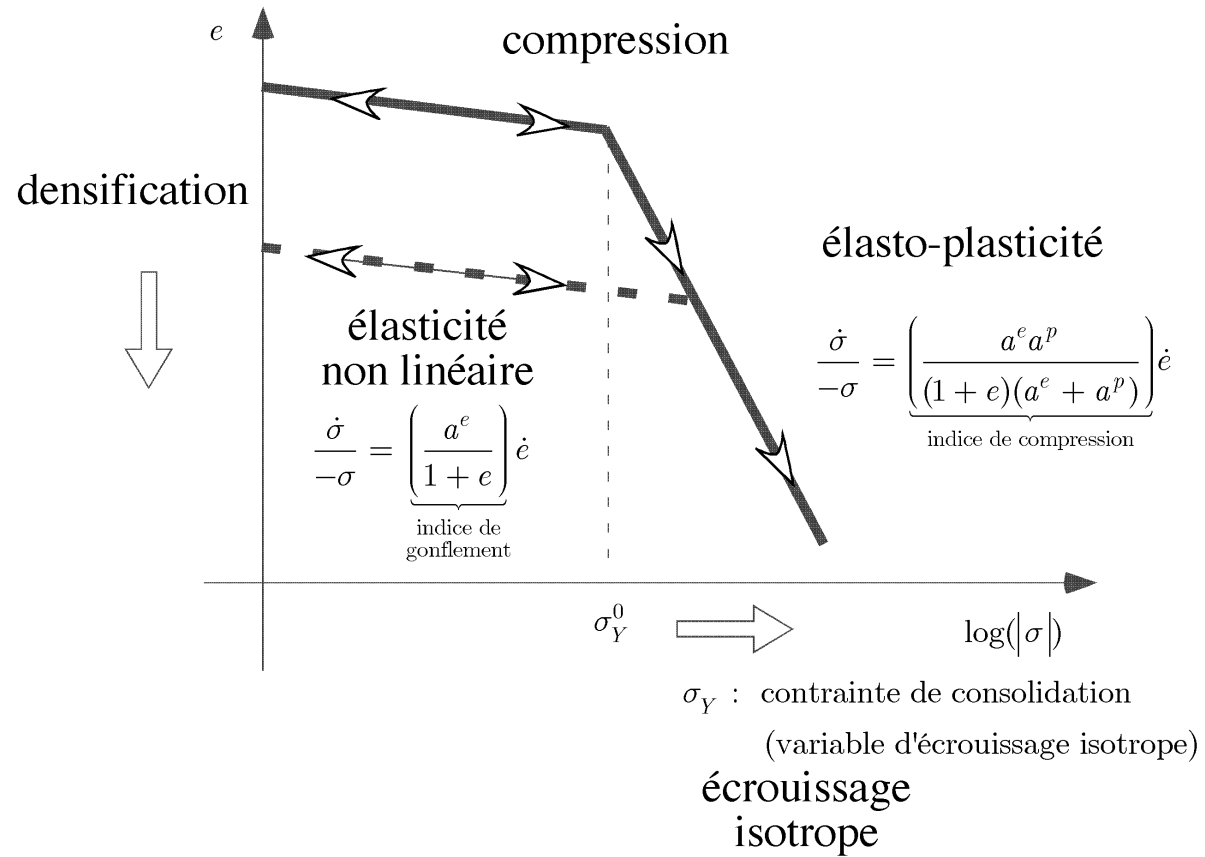
$\varepsilon_v = \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}$  : déformation volumique

$e_0$  : indices des vides à l'état initial défini par  $\varepsilon_v = 0$

**L'indice des vides est une mesure du volume interstitiel (le volume qui peut être rempli par de l'eau dans un volume de sol par exemple).**

*Sa variation reflète la variation de la déformation volumique*

## Courbe œdométrique

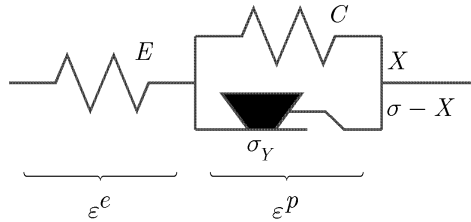


**Modèles 3D** : modèle de Cam-Clay, sols argileux

## Modèle élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire

---

Écrouissage cinématique: translation du domaine élastique



additivité des déformations

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

élasticité linéaire

$$\sigma = E\varepsilon^e$$

écrouissage cinématique linéaire  $X = C\varepsilon^p$

comportement plastique

$$|\sigma - X| - \sigma_Y \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda} (|\sigma - X| - \sigma_Y) = 0 \text{ et } \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \text{sgn}(\sigma - X)$$

### Constantes matérielles

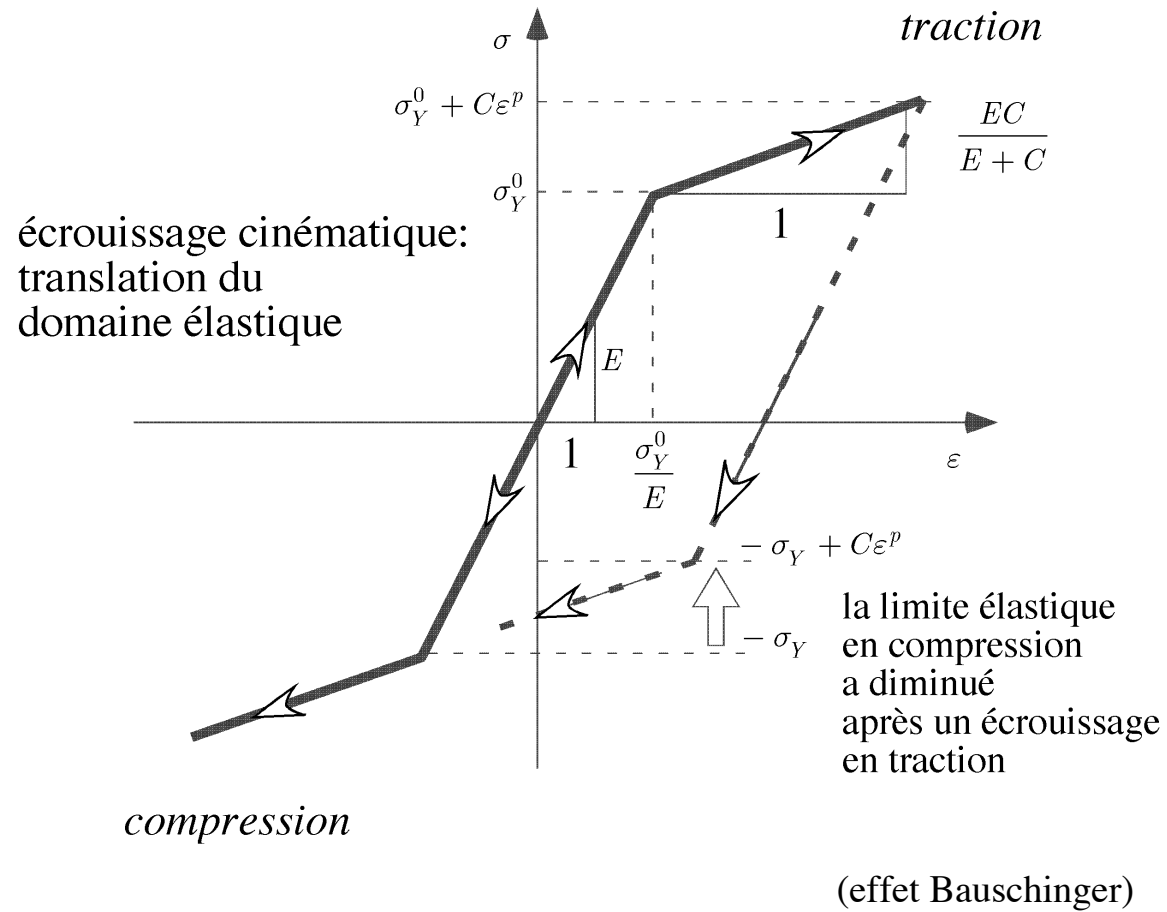
$E$  : module d'élasticité,  $\sigma_Y$  : limite élastique,  $C$  : module d'écrouissage cinématique

### Comportement

- si  $|\sigma - X| < \sigma_Y$ , alors  $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$ , le comportement est élastique ( $\dot{\varepsilon}^p = 0$ )
- sinon  $|\sigma - X| = \sigma_Y$ , soit  $\sigma = X + \sigma_Y$  en traction et  $\sigma = X - \sigma_Y$  en compression et  $\dot{\sigma} = \left( \frac{EC}{E + C} \right) \dot{\varepsilon}$ , le

comportement est élasto-plastique

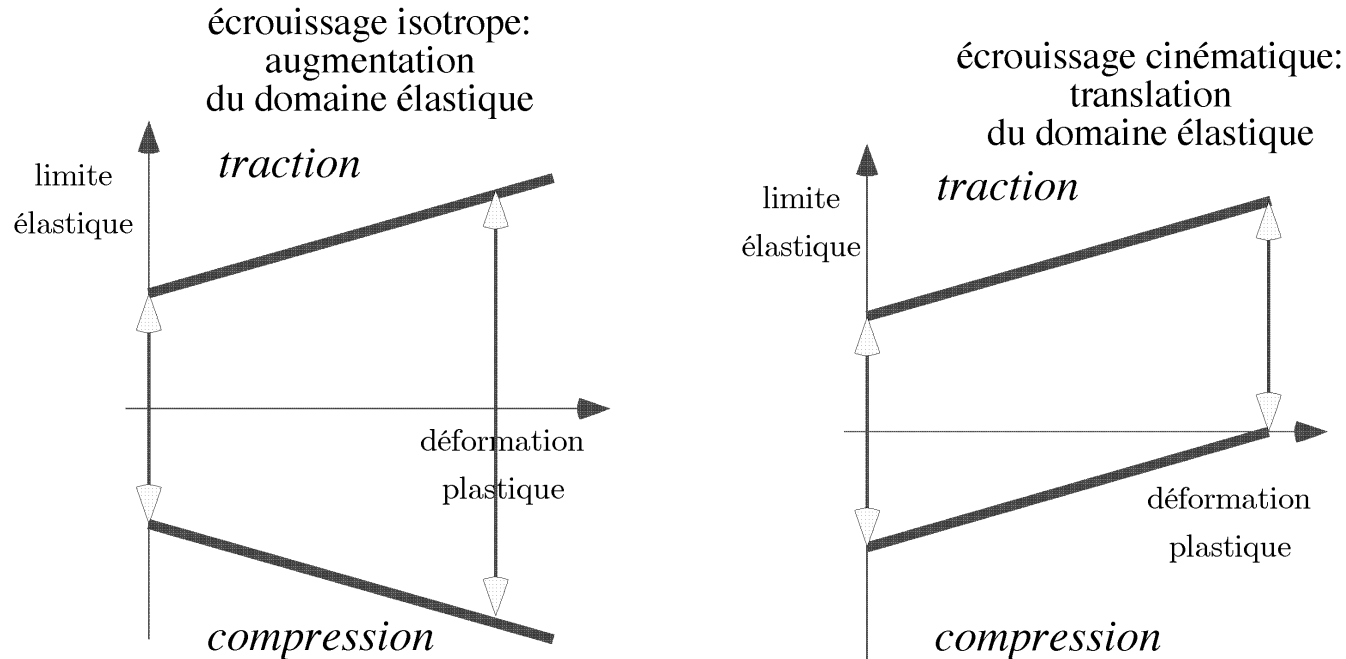
## Modèle élastoplastique avec écrouissage cinématique linéaire





## Différence entre écrouissage isotrope et écrouissage cinématique

---

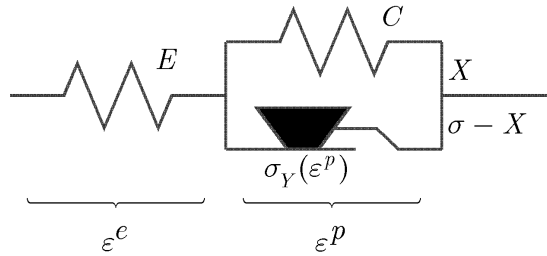


*L'écrouissage cinématique permet de rendre compte de l'effet Bauschinger (la limite élastique en compression est inférieure à la limite élastique en traction après écrouissage)*

---

Autre différence essentielle qui n'apparaît pas sur une représentation 1D telle que celle-ci : l'écrouissage isotrope est une mémoire des amplitudes des déformations plastiques (scalaire), alors que l'écrouissage cinématique est une mémoire des amplitudes **et des directions** des déformations plastiques (tensoriel)

## Modèle élastoplastique avec écrouissage isotrope et cinématique



additivité des déformations

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

loi élastique linéaire  $\sigma = E\varepsilon^e$

loi d'écrouissage isotrope  $\sigma_Y(\varepsilon^p) = \sigma_Y^0 + h(\varepsilon_c^p)$

loi d'écrouissage cinématique linéaire  $X = C\varepsilon^p$

comportement plastique  $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \text{sgn}(\sigma - X)$  et

$$|\sigma - X| - \sigma_Y(\varepsilon^p) \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda} (|\sigma - X| - \sigma_Y(\varepsilon^p)) = 0$$

### Constantes matérielles

$E$  : module d'élasticité,  $\sigma_Y^0$  : limite élastique initiale,  $C$  : module d'écrouissage cinématique

+ fonction d'écrouissage isotrope  $h(\varepsilon^p)$  à définir

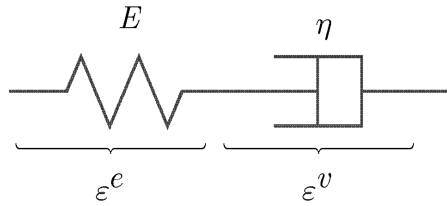
### Comportement

• si  $-\sigma_Y + X < \sigma < \sigma_Y + X$ , alors  $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$ , le comportement est élastique ( $\dot{\varepsilon}^p = 0$ )

• si  $|\sigma - X| = \sigma_Y$ , alors  $\dot{\sigma} = \left( \frac{E(C + H)}{E + C + H} \right) \dot{\varepsilon}$  avec  $H = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon^p}$

# **Modèles rhéologiques de la visco-élasticité**

## Modèle viscoélastique de Maxwell (fluide)



additivité des déformations

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v$$

loi élastique linéaire  $\sigma = E\varepsilon^e$

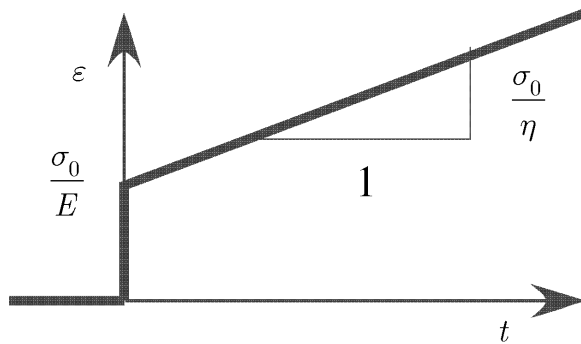
loi visqueuse linéaire  $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}^v$

modèle de Maxwell  $\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{T} = E\dot{\varepsilon}$

avec  $T = \frac{\eta}{E}$  (temps caractéristique)

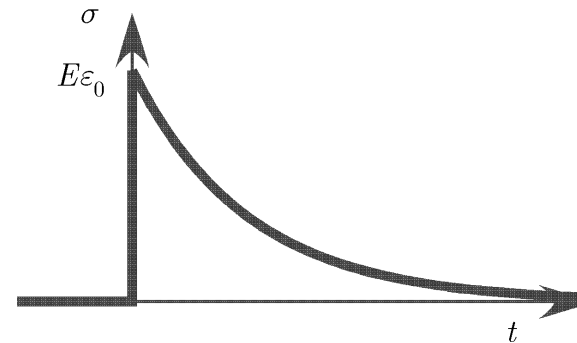
*Fluage à contrainte constante*  $\sigma = \sigma_0\Upsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 + \frac{t}{T} \right)$$

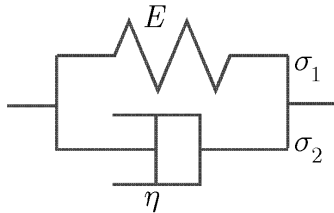


*Relaxation à déformation constante*  $\varepsilon = \varepsilon_0\Upsilon(t)$

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$



## Modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt (solide)



additivité des contraintes

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

loi élastique linéaire  $\sigma_1 = E\varepsilon$

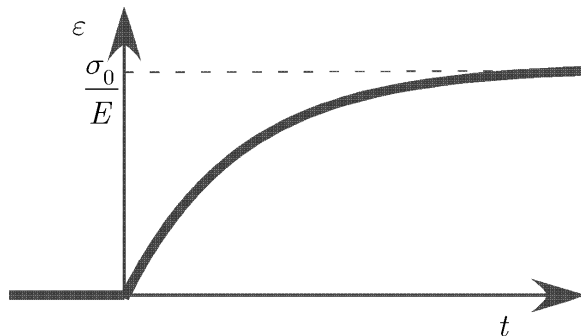
loi visqueuse linéaire  $\sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}$

modèle de Kelvin-Voigt  $\sigma = E(\varepsilon + T\dot{\varepsilon})$

avec  $T = \frac{\eta}{E}$  (temps caractéristique)

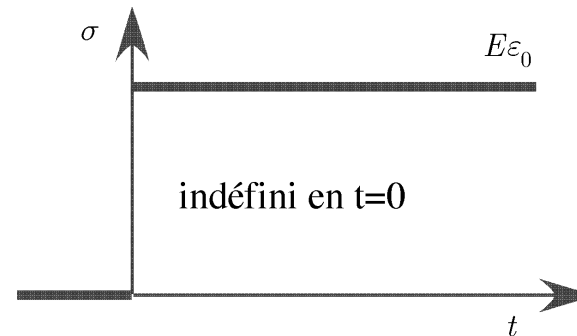
*Fluage à contrainte constante*  $\sigma = \sigma_0\Upsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right]$$

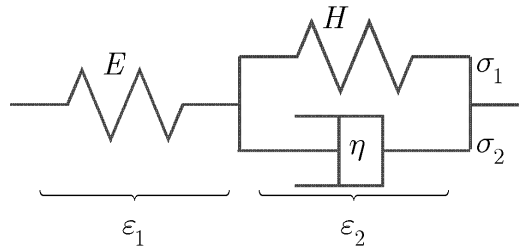


*Relaxation à déformation constante*  $\varepsilon = \varepsilon_0\Upsilon(t)$

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 (\Upsilon(t) + T\delta(t))$$



## Modèle viscoélastique de Zener



additivité

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\sigma_1 = H\varepsilon_2, \quad \sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}_2, \quad \sigma = E\varepsilon_1$$

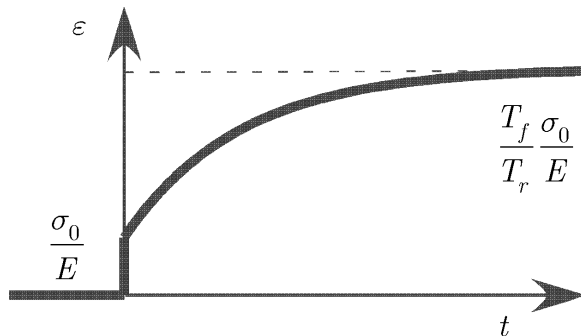
modèle de Zener  $\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{T_r} = E \left( \dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{T_f} \right)$

temps caractéristiques  $T_r < T_f$

$$T_r = \frac{\eta}{E + H} \text{ (relaxation)}, \quad T_f = \frac{\eta}{H} \text{ (fluage)}$$

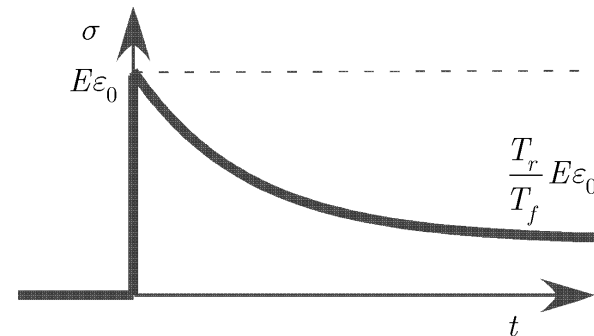
*Fluage*  $\sigma = \sigma_0 \Upsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left\{ \frac{T_f}{T_r} - \left( \frac{T_f}{T_r} - 1 \right) \exp\left(-\frac{t}{T_f}\right) \right\}$$

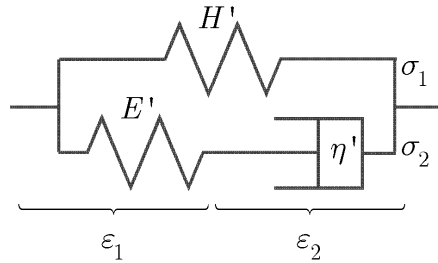


*Relaxation*  $\varepsilon = \varepsilon_0 \Upsilon(t)$

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \left[ \frac{T_r}{T_f} + \left( 1 - \frac{T_r}{T_f} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_r}\right) \right]$$



## Modèle viscoélastique de Zener



additivité

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\sigma_1 = H' \varepsilon, \quad \sigma_2 = E' \varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \eta' \dot{\varepsilon}_2$$

modèle de Zener

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{T_r} = E \left( \dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{T_f} \right)$$

avec  $E = E' + H'$

temps caractéristiques  $T_r < T_f$

$$T_r = \frac{\eta'}{E'} \text{ (relaxation)}, \quad T_f = \eta' \left( \frac{1}{E'} + \frac{1}{H'} \right) \text{ (fluage)}$$

Les deux représentations du modèle de Zener sont équivalentes.

Correspondances :  $\frac{1}{H'} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H}$ ,  $\frac{E'}{H'} = \frac{E}{H}$  et  $\frac{\eta}{E+H} = \frac{\eta'}{E'}$

Le modèle de Zener est parfois appelé Modèle Linéaire Standard (ou SLM : Standard Linear Model)

## Transformée de Laplace

Toutes les fonctions du temps considérées sont causales :  $f(t) = 0$  si  $t < 0$

*Définition de la transformée de Laplace*

$$\underbrace{f(t)}_{\substack{\text{fonction} \\ \text{du temps } t}} \xrightarrow{\text{transformée de Laplace}} \underbrace{\hat{f}(s)}_{\substack{\text{fonction du nombre complexe} \\ s = \text{Re}(s) + \text{Im}(s)i}} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

### Quelques propriétés utiles

- linéarité :  $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \mapsto a_1 \hat{f}_1(s) + a_2 \hat{f}_2(s)$
- théorème de la valeur initiale :  $\lim_{\tau \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s)$  , théorème de la valeur finale :  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{f}(s)$
- transformée de la dérivée temporelle
  - $f(t)$  continue (sauf en 0) :  $\dot{f} \mapsto s \hat{f} - f(0^+)$  où  $f(0^+) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} f(\tau)$
  - $f(t)$  continue sauf en  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n\}$  :  $\dot{f} \mapsto s \hat{f} - \sum_{k=0}^n \exp(-st_k) \llbracket f(t_k) \rrbracket$   
 où  $\llbracket f(t_k) \rrbracket = f(t_k^+) - f(t_k^-)$  est le saut de  $f$  en  $t_k$

### Propriété essentielle de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace d'une équation différentielle linéaire est une équation linéaire ordinaire

$$y + ay = bx + cx \mapsto (1 + as)\hat{y} = (b + cs)\hat{x} + \text{termes de discontinuités}$$



## Dirac et Heaviside

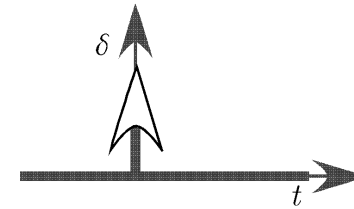
---

### Distribution de Dirac, appelée aussi impulsion ou pic

Notation :  $\delta(t)$  Définition :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$

Propriétés : pour toute fonction continue  $f(t)$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) f(\tau) d\tau = f(0)$

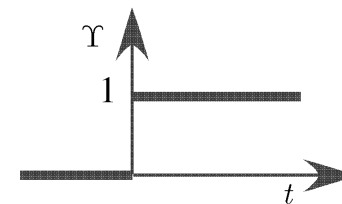
et plus généralement  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t) f(\tau) d\tau = f(t)$



### Distribution de Heaviside, appelée aussi échelon unitaire ou marche unitaire

Notation :  $\Upsilon(t)$  Définition :  $\Upsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Relation avec le Dirac :  $\delta(t) = \dot{\Upsilon}(t)$



## Produit de convolution

*Définition d'un produit de convolution* :  $(a * b)(t) = \int_{-\infty}^t a(t - \tau)b(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} a(\tau)b(t - \tau)d\tau$

*Propriété essentielle de la transformée de Laplace*

La transformée de Laplace d'un produit de convolution de fonctions causales est un produit ordinaire

$$a * b \mapsto \hat{a}\hat{b}$$

*Quelques résultats*

Pour des fonctions causales  $a(t)$  et  $b(t)$  :  $\int_0^t a(t - \tau)b(\tau)d\tau = (a * b)(t) = (b * a)(t) = \int_0^t b(t - \tau)a(\tau)d\tau$

Convolution avec un Dirac en zéro :  $(a * \delta)(t) = a(t)$  , en  $t_1$  :  $a(t) * \delta(t - t_1) = a(t - t_1)$

Convolution avec un échelon :  $(a * \Upsilon)(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$

Convolution avec un sinus :  $a(t) * \sin \omega t = g \sin(\omega t + \phi)$  avec  $g = \underbrace{|\hat{a}(i\omega)|}_{\substack{\text{norme d'un} \\ \text{nombre complexe}}}$  et  $\tan \phi = \frac{\text{Im}[\hat{a}(i\omega)]}{\text{Re}[\hat{a}(i\omega)]}$

## Fonction fluage d'un matériau visco-élastique

---

On considère une sollicitation causale en contrainte  $\sigma(t) = 0$  si  $t < 0$  et on note  $\sigma_0 = \sigma(0^+)$

On suppose que la réponse en déformation est de la forme  $\varepsilon(t) = (h * \sigma)(t)$

Introduction de la fonction de fluage :

$$\underbrace{h(t)}_{\substack{\text{réponse} \\ \text{impulsionnelle} \\ \text{en déformation}}} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\Upsilon(t)}_{\substack{\text{échelon} \\ \text{par} \\ \text{causalité}}} \underbrace{F(t)}_{\substack{\text{fonction} \\ \text{de fluage}}} \end{array} \right\}$$

or  $h(t) = \delta(t)F(t) + \Upsilon(t)\dot{F}(t)$ ,  $\int_{-\infty}^t \delta(t-\tau)F(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau = F(0)\sigma(t)$  et  $\int_{-\infty}^t \Upsilon(t-\tau)\dot{F}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau = \int_{0^+}^t \dot{F}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau$

donc  $\boxed{\varepsilon(t) = (\dot{F} * \sigma)(t) + F(0)\sigma(t)}$  où  $(\dot{F} * \sigma)(t) = \int_{0^+}^t \dot{F}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau$

soit  $\varepsilon(t) = \left( \frac{\partial(\Upsilon F)}{\partial t} \otimes \sigma \right)(t)$

avec  $\left( \frac{\partial(\Upsilon F)}{\partial t} \otimes \sigma \right)(t) = \int_{0^+}^t \dot{F}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau + \llbracket \Upsilon(0)F(0) \rrbracket \sigma(t)$  (produit de convolution généralisé)

La réponse instantanée est  $\varepsilon(0) = F(0)\sigma_0$

## Fonction fluage d'un matériau visco-élastique (suite)

---

Si  $\sigma(t)$  est différentiable (sauf en 0), par intégration par parties :

$$\int_{0^+}^t \dot{F}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau = (F * \dot{\sigma})(t) - F(0)\sigma(t) + F(t)\sigma(0^+) \quad \text{où} \quad (F * \dot{\sigma})(t) = \int_{0^+}^t F(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau$$

Il vient  $\boxed{\varepsilon(t) = (F * \dot{\sigma})(t) + F(t)\sigma_0}$  soit  $\varepsilon(t) = (F \otimes \dot{\sigma})(t)$

avec  $(F \otimes \dot{\sigma})(t) = \int_{0^+}^t F(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau + \llbracket \sigma(0) \rrbracket F(t)$  (produit de convolution généralisé)

La fonction fluage  $F(t)$  est la réponse en déformation à un échelon unitaire de contrainte  $\sigma(t) = \sigma_0 \Upsilon(t)$

---

Si  $\sigma(t)$  est différentiable sauf en  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n\}$ , il vient  $\varepsilon(t) = (F \otimes \dot{\sigma})(t)$

avec  $(F \otimes \dot{\sigma})(t) = \sum_{k=0}^n \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau + \llbracket \sigma(t_k) \rrbracket F(t-t_k)\Upsilon(t-t_k) \right\}$  en posant  $t_{n+1} = t$

La transformée de Laplace est  $\hat{\varepsilon}(s) = \hat{F}(s)\{s\hat{\sigma}(s)\}$

De manière générale, la fonction fluage peut être définie par  $\boxed{\hat{F}(s) = \frac{\hat{\varepsilon}(s)}{s\hat{\sigma}(s)}}$

## Fonction relaxation d'un matériau visco-élastique

---

Compte-tenu des résultats précédents, pour une évolution causale en déformation  $\varepsilon(t) = 0$  si  $t < 0$  (on note  $\varepsilon_0 = \varepsilon(0^+)$ ),

la réponse en contrainte est  $\sigma(t) = (\dot{R} * \varepsilon)(t) + R(0)\varepsilon(t)$  où  $R(t)$  est la fonction de relaxation.

Si  $\varepsilon(t)$  est différentiable (sauf en 0) alors  $\sigma(t) = (R * \dot{\varepsilon})(t) + R(t)\varepsilon_0$

La réponse instantanée est  $\sigma(0) = R(0)\varepsilon_0$

La fonction relaxation est la réponse en contrainte à un échelon unitaire de déformation  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \Upsilon(t)$

---

Si  $\varepsilon(t)$  est différentiable sauf en  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n\}$ , il vient  $\sigma(t) = (R \otimes \dot{\varepsilon})(t)$

avec  $(R \otimes \dot{\varepsilon})(t) = \sum_{k=0}^n \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} R(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau + \llbracket \varepsilon(t_k) \rrbracket R(t - t_k) \Upsilon(t - t_k) \right\}$  en posant  $t_{n+1} = t$

De manière générale, la fonction relaxation peut être définie par  $\hat{R}(s) = \frac{\hat{\sigma}(s)}{s\hat{\varepsilon}(s)}$

## Fonctions fluages et relaxation, résultats généraux

---

Récapitulation :  $\varepsilon(t) = (F \otimes \dot{\sigma})(t)$  et  $\sigma(t) = (R \otimes \dot{\varepsilon})(t)$  (produit de convolution généralisé)

Si  $\sigma(t)$  et  $\varepsilon(t)$  sont différentiables (sauf en 0) :  $\varepsilon(t) = (F * \dot{\sigma})(t) + F(t)\sigma_0$  et  $\sigma(t) = (\dot{R} * \varepsilon)(t) + R(0)\varepsilon(t)$

Les fonctions  $F$  et  $R$  vérifient  $\hat{F}(s) = \frac{\hat{\varepsilon}(s)}{s\hat{\sigma}(s)}$  ,  $\hat{R}(s) = \frac{\hat{\sigma}(s)}{s\hat{\varepsilon}(s)}$  ,  $\hat{F}(s)\hat{R}(s)s^2 = 1$

La fonction fluage  $F(t)$  est la réponse en déformation à un échelon unitaire de contrainte  $\sigma(t) = \sigma_0\Upsilon(t)$

La fonction relaxation est la réponse en contrainte à un échelon unitaire de déformation  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\Upsilon(t)$

Du théorème de la valeur initiale, on déduit la réponse instantanée (court terme)

$$\sigma(t=0) = E_0\varepsilon(t=0) \text{ avec } E_0 = R(t=0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\hat{R}(s) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow \infty} s\hat{F}(s)} = \frac{1}{F(t=0)}$$

Du théorème de la valeur finale, on déduit la réponse à l'infini (long terme)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = E_\infty \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \text{ avec } E_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{R}(s) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s\hat{F}(s)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)}$$

## Quelques transformées de Laplace

$f(t)$	$\hat{f}(s)$	$f(t)$	$\hat{f}(s)$
$\delta(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$	$t$	$\frac{1}{s^2}$
$\delta(t)$	1	$t^2$	$\frac{2}{s^3}$
$\Upsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{\alpha + s}$
$\Upsilon(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{s(\alpha + s)}$
$\Upsilon(t - \tau) g(t - \tau)$	$e^{-\tau s} \hat{g}(s)$	$\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha^2}{s^2(\alpha + s)}$
$\frac{t}{t_1} \Upsilon(t_1 - t) + \Upsilon(t - t_1)$	$\frac{1 - \exp(-st_1)}{s^2 t_1}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{\omega^2 + s^2}$
		$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$

## Application au modèle viscoélastique de Maxwell

---

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{T} = E\dot{\varepsilon} \mapsto \left(s + \frac{1}{T}\right)\hat{\sigma} = sE\hat{\varepsilon}$$

*Fonction fluage*

$$F(t) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{t}{T}\right) \quad , \quad \hat{F}(s) = \frac{1}{sE} \left(1 + \frac{1}{sT}\right)$$

*Fonction relaxation*

$$R(t) = E \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \quad , \quad \hat{R}(s) = \frac{ET}{1 + sT}$$

*Module instantané* :  $E_0 = E$

*Module à long terme* :  $E_\infty = 0$

Le modèle de Maxwell est bien un modèle de fluide : aucun charge constante n'est supportée



## Application au modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt

---

$$\sigma = E(\varepsilon + T\dot{\varepsilon}) \mapsto \hat{\sigma} = E(1 + Ts)\hat{\varepsilon}$$

*Fonction fluage*

$$F(t) = \frac{1}{E} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right\}, \quad \hat{F}(s) = \frac{1}{sE(1 + Ts)}$$

*Fonction relaxation*

$$R(t) = E(1 + T\delta(t)), \quad \hat{R} = E\left(T + \frac{1}{s}\right)$$

*Module instantané* :  $E_0 = \infty$

*Module à long terme* :  $E_\infty = E$

Le modèle de Kelvin-Voigt est un modèle de solide sans élasticité instantanée : aucune déformation instantanée n'est possible

## Application au modèle viscoélastique de Zener

---

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{T_r} = E \left( \dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{T_f} \right) \hat{\mapsto} \left( s + \frac{1}{T_r} \right) \hat{\sigma} = E \left( s + \frac{1}{T_f} \right) \hat{\varepsilon}$$

*Fonction fluage*

$$F(t) = \frac{1}{E} \left[ \frac{T_f}{T_r} - \left( \frac{T_f}{T_r} - 1 \right) \exp \left( -\frac{t}{T_f} \right) \right] \quad , \quad \hat{F}(s) = \frac{T_f}{ET_r s} \left( \frac{1 + sT_r}{1 + sT_f} \right)$$

*Fonction relaxation*

$$R(t) = E \left[ \frac{T_r}{T_f} + \left( 1 - \frac{T_r}{T_f} \right) \exp \left( -\frac{t}{T_r} \right) \right] \quad , \quad \hat{R}(s) = \frac{ET_r}{T_f s} \left( \frac{1 + sT_f}{1 + sT_r} \right)$$

*Module instantané* :  $E_0 = E$

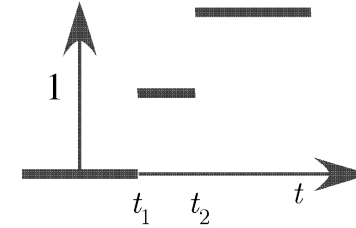
*Module à long terme*:  $E_\infty = E \frac{T_r}{T_f}$

Le modèle de Zener est un modèle de solide avec élasticité instantanée, avec  $E_\infty < E_0$

## Exemples de sollicitations : 2 échelons

Deux échelons successifs

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ 1 & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ 2 & \text{si } t_2 < t \end{cases}$$



$$f(t) = \Upsilon(t - t_1) + \Upsilon(t - t_2) \quad \hat{\mapsto} \quad \hat{f}(s) = \frac{1}{s} \{ \exp(-st_1) + \exp(-st_2) \}$$

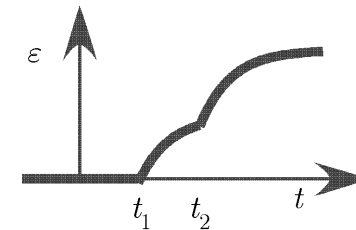
Deux échelons de contrainte successifs

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ \sigma_0 & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ 2\sigma_0 & \text{si } t_2 < t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ \sigma_0 F(t - t_1) & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ \sigma_0 \{ F(t - t_1) + F(t - t_2) \} & \text{si } t_2 < t \end{cases}$$

Exemple : avec le modèle de Kelvin-Voigt

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ \frac{\sigma_0}{E} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t - t_1}{T}\right) \right\} & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ \frac{2\sigma_0}{E} \left\{ 1 - \beta \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right\} & \text{si } t_2 < t \end{cases}$$

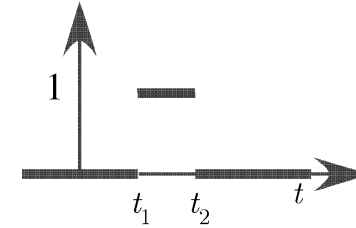
$$\text{avec } \beta = \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(\frac{t_1}{T}\right) + \exp\left(\frac{t_2}{T}\right) \right\}$$



## Exemples de sollicitations : créneau

Créneau

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ 1 & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{si } t_2 < t \end{cases}$$



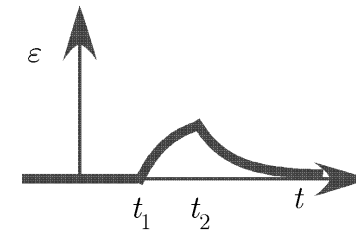
$$f(t) = \Upsilon(t - t_1) - \Upsilon(t - t_2) \quad \hat{\mapsto} \quad \hat{f}(s) = \frac{1}{s} \{ \exp(-st_1) - \exp(-st_2) \}$$

Un créneau de contrainte

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ \sigma_0 & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{si } t_2 < t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ \sigma_0 F(t - t_1) & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ \sigma_0 \{ F(t - t_1) - F(t - t_2) \} & \text{si } t_2 < t \end{cases}$$

Exemple : avec le modèle de Kelvin-Voigt

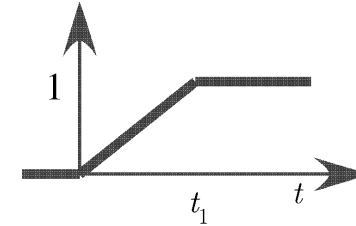
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ \frac{\sigma_0}{E} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t - t_1}{T}\right) \right\} & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ \frac{\sigma_0}{E} \left\{ \exp\left(-\frac{t - t_2}{T}\right) - \exp\left(-\frac{t - t_1}{T}\right) \right\} & \text{si } t_2 < t \end{cases}$$



## Exemples de sollicitations : rampe puis plateau

Rampe puis plateau

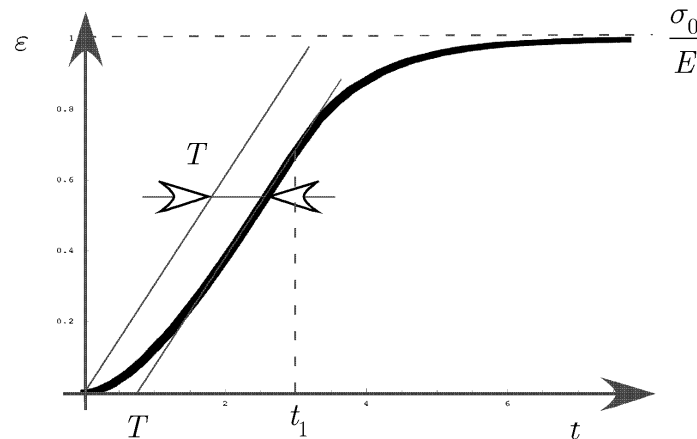
$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_1} & \text{si } t < t_1 \\ 1 & \text{si } t_1 < t \end{cases}$$



$$f(t) = \frac{t}{t_1} \Upsilon(t_1 - t) + \Upsilon(t - t_1) \quad \mapsto \quad \hat{f}(s) = \frac{1 - \exp(-st_1)}{s^2 t_1}$$

Exemple : avec le modèle de Kelvin-Voigt , une rampe puis un plateau de contrainte

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_1} \sigma_0 & \text{si } t < t_1 \\ \sigma_0 & \text{si } t_1 < t \end{cases} \rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{Et_1} \left\{ t - T(1 - e^{-t/T}) + \Upsilon(t - t_1) \left( t_1 - t + T(1 - e^{-(t-t_1)/T}) \right) \right\}$$

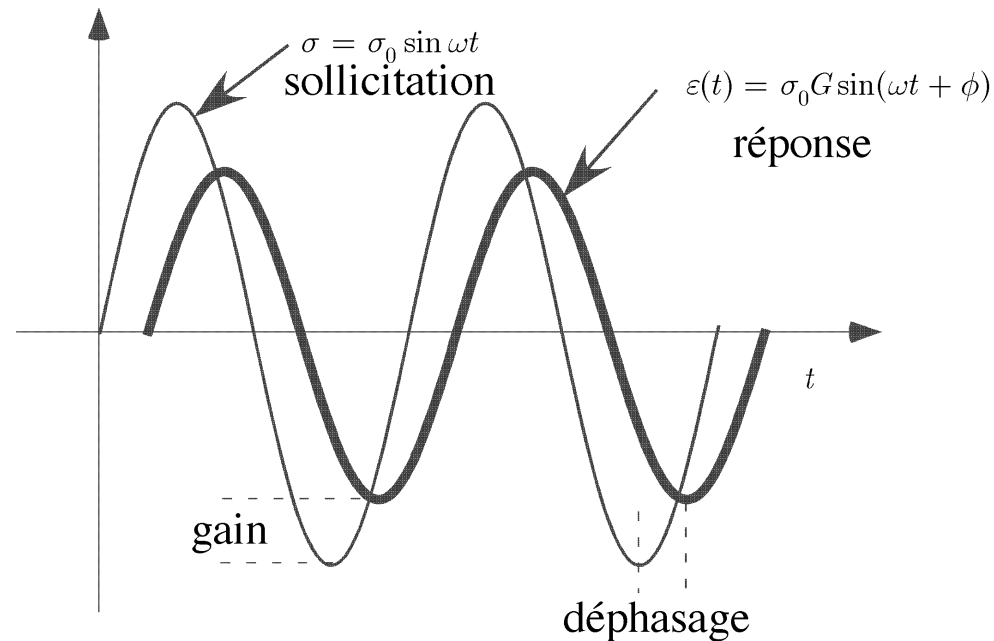


## Analyse harmonique

---

Si  $\varepsilon(t) = F(t) * \dot{\sigma}(t)$  et si la sollicitation en contrainte est cyclique  $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$ , alors la réponse en déformation est également cyclique en régime permanent (accommodation), avec un gain  $G$  et un déphasage  $\phi$

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 G \sin(\omega t + \phi) \quad \text{avec} \quad G = \underbrace{|sF(i\omega)|}_{\substack{\text{norme d'un} \\ \text{nombre complexe}}} \quad \text{et} \quad \tan \phi = \frac{\text{Im}[sF(i\omega)]}{\text{Re}[sF(i\omega)]}$$



## Analyse harmonique

---

Exemple : sollicitation cyclique en contrainte du modèle de Kelvin-Voigt

Fonction fluage  $F(t) = \frac{1}{E} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right\}$

Sollicitation  $\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t$

Réponse  $\varepsilon(t) = \underbrace{\frac{\sigma_0 G \sin(\omega t + \phi)}{E}}_{\text{régime permanent}} - \underbrace{\frac{\sigma_0 G^2 e^{-t/T}}{E}}_{\text{transitoire}}$

avec  $G = \frac{1}{E\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$  et  $\tan \phi = -\omega T$

## Analyse harmonique

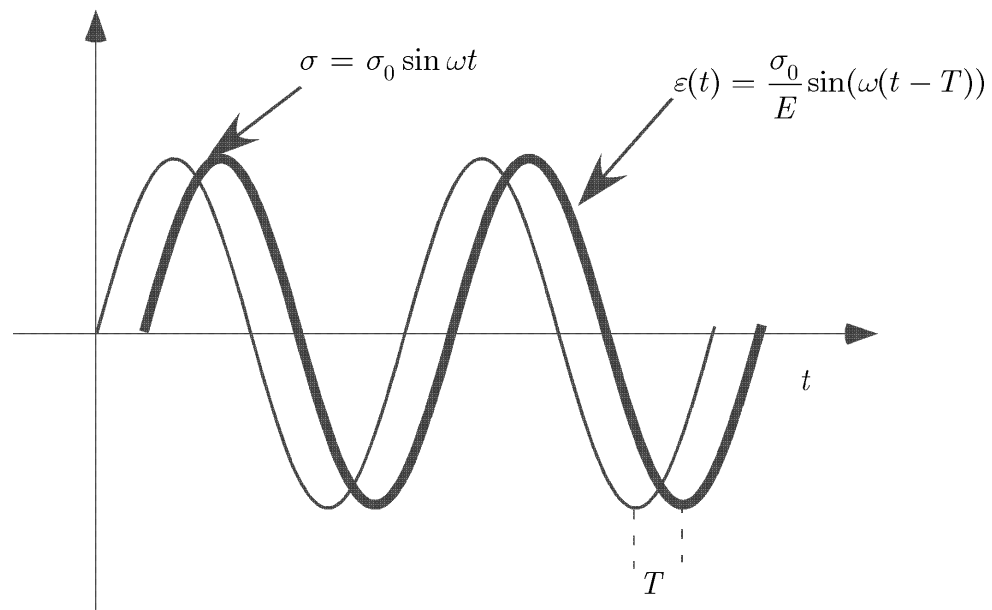
---

Sollicitation cyclique en contrainte du modèle de Kelvin-Voigt

Si la sollicitation est « lente » ( $\omega T \ll 1$ ),

alors  $g \approx 1 / E$  et  $\phi \approx -\omega T$ , soit  $\varepsilon(t) \approx \frac{\sigma_0}{E} \sin(\omega(t - T))$

$T$  est le retard entre sollicitation et réponse : c'est un moyen expérimental possible d'identifier  $T$





## Analyse harmonique

---

Exemple : sollicitation cyclique en contrainte du modèle de Zener

Fonction fluage  $F(t) = \frac{1}{E} \left\{ \frac{T_f}{T_r} - \left( \frac{T_f}{T_r} - 1 \right) \exp \left( -\frac{t}{T_f} \right) \right\}$

Sollicitation  $\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t$

Réponse  $\varepsilon(t) = \sigma_0 G \sin(\omega t + \phi)$  (régime permanent)

avec  $G = \frac{T_f}{ET_r} \sqrt{\frac{1 + (\omega T_r)^2}{1 + (\omega T_f)^2}}$  et  $\tan \phi = -\frac{\omega(T_f - T_r)}{1 + \omega^2 T_f T_r}$

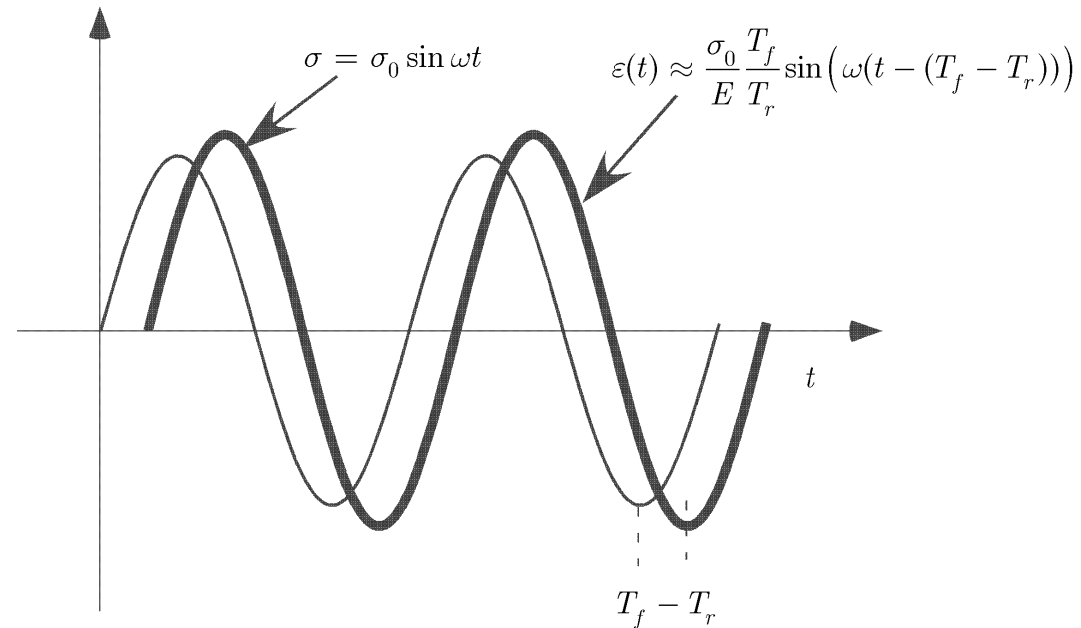
## Analyse harmonique

---

Sollicitation cyclique en contrainte du modèle de Zener

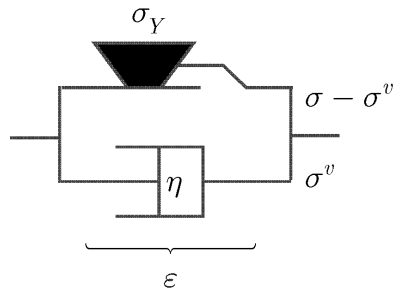
Si la sollicitation est « lente » ( $\omega T_f \ll 1$ ),

alors  $g \approx \frac{T_f}{ET_r}$  et  $\phi \approx -\omega(T_f - T_r)$ , soit  $\varepsilon(t) \approx \frac{\sigma_0 T_f}{E T_r} \sin(\omega(t - (T_f - T_r)))$



**Modèles rhéologiques**  
**en**  
**visco-plasticité**  
**et élasto-visco-plasticité**

## Modèle viscoplastique de Bingham



viscosité linéaire  $\sigma^v = \eta \dot{\epsilon}$

plasticité

$$\dot{\epsilon} = \dot{\lambda} \text{sgn}(\sigma - \sigma^v) \quad \text{et} \quad |\sigma - \sigma^v| - \sigma_Y \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} (|\sigma - \sigma^v| - \sigma_Y) = 0$$

**Constantes matérielles :**  $\sigma_Y$  : limite élastique ,  $\eta$  : viscosité

### Comportement

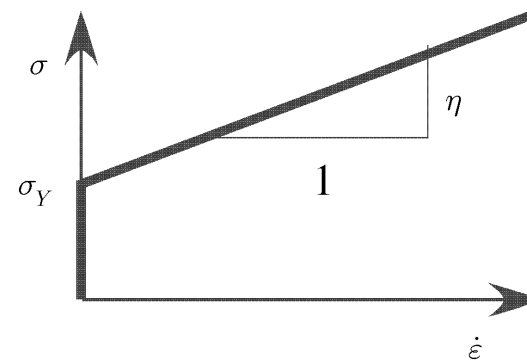
- si  $|\sigma| < \sigma_Y$ , alors  $\dot{\epsilon} = 0$  (rigide)
- si  $|\sigma| \geq \sigma_Y$ , alors  $\dot{\epsilon} = \frac{1}{\eta} (|\sigma| - \sigma_Y)$  (visqueux)

### Formulation équivalente du comportement

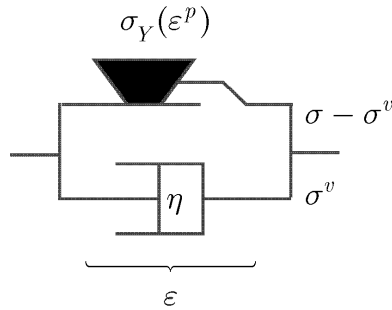
On pose  $\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\langle f(\sigma) \rangle}{\eta} \text{sgn}(\sigma) \quad \text{avec} \quad f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y : \text{le modèle de Bingham est une loi de Newton à seuil !}$$

Avec un exposant  $\dot{\epsilon} = \left\langle \frac{f(\sigma)}{\eta} \right\rangle^n \text{sgn}(\sigma)$ , on obtient le modèle de Herschel-Bulkley (loi de Norton à seuil)



## Bingham avec écrouissage isotrope



viscosité linéaire

$$\sigma^v = \eta \dot{\varepsilon}$$

écrouissage isotrope linéaire

$$\sigma_Y(\varepsilon^p) = \sigma_Y^0 + H \varepsilon_c^{vp} \quad , \quad \varepsilon_c^{vp} = \int_0^t \dot{\lambda} d\tau$$

plasticité

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \text{sgn}(\sigma - \sigma^v) \quad \text{et} \quad |\sigma - \sigma^v| - \sigma_Y(\varepsilon^p) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} (|\sigma - \sigma^v| - \sigma_Y(\varepsilon^p)) = 0$$

### Constantes matérielles :

$\sigma_Y^0$  limite élastique initiale ,  $H$  module d'écrouissage isotrope ,  $\eta$  viscosité ( $T = \frac{\eta}{H}$ )

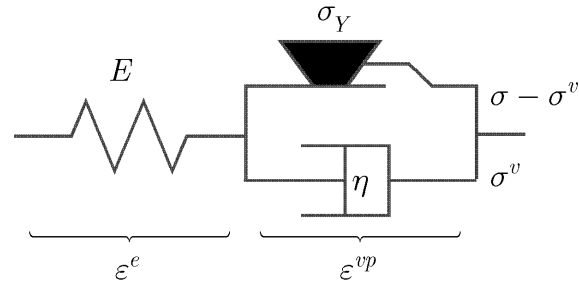
**Comportement à partir d'un état initial nul : on obtient une loi de Kelvin-Voigt à seuil !**

- si  $|\sigma| \leq \sigma_Y$  , alors  $\dot{\varepsilon} = 0$  (rigide)
- si  $\sigma > \sigma_Y$  (traction), alors  $H(\varepsilon + T\dot{\varepsilon}) = \sigma + \sigma_Y^0$  (visqueux)
- si  $\sigma < -\sigma_Y$  (compression), alors  $H(\varepsilon + T\dot{\varepsilon}) = \sigma - \sigma_Y^0$  (visqueux)

### Formulation général du comportement

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\langle f(\sigma, \sigma_Y) \rangle}{\eta} \text{sgn}(\sigma) \quad \text{avec} \quad f(\sigma, \sigma_Y) = |\sigma| - \sigma_Y$$

## Bingham élasto-viscoplastique



élasticité linéaire  $\sigma = E\varepsilon^e$

viscosité linéaire  $\sigma^v = \eta\dot{\varepsilon}^{vp}$

plasticité

$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\lambda} \text{sgn}(\sigma - \sigma^v)$  et  $|\sigma - \sigma^v| - \sigma_Y \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda}(|\sigma - \sigma^v| - \sigma_Y) = 0$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{vp}$$

### Constantes matérielles

$E$  : module d'élasticité,  $\sigma_Y$  : limite élastique,  $\eta$  : viscosité (ou  $T = \frac{\eta}{E}$  temps caractéristique)

**Comportement à partir d'un état initial nul : réponse de Maxwell au-delà du seuil élastique !**

- si  $|\sigma| \leq \sigma_Y$ , alors  $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$  (élastique,  $\dot{\varepsilon}^{vp} = 0$ )
- si  $\sigma > \sigma_Y$  (traction), alors  $\dot{\sigma} + \frac{\sigma - \sigma_Y}{T} = E\dot{\varepsilon}$  (visqueux)
- si  $\sigma < -\sigma_Y$  (compression), alors  $\dot{\sigma} + \frac{\sigma + \sigma_Y}{T} = E\dot{\varepsilon}$  (visqueux)

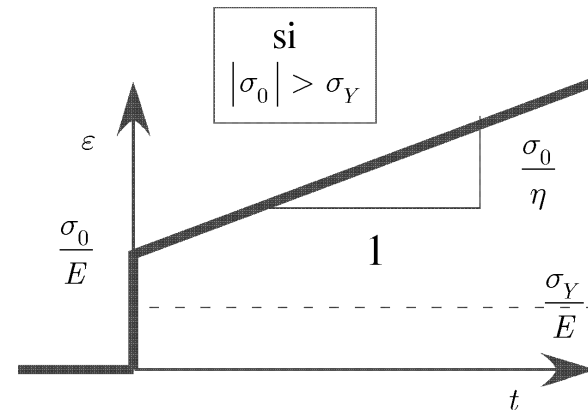
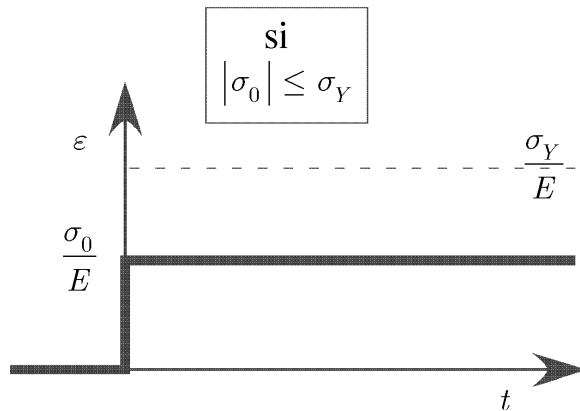
### Formulation générale du comportement

élasticité linéaire :  $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^{vp})$ , visco-plasticité :  $\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\langle f(\sigma) \rangle}{\eta} \text{sgn}(\sigma)$  avec  $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y$

## Bingham élasto-viscoplastique : Fluage

*Fluage à contrainte constante*

$$\sigma = \sigma_0 \Upsilon(t) \quad \rightarrow \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{E} & \text{si } |\sigma_0| \leq \sigma_Y \\ \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 + \frac{t}{T} \right) & \text{si } |\sigma_0| > \sigma_Y \end{cases}$$



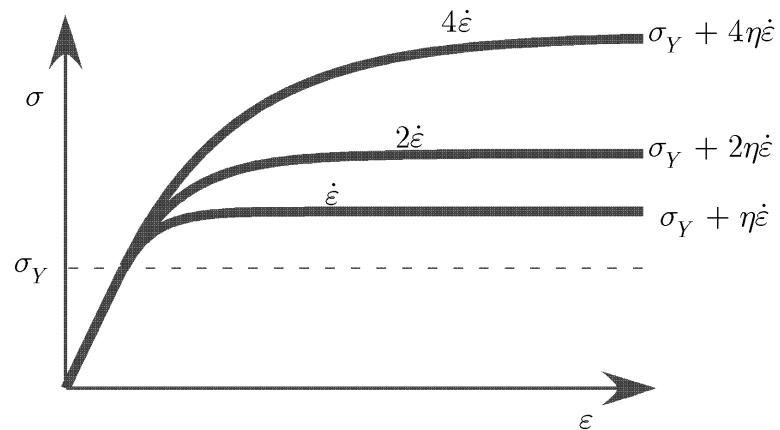
*On obtient une réponse de Maxwell à seuil*

## Bingham élasto-viscoplastique : Traction simple

---

*Traction simple à vitesse de déformation constante*

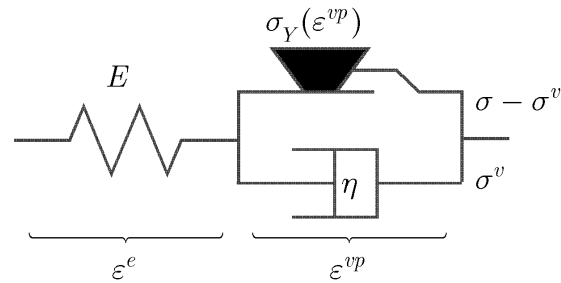
$$\dot{\varepsilon} = \text{constante} > 0 \text{ (i.e } \varepsilon(t) = t\varepsilon_0\Upsilon(t)) \rightarrow \sigma(t) = \begin{cases} E\varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq \frac{\sigma_Y}{E} \\ \sigma_Y + \eta\dot{\varepsilon} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{E\varepsilon - \sigma_Y}{\eta\dot{\varepsilon}}\right) \right\} & \text{si } \varepsilon > \frac{\sigma_Y}{E} \end{cases}$$



*La courbe de traction simple n'est pas unique. Elle dépend de la vitesse de déformation imposée.*



## Bingham élasto-viscoplastique avec écrouissage isotrope



élasticité linéaire  $\sigma = E\varepsilon^e$  , viscosité linéaire  $\sigma^v = \eta\dot{\varepsilon}^{vp}$

écrouissage isotrope linéaire  $\sigma_Y(\varepsilon^{vp}) = \sigma_Y^0 + H\varepsilon_c^{vp}$  ,  $\varepsilon_c^{vp} = \int_0^t \dot{\lambda} d\tau$

plasticité

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\lambda} \text{sgn}(\sigma - \sigma^v) , \quad |\sigma - \sigma^v| - \sigma_Y(\varepsilon^{vp}) \leq 0 , \quad \dot{\lambda} \geq 0 , \quad \dot{\lambda} (|\sigma - \sigma^v| - \sigma_Y(\varepsilon^{vp})) = 0$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{vp}$$

### Constantes matérielles

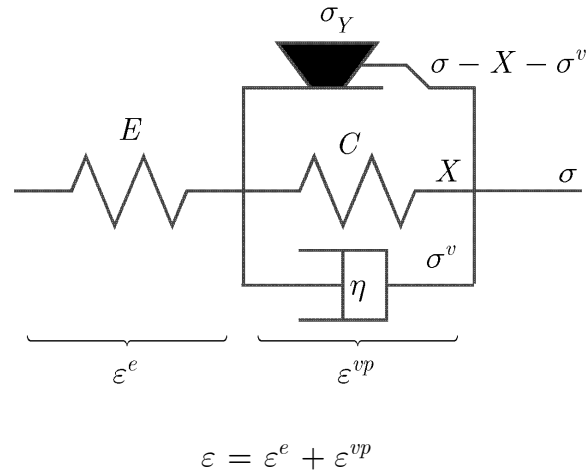
$E$  : module d'élasticité,  $\sigma_Y^0$  : limite élastique initiale ,  $H$  : module d'écrouissage isotrope,  $\eta$  : viscosité

Temps caractéristiques  $T_r = \frac{\eta}{E + H}$  (relaxation) ,  $T_f = \frac{\eta}{H}$  (fluage). On note  $\varepsilon_Y^0 = \frac{\sigma_Y^0}{E}$

### Comportement à partir d'un état initial nul : réponse de Zener au-delà du seuil élastique !

- si  $|\sigma| \leq \sigma_Y$  , alors  $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$  (élastique ,  $\dot{\varepsilon}^{vp} = 0$ )
- si  $\sigma > \sigma_Y$  (traction) , alors  $\dot{\sigma} + \frac{\sigma - \sigma_Y^0}{T_r} = E \left( \dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_Y^0}{T_f} \right)$  (visqueux)
- si  $\sigma < -\sigma_Y$  (compression) , alors  $\dot{\sigma} + \frac{\sigma + \sigma_Y^0}{T_r} = E \left( \dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon + \varepsilon_Y^0}{T_f} \right)$  (visqueux)

## Bingham élasto-viscoplastique avec écrouissage cinématique



élasticité linéaire  $\sigma = E\varepsilon^e$  , viscosité linéaire  $\sigma^v = \eta\dot{\varepsilon}^{vp}$

écrouissage cinématique linéaire  $X = C\dot{\varepsilon}^{vp}$

plasticité

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - X - \sigma^v),$$

$$|\sigma - X - \sigma^v| - \sigma_Y \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda} (|\sigma - X - \sigma^v| - \sigma_Y) = 0$$

### Constantes matérielles

$E$  : module d'élasticité,  $\sigma_Y$  : limite élastique,  $C$  : module d'écrouissage cinématique,  $\eta$  : viscosité

Temps caractéristiques  $T_r = \frac{\eta}{E + C}$  (relaxation) ,  $T_f = \frac{\eta}{C}$  (fluage). On note  $\varepsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E}$

**Comportement à partir d'un état initial nul : réponse de Zener au-delà du seuil élastique !**

- si  $|\sigma| \leq \sigma_Y$  , alors  $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$  (élastique ,  $\dot{\varepsilon}^{vp} = 0$ )
- si  $\sigma > \sigma_Y$  (traction) , alors  $\dot{\sigma} + \frac{\sigma - \sigma_Y}{T_r} = E \left( \dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_Y}{T_f} \right)$  (visqueux)
- si  $\sigma < -\sigma_Y$  (compression) , alors  $\dot{\sigma} + \frac{\sigma + \sigma_Y}{T_r} = E \left( \dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon + \varepsilon_Y}{T_f} \right)$  (visqueux)

## Bingham élasto-viscoplastique avec écrouissage

---

### Écrouissage isotrope : Formulation générale du comportement

élasticité linéaire :  $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^{vp})$  , écrouissage isotrope linéaire  $\sigma_Y(\varepsilon^{vp}) = \sigma_Y^0 + H\varepsilon_c^{vp}$  ,  $\varepsilon_c^{vp} = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^{vp}| d\tau$

visco-plasticité :  $\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\langle f(\sigma, \sigma_Y) \rangle}{\eta} \text{sgn}(\sigma)$  avec  $f(\sigma, \sigma_Y) = |\sigma| - \sigma_Y$

*Généralisation* : avec un exposant  $\dot{\varepsilon}^{vp} = \left\langle \frac{f(\sigma, \sigma_Y)}{\eta} \right\rangle^n \text{sgn}(\sigma)$

### Écrouissage cinématique: Formulation générale du comportement

élasticité linéaire :  $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^{vp})$  , écrouissage cinématique linéaire  $X = C\dot{\varepsilon}^{vp}$

visco-plasticité :  $\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\langle f(\sigma - X) \rangle}{\eta} \text{sgn}(\sigma - X)$  avec  $f(\sigma - X) = |\sigma - X| - \sigma_Y$

*Généralisation* : avec un exposant  $\dot{\varepsilon}^{vp} = \left\langle \frac{f(\sigma - X)}{\eta} \right\rangle^n \text{sgn}(\sigma - X)$

### Écrouissage isotrope et cinématique: ... (cf Lemaître-Chaboche)

## **Bibliographie**

---

Darve F. (coord), Manuel de rhéologie des géomatériaux, Presses ENPC, 402 pages, 1987.

Dupeux M., Aide-mémoire science des matériaux, Dunod, 352 pages, 2004.

François D., Pineau A., Zaoui A., Comportement mécanique des matériaux, (2 volumes), Hermès, 1991.

Lemaître J., Chaboche : Mécanique des matériaux solides, Dunod, 544 pages 1996.

Lemaître J., Handbook of materials behavior models, Academic Press, 900 pages, 2001.

Prat M. (coord), La modélisation des ouvrages, Hermes, 700 pages, 1995.

Prat M. (coord), Calcul des ouvrages généraux de construction, 767 pages, 1997.