

Eléments de Systémique

Olivier MAURICE

8 avril 2016

Résumé

L'objet de ce polycopié qui accompagne une présentation réalisée tous les lundi, est de communiquer les notions de base de la systémique de façon à ce que les ingénieurs et chercheurs puissent exploiter ces concepts modernes dans leurs activités de tous les jours. Il s'adresse avant tout aux doctorants en sciences de l'ingénieur, pour aborder des concepts très généraux et voir le monde sous un angle plus systémique. Suivant son cursus, chaque lecteur pourra sauter des séances, car même si une connexion existe évidemment entre les séances, la lecture de chacune d'elle (ou de groupes de séances) peut se faire de façon un peu indépendante. Les lecteurs excuseront les éventuelles fautes de Français ou dans les équations. L'objectif premier de ce cours n'est pas en soi le détail des calculs présentés, mais bien les approches et réflexions menées.

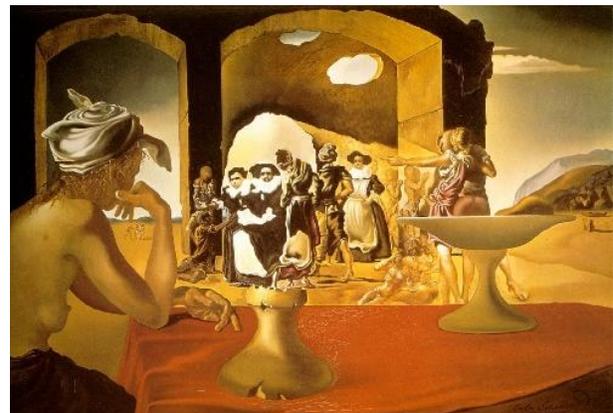
1 Séance 1

Descartes a le premier posé la méthodologie pour un travail scientifique dans son fameux « discours de la méthode » (Descartes, 1596 - 1650). La méthode de Descartes qui donnera les fondements du Cartésianisme s'appuie sur trois principes fondamentaux :

1. le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que ne la connusse évidemment être telle : c'est à dire éviter soigneusement la précipitation et la prévention; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement que je n'eusse aucune occasion de la mettre en doute.

2. Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.
3. Le troisième de conduire avec ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.

Même si nous nous apprêtons à critiquer les principes cartésiens, on ne saurait trop conseiller à tout chercheur de les reconsidérer. Le troisième principe reste valable et trop souvent oublié. Combien de fois voit-on des jeunes chercheurs « foncer » à définir un problème entièrement par quelque « CAO » dans un *logiciel de simulation*, avant d'avoir fait l'analyse des parties de ce problème et de ses éléments les plus simples ou les plus complexes ?



Mais le principe fondateur des sciences modernes au sens de l'histoire (jusqu'à aujourd'hui) reste le second principe. Il est l'ossature des démarches qui consistent à décomposer un système en autant de parties simples que possible, pour remonter ensuite au fonctionnement du même système par emboîtement, couplages des parties précédemment caractérisées. Mais cette démarche admet que le couplage des éléments n'apporte pas en soit d'information supplémentaire qui n'existerait qu'à l'échelle du système couplé. Cette hypothèse est-elle toujours vérifiée? On pourrait donner de nombreux exemples, mais un exemple illustre particulièrement bien je trouve la problématique. Regardons le marché aux esclaves, peinture de Dali. La peinture est reproduite ci-dessus. Si l'on découpe les personnages de cette peinture extraordinaire, on voit des femmes, des hommes, une voute, dont on ne peut imaginer que réunis ils redonnent le portrait de Voltaire. Ce portrait émerge de cet assemblage et lui appartient. Toute la démarche systémique se résume peut-être dans cet exposé. Sa formalisation nous le verrons est compliquée pour ne pas dire complexe.

Qu'est-ce que la complexité ?

On parle beaucoup de complexité. tout aujourd'hui tend à être complexe. Mais en fait, on peut penser que de nombreux problèmes sont simplement difficiles, ce qui est déjà « pas mal » ! Pour le systémicien, la complexité regroupe des constats minimaux de propriétés que nous énumérons ici :

1. un système complexe est un système pourvu de nombreuses interactions en propre ;
2. ayant pour partie des comportements stochastiques ;
3. doué de propriétés intrinsèques issues d'émergences.

sous le jour de ces trois caractères, on comprend que beaucoup de systèmes ne sont pas si complexes que cela. Nous détaillerons petit à petit ces propriétés pour les formaliser. Mais nous pouvons commencer par une première définition : qu'est-ce qu'un système?

Qu'est-ce qu'un système ?

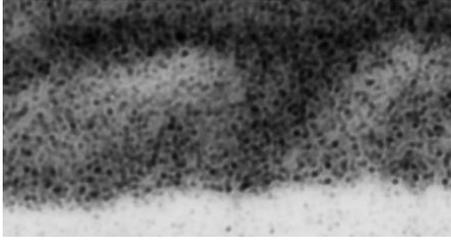
J'avoue avoir lu des centaines de définitions, persuadé à chaque fois de progresser et d'être proche de pouvoir annoncer fièrement ce qu'est un système. Mais chaque définition pouvait être remise en question à l'épreuve de quelques contradicteurs. Finalement, je me suis tourné vers la première : le sens historique du mot système qui provient du Grec et signifie « ensemble ». Un système est un ensemble! Et nous verrons comment chacun peut à son tour le redéfinir en travaillant sur les propriétés de cet ensemble. De fait certains systèmes auront peu d'intérêt, et d'autres comme les systèmes sociaux, sont notre environnement journalier.

2 Séance 2

Un ensemble, ce sont des objets regroupés, placés dans quelques « patates » mathématiques. Ces objets peuvent ou pas avoir des liens entre eux. La première difficulté est de bien percevoir ces objets pour les réunir. Au minimum, il faut les connaître, les reconnaître, les classer, etc. En général la méthode est visuelle, parfois mathématique (ensemble de particules) parce que les objets ne sont pas forcément directement perceptibles. On voit poindre la notion d'échelle et de reconnaissance, perception.

Échelle

A une échelle de description donnée des choses, on fait correspondre des modèles. Pour changer d'échelle, on doit réaliser une opération particulière qui est une intégration. Prenons une photographie argentique. en grossissant on ne distingue que les grains qui paraissent plus ou moins désordonnés, sans voir aucune image. La figure ci-dessous reproduit un grossissement d'une photographie noir et blanc.



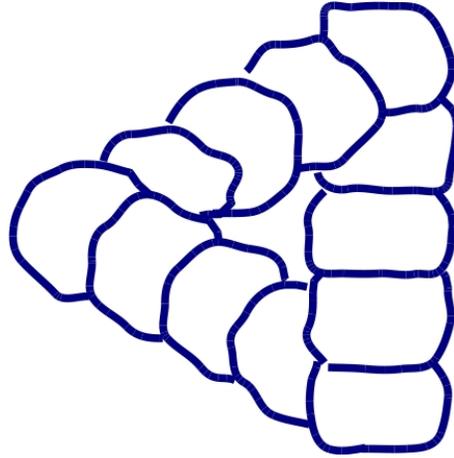
en prenant du recul et en intégrant tous ces grains, on fait apparaître l'image (ce que l'on voit un petit peu ici). En mécanique quantique, une mesure s'exprime par une intégration d'un certain domaine du type :

$$\int_v dv \phi \phi^*$$

On parle d'effondrement. Le passage du quantique au classique est une intégration. On change d'échelle d'observation et de description. Mathématiquement, le changement d'échelle se détecte par une opération d'intégration.

Reconnaissance

reconnaître une chose, c'est lui trouver suffisamment de points communs pour l'identifier à une chose cataloguée. Le catalogue peut être dans notre esprit ou sur un livre ou sur internet ! Le cerveau humain ou des animaux fonctionnent par analogie. La détection d'un ensemble de points communs avec une forme apprise relève du processus psychologique de l'analogie. C'est en jouant sur ces analogies que l'on peut tromper l'analyse d'image :



En regardant cette image on veut voir tout d'abord un triangle. Mais l'agencement des dés implique une organisation en trois dimensions. On est alors troublé par l'incohérence, l'impossibilité de cette organisation. Nous n'avons plus, dans un second temps, d'analogie possible dans notre univers connu avec cet objet.

Perception

Pour reconnaître, il faut d'abord percevoir. On perçoit par différents capteurs, la vue, l'ouïe, l'odorat, le touché, le goût. Mais là encore, la perception est influencée par un jeu d'a priori. Tout le monde a fait l'expérience de goûter un plat de couleur marron et, par association avec des excréments, rebuter à le trouver bon. Le même plat goûté sans vue prend une autre saveur. Le cerveau de nouveau exploite son vécu, ses analogies avec sa mémoire d'apprentissage à long terme pour apporter ses coefficients de pondérations dans l'expérience menée. Toute perception passe par une transformation, une projection depuis le référentiel où se trouve l'objet dans le référentiel de l'expérimentateur. Et cette projection peut être modulée suivant les expériences précédentes conduites par le même expérimentateur et ayant participé à la construction de son savoir. Ainsi la perception est une transformation de données reçues par un capteur qui déjà réduit la réalité de l'objet à ses propres capacités physiques, reformulée par des éléments d'informations intrinsèques et extrinsèques à l'expérimenta-

teur. Sur l'image suivante¹, l'élément central, c'est à dire l'œil de la vieille femme, fixe un cadre et crée une image dont nous avons tous l'analogie en tête, et qui contredit la présence de la jeune femme que l'on détecte si l'on se concentre sur le cile ou si l'on regarde l'œil précédent comme une oreille. C'est une information extrinsèque qui gêne ici l'analyse du cerveau.



La perception s'effectue en deux temps au moins. Un premier temps d'identification, un second temps de confirmation ou doute et des temps ultérieurs d'éprouvements et convergence vers une identification confirmée.

Ensemble

Notre ensemble pourvu d'objets identifiés est alors soit une simple collection où ses membres peuvent ne pas avoir plus d'affinité que cela, soit un regroupement d'objets présentant des propriétés communes sur un ou plusieurs critères définis. On peut regrouper des personnes sur la base des liens familiaux. On dote à ce moment là l'ensemble d'une structure qui porte les membres et crée du liant. Un ensemble avec une telle structure générale est appelé un espace (l'espace familial). On parle d'espace de détente, espace de travail, puis sous des structures plus précises, espace géométrique tel que définis par Bergson, etc.

Un type de structure nous intéresse plus particulièrement : les structures vectorielles. Une structure

vectorielle définit des axes de propriétés et vient placer sur ces axes les membres de l'ensemble suivant la pondération qu'ils ont chacun vis à vis de ces propriétés. On peut ainsi définir des axes de couleur, de composants électroniques, de pensées et projeter sur ces axes des images, des circuits et leurs courants ou des personnes. La structure vectorielle a ceci de formidable qu'elle positionne les membres les uns vis à vis des autres. Elle peut permettre de flécher une évolution d'un membre sur ses propriétés, etc. C'est toute la mécanique des espaces vectoriels. Mais elle a ceci de contraignant qu'il faut transporter la définition des axes pour toute communication d'information sur les membres de l'espace vectoriel.

Espace probabiliste

Certains des ensembles que nous pouvons créer sont un peu particulier. On peut imaginer une structure vectorielle où l'on reporte sur les axes non pas les projections déterministes des objets mais la probabilité que ces objets ont d'avoir telle propriété. Nous verrons que ce type de représentation est très riche pour visualiser des trajectoires de comportements de systèmes.

Les probabilités restent un domaine difficile d'appréhension, et pourtant essentiel. Pour s'en convaincre on peut se reposer le problème de Monty Hall :

« Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur). Ce joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture (ou tout autre prix magnifique) et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre (ou tout autre prix sans importance). Il doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.

Les questions qui se posent au candidat sont :

Que doit-il faire ? Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ? »²

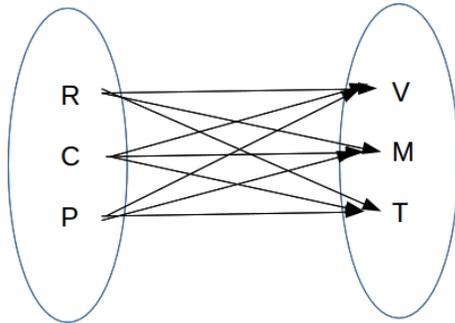
1. Une des plus célèbres illusions classiques créée par le psychologue américain Joseph Jastrow en 1888 - Wikipédia

2. Voir Wikipédia - problème de Monty Hall

Je vous laisse essayer de résoudre l'énigme.

Relations entre espaces

S'étant dotés d'ensembles structurés, on veut maintenant construire un système à partir de transformations appliquées aux objets de l'ensemble. Il peut s'agir de partir de rayons (r), cadres (c), pédaliers (p) etc., et fabriquer un vélo (v) ou un monocycle (m), ou un tandem (t). Tous ces objets peuvent être construits à partir du même ensemble d'objets de départ. On peut visualiser l'exercice en considérant deux ensembles avec leurs éléments et des relations entre ces ensembles. Suivant ce que nous avons posé précédemment, cela donnerait :



Lorsque l'on voit ce type de relations entre deux ensembles, on peut les traduire en s'intéressant aux objets de départ (r,c,p) auxquels on applique certaines transformations f_k , et aux objets que cette transformation engendre (v,m,t). Par exemple, la transformation qui incorpore le cadre au vélo pourrait être notée f_{vc} . Le graphe précédent peut alors être remplacé par un tableau où l'on met en vis à vis les correspondances symbolisées par l'écriture précédente :

source \ cible	vélo	monocycle	tandem
rayons	f_{vr}	f_{mr}	f_{tr}
cadre	f_{vc}	f_{mc}	f_{tc}
pédalier	f_{vp}	f_{mp}	f_{tp}

Finalement, la relation imaginée entre les ensembles peut se ramener à une matrice qui contient les fonctions impliquées dans ces transformations (non utilisons les termes sans rigueur ici. On doit parler de relations, fonctions, applications, opérateurs

etc. Mais les mécanismes sont identiques : seules changent les terminologies pour préciser les cadres d'emploi de ces mécanismes). Le diagramme précédent pourrait se résumer à l'objet mathématique :

$$f = \begin{bmatrix} f_{vr} & f_{mr} & f_{tr} \\ f_{vc} & f_{mc} & f_{tc} \\ f_{vp} & f_{mp} & f_{tp} \end{bmatrix}$$

Et en fait on s'aperçoit rapidement qu'il est plus intéressant de regarder les propriétés des transformations f et leurs matrices que de s'intéresser aux objets eux-mêmes. Car on peut trouver des transformations qui s'appliquent à quantité d'objets différents. Par exemple appliquer une rotation peut être employé pour des bananes, personnes, pôles, planètes, etc. On peut donc créer des ensembles de ces transformations. Mais dès lors que l'on crée un ensemble, on a envie, nous l'avons vu, de lui associer une structure. Dans le cas des transformations, on parlera de groupes. Et la relation s'écrit communément par le système d'équations $[f][A] = [B]$, ce sur quoi nous reviendrons.

Pour être un groupe, nos transformations doivent avoir une propriété d'associativité. Soit trois transformations t , u et f , on veut pouvoir écrire : $t \rightarrow u \rightarrow f = u \rightarrow f \rightarrow t$, la flèche signifiant ici « suivi de ». Cette condition permet de lever un ordonnancement dans l'usage des transformations. Sans quoi leur emploi peut devenir compliqué, mais nous ne pouvons pas toujours le faire. Il faut de plus que l'on sache se doter d'un élément neutre, une transformation qui ne change rien pour la règle que l'on s'est donnée sur l'application de ces transformations (loi). Cet élément neutre nous permet de définir une transformation inverse, qui redonne l'objet de départ (on démonte le vélo). Ensuite on regarde si l'on peut appliquer deux transformations dans n'importe quel ordre (commutativité : je peux démonter un vélo et le remonter ou monter un vélo et le démonter). Cette propriété de réciprocity n'existe pas stricto sensu dans la nature. Ceci à cause de la dissipation. Chaque fois que l'on fait quelque chose, tout l'univers veut le savoir et un rayonnement de pertes est créé, le temps s'est écoulé, et il est impossible physiquement de revenir strictement à l'état de départ. On a là au moins un point de systémique : en assemblant les objets et en incluant

l'opérateur de montage, les photons perdus en chaleur ne pourront jamais être strictement récupérés.

Matrices et propriétés

La seule organisation des matrices de transformations nous renseigne sur leur éventuelle symétrie lors de leurs compositions. Par exemple, en deux dimensions, on peut avoir les organisations suivantes :

$$\begin{aligned}
 1 : \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} & \quad 2 : \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} \\
 3 : \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} & \quad 4 : \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Les matrices de type 1 peuvent commuter. $2 \cdot 3 \neq 3 \cdot 2$, et les matrices de type 4 commutent négativement ($AB = -BA$) ; etc. On peut de fait s'intéresser parfois à essayer de donner une organisation particulière aux matrices ou à comprendre pourquoi elles ont telle organisation plutôt que telle autre.

Entropie

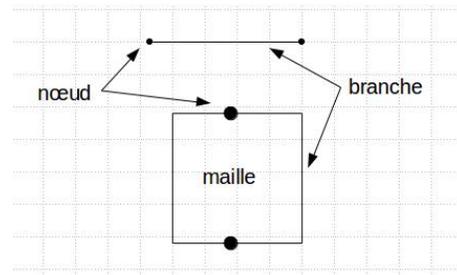
Partant d'un ensemble d'objets dissociés pour créer un système, on crée de l'ordre. Mais on paie ce rangement d'un rayonnement de chaleur qui est plus désordonné que les objets de départ. Ordre et désordre sont indissociables et on a bien là une notion systématique où l'on intègre tout l'environnement dans la façon de poser le problème. Feynman prenait l'exemple d'une lampe que l'on utilise pour éclairer une pièce. La lampe a une forte entropie, mais engendre de l'information en éclairant la pièce. Pour résoudre les problèmes, on est amené à réduire le volume considéré, sans quoi on se retrouve tout le temps à traiter l'univers entier, ce qui est un peu pénible. Nous verrons que l'on peut faire cela en essayant de garder un peu de méthode et de rigueur. L'environnement peut être compris dans une frontière virtuelle et l'on pourra toujours ré-exploiter le problème réduit dans un problème plus vaste. C'est la notion de « *Diakoptique* » introduite par Gabriel Kron en 1939.

3 Séance 3

Nous allons commencer à évoquer une représentation extrêmement puissante : les complexes cellulaires. On entend par là des dessins de points, traits, cercles, etc. auxquels on associe des équations, des comportements et curieusement, on s'aperçoit que ces *graphes* aident à représenter symboliquement des choses très diverses.

Complexe cellulaire

Partons d'un segment : il est constitué de deux points que l'on appelle « nœuds » reliés par une ligne droite ou pas. La figure suivante montre les trois principaux types d'éléments d'un complexe cellulaire noté C^∞ .



Les nœuds appartiennent à l'ensemble C^0 de dimension nulle, les segments à C^1 de dimension 1 et les surfaces à C^2 , les volumes à C^3 , etc. Mais peu importe quelque part. Par contre ce qui est intéressant c'est de remarquer que les nœuds sont les bords du segment, la maille le bord d'une surface. si par exemple je considère une abscisse définie par $l = ax$, sachant $x \in [x_0, x_1]$ (la spécification d'appartenance de la variable x à un intervalle fermé et défini est très importante. En physique, on devrait toujours préciser les intervalles de valeurs que peuvent prendre les variables : ce sont les hypothèses, si souvent oubliées). Je peux définir un opérateur « d » appelé opérateur de bord tel que :

$$\frac{dl}{dx} = \frac{l(x_1) - l(x_0)}{x_1 - x_0} = a$$

de fait :

$$\int_x dl = \int_{x_0}^{x_1} adx = a(x_1 - x_0)$$

J'ai intégré : c'est à dire que j'ai changé d'échelle, je suis passé du point (bord du segment l par l'opérateur d) au segment lui-même. Un segment a deux bords : ici les deux valeurs x_0 et x_1 . On peut dire que notre segment est une *variété bornée* de dimension 1. Chaque fois que nous pourrions définir des équations associées à des inégalités, on pourra définir une variété au sens de Poincaré³. Cette notion de bord permet de mathématiquement démontrer des propriétés singulières en topologie cellulaire. Par exemple une somme circulaire sur des bords est nulle. Soit que si je « monte » le segment, je fais $x_1 - x_0$ et si je somme cette intégrale à sa « redescente » $x_0 - x_1$ je trouve zéro. Une différence de potentiels s'établit entre nœuds, et l'on sait que :

$$\oint dcV(c) = 0$$

Voilà un joli résultat... Notons au passage que le terme dl est appelé une « 1-forme ». On peut avoir des « 2-forme » pour $dx dy$ par exemple, etc.

Autre exemple de processus de bord : en théorie des champs, le potentiel vecteur s'écrit comme quelque chose qui ressemble à :

$$dA = \frac{\mu i}{4\pi r} dx$$

soit qu'en intégrant le courant sur l'espace on obtient un champ. Le courant est une condition limite, un bord du champ.

Retenons de tout cela qu'un complexe cellulaire est un ensemble de nœuds (N), branches (B), mailles (M), surfaces (S) ; qu'un graphe est un agencement particulier de ces éléments sous formes de réseaux (R). Qu'à chaque branche du graphe on peut associer un couple équation - intervalle, et que la relation d'Euler-Poincaré nous dit combien il y a de ces éléments :

$$M = B - N + R$$

3. Je conseille à tous ceux qui sont intéressés par la topologie de lire « l'analysis situs » de Poincaré ».

Dualité

La dualité est une autre notion essentielle pour la systémique. Nous l'utilisons tous les jours sans nous en rendre compte. Lorsque nous utilisons une boussole pour indiquer à un ami une direction, nous n'avons pas à dessiner l'aiguille, son référentiel, celui de l'environnement, etc., pour transmettre notre information, qui est vectorielle. Il nous suffit d'envoyer les degrés d'orientation qui sont scalaires pour indiquer la position. Nous avons donc fait correspondre des nombres à des vecteurs. L'espace de ces nombres qui est une image numérique de l'espace vectoriel de départ est appelé *espace dual*. Et l'échelle graduée qui permet de passer de l'un à l'autre est appelé une *métrique*. Ces notions seront très importantes dans nos modélisations. La métrique, c'est nous qui l'avons choisie (au lieu de faire 360°, le tour de la boussole pourrait en faire 159!).

Nous travaillerons beaucoup sur les métriques, leurs transformations, leurs sens. Si l'on dispose d'une métrique g , d'une description vectorielle x , le nombre n qui va correspondre à cette description est quelque chose comme $n = g.x$. Dans un espace à deux dimensions par exemple, on mesure une distance par :

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Et bien on peut écrire cette relation sous la forme :

$$d = \sqrt{g_{11}xx + g_{22}yy} = \sqrt{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} [g] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

avec :

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La métrique g est dite ici cartésienne. Elle peut changer en fonction par exemple des valeurs de x et y (en réalité dans un modèle cartésien, elle est fixe, mais imaginons ...). Par exemple si x devient très grand, elle pourrait tendre vers :

$$g = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \epsilon \rightarrow 0$$

Tout le problème sera souvent de trouver la « bonne » métrique. Mais nous voyons ici une chose très passionnante : nous avons dit que cette métrique c'est nous qui nous la donnions. Or elle nous permet de décrire le monde. Ainsi, le monde est à l'image de ce que nous avons choisi pour le mesurer. Par contre on peut étudier, comme souvent lorsqu'on est confronté à un problème de vue relativisée, la variation de cette métrique. Et ça, si c'est difficile à appréhender, c'est énorme. C'est la courbure, les coefficients de Christoffel et la réalité non linéaire de notre environnement.

A suivre ...

4 Séance 4

L'objet de cette séance était de se donner quelques premiers réflexes de calculs en algèbre tensoriel pour pouvoir ensuite les aborder plus en détail dans le cadre d'un exemple concret.

Métrique

On imagine que l'on se situe dans un référentiel, localement définissable, de base \mathbf{b}_k . La métrique g est alors définie par :

$$g_{km} = \langle \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_m \rangle$$

En algèbre tensorielle, si l'on considère un vecteur « naturel » défini par $\vec{i} = i^1 \mathbf{b}_1 + i^2 \mathbf{b}_2 + \dots + i^n \mathbf{b}_n$, on écrit la projection classique de ce vecteur mais les composantes sont repérées avec un indice positionné en haut à droite du symbole du vecteur. Mais finalement, on est pas obligé d'écrire tout ce développement. Sachant la base dans laquelle on se situe (et sous cette condition, mais elle peut être abstraite), on peut « pointer » le vecteur par ses seules composantes i^k . Ainsi au lieu d'écrire \vec{i} , j'écris i^k . Bon après tout, cela ne change pas grand chose !

On va utiliser une autre convention dite de l'indice muet. Au lieu d'écrire :

$$\vec{i} = \sum_{k=0}^N i^k \mathbf{b}_k$$

on omet le signe somme pour écrire :

$$\vec{i} = i^k \mathbf{b}_k$$

Dès lors qu'un indice est répété, on suppose qu'automatiquement, est associée une sommation sur cet indice.

Réalisons par exemple le produit de deux vecteurs $\vec{i} \cdot \vec{j}$ dans un espace à deux dimensions. En développant on trouve :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = (i^1 \mathbf{b}_1 + i^2 \mathbf{b}_2) \cdot (j^1 \mathbf{b}_1 + j^2 \mathbf{b}_2) = \dots$$

$$i^1 j^1 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + i^1 j^2 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 + i^2 j^1 \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1 + i^2 j^2 \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2$$

Suivant notre convention précédente de l'indice muet, on peut réécrire cette relation sous la forme $\vec{i} \cdot \vec{j} = g_{km} i^k j^m$ avec les indices k et m qui varient de 1 à 2. Le résultat de ce produit est un scalaire (d'où son nom). Or on peut créer un espace dual à partir de ce scalaire. Considérons par exemple le produit $g_{km} i^k j^m = P$ qui renvoie vers le scalaire P . On peut créer le produit $e_k i^k = P$. Le covecteur e_k que l'on pointe aussi ici par ses seules composantes, se projette sur la base duale $\mathbf{a}^q : e_k = e_1 \mathbf{a}^1 + e_2 \mathbf{a}^2 + \dots$. Par définition on choisit les \mathbf{a}^q tels que $\mathbf{a}^q \mathbf{b}_k = \delta_k^q$ ⁴. Notons que l'on a utilisé n'importe quels indices. Les indices n'ont pas de sens en soit, mais leur position, leur répétition a du sens dans le cadre de l'algèbre tensorielle. L'espace dual des \mathbf{a}^k est aussi appelé co-espace et les vecteurs naturels, vecteurs contravariants. Nous verrons pourquoi ultérieurement.

Partant de l'expression $P = g_{km} i^k j^m$ on peut se demander ce que vaut le produit $g_{km} i^m$? Comme on a défini les e_k par $P = e_k i^k$ on en déduit :

$$e_k = g_{km} i^m$$

Ce résultat est très important. D'ailleurs Landau et Lifchitz dans leur théorie des champs introduisent l'algèbre par cette opération majeure suivant laquelle, dans le produit contracté (dit contracté car on somme sur l'indice répété) d'un vecteur par une métrique, on obtient un covecteur. Seule la métrique permet de faire cela.

4. δ_k^q est l'opérateur de Dirac qui vaut 1 si $k = q$, 0 sinon.

Nous verrons que les vecteurs pointent en général des objets qui renvoient à des flux (courants, pressions, vitesses, etc.) et les covecteurs à des efforts (forces électromotrices, forces, travail, etc.). Ainsi la reconnaissance des propriétés (variances) des objets mathématiques donne immédiatement leur nature physique.

Quelques exercices

L'algèbre doit se pratiquer de façon automatique. Comme disait Langevin : « Le calcul tensoriel sait mieux la physique que le physicien lui-même ».

1. Résoudre : $T_c^{ab} D_a^c$. Quel est le résultat ?
2. Cette expression conduit-elle à un vecteur ou un covecteur $A_{efg}^{abcd} B_b^{ef} D_d^g E_a$?
3. Partant de l'équation $e_k = g_{km} i^m$ comment devrait se transformer le tenseur g pour exprimer i^m en fonction des e_k ?
4. Soit A_μ^m une matrice et soit t_{ij} un tenseur. Comment appliquer un produit de A par t pour transformer t en un nouveau tenseur $L_{\mu\nu}$?

Réponses

1. On obtient un objet V^b qui est un vecteur.
2. Le résultat est le covecteur V^c .
3. On cherche un objet y tel que $i^m = y \cdot e_k$. Comme g est d'ordre 2 (deux indices, c'est une matrice), l'objet y doit être d'ordre 2. C'est l'inverse de g . Pour respecter la règle des indices, y doit être de la forme y^{mk} et on trouve bien $i^m = y^{mk} e_k$, d'où l'on tire la règle générale $(g_{km})^{-1} = y^{mk}$. Les indices changent « d'étage » et d'ordre.
4. Si l'on fait un premier produit $A_\mu^m t_{mp} = I_{\mu p}$ on trouve un objet qui comporte 1 indice qui renvoie à l'espace d'arrivée (μ) et un indice qui renvoie à l'espace de départ. On doit donc appliquer une deuxième fois le produit : $I_{\mu p} A_\nu^p = L_{\mu\nu}$. De fait pour transformer un tenseur deux fois covariant on doit réaliser un produit bilinéaire par une matrice de transformation. Ce que l'on note matriciellement par $L = A^T t A$.

Notons qu'une façon de créer un espace dual peut être d'exploiter une forme linéaire. Par exemple :

$$u^* = \int_C d\vec{C} \cdot \vec{v}$$

On utilise un changement d'échelle qui fait correspondre à un vecteur (grandeur étendue) une image qui est un nombre (grandeur contractée).

5 Séance 5

Nous allons essayer de modéliser un agent simple. Pour cela on a besoin de quatre éléments de base pour sa fabrication. Notre agent est un aspirateur automatique. Nous allons pour l'instant modéliser le capteur et l'aspiration. On considère une première branche associée à un capteur de poussière. La sous-variété associée est une équation simple de la forme $e = R \cdot i$ où e est un effort et i un courant, R étant alors une résistance. Une seconde branche est associée à l'électronique qui exploite le signal du capteur. On y associe une loi similaire avec une résistance b . Pour connecter ces deux branches, c'est à dire brancher le capteur à l'électronique qui doit l'exploiter, on peut utiliser une connectivité. Au départ la collection des deux branches revient à positionner sur une table les éléments dont on a besoin pour fabriquer le système - ici un aspirateur. On peut regrouper ces éléments dans une matrice diagonale qui apparaît comme une description du système non encore constitué : une description de la collection :

$$z = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (1)$$

Pour relier les deux branches, on se dote de la connectivité \mathcal{C} suivante :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Par le produit bilinéaire $\mathcal{C}^T z \mathcal{C}$ on trouve l'impédance de la maille constituée des deux branches : $R + b$.

On peut procéder de même pour une autre partie du système qui incorpore la fonction aspiration. On

prend une première branche Q pour modéliser l'électronique de commande et une autre m pour porter le moteur d'aspiration. On trouve une impédance de la maille réunissant ces deux branches égales à $Q + m$. Finalement dans l'espace des mailles, la matrice impédance est :

$$K = \begin{bmatrix} R + b & 0 \\ 0 & Q + m \end{bmatrix} \quad (3)$$

Mais cette matrice décrit deux systèmes totalement découplés. Ainsi si une source alimente la première maille, un courant y sera créé sans pour autant que la seconde maille soit parcourue par un courant. L'origine du produit bilinéaire précédent se trouve dans la transformation des branches de Kirchhoff depuis l'espace des branches vers l'espace des mailles. La branche de Kirchhoff a pour équation :

$$e_k = U_k + z_{km} i^m$$

En utilisant la connectivité \mathcal{C} on relie les flux de branches aux flux de mailles : $i^m = \mathcal{C}_\nu^m J^\nu$. En remplaçant dans l'équation de Kirchhoff on trouve :

$$e_k = U_k + z_{km} \mathcal{C}_\nu^m J^\nu \Rightarrow \mathcal{C}_\mu^k e_k = \mathcal{C}_\mu^k U_k + \mathcal{C}_\mu^k z_{km} \mathcal{C}_\nu^m J^\nu \quad (4)$$

Dans ces équations, U est la différence de potentiels développée aux bornes de chaque branche. De fait : $\mathcal{C}_\mu^k U_k = 0$, ne reste donc que

$$\mathcal{C}_\mu^k e_k = \mathcal{C}_\mu^k z_{km} \mathcal{C}_\nu^m J^\nu \Leftrightarrow e_\mu = z_{\mu\nu} J^\nu$$

où l'on retrouve le produit $\mathcal{C}_\mu^k z_{km} \mathcal{C}_\nu^m = \mathcal{C}^T z \mathcal{C}$.

Pour que les deux circuits échangent de l'énergie, il faut rajouter un couplage au système précédent. On rajoute ce que j'ai appelé une « corde », un terme extra-diagonal et qui peut être ici non symétrisé, traduisant le transfert d'énergie ou d'information de la première maille vers la seconde. Soit α cette fonction, on écrit :

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

On rend le système couplé par l'opération $e_\mu = (z_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu}) J^\nu$.

La fonction α , dans le cas de système robotisé ou d'information peut être une fonction logistique L , par exemple pour transmettre un modèle de déclenchement d'une action d'une partie d'un système vers une autre partie. Cette fonction est de la forme :

$$L = \frac{K}{1 + \beta e^{-ar}} \quad (6)$$

Il pourra être intéressant de retarder cette fonction suivant la valeur d'un paramètre déclenchant, par exemple une valeur r_0 :

$$L = \frac{K}{1 + \beta e^{-a(r-r_0)}} \quad (7)$$

Exercice

Construire un programme en java calculant le courant dans deux mailles où chaque branche a une impédance normalisée et où les deux mailles sont couplées par une fonction logistique. Explorer les réactions suivant que cette fonction passe à 1 dans l'intervalle de temps exploré ou suivant que l'on utilise son complémentaire.

Réponse

```
package cps ;
import java.io.* ;
import javax.swing.JOptionPane ;
/**
 *
 * @author oliviermaurice
 */
public class CPS_2 {
//public double a=1 ;
//public double b=1 ;
// parametres fonction logistique
public static double K=1 ;
public static double r=100 ;
public static double a=100 ;
// parametre calcul
public static int N=1000 ;
public static double dx=1 ;
public static double xo=0.5 ;
//impedances
```

```

public static double z1=1 ;
public static double z2=1 ;
//tableau resultat
public static double[] res=new double[N];
public static double[][] z = new double[2][2];
public static double[][] y = new double[2][2]; //
inverse de z
public static double[] src = new double[2];
public static double[][] soluce = new double[N][2];
/**
 * @param args the command line arguments
 */
public static void main(String[] args) {
BufferedWriter writer ;
// TODO code application logic here
src[0]=Math.random()*500;
src[1]=0;
z=zero(z,2);
z[0][0]=z1 ;
z[1][1]=z2 ;
for (int i=0 ;i<N ;i++){
res[i]=K/(1+a*Math.exp(-r*(i*dx/1000-xo)));
// on a teste cette fonction decalée de 500. Par
exemple 500 mV comme critere de detection de pous-
siere
z[1][0]=res[i]-1 ;
//couplage complementaire
z[1][0]=-res[i] ;
//definition des sources faite - inversion et resolu-
tion
y=matinv(z);
//soluce[i]=mult(y,src);
soluce[i][0] = multMatVec(y,src,2)[0];
soluce[i][1] = multMatVec(y,src,2)[1];
}
//affichV(soluce[600]);
try{
writer = new BufferedWriter(new FileWri-
ter("out.txt"));
for (int u=0;u<N;u++) {
writer.write(String.valueOf(u*dx)+"
"+String.valueOf(soluce[u][1])+"\n");
}
writer.close();
}catch (IOException ioe) {
System.out.println("IO exception occured");

```

```

System.exit(1);
}
}
//
public static double[][] zero(double[][] zin, int dim){
for (int li=0;li<dim;li++){
for (int col=0;col<dim;col++){
zin[li][col]=0;
}
}
return zin;
}
/**
 *
 * @param za
 */
public static void affich(double[][] za){
String mot = new String();
for (int li=0;li<2;li++){
for (int col=0;col<2;col++){
mot=mot.concat(String.valueOf(za[li][col])+" ");
}
mot=mot.concat("\n");
}
JOptionPane.showMessageDialog(null, mot);
}
public static void affichV(double[] va){
String mot = new String();
for (int li=0;li<2;li++){
mot=mot.concat(String.valueOf(va[li])+" ");
//mot=mot.concat("\n");
}
JOptionPane.showMessageDialog(null, mot);
}
public static double[][] matinv(double[][] zz){
// inversion d'une matrice 2x2
double determ;
double[][] yy;
yy=new double[2][2];
determ = zz[0][0]*zz[1][1]-zz[0][1]*zz[1][0];
yy[0][0]=zz[1][1]/determ;
yy[0][1]=-zz[0][1]/determ;
yy[1][0]=-zz[1][0]/determ;
yy[1][1]=zz[0][0]/determ;
return yy;
}

```

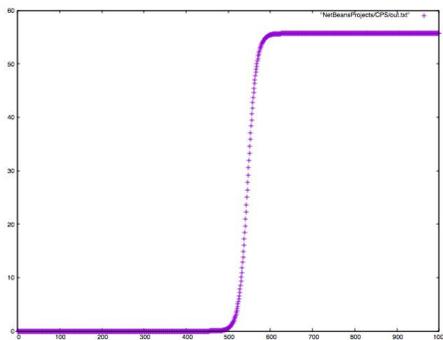
```

public static double[] multMatVec(double[][] mati,
double[] veci, int nb){
double[] veco;
veco = new double[nb];
for (int li=0;li<2;li++){
for (int col=0;col<2;col++){
veco[li]=veco[li]+mati[li][col]*veci[col];
}
}
return veco;
}
}

```

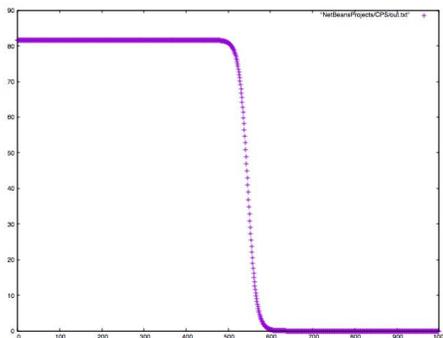
Résultat pour une fonction logistique

Courant dans la seconde maille pour la fonction logistique directe en couplage ($z[1][0] = -res[i]$).



Résultat pour la fonction logistique complémentaire

Cette fois le couplage est de la forme $z[1][0] = res[i] - 1$.



6 Séance 6

```

8 import numpy as np
9 import pylab as plt
10
11 R1=100.
12 R2=100.
13 R3=100.
14 R4=100.
15 M=1E-9
16 fo=1E3
17 N=10000
18
19 I=np.zeros((N,2),dtype=complex)
20 res=np.zeros((N,1),dtype=float)
21 absi=np.zeros((N,1),dtype=float)
22
23 for f in range(N):
24     #opérateur de Laplace
25     p=2*np.pi*(f+1)*fo*1J
26     # collection des composants utilisés
27     Zcol=[R1,R2,R3,R4]
28     # creation de la matrice des composants dans l'es
29     Zb=np.diag(Zcol)
30     #Zb=[[R,0.+0.*1J],[0.+0.*1J,1./(C*p)]]
31
32     # covecteur des sources
33     Eb=[1.,0.,0.,0.]
34     # connectivite
35     Co=[[1.,0.],[1.,0.],[0.,1.],[0.,1.]]
36     # transformation branches vers mailles
37     Zm=np.dot(np.transpose(Co),np.dot(Zb,Co))
38     Zm[0][1]=-M*np.exp(-3./3E8*p)
39     Zm[1][0]=-M*np.exp(-3./3E8*p)
40     Em=np.dot(Eb,Co)
41
42     y=np.linalg.inv(Zm)
43     I[f,:]=np.dot(y,np.transpose(Em))
44     res[f]=abs(I[f,1])
45     absi[f]=(f+1)*fo
46
47 plt.plot(absi,res)
48 #plt.xlim((0,1E6))
49 #plt.ylim((0.0096,0.01))
50 plt.show()

```

Lors de cette séance de cours nous nous sommes amusés à programmer le calcul en fréquence de la réponse impulsionnelle d'une filtre RC. C'est un cas très simple car constitué d'une collection de départ de deux branches, une branche résistive portant un composant R et une source d'énergie E et une branche capacitive sans alimentation C . La connectivité est basique car réunissant les deux branches en une maille unique d'impédance $R + 1/(Cp)$ où p est l'opérateur de Laplace. On trace ensuite en fréquence l'évolution du courant dans cette maille en fonction de la fréquence. Dans le même esprit nous avons programmé un circuit fait de deux boucles en interaction. Pour ce deuxième exercice, le listing du programme en python

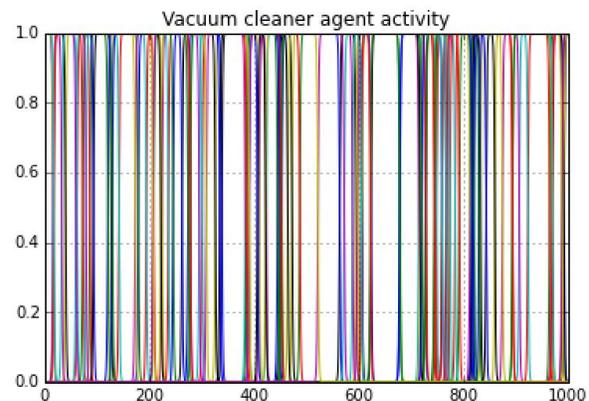
est donné dans la figure précédente.

Suite à ces différents exercices, on peut s'intéresser à la programmation de notre agent « aspirant » simple. Le programme suivant montre comment on peut prévoir son activité pour une périodicité fixée de déplacement et une réponse dépendant d'une détection de quantité de poussière définie ici aléatoirement. Ce type de démarche permet de tester des systèmes en remplaçant des signaux réels et en explorant les possibles. On rejoint une sorte de démarche « Monté-Carlo » sans prétendre calculer une couverture d'états définie. On pourra utiliser avantageusement ce type de mesure virtuelle en veillant toutefois lors des exercices plus rigoureux à vérifier les intervalles de valeurs explorés. Dans le cas de systèmes non linéaires d'ailleurs, le choix des échantillons de tests peut être difficile pour démontrer le comportement d'un système sans devoir couvrir tous les cas possibles. Une première démarche peut consister à démontrer que le système n'est pas chaotique, puis de déterminer les limites de la variété associée et son bornage.

Exercice

Expliquer le programme python suivant pour « l'agent aspirateur », sachant qu'il est représenté par 3 fonctions : une fonction détection, une fonction moteur et une fonction aspiration, de propriétés respectives Z_1, Z_2, Z_3 . Des fonctions logistiques assurent le couplage depuis la détection vers le déplacement ou l'aspiration suivant le seuil de poussière détecté.

Analyser et expliquer la courbe obtenue et tracée par le programme donné figure suivante :



Réponses à la prochaine séance (et non la dernière comme dirait Eddy Mitchell).

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 """
3 Created on Sat Nov 21 16:04:10 2015
4
5 @author: maurice
6 """
7
8 import numpy as np
9 import pylab as plt
10
11 a=500.
12 b=1.
13 N=1000
14 uo=100.
15 res=np.zeros((N,3),dtype=float)
16
17 #impedances
18 Z1=1
19 Z2=1
20 Z3=1
21 for T in range(100):
22     uo=np.random.random()*1000
23     for u in range(0,N):
24         f=1./(1.+a*np.exp(-(u-uo)))
25         Z=[[Z1,0.,0.],[-f,Z2,0],[f-1,0,Z3]]
26         E=[[1.],[0.],[0.]]
27         y=np.linalg.inv(Z)
28         res[u,:]=np.transpose(np.dot(y,E))
29
30 # trace de courbe
31 "-----"
32 plt.plot(range(N),res)
33
34 plt.grid(True)
35 plt.title('Logistic function')
36 #plt.xlabel('temps [ns]')
37 #plt.ylabel('Tension [V]')
38 #plt.xscale('log')
39 #plt.yscale('log')
40 plt.show()

```

7 Séance 7

Dans la courbe de la séance 6, les deux actions d'aspiration puis mouvement se succèdent, mais dépendent de la quantité de poussière détectée, rendue aléatoire dans le programme. A chaque période T l'agent exécute ces deux actions suivant la quantité de poussière simulée aléatoire et détectée. L'ensemble des courbes visibles reproduisent ces conditions de fonctionnement.

La perception fait partie des capacités des agents. Pour aborder la modélisation de la perception, nous devons déjà l'étudier au niveau élémentaire en détaillant le fonctionnement pour l'analyse tensorielle des réseaux du modèle de Branin.

Le modèle de Branin pour les ondes guidées en général est décrit par deux équations définies dans l'espace des branches :

$$\begin{cases} e_D = (V_G + Z_c i_G) e^{-\gamma x} \\ e_G = (V_D - Z_c i_D) e^{-\gamma x} \end{cases} \quad (8)$$

L'effort noté e_D est reporté en extrémité de la structure de propagation alors que l'effort noté e_G est issu des réflexions sur l'extrémité qui sont renvoyées vers l'entrée de la structure de propagation. Le modèle de Branin prend ainsi en compte l'ensemble de la propagation de l'onde utilisée pour la perception, tant la partie émise que la partie reçue. Le terme V_k où k renvoie à gauche ou à droite est la différence de potentiels développée aux bornes des extrémités de la structure de propagation. Z_c est l'impédance d'onde qui caractérise le milieu de propagation et γ est le coefficient complexe de propagation. x est la distance parcourue.

Ce schéma permet de modéliser toutes les propagations : radio, lumineuses, etc. Suivant les cas il sera utilisé de façon autonome ou en réseau de structures, par exemple pour une antenne ou un milieu se comportant comme un agencement de guides couplés.

A ce schéma on doit rajouter au minimum deux branches représentant les objets sur lesquels on connecte la structure propagative. Ce sont des branches qui ferment les deux branches du Branin, la première portant par exemple une source d'impulsion à propager et la seconde une charge qui exploite cette impulsion. De fait on dispose d'une collection

de quatre branches représentant une structure minimaliste de propagation. La première branches porte une source et ses propriétés, la seconde l'entrée de la structure de propagation, la troisième la sortie de la structure de propagation et la quatrième la charge qui reçoit l'information propagée. Se dotant de la connexion suivante :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

En appliquant cette connexion à la collection de départ, on peut exprimer les grandeurs V_k en fonction des conditions limites. Par exemple :

$$V_G = e_1 - Z_{11} f_1 \quad V_D = Z_{44} f_2$$

où f_1 et f_2 sont les flux des deux mailles obtenues par la connexion. Comme par cette même connexion, $i_G = f_1$ et $i_D = f_2$ on trouve finalement en extrayant les couplages des rapports entre efforts et flux, que la matrice associée à une structure propagative peut s'écrire sous la forme :

$$z = \begin{bmatrix} Z_{11} + Z_c & (Z_c - Z_{11}) e^{-\gamma x} \\ (Z_c - Z_{44}) e^{-\gamma x} & Z_c + Z_{44} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$w = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_0 e^{-\gamma x} \end{bmatrix}$$

On pourra reprendre ce schéma comme un schéma primitif chaque fois que l'on voudra modéliser une propagation d'information (électromagnétique ou autre).

Perception

La perception d'un système peut alors être étudiée via des mécanismes passifs ou actifs représentés par des sources ou des branins. On peut alors mener une réflexion suivant celle préalablement conduite par Robert VALLÉE sur ce sujet ⁵.

⁵. Robert Vallée : « Cognition et Système ». Chez L'interdisciplinaire Système. ISBN 2-907447-20-3

Tout système, organisme vivant ou électronique reçoit une collection de signaux d'entrée ξ qui, via un opérateur d'observation θ fourni un ensemble de sorties exploitables par un système de traitement η . Si l'opérateur $\theta(\xi)$ agit linéairement et est indépendant du temps, la relation $\eta(t) = \theta(\xi(t))$ peut être portée par une matrice représentative de l'opérateur linéaire θ , B . De sorte que l'on écrit $\eta(t) = B\xi(t)$. La dimension de η est en général égale ou inférieure à celle de ξ . Il y a souvent une opération d'intégration dans la perception qui réduit la dimension du stimuli initial. D'ailleurs si l'on passe de ξ à η par une simple réduction de la dimension, on effectue une simple projection.

Si ξ a la même dimension que η , B est une matrice carrée. Les valeurs propres de cette matrice sont alors représentatives des solutions composites issues du mélange des couplages entre les différentes perceptions.

Dans le domaine temporel, les retards apportés au signal perçu sont les mémoires de cette information. Sans autre opération de mémorisation, chaque système a sa propre rémanence qui explique la profondeur de sa perception. Pour mettre en évidence ces effets de mémoire, traduction laplacienne de la convolution, l'écriture de Kron⁶ n'est pas la plus adéquate.

On pouvait rapprocher l'équation $e_\mu = z_{\mu\nu}i^\nu$ de celle d'une surface paramétrée où les variables i^ν seraient les paramètres. En écrivant l'équation sous la forme $0 = \psi_\mu(x^\nu, e_\mu)$ on identifie la surface ψ sur laquelle on peut engendrer une base \mathbf{b} par l'opération⁷ :

$$\mathbf{b}_k = \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \quad (11)$$

A partir de cette base, on peut construire un jacobien $J_{\mu\nu} = [\mathbf{b}_\nu]_\mu$ et l'équation de Kron devient

6. L'équation $e_\mu = z_{\mu\nu}i^\nu$ est l'équation à laquelle aboutie la « méthode de Kron » élaborée par Gabriel Kron en 1939, originellement pour concevoir des machines électriques. G.Kron est à l'origine de l'analyse tensorielle des réseaux, cependant très critiquée de par l'écart avec les concepts riemanien exacts, dont la non symétrie de la matrice z dès lors non strictement équivalente à une métrique.

7. en fait ici on vient déjà chercher la vitesse du mobile sur la surface paramétrée ψ puisque les variables sont des flux, c'est à dire des dérivées des variables d'état.

$$e_\mu = J_{\mu\nu}x^\nu$$

Prenons un exemple, car la complexité des opérations suivantes dépend de la nature de la surface ψ et pour l'instant l'objectif est de rester sur des cas simples.

Considérons un système fait d'un branin :

$$z_b = \begin{bmatrix} a & (\eta - a)e^{-\tau p} \\ (\eta - h)e^{-\tau p} & h \end{bmatrix}$$

et d'une maille u_0 quelconque couplée à ce branin via une fonction α . La matrice de Kron résultante vaut

$$u_0 \oplus z_b = \begin{bmatrix} u_0 & 0 & 0 \\ \alpha & a & (\eta - a)e^{-\tau p} \\ 0 & (\eta - h)e^{-\tau p} & h \end{bmatrix}$$

Suivant nos définitions précédentes, nous en déduisons une base de trois vecteurs donnés dans un jacobien :

$$\left\{ \begin{bmatrix} u_0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ (\eta - h)e^{-\tau p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (\eta - a)e^{-\tau p} \\ h \end{bmatrix} \right\} \quad (12)$$

dont on voit qu'il est égale à la matrice de Kron. Partant maintenant de notre équation $e_a = J_{ab}x^b$, je me suis aperçu que si l'on multiplie chaque membre par le jacobien transposé, comme $G = J^T J$ on obtient⁸ :

$$T_\zeta = G_{\zeta\nu}x^\nu \quad (13)$$

avec $T_\zeta = \Gamma_{\zeta\mu}e_\mu$ et $G_{\zeta\beta} = \Gamma_{\zeta\mu}J_{\mu\nu} = \langle \mathbf{b}_\zeta, \mathbf{b}_\nu \rangle$ étant entendu que $\Gamma_{\nu\mu} = (J_{\mu\nu})^T$.

Le vecteur des sources vaut ici :

$$T_\zeta = \begin{bmatrix} u_0 e_0 + \alpha (\alpha e_0 + e_s e^{-\tau p}) \\ a (\alpha e_0 + e_s e^{-\tau p}) + (\eta - h) e^{-\tau p} e_s \\ (\eta - a) e^{-\tau p} (\alpha e_0 + e_s e^{-\tau p}) + h e_s \end{bmatrix}$$

8. O.Maurice, P.Durand, A.Reineix, « Methodology of Network Analysis using xTAN, the second geometrization approach », CMC GS2016.

e_0 est la source donnant l'énergie à la maille u_0 et e_s étant le stimuli ou perception en extrémité de Branin.

On peut alors décomposer T_ζ suivant les instants successifs intervenant dans les sources (ici τ et 2τ), soit sous une transformée en Z :

$$T_\zeta = T_\zeta^0 + T_\zeta^1 Z^{-1} + T_\zeta^2 Z^{-2}$$

ou dans un cas général :

$$T_\zeta = T_\zeta^0 + \sum_k T_\zeta^k Z^{-k}$$

Le terme T_ζ^0 peut être vue comme la perception et $M = \sum_k T_\zeta^k Z^{-k}$ comme une mémoire de profondeur et fonctionnements variables.

Temps système & énergie

Évidemment pour un système réel beaucoup plus compliqué que notre exemple, le nombre de délais et multiples va être aussi beaucoup plus important. A la limite pour un système complexe, ce nombre devient quasi infini et M résulte d'une intégrale continue sur une somme de tous les termes du passé :

$$M = \int_k dk T_\zeta(k) Z^{-k}$$

Suivant l'ordre auquel le système exploite les données passées, il arrive un moment où les données passées n'agissent plus qu'en conditions initiales sur le système mais sans influencer ses changements de trajectoires récents. Sur l'exemple précédent, on a une mémoire très courte qui porte sur les instants retardés jusqu'à 2τ , τ étant une caractéristique propre du système dans sa perception (dépendant soit d'une distance à un objet réel soit d'une inertie interne). Donc passé ce délai, les événements plus anciens ne sont plus exploités. Ils pourraient l'être par mémorisation dans une mémoire statique qui stockerait ces événements. Mais du point de vue de la dynamique du système, ils sont perdus. On peut donc dire dans ce cas que le système associé à une durée de conscience - ou une inertie d'exploitation - de 2τ .

La mémoire ou l'inertie suivant les situations, c'est à dire le développement sur M sont indispensables à

tout système physique. Ils représentent la part de réaction du système vis à vis des stimuli provenant de l'environnement ou de ses propres sources d'énergie. On peut illustrer ce principe fondamental dans le cas de la loi de Lenz. La force électromotrice induite dans une boucle vaut $-p\phi$. Mais s'il n'y a pas de réaction à cette induction, on peut créer pratiquement autant d'énergie que l'on veut en montant en fréquence. De même pour l'impulsion, s'il n'y avait pas d'inertie, on pourrait communiquer l'énergie mécanique que l'on veut. La question est alors de dire « pourquoi pas ? ». Après tout qu'est-ce qui empêcherait d'avoir autant d'énergie que l'on veut ? Un argument suffisant est de dire que l'énergie de l'univers est finie puisque l'univers est fini, que sa quantité de matière même si elle est gigantesque est finie, et que la matière c'est de l'énergie. Donc la quantité d'énergie disponible est finie, et de fait si j'en donne quelque part, je dois en rendre ailleurs. Mais lorsque l'on met en œuvre ces mécanismes de régulation, où rend-on de l'énergie ? A l'extérieur, l'environnement principalement. Car si le champ magnétique dans une boucle tend à devenir très faible par sommation des deux champs opposés d'incidence et de réaction, le champ à l'extérieur de la boucle est lui, plus important.

Attention

La perception suppose que l'on exploite avec pas trop de retard l'information fournie par des capteurs. Or on est jamais complètement et toujours attentif à toute l'information fournie par l'environnement. On pourrait penser que des capteurs d'un système cybernétique n'ont pas cette contrainte, mais en fait d'une part il faut qu'ils soient tout le temps opérationnels, ce qui n'est déjà pas trivial, et il faut ensuite être capable de traiter toute l'information fournie, ce qui peut représenter un gros volume de données à traiter. Forcément cela prendra un certain temps et ce temps de traitement peut faire que s'il devient trop long, l'information traitée est déjà obsolète, ce qui revient à revenir dans le passé, soit à ne pas être attentif au présent. Il est sûr cependant que l'électronique fait d'énormes progrès sur la perception et que des robots pourront bientôt percevoir beaucoup plus largement et précisément que certains systèmes

naturels. Des capteurs usent d'ailleurs pour partie de mécanismes du vivant. Mais il faut être précis dans ce type d'affirmation. En général les robots en question ont une mission très spécialisée et la performance est atteinte sans considération fine sur le rendement. Des systèmes naturels sont certes parfois moins performants en détection mais toujours beaucoup plus rentables en énergie et consommation. Cette différence est essentielle. Par exemple pour détecter les mines enfouies, des radars existent aujourd'hui mais très coûteux d'achat et d'entretien. Résultat les personnes des pays pauvres qui en ont le plus besoin ne peuvent se l'offrir. Heureusement on sait dresser des chiens ou des rats pour faire le même travail à moindre coût... Mais comme toujours le temps est plus long, le dressage d'un chien ne se faisant pas aussi rapidement que la construction d'un radar. *Le temps est le seul capital des gens qui n'ont que leur intelligence pour fortune.* Honoré de Balzac.

8 Séance 8 : Raisonnement probabiliste temporel

Les environnements ne sont toujours que partiellement perçus. D'une part du fait de limitations physiques, d'autre part du fait de phénomènes de « cécité d'attention ». Pour la partie perçue, des croyances viennent alimenter les attendus du monde perçu. A partir des états de croyance et d'un modèle de transition, on peut faire des hypothèses sur la façon dont le monde va évoluer.

Le modèle de transition donne la probabilité d'états au temps t étant donnés les états passés. Les modèles de capteurs eux, décrivent la probabilité de percepts au temps t pour un état du monde supposé. Le système lui, est repéré par ses états et des variables d'états invisibles qui identifient ces mêmes états ainsi que des observables Q qui sont visibles et permettent d'identifier l'état. L'ensemble du système incluant l'environnement est un système d'équations multiphysiques que l'on a construit par sommes directes des sous-systèmes qui le composent, tel qu'on l'a vu aux séances 5, 6 et suivantes. Ce système avec les intervalles de valeurs donnés aux variables, consti-

tue une variété \mathcal{M} . Si l'on considère le système à un instant particulier t_0 que l'on prend comme condition initiale, la probabilité de son existence est de 1, puisqu'on l'a créé. On note \check{u} l'ensemble des caractéristiques mathématiques associées à la variété \mathcal{M} ⁹. Nous avons appelé cette décomposition de variété en ses termes sources E , topologie T et métrique G un tenfold : $\mathcal{M} \rightarrow \check{u} : (T, G, E)$. Les états successifs du système au cours de sa vie son alors mémorisables dans un vecteur d'état v . Par exemple si l'on étudie la vie du système sur 3 temps, le vecteur v a au départ les composantes suivantes :

$$v = \begin{bmatrix} \check{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A ce vecteur est associé un vecteur d'information qui recense les probabilités associées à chaque configuration de la variété liée au système. Au départ ce vecteur est :

$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On crée une matrice, que l'on appelle aussi propagateur : γ . Cette matrice propage les états d'un instant j à un instant i dans les composantes du vecteur v par l'intermédiaire de transformations \check{t}_{ij} . Une matrice $\tilde{\gamma}$ assure le même mécanisme pour le vecteur I . Les éléments de cette matrice sont des probabilités bayésiennes de transitions entre états (c'est une matrice de Markov). Entre les états i et j on définit la probabilité :

$$P_{ji} = P(\check{u}_j | Q^k \in \check{u}_i \rightarrow \mathcal{M}) \quad (14)$$

On peut donc construire un arbre de Kuhn qui relate l'histoire du système et raccrocher d'ailleurs l'évolution de ce système à un jeu. La théorie des jeux est couplée à l'évolution matérielle du système par le biais du propagateur γ et de la matrice de Markov

9. Maurice, O., Reineix, A., & Lalléchère, S. (2014, October). Electromagnetic game modeling through Tensor Analysis of Networks and Game Theory. In IOP Conference Series : Materials Science and Engineering (Vol. 67, No. 1, p. 012015). IOP Publishing.

$\tilde{\gamma}$. En parlant de γ on sous-entend implicitement sa composante markovienne. En suivant une succession de transformations, on suit une histoire qui conduit à une performance. Cette histoire s'écrit $\gamma_N \dots \gamma_1 \gamma_0 \check{u}_0$. Le produit $v[3]I[3]$ est alors une performance - une espérance de gain partielle. Le tracé de cette performance en fonction des groupes de transformations sur lesquels on reporte les probabilités d'usage comme des coordonnées, donne une perspective efficace de l'évolution du système en vue de son analyse.

Dans ce formalisme appelé « xTAN »¹⁰ (pour Extended Tensorial Analysis of Networks), les croyances sont traduites par les amplitudes des probabilités bayésiennes.

Mémoire

Considérons un vecteur d'état ou d'information type :

$$\alpha = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Un propagateur de la forme :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

on trouve :

$$\gamma\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

et :

$$\gamma\gamma\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

Ces processus sont sans mémoire parce que les états du système aux différents instants sont oubliés. Par contre le propagateur suivant :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

engendre les vecteurs suivants :

$$\gamma\alpha = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \gamma\gamma\alpha = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$$

qui mémorise tous les états passés.

Disposant d'une structure de représentation de l'évolution temporelle d'un système on peut étudier certaines opérations et tâches d'inférences élémentaires qui sont rencontrées.

Le filtrage

est l'opération qui consiste à construire la croyance. La croyance est contenue dans les composantes de $\tilde{\gamma}$, comme élément de décision dans le second terme des probabilités de Bayes.

Prédiction

Elle revient à calculer - estimer la distribution a posteriori de l'état futur du système. Soit de calculer

$$P(\check{u}_{t+\delta t} | Q^k[\check{u}_t], \text{croyances})$$

Lissage

Le lissage consiste à réaliser certaines synthèses d'états a posteriori, pour aider à la décision par exemple. Cela revient à conduire une réflexion en « prenant du recul ». De fait cette opération évite les oscillations.

Formule de Bayes

Le calcul des probabilités peut s'avérer être compliqué. La formule de Bayes permet de fixer la probabilité a posteriori en fonction de celle a priori. Elle est essentielle tant dans la simplification des calculs que dans le sens de leurs interprétation. Partant de :

$$P(A|B)P(B) - P(B|A)P(A) = 0 \quad (15)$$

¹⁰. Olivier Maurice, Philippe Durand. Modélisation des systèmes complexes. : Présentation des grands principes de la méthode xTAN. Présentation effectuée lors de la réunion du groupe CESIR de l'AFSCET à l'ESIGEELEC, le 19 décembre.. 2015. <hal-01246740>

on déduit :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (16)$$

Apprentissage

L'ensemble des états et performances liées pour un état initial constitue un apprentissage. Mais retenir tous les détails associés à chaque expérience, chaque aventure demanderait des mémoires de tailles infinies. De plus la recherche des cas similaires pour exploiter l'expérience - ce qui constitue la base de l'apprentissage - prendrait un temps infini pour scruter cette base de données sans fin. Les listes que l'on peut mémoriser pour retenir des cas passés doivent donc être des listes qui exploitent l'analogie. Ce processus on l'a dit, est très fort dans notre propre cerveau. C'est pourquoi des formes qui évoquent des choses connues sont souvent assimilées à ces choses, ce qui engendre des illusions. Or, à partir d'une condition d'état initial, le propagateur contient toute l'information pour reconstruire l'expérience. Sa mémorisation constitue donc quelque part l'apprentissage. Mais pour un jeu (un arbre de Kuhn complètement décrit), la trajectoire la plus performante est bien connue a posteriori. On peut donc mémoriser la seule trajectoire optimale. L'analogie sera ensuite beaucoup plus efficace. Cela explique aussi que pour des histoires très simples, on retrouve pour quasiment tous les joueurs les mêmes stratégies et trajectoires (par exemple pour faire chauffer de l'eau il n'y a pas lieu d'imaginer des milliers de combinaisons d'actions et transformations. Toutes les histoires se rejoignent !). Par contre pour des situations plus compliquées, suivant les profils psychologiques des joueurs, on pourra avoir des trajectoires optimales différentes. De cela découle aussi le fait que les processus analogiques sont propres à chacun, même s'ils se rejoignent du fait d'une **culture commune**.

Notons que le propagateur peut être construit au fur et à mesure que le système avance dans son histoire.

La mémoire et l'apprentissage associé du passé peut donc s'écrire comme un ensemble $\mathbb{M} = \{(\tilde{u}_i, \gamma_i)\}$. La mémoire constituant strictement le seul

ensemble des variétés rencontrées. L'analogie va donc consister à rechercher dans \mathbb{M} si un élément rencontré y est déjà présent. On écrit $\mathcal{M} = (\mathcal{E}_M, [\mathcal{M}])$, \mathcal{E}_M est le système d'équations associé à la variété et $[\mathcal{M}]$ est le système d'inégalités associé à la variété.

L'analogie va donc consister à comparer deux objets \mathcal{E}_M et $\mathcal{E}_{M'}$ ou deux systèmes $[\mathcal{M}]$ et $[\mathcal{M}']$. Cette dernière comparaison est facile. Mais on sait que l'on peut avoir deux scènes identiques au sens de la perception humaine sans qu'elles soient identiques strictement mathématiquement. C'est ici que la culture commune va décider d'écarts acceptables dans les bornes de certaines observables. Cela suppose que l'on peut déjà réduire la comparaison aux seules observables en excluant les paramètres cachés, non accessibles à la mesure par des percepts. L'acceptation des écarts se fait en excluant les valeurs qui sortent d'écarts crédibles. C'est à dire que l'on affirme que toute variété dont les intervalles des paramètres s'éloignent de plus d'une certaines distances de ceux d'une autre variété ne peuvent pas être de façon crédible des variétés similaires, analogues. On effectue donc un filtrage en calculant les écarts acceptables à des valeurs attendues. Ceci s'appelle un **filtre de Kalman**. En général ces filtres sont probabilistes. On va associer une probabilité d'autant plus faibles de correspondances entre des grandeurs que la distance entre ces grandeurs est importante. On peut utiliser des filtres de Kalman pour gérer du déplacement, de la reconnaissance, ou pour chiffrer les probabilités bayésiennes sur des critères d'appartenance à des intervalles de valeurs extrapolées et possibles dans le cadre d'un processus physique connu. Par exemple je vois un oiseau en vol et je peux délimiter la zone dans laquelle il peut se trouver l'instant d'après en exploitant des valeurs connues de vitesse de vol des oiseaux.

La comparaison des systèmes \mathcal{E}_M et $\mathcal{E}_{M'}$ est moins évidente mais plus profonde. On ne regarde pas seulement ici les correspondances en intervalles, mais carrément les structures des variétés. De nouveau on peut profiter de la décomposition en tenfold pour comparer les types entre eux. Dans le cas du propagateur, on se dote déjà d'une petite algèbre pour appliquer un transformateur \check{t} à un tenfold $\check{u} : \check{t} \cdot \check{u}$. Le transformateur $\check{t} = (\lambda_T, \lambda_G, \lambda_E)$ doit agir sur cha-

cune des composantes du tenfold (T, G, E) suivant l'algèbre :

$$\check{t} \cdot \check{u} = \left(\lambda_T T, [\lambda_G]^T G \lambda_G, \lambda_E E \right) \quad (17)$$

On se dote donc d'une petite règle d'algèbre supplémentaire pour comparer deux tenfolds. Normalement la seule comparaison des métriques devrait suffire à estimer la similitude entre les deux variétés comparées. On peut l'exprimer par exemple sous la forme :

$$P(\check{u} \approx \check{v} | G_u, G_v) = \frac{K}{1 + \beta e^{-a(\epsilon - D)}} \quad (18)$$

on utilise une fonction logistique jugeant l'écart entre les deux métriques à partir du réel D . D est une « distance » entre les deux métriques calculée comme le déterminant des différences entre leurs composantes. Il reste à définir cette différence quand les composantes sont des opérateurs ? Ce peut être 0 ou 1 par comparaison de leurs expressions mathématiques.

$$D = \det(G_u - G_v)$$

La valeur ϵ est la borne haute d'écart accepté. Suivant les familles de types de choses catégorisant les variétés, cette valeur peut-être plus ou moins importante. Par exemple l'analogie entre deux personnes engendre une limite d'acceptation plus grande qu'entre deux cubes, traduisant la plus grande variété des observables renvoyant cependant à la même chose dans le premier cas.

Défaillances dans les capteurs

Les signaux issus des capteurs alimentent les sources E . Si l'on dispose d'une redondance ou de perception multi-modale, on a pour un percept plusieurs capteurs. De fait sur un ensemble de perceptions $\{E_k\}$, le maintien de signal sur N capteurs alors que 1 capteur s'écarte des valeurs délivrées attendues est un signe de défaillance du capteur. La défaillance peut être temporaire ou définitive. Ce qui est intéressant ici, au-delà des interprétations dans l'assurance de missions fonctionnelles et la détection de défaillances fonctionnelles à ne pas interpréter comme des signaux réels, est d'étudier l'impact d'une perturbation de compatibilité électromagnétique (CEM).

Si un système vit une « attaque » électromagnétique, sa trajectoire suivra un profil du type $\gamma_{0p} \gamma_p \gamma_{p0} \check{u}_0$ où γ_p est un propagateur vers un mode perturbé fugitif. On peut alors analyser ce type de situation et trouver des stratégies de protection, par exemple avec des modes refuges activés pendant la phase perturbée. Notons que le propagateur, du fait de notre hypothèse précédente, agit sur les seuls termes sources en provenance des capteurs. Le formalisme permet ainsi d'étudier théoriquement la réponse de systèmes en environnements sévères.

Modèles quantiques

Dans le filtrage de Kalman, on cherche à calculer le futur du système dans un cadre d'hypothèses apparaissant comme des possibles, pour une physique donnée. Le modèle quantique est différent : une particule a une probabilité de présence définie pour un espace de configuration donné. C'est ensuite la « mesure » appliquée à la particule qui va la projeter dans l'espace perceptible et la positionner en un lieu unique. Le filtrage particulaire ressemble ainsi au processus quantique où la probabilité de détection d'une particule de fonction d'onde donnée est fixée par le processus d'effondrement. Par exemple pour la localisation, la particule peut être présente partout à la fois. Mais en comparant ses propriétés à celles qu'elle peut avoir en des lieux précis, on restreint récursivement les lieux possibles de sa présence effective sous des conditions données. On effectue une pondération par la vraisemblance. On « lance » N scrutations γ_k . Pour chaque scrutation, on explore les valeurs attendues des observables avec les mesures $\epsilon = |Q^k - Q'^k(\gamma_k)|$. Pour une vraisemblance ϵ on peut chiffrer la probabilité de correspondance entre l'état courant et les états envisagés, par exemple en utilisant une gaussienne

$$P(\check{u} = \check{v} | \check{v}_k) = e^{-\left(\frac{\epsilon(k)}{\sigma}\right)^2}$$

9 Séance 9

Pour préciser certains des points des techniques que nous avons évoqué, nous allons imaginer un petit robot très simple. Il est pourvu de petits moteurs pour

se déplacer et on repère sa position en deux dimensions x, y . Il est pourvu d'un radar laser dont on analyse l'écho. Ce système se ramène à trois mailles : une maille pour chaque direction de déplacement et une maille pour le radar.

Les mailles de déplacements intègrent les sollicitations e_x et e_y pour activer les déplacements correspondants. Elles sont caractérisées par une inertie

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \frac{d}{dt}$$

Le radar peut être modélisé par une fém ramenée traduisant l'écho des ondes émises, en série avec l'impédance d'une structure de ligne adaptée :

$$\begin{cases} e_r = (\eta - \zeta) i^e e^{-\tau p} \\ i^e = e_0 e^{-\tau p} (\eta + \zeta)^{-1} \end{cases}$$

Ces équations sont déduites de celles de Branin pour une structure propagative d'impédance ζ . A partir de ces deux équations, on détermine facilement la tension d'écho :

$$e_r = \left(\frac{\eta - \zeta}{\eta + \zeta} \right) e_0 e^{-2\tau p} \quad (19)$$

L'impédance du circuit du laser est 2ζ . e_0 est le générateur d'impulsion laser. L'analyse du courant dans la maille laser est à l'image de la perception des objets réfléchissant le rayon et en face du générateur. La matrice des propriétés pour ce système est :

$$z = \begin{bmatrix} m_{11} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta \end{bmatrix}$$

Et le vecteur des sources est :

$$E = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_0 - e_r \end{bmatrix}$$

Le vecteur des flux inconnus est donné par :

$$i = \begin{bmatrix} v^x \\ v^y \\ J \end{bmatrix}$$

L'équation

$$E_\alpha = z_{\alpha\beta} i^\beta \quad (20)$$

peut alors être vue comme celle d'une surface paramétrée ϕ . Mais si l'on en cherche les vecteurs de base, on trouve des vecteurs nuls pour les deux directions. Cela vient du fait que les générateurs de mouvement doivent comporter, pour être physiques, des éléments de dissipations. On définit :

$$z = \begin{bmatrix} \sigma_{11} + m_{11} \frac{d}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} + m_{22} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta \end{bmatrix} \quad (21)$$

et on trouve :

$$\mathbf{b}_x = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{22} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\zeta \end{bmatrix}$$

qui engendre la métrique :

$$G = \begin{bmatrix} (\sigma_{11})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{22})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\zeta^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Pour retrouver l'équation de Kron (équation 20 pour l'objet fondamental 21), on peut écrire le jacobien : $J = [\mathbf{b}_x \quad \mathbf{b}_y \quad \mathbf{b}_J]$.

On a :

$$J_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta \end{bmatrix}$$

Si :

$$m_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors : $20 \Leftrightarrow E_\alpha = (J_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} \frac{d}{dt}) i^\beta$. Soit $\Gamma = J^{-1}$, on trouve :

$$\Gamma^{\gamma\alpha} E_\alpha = \Gamma^{\gamma\alpha} \left(J_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} \frac{d}{dt} \right) i^\beta$$

On peut encore multiplier par la métrique unitaire $g_{\sigma\gamma}$:

$$g_{\sigma\gamma}\Gamma^{\gamma\alpha}E_\alpha = g_{\sigma\gamma}\Gamma^{\gamma\alpha}\left(J_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta}\frac{d}{dt}\right)i^\beta \quad (23)$$

or $g_{\sigma\gamma}\Gamma^{\gamma\alpha}J_{\alpha\beta} = G_{\sigma\beta}$ qui est une métrique riemannienne. Définissons alors :

$$g_{\sigma\gamma}\Gamma^{\gamma\alpha}E_\alpha = T_\sigma$$

et

$$g_{\sigma\gamma}\Gamma^{\gamma\alpha}m_{\alpha\beta} = \mathcal{L}_{\sigma\beta}$$

L'équation 23 devient alors :

$$T_\sigma - \mathcal{L}_{\sigma\beta}\partial_t i^\beta = G_{\sigma\beta}i^\beta \quad (24)$$

On calcule les termes :

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} e_x(\sigma_{11})^{-1} \\ e_y(\sigma_{22})^{-1} \\ 2(e_0 - e_r)\zeta \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{\sigma\beta} = \begin{bmatrix} m_{11}(\sigma_{11})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}(\sigma_{22})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notons, point important, que dans l'équation 24 nous avons reporté à gauche tous les termes sources et d'inertie.

Nous pouvons par ailleurs fixer les domaines auxquels appartiennent les variables. Imaginons que la vitesse en x ou y ne peut dépasser 1 m/s. Le courant radar lui est compris entre $e_0(\zeta)^{-1}$ si l'écho se somme à la source radar et 0 si l'écho renvoie toute la puissance émise en opposition. On a donc :

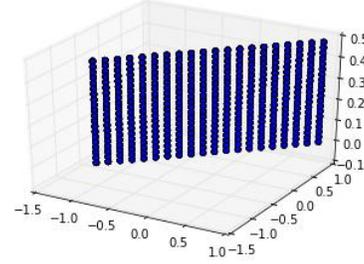
$$\begin{cases} v^x \in [-1, 1] \\ v^y \in [-1, 1] \\ J \in \left[0, \frac{e_0}{\zeta}\right] \end{cases} \quad (25)$$

Les deux systèmes 24 et 25 constituent une variété \mathcal{M} qui représente notre système.

Autant si l'on veut tracer cette variété, le terme de gauche de l'équation 24 n'est pas facile à employer, autant on peut facilement tracer :

$$S = \sqrt{G_{\mu\nu}i^\mu i^\nu} \quad (26)$$

La figure suivante trace $S(v^x, v^y, J)$ en fonction des deux seules vitesses (pour avoir une représentation en 3D et en divisant par 8000 la valeur de S).



La grandeur S est scalaire et est liée à l'énergie associée au système dans ses différentes configurations. Je vous livre ci-dessous le programme où j'ai peut-être fait une erreur !

```

14 s11=1.
15 s22=1.
16 zeta=50.
17 N=20
18 eo=100.
19 G=[[s11**2.,0.,0.],[0.,s22**2.,0.],[0.,0.,4.*zeta**2.]]
20 curbe=np.zeros((N*N,3),dtype=float)
21
22 reper=0
23
24 for iix in range(N):
25     vx=(-N/2.+iix*1.)*2/N
26     for iyy in range(N):
27         vy=(-N/2.+iix*1.)*2/N
28         for ijj in range(N):
29             J=iij*eo/zeta
30             iv=[[vx],[vy],[J]]
31             invi=[vx,vy,J]
32             inva=np.dot(G,iv)
33             inva=np.dot(invi,invai)
34             curbe[reper,:]=[vx,vy,(np.sqrt(abs(inva))/8000.)]
35             reper=reper+1
36
37 fig=plt.figure()
38 ax=fig.add_subplot(111,projection='3d')
39 ax.scatter(curbe[:,0],curbe[:,1],curbe[:,2])
40 plt.show()

```

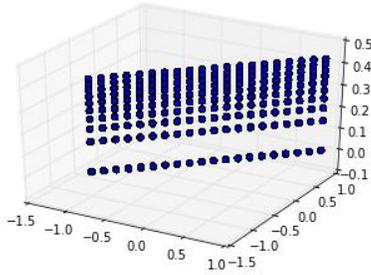
Maintenant, nous pouvons quand même essayer de calculer le terme de gauche de l'équation 24. On peut « bidouiller » en cherchant l'expression de :

$$\sqrt{S^2} = \sqrt{i^\sigma \left(\int_t dt T_\sigma - \int_t dt \mathcal{L}_{\sigma\beta} \frac{d}{dt} i^\beta \right)}$$

en supposant des courants et des sources constants. Cette expression permet de supprimer la dérivation pour obtenir :

$$S = \sqrt{i^\sigma \left(\int_t dt T_\sigma - \mathcal{L}_{\sigma\beta} i^\beta \right)}$$

traçons alors comme précédemment cette fonction mais en introduisant une fonction d'écho e_r perturbée à un moment du temps et devenant nulle. Avec une normalisation différente (car il faut régler la source e_0 pour avoir les mêmes amplitudes) on obtient le dessin suivant :



Où l'on voit que la perturbation rajoutée vient créer des zones non couvertes dans la variété. Avec un échantillonnage plus important (mais un temps de calcul plus long), on mettrait sans doute en évidence la création d'une bande interdite que l'on perçoit déjà nettement ici.

```

14 s11=1.
15 s22=1.
16 zeta=50.
17 N=20
18 eo=100.
19 m11=1.
20 m22=1.
21 ex=1.
22 ey=1.
23 G=[[s11**2.,0.,0.],[0.,s22**2.,0.],[0.,0.,4.*zeta**2.]]
24 Luv=[[m11/s11,0.,0.],[0.,m22/s22,0.],[0.,0.,0.]]
25
26 fig=plt.figure()
27 ax=fig.add_subplot(111,projection='3d')
28
29 for time in range(10):
30     curbe=np.zeros((N*N*3),dtype=float)
31     coef=1.-1./(1.+np.exp(-(10-time)))
32     #coef=1.
33     reper=0
34
35     for iix in range(N):
36         vx=(-N/2.+iix*1.)*2/N
37         for iiy in range(N):
38             vy=(-N/2.+iix*1.)*2/N
39             for ij in range(N):
40                 er=coef*Ij*eo/N
41                 Tu=[[ex/s11],[ey/s22],[2.*(eo-er)*zeta]]
42                 iv=[[vx],[vy],[(eo-er)/zeta]]
43                 ivi=[vx,vy,(eo-er)/zeta]
44                 invai=np.dot(Luv,ivi)
45                 inva=np.dot(ivi,np.array(Tu)*time-invai)
46                 curbe[reper,:]=|vx,vy,(np.sqrt(abs(inva)))/1000.]]
47                 reper=reper+1
48
49     ax.scatter(curbe[:,0],curbe[:,1],curbe[:,2])
50
51 plt.show()

```

Évidemment on aurait pu comparer les flux dans les deux cas perturbé ou non. Mais si le système étudié comporte des milliers de ces flux, l'exercice devient difficile. Alors que l'équation :

$$\epsilon = \int_t dt \left(\sqrt{\tilde{T}_\sigma i^\sigma - \mathcal{L}_{\sigma\beta} \partial_t i^\beta i^\sigma} - \sqrt{G_{\sigma\beta} i^\sigma i^\beta} \right) \quad (27)$$

où \tilde{T}_σ est le covecteur des sources avec des sources de bruit, peut permettre de détecter des déviations de façon beaucoup plus synthétiques.

10 Séance 10

Pour aborder les concepts de perception, on peut considérer une électronique pourvue d'une antenne et réfléchir sur la perception de l'environnement que peut retranscrire une telle antenne.

Notre antenne est un tronçon de ligne bifilaire. Considérons ainsi une ligne de hauteur entre fils suivant la direction y , de longueur suivant l'axe x . Si en un point x quelconque, un champ magnétique vient illuminer localement la ligne sur une longueur dx , quelle sera la fém perçue en extrémité de ligne ?

Sur le tronçon en position x et une longueur dx la fém induite vaut :

$$de = -dx h_y p B_i$$

Où h_y est la hauteur entre fils, p l'opérateur de Laplace et B_i le champ magnétique incident. Cette fém alimente les deux côtés de la ligne. On retrouve donc comme tension propagée d'un côté de la ligne :

$$e_l = -\frac{1}{2} \int_x de e^{-\gamma x} = -\frac{1}{2} \int_x dx h_y p B_i e^{-\gamma x} \quad (28)$$

Cette tension doit être multipliée par deux pour obtenir la tension de circuit ouvert, et on obtient :

$$e_l = -h_y p B_i \int_{x=0}^L e^{-\gamma x} = -h_y p B_i \frac{-1}{\gamma} [e^{-\gamma x}]_0^L$$

on trouve :

$$e_l = \frac{h_y p B_i}{\gamma} (e^{-\gamma L} - 1)$$

A l'autre extrémité de la ligne nous obtenons :

$$e_r = h_y p B_i \int_{x=x}^L e^{-\gamma(L-x)} = h_y p B_i e^{-\gamma L} \frac{1}{\gamma} [e^{\gamma x}]_0^L$$

soit :

$$e_r = \frac{h_y p B_i}{\gamma} e^{-\gamma L} (e^{\gamma L} - 1) = \frac{h_y p B_i}{\gamma} (1 - e^{-\gamma L})$$

Bon, ok, on a pu calculer la fém induite par le champ sur une ligne ici perpendiculaire à la direction de propagation du champ. Et après, que peut-on en faire? On peut simplement ajouter les fém calculées aux fém de Branin, qui modélisent la ligne. Il faut juste faire attention, suivant l'incidence du champ B , aux signes affectés aux deux fém induites. Par ailleurs, les champs incidents B_i peuvent ne pas arriver avec une même phase sur l'antenne.

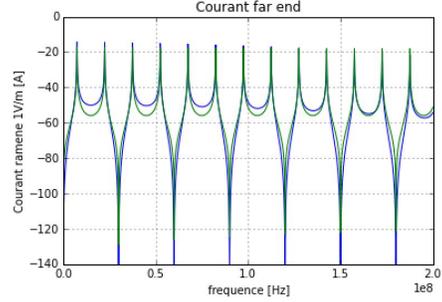
La structure d'un branin est la suivante (rappel) :

$$z = \begin{bmatrix} z_0 + z_c & (z_c - z_L) e^{-\gamma L} \\ (z_c - z_0) e^{-\gamma L} & z_c + z_L \end{bmatrix}$$

avec un covecteur des sources :

$$w = \begin{bmatrix} e_0 - e_l \\ e_0 e^{-\gamma L} + e_r \end{bmatrix}$$

Une comparaison de ce résultat dans le cas d'une illumination synchrone a été faite avec la formule de Smith, tirée de la théorie des lignes. La figure suivante montre cette comparaison où les écarts proviennent d'erreurs numériques sur le modèle des télégraphistes.



Si la ligne est adaptée, le branin se réduit aux termes diagonaux et si on annule toute alimentation, la perception s'obtient directement par les tensions aux bornes des charges z_c adaptées. Le covecteur w se réduit à :

$$w = \begin{bmatrix} h_y p \int_0^L dx B_i(x) e^{-\gamma x} \\ h_y p e^{-\gamma L} \int_0^L dx B_i(x) e^{\gamma x} \end{bmatrix}$$

On peut se contenter de mesurer la tension à une seule extrémité pour percevoir la vue que l'antenne a de son environnement. L'antenne est d'ailleurs utilisable dans les deux sens, en émission et en réception. On peut en profiter pour alimenter la ligne en émission à une extrémité et mesurer en réception à l'autre extrémité. Cela a l'avantage de pouvoir aussi mesurer l'émission, ce qui peut servir de référence temporelle.

Pour analyser la vue que l'on peut avoir de l'environnement, considérons un flash électromagnétique qui vient alimenter tous les objets proches. On s'intéresse alors à toutes les diffractions qui renvoient un signal vers l'antenne. Une façon équivalente de traiter le problème consiste à voir les diffractions comme autant d'antennes d'émissions. Si on regarde qu'une sortie, la mesure s'exprime par :

$$V_m = \frac{1}{2} h_y p \int_0^L dx B_i(x) e^{-\gamma x} \quad (29)$$

Face à un objet plan, on retrouve la réponse calculée précédemment. Par contre pour une distribution de sources quelconques Ω épousant la surface d'un objet suivant deux abscisses curvilignes u et v , on peut caractériser $i(u, v) \in \mathbb{C}$. On peut ensuite projeter les couples (u, v) dans un volume 3D choisi de référentiel \mathcal{R}_0 :

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \end{cases}$$

Si les points d'une ligne au centre de la ligne-antenne (il suffit de connaître ces points, sous hypothèse d'une longueur d'onde grande devant la hauteur de ligne, pour calculer l'induction) sont de coordonnées $(x \in \{z_0, \dots, z_N\}, y_a, z_a)$, avec une distance des fils au centre ϵ , on trouve l'induction issue de la scène par :

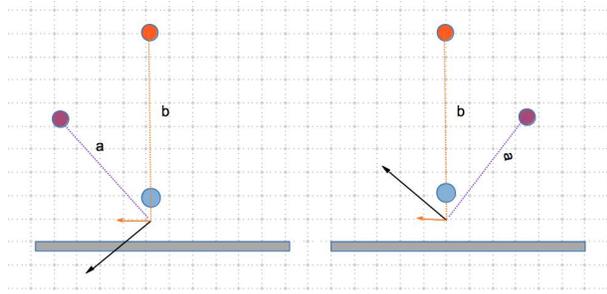
$$B_i(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_u \int_v dudv \left[\nabla \times \frac{i(u, v) \mathbf{d}\mathbf{l} e^{-jkR(x)}}{R(x)} \right] \cdot \mathbf{n}_y \quad (30)$$

avec

$$R = \dots \sqrt{(x(u, v) - x)^2 + (y(u, v) - y_a)^2 + (z(u, v) - z_a)^2}$$

, $\mathbf{d}\mathbf{l}$ le vecteur associé à la circulation de courant d'amplitude i en (u, v) et \mathbf{n}_y le vecteur normal à la section de la ligne en tout point x de cette ligne.

En remplaçant B_i dans (29) par (30) on fait le lien entre la scène réelle (Ω) et la tension V_m mesurée en pied d'antenne. La réduction est drastique! Mais si on travaille en temporel, on pourra identifier la scène comme un spectre d'impulsions, dont les caractéristiques d'amplitudes et temporalité peuvent déjà ségréguer un nombre conséquent d'images différentes. Les instants d'arrivées des impulsions sont aussi porteurs d'information. Cependant notre relation $\Omega \rightarrow V_m$ n'est pas une application. Imaginons un cas simple avec Ω réduit à deux sources.



Bien que mon dessin ne soit pas très bien fait, on comprend que dans les deux cas on trouvera le même

spectre d'impulsions, du fait entre autre de la projection du champ magnétique suivant la normale à la section entre le fil et le plan de masse (cela aurait pu être entre deux fils). Comment pourrait-on résoudre cette indétermination? En plaçant un deuxième capteur, mais cela coûterait plus cher. Et est-ce que ça ne serait pas une façon de reporter le problème? Si! Pour le démontrer on peut partir de l'acquisition : d'un spectre d'impulsion δ_t quelconque S :

$$\forall \delta_t \in S, \exists (i^1, i^2) / i^1 = |i^1| e^{j\phi_1}, i^2 = |i^2| e^{j\phi_2}$$

$$V_m(i^1) = \frac{1}{2} h_y p \int_0^L dx B_1(i^1, r_1) e^{(j\phi_1 - \gamma x - \frac{r_1}{c})}$$

$$V_m(i^2) = \frac{1}{2} h_y p \int_0^L dx B_2(i^2, r_2) e^{(j\phi_2 - \gamma x - \frac{r_2}{c})}$$

Posons L très petit, car après tout, le fait d'avoir une antenne longue ne fait qu'intégrer l'information en provenance de l'environnement. Le problème devient alors de savoir si :

$$B_1(|i^1|, r_1) e^{(j\phi_1 - \frac{r_1}{c})} = B_2(|i^2|, r_2) e^{(j\phi_2 - \frac{r_2}{c})}$$

Il est évident que l'on peut trouver des couples $(\phi_1, r_1), (\phi_2, r_2)$ et $(|i^1|, r_1), (|i^2|, r_2)$ qui assurent cette égalité. Si c'est vrai pour deux points ça l'est d'autant plus pour N où l'on aura N combinaisons possibles.

Comme on positionne les impulsions par rapport à l'impulsion de référence à l'émission, on sait discerner une source faible mais proche d'une source forte mais lointaine. Mais ceci à condition que ϕ_1 et ϕ_2 soit égaux, sans quoi en jouant sur la phase à l'émission, un point proche peut arriver avec le même retard qu'un point lointain. Le problème est que l'espace de départ dispose de trois degrés de liberté par point : la distance, la phase à l'origine et l'intensité. Alors que l'espace en réception n'en a que deux : la phase et l'amplitude. De fait on réduit la complexité d'origine et on perd de l'information. Est-ce vraiment gênant? Dans le cas présent oui car on peut croire un objet loin alors qu'il est proche. On va donc lui rentrer dedans!

Une technique peut consister à se déplacer et analyser l'image suite à ce déplacement. Si on résume la perception à une fonction du type

$$\frac{\alpha}{r}e^{-\beta r} + \frac{\alpha}{s}e^{-\beta s}$$

où r et s sont deux distances à deux points ; alors un déplacement dans la seule direction r va ajouter l'information :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha}{r}e^{-\beta r} + \frac{\alpha}{s}e^{-\beta s} \right) = -\frac{\alpha}{r^2}e^{-\beta r} - \frac{\beta\alpha}{r}e^{-\beta r}$$

Si l'amplitude varie, le déphasage lui, ne comporte plus que le retard du premier terme. Par un petit déplacement dans une direction particulière on a donc identifié l'une des deux sources. En observant la variation du spectre d'impulsion on déduit la localisation des sources. Seulement de nouveau on fait une hypothèse importante dans cette analyse pour arriver à ce résultat : la scène est fixe. Si la scène est mobile, on comprend que l'on va de nouveau avoir des indéterminations. Le cas le plus simple pour affirmer cela est le cas où l'objet bouge à la même vitesse et dans la même direction que l'observateur. La déformation de perception est un sujet passionnant qui va nous amener à discuter des notions de relativité.

11 Séance 11

Le hasard des événements scientifiques fait que la première mesure d'ondes gravitationnelles arrive au moment où nous nous apprêtons à parler de référentiel (annonce au 12 février 2016). Pour comprendre le sens de ces ondes il nous faut acquérir des notions fondamentales en général, que la méthode de Kron permet d'approcher de façon peut être plus « pratique ».

Dans la vie de tous les jours, on considère en général que l'on se trouve dans le même référentiel que les perceptions que nous recevons. C'est une vraie difficulté de faire l'effort intellectuel d'imaginer qu'une perception soit déformée par le fait qu'elle provienne d'un objet qui ne se trouve pas dans le même référentiel que l'observateur. Il y a cependant quelques exemples qui forcent à la réflexion. Le plus célèbre, mais aussi parce qu'il a été vécu par nombre d'entre nous est celui du train. Un train qui se déplace à la

vitesse v_t émet une impulsion qui se déplace à la vitesse v_p reçue par un observateur à la distance d au bout d'un temps $t = d/(v_t + v_p)$. Ce temps est plus court que si l'impulsion était émise par une structure au repos par rapport à l'observateur (d/v_p). Et ceci d'autant que la distance est faible. C'est pourquoi, en voyant le son comme une succession de particules distantes d'un temps t , on comprend que le son devient de plus en plus aigu à mesure que le train se rapproche de l'observateur. Si l'on note t le temps de l'observateur, la distance entre le train et l'observateur est $d(t) = L - v_t \cdot t$, L étant une distance au temps de démarrage du train. Si T_0 est la période d'émission des impulsions dans le train, la première impulsion est reçue au bout d'un temps $t_0 = L/v_p$. L'impulsion suivante est reçue au bout du temps

$$t_1 = \frac{(L - v_t \cdot T_0)}{v_p}$$

Le premier écart de temps vaut donc

$$\Delta t = (t_1 - t_0) = -\frac{v_t \cdot T_0}{v_p}$$

La période perçue est donc plus petite que T_0 d'un facteur

$$1 - \frac{v_t}{v_p}$$

d'où l'impression que le son est plus aigu.

Si la vitesse du train est nulle, la période n'est pas affectée. Si elle est proche de la vitesse de la particule, la période tend vers zéro. Ce dernier résultat est moins intuitif. Imaginons que le train va à une vitesse égale à v_p . En fait la vitesse de la particule peut être vue comme la vitesse de l'information. C'est le message qu'envoie la particule pour nous parler. Or si la vitesse du train va plus vite que la vitesse de l'information, le porteur de l'information arrive plus vite que le message n'a de temps pour être émis. C'est le facteur qui arrive avant que vous n'avez pu écrire votre lettre. De fait la période se réduit à zéro parce que l'impulsion suivante n'est pas partie que le train est déjà arrivé, c'est un peu l'idée ! Ce raisonnement et le questionnaire associé sont très important. On comprend ici deux choses fondamentales :

1. on s'intéresse ici à un changement de référentiel quand quelque chose bouge dans quelque chose qui bouge ;
2. lorsque le référentiel va vite, la perception devient absolument non intuitive.

Le premier point peut paraître étonnant. Mais c'est bien là le problème. Lorsqu'un objet bouge, on perçoit cet objet parce que de l'information est émise depuis cet objet. De fait même lorsque l'on tient des discours du type « un objet au repos dans un référentiel en mouvement », on peut ramener le problème dès lors que l'on observe l'objet à « un objet au repos qui émet des photons dans un référentiel en mouvement ». Auquel cas on se retrouve dans la situation du train. Tout le problème de la relativité est là : l'interaction entre les objets passe par l'échange d'information. Lorsque des objets bougent, cet échange est affecté. On peut même affirmer que dès lors qu'un objet bouge, on ne communique plus directement avec lui. Il ne se trouve plus dans le même référentiel que nous et nous n'habitons plus le même monde. On aurait bien envie de dire que nous sommes dans le même univers, et c'est ce que nous faisons intuitivement tous les jours. Mais c'est faux ! Et nous rejoignons ici la discussion précédente sur la perception. Quand je pilote mon drone à distance, je ne perçois la réalité de ce drone que par le biais des photons qu'il m'envoie. Mais cette perception peut être déformée et au final je n'ai pas accès à la réalité du drone et de ce qui se passe dans son référentiel. C'est embêtant, mais c'est comme ça ! Nous avons quand même quelques exemples magiques qui nous rappellent à cette « réalité ». Un célèbre est le phénomène des mirages. Ici nul question d'attention, d'illusion d'optique ou d'hallucination, mais bien d'effet de transformation de l'émission d'un objet pour nous le faire apparaître déformé et en un point différent de sa situation réelle.

Nous avons pour l'instant considéré un mouvement relatif rectiligne. Mais qu'en est-il des rotations relatives ?

Problème général du changement de référentiel

Il faut citer les auteurs du cours de physique de Berkeley « l'outil intellectuel le plus puissant que l'on connaisse en physique est le changement de référentiel à partir duquel on observe le processus ».

Un système est observé depuis deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre \mathcal{R} et \mathcal{R}' . On peut toujours considérer \mathcal{R} immobile, ce qui revient à dire que nous appartenons à ce référentiel. On peut alors qualifier d'absolues les mesures effectuées dans \mathcal{R} . Celles réalisées relativement à \mathcal{R}' sont dites relatives. On admet par ailleurs que tout appareil de mesure dans \mathcal{R} peut exister également et de façon parfaitement identique dans \mathcal{R}' .

D'une manière générale on considère un premier système physique caractérisé par les variables (x_0, \dots, x_n) . Une observable A ou mesure est représentée par une fonction $a = a(t, \dots, x_n)$. De même dans \mathcal{R}' nous aurons des variables (x'_0, \dots, x'_n) et des mesures $a' = a'(t', \dots, x'_n)$. Dans les deux référentiels on définit une évolution $(t(\tau), \dots, x_n(\tau))$ et $(t'(\tau), \dots, x'_n(\tau))$. Le problème se pose comme étant de trouver les relations entre les valeurs x_k et x'_k ainsi que les relations entre les mesures.

Si l'on considère un point dans \mathcal{R} : $\mathbf{P} = x^k \vec{e}_k$. Ce point est repéré dans \mathcal{R}' par $\mathbf{P} = y^k \vec{u}_k$. Si l'on dispose d'une transformation telle que $\vec{u}_k = \lambda_k^q \vec{e}_q$, on peut exprimer \mathbf{P} suivant :

$$\mathbf{P} = y^k \vec{u}_k = y^k \lambda_k^q \vec{e}_q \Rightarrow x^q = y^k \lambda_k^q$$

Maintenant, si l'on parle de mouvement, on écrira ces expressions en faisant apparaître un paramètre qui permet de rythmer ce mouvement. En général ce paramètre est le temps. Supposons que le point \mathbf{P} est au repos dans le référentiel \mathcal{R}' . On écrit :

$$\mathbf{P} = y^k(t) \vec{u}_k = y^k(t) \lambda_k^q(t) \vec{e}_q \Rightarrow x^q(t) = y^k(t) \lambda_k^q(t)$$

La vitesse du point dans le référentiel \mathcal{R} est alors donnée par :

$$\frac{d}{dt} x^q(t) = \frac{d}{dt} y^k(t) \lambda_k^q(t) + y^k(t) \frac{d}{dt} \lambda_k^q(t)$$

Or

$$\frac{d}{dt}x^q(t) = \vec{v})_{\mathcal{R}} \quad \frac{d}{dt}y^k(t) = \vec{v})_{\mathcal{R}'}$$

d'où :

$$\vec{v})_{\mathcal{R}} = \vec{v})_{\mathcal{R}'} + y^k(t) \frac{d}{dt} \lambda_k^q(t)$$

Cette relation et la démarche sont très générales. Mais pour pouvoir exprimer la dérivée il a fallu que nous trouvions un paramètre commun aux deux référentiels. Dans l'espace-temps, ce paramètre ne peut plus être le temps puisque le temps est lui-même une variable. Il est donc transformé d'un référentiel à l'autre et n'est plus un paramètre commun.

Considérons un circuit défini par la métrique suivante :

$$z = \begin{bmatrix} Lp & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

Imaginons un changement de référentiel : $i^\alpha = C_k^\alpha j^k$. L'équation $e_\mu = z_{\mu\alpha} i^\alpha$ devient :

$$e_\mu = z_{\mu\alpha} C_k^\alpha j^k$$

Si la variable i^0 est le paramètre qui m'intéresse et que je veux calculer $\partial_{i^0} e_\mu$ ça ne colle pas car si i^0 est bien l'une des variables du premier espace, il n'appartient pas au second. Il faut trouver un invariant, une grandeur qui ne soit pas affectée par le changement de référentiel. Une grandeur qui fonctionne en général est la puissance s^2 . La puissance dissipée par les circuits ne dépend pas des façons dont on décrit ces circuits (ne dépend pas du référentiel). On définit :

$$s = \sqrt{z_{\mu\nu} i^\mu i^\nu} = \sqrt{z_{ab} j^a j^b}$$

On peut alors tout à fait calculer

$$\frac{\partial}{\partial s} e_\mu = \frac{\partial e_\mu}{\partial i^0} \frac{\partial i^0}{\partial s}$$

or on calcule facilement $\partial_{i^0} s = \frac{1}{2} 2z_{00} i^0 / s$, et :

$$\frac{\partial}{\partial s} e_\mu = \frac{s}{z_{00} i^0} \frac{\partial e_\mu}{\partial i^0}$$

Ayant trouvé un invariant, on peut refaire les calculs que l'on faisait comme les dérivées temporelles dans un changement de référentiel où le temps est supposé universel.

Métrie

Nous avons déjà parlé de cette notion. Mais personnellement, c'est en effectuant des allers-retours que je finis par intégrer des notions. En les abordant par des biais différents. Je conseille toujours d'appliquer les deux principes de Feynman :

1. toujours savoir refaire ce que l'on a fait ;
2. ne pas attacher d'importance à la terminologie, « certains attachent de l'importance à la terminologie parce qu'ils ne savent pas faire autre chose ».

Le second n'était pas formulé exactement comme cela, mais il est vrai que l'on voit souvent des querelles de chercheurs sur le sens de mots, là où le débat devrait se situer sur les équations.

On considère un système d'équations que l'on associe à une surface paramétrée $\phi(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0$. On s'intéresse à un plan tangent TpS à cette surface pour une valeur particulière d'un paramètre p (temps, Laplace, ...), puisque les variables $x^k(p)$ dépendent de ce paramètre. Ce plan est défini en tout point par les vecteurs tangents qui en constituent la base :

$$\mathbf{b}_k = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

La fonction ϕ se décline alors dans un développement local $x^k \mathbf{b}_k$. Soit $\mathbf{v} = x^k \mathbf{b}_k$ l'hypervecteur lié à ϕ , on peut calculer :

$$v_q = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_q$$

on trouve :

$$v_q = x^k \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_q = g_{qk} x^k \Rightarrow g_{qk} = \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_k \rangle$$

Quand on fait varier les variables x^k on fait évoluer (ou pas) les vecteurs de base. Si pour toute valeur des coordonnées x^k , le plan tangent reste égal à lui-même, on se situe sur une surface plate. Finalement, quelles

que soient les valeurs des coordonnées, les caractéristiques de l'espace restent identiques. C'est bien la propriété d'un espace plat. A notre échelle, peu importe où nous nous trouvons, peu importe à quelle vitesse nous évoluons, l'espace des routes, etc., nous semble identique quand nous le regardons en tant qu'observateur. En fait, si nous pouvions aller proche de la vitesse de la lumière, nous percevrions des changements dans cet espace. On note :

$$\frac{\partial \mathbf{b}_k}{\partial x^q} = \mathbf{b}_{kq}$$

Alors si l'on regarde comment varient les vecteurs de base dans leurs dépendances aux variables, c'est à dire comment ils se projettent sur le plan local lorsqu'on les dérive par rapport aux x^k , on calcule $\langle \mathbf{b}_{kq}, \mathbf{b}_h \rangle = \Gamma_{kq,h}$.

Cherchons comment peut évoluer la trajectoire v_q :

$$\nabla_m v_q = \frac{\partial}{\partial x^m} g_{qk} x^k + g_{qk} \frac{\partial}{\partial x^m} x^k = \Gamma_{qk,m} x^k + g_{qk} \Lambda_m^k$$

si les variables ne sont pas interdépendantes :

$$\nabla_m v_q = \Gamma_{qk,m} x^k \Rightarrow g^{nm} \frac{\partial v_q}{\partial x^m} = g^{nm} \Gamma_{qk,m} x^k$$

soit encore :

$$g^{nm} \frac{\partial}{\partial x^m} x^k \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_q = \Gamma_{qk}^n x^k$$

comme par définition $g^{nm} = g^{-1}$ et $g_{kq} = \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_q$ en simplifiant par x^k et en multipliant par \mathbf{b}_k on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x^q} \mathbf{b}_k = \Gamma_{qk}^n \mathbf{b}_n$$

Les coefficients $\Gamma_{qk,m}$ sont appelés coefficients de Christoffel de première espèce, et Γ_{qk}^n coefficients de la connexion affine qui relie les dérivées des vecteurs de base aux vecteurs eux-mêmes.

Faisons une pause pour réfléchir sur tout ce que nous avons écrit. Nous avons une variété, c'est à dire un espace décrit par un ensemble de points définis par un système d'équations. On ne peut pas appréhender cette variété dans son ensemble. Par contre on

peut l'explorer en projetant ses propriétés sur un plan tangent qui « surf » sur sa surface : c'est notre situation sur la surface de la terre ou de l'espace-temps. Maintenant quand on déplace ce plan - ce surf - ses propriétés peuvent changer. Si elles ne changent pas, notre espace est plat. Maintenant pour percevoir ce changement il faut un repère. On va alors comparer les propriétés du plan d'un point de déplacement à un autre. C'est le propos de la connexion affine. La propriété majeure est fournie par la métrique : elle donne les couplages qui peuvent exister entre les axes de l'espace local. Et ses composantes peuvent évoluer suivant l'endroit où l'on se trouve sur la surface.

L'espace-temps

Pour parvenir aux équations d'Einstein et comprendre les ondes gravitationnelles, il faut se sentir un peu plus « à l'aise » avec la notion d'espace-temps. Ouf ! C'est pas gagné, vu la difficulté que nous avons déjà à percevoir l'espace seul. Percevons-nous le temps ? Oui par le vieillissement, par les rendez-vous où nous regardons l'heure, par la succession des jours et des nuits. Est-ce le temps de la physique, de l'espace-temps ? Il y a un rapport, mais pas directement. Imaginons être une éphémère, notre durée de vie est de 1 à 3 jours. Mais quand on dit cela, c'est vu de notre référentiel. Si nous sommes ces éphémères, nous inventons une mesure qui fait correspondre nos trois jours de vie vus par des extra-terrestres qui vivent environ $20 \times 365 \times 70$ années pour nous à 70 ans de vie. Ainsi nous sommes inconscients du fait que nous ne vivons que trois jours ! Nous voyons clairement ici que seule la comparaison relative des durées a du sens. Ensuite, un être dans son référentiel peut avoir l'impression de vivre longtemps même si vu d'un autre référentiel sa vie semble courte. Seuls les intervalles de temps ont du sens : le temps est une variable d'une variété dont on définit de fait l'intervalle d'appartenance.

La notion de durée d'intervalle de temps étant un peu mieux perçue, reste deux points à discuter :

- le temps est uniquement positif ;
- nous ne maîtrisons pas l'écoulement du temps - la flèche du temps.

Le temps

Le fait que le temps n'est pas négatif n'est pas le résultat d'un simple choix d'origine. On pourrait effectivement se projeter dans le futur et partir d'un chronométrage à partir d'un temps négatif pour arriver à zéro, puis repartir en temps positif. Le sens de la positivité de déroulement du temps est intrinsèquement lié à une flèche créée par l'entropie. Le sens positif du temps traduit le fait que l'évolution ne peut jamais revenir en arrière. Et ce pour au moins une raison : quoique nous fassions, l'univers est en expansion et ne sera pas dans le même état entre maintenant et un instant plus tard où nous voudrions revenir en arrière sur un processus physique. Or toutes les particules sont en relation avec l'univers : on ne peut donc jamais revenir à un état passé, CQFD. Mais n'en serait-il pas de même de l'espace ? Si nous avançons de 3 mètres en avant, puis nous revenons au point de départ, le temps s'est déroulé continûment mais au niveau spatial nous sommes revenus au point de départ. La question qui se pose est alors de savoir si c'est réellement le même point ? Si nous répondons positivement c'est que nous regardons seulement le repérage géographique du point et non l'état du système. L'état du système regroupe toutes les variables : espace et temps. Donc, si nous considérons l'ensemble des variables associées à un point de fonctionnement, on ne peut pas non plus revenir en arrière (usure des pièces, dissipations, ...).

Finalement si l'on regarde le temps comme une référence qui permet de suivre l'évolution des systèmes, on pourrait accrocher le temps au taux de déperdition de photons thermiques par exemple. De plus nous ne considérerons pas le temps mais l'intervalle de temps. Cette simple réflexion conduit à une conclusion fondamentale :

le temps est lié à l'énergie. Pour l'entrevoir, considérons le 4-vecteur espace-temps (c'est un vecteur avec la composante associée au temps puis trois composantes associées à l'espace) : $\vec{x}^k = (ct, x^k)$. La multiplication du temps par la célérité permet d'avoir des dimensions homogènes. Dérivons ce 4-vecteur pour obtenir la 4-vitesse : $\vec{v}^k = (c, v^k)$. En multipliant par la masse m on obtient la 4-impulsion $\vec{p}^k = (mc, mv^k)$. Faisons alors le produit scalaire du 4-espace-temps

par la 4-impulsion à l'aide d'une métrique g donnée par (métrique de Minkovski) :

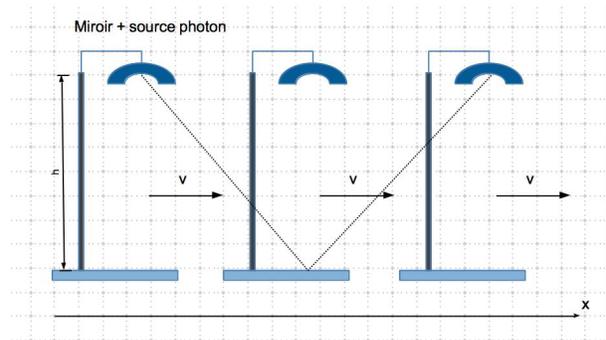
$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Le produit

$$g_{km} \vec{x}^k \vec{p}^m = Et - p^k x^k$$

qui est le terme de phase de la fonction d'onde d'une particule en mécanique quantique. Si la particule est au repos ($p = 0$), la phase est le produit Et . On y voit que le temps est le facteur de l'énergie au repos. Au niveau le plus fondamental, le temps transparait via une rotation régulière de phase de la fonction d'onde : $i/\hbar \cdot h\nu t = i2\pi\nu t \approx i\alpha\pi$.

Mais si le temps est en rapport à l'énergie, et qu'entre deux référentiels où l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation adéquate, sous existence d'un invariant, l'énergie de mouvement est non nulle dans un référentiel et nulle dans un autre, il faut que le temps s'écoule plus lentement là où il y a du mouvement pour rester invariant dans la différence. La dilatation du temps est une réponse de la nature pour maintenir un invariant. L'exemple usuellement donné n'est pas si mauvais que cela pour montrer cet effet : c'est l'exemple classique du miroir en mouvement.



Entre les deux référentiels, notre invariant est la vitesse du photon toujours égale à c . Dans le référentiel du miroir, on peut écrire :

$$c = \frac{h}{t}$$

Dans celui d'un observateur externe :

$$c = \frac{\sqrt{h^2 + v^2 t'^2}}{t'}$$

En égalisant ces deux résultats et en factorisant on trouve :

$$t'^2 (h^2 - v^2 t'^2) = h^2 t^2$$

soit finalement :

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma t \quad (32)$$

Le temps dans le référentiel de l'observateur paraît plus long que dans celui du miroir, et ce d'un facteur γ . C'est le phénomène de dilatation du temps. Cet effet a été expérimenté : c'est l'expérience des muons relativistes qui arrivent à atteindre le sol Terrestre et ce malgré leur durée de vie propre très courte. La transformation précédente s'effectue dans le cadre de la relativité restreinte d'Einstein, entre des référentiels de vitesse relative constante mais proche de la lumière. C'est la transformation de Lorentz, corrigée par Poincaré et qui couple temps et espace.

12 Séance 12

Pour aborder sereinement les équations d'Einstein il faut connaître des notions mathématiques passionnantes que je vais tenter de communiquer ici. Nous pourrons ensuite aborder la modélisation des champs dans les machines électriques, ce qui constituera une excellente introduction pour aborder ensuite la gravitation.

Structures différentielles externes

Considérons la quantité scalaire :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (33)$$

Cette quantité décrit le taux d'accroissement de la fonction f dans un espace ici à trois dimensions. Il s'obtient en partant d'une part du vecteur gradient :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (34)$$

dans un espace $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, et du vecteur de déplacement élémentaire dans le même espace :

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (35)$$

soit que l'on a : $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.

Le calcul en formes différentielles externes suppose implicitement que les déplacements élémentaires dx^k sont liés aux directions de l'espace correspondantes. De fait, les vecteurs de base ne sont plus utiles. L'algèbre extérieure part de ce postulat pour définir les opérations sur des grandeurs vectorielles.

Produit extérieur

Une 1-forme est un développement où n'apparaissent que des déplacements élémentaires à l'ordre 1. Prenons par exemple deux 1-formes :

$$\begin{cases} \omega = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz \\ \lambda = B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz \end{cases} \quad (36)$$

Le produit extérieur de ces deux 1-formes engendre une 2-forme $\zeta = \omega \wedge \lambda$ définie par :

$$\begin{aligned} \zeta &= (A_1 B_2 - A_2 B_1) dx \wedge dy + \dots \\ &\dots + (A_2 B_3 - A_3 B_2) dy \wedge dz + \dots \\ &\dots + (A_3 B_1 - A_1 B_3) dz \wedge dx \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Notons que cela se note aussi suivant Penrose $\zeta = A_{[k} B_{j]} dx^k \wedge dx^j$.

3 règles gèrent le produit extérieur :

1. la distribution : $(A_1 dx + A_2 dy) \wedge dz = A_1 dx \wedge dz + A_2 dy \wedge dz$;
2. l'alternance : $dx \wedge dz = -dz \wedge dx$;
3. une conséquence de l'alternance : $dx \wedge dx = 0$.

Le produit extérieur n'apparaît pas commutatif. Les règles précédentes s'appliquent également au produit extérieur de deux formes dans un espace de dimensions quelconques. Le point important est que le résultat du produit de deux 1-formes est une 2-forme qui n'est pas un vecteur. Finalement le produit extérieur représente la projection de cette aire sur les axes de l'espace. Par contre le vecteur perpendiculaire à l'aire obtenue par le produit extérieur est le vecteur déduit du produit vectoriel des deux vecteurs multipliés : $\omega \times \lambda$. Nous verrons plus loin qu'un opérateur permet de faire le lien entre le produit vectoriel et le produit extérieur.

Formes différentielles d'ordres élevés

A partir du développement d'une n-forme on peut créer une matrice qui contienne tous les coefficients des déplacements élémentaires. Par exemple en trois dimensions on a :

$$A_{\sigma\alpha} = \begin{array}{c|c|c} 0 & A_{12} & -A_{13} \\ \hline -A_{12} & 0 & A_{23} \\ \hline A_{31} & -A_{23} & 0 \end{array} \quad (38)$$

Du fait de la règle d'alternance, cette matrice est anti-symétrique. En généralisant, une p-forme pourra être exprimée par le biais des composantes d'un tenseur antisymétrique de rang p dans un espace de système de coordonnées x^α :

$$\mu = \frac{1}{p!} A_{\alpha\beta\gamma\dots\pi} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \dots \wedge dx^\pi$$

Produit intérieur

Le produit extérieur renvoie vers une forme d'ordre plus élevé que l'ordre des formes de départ. A l'inverse le produit intérieur va renvoyer vers des formes d'un ordre inférieur à l'ordre de départ. D'où leurs noms.

Soit deux 1-formes : $\omega = A_k dy^k$ et $\lambda = B_k dy^k$. On note le produit interne par un point (certains auteurs utilisent deux parenthèses $((a, b)) \equiv a \cdot b$).

Le produit interne est défini par :

$$\omega \cdot \lambda = \sum_k A_k B_k \quad (39)$$

J'aurais pu écrire par abus de « notation d'indice muet » $A_k B_k$. Pour deux p-formes $\alpha = a_1 \wedge \dots \wedge a_p$ et $\beta = b_1 \wedge \dots \wedge b_p$, le produit intérieur est défini par le déterminant de la matrice constituée des produits internes élémentaires $a_i \cdot b_j$. Soit :

$$\alpha \cdot \beta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_p b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1 b_p & \dots & a_p b_p \end{vmatrix} \quad (40)$$

Le produit intérieur est distributif et commutatif : $((a, b + \mu)) = a \cdot \mu + b \cdot \mu$ et $a \cdot b = b \cdot a$.

Dans un système de coordonnées curvilignes x^k de vecteurs a_k , un changement d'un rayon vecteur peut être exprimé par :

$$dR = dx^1 a_1 + dx^2 a_2 + dx^3 a_3$$

le déplacement ds est alors donné par $ds^2 = dR \cdot dR = g_{km} dx^k dx^m$. Nous retrouvons notre métrique, tenseur central en analyse tensorielle. En espace-temps nous avons vu que le déplacement s'exprime par $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. La métrique s'obtient comme précédemment par dérivation partielle de la fonction R vis à vis des paramètres que sont les coordonnées :

$$g_{km} = \frac{\partial R}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial R}{\partial x^m} = a_k \cdot a_m$$

Opérateur de Hodge

L'opérateur de Hodge permet de créer un lien entre une 2-forme et un vecteur. Il joue un rôle fondamental, c'est lui qui permet de passer du flux du champ magnétique dans une boucle à la force électromotrice liée. L'opérateur de Hodge appliqué à la 2-forme $\omega \wedge \lambda$ est le vecteur μ perpendiculaire à la surface décrite par la 2-forme (la direction de ce vecteur respecte la loi du « tire-bouchon »). On note l'application de l'opérateur de Hodge à un vecteur en plaçant une étoile devant le symbole : $*\omega$. L'idée est la suivante : le produit extérieur $a \wedge b$ renvoie vers une 2-forme qui comporte des termes du genre $dx \wedge dy$ multipliés par des facteurs f_{xy} . On peut toujours trouver une 2-forme h qui comportera des expressions du type $h_{xy} dx \wedge dy$ telle que le produit interne de cette 2-forme par une autre, multiplié par les mêmes termes

$dx \wedge dy$ soit égal au produit extérieur de départ. Prenons le cas d'une seule coordonnée. Par exemple $a \wedge b$ engendre $f dx \wedge dy$. Maintenant je prends un vecteur $h = h_0 dx \wedge dy$ et un autre lié à a : $*a = a_0 dx \wedge dy$. En faisant $*a \cdot h$ on trouve $a_0 h_0$. En multipliant ce scalaire par $d\sigma = dx \wedge dy$ on trouve : $(*a \cdot h) d\sigma = a_0 h_0 dx \wedge dy$. On peut obtenir $a_0 h_0 = f$, auquel cas :

$$a \wedge b = (*a \cdot b) d\sigma \quad (41)$$

alors si $\omega = A dx + B dy + C dz \Rightarrow *\omega = D dx \wedge dy + E dx \wedge dz + F dy \wedge dz$. Si ω est un vecteur, $*\omega$ est une surface.

Nous avons vu les concepts généralisés de produits extérieur et intérieur. Nous voyons que ces concepts permettent d'étendre à toute dimension d'espace les notions que l'on aborde classiquement en trois dimensions de produits scalaire et vectoriel. Nous allons voir maintenant des notions générales dont se déduisent celles de divergence, rotationnel et gradient.

Dérivée extérieure

Le développement en dérivées partielles prend un nouveau rôle sous l'empreinte de la dérivée extérieure. Si l'on note \bar{d} l'opérateur de dérivation extérieure, on a :

$$\bar{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (42)$$

sauf que cette fois l'opérateur apparaît comme transformant une 0-forme f en une 1-forme $\bar{d}f$. Les règles qui s'appliquent de façon générale à la dérivée extérieure sont :

1. $\bar{d}(\omega + \lambda) = \bar{d}\omega + \bar{d}\lambda$;
2. $\bar{d}(\omega \wedge \lambda) = \bar{d}\omega \wedge \lambda + (-1)^p \omega \wedge \bar{d}\lambda$;
3. $\bar{d}(dx^k) = 0$.

D'une manière générale, la dérivée extérieure transforme une p-forme en une (p+1)-forme. Prenons un exemple. Soit $\omega = H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz$. On veut calculer :

$$\bar{d}\omega = \bar{d}(H_1 dx) + \bar{d}(H_2 dy) + \bar{d}(H_3 dz) \quad (43)$$

H_k étant un facteur, un scalaire, on peut écrire $\bar{d}(H_1 dx) = \bar{d}(H_1 \wedge dx)$. Alors :

$$\bar{d}(H_1 dx) = \bar{d}H_1 \wedge dx + (-1)^0 H_1 \wedge \bar{d}(dx) = \bar{d}H_1 \wedge dx$$

car le second terme est nul suivant la troisième règle. Par suite, comme $\bar{d}H_1 = \partial_x H_1 dx$ on trouve :

$$\bar{d}(H_1 dx) = \frac{\partial H_1}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial H_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial H_1}{\partial z} dz \wedge dx \quad (44)$$

avec $dx \wedge dx = 0$ et $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, en substituant dans (44) et (43) on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \bar{d}\omega &= \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \dots \\ &+ \dots \left(\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \dots \\ &\dots + \left(\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx \end{aligned} \quad (45)$$

d'où l'on déduit le dual par l'opérateur de Hodge :

$$\begin{aligned} *\bar{d}\omega &= \left(\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) dx + \dots \\ &\dots + \left(\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} \right) dy + \dots \\ &\dots + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) dz \end{aligned} \quad (46)$$

et l'on voit, au miracle! Que $*\bar{\omega}$ n'est autre que le conventionnel rotationnel en 3 dimensions. La dérivée extérieure permet donc de généraliser l'expression différentielle du rotationnel. Elle effectue un déplacement de vecteur (ou « hypervecteur ») de telle sorte que effectivement elle augmente l'ordre de la forme correspondante. Partant d'un point, elle crée un segment, d'un segment une surface, etc. L'outil de la dérivation extérieure est donc plus puissant que l'outil classique du rotationnel qui n'en est qu'une restriction.

Considérons par exemple une 2-forme dans un espace à 4 dimensions :

$$\omega = F_{12} dx^1 \wedge dx^2 + F_{13} dx^1 \wedge dx^3 + F_{14} dx^1 \wedge dx^4 + \dots \\ \dots + F_{23} dx^2 \wedge dx^3 + F_{24} dx^2 \wedge dx^4 + F_{34} dx^3 \wedge dx^4$$

on peut résumer ce développement par l'écriture tensorielle $\omega = F_{ab}dx^a \wedge dx^b$, qui est quand même beaucoup plus synthétique!

En reprenant les développements précédents, avec la règle 2 entre autre, on trouve :

$$\bar{d}\omega = \left(\frac{\partial F_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial F_{ca}}{\partial x^b} + \frac{\partial F_{ab}}{\partial x^c} \right) dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c$$

On peut résumer pour l'instant en disant que l'opérateur \bar{d} que nous noterons maintenant simplement d agit sur une k-forme ω_k de telle façon que :

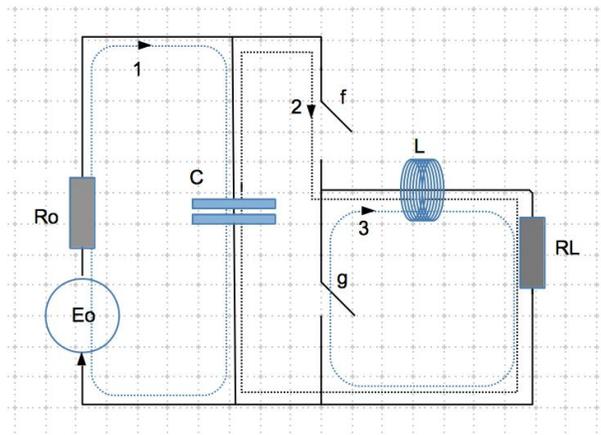
$$\begin{cases} d\omega_0 \rightarrow \nabla\omega_0 \\ d\omega_1 \rightarrow \nabla \times \omega_1 \\ d\omega_2 \rightarrow \nabla \cdot \omega_2 \end{cases} \quad (47)$$

La géométrie différentielle s'intéresse de fait aux variations. Contrairement aux travaux de Whitney qui regarde l'intégration, on étudie ici de façon générale les variations. On verra que suivant De Rahm on peut aussi s'intéresser aux intégrations via le théorème de Stokes.

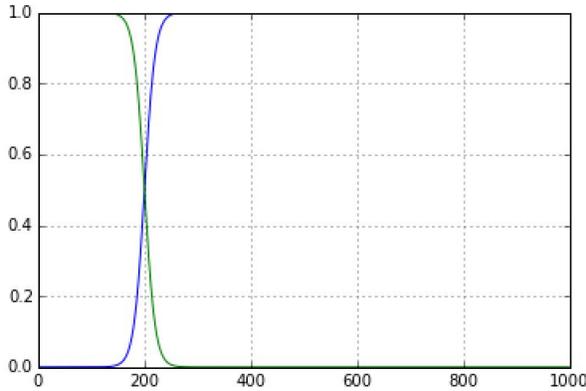
Pour faire une pause dans toutes ces notions difficiles, nous allons nous replonger un peu dans le concret en calculant un petit hacheur. Mine de rien, c'est un problème non linéaire pas si trivial.

13 Séance 13

On veut modéliser un petit hacheur à 1 bras, dont le circuit est le suivant. Les deux commutateurs sont représentés par des fonction f et g que nous allons définir. Le générateur vient charger un condensateur C via une résistance propre R_0 . Le condensateur se décharge dans une charge $Lp - R_L$ si le commutateur f est fermé et le commutateur g ouvert. Puis si f est ouvert et g fermé, l'énergie accumulée dans l'inductance se décharge dans R_L via g .



Pour simuler les commutateurs, on choisit d'utiliser des fonctions logistiques. Pour cela on les teste avec le même pas d'échantillonnage que celui qui sera utilisé pour le hacheur complet. Le programme suivant, réalisé en séance, trace ces fonctions. La fonction f et la fonction g doivent être complémentaires. Lorsqu'un interrupteur est fermé, l'autre est ouvert. On se trouve dans le même principe qu'une porte NAND. Le programme trace ces deux fonctions et leur somme, que l'on ne discerne pas car égale à 1 partout. Cela est bien pratique! Et c'est pourquoi nous pouvons utiliser ces fonctions pour décomposer une impédance sur des domaines de valeurs de paramètres. Le graphe obtenu est donné ci-après. Notons qu'il existe un instant où les deux commutateurs sont fermés et où leur mise en série apparaîtra comme une branche résistive de $0,5 \Omega$ multiplié par le facteur que l'on choisira pour obtenir la valeur d'impédance de circuit ouvert. Ici, l'instant de réglage de l'impédance du commutateur est déterminé par le retard s_0 ajouté dans l'expression de la fonction logistique.



```

1
2
3
4
5
6
7
8 import numpy as np
9 import pylab as plt
10
11 K=1.
12 a=1.
13 c=1E5
14
15 dt=1E-6
16
17 N=1000
18
19 f=np.zeros(N,dtype=float)
20 g=np.zeros(N,dtype=float)
21 r=np.zeros(N,dtype=float)
22 so=200E-6
23
24 for t in range(N):
25     s=t*dt
26     f[t]=K/(1+a*np.exp(-c*(s-so)))
27     g[t]=1-f[t]
28
29     r[t]=f[t]+g[t]
30
31 plt.plot(f)
32 plt.plot(g)
33 plt.plot(r)
34 plt.grid(True)
35 plt.show()
36

```

Connaissant des fonctions pour simuler les commutateurs, nous pouvons écrire la matrice impédance de ce circuit dans l'espace des mailles :

$$z = \begin{bmatrix} R_0 + \frac{1}{C_p} & -\frac{1}{C_p} & 0 \\ -\frac{1}{C_p} & \frac{1}{C_p} + L_p + R_L + f & L_p + R_L \\ 0 & L_p + R_L & L_p + R_L + g \end{bmatrix}$$

Une fois cette matrice définie, le problème est posé. Maintenant il reste à le transcrire numériquement.

On peut programmer assez facilement ce type de systèmes d'équations intégral-différentielles en différences finies temporelles. La première discrétisation à réaliser est celle des inductances $L\partial_t i$. On peut rester au premier ordre, même si des techniques numériques permettent de réduire l'erreur de numérisation, mais ce n'est pas notre objectif ici. On développe :

$$e(t) = L \frac{di}{dt} \rightarrow e(n) = \frac{L}{dt} [i(n) - i(n-1)]$$

Le courant étant connu à l'instant $n-1$ (au premier calcul, $i(n-1)$ est la condition initiale), cela revient à calculer :

$$e(n) + \frac{L}{dt} i(n-1) = \frac{L}{dt} i(n)$$

d'où l'on déduit $i(n)$. Pour les intégrales, une expression simple au premier ordre conduit à :

$$\frac{1}{C} \int_t dt i(t) \rightarrow \frac{dt}{C} i(N) + \frac{dt}{C} \sum_{s=0}^{N-1} i(s)$$

de fait on résoudra :

$$e(N) - \frac{dt}{C} \sum_{s=0}^{N-1} i(s) = \frac{dt}{C} i(N)$$

On remarque que les termes de droites se retrouvent dans la matrice impédance en remplaçant p par dt^{-1} .

Les termes de gauche qui viennent s'ajouter aux sources constituent un nouveau terme source T_a pour l'équation à résoudre qui devient

$$T_a(N, \dots, 0; p = dt^{-1}) = z_{ab}(p = dt^{-1}) i^b(N)$$

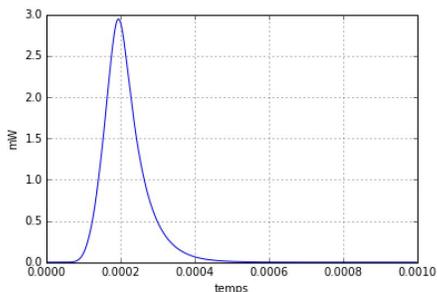
Le listing du programme ci-après réalise cette résolution. On voit que dès lors que le pas de temps est assez petit, ces schémas simples peuvent suffire. Par contre pour disposer d'un pas de temps plus « lâche » et optimiser temps et précision de calcul, il faut faire appel à des schémas numériques des dérivées et intégrales qui engendrent moins d'erreur : Runge Kutta, Smith, ...

```

7
8 import numpy as np
9 import pylab as plt
10
11 R=5,
12 C=100E-6
13 L=100E-6
14 RL=1.
15
16 K=1.
17 a=1.
18 co=1E5
19
20 dt=1E-6
21
22 N=1000
23
24 f=np.zeros(N,dtype=float)
25 g=np.zeros(N,dtype=float)
26 r=np.zeros(N,dtype=float)
27 I=np.zeros(N,3,dtype=float)
28 Q=np.zeros(N,3,dtype=float)
29 temps=np.zeros(N,dtype=float)
30 rep=np.zeros(N,dtype=float)
31 so=200E-6
32
33 for t in range(1,N):
34     s=t*dt
35     f[t]=K/(1+a*np.exp(-co*(s-so)))
36     g[t]=1-f[t]
37
38     z=[R+dt/C, -dt/C, 0.], [-dt/C, dt/C+L/dt+RL+f[t], RL+L/dt], [0., L/dt+RL, L/dt+RL+g[t]]
39     E=[K/(1+a*np.exp(-co*(s-so/3.)))], [0.], [0.]
40     W=[[-dt/C*Q[t-1,0]+dt/C*Q[t-1,1]],
41         [dt/C*Q[t-1,0]-dt/C*Q[t-1,1]+L/dt*I[t-1,1]+L/dt*I[t-1,2]],
42         [L/dt*I[t-1,1]+L/dt*I[t-1,2]]]
43     T=np.add(E,W)
44     y=np.linalg.inv(z)
45     I[t,:]=np.transpose(np.dot(y,T))
46     Q[t,:]=Q[t-1,:]+I[t,:]
47     temps[t]=dt*t
48     rep[t]=RL*(I[t,1]+I[t,2])**2.*1E3
49
50 plt.plot(temps,rep)
51 plt.grid(True)

```

Le programme trace l'évolution de la puissance dissipée dans la charge au cours du temps, où l'on voit le pic de puissance au moment de la commutation où les deux commutateurs sont passants.



14 Séance 14

Nous avons vu que la géométrie différentielle finalement cherche à exprimer les variations et les projections sur des éléments différentiels dx^k . Ces projections engendrent des objets qui sont les coefficients auxquels on va s'intéresser dans les calculs de dérivées extérieures, produits intérieurs ou extérieurs, etc. Au final, il ne devient presque plus nécessaire de préciser les vecteurs de base, on peut se représenter

l'espace au travers des éléments de déplacements infinitésimaux. Les deux façons de faire sont évidemment équivalentes, et celle précisant les vecteurs de base est plus explicite. Mais si l'on a l'habitude, l'autre, plus abstraite est plus efficace mais qui doit être utilisée avec beaucoup de rigueur pour ne pas se perdre dans des simplifications qui ne seraient en final plus compréhensibles.

L'exercice d'abstraction doit être pratiqué. Il faut prendre du recul, sentir les tendances et « voir » le sens des équations. Les mots ne peuvent décrire cette abstraction qui dépasse la capacité de l'esprit à se représenter exactement ce qu'elle signifie. C'est en ce sens que le changement de référentiel devient incontournable. En mécanique quantique comme en physique relativiste, on peut comprendre deux choses :

1. extrapoler les exemples simples vers des cas incompréhensibles ;
2. projeter la réalité complexe dans un référentiel intelligible : réduire la complexité.

La perception du monde comme nous l'avons évoqué, passe par une projection sur des espaces intelligibles et perceptibles : sténopé, etc. Cette réduction n'est pas dégradante. C'est tout le processus de Hodge, d'effondrement de la fonction d'onde, etc., qui transpose dans un référentiel que l'on peut sentir. Mais ces opérations d'intégrations qui renvoient aux deux ne font pas forcément perdre d'information. Tout d'abord on peut se demander si perdre de l'information a du sens à partir du moment où cette information n'est pas intelligible. Prenons l'exemple de l'infini. On peut s'en faire une idée, mais sûrement pas le comprendre. On peut imaginer un nombre toujours plus grand, mais certainement pas l'infini. Cela est-il bloquant ? Pas vraiment, on comprend ainsi que l'inverse de l'infini tend vers zéro, et cela en s'appuyant sur les extrapolations que l'on a pu faire sur des nombres très grands. Du coup, l'infini absolu est-il une information en soit ? Ou est-ce que c'est plutôt le concept d'infini qui a du sens ?

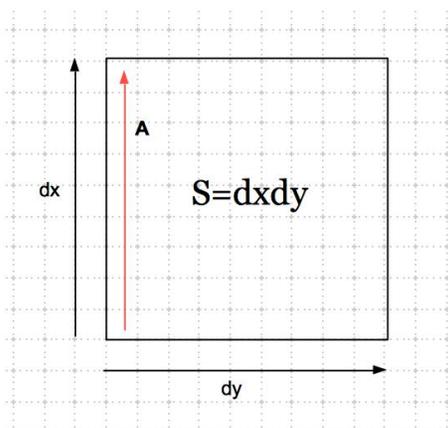
Le processus d'intégration nous l'avons vu est un processus très explicite. Plus que celui de dérivation à mon avis. Quoique, une difficulté doit être passée. Considérons le point : il n'a pas d'épaisseur ni de volume. Pourtant son intégrale a du sens. C'est la même

discussion que pour l'infini. dx est incompréhensible. Mais

$$\int_0^\chi dx$$

se comprend. Ainsi suivant Whitney¹¹ une 1-forme renvoie avant tout à l'intégrale précédente. Il faut accepter de ne pas comprendre dx , car nous comprenons son intégration. Le paradoxe vient du fait qu'il y a une infinité de points entre 0 et χ , et comme nous ne comprenons pas l'infini, nous ne pouvons pas comprendre dx .

Dans le domaine de l'intégration, un théorème fondamental apparaît : le théorème de Stokes. Considérons la figure suivante.



On peut intégrer le champ \mathbf{A} sur le pourtour de la surface décrite par les déplacements dx et dy . Soit \mathcal{C} cette surface, on cherche :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} d\mathcal{C}$$

Or $\mathcal{C} = \partial S$: le bord de la surface S correspond au périmètre \mathcal{C} . De fait :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} d\mathcal{C} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} d\mathcal{C}$$

Par ailleurs on peut calculer :

11. WHITNEY, Hassler. Geometric integration theory. Courier Corporation, 2012. Orig. 1957.

$$V = \int_x \int_y dx dy \cdot \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

On trouve :

$$V = \frac{\partial}{\partial y} \int_y dy \int_x dx \cdot A_x = \int_x dx \cdot A_x$$

On peut faire de même pour toutes les dérivées partielles de \mathbf{A} et trouver finalement que :

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} d\mathcal{C} = \int \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (48)$$

C'est le théorème de Stokes dans toute sa splendeur. Appliquons-le à l'électromagnétisme. Si \mathbf{A} est le potentiel vecteur dans la jauge de Coulomb. Comme $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ et $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$ on obtient par remplacement et en dérivant par rapport au temps :

$$-\oint_{\partial S} d\mathcal{C} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

Soit l'équation de Maxwell :

$$rot(\mathbf{E}) = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Le théorème de Stokes exploite intrinsèquement l'opérateur de Hodge puisqu'il fait passer d'une 2-forme (le flux du champ magnétique) à une 1-forme : le rotationnel du champ électrique. Il est quand même remarquable de voir que la formule de Maxwell - Faraday découle d'une propriété de la topologie des chaînes.

Pour continuer, le mieux est de s'entraîner, ce qui permet de s'habituer aux mécanismes de l'algèbre tensoriel.

Changement de référentiel

Nous mettrons une barre sur les objets appartenant à un référentiel cible¹².

1. Ecrire la loi de transformation du tenseur : A_{jk}^i .

12. Les exercices suivants sont inspirés du Schaum, « analyse vectorielle ».

2. Une quantité $A(j, k, l, m)$ fonction des coordonnées x^i se transforme dans un système de coordonnées \bar{x}^j suivant la règle

$$\bar{A}(p, q, r, s) = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m} A(j, k, l, m)$$

Cette quantité est-elle un tenseur? Si oui, écrire le tenseur en notation appropriée et donner l'ordre contravariant et covariant et le rang.

3. Un tenseur covariant a pour composantes $xy, 2y - (z)^2, xz$ en coordonnées rectangulaires. Trouver ses composantes en coordonnées sphériques.

4. Montrer que

$$\frac{\partial A_p}{\partial x^q}$$

n'est pas un tenseur.

5. Montrer que la vitesse d'un fluide en tout point est un tenseur contravariant d'ordre 1.

1.

Les règles de l'algèbre tensoriel aident pour répondre à cette question. Posons le tenseur cible : \bar{A}_{qr}^p . Comme le tenseur de départ est A_{jk}^i et que la somme s'effectue sur les indices répétés alternativement en haut et en bas des symboles, on en déduit la transformation :

$$\bar{A}_{qr}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} A_{jk}^i$$

2.

Suivant la même technique que précédemment, on trouve les tenseurs : $A_j^{klm}, \bar{A}_{pqr}^{s}$. Ce sont bien des tenseurs puisqu'ils sont invariants dans le changement de référentiel. Ils sont trois fois contravariants et une fois covariants.

4.

Exprimons la transformation sur A_p :

$$\bar{A}_q = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} A_p$$

alors :

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} A_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} A_p + \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial A_p}{\partial x^j}$$

Le terme de gauche n'est pas adéquate car on ne peut dériver x^p par rapport à x^j . Alors on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} A_p = \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} A_p$$

On voit que la transformation ajoute un terme et le résultat n'est pas de la même forme que l'objet de départ. Il ne s'agit donc pas d'un tenseur.

5.

La vitesse d'un fluide a pour composantes

$$\frac{dx^k}{dt}$$

dans le système de coordonnées x^k . Dans un autre système \bar{x}^f on a :

$$\frac{d\bar{x}^f}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^f}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt}$$

La vitesse est de fait bien un tenseur contravariant d'ordre 1.

3.

Si l'on note A_j les composantes en coordonnées rectangulaires, alors :

$$A_1 = xy = x^1 x^2; A_2 = 2y - z^2 = 2x^2 - (x^3)^2; A_3 = x^1 x^3$$

Soit \bar{A}_k les coordonnées covariantes également en coordonnées sphériques :

$$\bar{x}^1 = r; \bar{x}^2 = \theta; \bar{x}^3 = \phi$$

alors

$$\bar{A}_k = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} A_j$$

Les équations de passage entre les deux systèmes de coordonnées sont : $x^1 = \bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3, x^2 =$

$\bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3, x^3 = \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2$ D'où l'on obtient facilement avec les relations précédentes, par exemple pour le premier coefficient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_1 = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} A_3 \\ \bar{A}_1 = (\sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3) x^1 x^2 + \dots \\ \dots + (\sin \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3) (2x^2 - (x^3)^2) + \cos(\bar{x}^2) x^1 x^2 \end{array} \right.$$

Les autres coefficients se déduisent de la même façon.

Un exercice important

On considère l'intégrale d'action suivante :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{F}(t, x, \dot{x}) \quad (49)$$

On peut chercher une courbe proche de celle-ci, qui passe par les points extrémaux t_1 et t_2 mais qui s'en écarte un petit peu. En notant $x = \chi(t)$, on pose $\chi(t) + \epsilon \eta(t)$ (où ϵ est indépendant de t) qui est une courbe voisine.

$$I(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{F}(t, \chi(t) + \epsilon \eta, \dot{\chi} + \epsilon \dot{\eta})$$

Si cette grandeur est très proche de la courbe d'origine, on doit pouvoir vérifier :

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \rightarrow 0$$

En calculant cette expression on trouve :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \eta + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right)$$

En intégrant le second membre par partie on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \eta + \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} \eta \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}}$$

d'où

$$I(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} dt \eta \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

finalement :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (50)$$

ce sont les équations d'Euler-Lagrange. Donc minimiser l'intégrale d'action revient à résoudre les équations de Lagrange.

Nous avons vu que l'invariant s représentait une distance élémentaire, avec : $\dot{s} = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$. L'intégrale de cette distance sur la durée d'une trajectoire doit être optimum, c'est le principe de Maupertuis. On calcule :

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial x^k} = \frac{1}{2\dot{s}} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q$$

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{\dot{s}} g_{pk} \dot{x}^p$$

et donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{s}} g_{pk} \dot{x}^p \right) - \frac{1}{2\dot{s}} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q = 0$$

dérivons le premier terme par rapport au temps :

$$\frac{1}{\dot{s}^2} \left(\dot{s} \left[\frac{dg_{pk}}{dt} \dot{x}^p + g_{pk} \ddot{x}^p \right] - g_{pk} \dot{x}^p \ddot{s} \right)$$

mais

$$\frac{dg_{pk}}{dt} \dot{x}^p = \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q} \dot{x}^q \dot{x}^p$$

donc on obtient :

$$\frac{1}{\dot{s}} \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q} \dot{x}^q \dot{x}^p + \frac{1}{\dot{s}} g_{pk} \ddot{x}^p - \frac{1}{\dot{s}^2} g_{pk} \dot{x}^p \ddot{s} - \frac{1}{2\dot{s}} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q = 0$$

en notant :

$$\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q} - \frac{1}{2\dot{s}} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} = [pq, k]$$

coefficient de Christoffel de première espèce et en multipliant par \dot{s} on obtient l'équation :

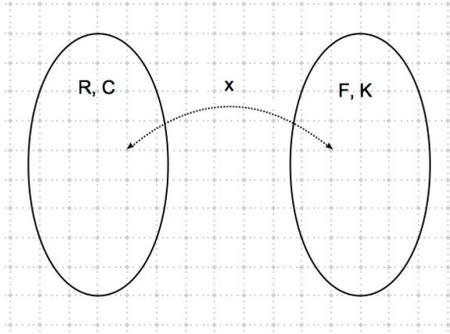
$$g_{pk} \ddot{x}^p + [pq, k] \dot{x}^p \dot{x}^q = \frac{1}{\dot{s}} g_{pk} \dot{x}^p \ddot{s}$$

On peut alors prendre s comme abscisse curviligne ($\dot{s} = 1, \ddot{s} = 0$) et trouver

$$g_{pk} \frac{d^2 x^p}{ds^2} + [pq, k] \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0 \quad (51)$$

15 Séance 15

Pour illustrer les points abordés précédemment sur une cas simple, nous allons considérer le cas présenté figure suivante.



Ce sont deux mailles couplées. La première porte les impédances $R + S_C r$ et la seconde $F + S_K r$, avec S_X la susceptance du condensateur de valeur χ et r l'inverse de l'opérateur de Laplace. Les deux mailles sont couplées par la fonction $S_X r$ donnant le tenseur fondamental :

$$z = \begin{bmatrix} R + \frac{1}{C_p} & -\frac{1}{X_p} \\ -\frac{1}{X_p} & F + \frac{1}{K_p} \end{bmatrix}$$

On peut regarder l'équation $e_k = z_{km} q^m$ comme celle d'une surface paramétrée par le temps et les charges. L'équation précédente vaut $e_k = \phi_k(q^k, t)$. Au fur et à mesure que le temps passe et suivant la source e_1 , les charges évoluent sur les deux mailles. Dans le plan q^1, q^2 ces évolutions tracent une courbe. Maintenant on peut regarder le système en considérant les sources variables, prenant toutes les valeurs possibles. Pour tout couple (q^1, q^2) , on fait correspondre des sources (e_1, e_2) . En maintenant q^1 fixe et en faisant varier q^2 , on obtient de nouveau une courbe cette fois dans le plan e_1, e_2 . Du coup, pour différentes valeurs de q^1 on balaie une surface. C'est la surface associée à l'équation $e_k = z_{km} q^m$. Regardons l'impulsion généralisée des trajectoires : soit à dériver dans le temps $\phi(q(t))$:

$$\phi' [q(t)] = \phi'(q) \cdot q'(t) = \frac{\partial \phi}{\partial q^k} \dot{q}^k = \dot{q}^k \mathbf{b}_k$$

Le condensateur de couplage peut évoluer dans le temps et s'exprimer comme :

$$S_X = \frac{vt + \chi_0}{\epsilon A}$$

En dérivant l'impulsion nous pouvons obtenir la force γ (au sens généralisé) avec :

$$\gamma = \frac{d}{dt} (\dot{q}^1 \mathbf{b}_1 + \dot{q}^2 \mathbf{b}_2) \quad (52)$$

$$\gamma = \ddot{q}^1 \mathbf{b}_1 + \dot{q}^1 \frac{d}{dt} \mathbf{b}_1 + \ddot{q}^2 \mathbf{b}_2 + \dot{q}^2 \frac{d}{dt} \mathbf{b}_2$$

En notant :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}_k = \mathbf{b}_{kt}$$

soit :

$$\gamma = \ddot{q}^n \mathbf{b}_n + \dot{q}^v \mathbf{b}_{vt}$$

Dans l'analyse, ce qui est intéressant, c'est de projeter cette force sur les axes de l'espace local :

$$\langle \gamma, \mathbf{b}_k \rangle = \ddot{q}^n \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_k \rangle + \dot{q}^v \langle \mathbf{b}_{vt}, \mathbf{b}_k \rangle$$

soit :

$$\langle \gamma, \mathbf{b}_k \rangle = g_{nk} \ddot{q}^n + \Gamma_{vt,k} \dot{q}^v$$

$$\langle \gamma, \mathbf{b}_k \rangle = g_{nk} \frac{di^n}{dt} + \Gamma_{vt,k} i^v$$

avec :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} R + S_C r \\ -S_X r \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -S_X r \\ F + S_K r \end{bmatrix}$$

et avec g donné par :

$$\begin{bmatrix} (R + S_C r)^2 + S_X^2 r^2 & -S_X r (R + S_C r + F + S_K r) \\ -S_X r (R + S_C r + F + S_K r) & S_X^2 r^2 + (F + S_K r)^2 \end{bmatrix}$$

Les dérivées des vecteurs de base sont données par :

$$\mathbf{b}_{1t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{vr}{\epsilon A} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{2t} = \begin{bmatrix} -\frac{vr}{\epsilon A} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les coefficients de Christoffel sont au nombre de 4 : $\Gamma_{1t,1}, \Gamma_{1t,2}, \Gamma_{2t,1}, \Gamma_{2t,2}$, que l'on calcule facilement.

Ce que l'on a fait, c'est que l'on a projeté le problème de départ sur une base d'un espace tangent de vecteurs $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Dans cet espace, on place les points de fonctionnement du système considéré avec les coordonnées du point q^1, q^2 . La vitesse des points, c'est à dire l'évolution de ces coordonnées dans le temps donne les trajectoires suivies par le comportement du système, donc la « distance » entre chaque point de fonctionnement pour un rythme temporel fixe. Maintenant cette vitesse varie en fonction du temps : une accélération existe. Il est des zones où la distance entre points varie plus vite ou moins vite qu'à d'autres endroits. La métrique et les coefficients de Christoffel permettent de calculer la projection de la trajectoire sur chaque direction d'espace. Mais comment interpréter ici ces directions ? Ce sont des axes, couplés ici. Imaginons que l'on ait deux vecteurs de base non couplés. On définit un vecteur \mathbf{v} tel que :

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{b}_1 + v^2 \mathbf{b}_2$$

On peut alors faire le produit intérieur par un des deux vecteurs de base :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1 = v^1 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + v^2 \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1 = g_{11}v^1 + g_{12}v^2$$

Comme les vecteurs ne sont pas couplés, $g_{12} = 0$ et

$$e_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1 = g_{11}v^1$$

les sources sont donc les projections d'un vecteur d'état du système sur les axes de base.

Toute la mécanique est là. Lorsque l'on applique des coordonnées sur la base à N composantes, on engendre un vecteur de dimension N . La projection de ce vecteur sur chaque axe de base engendre un covecteur qui est la source correspondante. Lorsque les vecteurs sont couplés, chaque source dépend de plusieurs coordonnées et non d'une seule. Les trajectoires se traduisent donc en terme de vecteur des

sources engendrées. Les vitesse et accélération traduisent les évolutions et variations dans l'évolution de ce vecteur.

Autre approche des géodésiques

Soit T l'énergie cinétique d'une particule de masse constante m se déplaçant à la vitesse v . Cette énergie est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} m g_{pq} v^p v^q \quad (53)$$

Calculons les équations de Lagrange :

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial T}{\partial x^k}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x^k} = \frac{1}{2} m \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q$$

car la dérivée de la vitesse suivant x est nulle ($\partial_x d_t x = d_t \partial_x x = d_t 1 = 0$).

Par ailleurs :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} = m g_{kq} \dot{x}^q$$

et

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} = m g_{kq} \ddot{x}^q + m \frac{d g_{kq}}{dt} \dot{x}^q$$

mais

$$\frac{d g_{kq}}{dt} = \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^m} \frac{dx^m}{dt}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} = m g_{kq} \ddot{x}^q + m \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^m} \dot{x}^q \dot{x}^m$$

Finalement notre lagrangien conduit à (en changeant l'indice m en p) :

$$\mathcal{L} = m g_{kq} \ddot{x}^q + m \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p} \dot{x}^q \dot{x}^p - \frac{1}{2} m \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q$$

En factorisant on obtient :

$$\mathcal{L} = m \left(g_{kq} \ddot{x}^q + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p} \dot{x}^q \dot{x}^p - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q \right)$$

On montre par ailleurs facilement que :

$$\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kp}}{\partial x^q} \quad (54)$$

et

$$\Gamma_{pq,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{kp}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \right)$$

d'où finalement notre lagrangien devient :

$$\mathcal{L} = m (g_{kq} \dot{x}^q + \Gamma_{pq,k} \dot{x}^p \dot{x}^q) \quad (55)$$

en notant y l'inverse de la métrique. C'est à dire : $y^{qk} g_{kq} = 1$, on trouve :

$$\mathcal{L} = m (g_{kq} \ddot{x}^q + g_{kr} y^{rk} \Gamma_{pq,k} \dot{x}^p \dot{x}^q)$$

On note :

$$\Gamma_{pq} = y^{rk} \Gamma_{pq,k} \quad (56)$$

appelé « coefficient de Christoffel de seconde espèce. Notre lagrangien donne finalement ;

$$m g_{kr} (\ddot{x}^r + \Gamma_{pq}^r \dot{x}^p \dot{x}^q) = m g_{kr} a^r = m a_r \quad (57)$$

où a_r est l'accélération covariante. Le lagrangien est la force. Ce point fondamental permet de comprendre comment calculer par exemple le travail de la force suivant différent trajet (si l'espace n'est pas plat, le travail peut varier suivant le chemin).

Mais au fait, qu'est-ce qu'une géodésique ? C'est une ligne droite, autrement dit c'est une trajectoire où l'accélération est nulle. En reprenant l'expression précédente, on comprend que les géodésiques dans un espace riemannien sont données par :

$$(\ddot{x}^r + \Gamma_{pq}^r \dot{x}^p \dot{x}^q) = 0 \quad (58)$$

on retrouve bien l'équation 51 mais réécrite avec les coefficients de Christoffel de deuxième espèce.

Dérivation covariante

La mécanique quantique se base sur le remplacement de l'énergie par $h\nu$, et par le fait que l'on effectue une mesure perceptible sur une fonction d'onde imperceptible. La relativité se base sur la dérivation covariante.

Considérons un vecteur $\vec{a} = a^i \vec{b}_i$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} d\vec{a} &= \lim_{\Delta x^k \rightarrow 0} [a^q(x^k + \Delta x^k) - a^q(x^k)] \\ d\vec{a} &= da^k \vec{b}_k + a^k d\vec{b}_k = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Par rapport à un paramètre p (quel qu'il soit), on développe :

$$\frac{d\vec{a}}{dp} = \frac{da^k}{dp} \vec{b}_k + a^k \frac{d\vec{b}_k}{dp} = 0$$

On utilise alors le subterfuge classique pour lever la dérivation par rapport au paramètre des vecteurs de base :

$$\frac{d\vec{a}}{dp} = \frac{da^k}{dp} \vec{b}_k + a^k \frac{\partial \vec{b}_k}{\partial x^m} \frac{dx^m}{dp}$$

On se rappelle que $\partial_{x^m} \vec{b}_k = \vec{b}_{km}$ et que par ailleurs $\langle \vec{b}_{km}, \vec{b}_u \rangle = \Gamma_{km,u}$. Cette relation suggère qu'il existe un lien entre les vecteurs de base et leurs dérivées. Essayons en posant :

$$\frac{\partial \vec{b}_k}{\partial x^m} = \Gamma_{km}^r \vec{b}_r \Leftrightarrow \vec{b}_{km} = \Gamma_{km}^r \vec{b}_r \quad (60)$$

réalisons le produit scalaire par \vec{b}_q de chaque membre :

$$\langle \vec{b}_{km}, \vec{b}_q \rangle = \Gamma_{km}^r \langle \vec{b}_r, \vec{b}_q \rangle = \Gamma_{km}^r g_{rq}$$

multiplions par l'inverse de la métrique de chaque côté :

$$y^{qr} \langle \vec{b}_{km}, \vec{b}_q \rangle = \Gamma_{km}^r$$

d'où :

$$y^{qr} \Gamma_{km,q} = \Gamma_{km}^r \quad (61)$$

Ayant démontré cela on peut maintenant reprendre le calcul de la dérivée de notre vecteur :

$$\frac{d\vec{a}}{dp} = \frac{da^r}{dp} \vec{b}_r + a^k \Gamma_{km}^r \vec{b}_r \dot{x}^m$$

soit :

$$\frac{d\vec{a}}{dp} = \left(\frac{da^r}{dp} + a^k \Gamma_{km}^r \dot{x}^m \right) \vec{b}_r = 0$$

On note la dérivée covariante du vecteur \vec{a} :

$$a^r_{;p} = \frac{da^r}{dp} + a^k \Gamma_{km}^r \frac{dx^m}{dp} \quad (62)$$

Ayant compris les techniques de calcul on peut calculer assez facilement :

Exercice

Calculer $\partial_{x^q} \vec{a}$.

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^q} = \frac{\partial}{\partial x^q} (a^r \vec{b}_r) = \frac{\partial a^r}{\partial x^q} \vec{b}_r + a^m \frac{\partial \vec{b}_m}{\partial x^q}$$

avec les relations précédentes on modifie cette équation pour trouver :

$$\frac{\partial a^r}{\partial x^q} \vec{b}_r = \frac{\partial a^r}{\partial x^q} \vec{b}_r + a^m \Gamma_{mq}^r \vec{b}_r$$

En écrivant la dérivée covariante avec un grand « D » et la notation précédente, on obtient :

$$\frac{Da^r}{Dx^q} = a^r_{;q} = \frac{\partial a^r}{\partial x^q} + \Gamma_{mq}^r a^m \quad (63)$$

Par ailleurs on peut comprendre sur un dessin que $\Gamma_{mq}^r = -\Gamma_{rq}^m$ (faites le en représentant la variation du vecteur dérivé comme un rotationnel d'un potentiel vecteur par exemple). D'où par un simple jeu des indices :

$$\frac{Da_r}{Dx^q} = a_{r;q} = \frac{\partial a_r}{\partial x^q} + \Gamma_{rq}^m a_m \quad (64)$$

Nous avons franchi ici un pas important pour introduire à la prochaine séance le tenseur de Riemann. C'est l'objet central de la géométrie riemannienne que l'on peut appliquer à d'autres problèmes que la seule gravitation, comme par exemple aux effets magnétisant dans les matériaux.

16 Séance 16

Je vous présente ici un développement personnel pour conduire aux équations d'Einstein. Je me suis appuyé sur les travaux de Boudenot, Loveridge et sur des relations que l'on retrouve classiquement. La grande différence est que l'on ne passe pas par l'étape du tenseur de Riemann que l'on pourra étudier par ailleurs, mais directement au tenseur de Ricci et la contraction du tenseur de Riemann. De fait la démonstration est beaucoup moins laborieuse. Mais soyez critiques ! Peut-être cette démarche cache-t-elle des hypothèses que je n'aurais pas vu.

Du temps de Newton on écrivait une relation qui reste merveilleuse entre une force et le produit de l'accélération d'un mobile par la masse d'inertie. La masse d'inertie ! Cette grandeur quantifie la capacité qu'a un corps à résister aux variations de vitesse qu'on veut lui faire subir. Ce n'est pas lié au poids. C'est un coefficient qui par exemple intervient pour une charge lorsque l'on écrit :

$$q\vec{E} = m_i \vec{\gamma}$$

Cette inertie existe pour toute force et toute matière. On peut ainsi calculer l'inertie d'un photon en écrivant l'égalité entre son énergie cinétique et l'énergie de Planck :

$$\frac{1}{2} m_i c^2 = \frac{1}{2} h\nu \Rightarrow m_i \equiv \frac{h\nu}{c^2}$$

Pourtant le photon n'a pas de masse « pesante ». Mais qu'est-ce alors que la masse pesante ? La masse pesante engendre la force de gravité, la force qui s'applique sur un corps de masse m_p et qui engendre le poids $\vec{P} = m_p \vec{G}$ dans un champ de gravitation \vec{G} . L'une est une propriété qui traduit la résistance des corps aux changements, l'autre est un facteur pour calculer une force. Et il y a eu bien des tentatives pour les comparer. Résultat : postulat d'Einstein, $m_p = m_i = m$!

Alors si un corps est en chute libre :

$$m\vec{G} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{G} = \vec{\gamma} \quad (65)$$

Énorme ! L'accélération de l'objet en chute libre est le champ de pesanteur. Si l'objet est soumis à

deux forces, on va de fait chercher l'écart au champ de gravitation. Par exemple :

$$q\vec{E} + m\vec{G} = m\vec{\gamma} \Rightarrow q\vec{E} = m(\vec{\gamma} - \vec{G})$$

Considérons maintenant la vitesse d'un mobile v^j . Cette vitesse est acquise par l'intermédiaire d'une transformation Λ :

$$v^j = \Lambda^j_k v^k$$

Soit e^k les directions de l'espace dans le référentiel d'observation. On veut calculer l'accélération pour se ramener à nos idées précédentes, soit :

$$\frac{\partial v^j}{\partial e^k}$$

Nous avons maintenant l'habitude :

$$\frac{\partial v^j}{\partial e^k} = \frac{\partial}{\partial e^k} (\Lambda^j_i v^i)$$

On dérive chaque terme :

$$\frac{\partial}{\partial e^k} \Lambda^j_i v^i + \Lambda^j_i \frac{\partial}{\partial e^k} v^i$$

or

$$\frac{\partial}{\partial e^k} \Lambda^j_i = \Gamma^j_{ik}$$

C'est de nouveau la dérivation covariante. Écrivons la :

$$\mathcal{D}_k v^j = \frac{\partial}{\partial e^k} v^j$$

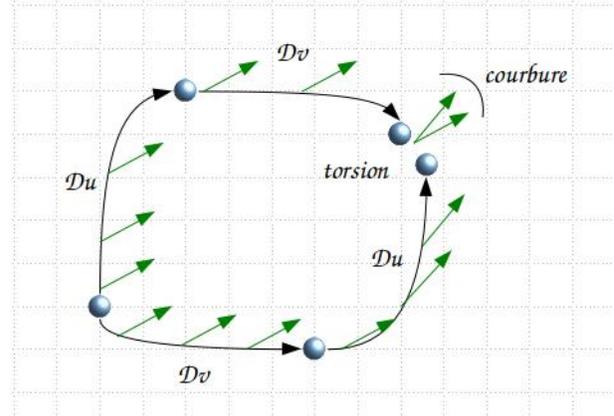
on obtient comme précédemment :

$$\mathcal{D}_k v^j = \partial_k v^j + \Gamma^j_{pk} v^p$$

Le déplacement parallèle

L'opération de déplacement parallèle revient à regarder la divergence d'un vecteur lorsque l'on se déplace dans l'espace-temps suivant deux directions et dans deux ordres différents. En mécanique classique on sait que le choix du chemin d'intégration d'une force ou d'un champ ne change pas le travail du champ. Mais si le processus est non linéaire, cela peut

devenir faux et le résultat peut dépendre du chemin choisi. La figure suivante montre le parcours d'un vecteur suivant deux chemins. Au final les deux chemins peuvent ne pas conduire au même état, auquel cas on a une torsion, ou conduire à un état commun mais avec un angle entre les vecteurs parvenant en ce point suivant les deux chemins, auquel cas on a une courbure.



Le problème est donc bien pour nous de calculer les variations d'un vecteur suivant deux parcours. Calculons par exemple

$$\frac{\partial}{\partial e^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial e^\mu} v^t \right)$$

On commence par la première dérivation :

$$\mathcal{D}_\mu v^t = \partial_\mu v^t + \Gamma^t_{\mu\sigma} v^\sigma$$

puis on applique la seconde :

$$\frac{\partial}{\partial e^\nu} (\partial_\mu v^t + \Gamma^t_{\mu\sigma} v^\sigma) = \dots$$

$$\dots + \frac{\partial}{\partial e^\nu} \partial_\mu v^t + \frac{\partial}{\partial e^\nu} \Gamma^t_{\mu\sigma} v^\sigma + \Gamma^t_{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial e^\nu} v^\sigma$$

soit :

$$\partial_{\nu\mu}^2 v^t + \frac{\partial}{\partial e^\nu} \Gamma^t_{\mu\sigma} v^\sigma + \Gamma^t_{\mu\sigma} \partial_\nu v^\sigma$$

mais nous avons vu que :

$$\frac{\partial}{\partial e^\nu} v^\sigma = \Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} v^\beta$$

et donc :

$$\frac{\partial}{\partial e^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial e^\mu} v^t \right) = \partial_{\nu\mu}^2 v^t + \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^t v^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^t \Gamma_{\nu\beta}^\sigma v^\beta$$

Maintenant si l'on calcule le parcours par l'autre chemin, sachant que les dérivées sont commutatives, la différence des deux chemins S conduit à :

$$\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^t v^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^t \Gamma_{\nu\beta}^\sigma v^\beta - \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^t v^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^t \Gamma_{\mu\beta}^\sigma v^\beta \quad (66)$$

où l'on peut déjà permuter les indices pour mettre v^σ en facteur :

$$(\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^t + \Gamma_{\mu\beta}^t \Gamma_{\nu\sigma}^\beta - \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^t - \Gamma_{\nu\beta}^t \Gamma_{\mu\sigma}^\beta) v^\sigma$$

on peut choisir une direction particulière par ailleurs dans l'intégration, telle que $t = \nu$, en effet s'il y a courbure, elle doit être visible pour toutes les directions possibles. On trouve alors :

$$(\partial_{\nu\mu}^2 - \partial_{\nu\mu}^2) = (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\nu + \Gamma_{\mu\beta}^\nu \Gamma_{\nu\sigma}^\beta - \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\beta}^\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\beta)$$

On note $R_{\mu\sigma}$ le tenseur de Ricci, contraction sur un indice du tenseur de Riemann :

$$R_{\mu\sigma} = (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\nu + \Gamma_{\mu\beta}^\nu \Gamma_{\nu\sigma}^\beta - \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\beta}^\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\beta) \quad (67)$$

et finalement la différence des divergences suivant les deux chemins se ramène à la valeur :

$$R_{\mu\sigma} v^\sigma$$

En remultipliant par une vitesse, on doit obtenir une grandeur proportionnelle à l'énergie cinétique, soit que :

$$\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = \zeta T \quad (68)$$

C'est une première forme des équations d'Einstein (forme de Loveridge). Maintenant si l'on exprime l'énergie cinétique en s'inspirant de l'électromagnétisme (parce que la divergence du champ que représente $R_{\mu\nu}$ a pour correspondant $\rho/(4\pi\epsilon_0)$), la

constante ϵ_0 correspond à $4\pi G$. Si l'on veut respecter nos règles d'indices dans l'équation de Loveridge, on peut exprimer : $\zeta T = 4\pi G T_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$ et à ce moment là :

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \quad (69)$$

qui était la première proposition d'Einstein. Mais cette équation n'est pas complète. En effet elle semble sous-entendre que dans le cas d'une absence de courbure, l'énergie cinétique est nulle (on l'appelle plus communément tenseur énergie - impulsion). On a vu que cette énergie peut être exprimée par $\frac{1}{2} g_{\mu\nu} T$. Donc à la limite de courbure nulle on doit retrouver ce terme. Ce qui conduit à :

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (70)$$

Ce sont les équations d'Einstein.

Ondes gravitationnelles

Intéressons-nous à la forme de Loveridge. Le tenseur de Ricci comporte des coefficients de Christoffel et leurs dérivées. Nous avons vu que le champ de pesanteur était l'accélération en chute libre. Le coefficient de Christoffel traduit donc une variation de ce champ. Si un corps suffisamment massif engendre un champ de pesanteur et que ce corps change de configuration dans l'espace et le temps, le tenseur de Ricci ne sera pas nul. Cela signifie que si vous êtes en chute libre vers la Terre, vous percevrez la variation de ce champ venue de loin sous la forme d'une variation de la force qui vous attire vers la Terre. Et cet effet pourrait être ondulatoire si le corps massif passe de périodes où le champ augmente à des périodes où le champ diminue.

Considérons par exemple un champ magnétique simplement exprimé par :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu i}{2\pi R} \mathbf{u}$$

Maintenant si la distance varie sinusoïdalement : $R = R(1 + \epsilon \sin \omega t)$

l'amplitude du champ devient :

$$B = \frac{\mu i}{2\pi R(1 + \epsilon \sin \omega t)}$$

et la dérivation temporelle du champ n'est plus nulle. De fait si ϵ est assez petit :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\mu i}{2\pi R^2} \frac{(1 + \epsilon \sin \omega t)}{(1 + 2\epsilon \sin^2 \omega t)}$$

ce qui signifie qu'une force électromotrice est créée. C'est un peu le même principe pour la gravitation. Si le champ de pesanteur change, l'accélération change. La métrique variant, les distances varient également, et un champ statique engendrera une force par variation de cette distance.

Pour mieux comprendre tous ces concepts, considérons l'exemple proposé par Max Born¹³. On imagine une molécule en régime d'oscillation, qui nous sert d'horloge. Si T est la période d'oscillation dans une région de l'espace où le champ est négligeable, l'invariant dans une métrique de Minkovski s'exprime par $s = icT$. C'est la distance entre deux points d'univers où le mouvement de la molécule change de sens. Dans une autre région de l'espace où règne un champ de gravitation, l'invariant s'exprime alors par

$$\begin{aligned} s^2 &= g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 - g_{44}c^2t^2 + \dots \\ &\dots + 2g_{12}x^1x^2 + 2g_{13}x^1x^3 + 2icg_{14}x^1t + 2g_{23}x^2x^3 + \dots \\ &\dots + 2icg_{24}x^2t + 2icg_{34}x^3t \end{aligned}$$

On peut poser $x = y = z = 0$ en choisissant la molécule comme centre du référentiel. Dans ce cas :

$$s^2 = -c^2T^2 = g_{44}t^2$$

d'où l'on déduit

$$t = T \frac{c}{\sqrt{-g_{44}}}$$

ce n'est qu'en absence de champ que $g_{44} = -c^2$.

Mais en présence d'un corps céleste, la gravitation agit comme une accélération attirant vers le corps.

La vitesse d'attraction vaut $v = g \frac{l}{c} = gt$, où l est la distance au corps. Sous cette vitesse, la perception de la période serait déformée par un effet Doppler et on aurait :

$$t = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{gl}{c^2}}}$$

Soit, pour un développement au premier ordre si gl/c^2 est assez petit :

$$t = T \left(1 + \frac{gl}{c^2} \right) \quad (71)$$

cette formule donne d'une manière générale l'écart de période de temps entre deux référentiels séparés d'une distance l et soumis à un champ de gravitation constant g .

Supposons ainsi deux observateurs dont l'un est immobile A tandis que l'autre B est en mouvement. Au retour, la montre de A avance sur celle de B . Mais on ne pourrait pas faire l'expérience inverse et considérer que A est en mouvement par rapport à B , car B subit des accélérations. Il n'est donc pas dans un référentiel inertiel suivant la relativité restreinte. A est immobile dans une région de l'espace où le système de mesure est euclidien. Il n'y a de fait pas de champ de gravitation variable dans cette région. Suivant un autre point de vue, B est immobile dans un référentiel qui subit une accélération (donc voit un champ de gravitation de courte durée) au départ, au changement de direction et à l'arrivée. Sans ces champs A tombe librement alors que B est retenu fixe. De ces trois champs, seul celui du changement de direction va influencer. En effet, suivant notre équation précédente (71), l'écart de temps vient aussi d'un écart de distance non nul l . Or, à l'arrivée et au départ, l'écart de distance est nul : l'écart de temps l'est aussi. Ce qui est assez logique somme toute !

Par contre, lors du demi-tour de A se produit un écart entre les horloges. Pendant cette accélération, un champ de gravitation prend naissance pendant une durée τ . D'après notre relation précédente, l'avance de marche de l'horloge sera de

$$\frac{gl}{c^2} \tau$$

13. La théorie de la relativité d'Einstein et ses bases physiques. Edition Jacques Gabay.

Pendant toute la durée où A est mobile pour B , l'horloge de A retarde par rapport à celle de B d'un écart donné par la relativité restreinte¹⁴ qui vaut :

$$\frac{\beta^2}{2}t$$

Donc au retour, A est décalée de B d'une quantité :

$$\frac{gl}{c^2}\tau - \frac{\beta^2}{2}t$$

Compte-tenu de cette correction nous pouvons maintenant dire que cet écart doit être le même que celui où A est considéré comme immobile.

Dans ce cas B s'éloigne puis se rapproche de A . Sa vitesse est donc d'abord v puis $-v$. Soit une variation de vitesse de $2v$ est par suite une accélération

$$g = \frac{2v}{\tau}$$

Par ailleurs au moment de demi-tour, la moitié du voyage a été réalisée. Donc $l = vt/2$. De fait : $gl = v^2t/\tau$.

Finalement :

$$\frac{gl}{c^2}\tau - \frac{\beta^2}{2}t = \frac{v^2}{c^2}t - \frac{\beta^2}{2}t = \frac{\beta^2}{2}t$$

En relativité restreinte, l'écart des durées est exprimé par :

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx t \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)$$

On retrouve bien la symétrie du problème en relativité restreinte, mais à condition d'appliquer la relativité généralisée tenant compte des accélérations. On ne peut trouver la dualité des points de vue sans la considérer.

On perçoit bien sur cet exemple que lorsqu'un mobile subit une accélération, c'est équivalent au fait de dire qu'il est attiré par un corps massif et son champ de gravitation. Ainsi on ne parle plus d'accélération d'inertie, mais de champ de gravitation et il faut s'habituer en relativité générale à voir les effets sous cet angle. Dans l'exemple des horloges traité

14. β est la grandeur v^2/c^2 que nous avons vu précédemment séance 11

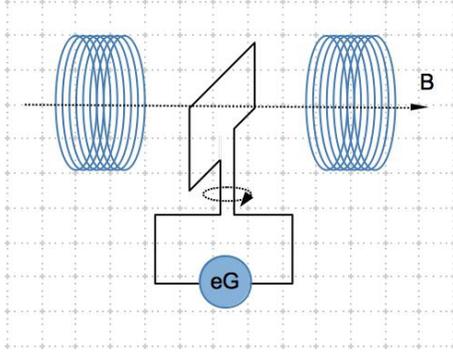
par Born, on voit qu'en relativité restreinte un décalage a lieu entre les deux horloges mais qui ne peut être en pratique comparé car la relativité restreinte ne considère que des référentiels d'inertie, c'est à dire à vitesse relative de déplacement non nulle mais sans accélération. Pour pouvoir comparer il faut de fait prendre en compte ces accélérations. Or pour un référentiel d'inertie absence d'accélération veut dire absence de champ de gravitation. Sur la Terre, lorsque nous nous déplaçons à vitesse constante, nous subissons au second ordre une accélération car la Terre, jusqu'à preuve du contraire, est ronde. De fait nous ne pouvons échapper à une accélération centrifuge.

Deuxième point important est que chaque fois que nous subissons une accélération, une déformation de l'espace-temps local arrive et de fait les horloges de cet espace ne suivent plus la même métrique que celle d'un autre espace. Les temps ne s'y déroulent plus de façon égale. En relativité générale, un objet n'est plus en accélération dans un champ de pesanteur, il est en chute libre dans un espace courbé.

Voyons ce qu'il en est des machines électriques.

17 Séance 17

La modélisation des machines électriques est à l'origine des travaux de géométrisation des circuits électriques de Gabriel Kron. En effet le problème d'un système en rotation par rapport à un autre rejoint les réflexions de mouvements relatifs accélérés de référentiels. L'autre aspect intéressant est celui du couplage électromécanique qui s'opère dans les machines électriques. La figure suivante montre un petit cadre alimenté placé dans un champ magnétique uniforme. En regardant ce cadre et les deux bobines comme des aimants avec leurs pôles déterminés par le sens des courants, on comprend que le cadre qui peut tourner, va s'orienter de façon à présenter son pôle sud en face du pôle nord d'une bobine et réciproquement.



L'énergie magnétique est exprimée par une forme Lii . En introduisant le flux, cela donne un produit Ψi . Une première équation relie le couple de la machine Γ à cette énergie et aux frottements ρ de l'axe de rotation ainsi qu'au moment d'inertie K du cadre, pour une vitesse de rotation Ω :

$$\Gamma = K \frac{d\Omega}{dt} + \rho\Omega - \Psi i \quad (72)$$

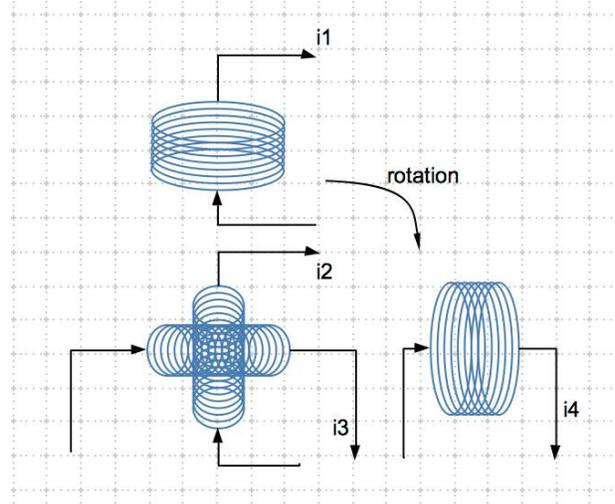
Le produit flux - vitesse de rotation $\Psi\Omega$ donne en dimension $[H][A][s]^{-1}$ qui redonne une force électromotrice (fém). Les autres composantes égalisent la fém source aux composantes d'impédances de la machine :

$$e = \mathcal{L} \frac{di}{dt} + ri + \Psi\Omega \quad (73)$$

Les deux équations sont couplées : nous avons un système multi-physiques électromécanique.

Machine primitive de Kron

La machine primitive de Kron est faite de deux enroulements en quadrature. Le schéma suivant la représente.



A partir de ce schéma, on peut établir les impédances des éléments du circuit. Chaque bobinage n a une résistance r_n . On a les inductances propres des bobines : $L_{nn}pi^n$; les mutuelles inductances entre bobines parallèles (en vis à vis) : $M_{ab}pi^b$ et les couplages entre bobines en mouvements de rotation (flux coupé) $G_{ab}pi^b$. Chaque bobinage k se ramène à une maille de fém e_k , tel que le système d'équations $e_k = z_{km}i^m$ soit lié au tenseur z donné par :

$$\begin{bmatrix} r_{11} + L_{11}p & M_{12}p & 0 & 0 \\ M_{21}p & r_{22} + L_{22}p & G_{23}\Omega & G_{24}\Omega \\ -G_{13}\Omega & -G_{32}\Omega & r_{33} + L_{33}p & M_{34}p \\ 0 & 0 & M_{43}p & r_{44} + L_{44}p \end{bmatrix} \quad (74)$$

Par ailleurs la formule du couple généralisée, s'écrit $\Psi_\alpha i^\alpha$. Si les caractéristiques d'induction peuvent être supposée linéaire (en-dessous du point de saturation), les $G_{\alpha\beta}$ sont des constantes telles que $\Psi_\alpha = G_{\alpha\beta}i^\beta$.

Soit pour le stator : $\Psi_1 = \Psi_4 = 0$ et pour le rotor $\Psi_2 = G_{23}i^3 + G_{24}i^4$ et $\Psi_3 = -G_{31}i^1 - G_{32}i^2$. D'où $\Gamma = G_{\alpha\beta}i^\alpha i^\beta$.

Notons que le système d'équations relié à la machine peut se résumer en

$$e_\alpha = r_{\alpha\beta}i^\beta + L_{\alpha\beta} \frac{di^\beta}{dt} + G_{\alpha\beta}\Omega i^\beta \quad (75)$$

Machine tournante

Par rapport à la machine primitive de Kron, on considère maintenant une machine tournante similaire en nombre de pôles. Entre les courants i^β de la machine primitive fixe et ceux i'^β de la machine tournante, on peut écrire les relations :

$$\begin{cases} i^1 = i'^1 \\ i^2 = i'^2 \cos\theta - i'^3 \sin\theta \\ i^3 = i'^2 \sin\theta + i'^3 \cos\theta \\ i^4 = i'^4 \end{cases}$$

avec $\theta = \theta(t) = \Omega t$.

Les relations précédentes conduisent à la connexion :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $i^\alpha = C_j^\alpha i'^j$. La connexion est cette fois une fonction dépendant du temps.

Calculons la dérivation du courant en fonction de la connexion avec les courants tournants :

$$\begin{aligned} \frac{di^\alpha}{dt} &= \frac{d}{dt} (C_j^\alpha i'^j) \\ \dots &= \frac{d}{dt} C_j^\alpha i'^j + C_j^\alpha \frac{d}{dt} i'^j \\ \dots &= i'^j \frac{\partial C_j^\alpha}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + C_j^\alpha \frac{d}{dt} i'^j \\ \dots &= i'^j \frac{\partial C_j^\alpha}{\partial \theta} \Omega + C_j^\alpha \frac{d}{dt} i'^j \end{aligned}$$

En remplaçant dans (75) et en multipliant à gauche par la connexion on obtient :

$$\begin{aligned} C_i^\alpha e_\alpha &= C_i^\alpha C_j^\beta r_{\alpha\beta} i'^j + C_i^\alpha C_j^\beta L_{\alpha\beta} \frac{d}{dt} i'^j + \dots \\ \dots &+ C_i^\alpha \frac{\partial C_j^\beta}{\partial \theta} L_{\alpha\beta} \Omega i'^j + C_i^\alpha C_j^\beta G_{\alpha\beta} \Omega i'^j \end{aligned}$$

posons :

$$r'_{ij} = C_i^\alpha C_j^\beta r_{\alpha\beta}$$

$$L'_{ij} = C_i^\alpha C_j^\beta L_{\alpha\beta}$$

$$G'_{ij} = C_i^\alpha C_j^\beta G_{\alpha\beta}$$

$$H'_{ij} = C_i^\alpha \frac{\partial C_j^\beta}{\partial \theta} L_{\alpha\beta}$$

$$e'_i = C_i^\alpha e_\alpha$$

on trouve finalement :

$$e'_i = r'_{ij} i'^j + L'_{ij} \frac{di'^j}{dt} + H'_{ij} \Omega i'^j + G'_{ij} \Omega i'^j \quad (76)$$

On voit apparaître dans le système d'axes mobiles un terme supplémentaire dépendant de l'objet H' qui n'est pas un tenseur (vous pourrez le vérifier) mais une sorte de coefficient de Christoffel simple. Le terme $H'_{ij} \Omega i'^j$ a été appelé par Kron « fém de Coriolis » par analogie avec la force du même nom. La transformation sur l'impédance peut s'écrire :

$$z'_{ij} = z_{\alpha\beta} C_i^\alpha C_j^\beta + L_{\alpha\beta} C_i^\alpha \frac{\partial C_j^\beta}{\partial \theta} \Omega$$

C'est le modèle de machine de Kron, simple, qui peut être développé suivant la même approche pour d'autres types de machines (asynchrones, ...).

18 Séance 18

Les systèmes complexes peuvent être en partie modélisés par des « agents ». Nous pouvons essayer de fabriquer des agents qui soient aussi des éléments d'automatisme.

Considérons une simple maille faite de deux branches. La première branche d'impédance a constitue l'entrée de l'agent et la seconde d'impédance h la sortie. Les deux branches sont connectées par la même maille. Si i^2 est le courant de la seconde branche, la sortie du système est donnée par $s_2 = h.i^2$. Le système est en l'état en boucle ouverte. Pour une entrée $e_1 = u_1 + \theta_1$ de commande u_1 et de bruit

provenant de la nature θ_1 , la fonction de transfert est donnée par

$$f = \frac{s_2}{e_1} = \frac{hi^2}{e_1} \quad (77)$$

Pour un courant de maille unique j^1 on obtient :

$$f = h \frac{j^1}{e_1}$$

Pour créer un système à boucle fermée, on doit ajouter une réaction β de la sortie vers l'entrée. Le tenseur des impédances dans l'espace des branches est :

$$z = \begin{bmatrix} a & -\beta \\ -\beta & h \end{bmatrix}$$

Avec une connexion $[1, 1]$, on trouve dans l'espace des mailles :

$$g = C^T . z . C = a + h - 2\beta$$

alors :

$$e_1 = (a + h - 2\beta) j^1$$

et la sortie devient :

$$s_1 = hj^1 = h \frac{e_1}{(a + h - 2\beta)}$$

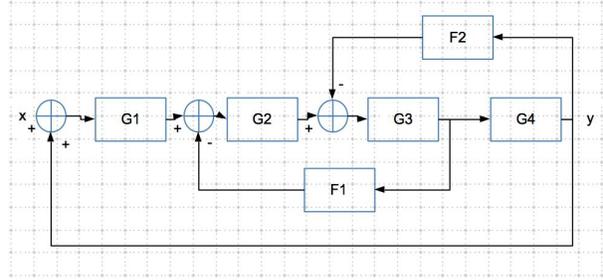
choisissons $a = h$ avec $s_1 = hj^1$ pour obtenir

$$s_1 = hj^1 = \frac{h}{2(h - \beta)} e_1$$

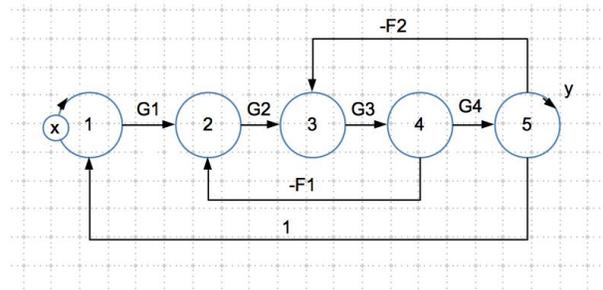
La fonction de transfert devient

$$f = \frac{s_1}{e_1} = \frac{h}{2(h - \beta)} \quad (78)$$

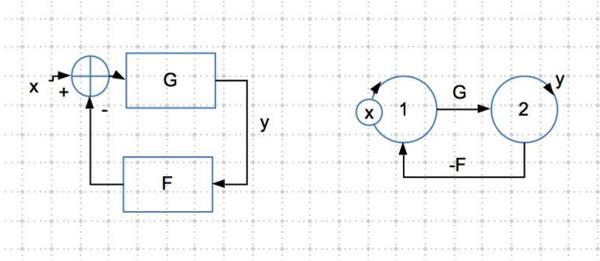
Autre cas intéressant. Considérons la boucle imbriquée présentée figure suivante. Elle n'est pas si évidente à exprimer. On peut soit utiliser des règles classiques pour l'automatique comme le déplacement d'un point de prélèvement, ce qui permet de se ramener à des structures canoniques simples, soit nommer les sorties des blocs et les exprimer pour obtenir la fonction de transfert globale. Mais on peut aussi essayer de faire autrement.



Suivant notre approche sous le formalisme de Kron, les opérateurs des blocs peuvent être rattachés à des cordes. Mais les variables d'entrée sortie ou d'états doivent être rattachées à des flux ou des efforts. Comme il s'agit arbitrairement d'associer ces variables à celles des réseaux, on peut décider d'impédance unitaire pour pouvoir « jouer » avec des réseaux très simples comme des mailles et y réaliser les connexions entre fonctions de transfert de blocs et variables. Ainsi si l'on associe aux mailles une impédance de 1Ω , effort et flux deviennent égaux. La prochaine figure se veut ainsi équivalente à la précédente.



Sur ce graphe on voit apparaître les cordes qui portent les fonctions précédemment assurées par les blocs et chaque maille porte une variable d'état ou pour la première la sollicitation x et la dernière un flux que l'on considérera comme la sortie y . Si chaque maille vaut 1Ω , le flux de la première maille vaut également x . De fait la fém induite dans la seconde maille vaut G_1x , mais comme la première maille capte aussi une induction en provenance de la maille 5, on a pour le premier flux $x+y$ le couplage valant 1 et donc la fém induite sur la seconde maille vaut $G_1(x+y)$. Considérons un cas simple pour re-détailler ce mécanisme qui est à la base de tout le développement suivant.



Sur la figure précédente, le schéma-bloc de gauche se résout facilement. On trouve $y = G(x - Fy)$. Sur le graphe de droite, la fém totale induite vaut $x - Fy$. Comme son impédance est de 1Ω , le flux a la même valeur et la corde transmet sur la maille de sortie la fém $G(x - Fy)$, comme son flux est y et son impédance est également de 1Ω on trouve dans les deux cas : $y = G(x - Fy)$.

Maintenant que l'on commence à comprendre comment cela fonctionne, on peut revenir au graphe avec les deux boucles imbriquées. Mais pourquoi s'embêter à résoudre de proche en proche les équations ? On sait établir la matrice fondamentale de ce réseau :

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ G_1 & 1 & 0 & -F_1 & 0 \\ 0 & G_2 & 1 & 0 & -F_2 \\ 0 & 0 & G_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Dès lors en définissant le vecteur des sources $T = [x \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ et les inconnues :

$$Q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \\ q^4 \\ y \end{bmatrix}$$

En résolvant le système $T = zQ$ on trouve y (par exemple en utilisant maxima) :

$$y = x \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{G_1 G_2 G_3 G_4 - F_2 G_3 G_4 - F_1 G_2 G_3 + 1}$$

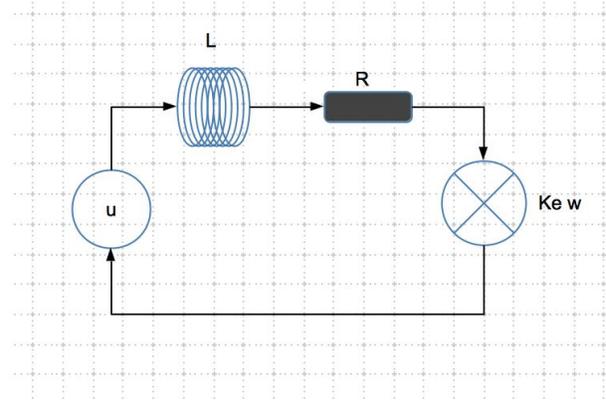
Voilà ce qui constitue a priori une nouvelle façon de calculer des schémas d'automatique et qui semble assez pratique. Appliquons-la à un moteur.

Schéma-bloc moteur

On considère le schéma suivant, accompagné des informations suivantes : C_m est le couple moteur, C_r le couple résistant, K_d la constante de frottement visqueux, K_e la constante de force électromotrice, K_t le couple électromagnétique et J le moment d'inertie moteur.

$$\begin{cases} C_m = K_t \cdot i \\ K_t \cdot i - K_d \cdot \omega - C_r = J \frac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

ω est la vitesse angulaire.



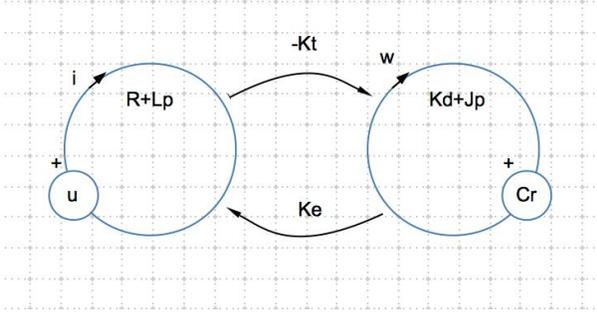
A la vue du schéma et des équations précédentes, on déduit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u = (R + Lp) i - K_e \omega \\ -C_r = -K_t i + (K_d + Jp) \omega \end{cases}$$

D'où l'on extrait le tenseur fondamental :

$$\begin{bmatrix} u \\ -C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + Lp & -K_e \\ -K_t & K_d + Jp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} \quad (80)$$

Du tenseur fondamental et du vecteur des sources, on déduit immédiatement le graphe correspondant :



Tous les éléments apparaissent dans ce graphe tant côté moteur que circuit électrique du moteur.

Si l'on pose que le couple résistant, sur une partie de domaine au moins s'exprime par $\alpha\omega$, cela revient à remplacer la force contre électromotrice par une résistance de valeur α . A ce moment là, l'entraînement moteur dépend directement de la sollicitation u , et les deux réseaux électrique et mécanique sont couplés. Le tenseur fondamental devient :

$$g = \begin{bmatrix} R + Lp & -K_e \\ -K_t & K_d + Jp + \alpha \end{bmatrix} \quad (81)$$

avec un covecteur source réduit à $u : T = [u \ 0]$.

Agent mobile

Notre agent est un peu rudimentaire et manque un peu de perception. Mais ce n'est pas grave pour ce que nous voulons étudier. Il est déjà capable de répondre à une sollicitation u et d'avancer sous cette commande. Il suffit de le faire piloter par un troisième agent, un humain par exemple qui est lui doté de perception et de capacités de décision.

Notre système précédent constitué d'un tenseur g , d'une source T et de variables i, ω peut être piloté et constitue ce que j'ai appelé un « tenfold ». C'est une variété si je précise les limites des domaines associés aux variables, mais je l'ai découpée pour transformer plus facilement ses constituants. Le tenfold « agent moteur » \check{m} est ainsi défini par la liste $\left(T, g, \left\{ \begin{matrix} C \\ S \end{matrix} \right\} \right)$ où C est la connectivité qui est appliquée à l'ensemble S des objets primitifs qui constituent le système. On s'intéresse au covecteur des sources T car c'est en modifiant sa composante

que l'on va contrôler le déplacement de notre agent moteur. Pour passer d'une sollicitation u à une sollicitation u' il faut appliquer le transformateur :

$$\check{t} = \left(\left[\begin{array}{cc} \frac{y'}{u+\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \mathbb{K}, \mathbb{K} \right)$$

$\epsilon > 0$. L'opérateur \mathbb{K} ne changeant pas l'objet auquel il s'applique. On peut noter d'une manière générale \check{t}_v pour un réglage d'une vitesse v .

Au départ supposons un système fait de deux agents. A l'initial, la distance entre les deux agents qui se font face est d_0 . La probabilité d'existence de cet état est 1 puisque c'est nous qui le fixons! On peut donc créer un vecteur des probabilités des états qui a un 1 comme première composante et pour l'instant, 0 ailleurs. L'état physique lui est \check{s}_0 , tenfold à l'initial égal au tenfold \check{m} associé à l'agent moteur distant de $d_0 = 6$ d'un second agent moteur. On établit pour chaque agent le jeu suivant : il faut se rapprocher le plus possible de l'autre agent sans le toucher. Une autre règle du jeu est que l'on dit à chaque agent que lorsqu'il active le moteur, celui-ci fonctionne pendant 1 seconde et que chaque agent peut jouer au plus 2 fois, sachant que le moteur va au maximum à la vitesse 4/6, qu'à chaque tour la vitesse ne peut pas être nulle et que les deux agents jouent simultanément. Un des deux agents est désigné comme étant le premier à jouer. Notons que les règles du jeu sont une connaissance commune et que chaque agent sait que l'autre connaît aussi les règles et a le même objectif. Par ailleurs, chaque agent connaît la position de l'autre **mais les agents ne peuvent communiquer entre eux**.

Puisque chaque joueur peut jouer deux fois, avec l'état initial, cela crée des vecteurs information (probabilité d'état) et états de 3 composantes. Le propagateur du problème comporte deux matrices γ et $\tilde{\gamma}$. La première contient 4 sous-matrices. Les sous-matrices 3x3 extra-diagonales sont nulles et les 2 sous-matrices en diagonale comportent respectivement les transformations qui vont faire évoluer le premier agent et le second agent. La matrice $\tilde{\gamma}$ se comporte de même mais est une matrice de Markov qui porte les probabilités de transitions (transformations) appliquées aux tenfolds des agents. Prenons

l'exemple du premier agent. Son vecteur d'état au bout de 3 jets est :

$$\check{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \check{s}_3 \end{bmatrix}$$

Il parvient à cet état en subissant une première transformation $\check{t}_1 \check{s}_0$, puis une seconde $\check{s}_3 = \check{t}_2 (\check{t}_1 \check{s}_0)$. Cela peut être réalisé par la matrice suivante :

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \check{t}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \check{t}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Si l'on part du vecteur initial

$$\check{m} = \begin{bmatrix} \check{s}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en appliquant deux fois le propagateur $\gamma_1 \gamma_1 \check{m}$ on trouve bien le vecteur d'état cherché au bout de deux coups.

Maintenant si pour le deuxième joueur on choisit le propagateur suivant :

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \check{j}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \check{j}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

et le vecteur initial

$$\check{n} = \begin{bmatrix} \check{q}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

on peut faire « jouer » les deux agents simultanément en appliquant le propagateur et le vecteur d'états suivants :

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{s}_0 \\ 0 \\ 0 \\ \check{q}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Le propagateur des probabilités $\tilde{\gamma}$ se construit exactement de la même façon, mais les composantes

sont les probabilités bayésiennes de choix au lieu des transformations. Après, tel que nous avons décrit l'évolution, il n'y a pas de choix, puisque chaque joueur peut jouer deux coups et nous avons donné une dimension 3 aux vecteurs d'états. Il est plus facile à ce stade de la réflexion de construire un arbre de Kuhn pour chaque joueur. Et comme les joueurs ont plusieurs choix possibles, il faut essayer de justifier leurs stratégies en fonction de leurs profils psychologiques. Il faut noter par ailleurs que suivant les règles et hypothèses du jeu, si les joueurs avancent au maximum de vitesse, ils rentrent en collision.

Pour s'entraîner sur ces exercices difficiles de jeux, nous allons limiter ici le nombre de jet possible à 1.

Exercice

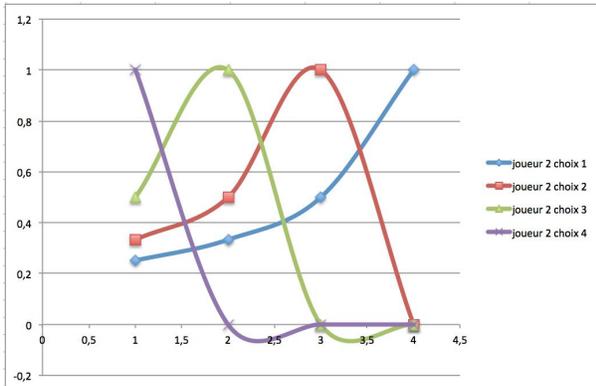
Essayez d'imaginer quelle peut être l'évolution du système ou d'un agent en fonction d'hypothèses sur son caractère et en renseignant un tableau où les lignes correspondent à des choix du joueur 2 et les colonnes du joueur 1 (en terme de transformations, donc ici de vitesse) et les cases sont les résultats en fonction de ces choix (fonction objectif ou gain communs dans ce jeu pour les deux acteurs). Pour simplifier on prendra une découpe de l'espace en 4 distances de 1/6 à 4/6, qui est la vitesse maximum (comme il n'y a qu'un jet, il est inutile d'aller plus loin). Rappelez-vous que les deux joueurs ne communiquent pas. Essayez d'imaginer quelles peuvent être les hypothèses émises par chaque joueur en fonction de la croyance qu'ils peuvent avoir dans le caractère du joueur opposé. Cette notion de croyance est essentielle.

19 Séance 19

On peut commencer par remplir un tableau où l'on inscrit les gains dans chaque situation de jeu des deux joueurs (pour chaque couples de choix). Le tableau suivant donne ces résultats en ajoutant deux colonnes pour les gains minimum et maximum pour un joueur, dans toutes les situations de choix de l'autre joueur.

choix joueur 1 (en facteur de 1/6)	j2 choix 1	j2 choix 2	j2 choix 3	j2 choix 4	G moyen	G min	G max
1	0,25	0,33333333	0,5	1	0,52083333	0,25	1
2	0,33333333	0,5	1	0	0,45833333	0	1
3	0,5	1	0	0	0,375	0	1
4	1	0	0	0	0,25	0	1

Déjà il est frappant de constater que le gain minimum est non nul dans un seul cas, lorsque le joueur 1 (ou 2) choisit le déplacement minimal. Autre point remarquable, le gain maximum atteignable est toujours 1. Par contre il ne peut être atteint que si les deux joueurs font des choix non identiques. Le jeu est symétrique (même conditions pour les deux joueurs) et l'on voit ici clairement qu'il est coopératif (gain optimal sous condition de coopération). Malheureusement pour eux, les joueurs ne peuvent pas communiquer. L'obtention du gain maximum est donc très difficile car ils l'auraient facilement en se mettant d'accord, mais là s'ils prennent le risque de jouer un déplacement maximal, leurs agents peuvent se toucher et le gain devient nul. Heureusement, les deux joueurs peuvent être « rationnels », c'est à dire jouer en ne cherchant pas à nuire à l'autre joueur mais simplement choisir objectivement la solution optimale, ici pour les deux. Chacun sait que l'autre sait. Mais aucun des deux ne peut être sûr de ce que l'autre va jouer. Et ils n'ont droit qu'à 1 coup (sinon ce serait trop facile!). Dans les tracés suivant, on regarde les gains du joueur 1 en fonction des choix de l'autre joueur.



Le jeu étant symétrique et la matrice des « pay-off » diagonale, les meilleurs couples de choix sont de fait (1, 4), (2, 3). Mais si le déplacement était continu, un couple plus performant serait (2.9, 2.9) assurant

le gain maximum sans contact. Lorsque les joueurs choisissent un couple comme (2, 3) ils ont une chance sur 2 de gagner, car ne pouvant communiquer ni savoir ce que l'autre va jouer, ils peuvent jouer simultanément 3 et tout perdre. Le couple idéal correspond à une courbe centrée. Dans notre cas discontinu, c'est le choix 2 que prendront des joueurs **rationnels**. Comme nous avons limité notre jeu à 1 coup, le propagateur et vecteur des vitesses \vec{v} correspondant deviennent :

$$\gamma_{rat} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u_2}{u_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_2}{u_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ u_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

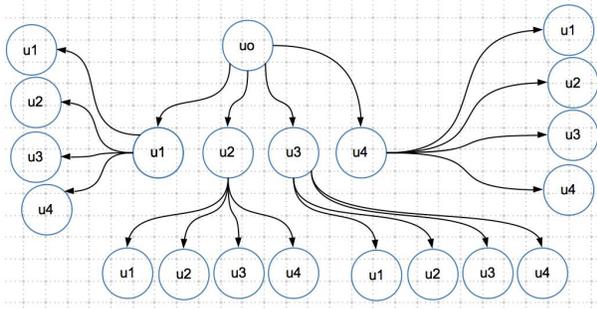
(u_2 étant le déplacement sous le choix « 2 » et u_0 étant une vitesse très petite mais non nulle pour lever la singularité mathématique). Ce propagateur γ_{rat} correspond à la description du jeu réalisé avec deux joueurs « rationnels » (il résulte comme nous l'avons vu de la somme de deux propagateurs de joueurs rationnels $\gamma_r : \gamma_r \oplus \gamma_r$). Notons d'autre part qu'il faut que chaque joueur ait confiance dans la rationalité de l'autre, supposant ainsi qu'aucun des deux joueurs ne va choisir « 4 ». La croyance dans la rationalité de l'autre est à la base de cette **stratégie**.

Maintenant un joueur qui veut assurer un gain minimum, quel que soit le choix de l'autre joueur, donc un joueur ne pouvant absolument pas compter sur l'analyse de l'autre dans un objectif coopératif va jouer le choix « 1 ». Quoi que joue l'autre, il est assuré d'avoir un gain non nul (rappelons que le gain est le même pour les deux joueurs, étant lié à la distance seule et non à la position des agents). Notons γ_p le propagateur associé à ce choix, il a la même structure que le premier quadrant de $\gamma_r = \gamma_{rat}$ à ceci près que u_2 est remplacé par u_1 . On pourra de même définir un propagateur γ_j pour un joueur « aimant jouer », donc prenant des risques et choisissant le déplacement u_3 . Si l'autre joueur fait de même, le gain s'annule. Par contre si l'autre joueur choisi une distance inférieure, le gain sera plus grand que celui associé à γ_r . On est bien dans une démarche de « joueur ». Enfin un dernier profil peut être celui d'un « suicidaire » γ_s qui,

pour une raison quelconque, joue « 4 » pour prendre un risque maximum et très probablement forcer un gain nul, sauf à ce que l'autre joueur choisisse un déplacement de « 1 ».

On a donc dégagé à ce niveau quatre comportements C_i représentés par quatre propagateurs élémentaires : $\gamma_r, \gamma_p, \gamma_j, \gamma_s$. Ces propagateurs, appliqués aux agents (à notre machine simple ici) modifient les données de cet agent de telle sorte que nous simulons une évolution de l'agent dans un contexte donné. Tout cela est donc bien mathématisé. Sur des raisonnements robustes, nous avons défini 4 comportements et 4 évolutions possibles du système agents - joueurs. Il reste à les pondérer de statistiques sur ces comportements.

Pour cela et parce que nous avons basculé sur des propagateurs ne concernant qu'un seul joueur, nous pouvons transposer le tableau vers un arbre de Kuhn. Après tout le fait que les deux joueurs jouent simultanément n'empêche pas de considérer leur choix séquentiellement. Il pourrait se trouver d'ailleurs que chaque joueur joue à son tour, dès lors qu'il ne peut pas voir où l'autre joueur a placé son agent, cela ne change rien. La figure suivante représente cet arbre de Kuhn où chaque possibilité de choix du premier joueur est suivie du choix possible du second joueur.



Les 16 combinaisons possibles constituent autant de trajectoires possibles du système $\gamma_i \oplus \gamma_j \vec{v}$, $i \in [1, 4], j \in [1, 4]$. Pour chaque type de transformation γ_i est associée une probabilité de réalisation. On peut alors demander à un institut de sondage quels sont, pour une population donnée (ces instituts savent très bien gérer ces problématiques), tranche d'âge donnée, etc., la proportion de personnes « ra-

tionnelles », « prudentes », « joueuses » ou « suicidaires ». On définit alors, soit CP cette catégorie de population : $P(C_i | CP)$. On pense alors que les probabilités $P(\gamma_i | C_i)$ sont toutes égales à 1? Mais pas forcément. Et c'est là toute la complexité de la nature. Car une personne rationnelle peut adapter son comportement en fonction de l'environnement, et ici en fonction du joueur partenaire. Cette influence réciproque, ce couplage particulier permet d'expliquer qu'une personne rationnelle puisse devenir irrationnelle sous l'influence de tiers. C'est le phénomène des foules par exemple. Là intervient aussi de façon majeure la possibilité de « tester » l'environnement. Sur un coup, si les joueurs ne peuvent se voir, la probabilité précédente sera proche de 1. Sur deux coups, le premier coup va donner à chaque joueur une information sur le comportement de l'autre joueur. De fait, le second tir sera fortement influencé par le déroulement du premier. Les croyances pourront évoluer, en même temps qu'une connaissance commune se construira, etc.

Le gain peut être calculé par

$$G_{ij} = 6 - [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1] \cdot (\gamma_i \oplus \gamma_j \vec{v}) \quad (84)$$

A ce gain est associée une probabilité

$$P_{ij} = P(\gamma_j | C_j) P(C_j | CP) P(\gamma_i | C_i) P(C_i | CP)$$

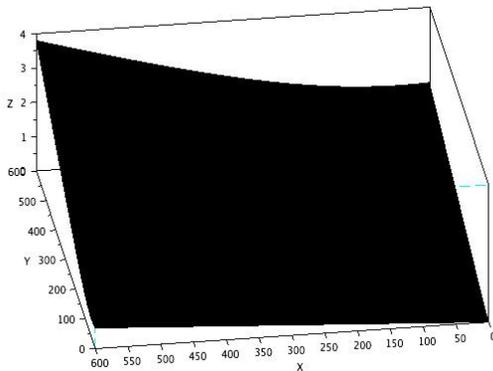
L'espérance de gain partielle associée à chaque trajectoire est alors donnée par $G_{ij} P_{ij}$.

Le gain G_{ij} est associé à une sous-variété

$$\begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} = g \oplus g \begin{bmatrix} [i]^1 \\ [i]^2 \end{bmatrix} \quad (85)$$

T_i et T_j étant les covecteurs source pour les vitesses obtenues en final sur les trajectoires utilisant les propagateurs γ_i, γ_j et $[i]^1, [i]^2$ les vecteurs flux de chaque agent. La variété complète est obtenue en explorant toutes les valeurs de flux obtenues pour toutes les valeurs de sources possibles. On trouve la figure suivante qui explore pour toutes les valeurs de vitesse angulaire et courant les valeurs de sources correspondantes, et ce à une pulsation égale à la vitesse de rotation, pour des courants limités à 6 ampères et une fém de 0,3. Peu importe en fait ici les valeurs obtenues d'autant que nous ne nous posons pas

la question de l'existence possible des couples (i, ω) . Ce qui est important c'est la démarche. On trouve une surface légèrement courbe, dénuée d'ouvertures. Lorsque l'on cherche des solutions pour des valeurs de sources données, on cherche géométriquement les intersections entre des points (ou des droites, ou des surfaces, etc.) et cette surface. Le fait que la surface ne comporte pas de trous signifie que pour toute sollicitation dans le domaine ici limité à $[0, 4]$, existe une solution en flux et vitesse angulaire.



Autre information, la surface n'est pas plate. Ce qui signifie que pour atteindre une distance donnée, l'utilisateur de l'agent devra donner une impulsion non proportionnelle à cette distance. On pourrait donc enrichir notre modèle système en calculant ensuite la probabilité qu'a l'utilisateur d'envoyer l'agent là où il le désire en commandant la bonne impulsion.

20 Séance 20

La difficulté dans l'analyse du jeu précédent vient de ce que, d'une manière générale, de très nombreuses données sont disponibles et au-delà des simples performances atteintes, on ne voit pas forcément les positionnements relatifs des diverses stratégies. Or chaque transformation peut être inscrite dans un groupe. Cela est particulièrement intéressant quand leur nombre est élevé.

La notion de groupe est essentielle. Un groupe est un ensemble muni d'une loi interne associative avec

un élément neutre et où chaque élément a un symétrique. Dans l'exemple de la séance 19, l'ensemble des propagateurs $\gamma_x, x = \{r, p, j, s\}$ forme « presque » un groupe. En effet, si l'on jouait sur plusieurs coups et que l'on prenne trois propagateurs,

$$(\gamma_x \gamma_y) \gamma_z = \gamma_x (\gamma_y \gamma_z)$$

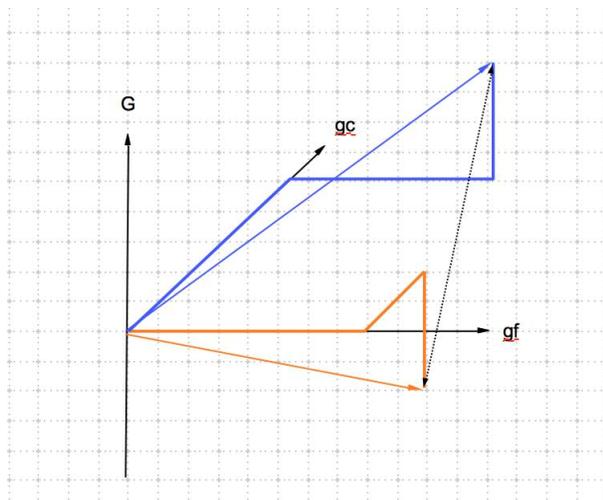
on a donc associativité par rapport à la loi produit. Par ailleurs la loi est bien interne puisque le produit de deux propagateurs est un propagateur. Enfin chaque propagateur γ a un symétrique γ' tel que $\gamma\gamma' = 1$, 1 étant l'élément neutre, transformation qui ne modifie pas le tenfold. L'ensemble de nos propagateurs en translation constitue donc un groupe. Dans un problème plus compliqué, on pourrait disposer d'autres groupes agissant de façons différentes sur le tenfold de départ. On peut alors associer un axe d'un espace de représentation à chaque groupe, et non pas à chaque transformation. On ajoute un axe pour projeter le gain, et l'on dispose d'un espace choix-gain qui s'avère être très pertinent pour analyser le jeu dans son ensemble. On y voit des comportements de bords, c'est à dire des trajectoires d'évolutions qui suivent un groupe particulier et dont le gain peut être important ou nul. Ou des trajectoires variées qui à un moment donné dans les évolutions convergent toutes vers des gains identiques. Les extrémités des trajectoires étant appelées des horizons, on peut parler « d'horizons de Nash » en référence à l'équilibre de Nash.

Lors d'une publication précédente, un cas utilisait deux groupes : un groupe pour changer de files dans un contexte de roulage sur autoroute γ_f et un groupe pour activer le clignotant γ_c . Il est évident que les deux transformations sont associées à deux groupes différents. Et le risque d'accident suivant la succession d'actions réalisées peut être lié à l'écart

$$\alpha(\gamma_f \gamma_c - \gamma_c \gamma_f)$$

On peut alors représenter un espace avec deux axes, un pour la transformation γ_c , un autre pour la transformation γ_f et un troisième axe pour le gain, lié à une proportion inverse du risque. Un vecteur est créé en reportant sur ces axes les probabilités d'user de

chaque transformation suivant les trajectoires choisies pour différents profils d'usagers. On peut visualiser des vecteurs résultant, somme des vecteurs construit de proche en proche au fur et à mesure de l'évolution pour un usager. La figure suivante montre les deux trajectoires envisagées avec un profil qui déboîte sans mettre de clignotant, avec un gain négatif en échelle logarithmique indiquant une forte prise de risque et une trajectoire où le clignotant est d'abord activé puis le déboitement, avec un gain positif. On voit aussi l'écart entre les deux stratégies.



Les deux vecteurs correspondent à deux profils : l'un que l'on pourrait appeler « fonceur désordonné » et l'autre « conducteur appliqué ». Les probabilités sont élevées dans chaque cas pour ces deux profils qui sont un peu les cas limites de populations existantes.

Le graphique choix-gain on le voit, permet d'analyser très rapidement et efficacement les résultats. Et si l'on traçait tout un ensemble de vecteurs associés à des populations différentes, on trouverait une ligne faite de toutes les extrémités des vecteurs, qui constituerait un « horizon ». Si cet horizon est réduit à une zone réduite, on peut parler d'horizon de Nash, en ce sens que tous les acteurs sachant ce que tous savent, ont tendance à un moment, à suivre la même stratégie et à parvenir au même point dans l'espace choix-gain.

On a pu voir sur cet exemple, qu'au-delà des calculs se posent la difficulté de la représentation et de

la capacité à interpréter des résultats. Un cas frappant en physique concerne la mécanique quantique. On peut faire des calculs, mais la difficulté d'interprétation du formalisme a même engendré des « écoles » donnant chacune leur version. On peut avoir vis à vis de ce problème une approche très pragmatique, comme Feynman qui, sur ce sujet, répondait « calcul et tais-toi ». Certes pour la mécanique quantique on peut confronter des calculs avec des mesures et la comparaison est somme toute simple, même si les calculs sont eux, compliqués. Dans notre cas, on obtient rapidement des courbes difficiles à interpréter et la comparaison avec des expériences n'est pas immédiate. Elle passera forcément par des statistiques et des tests avec N personnes, triées sur le volet, etc.

Concernant la mécanique quantique, comment cela fonctionne? La démarche repose sur deux principes fondamentaux. Premier principe : $E = h\nu$. La loi de Planck, merveilleuse loi de Planck qui pose la base de tous les développements. Second principe : la mesure. Lorsque l'on réalise une mesure (d'une particule, etc.), on modifie l'état du système tel qu'on peut l'imaginer hors mesure. Il est impossible de réaliser une mesure sans modifier le système. Et c'est cela qui est souvent le plus perturbant. Pourtant, il en va de même de beaucoup de domaines de la physique, où l'on néglige la mesure, certes parce que son impact est de second ordre. Mais penser qu'elle n'influe pas le résultat est faux.

Conclusion

La mécanique quantique présente souvent une dualité « onde - corpuscule ». En fait c'est de mon point de vue un faux problème. La physique de base est harmonique et par le biais d'une mesure, nous créons un signal perceptible et visible. Mais pourquoi cette opération changerait une onde en particule? Il s'agit là d'une application du principe d'Heisenberg. Si je sais localiser une particule avec précision, cela signifie que localement, j'identifie une impulsion de courant extrêmement étroite en durée. De fait, son spectre est très étendu, et je ne saurais pas l'identifier avec une fréquence précise. Au contraire si je regarde suffisamment de périodes pour bien mesurer sa fréquence,

je perdrai du coup sa localité. Tout dépend de la mesure que l'on effectue. La particule elle, n'a pas changé, mais notre regard modifie la perception que nous en avons et elle devient tantôt particule localisée ou onde. Nous revenons à nos réflexions de départ. Lorsque l'on regarde une photographie de très près on voit des grains et si l'on prend de la hauteur, on reconnaît une image. On voit qu'ici aussi, la façon d'opérer la mesure modifie la perception de la photographie. Retenons cet aspect remarquable que le monde nous apparaît non pas tel qu'il est mais tel que nous le voyons. Et sa réalité est inaccessible. Mais ne soyons pas désespérés. L'algèbre de Grassmann ou des processus comme la mesure en mécanique quantique nous permettent de lui donner une consistance abstraite et de rêver un peu. Ainsi même si nous ne pouvons pas accéder à la réalité du monde, pouvons-nous l'imaginer. Et si l'homme a créé les mathématiques et si les mathématiques créent l'homme (on parle plus aujourd'hui d'homo faber que d'homo sapiens), respectons le monde, la nature dans sa globalité. Car quoi que nous pensions dans notre petit référentiel égocentrique, nous ne savons rien de ce que rêvent les animaux. Ne prétendons donc pas savoir l'inaccessible et respectons le plus possible cette nature à laquelle nous appartenons et dont le sens et l'univers nous échappent.

J'espère que ce voyage que vous aurez pu aborder différemment suivant vos goûts scientifiques, vos connaissances, vous aura un peu embarqué dans des réflexions, des questionnements qui auront pu vous inspirer. Si c'est le cas, j'aurai atteint mon objectif : la systémique est la science de l'ensemble, donc des interactions et du partage. Si je vous ai inspiré durant quelques instants, nous aurons interagi et pratiqué ensemble la systémique.

Olivier Maurice