

Modélisation du système d'élasticité aux équations de Biot

Dans les ouvrages d'analyse des équations aux dérivées partielles, les équations de l'élasticité linéaire sont souvent utilisées à titre d'illustration sans autre forme d'introduction. Inversement, il y a matière dans les œuvres consacrées à la mécanique des milieux continus à dédier un chapitre entier à la description du tenseur des contraintes. Ce chapitre ne remplacera la lecture ni de l'une ni de l'autre de ces théories, mais vise à fournir quelques bases de mécanique des solides de manière à comprendre les modèles manipulés dans la suite de ces travaux. Sa première section, consacrée à l'élasticité, introduit les notions de déformation et de contrainte pour établir le système d'élasticité linéaire. Sa seconde section y ajoute la présence d'un fluide et explique comment celui-ci interagit avec les déformations mécaniques. Après avoir explicité les équations de Biot, qui modélisent cette interaction, elle présente une courte étude mathématique de ce système afin d'introduire au niveau continu les techniques utilisées au niveau discret dans les chapitres suivants. Ce chapitre s'achève par quelques exemples de problèmes poroélastiques dont la solution analytique est connue, qui permettront d'illustrer et de valider les méthodes numériques étudiées.

Dans tout ce qui suit, d désigne la dimension du problème considéré ($d = 2$ ou $d = 3$). Le triplet $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, ou le doublet $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ le cas échéant, représente une base orthonormée de l'espace \mathbb{R}^d . Les quantités vectorielles sont notées en gras : \mathbf{v} , et les matrices sont surlignées d'un trait : \overline{M} . Les autres notations sont précisées au fil du document.

Sommaire

2.1	Mécanique du solide élastique	18
2.1.1	Déformations, contraintes et loi de comportement	18
2.1.2	Cas particulier des problèmes plans.	20
2.1.3	Système d'élasticité linéaire	21
2.2	Mécanique des matériaux poroélastiques	22
2.2.1	Système d'équations de Biot.	22
2.2.2	Stabilité de la solution du problème poroélastique.	24
2.2.3	Quelques problèmes de poroélasticité	26

2.1 Mécanique du solide élastique

Cette première section introduit les quantités d'intérêt et les hypothèses simplificatrices permettant de se ramener de la mécanique des milieux continus au domaine plus restreint de l'élasticité, puis à celui plus restreint encore de l'élasticité linéaire. Ceci permet d'établir le système d'équations de l'élasticité linéaire, dans sa formulation forte issue de la physique et dans sa formulation faible utilisée pour la discrétisation numérique. Les développements sont effectués dans le cas où $d = 3$. Le traitement du cas particulier $d = 2$ fait l'objet d'une remarque spécifique en fin de section 2.1.1.

2.1.1 Déformations, contraintes et loi de comportement

Déformations et contraintes

La cinématique est l'étude des mouvements indépendamment des causes qui les produisent. Elle fournit plusieurs outils descriptifs permettant de représenter les déplacements de points matériels constituant un solide. À ces fins est tout d'abord défini le champ vectoriel de déplacement \mathbf{u} qui associe à tout point matériel (dans la configuration de départ) la différence entre sa nouvelle et son ancienne position. Le gradient (par rapport à la configuration initiale) de ce champ de déplacement permet de définir le tenseur \bar{E} d'ordre 2 selon la relation

$$2\bar{E} = \overline{\nabla\mathbf{u}}^T + \overline{\nabla\mathbf{u}} + \overline{\nabla\mathbf{u}}^T\overline{\nabla\mathbf{u}}.$$

Certains mouvements créent des déformations, c'est-à-dire des modifications d'angles ou de distances entre les points matériels du solide. Pour ces mouvements, les composantes de \bar{E} donnent facilement accès à certaines informations comme, par exemple, l'extension dans une direction parallèle aux vecteurs de base \mathbf{e}_i . Au contraire, d'autres mouvements, combinaisons de translations et de rotations, n'entraînent aucune déformation du solide. Ces mouvements sont appelés *mouvements de corps rigide* et le tenseur \bar{E} qui leur est associé est nul. Pour cette raison, le tenseur \bar{E} est qualifié de tenseur des déformations, aussi dénommé tenseur de Green-Lagrange. Lorsque l'amplitude des déformations est suffisamment faible – on parle alors de déformations infinitésimales – les termes quadratiques deviennent négligeables. Le tenseur des déformations infinitésimales est alors noté $\bar{\epsilon}$ et satisfait

$$2\bar{\epsilon} = \overline{\nabla\mathbf{u}}^T + \overline{\nabla\mathbf{u}} \quad (2.1)$$

avec $\epsilon_{ij} \ll 1$. Certaines caractéristiques du déplacement peuvent être directement déduites de $\bar{\epsilon}$. En particulier, la trace du tenseur des déformations $\text{tr}(\bar{\epsilon})$ est égale à la divergence du champ de déplacement $\text{div}(\mathbf{u})$ et s'interprète comme la déformation volumique du solide. Enfin, le tenseur $\bar{\epsilon}$ étant clairement symétrique, il est fréquent [DVS98] d'adopter la notation de Kelvin $\hat{\epsilon}$ pour stocker ses composantes indépendantes sous la forme d'un vecteur de \mathbb{R}^6 : $\hat{\epsilon} = (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \sqrt{2}\epsilon_{yz}, \sqrt{2}\epsilon_{xz}, \sqrt{2}\epsilon_{xy})^T$.

Un autre domaine de la physique consiste à traduire l'action de forces appliquées sur un solide continu, sans s'intéresser aux effets qu'engendrent ces forces. Étant donnée une action mécanique \mathbf{f} appliquée sur une surface dS de normale sortante \mathbf{n} autour d'un point \mathbf{M} , on définit le vecteur contrainte \mathbf{T} par la relation $\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = \frac{d\mathbf{f}}{dS}$. On peut montrer que \mathbf{T} dépend linéairement de \mathbf{n} et donc définir une application linéaire, appelée tenseur des contraintes de Cauchy, satisfaisant $\mathbf{T}(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = \overline{\sigma^e}(\mathbf{M})\mathbf{n}$. Ce tenseur représente l'état de contrainte en un point : la composante σ_{ij}^e du tenseur des contraintes correspond à la i^e composante du vecteur contrainte de direction \mathbf{e}_j .

À partir du principe fondamental de la dynamique et dans le cadre d'un problème statique, c'est-à-dire en l'absence d'accélération, on démontre [LC90] d'une part l'équation d'équilibre satisfaite par $\overline{\sigma^e}$ sous

l'effet de forces extérieures \mathbf{f}

$$\mathbf{div}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^e) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

et d'autre part la symétrie du tenseur des contraintes. En utilisant à nouveau la notation de Kelvin, on note $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^e = (\sigma_{xx}^e, \sigma_{yy}^e, \sigma_{zz}^e, \sqrt{2}\sigma_{yz}^e, \sqrt{2}\sigma_{xz}^e, \sqrt{2}\sigma_{xy}^e)^T$.

Indicateurs scalaires dérivés des contraintes et déformations

Déformations et contraintes permettent de calculer certaines grandeurs scalaires pouvant présenter un intérêt en mécanique. Du point de vue du développement et de la validation de méthodes, ces grandeurs sont également plus facile à représenter et à utiliser pour des comparaisons que les champs vectoriels. On introduit ainsi la contrainte équivalente de Von Mises qui se calcule à partir du tenseur des contraintes selon la relation

$$\sigma_{\text{VM}}^e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx}^e - \sigma_{yy}^e)^2 + (\sigma_{yy}^e - \sigma_{zz}^e)^2 + (\sigma_{zz}^e - \sigma_{xx}^e)^2 + 6(\sigma_{xy}^e{}^2 + \sigma_{yz}^e{}^2 + \sigma_{zx}^e{}^2)}. \quad (2.3)$$

Cette contrainte équivalente représente l'énergie de distorsion par unité de volume. Pour certains types de matériaux, la limite du domaine élastique est atteinte lorsque σ_{VM}^e dépasse un seuil critique : le matériau commence alors à se déformer de manière plastique, et ne retrouve pas son état initial lorsque les sollicitations mécaniques cessent. En combinant les tenseurs des déformations et des contraintes, on définit également l'énergie de déformation élastique

$$W^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \overline{\boldsymbol{\sigma}}^e : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (2.4)$$

réel positif associé au travail des forces qui ont généré la déformation du solide. L'énergie élastique est une grandeur physique essentielle sur laquelle sont bâtis plusieurs théorèmes (dits énergétiques) qui sortent du cadre de ces travaux. Elle est également utilisée pour construire les lois de comportement non linéaires.

Loi de comportement

Les deux notions introduites précédemment, déformation et contrainte, peuvent être mises en relation à travers une loi de comportement. Cette loi dépend du matériau considéré, et diffère à la fois par la nature du comportement (élastique, plastique, etc.) et par les constantes mécaniques du matériau. La loi de comportement élastique est la plus simple à modéliser. Elle convient à des solides retrouvant de façon instantanée leur état initial lorsque les efforts extérieurs disparaissent. De plus, d'autres lois de comportement peuvent être approchées par une suite de problèmes élastiques, ce qui justifie l'étude de celle-ci. On parle d'élasticité linéaire lorsque les contraintes sont proportionnelles aux déformations. Cette relation s'écrit

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^e_{ij} = \overline{\overline{\overline{C}}}_{ijkl} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{kl} \quad (2.5)$$

où $\overline{\overline{\overline{C}}}$, tenseur d'ordre 4, est appelé tenseur des rigidités élastiques. La symétrie de $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ et de $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^e$ implique que $\overline{\overline{\overline{C}}}_{ijkl} = \overline{\overline{\overline{C}}}_{jikl} = \overline{\overline{\overline{C}}}_{jilk}$. Le tenseur d'ordre 4 $\overline{\overline{\overline{C}}}$ peut alors être réécrit sous la forme d'une matrice de taille 6×6 notée \hat{C} , définie par l'équation (2.6) ci-après. De plus, les lois de la thermodynamique impliquent [LC90] que $\overline{\overline{\overline{C}}}_{ijkl} = \overline{\overline{\overline{C}}}_{lkji}$ pour une transformation élastique isotherme uniforme, ou, de manière équivalente, que la

matrice \hat{C} est symétrique, de sorte que

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & \sqrt{2}C_{xxyz} & \sqrt{2}C_{xxxz} & \sqrt{2}C_{xxxxy} \\ & C_{yyxy} & C_{yyzz} & \sqrt{2}C_{yyyz} & \sqrt{2}C_{yxxz} & \sqrt{2}C_{yyxy} \\ & & C_{zzzz} & \sqrt{2}C_{zzyz} & \sqrt{2}C_{zzxz} & \sqrt{2}C_{zzxy} \\ & & & 2C_{yzyz} & 2C_{yzxz} & 2C_{yzxy} \\ & & & & 2C_{zxxz} & 2C_{zxxxy} \\ & & & & & 2C_{xyxy} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Les coefficients adoptés dans la notation de Kelvin permettent la correspondance entre le produit doublement contracté sur $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ et le produit scalaire sur \mathbb{R}^6 et donc de réécrire :

$$\hat{\sigma}^e = \hat{C}\hat{\epsilon} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}^e : \bar{\epsilon} = \hat{\sigma}^e \cdot \hat{\epsilon}.$$

De plus, le matériau peut présenter certaines relations de symétrie matérielle qui réduisent encore le nombre de composantes indépendantes de \bar{C} . Le cas le plus dégénéré est celui d'un matériau dit *isotrope* dans lequel tous les axes sont matériellement identiques. Pour ce type de matériaux, \hat{C} ne dépend pas du repère choisi et ne possède que deux composantes indépendantes. On peut donc exprimer \hat{C} en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν selon

$$\hat{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & 1-2\nu & & \\ & & & & 1-2\nu & \\ & & & & & 1-2\nu \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

ou bien, de manière équivalente, utiliser les coefficients de Lamé λ et G liés aux deux coefficients précédents par

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.8)$$

2.1.2 Cas particulier des problèmes plans

Si les problèmes élastiques concernent tous des solides physiques de \mathbb{R}^3 , certains d'entre eux présentent des invariances ou des propriétés géométriques qui permettent de se ramener à un problème plan. Les conséquences sur les tenseurs des déformations, des contraintes et des rigidités dépendent de la configuration considérée et sont explicités ici pour un matériau supposé isotrope.

Déformations planes Lorsque tous les plans perpendiculaires à la direction \mathbf{e}_z sont dans le même état cinématique (en général, c'est le cas d'un domaine de taille infinie en z), on parle d'état plan de déformations : $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$ et les composantes non nulles de $\bar{\epsilon}$ ne dépendent pas de z . Ce cas de figure est le plus simple car il suffit alors de développer le produit matriciel $\hat{\sigma}^e = \hat{C}\hat{\epsilon}$ en tenant compte des composantes nulles du vecteur $\hat{\epsilon}$ pour se rendre compte que $\sigma_{xz}^e = \sigma_{yz}^e = 0$ et réécrire

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^e \\ \sigma_{yy}^e \\ \sqrt{2}\sigma_{xy}^e \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \sqrt{2}\epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_{zz}^e = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}). \quad (2.9)$$

Contraintes planes Dans d'autres configurations, typiquement lorsque l'objet a une faible dimension dans la direction z , le solide se trouve en état plan de contraintes : $\sigma_{xz}^e = \sigma_{yz}^e = \sigma_{zz}^e = 0$ et les composantes non nulles de $\bar{\sigma}^e$ ne dépendent pas de z . Dans ce cas, en utilisant à nouveau la loi de comportement (2.5), on montre que $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = 0$ et que

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^e \\ \sigma_{yy}^e \\ \sqrt{2}\sigma_{xy}^e \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \sqrt{2}\epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \epsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{xx}^e + \sigma_{yy}^e) = \frac{\nu}{\nu-1}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}). \quad (2.10)$$

2.1.3 Système d'élasticité linéaire

Formulation forte Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^d de frontière $\partial\Omega$. Le système d'équations de l'élasticité linéaire est obtenu en complétant l'équation d'équilibre local (2.2) et la loi de comportement (2.5) par des conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega$ de normale sortante \mathbf{n} . On suppose que cette frontière est séparée en deux sous-ensembles Γ_{D_d} et Γ_{N_d} , de sorte que $\partial\Omega = \Gamma_{D_d} \cup \Gamma_{N_d}$ et $\Gamma_{D_d} \cap \Gamma_{N_d} = \emptyset$, correspondant respectivement aux conditions aux limites de Dirichlet (déplacement imposé) et de Neumann (contrainte imposée). Le problème d'élasticité linéaire s'écrit alors

$$-\operatorname{div}(\bar{\bar{C}}\bar{\epsilon}_u) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_D \quad \text{sur } \Gamma_{D_d}, \quad (2.11b)$$

$$\bar{\sigma}^e \mathbf{n} = \mathbf{t}_N \quad \text{sur } \Gamma_{N_d}. \quad (2.11c)$$

Formulation faible On introduit à ce stade les notations $\|\cdot\|_{L^2(\omega)}$ et $\|\cdot\|_{H^1(\omega)}$ se référant aux normes classiques de Sobolev sur un domaine ω . Ainsi, pour $v \in L^2(\omega)$, $\mathbf{v} \in (L^2(\omega))^d$ et $\bar{\mathbf{v}} \in (L^2(\omega))^{d \times d}$,

$$\|v\|_{L^2(\omega)} = \left(\int_{\omega} v^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\mathbf{v}\|_{L^2(\omega)} = \left(\int_{\omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|\bar{\mathbf{v}}\|_{L^2(\omega)} = \left(\int_{\omega} \mathbf{v} : \mathbf{v} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si de plus $v \in H^1(\omega)$ ou $\mathbf{v} \in (H^1(\omega))^d$,

$$\|v\|_{H^1(\omega)} = \left(\int_{\omega} v^2 + \nabla v \cdot \nabla v \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}\|_{H^1(\omega)} = \left(\int_{\omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par souci de lisibilité, on pourra noter simplement $\|\cdot\|_{L^2}$ ou $\|\cdot\|_{H^1}$ lorsque $\omega \equiv \Omega$. La formulation faible en déplacement nécessite l'introduction des espaces

$$V_g = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d, \mathbf{v} = \mathbf{g}_D \text{ sur } \Gamma_{D_d} \right\}, \quad V_0 = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{D_d} \right\} \quad (2.12)$$

et s'écrit :

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V_g \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad a^\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \bar{\bar{C}}\bar{\epsilon}_u : \bar{\epsilon}_v = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_{N_d}} \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \quad (2.13)$$

La forme bilinéaire a^Ω est continue ; elle est de plus coercive dès lors que Γ_{D_d} est de mesure non nulle. Ainsi, il existe deux constantes réelles $M > 0$ et $\mu > 0$ telles que pour tout \mathbf{u}, \mathbf{v} dans $H^1(\Omega)$,

$$a^\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq M \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{et} \quad \mu \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a^\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

La coercivité de a^Ω s'établit grâce à l'inégalité de Korn (2.14) et à la relation $\|\bar{\epsilon}_v\|_{L^2(\Omega)} \geq \tilde{C}\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}$ pour tout \mathbf{v} avec \tilde{C} constante positive.

Lemme 2.1 (Inégalité de Korn, [All12]) *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction \mathbf{v} de $(H^1(\Omega))^d$,*

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{\epsilon}_v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.14)$$

Dans le cas $\mathbf{g}_D = \mathbf{0}$, on montre (voir par exemple [All12, thm 5.3.4]) que pour $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^d$ et $\mathbf{t}_N \in (L^2(\Gamma_{N_d}))^d$, le problème (2.11) admet une unique solution faible \mathbf{u} dans l'espace V_0 . Un relèvement de solution permet d'étendre ce résultat au cas général $\mathbf{g}_D \neq \mathbf{0}$.

2.2 Mécanique des matériaux poroélastiques

Les notions d'élasticité linéaire introduites dans la section précédente servent de base à la description de matériaux plus complexes, dont le comportement élastique est modifié par la présence d'un fluide : les milieux poreux.

2.2.1 Système d'équations de Biot

Il existe une certaine structuration de la matière dans laquelle interagissent deux constituants principaux : un squelette solide déformable et un fluide occupant un réseau de *pores*, cavités du solide. À l'échelle macroscopique, un matériau présentant une telle organisation est dénommé milieu poreux. La modélisation de ces milieux poreux requiert la superposition des lois physiques régissant le comportement des deux constituants primaires, de manière à décrire le comportement de l'ensemble par des équations dans lesquelles interviennent des paramètres relatifs à chacun des deux constituants et à la nature de leur organisation. Cette branche particulière de la mécanique est appelée la *poromécanique*, et on doit à Biot [Bio41] les fondations de cette discipline. Dans le cas particulier où le squelette solide est sollicité de manière élastique, on emploie le terme plus spécifique de *poroélasticité*.

Le modèle poroélastique présenté présuppose également que le fluide est *monophasique* (un seul fluide, non réactif, saturant le milieu étudié) et que les déformations sont *quasi statiques* (les effets d'inertie sur la structure solide sont négligeables). Les paramètres physiques décrits dans le tableau 2.1 caractérisent les propriétés du milieu poreux étudié.

Paramètre	Dimension	Unité	Nom
ϕ	-	-	Porosité
α	-	-	Coefficient de Biot
c_0	$M^{-1}L^2T^2$	Pa^{-1}	Coefficient de stockage spécifique
ρ_f	ML^{-3}	$kg \cdot m^{-3}$	Masse volumique du fluide
$\bar{\kappa}$	$M^{-1}L^3T$	$m^2(Pa \cdot s)^{-1}$	Matrice de mobilité
\bar{C}	$ML^{-1}T^{-2}$	Pa	Tenseur des rigidités du solide

TAB. 2.1 : Paramètres physiques décrivant un milieu poroélastique

Dans le cadre du modèle poroélastique, l'interaction entre le squelette solide et le fluide se traduit par l'introduction d'une nouvelle définition de la contrainte. La contrainte totale subie par le matériau est la

somme de la contrainte dite effective $\overline{\sigma}^e$ présentée précédemment, due aux efforts mécaniques, et d'un terme additionnel lié à la pression p du fluide présent dans les pores de sorte que

$$\overline{\sigma}(\mathbf{u}, p) = \overline{\sigma}^e(\mathbf{u}) - \alpha p \overline{I}_d.$$

Le coefficient de Biot peut donc être vu comme un quantificateur de la variation de contrainte lorsque la pression du fluide augmente à volume de pores constant, ou, symétriquement, comme un quantificateur de la variation du volume de pores lorsque la pression augmente à contrainte constante. Ce coefficient peut être déterminé à partir de la mesure expérimentale de la compressibilité de la phase solide C_s et de celle du squelette poreux C suivant la relation $\alpha = 1 - \frac{C_s}{C}$. Toutefois, l'approximation $\alpha = 1$ est couramment réalisée pour des roches consolidées dans la mesure où leur squelette solide est bien plus compressible que les grains qui le composent. Comme dans le cas élastique simple, la contrainte effective est liée aux déformations par la loi de comportement

$$\overline{\sigma}^e(\mathbf{u}) = \overline{\overline{C}} \overline{\epsilon}_u \text{ avec } \overline{\epsilon}_u = \frac{1}{2} (\overline{\nabla \mathbf{u}} + \overline{\nabla \mathbf{u}}^T)$$

où, dans le cas de l'élasticité isotrope, le tenseur des rigidités $\overline{\overline{C}}$ se déduit de deux coefficients indépendants selon la forme explicité par l'équation (2.7). L'équation d'équilibre mécanique reste vérifiée avec cette nouvelle définition de la contrainte totale et se réécrit donc

$$-\mathbf{div}(\overline{\sigma}(\mathbf{u}, p)) = \mathbf{f}. \quad (2.15)$$

Par ailleurs, le fluide présent dans les pores a la capacité de se déplacer à une vitesse proportionnelle au déséquilibre hydrostatique selon la loi de Darcy

$$\mathbf{v}_f = -\overline{\kappa} (\nabla p - \rho_f \mathbf{g})$$

où \mathbf{g} désigne la gravité et ρ_f la masse volumique du fluide. Le coefficient de proportionnalité est appelé matrice de mobilité, définie comme le quotient de la matrice de perméabilité $\overline{\overline{K}}$, qui mesure l'aptitude du milieu poreux à se laisser traverser par un fluide, et de la viscosité dynamique du fluide μ_f qui mesure la résistance du fluide à un écoulement laminaire. La seconde équation du système poroélastique s'obtient à partir de l'équation de conservation de la masse du fluide. L'obtention du modèle n'est pas directe (voir par exemple [Mer16] pour les détails) et revient finalement à considérer une équation de conservation dans laquelle la quantité de fluide est donnée par

$$c_0 p + \alpha \mathbf{div}(\mathbf{u}).$$

Du point de vue de cette équation, le coefficient de Biot peut être vu comme un quantificateur de la variation de la quantité de fluide lorsque le volume des pores augmente à pression constante. Le coefficient de stockage spécifique $c_0 \geq 0$ représente la quantité de fluide pouvant être ajouté dans le milieu lors d'une augmentation de pression à volume solide constant. Ce coefficient dépend des compressibilités du solide C_s et du fluide C_f ainsi que de la porosité de la structure ϕ , laquelle caractérise le ratio entre le volume des pores et le volume total du milieu, à travers la relation

$$c_0 = \phi C_f + (\alpha - \phi) C_s.$$

En supposant que le fluide est faiblement compressible, l'équation de conservation de la masse se ramène à l'équation de conservation de volume

$$\partial_t (c_0 p + \alpha \mathbf{div}(\mathbf{u})) + \mathbf{div}(-\overline{\kappa} (\nabla p - \rho_f \mathbf{g})) = q, \quad (2.16)$$

q représentant un terme source volumique.

La combinaison des équations (2.15) et (2.16) définit le système poroélastique linéaire. Soit un milieu poreux élastique linéaire représenté par Ω ouvert de \mathbb{R}^d et un temps $T > 0$. Si ce milieu est sujet à une force volumique $\mathbf{f} : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et à un terme source $q : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, alors le champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ de pression $p : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient

$$-\mathbf{div}(\bar{\mathbf{C}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_u - \alpha p\bar{\mathbf{l}}_d) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T], \quad (2.17a)$$

$$\partial_t(c_0 p + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{u})) + \operatorname{div}(-\bar{\kappa}(\nabla p - \rho_f \mathbf{g})) = q \quad \text{dans } \Omega \times]0, T], \quad (2.17b)$$

complété par des conditions aux limites (avec $\partial\Omega = \Gamma_{D_d} \cup \Gamma_{N_d}$, $\partial\Omega = \Gamma_{D_p} \cup \Gamma_{N_p}$ et \mathbf{n} normale sortante)

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{D_d} \times]0, T], \quad (2.17c)$$

$$(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^e - \alpha p\bar{\mathbf{l}}_d) \mathbf{n} = \mathbf{t}_N \quad \text{sur } \Gamma_{N_d} \times]0, T], \quad (2.17d)$$

$$p = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{D_p} \times]0, T], \quad (2.17e)$$

$$-\bar{\kappa}(\nabla p - \rho_f \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = \phi_N \quad \text{sur } \Gamma_{N_p} \times]0, T], \quad (2.17f)$$

et des conditions initiales

$$p(\mathbf{x}, t = 0) = p^0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.17g)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) \text{ solution de (2.17a) avec } p = p^0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.17h)$$

2.2.2 Stabilité de la solution du problème poroélastique

Des résultats d'existence, d'unicité et de régularité sont développés dans [Shoou]. La démonstration traite le problème poroélastique comme un problème d'évolution dans un espace de Hilbert en faisant appel à des outils d'analyse issus de la théorie des semi-groupes. En supposant que le domaine est suffisamment régulier et que le terme source q est continu au sens de Hölder, soit $q \in \mathcal{C}^\alpha([0, T]; L^2)$ avec $\alpha \in]0, 1]$, l'existence et l'unicité d'une solution est assurée.

Afin d'introduire les outils utilisés dans l'étude numérique du schéma section 4.2, la stabilité de la solution du système continu est étudiée formellement ci-dessous. Pour alléger les calculs, les conditions de Neumann et le terme de gravité sont supposés nuls dans cette section ($\mathbf{t}_N = \mathbf{0}$, $\phi_N = 0$, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$). Aux côtés des normes en espace introduites dans la section 2.1.3, on utilise pour les normes en temps sur l'intervalle $[0, T]$ les notations

$$\|v\|_{L^2(0, T)} = \left(\int_0^T v(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|v\|_{L^\infty(0, T)} = \max_{t \in [0, T]} |v(t)|$$

pour $v \in L^\infty(0, T)$. Si v dépend du temps et de l'espace, on notera pour $v \in L^\infty(0, T; H^1)$

$$\|v\|_{L^2(0, T; H^1)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|v\|_{L^\infty(0, T; H^1)} = \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{H^1(\Omega)}.$$

On définit de la même manière les normes $\|v\|_{L^2(0, T; L^2)}$ et $\|v\|_{L^\infty(0, T; L^2)}$ pour $v \in L^2(]0, T[\times \Omega)$. Enfin, on étend ces notations dans le cas où \mathbf{v} est à valeurs vectorielles. On démontre de manière formelle le résultat de stabilité suivant sur la solution (\mathbf{u}, p) :

Proposition 2.2 Pour tout $t \in [0, T]$, la solution (\mathbf{u}, p) satisfait

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} \kappa \nabla p \cdot \nabla p \leq B \exp(t)$$

où B est une constante dépendant des données initiales, des seconds membres, de c_0 et de la constante de coercivité de a^Ω notée μ .

En multipliant l'équation d'élasticité par $\partial_t \mathbf{u}$, l'équation de conservation par p puis en intégrant sur Ω ,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \mathbf{div} (\overline{\sigma^e} - \alpha p \overline{l_d}) \partial_t \mathbf{u} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u} \\ c_0 \int_{\Omega} p \partial_t p + \int_{\Omega} \alpha \partial_t (\operatorname{div}(\mathbf{u})) p + \int_{\Omega} \kappa \nabla p \cdot \nabla p &= \int_{\Omega} p q, \end{aligned}$$

soit en sommant les deux égalités

$$a^\Omega(\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}) + c_0 \int_{\Omega} p \partial_t p + \int_{\Omega} \kappa \nabla p \cdot \nabla p = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u} + \int_{\Omega} p q$$

puisque $-\int_{\Omega} \mathbf{div} (\overline{\sigma^e} - \alpha p \overline{l_d}) \partial_t \mathbf{u} = a^\Omega(\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}) - \int_{\Omega} \alpha p \operatorname{div}(\partial_t \mathbf{u})$ d'après la formule de Green, où $a^\Omega(\cdot, \cdot)$ désigne la forme bilinéaire associée au problème élastique. Pour les deux formes bilinéaires que sont a^Ω et le produit scalaire L^2 , on a $\langle \cdot, \partial_t \cdot \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \|\cdot\|^2$ d'où, en intégrant entre 0 et t pour t donné dans $[0, T]$:

$$\|\mathbf{u}(t)\|_a^2 - \|\mathbf{u}^0\|_a^2 + c_0 \|p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - c_0 \|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \kappa \nabla p \cdot \nabla p = 2 \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u} + 2 \int_0^t \int_{\Omega} p q.$$

Ci-dessus, la notation $\|\cdot\|_a$ correspond à la norme induite par $a^\Omega : \|\mathbf{u}\|_a^2 = a^\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. En notant μ la constante de coercivité de a^Ω (a^Ω étant coercive d'après les inégalités de Korn et de Poincaré),

$$\mu \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + c_0 \|p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \kappa \nabla p \cdot \nabla p \leq 2 \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u} + 2 \int_0^t \int_{\Omega} p q + \mu \|\mathbf{u}^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + c_0 \|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On majore les termes de droite en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young : par intégration par parties

$$\int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \cdot \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) dx ds = - \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) dx ds + \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dx - \int_{\Omega} \mathbf{f}^0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) dx$$

d'où

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u} \right| &\leq 2 \left| \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right| + 2 \left| \int_{\Omega} \mathbf{f}^0 \cdot \mathbf{u}^0 \right| + 2 \left| \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{u}(t) \right| \\ &\leq 2 \int_0^t \|\hat{\mathbf{f}}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|\mathbf{f}^0\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}^0\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2 \left(\int_0^t \|\hat{\mathbf{f}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \|\mathbf{u}^0\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{\epsilon_2} \|\hat{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \epsilon_2 \int_0^t \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1 + \epsilon_1}{\epsilon_1} \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \epsilon_1 \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}^0\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

avec $\epsilon_1 > 0$ et $\epsilon_2 > 0$ à fixer, et

$$2 \int_0^t \int_{\Omega} pq \leq 2 \int_0^t \|p\|_{L^2} \|q\|_{L^2} \leq 2 \left(\int_0^t \|p\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|q\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\epsilon_3} \|q\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \epsilon_3 \int_0^t \|p\|_{L^2(\Omega)}^2$$

avec $\epsilon_3 > 0$ à fixer. Ainsi,

$$(\mu - \epsilon_1) \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + c_0 \|p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \kappa \nabla p \cdot \nabla p \leq \int_0^t \left(\epsilon_2 \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \epsilon_3 \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \tilde{B}$$

où l'on a noté

$$\tilde{B} = (1 + \mu) \|\mathbf{u}^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + c_0 \|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1 + \epsilon_1}{\epsilon_1} \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \frac{1}{\epsilon_2} \|\dot{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \frac{1}{\epsilon_3} \|q\|_{L^2(0,T;L^2)}^2.$$

Enfin, en fixant $\epsilon_1 < \mu$, puis en divisant par $\chi = \min\{\mu - \epsilon_1, c_0\}$ et en prenant $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \chi$,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} \kappa \nabla p \cdot \nabla p \leq \int_0^t \left(\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + B$$

avec

$$B = \frac{1 + \mu}{\chi} \|\mathbf{u}^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{c_0}{\chi} \|p^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1 + \epsilon_1}{\epsilon_1 \chi} \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \frac{1}{\chi^2} \|\dot{\mathbf{f}}\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \frac{1}{\chi^2} \|q\|_{L^2(0,T;L^2)}^2.$$

Le lemme de Grönwall est utilisé pour conclure :

Lemme 2.3 Soit z une fonction continue de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^+ et $a, b \in \mathbb{R}^+$ de sorte que

$$z(t) \leq b + a \int_0^t z(s) ds.$$

Alors

$$z(t) \leq b \exp(at).$$

En l'appliquant avec $z(t) = \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, on obtient la conclusion

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} \kappa \nabla p \cdot \nabla p \leq B \exp(t).$$

2.2.3 Quelques problèmes de poroélasticité

Il existe assez peu de problèmes de poroélasticité dont la solution analytique est connue. Proche des applications géomécaniques envisagées, on trouve plusieurs problèmes de type *consolidation*, phénomène pouvant être défini comme le tassement de sols saturés en eau sous l'application d'un chargement mécanique.

Le premier cas présenté ici est extrait des travaux [OGP17] et représente un bassin sur lequel des sédiments s'accumulent par dépôt au cours du temps. La masse de cette couche de sédiments génère une contrainte de compression sur la surface supérieure du bassin. Cette contrainte est une fonction linéaire du temps, de coefficient constant σ_a , ce qui est à la fois peu orthodoxe mais aussi réaliste puisque l'épaisseur de sédiments augmente au cours du temps. Le matériau est supposé homogène isotrope de sorte que $\bar{\kappa} = \kappa \bar{l}_2$ et que κ, E et ν sont constants. Les valeurs de ces coefficients mécaniques, ainsi que les conditions aux limites,

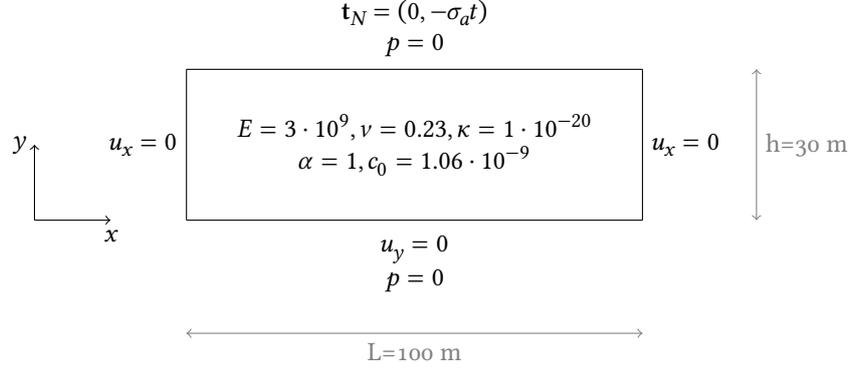


FIG. 2.1 : **Cas de compaction**, constantes du matériau et conditions aux limites. L'absence d'indication correspond à une condition de contrainte nulle ou de flux nul.

sont représentées sur la figure 2.1. Enfin, la pression est supposée nulle à l'instant initial. Ces conditions aux limites correspondent à ce que l'on appelle un contexte *œdométrique* : les déplacements verticaux de la base ainsi que les déplacements latéraux des deux cotés sont bloqués. Dans ce contexte, il existe des conditions de symétrie qui permettent de relier certaines composantes du tenseur des contraintes et, après quelques calculs détaillés dans [OGP17], d'aboutir à une équation parabolique mono-dimensionnelle sur la pression. L'analogie entre cette équation et le problème de la chaleur 1D permet d'utiliser des résultats de thermique [CJ59, chap 3.3] pour déterminer l'expression de la pression analytique

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{A_0}{2} \left((yh - y^2) - 8h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\omega_n y}{h})}{\omega_n^3} \exp(-\frac{\omega_n^2}{h^2} \tau_s t) \right) \quad (2.18)$$

avec $A_0 = \frac{\alpha(1+\nu)\sigma_a}{3\kappa K_d(1-\nu)}$, $\tau_s = \frac{\kappa}{c_0 + \frac{3(1+\nu)\alpha^2}{(1-\nu)K_d}}$ et $\omega_n = (2n+1)\pi$

où K_d est le module de compressibilité du solide qui s'exprime en fonction des constantes d'élasticité E et ν selon la relation $3(1-2\nu)K_d = E$. Le fait que le problème soit mono-dimensionnel en espace se traduit par le fait que p ne dépend en réalité que de y (et du temps). Plus précisément, la pression est constituée d'un terme indépendant du temps $yh - y^2$ maximal sur l'horizontale médiane et d'un terme d'atténuation sinusoidal qui tend à s'annuler lorsque t devient grand. Dans le contexte œdométrique, la relation entre la contrainte et les déplacements verticaux se réécrit

$$\epsilon_{yy} = E_{oe}(\sigma_{yy} + \alpha p) \quad \text{avec} \quad E_{oe} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}.$$

De plus, la contrainte verticale est liée au taux de sédimentation constant selon la relation $\sigma_{vv} = -\sigma_a t$. D'après la relation $\partial_y u_y = \epsilon_{yy}$, on peut recalculer le déplacement en intégrant par rapport à y la quantité $\epsilon_{yy} = E_{oe}(-\sigma_a t + \alpha p)$ et en utilisant la condition aux limites $u_y(y=0, t) = 0$ pour déterminer la constante d'intégration. On obtient alors

$$u_y(\mathbf{x}, t) = -E_{eo}\sigma_a t y + \frac{E_{eo}A_0}{2} \left(\frac{y^2 h}{2} - \frac{y^3}{3} + 8h^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\omega_n y}{h}) - 1}{\omega_n^4} \exp(-\frac{\omega_n^2}{h^2} \tau_s t) \right). \quad (2.19)$$

Les déplacements dans la direction \mathbf{e}_x sont nuls.

Le second cas proposé, un peu plus courant dans la validation de codes de calcul pour la poroélasticité, est celui dit de Mandel. Nommé ainsi d'après la première personne à en avoir proposé une solution analytique en pression, il a depuis été généralisé au cas anisotrope transverse pour lequel on dispose de l'expression analytique de la pression, des déplacements et des contraintes [Abo+96]. On utilise pour ce cas les mêmes paramètres mécaniques que pour le précédent : seuls les chargements et conditions aux limites sont différents. Le problème consiste en un milieu poreux de taille $2L \times 2h$ situé entre deux plaques rigides. À l'instant initial, les déplacements et la pression sont nuls. A l'instant $t = 0^+$, une force surfacique d'intensité $2F$ est appliquée verticalement sur la plaque supérieure tandis qu'une force de même intensité mais de signe opposé est appliquée verticalement sur la plaque inférieure, comme représenté sur la figure 2.2. En raison de sa symétrie, ce problème est souvent résolu uniquement dans le quart supérieur droit du domaine en utilisant les conditions aux limites détaillées sur la figure 2.2. Sur le bord supérieur, le dépla-

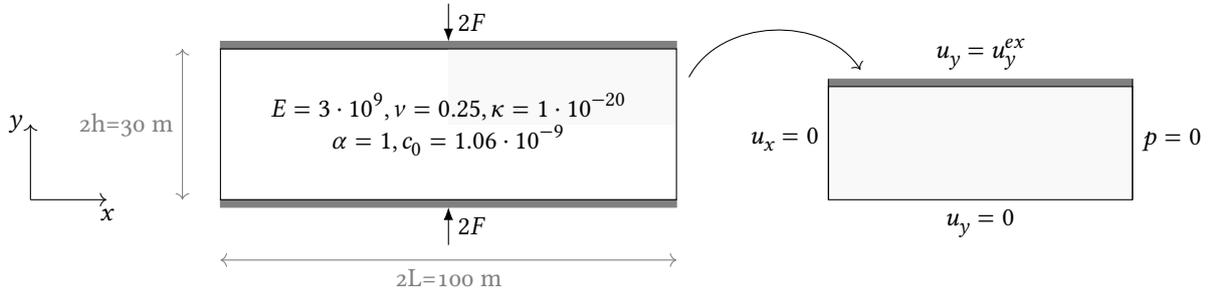


FIG. 2.2 : **Cas de Mandel**, constantes du matériau et conditions aux limites. L'absence d'indication correspond à une condition de contrainte nulle ou de flux nul. En raison de la symétrie, les simulations sont effectuées sur un quart du domaine.

cement vertical est fixé égal au déplacement vertical exact pour plus de simplicité. En effet, imposer une condition de type contrainte pour représenter la force de compression nécessiterait d'inclure également dans la formulation le fait que le déplacement vertical reste uniforme [PW07].

La solution analytique fait intervenir quelques coefficients supplémentaires pouvant être calculés à partir de ceux définis dans la section 2.2 :

- le coefficient de diffusivité du fluide

$$c_f = \kappa \frac{\lambda + 2G}{\alpha^2 + (\lambda + 2G)c_0};$$

il s'agit du coefficient que l'on obtiendrait en reformulant l'équation de conservation de la masse en une équation de diffusion sur la quantité de fluide de la forme $\partial_t \eta = c_f \Delta \eta$ avec $\eta = c_0 p + \alpha \text{div}(\mathbf{u})$;

- le coefficient de Skempton

$$B = \frac{\alpha}{c_0 K_d + \alpha^2}$$

qui quantifie l'incrément de la pression interstitielle d'un matériau non drainé subissant un confinement ;

- le coefficient de Poisson non drainé

$$\nu_u = \frac{3\nu + \alpha B(1 - 2\nu)}{3 - \alpha B(1 - 2\nu)}$$

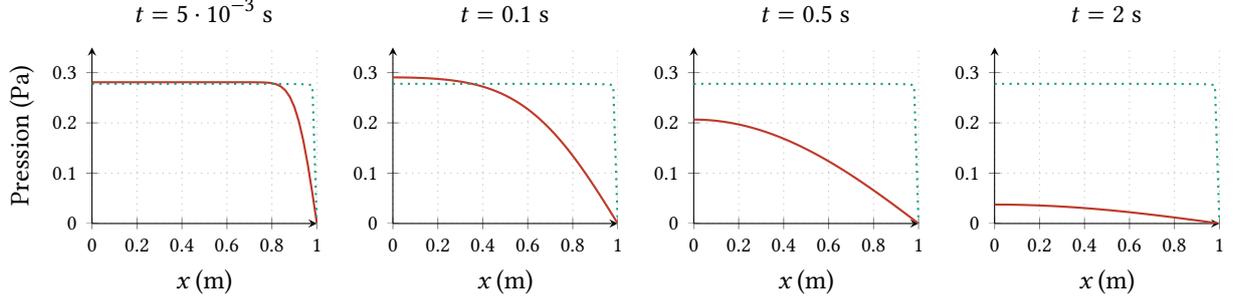


FIG. 2.3 : **Évolution de la pression analytique pour différents instants.** L'effet Mandel-Cryer s'observe sur le second graphe où la pression dépasse sa valeur initiale, représentée en pointillés, autour des x faibles. Pour simplifier les dimensions manipulées, cette figure est obtenue en fixant E, κ, c_0 et L à 1 au lieu des valeurs prescrites par la figure 2.2.

qui est l'un des coefficients élastiques équivalents du matériau dans des conditions non drainées ($\eta = 0$).

Enfin, on note θ_n les solutions positives de l'équation non linéaire $\tan(\theta_n) = \frac{1-\nu}{\nu_u-\nu}\theta_n$ qui doit être résolue numériquement. Ces coefficients permettent de calculer les déplacements et la pression analytiques d'après

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{2FB(1+\nu_u)}{3L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \theta_n \cos\left(\frac{\theta_n x}{L}\right) - \sin \theta_n \cos \theta_n}{\theta_n - \sin \theta_n \cos \theta_n} \exp\left(-\frac{\theta_n^2 c_f t}{L^2}\right), \quad (2.20a)$$

$$u_x(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{F\nu}{2GL} - \frac{F\nu_u}{GL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \theta_n \cos \theta_n}{\theta_n - \sin \theta_n \cos \theta_n} \exp\left(-\frac{\theta_n^2 c_f t}{L^2}\right) \right] x + \frac{F}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\theta_n x}{L}\right) \cos \theta_n}{\theta_n - \sin \theta_n \cos \theta_n} \exp\left(-\frac{\theta_n^2 c_f t}{L^2}\right), \quad (2.20b)$$

$$u_y(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{-F(1-\nu)}{2GL} + \frac{F(1-\nu_u)}{GL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \theta_n \cos \theta_n}{\theta_n - \sin \theta_n \cos \theta_n} \exp\left(-\frac{\theta_n^2 c_f t}{L^2}\right) \right] y. \quad (2.20c)$$

Comme dans le cas précédent, les déplacements et la pression ne dépendent que d'une seule direction. En revanche, le champ de déplacement a cette fois ses deux composantes non nulles. Ce cas est numériquement délicat car la pression passe de 0 à l'instant $t = 0$ à la valeur $\frac{FB(1+\nu_u)}{3L}$ à l'instant $t = 0^+$. De même, les valeurs asymptotiques des champs u_x et u_y valent respectivement

$$u_x(x = L, t \rightarrow 0^+) = \frac{F\nu_u}{2G} \quad \text{et} \quad u_y(y = h, t \rightarrow 0^+) = \frac{-F(1-\nu_u)\alpha}{2GL}$$

et sont donc discontinues par rapport à la condition initiale $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. De plus, ce cas permet d'illustrer un comportement dû à l'interaction fluide - solide. Il s'agit ici de l'effet de *Mandel-Cryer*, par lequel la déformation du solide fait apparaître un incrément de pression à proximité de l'axe $x = 0$, et joue donc le rôle de terme source pour l'équation de conservation. Cet effet est illustré sur la figure 2.3 qui représente l'évolution de la pression analytique pour différentes valeurs de t . Après l'instant initial, la valeur de p dépasse la valeur asymptotique (à $t = 0.1$ s) aux alentours de $x = 0$ avant de redescendre vers 0.

3

Méthode des éléments virtuels pour le problème d'élasticité

Avant de réaliser le couplage entre les deux méthodes de discrétisation pour les deux équations du système poroélastique, il est indispensable de maîtriser les méthodes choisies sur les sous-problèmes associés. Concernant la partie écoulement, les schémas volumes finis considérés sont relativement standards et ont pu être directement utilisés. En revanche, concernant la partie mécanique, l'usage de la méthode des éléments virtuels n'est pas une approche fréquente. Ce chapitre est donc consacré à l'application de cette méthode à l'équation de la mécanique. Par conséquent, on ne considère que le système d'élasticité linéaire défini par (2.11) sans tenir compte du fluide. La première section du chapitre détaille la construction de la méthode des éléments virtuels d'ordre 1 pour ce système. Les différents ingrédients tels que l'espace d'approximation, la forme bilinéaire discrète et les opérateurs de projection spécifiques aux méthodes éléments virtuels y sont présentés. Même si la lecture de cette première section est suffisante pour implémenter la méthode dans un code de calcul, quelques détails supplémentaires sur ce point sont exposés dans la section 3.2. Cette implémentation, réalisée dans la plateforme Arcane, est utilisée afin de proposer quelques illustrations dans la section 3.3 qui permettent d'ajuster certains paramètres numériques et de valider la méthode. Enfin, des exemples d'applications un peu plus particuliers sont présentés dans la section 3.4.

Sommaire

3.1	Construction de la méthode	32
3.1.1	Espace d'approximation	32
3.1.2	Formulation variationnelle approchée	35
3.1.3	Explicitation de la projection	39
3.2	Implémentation	41
3.3	Paramétrage et validation numérique	44
3.3.1	Choix du coefficient de stabilisation	45
3.3.2	Convergence en espace	48
3.4	Observations supplémentaires sur la méthode	48
3.4.1	Traitement de maillages particuliers	50
3.4.2	Comparaison aux éléments finis	51

3.1 Construction de la méthode

Historiquement, les méthodes des éléments virtuels tirent leurs origines des différences finies mimétiques, réinterprétées dans un cadre variationnel. Ce changement de point de vue a considérablement simplifié la définition des méthodes et a ainsi permis leur application à des problèmes physiques plus variés, la montée en ordre polynomial, le choix d'espaces d'approximation plus complexes ou encore une analyse mathématique des méthodes dans un cadre unifié. Si la logique sous-jacente à ces méthodes devait être résumée, on pourrait la formuler de la manière suivante :

1. Sur chaque élément, la dimension de l'espace d'approximation doit être égale au nombre de degrés de liberté. L'espace vectoriel des fonctions polynomiales (de degré k) n'étant pas assez large, on y ajoute un jeu de fonctions de base définies *virtuellement* par un ensemble de conditions.
2. Ne pouvant pas évaluer la forme bilinéaire exacte sans la connaissance explicite de ces fonctions, on la remplace par une forme *approchée* calculable à partir des informations à disposition.
3. Puisque les informations à disposition concernent majoritairement les fonctions polynomiales, des opérateurs de *projection* sont définis et utilisés pour passer d'une fonction virtuelle à sa projection dans l'espace des polynômes.

Si ces ingrédients sont communs à toutes les méthodes éléments virtuels, leur choix peut varier en fonction du problème étudié, de l'espace d'approximation choisi et de l'ordre d'approximation souhaité. Bien qu'on puisse trouver des définitions générales de la méthode pour le problème d'élasticité, on se focalise par soucis de simplification sur la construction d'une méthode d'ordre polynomial un pour le système d'élasticité linéaire.

3.1.1 Espace d'approximation

Maillage

Soit τ_h une famille de *polytopes* – polygones en deux dimensions ou polyèdres en trois dimensions – Lipschitz $(K_i)_{i=1 \dots \#\tau_h}$, non nécessairement convexes mais ne se recouvrant pas, formant une partition de Ω :

$$\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^{\#\tau_h} K_i \text{ et } \overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j.$$

Pour chaque polytope, h_K , $|K|$ et \mathbf{x}^K représentent respectivement le diamètre, la mesure et le barycentre de K . On note M_K le nombre de sommets de K et \mathcal{M}_K l'ensemble des indices de ces sommets. Dans le cas tridimensionnel, l'indice ou l'exposant f est utilisé pour définir de manière similaire h_f , $|f|$, \mathbf{x}^f , M_f et \mathcal{M}_f pour chaque face f de K . Dans le cas bidimensionnel, on conserve la notation K pour désigner les polygones. Au niveau global, on note M le nombre total de sommets du maillage et \mathcal{M} l'ensemble des indices de ces sommets. Cet ensemble se décompose en deux sous-ensembles \mathcal{M}_{D_d} et $\mathcal{M}_{\overline{D_d}} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{D_d}$ qui représentent respectivement les indices des sommets appartenants à la frontière Γ_{D_d} et les indices des autres sommets du maillage.

Espace d'approximation local

Indépendamment de la dimension, l'espace d'approximation $V_h^K \subset H^1(K)$ est construit sur chaque élément K de manière à satisfaire les assertions suivantes :

- Les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 sur K sont inclus dans V_h^K .
- Les fonctions de V_h^K sont bien définies sur les sommets de K , et chaque fonction de V_h^K peut être déterminée de manière unique par ses valeurs sur les M_K sommets de K . En d'autres termes, les valeurs aux sommets de K constituent les degrés de liberté des fonctions de base et la dimension de V_h^K est égale à M_K .
- En trois (resp. deux) dimensions, la trace de toute fonction de V_h^K sur n'importe quelle face f (resp. n'importe quelle arête e) de la frontière ∂K de K ne dépend que des valeurs de la fonction sur les sommets de f (resp. de e). Comme dans la théorie éléments finis classique, cette propriété garantit que le raccordement des espaces V_h^K donne une approximation conforme de $H^1(\Omega)$.

Dans un premier temps, on construit un espace de fonctions scalaires $V_{h,scal}^K$ satisfaisant ces propriétés et dont l'expression dépend de la dimension considérée. Le passage à un espace d'approximation vectoriel réutilisera simplement cet espace scalaire.

En deux dimensions, la notation K désigne un polygone. L'espace $V_{h,scal}^K$ est défini d'après [Bei+13] par l'équation (3.1) et les auteurs montrent que les valeurs aux nœuds constituent les degrés de liberté de l'espace local.

$$V_{h,scal}^K = \{v_h \in H^1(K) \text{ t.q. : pour toute arête } e \subset \partial K, v_{h|e} \in \mathbb{P}_1(e); v_{h|\partial K} \in \mathcal{C}^0(\partial K); \Delta v_h = 0 \text{ dans } K\}. \quad (3.1)$$

Autrement dit, $V_{h,scal}^K$ est constitué de fonctions harmoniques linéaires sur chaque arête. En définissant la fonction de base locale $\varphi_i \in V_{h,scal}^K$ associée au nœud i ,

$$\Delta \varphi_i = 0 \text{ dans } K, \quad \varphi_i = \delta_i \text{ sur } \partial K \text{ avec } \delta_i \text{ vérifiant } \begin{cases} \delta_i(V_j) = 1 \text{ si } i = j, 0 \text{ sinon,} \\ \delta_i \text{ linéaire sur chaque arête } e, \\ \delta_i \text{ continue sur } \partial K. \end{cases}$$

Il est clair que les polynômes de degré 1 vérifient les trois conditions de la définition 3.1, ce qui implique $\mathbb{P}_1(K) \subset V_{h,scal}^K$. On note également que dans le cas où K est un triangle, seuls les polynômes de degré 1 vérifient les conditions. Dans ce cas particulier, l'espace d'approximation coïncide avec l'espace des éléments finis \mathbb{P}_1 de Lagrange : $V_{h,scal}^K = \mathbb{P}_1(K)$. Dans le cas général, l'espace d'approximation inclut d'autres fonctions *virtuellement* définies par la condition $\Delta v_h = 0$. La méthode des éléments virtuels est en effet construite de sorte que ces fonctions, *a priori* non polynomiales, n'aient jamais à être connues explicitement.

En trois dimensions, la définition de $V_{h,scal}^K$ est moins directe. La notation K désigne à présent un polyèdre dont les faces f sont des polygones. Dans un premier temps, on définit sur chacune de ces faces un opérateur de projection $\pi^{f,0} : \{v \in H^1(f) \text{ t.q. } v \in \mathcal{C}^0(\partial f)\} \rightarrow \mathbb{P}_1$ par

$$\pi^{f,0} v(\mathbf{x}) = \langle \nabla v \rangle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_f) + \bar{v}_f \quad \text{où} \quad \begin{cases} \langle \nabla v \rangle = \frac{1}{|f|} \int_f \nabla v \\ \bar{\zeta}_f = \frac{1}{M_f} \sum_{i \in \mathcal{M}_f} \zeta(V_i) \text{ avec } \zeta \equiv \mathbf{x} \text{ ou } \zeta \equiv v. \end{cases} \quad (3.2)$$

Ceci permet de construire pour chaque face un espace dans lequel $\pi^{f,0}$ est une projection L^2 :

$$V_{h,scal}^f = \left\{ v_h \in H^1(f) \text{ t.q. : } \forall e \in \partial f, v_{h|e} \in \mathbb{P}_1(e); v_{h|\partial f} \in \mathcal{C}^0(\partial f); \Delta v_h \in \mathbb{P}_1; \int_f (\pi^{f,0} v_h) q = \int_f v_h q \quad \forall q \in \mathbb{P}_1 \right\}$$

puis d'utiliser ces espaces sur les faces pour définir l'espace d'approximation $V_{h,scal}^K$ sur la cellule par

$$V_{h,scal}^K = \left\{ v_h \in H^1(K) \text{ tel que } v_{h|f} \in V_{h,scal}^f \quad \forall f \in \partial K; \quad \Delta v_h = 0 \text{ dans } K \right\}. \quad (3.3)$$

À nouveau, on note que $\mathbb{P}_1(K) \subset V_{h,scal}^K$ avec égalité et donc coïncidence avec les éléments finis \mathbb{P}_1 de Lagrange dans le cas où K est un tétraèdre. Les degrés de liberté de $V_{h,scal}^K$ sont les valeurs aux sommets du polyèdre, ce qui implique que la dimension de l'espace est égale à M_K .

Remarque. L'extension naturelle aurait été de prendre la définition du cas bidimensionnel (3.1) en remplaçant K par f pour les espaces polygonaux $V_{h,scal}^f$. Malheureusement, ce choix conduirait à un espace d'approximation qui, dans l'étape suivante, ne permettrait pas d'évaluer la forme bilinéaire approchée. On verra effectivement plus loin que dans le cas tridimensionnel, le calcul d'intégrales de la forme $\int_f v_h$ est requis. Or, l'espace construit par (3.1) ne définit pas les fonctions v_h à l'intérieur des faces. La technique utilisée est classique des éléments virtuels : l'information manquante est ajoutée à l'espace d'approximation (via la condition $\int_f (\pi^{f,0} v_h) q = \int_f v_h q \quad \forall q \in \mathbb{P}_1$), mais ce dernier reste de même dimension puisque la condition $\Delta v_h = 0$ est remplacée par $\Delta v_h \in \mathbb{P}_1$. Les deux définitions de $V_{h,scal}^f$ conduisent finalement à deux espaces équivalents en terme de dimension et de degrés de liberté, comme démontré dans [Ahm+13] : un jeu de valeurs aux sommets permet d'identifier de manière unique une fonction dans chacun de ces espaces, qui sont distinctes dans le cas général. Le choix effectué pour $V_{h,scal}^f$ est purement guidé par le besoin d'avoir une forme bilinéaire calculable pour les fonctions de l'espace d'approximation.

Espace d'approximation global

Quelle que soit la dimension, l'espace d'approximation global V_h est construit à partir de l'assemblage conforme des espaces locaux :

$$V_{h,scal} = \left\{ v_h \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v_{h|K} \in V_{h,scal}^K \text{ pour tout } K \in \tau_h \right\}. \quad (3.4)$$

Les degrés de liberté globaux sont les valeurs de v_h sur chacun des sommets du maillage : à chacun de ces sommets est associé la fonction de base scalaire φ_i satisfaisant $\varphi_i(V_j) = \delta_{ij} \quad \forall j \in \mathcal{M}$. Toute fonction scalaire v_h de $V_{h,scal}$ se décompose donc selon l'identité d'interpolation lagrangienne

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{M}} v_h(V_i) \varphi_i(\mathbf{x}).$$

Pour traiter le problème d'élasticité, qui est vectoriel, les espaces scalaires sont dupliqués pour créer les espaces d'approximation vectoriels $V_h^K = (V_{h,scal}^K)^d$ et $V_h = (V_{h,scal})^d$. De la même manière, chaque fonction de base scalaire permet de créer d fonctions de base vectorielles selon $\boldsymbol{\varphi}_i^k = \varphi_i \mathbf{e}_k$ ($k = x, y, z$). Finalement, les fonctions vectorielles \mathbf{v}_h de V_h s'expriment dans la base $\{\boldsymbol{\varphi}_i^k\}$ selon

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{M}} (v_h(V_i))^x \boldsymbol{\varphi}_i^x(\mathbf{x}) + (v_h(V_i))^y \boldsymbol{\varphi}_i^y(\mathbf{x}) + (v_h(V_i))^z \boldsymbol{\varphi}_i^z(\mathbf{x}). \quad (3.5)$$

À titre d'illustration, on représente sur la figure 3.1 une fonction de base en un sommet choisi pour diverses mailles en dimension deux. Dans ce contexte uniquement, les fonctions sont calculées numériquement en résolvant l'équation $\Delta\varphi_i = 0$: les cellules sont discrétisées en sous éléments et les conditions aux limites à appliquer sont déduites de la définition de l'espace d'approximation. Dans l'utilisation normale des éléments virtuels, cette manipulation n'est ni souhaitable ni nécessaire.

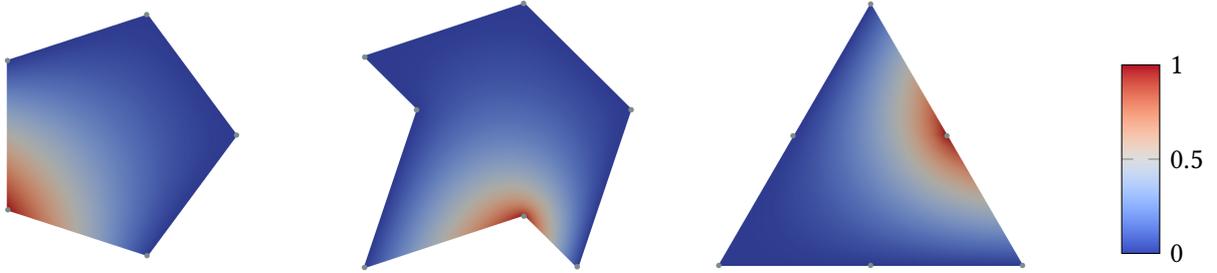


FIG. 3.1 : **Valeur de la fonction de base scalaire** associée à un sommet sur chacune de ces trois cellules. Contrairement aux apparences, la cellule de droite est définie comme un hexagone à six arêtes et non pas comme un triangle.

3.1.2 Formulation variationnelle approchée

L'espace d'approximation défini précédemment peut être utilisé dans des méthodes polygonales de type éléments finis, appelées méthodes des éléments finis harmoniques, voir par exemple [Bis14] pour le problème d'élasticité. Dans ces méthodes, l'évaluation de la forme bilinéaire a^Ω issue de la formulation faible (2.13) nécessite d'approcher les fonctions de base, par exemple en partitionnant chaque cellule en simplexes et en résolvant par éléments finis le problème de Laplace, ce qui rend ces méthodes coûteuses. La philosophie des méthodes des éléments virtuels est différente : plutôt que de déterminer les fonctions de base, le problème variationnel est modifié de sorte que les termes soient calculables directement depuis les degrés de liberté. Pour aboutir à ce problème modifié, il faut approcher la forme bilinéaire et le second membre du système (2.13).

Forme bilinéaire discrète

Pour approcher la forme bilinéaire, a^Ω est tout d'abord décomposée sur les éléments

$$a^\Omega(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \tau_h} a^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \text{ avec } a^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_K \overline{\overline{C}} \overline{\overline{\epsilon_{u_h}}} : \overline{\overline{\epsilon_{v_h}}}$$

puis a^K est approchée sur chaque élément par une forme bilinéaire a_h^K . Ces formes approchées élémentaires sont ensuite regroupées pour définir la forme bilinéaire approchée globale a_h :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \tau_h} a_h^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \text{ avec } a_h^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \approx a^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h).$$

Malgré ce *crime variationnel*, la convergence de la méthode est assurée si les deux hypothèses suivantes sont respectées pour tout $K \in \tau_h$ [Bei+13] :

- Consistance : pour tout $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_1^d$ et pour tout $\mathbf{v}_h \in V_h^K$,

$$a_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{p}) = a^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{p}). \quad (3.6)$$

- Stabilité : il existe deux constantes positives α_* et α^* indépendantes de K et de h telles que

$$\forall \mathbf{v}_h \in V_h^K, \quad \alpha_* a^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq a_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq \alpha^* a^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \quad (3.7)$$

La propriété de consistance assure la précision de la méthode. En particulier, elle garantit la satisfaction du *patch test*, c'est-à-dire le fait que la méthode est exacte dans le cas où la solution exacte est linéaire. La propriété de stabilité permet de conserver la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire approchée. Sans cette propriété, la matrice associée à la forme bilinéaire serait de rang déficient ce qui poserait de gros problèmes de stabilité.

Puisque V_h^K contient des éléments polynomiaux et non polynomiaux, et que la propriété de consistance porte sur les polynômes, il est naturel de définir sur chaque élément K un opérateur de projection π^K de l'espace V_h^K vers l'espace des polynômes \mathbb{P}_1^d , de sorte que pour tout élément \mathbf{v}_h dans V_h^K ,

$$\mathbf{v}_h = \pi^K(\mathbf{v}_h) + (\bar{I}_d - \pi^K)(\mathbf{v}_h). \quad (3.8)$$

Plus précisément, si on arrive à définir un tel opérateur de projection satisfaisant de plus la relation

$$a^K(\pi^K \mathbf{v}_h, \mathbf{q}) = a^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{q}) \text{ pour tout } \mathbf{q} \in \mathbb{P}_1^d, \quad (3.9)$$

on montre facilement que la forme bilinéaire approchée localement définie par

$$\tilde{a}_h^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := a^K(\pi^K \mathbf{u}, \pi^K \mathbf{v})$$

est consistante au sens de (3.6) : soit $\mathbf{v}_h \in V_h^K$ et $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_1^d$, alors

$$\begin{aligned} \tilde{a}_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{p}) &= a^K(\pi^K \mathbf{v}_h, \pi^K \mathbf{p}) = a^K(\pi^K \mathbf{v}_h, \mathbf{p}) \text{ car } \pi^K \mathbf{p} = \mathbf{p} \text{ pour } \mathbf{p} \in \mathbb{P}_1^d \\ &= a^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{p}) \text{ d'après (3.9).} \end{aligned}$$

Cependant, cette forme bilinéaire ne satisfait pas la propriété de stabilité, ce qui nécessite l'introduction d'une autre forme bilinéaire \tilde{s}_h^K qui aura pour rôle d'assurer cette propriété. Procédant comme dans [BLM15], on pose

$$\tilde{s}_h^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := s_K \sum_{i \in \mathcal{M}_K} (\mathbf{u} - \pi^K \mathbf{u})(V_i) \cdot (\mathbf{v} - \pi^K \mathbf{v})(V_i) \quad (3.10)$$

où s_K désigne un coefficient réel positif dont le choix sera discuté par la suite. Puisque \tilde{s}_h^K s'annule lorsque l'un de ses deux arguments est un polynôme de degré un, elle n'altère pas la propriété de consistance. En revanche, elle permet d'assurer la propriété de stabilité (3.7) : sous certaines hypothèses sur la forme des mailles et sur le choix de s_K , il existe c_0, c_1 constantes indépendantes de K et de h telles que

$$\forall \mathbf{v}_h \in V_h^K \text{ tel que } \pi^K \mathbf{v}_h = \mathbf{0}, \quad c_0 a^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq \tilde{s}_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq c_1 a^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h).$$

Finalement, la somme de \tilde{a}_h^K et \tilde{s}_h^K définit la forme bilinéaire approchée consistante et stable

$$a_h^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \tilde{a}_h^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tilde{s}_h^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a^K(\pi^K \mathbf{u}, \pi^K \mathbf{v}) + s_K \sum_{i \in \mathcal{M}_K} (\mathbf{u} - \pi^K \mathbf{u})(V_i) \cdot (\mathbf{v} - \pi^K \mathbf{v})(V_i). \quad (3.11)$$

Il reste à construire l'opérateur de projection π^K satisfaisant (3.9), ce qui sera l'objet de la section 3.1.3.

Second membre

Dans le cadre de la méthode des éléments virtuels, le second membre local

$$l^K(\mathbf{v}_h) = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\partial K \cap \Gamma_{N_d}} \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v}_h$$

doit également être approché par une forme linéaire approchée $l_h^K(\mathbf{v}_h)$ de manière à être calculable à partir des degrés de liberté. En suivant l'approche développée dans [GTP14], on utilise une formule de quadrature basée sur les nœuds en prenant

$$l_h^K(\mathbf{v}_h) := \sum_{i \in \mathcal{M}_K} \omega_i^K \mathbf{f}(V_i) \cdot \mathbf{v}_h(V_i) + \sum_{i \in \mathcal{M}_{K \cap \Gamma_{N_d}}} \omega_i^{\partial K} \mathbf{t}_N(V_i) \cdot \mathbf{v}_h(V_i) \quad (3.12)$$

où les poids d'intégration ω_i^K et $\omega_i^{\partial K}$ dépendent de la dimension considérée et sont représentés sur la figure 3.2. La force volumique s'applique sur les cellules (polyèdres en trois dimensions ou polygones en deux dimensions) tandis que la traction de Neumann s'applique sur les bords (faces polygonales pour les problèmes tridimensionnels ou arêtes pour les problèmes bidimensionnels). On montre que ces poids

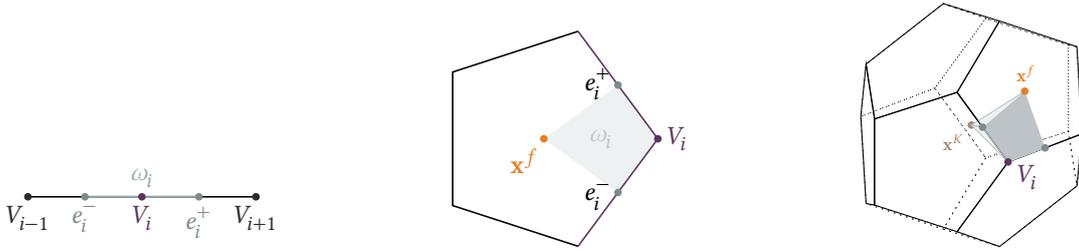


FIG. 3.2 : **Poids d'intégration** pour la forme de quadrature basée sur les nœuds. En dimension un, ω_i est la longueur du segment formé par les milieux des arêtes e_i^- , e_i^+ . En dimension deux, ω_i est l'aire du quadrangle formé par le sommet V_i , le barycentre \mathbf{x}^f et les milieux des arêtes e_i^- , e_i^+ . En dimension trois, ω_i est la somme du volume des pyramides de base V_i , \mathbf{x}^f , milieux des arêtes e_i et de sommet \mathbf{x}^K (barycentre de K). Pour plus de lisibilité, seule une des trois pyramides est représentée sur la figure.

permettent d'intégrer exactement les fonctions linéaires selon $\int_K p = \sum_{i \in \mathcal{M}_K} \omega_i^K p(V_i)$: par exemple en dimension deux,

$$\begin{aligned} 3 \int_f p &= \sum_{i \in \mathcal{M}_f} |T_{V_i, V_{i+1}, \mathbf{x}^f}| (p(V_i) + p(V_{i+1}) + p(\mathbf{x}^f)) \text{ en triangulant par rapport au barycentre } \mathbf{x}^f \\ &= |f| p(\mathbf{x}^f) + 2 \sum_{i \in \mathcal{M}_f} \omega_i^f p(V_i) \text{ car } \omega_i^f = \frac{1}{2} (|T_{V_{i-1}, V_i, \mathbf{x}^f}| + |T_{V_i, V_{i+1}, \mathbf{x}^f}|) \\ &= \int_f p + 2 \sum_{i \in \mathcal{M}_f} \omega_i^f p(V_i) \text{ par définition du barycentre.} \end{aligned}$$

De cette manière, si les données \mathbf{f} et \mathbf{t}_N sont suffisamment régulières, l'erreur due à la formule de quadrature est comparable à l'erreur du schéma numérique et ne modifie pas l'ordre de convergence. D'autres méthodes d'approximation de la forme linéaire peuvent être utilisées, voir [BLM15 ; ANR17]. Comme pour la forme bilinéaire, la somme sur les cellules de ces seconds membres approchés définit le second membre approché global selon $l_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} l_h^K$.

Formulation faible approchée

Les formes bilinéaires et linéaires approchées étant définies, on peut à présent poser le problème variationnel approché résolu par la méthode des éléments virtuels. Pour tenir compte des conditions aux limites de Dirichlet $\mathbf{u} = \mathbf{g}_D$ sur Γ_{D_d} , on introduit les espaces

$$V_{h,g} = \{\mathbf{v}_h \in V_h \text{ tel que } \mathbf{v}_h(V_i) = \mathbf{g}_D(V_i) \text{ pour } i \in \mathcal{M}_{D_d}\} \quad (3.13)$$

et

$$V_{h,0} = \{\mathbf{v}_h \in V_h \text{ tel que } \mathbf{v}_h(V_i) = \mathbf{0} \text{ pour } i \in \mathcal{M}_{D_d}\} \quad (3.14)$$

de sorte qu'un élément $\mathbf{v}_h \in V_{h,g}$ se réécrit dans la base $\{\boldsymbol{\varphi}_i^k\}$ selon

$$\mathbf{v}_h = \sum_{i \in \mathcal{M}_{\overline{D_d}}} (\mathbf{v}_h(V_i))^x \boldsymbol{\varphi}_i^x + (\mathbf{v}_h(V_i))^y \boldsymbol{\varphi}_i^y + (\mathbf{v}_h(V_i))^z \boldsymbol{\varphi}_i^z + \sum_{i \in \mathcal{M}_{D_d}} (\mathbf{g}_D(V_i))^x \boldsymbol{\varphi}_i^x + (\mathbf{g}_D(V_i))^y \boldsymbol{\varphi}_i^y + (\mathbf{g}_D(V_i))^z \boldsymbol{\varphi}_i^z.$$

La formulation variationnelle approchée s'écrit alors

Formulation variationnelle approchée

Trouver $\mathbf{u}_h \in V_{h,g}$ tel que pour tout $\mathbf{v}_h \in V_{h,0}$,

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = l_h(\mathbf{v}_h) \quad (3.15a)$$

ou, de manière équivalente, trouver $\mathcal{U} = (u_1^x, u_1^y, \dots, u_{\#\mathcal{M}_{\overline{D_d}}}^z)$ solution du système

$$\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{L}^u \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_{i_k j_l} = a_h(\boldsymbol{\varphi}_i^k, \boldsymbol{\varphi}_j^l) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{i_k}^u = l_h(\boldsymbol{\varphi}_i^k) - \sum_{\substack{j \in \mathcal{M}_{D_d} \\ l=x,y,z}} (\mathbf{g}_D(V_j))^l a_h(\boldsymbol{\varphi}_i^k, \boldsymbol{\varphi}_j^l). \quad (3.15b)$$

De la même manière que dans la méthode des éléments finis, l'assemblage de la matrice \mathcal{A} et du second membre \mathcal{L}^u est effectué en calculant les matrices élémentaires \mathcal{A}^K et les seconds membres élémentaires $\mathcal{L}^{u,K}$ sur chaque maille.

Remarque. En pratique, les conditions aux limites de Dirichlet sont définies en termes de degrés de liberté plutôt qu'en termes de sommets, comme le laissent entendre les notations précédentes utilisées pour plus de simplicité. Étant donné un nœud V_j situé sur un bord du domaine, on peut tout à fait mixer les conditions aux limites en imposant par exemple un déplacement fixé (condition de Dirichlet) pour la composante x du vecteur et une contrainte de traction (condition de Neumann) pour les composantes y et z du vecteur. Ce type de condition aux limites est utile pour de nombreux problèmes de mécanique où les déplacements peuvent n'être bloqués que dans une seule direction, ce qui est d'ailleurs le cas dans la section 2.2.3. La formulation variationnelle reste valable en plaçant dans ce cas j_x dans \mathcal{M}_{D_d} et j_y, j_z dans $\mathcal{M}_{\overline{D_d}}$.

La littérature sur les éléments virtuels [BBM13] fournit le résultat suivant :

Lemme 3.1 *On suppose que chaque maille K est étoilée par rapport à une boule de rayon rh_K , où r est une constante inférieure au rapport de la plus petite arête de K et de son diamètre. Si la forme bilinéaire approchée a_h vérifie les hypothèses de consistance (3.6) et de stabilité (3.7), alors le problème approché (3.15a) admet une*

unique solution \mathbf{u}_h . De plus, pour toute approximation \mathbf{u}_I de \mathbf{u} dans V_h et pour toute approximation \mathbf{u}_π de \mathbf{u} dans \mathbb{P}_1^d pour chaque maille,

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{H^1} \leq C \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_{H^1} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi\|_{H^1(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sup_{\mathbf{v}_h \in V_{h,0}} \frac{l(\mathbf{v}_h) - l_h(\mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{H^1}} \right)$$

où C est une constante dépendant de $\Omega, \bar{C}, \alpha^*, \alpha_*$ et de la constante de coercivité de a^Ω .

3.1.3 Explicitation de la projection

Il ressort du paragraphe précédent que le cœur de la méthode des éléments virtuels consiste à trouver un projecteur π^K satisfaisant (3.9) et calculable depuis les degrés de liberté de l'espace V_h^K .

Dans le cas général, la définition de cette projection est constructive [BBMR14] : en réécrivant l'égalité (3.9) $a^K(\pi^K \mathbf{v}_h, \mathbf{q}) = a^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{q})$ pour chaque monôme polynomial, on aboutit à un système linéaire de taille $\dim(\mathbb{P}_1^d)$ dont les inconnues sont les coefficients de $\pi^K(\mathbf{v}_h)$. Ce faisant, on observe alors que le choix des degrés de liberté et la définition de V_h^K permettent d'assembler ce système linéaire. En revanche, puisque la condition (3.9) est satisfaite à une constante près, les monômes d'ordre zéro $\mathbf{q} = \mathbb{1}_K \mathbf{e}_k$ donnent l'égalité $0 = 0$ et conduisent à un système de rang déficient. Une dernière étape consiste donc à ajouter une contrainte supplémentaire, typiquement

$$\sum_{i \in \mathcal{M}_K} \pi^K \mathbf{v}_h(V_i) = \sum_{i \in \mathcal{M}_K} \mathbf{v}_h(V_i).$$

La résolution de ce système linéaire pour chaque fonction de base permet d'expliciter la représentation matricielle de la projection π^K .

Dans notre cas particulier où l'ordre d'approximation polynomial n'est que de un, l'expression de π^K qui est finalement assez simple est directement donnée par l'équation (3.16).

Projecteur des éléments virtuels à l'ordre 1

$$\pi^K \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \langle \nabla \mathbf{v} \rangle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_K) + \bar{\mathbf{v}}_K \quad (3.16)$$

où l'on a défini les notations suivantes assimilables à des moyennes :

- $\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{v}$ donc $\langle \nabla \mathbf{v} \rangle$ représente le gradient moyen par maille,
- $\bar{\mathbf{v}}_K = \frac{1}{M_K} \sum_{i \in \mathcal{M}_K} \mathbf{v}(V_i)$ et, en particulier, $\bar{\mathbf{x}}_K = \frac{1}{M_K} \sum_{i \in \mathcal{M}_K} \mathbf{x}(V_i)$.

En effet, cette expression étant donnée, on peut effectuer le raisonnement précédemment décrit "à l'envers" pour vérifier que l'équation de consistance (3.9) est bien satisfaite, et que le projecteur est calculable pour chaque fonction de base en utilisant uniquement les informations de l'espace d'approximation V_h^K et les degrés de liberté.

Soit \mathbf{v}_h dans V_h^K et \mathbf{p} appartenant à \mathbb{P}_1^d . Par définition de a^K ,

$$\begin{aligned} a^K(\pi^K \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h, \mathbf{p}) &= \int_K \bar{C} \bar{\varepsilon}(\pi^K \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h) : \bar{\varepsilon}(\mathbf{p}) \\ &= \bar{C} \bar{\varepsilon}(\mathbf{p}) : \int_K \bar{\varepsilon}(\pi^K \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h) \text{ car } \bar{C} \text{ et } \bar{\varepsilon}(\mathbf{p}) \text{ sont constants dans } K. \end{aligned}$$

En utilisant les définitions de $\bar{\varepsilon}$ (voir (2.1)) et de π^K ,

$$\bar{\varepsilon}(\pi^K \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h) = \frac{1}{2} (\langle \nabla \mathbf{v}_h \rangle + \langle \nabla \mathbf{v}_h^T \rangle) - \nabla \mathbf{v}_h - \nabla \mathbf{v}_h^T$$

et, dans la mesure où

$$\forall \mathbf{v}, \int_K \langle \nabla \mathbf{v} \rangle - \nabla \mathbf{v} = |K| \langle \nabla \mathbf{v} \rangle - \int_K \nabla \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ par définition de } \langle \nabla \mathbf{v} \rangle,$$

on a

$$\int_K \bar{\varepsilon}(\pi^K \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h) = \bar{0} \text{ d'où } a^K(\pi^K \mathbf{v}_h, \mathbf{p}) = a^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{p}).$$

La propriété (3.9) est donc bien satisfaite.

Il reste à montrer que π^K est calculable pour toute fonction de base de V_h^K à partir des degrés de liberté de cet espace, qui sont dans le cas considéré les valeurs aux nœuds. La moyenne aux sommets $\bar{\mathbf{v}}_K$ étant calculable sans difficultés, le seul terme à détailler est le gradient moyen des fonctions de base $\langle \nabla \varphi_i^k \rangle$ pour $k = x, y, z$. On remarque en premier lieu que ce calcul se ramène à celui du gradient moyen des fonctions de base scalaires selon la relation $\nabla \varphi_i^k = \mathbf{e}_k \otimes \nabla \varphi_i$. La suite diffère selon la dimension considérée.

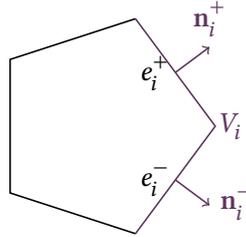


FIG. 3.3 : **Élément polygonal en deux dimensions.** Les sommets et arêtes sont numérotés dans le sens trigonométrique, avec la convention $V_{K+1} \equiv V_1$.

En deux dimensions, les sommets sont numérotés dans le sens trigonométrique et on désigne respectivement par e_i^- et e_i^+ les arêtes connectant V_i à V_{i-1} et à V_{i+1} , et par \mathbf{n}_i^- et \mathbf{n}_i^+ les normales sortantes à ces arêtes, comme illustré sur la figure 3.3. La formule de Stokes permet de transformer l'intégrale du gradient sur la maille en intégrale de la fonction de base sur les arêtes. Or, les fonctions de base sont linéaires sur les arêtes et leurs valeurs aux sommets sont connues ($\varphi_i(V_j) = \delta_{ij}$) ce qui permet d'intégrer exactement selon

$$\frac{1}{|K|} \int_K \nabla \varphi_i = \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} \varphi_i \mathbf{n} = \frac{1}{2|K|} (|e_i^-| \mathbf{n}_i^- + |e_i^+| \mathbf{n}_i^+),$$

d'où l'expression du projecteur en deux dimensions :

$$\pi^K \varphi_i^k = \frac{1}{M_K} \mathbf{e}_k + \left(\mathbf{e}_k \otimes \frac{1}{2|K|} (|e_i^-| \mathbf{n}_i^- + |e_i^+| \mathbf{n}_i^+) \right) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_K). \quad (3.17)$$

En trois dimensions, la formule de Stokes est également utilisée pour transformer l'intégrale du gradient en intégrale sur les faces f de normales sortantes \mathbf{n}_f selon

$$\frac{1}{|K|} \int_K \nabla \varphi_i = \frac{1}{|K|} \sum_f \int_f \varphi_i \mathbf{n}_f$$

La suite n'est pas directe : si l'on sait que φ_i est linéaire sur chaque arête du polyèdre, on manque en revanche d'informations sur le comportement de φ_i à l'intérieur des faces, et on est donc *a priori* incapable de calculer cette intégrale. C'est à ce stade que le choix effectué pour la définition de l'espace V_h^K en trois dimensions dans la section 3.1.1 fait sens. Puisque cet espace d'approximation inclut la propriété

$$\int_f \pi^{f,0} v_h = \int_f v_h,$$

on peut remplacer le calcul de l'intégrale de la fonction par le calcul de l'intégrale de sa projection, en espérant que celle-ci soit calculable depuis les degrés de liberté. Dans notre cas, c'est évidemment possible puisque la définition de la projection L^2 $\pi^{f,0}$ donnée par l'équation (3.2) coïncide avec la définition de la projection des éléments virtuels bidimensionnelle donnée par l'équation (3.16). On réutilise donc l'expression obtenue au paragraphe précédent pour écrire

$$\begin{aligned} \int_f \varphi_i &= \int_f \pi^{f,0} \varphi_i = \int_f \left(\frac{1}{M_f} + \frac{1}{2|f|} \left(|e_{f,i}^-| \mathbf{n}_{f,i}^- + |e_{f,i}^+| \mathbf{n}_{f,i}^+ \right) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_f) \right) \\ &= \frac{|f|}{M_f} + \frac{1}{2} \left(|e_{f,i}^-| \mathbf{n}_{f,i}^- + |e_{f,i}^+| \mathbf{n}_{f,i}^+ \right) \cdot (\mathbf{x}^f - \bar{\mathbf{x}}_f). \end{aligned}$$

Les notations de la figure 3.3 ont été réutilisées en ajoutant l'indice f pour souligner le fait que $e_{f,i}^-$ et $e_{f,i}^+$ (les longueurs des deux arêtes de la face f connectées au sommet V_i) ainsi que $\mathbf{n}_{f,i}^-$ et $\mathbf{n}_{f,i}^+$ (les normales sortantes unitaires à ces arêtes, dans le plan de la face f) dépendent de la face considérée. Pour obtenir cette dernière égalité, on a simplement intégré la quantité affine en utilisant la définition du barycentre des faces $|f| \mathbf{x}^f = \int_f \mathbf{x}$. Notons que pour des faces simples, par exemple triangulaires ou carrées, le barycentre \mathbf{x}^f se confond avec le centre moyen $\bar{\mathbf{x}}_f$, l'intégrale se réduisant alors à $\int_f \varphi_i = \frac{|f|}{M_f}$. Dans le cas général, ces deux points sont distincts. L'intégrale du gradient de la i -ème fonction de base fait donc intervenir $F_{i,K}$, l'ensemble des faces de K dont V_i est l'un des sommets, et s'écrit

$$\frac{1}{|K|} \int_K \nabla \varphi_i = \frac{1}{|K|} \sum_{f \in F_{i,K}} \left(\frac{|f|}{M_f} + \frac{1}{2} \left(|e_{f,i}^-| \mathbf{n}_{f,i}^- + |e_{f,i}^+| \mathbf{n}_{f,i}^+ \right) \cdot (\mathbf{x}^f - \bar{\mathbf{x}}_f) \right) \mathbf{n}_f. \quad (3.18)$$

Finalement, en injectant ce gradient moyen dans (3.16), on obtient l'expression du projecteur en trois dimensions pour chaque fonction de base :

$$\pi^K \varphi_i^k = \frac{1}{M_K} \mathbf{e}_k + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_K) \cdot \left(\mathbf{e}_k \otimes \frac{1}{|K|} \sum_{f \in F_{i,K}} \left(\frac{|f|}{M_f} + \frac{1}{2} \left(|e_{f,i}^-| \mathbf{n}_{f,i}^- + |e_{f,i}^+| \mathbf{n}_{f,i}^+ \right) \cdot (\mathbf{x}^f - \bar{\mathbf{x}}_f) \right) \mathbf{n}_f \right). \quad (3.19)$$

3.2 Implémentation

La méthode des éléments virtuels consistant à résoudre un problème variationnel (certes approché, tel que défini par l'équation (3.15a)), la procédure d'assemblage est identique à celle des méthodes éléments finis et est décrite par l'algorithme 1. Les paragraphes suivants détaillent les différentes étapes de cet algorithme.

Algorithm 1 Implémentation des éléments virtuels pour l'élasticité

```

1 Read mesh and compute each cell  $\diamond$  geometry
2 for  $\diamond$  in mesh do
3   Compute local matrix  $\mathcal{A}^{\diamond}$ 
4   Compute local rhs  $\mathcal{L}^{u,\diamond}$  ▷  $\mathcal{L}^u$  includes forcing term and Neumann Bc
5   for non Dirichlet dof  $\bullet$  in  $\diamond$  do
6      $\mathcal{L}^{u,\bullet} += \mathcal{L}^{u,\diamond}(\bullet)$ 
7   for non Dirichlet  $\bullet$  in  $\diamond$  do
8      $\mathcal{A}(\bullet, \bullet) += \mathcal{A}^{\diamond}(\bullet, \bullet)$ 
9   for Dirichlet  $\bullet$  in  $\diamond$  do
10     $\mathcal{L}^{u,\bullet} -= \mathcal{A}^{\diamond}(\bullet, \bullet)g_D(\bullet)$ 
11 Solve  $d \cdot \text{card}(\mathcal{M}_{D_d}^-)$  linear system  $\mathcal{A}\mathcal{U} = \mathcal{L}^u$ 
12 Complete  $\mathcal{U}$  with  $d \cdot \text{card}(\mathcal{M}_{D_d})$  Dirichlet  $\bullet$  values
13 for  $\diamond$  in mesh do
14   Compute stress vector
15 Compute errors
    
```

Calcul des matrices VEM locales

Cette section explicite le calcul des matrices élémentaires de la méthode des éléments virtuels, se basant sur les développements de [ANR17]. La contribution de chaque élément K consiste à calculer la matrice de rigidité locale \mathcal{A}^K explicitée par l'équation (3.11) pour chacune des $d \times M_K$ fonctions de base de l'élément.

On développe dans un premier temps le calcul de la partie consistante $a^K(\pi^K \boldsymbol{\varphi}_i^k, \pi^K \boldsymbol{\varphi}_j^k)$. Comme expliqué dans le chapitre 2.1, le tenseur des déformations a la propriété d'être nul lorsqu'il est associé à un mouvement de translation ou de rotation. Plus précisément, un calcul direct montre que $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u})$ est nul lorsque \mathbf{u} est de la forme $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{T}$ avec $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ matrice antisymétrique de $\mathbb{R}^{d \times d}$, \mathbf{x}_0 et \mathbf{T} vecteurs de \mathbb{R}^d . Il est donc possible d'alléger l'évaluation du terme $a^K(\pi^K \boldsymbol{\varphi}_i^k, \pi^K \boldsymbol{\varphi}_j^k)$ en séparant $\pi^K \boldsymbol{\varphi}_i^k$ en deux termes, dont l'un s'annule à travers a^K . Cette procédure, qui est facultative, permet néanmoins d'économiser des calculs mais aussi de travailler sur des quantités symétriques ou anti-symétriques et donc d'utiliser la notation de Kelvin pour condenser les objets utilisés. On réécrit donc (3.16) sous la forme

$$\pi^K = \pi_c^K + \pi_r^K \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \pi_c^K \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \rangle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_K) \\ \pi_r^K \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T \rangle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_K) + \bar{\mathbf{v}}_K \end{cases} \quad (3.20)$$

et il est clair que la matrice $\langle \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T \rangle$ est antisymétrique, de sorte que $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\pi_r^K \mathbf{v}) = \bar{\mathbf{0}}$ et, par bilinéarité, $a^K(\pi_c^K \mathbf{u}, \pi_r^K \mathbf{v}) = a^K(\pi_c^K \mathbf{u}, \pi_c^K \mathbf{v})$.

Concernant la partie non nulle $\pi_c^K \mathbf{v}$, puisque la matrice $\frac{1}{2} \langle \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \rangle$ est symétrique, on peut la représenter par un vecteur en adoptant la notation de Kelvin : on note donc W_{ci}^k le vecteur de \mathbb{R}^6 (ou de \mathbb{R}^3 en deux dimensions) associé à la quantité $\frac{1}{2} \langle \nabla \boldsymbol{\varphi}_i^k + \nabla \boldsymbol{\varphi}_i^{kT} \rangle$. Les $d \times M_K$ vecteurs W_{ci}^k sont rassemblés dans une matrice $\mathcal{W}_c = [W_{c1}^x, W_{c1}^y, \dots, W_{cM_K}^z]$ de taille $6 \times 3M_K$ (ou $3 \times 2M_K$ en deux dimensions) dont le bloc de colonnes $(\mathcal{W}_c)_i = [W_{ci}^x, W_{ci}^y, W_{ci}^z]$ est explicité par l'équation (3.21). Pour repasser à l'expression de la composante l du projecteur $\pi_c^K(\boldsymbol{\varphi}_i^k)$ évalué au sommet V_j , le vecteur W_{ci}^k doit être multiplié à gauche par la

quantité $(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}_K})^T$ stockée dans un vecteur ligne $N_{c_j}^l$ de sorte que

$$(\pi_c^K \boldsymbol{\varphi}_i^k(\mathbf{x}_j)) \cdot \mathbf{e}_l = N_{c_j}^l W_{ci}^k.$$

À nouveau, les $d \times M_K$ vecteurs N_c sont rassemblés dans une matrice $\mathcal{N}_c = [N_{c1}^x, N_{c1}^y, \dots, N_{cM_K}^z]$ de taille $3M_K \times 6$ (ou $2M_K \times 3$ en deux dimensions) dont le bloc de lignes $(\mathcal{N}_c)_i$ est également explicité par l'équation (3.21)

$$(\mathcal{W}_c)_i = \begin{pmatrix} q_i^x & 0 & 0 \\ 0 & q_i^y & 0 \\ 0 & 0 & q_i^z \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} q_i^z & \frac{1}{\sqrt{2}} q_i^y \\ \frac{1}{\sqrt{2}} q_i^z & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} q_i^x \\ \frac{1}{\sqrt{2}} q_i^y & \frac{1}{\sqrt{2}} q_i^x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\mathcal{N}_c)_i = \begin{pmatrix} r_i^x & 0 & 0 & 0 & \frac{r_i^z}{\sqrt{2}} & \frac{r_i^y}{\sqrt{2}} \\ 0 & r_i^y & 0 & \frac{r_i^z}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{r_i^x}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & r_i^z & \frac{r_i^y}{\sqrt{2}} & \frac{r_i^x}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

où l'on a noté

$$\mathbf{q}_i = \langle \nabla \varphi_i \rangle = \frac{1}{|K|} \int_K \nabla \varphi_i \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}_K}. \quad (3.22)$$

En toute rigueur, les quantités \mathcal{W}_c , \mathcal{N}_c , \mathbf{q}_i et \mathbf{r}_i sont locales à chaque cellule, mais on a omis l'exposant K pour plus de lisibilité. En utilisant cette décomposition, on a dans la notation de Kelvin $\hat{\varepsilon}(\pi_c^K \boldsymbol{\varphi}_i^k) = W_{ci}^k$ et donc, pour deux fonctions de base $\boldsymbol{\varphi}_i^k$ et $\boldsymbol{\varphi}_j^l$ données, $a^K(\pi_c^K \boldsymbol{\varphi}_i^k, \pi_c^K \boldsymbol{\varphi}_j^l) = |K| (W_{ci}^k)^T \hat{C} W_{cj}^l$. Autrement dit, la première partie de la matrice de rigidité élémentaire associée à a_h^K se calcule par la relation

$$\tilde{\mathcal{A}}^K = |K| \mathcal{W}_c^T \hat{C} \mathcal{W}_c.$$

Il reste à expliciter la matrice associée à π_r^K pour calculer la seconde partie de la matrice de rigidité élémentaire \tilde{s}_h^K . En effet, cette partie fait intervenir la projection π^K dans son ensemble. On peut utiliser une décomposition similaire et définir les matrices \mathcal{W}_r et \mathcal{N}_r construites à partir des blocs $(\mathcal{W}_r)_i$ et $(\mathcal{N}_r)_i$ définis par

$$(\mathcal{W}_r)_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{M_K} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_K} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M_K} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} q_i^z & \frac{-1}{\sqrt{2}} q_i^y \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} q_i^z & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} q_i^x \\ \frac{1}{\sqrt{2}} q_i^y & \frac{-1}{\sqrt{2}} q_i^x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\mathcal{N}_r)_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-r_i^z}{\sqrt{2}} & \frac{r_i^y}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{r_i^z}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-r_i^x}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-r_i^y}{\sqrt{2}} & \frac{r_i^x}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

À nouveau, on a

$$(\pi_r^K \boldsymbol{\varphi}_i^k(\mathbf{x}_j)) \cdot \mathbf{e}_l = N_{r_j}^l W_{ri}^k.$$

De cette manière, la projection π^K s'écrit sous forme matricielle $\mathcal{P} = \mathcal{N}_r \mathcal{W}_r + \mathcal{N}_c \mathcal{W}_c$ et $\mathcal{P}_{i_k j_l}$ représente la projection de la $i_k^{\text{ème}}$ fonction de base évaluée au $j_l^{\text{ème}}$ degré de liberté. La seconde partie de la matrice de rigidité évaluée sur les fonctions de base $\boldsymbol{\varphi}_i^k$ et $\boldsymbol{\varphi}_j^l$ vaut donc $\tilde{s}_h^K(\boldsymbol{\varphi}_i^k, \boldsymbol{\varphi}_j^l) = s_K \sum_{m \in \mathcal{M}_K} (\delta_{i_k m_q} - \mathcal{P}_{i_k m_q}) (\delta_{j_l m_q} - \mathcal{P}_{j_l m_q})$

car les fonctions de base ne sont non nulles que sur le degré de liberté associé, et la matrice élémentaire de stabilisation s'écrit donc

$$\tilde{\mathcal{S}}_h^K = s_K (\bar{\mathcal{I}}_d - \mathcal{P})^T (\bar{\mathcal{I}}_d - \mathcal{P}).$$

Finalement, la matrice élémentaire \mathcal{A}^K s'exprime sur chaque élément K selon

$$\mathcal{A}^K = |K| \mathcal{W}_c^T \hat{C} \mathcal{W}_c + s_K (\bar{I}_d - \mathcal{P})^T (\bar{I}_d - \mathcal{P}). \quad (3.24)$$

Enfin, le second membre élémentaire se calcule simplement sur chaque maille en appliquant la formule (3.12) aux fonctions de base de sorte que

$$\mathcal{L}_{i_k}^{u,K} = \begin{cases} \omega_i^K \mathbf{f}(V_i) \cdot \mathbf{e}_k + \omega_i^{\partial K} \mathbf{t}_N(V_i) \cdot \mathbf{e}_k & \text{si } V_i \text{ est un nœud de Neumann,} \\ \omega_i^K \mathbf{f}(V_i) \cdot \mathbf{e}_k & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.25)$$

où les coefficients ω_i^K et $\omega_i^{\partial K}$ ont été définis sur la figure 3.2.

Calcul des contraintes et des écarts

Une fois le système linéaire résolu, les valeurs de \mathbf{u}_h sur les degrés de liberté sont connues. Sans expression pour les fonctions de base, il n'est cependant pas possible de reconstruire \mathbf{u}_h dans la cellule pour calculer la contrainte par la loi $\hat{\sigma}_{\mathbf{u}_h}^e = \hat{C} \hat{\epsilon}_{\mathbf{u}_h}$. La meilleure information que l'on puisse obtenir est la déformation de la projection de la solution $\hat{\epsilon}(\pi^K \mathbf{u}_h) = \mathcal{W}_c^K \mathcal{U}^K$ où la matrice \mathcal{W}_c^K est définie par (3.21) et \mathcal{U}^K est le vecteur stockant les valeurs calculées de \mathbf{u}_h sur la maille K . Cette approximation du tenseur des déformations peut être interprétée comme en étant une valeur moyenne sur la maille. On peut alors en déduire une valeur moyenne de la contrainte sur la maille selon $\hat{\sigma}^e(\pi^K \mathbf{u}_h) = \hat{C} \hat{\epsilon}(\pi^K \mathbf{u}_h)$. Les déformations et contraintes approchées sont donc constantes par maille.

À partir de ces deux tenseurs, on peut calculer les grandeurs scalaires représentatives définies dans le chapitre 2 qui sont plus facile à représenter et à comparer : la contrainte équivalente de Von Mises, définie par (2.3) et constante sur chaque maille, ainsi que l'énergie de déformation élastique définie par (2.4) qui est une grandeur définie globalement sur le domaine. En pratique, cette énergie est calculée sur chaque maille puis sommée sur l'ensemble des mailles.

Afin de comparer solutions exactes et solutions numériques, on définit les écarts absolus et relatifs en déplacement $E_{\text{abs}}^{\mathbf{u}}$ et $E_{\text{rel}}^{\mathbf{u}}$ – comparables à des écarts dans l'espace L^2 – ainsi que les écarts absolus et relatifs en contrainte E_{abs}^{σ} et E_{rel}^{σ} – comparables à des écarts dans l'espace H^1 – par les expressions

$$E_{\text{abs}}^{\mathbf{u}} = \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{L^2}, \quad E_{\text{rel}}^{\mathbf{u}} = \frac{\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}\|_{L^2}}, \quad E_{\text{abs}}^{\sigma} = \|\bar{\sigma}^e \pi(\mathbf{u}_h) - \bar{\sigma}^e_{\mathbf{u}}\|_{L^2} \quad \text{et} \quad E_{\text{rel}}^{\sigma} = \frac{\|\bar{\sigma}^e \pi(\mathbf{u}_h) - \bar{\sigma}^e_{\mathbf{u}}\|_{L^2}}{\|\bar{\sigma}^e_{\mathbf{u}}\|_{L^2}}. \quad (3.26)$$

Pour évaluer les intégrales dans les produits scalaires L^2 , la formule d'intégration numérique décrite sur la figure 3.2 est utilisée. Dans le cas de l'erreur en contrainte, la projection de la solution calculée a été utilisée conformément au commentaire du paragraphe précédent.

3.3 Paramétrage et validation numérique

Dans cette section, on achève de définir la méthode numérique en choisissant le paramètre de stabilisation s_K . On effectue également quelques tests simples qui permettent de valider l'implémentation, et de retrouver numériquement l'ordre de convergence du schéma. Dans ce cadre, on utilise différentes familles de maillages représentées sur la figure 3.4, chacune d'entre elles comprenant des maillages plus ou moins fins.

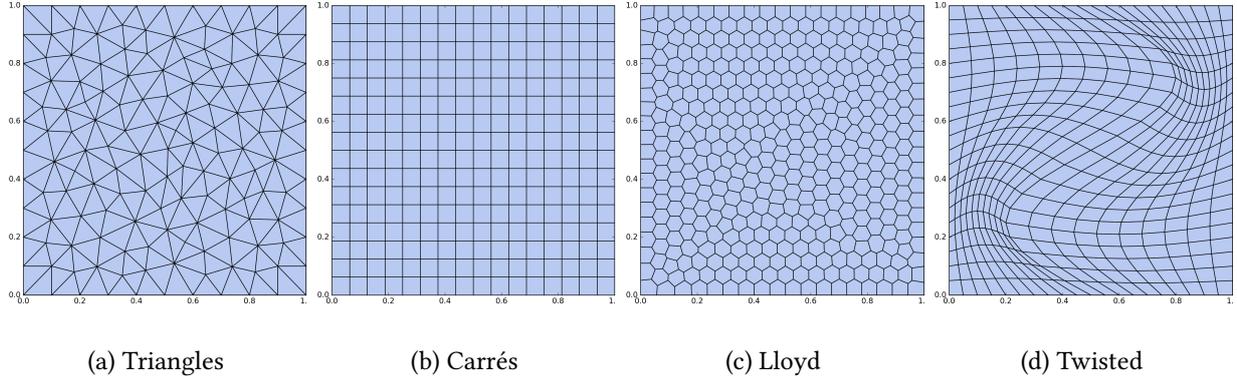


FIG. 3.4 : Familles de maillages du carré unité 2D utilisées dans les tests numériques.

Dégénérescence en éléments finis Avant toute chose, un moyen relativement simple de contrôler partiellement l'implémentation de la méthode consiste à utiliser un maillage triangulaire. Sur ce type d'éléments, l'espace d'approximation V_h^K est réduit à \mathbb{P}_1^d , et les fonctions de V_h^K sont donc égales à leur projection par π^K . Par conséquent, la forme bilinéaire de stabilisation est nulle. Dans ce cas particulier, la matrice des éléments virtuels est *rigoureusement* identique à celle qui aurait été obtenue par la méthode des éléments finis P1. Il est alors possible de vérifier le calcul des coefficients de la matrice de rigidité en utilisant un code éléments finis tiers. Des comparaisons ont été effectuées avec le logiciel FreeFem++ [Hec12], et, en dehors de faibles écarts pouvant s'expliquer par un traitement différent des conditions aux limites, les résultats obtenus avec le code éléments virtuels concordent avec ceux du code éléments finis.

3.3.1 Choix du coefficient de stabilisation

Dans la méthode des éléments virtuels, le choix de la stabilisation est à la fois important et secondaire. Secondaire, parce que la consistance de la méthode est assurée par la première partie de la forme bilinéaire approchée : la précision reste assurée tant que la stabilisation est du même ordre de grandeur que la partie consistante (un coefficient de stabilisation démesurément grand ou petit conduit à des instabilités dans la solution). Important, car un choix réfléchi permet d'assurer certaines propriétés supplémentaires. Par exemple, un choix différent de celui effectué pour \tilde{s}_h^K dans l'équation (3.10) peut améliorer la méthode dans le cas où l'ordre polynomial d'approximation est élevé [BDR17]. À l'ordre un, il semblerait que l'amélioration soit trop faible et injustifiée au regard de la difficulté à implémenter une formulation différente pour \tilde{s}_h^K , par rapport à l'expression de base qui est elle simple à calculer [Mas18]. Tout en restant sur le choix standard pour \tilde{s}_h^K , il reste la possibilité d'ajuster le coefficient réel s_K pour modifier le comportement du terme de stabilisation. En particulier, on cherche ici à conserver la stabilité de la méthode sur des maillages *d'aspect ratio* défavorable, c'est-à-dire dont les mailles sont particulièrement allongées. Plusieurs coefficients de stabilisation ont été proposés dans la littérature, reposant sur l'idée heuristique que celui-ci doit correspondre à l'ordre de grandeur des coefficients de \hat{C} et/ou des caractéristiques du maillage. On propose de comparer ici les trois approches suivantes utilisées pour la mécanique :

1. Le coefficient est choisi dans [GTP14] de manière à ce que, pour des déformations uniformes, l'énergie exacte calculée par la forme a^K et l'énergie approchée calculée par la forme \tilde{s}_h^K soient comparables pour les fonctions dont la projection $\pi^K \mathbf{v}$ est nulle. Pour satisfaire cette condition, le coefficient s_K

est défini par

$$s_K = \frac{|K|\text{tr}(\hat{C})}{\text{tr}(\mathcal{N}_c^T \mathcal{N}_c)}.$$

2. Les auteurs de [ANR17] remarquent que le coefficient précédent est instable vis-à-vis de la distorsion : l'écart entre la solution exacte et la solution calculée se détériore lorsque le ratio d'aspect des mailles augmente, c'est-à-dire lorsque celles-ci « s'aplatissent ». Pour corriger cette mauvaise propriété, les auteurs proposent l'expression

$$s_K = \frac{|K|\text{tr}(\hat{C})\text{tr}((\mathcal{N}_c^T \mathcal{N}_c)^{-1})}{9}.$$

3. En parallèle, les auteurs de [BLM15], dans le cadre plus général de problèmes non élastiques, proposent un coefficient dont la simplification au régime élastique linéaire donne

$$s_K = h_K^{d-2} \max |C_{ijkl}|$$

Afin de tester la stabilité de ces coefficients vis-à-vis de la distorsion, on considère trois maillages de base en deux dimensions de forme carrée, Lloyd ou twisted d'environ 400 éléments chacun. Les maillages triangulaires ne sont pas considérés puisque la forme de stabilisation est nulle sur les mailles triangulaires. Ces maillages sont allongés en multipliant l'ensemble de leurs coordonnées horizontales x par un facteur m_x variant entre 1 et 50, le nombre de mailles restant inchangé, voir par exemple la figure 3.5 pour une illustration sur le maillage de Lloyd.

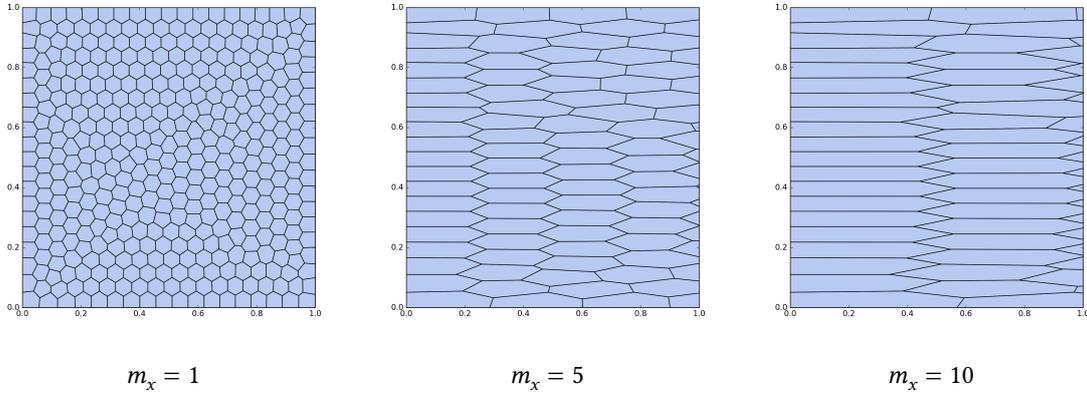


FIG. 3.5 : **Maillages de Lloyd distordus** en multipliant la coordonnée x des sommets par un facteur m_x . Pour que les cellules restent visibles sur les maillages distordus, seul le rectangle $[0, 1] \times [0, 1]$ du domaine complet $[0, m_x] \times [0, 1]$ est représenté.

Le cas mécanique considéré ici est fréquemment utilisé pour la validation de codes éléments finis [FV05]. On considère un domaine carré de côtés de longueur unitaire représenté sur la figure 3.6, constitué d'un matériau isotrope homogène. Dans le cadre des déformations planes, le tenseur des rigidités \hat{C} est donné par l'équation (2.9). Les coefficients élastiques sont fixés à $E = 5$ GPa et $\nu = 0.3$. Pour ce problème, on suppose que le champ de déplacement est donné par $\mathbf{u} = (0.01xy, -0.02xy)$ ce qui permet de calculer analytiquement la force constante appliquée $\mathbf{f} = (0.02(G + \lambda), -0.01(G + \lambda))$ et les conditions aux limites à imposer, représentées sur la figure 3.6.

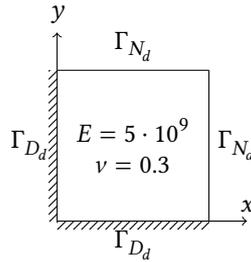


FIG. 3.6 : Cas de calcul élastique en dimension 2 avec représentation des conditions aux limites et des paramètres mécaniques.

L'erreur en déplacement E_{rel}^u en fonction du coefficient de distorsion m_x est représentée sur la figure 3.7. Le second coefficient, introduit pour améliorer le premier sur de tels maillages, est effectivement plus stable sauf sur le maillage carré, ce problème ayant été relevé par les auteurs et relié à des effets de symétries. Sur ce maillage carré, l'erreur d'ailleurs est d'un ordre de grandeur plus faible que sur les deux autres, pour chacun des trois coefficients. Le troisième choix de coefficient permet d'obtenir de bons résultats sur les trois familles de maillages et sera donc celui utilisé, sauf mention spécifique, dans les autres cas numériques.

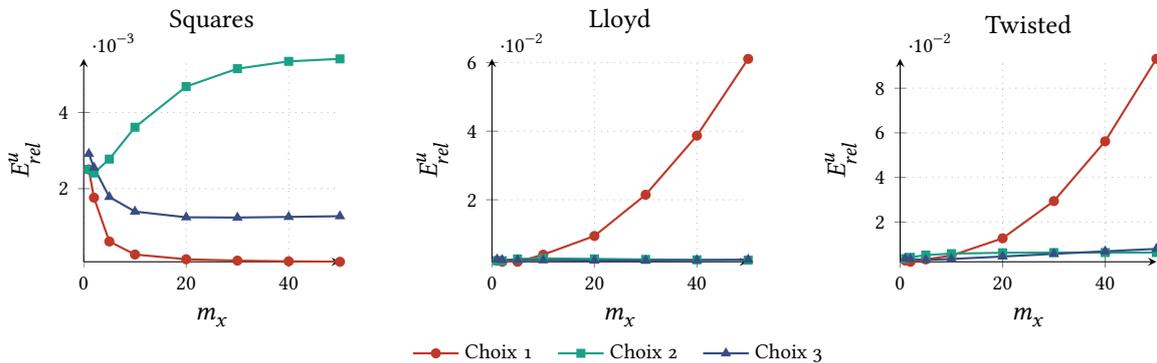


FIG. 3.7 : Écart L2 en déplacement en fonction de la distorsion du maillage pour les trois coefficients de stabilisation s_K . Le coefficient 3 semble être plus robuste que les deux autres.

Patch test La forme bilinéaire approchée étant à présent totalement déterminée, une autre propriété de la méthode peut être utilisée pour contrôler l'implémentation. Lorsque le champ de déplacement \mathbf{u} exact est composé de fonctions \mathbb{P}_1^d , l'erreur numérique du schéma doit être nulle (aux erreurs machines près), et ce quel que soit le maillage considéré. Numériquement, cette propriété est bien respectée sur les différents maillages bidimensionnels représentés plus haut. De la même manière, le patch test est satisfait sur des maillages tridimensionnels de différentes nature, voir par exemple la figure 3.8 pour une illustration sur un maillage Voronoï de la solution linéaire $\mathbf{u} = 10^{-2}z\mathbf{e}_z$. Même si ceci ne permet pas d'affirmer que le code est exempt de problèmes, une erreur dans l'assemblage, dans les calculs géométriques ou dans ceux des projections par exemple aurait été directement détectée et aurait stoppé la poursuite des tests numériques avant sa résolution.

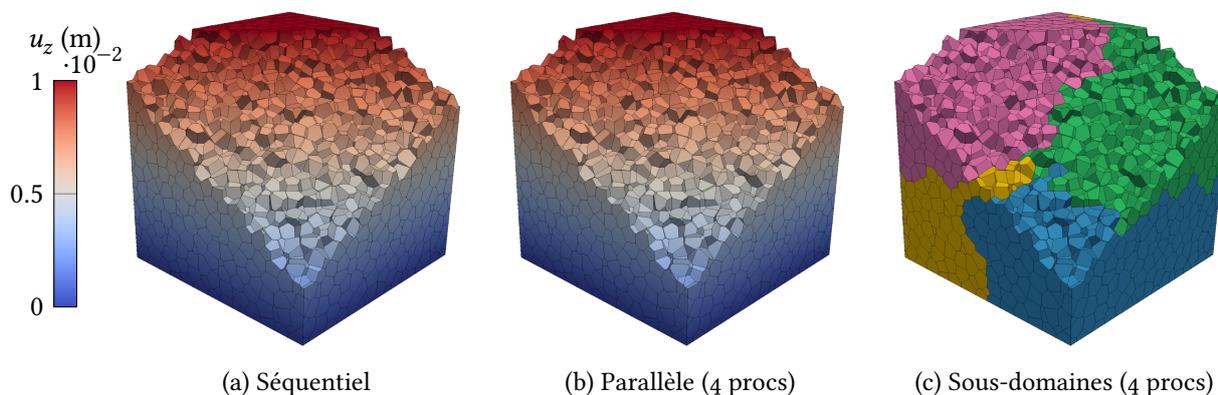


FIG. 3.8 : **Patch test** sur un maillage de Voronoï 3D. La solution analytique, linéaire, vaut $\mathbf{u} = 10^{-2}z\mathbf{e}_z$ et les coefficients élastiques sont $E = 1$, $\nu = 0.25$. Les figures (a) et (b) représentent le champ de déplacement u_z . La figure (c) représente le partitionnement utilisé pour la simulation parallèle. En séquentiel comme en parallèle, l'écart $E_{\text{abs}}^{\mathbf{u}}$ entre la solution calculée et la solution exacte est de l'ordre de 10^{-16} .

3.3.2 Convergence en espace

Toujours sur les familles de maillages bidimensionnels et avec le cas mécanique défini précédemment (figure 3.6), on représente pour chaque famille de maillage les écarts relatifs en déplacement et en contrainte en fonction du diamètre maximal des éléments du maillage sur la figure 3.9. En échelle logarithmique, les courbes sont des droites dont le coefficient directeur est lié à l'ordre de convergence de la méthode. On constate que les coefficients directeurs de chaque droite sont identiques et égaux à la valeur attendue : deux en déplacement et un en contrainte [BBM13].

Pour effectuer la même étude en trois dimensions, les familles de maillages représentées sur la figure 3.10 sont considérées. Une fois encore, différents niveaux de raffinement sont disponibles pour chacune de ces familles. Le cas d'élasticité homogène est étendu de la même manière que dans [Mar12] en prenant $\mathbf{u} = (0.01xyz, -0.02xyz, -0.01xyz)$. Le second membre, cette fois non constant, a alors pour expression $\mathbf{f} = 0.01(G + \lambda)(y + 2z, x - z, 2x - y)$. Les conditions aux limites du cas bidimensionnel sont étendues aux faces, et on adopte pour la troisième dimension une condition de Dirichlet sur la face $z = 0$ et une condition de Neumann sur la face $z = 1$: on impose donc un déplacement fixé $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur les faces $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ et une contrainte fixée (calculée à partir de la solution exacte) sur les plans $x = 1$, $y = 1$ et $z = 1$. Les courbes d'erreur en fonction du pas du maillage pour les maillages tridimensionnels décrits sur la figure 3.10 sont tracées sur la figure 3.11. Les valeurs des coefficients directeurs sont à nouveau celles attendues.

3.4 Observations supplémentaires sur la méthode

Dans la section précédente, quelques cas numériques de base ont permis d'achever le paramétrage de la méthode et de retrouver numériquement l'ordre de convergence de celle-ci. On cherche à présent à illustrer quelques propriétés moins classiques, mais néanmoins désirables. Ces propriétés sont présentées plutôt dans un esprit qualitatif que dans un cadre formel.

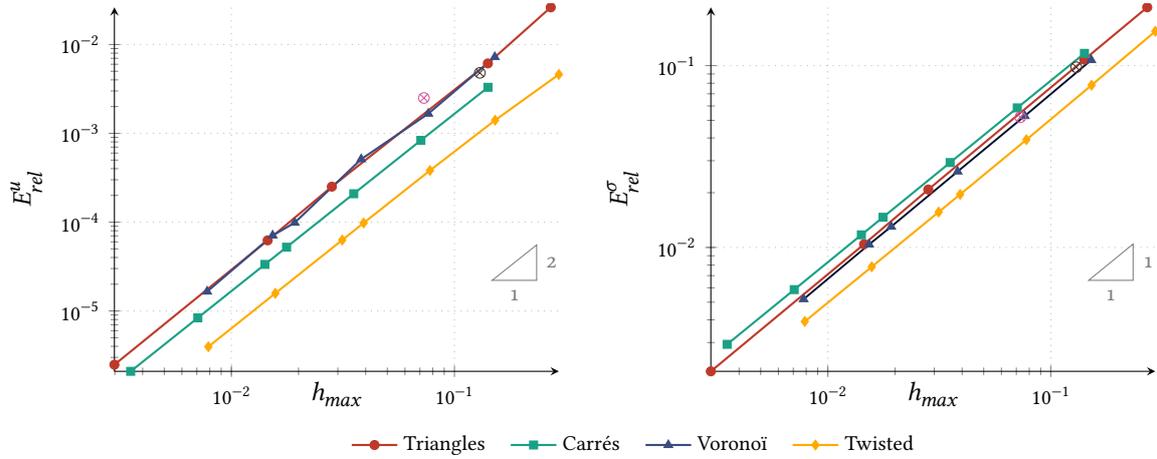


FIG. 3.9 : **Courbes de convergence** sur différents maillages pour le cas du carré homogène. Toutes les familles de maillages présentent les ordres attendus. Pour les deux points solitaires, voir section 3.4.1.

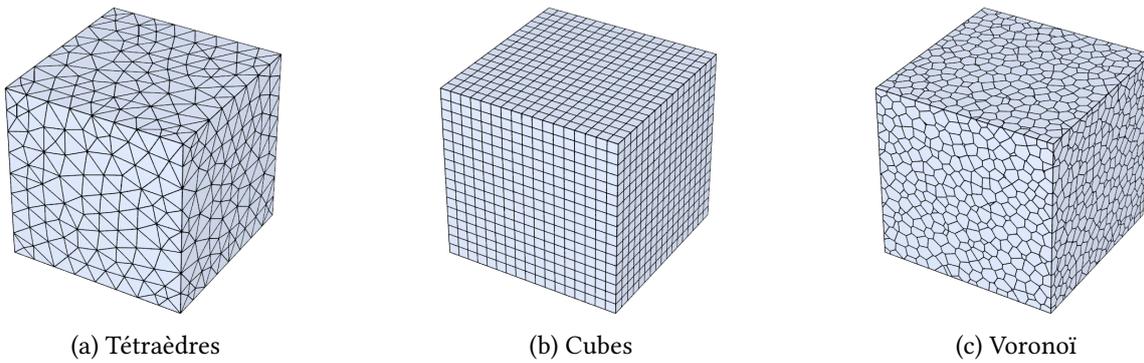


FIG. 3.10 : **Familles de maillages** du cube unité 3D utilisées dans les tests numériques. Les maillages de Voronoï sont générés à l'aide de l'outil Neper [QDB11].

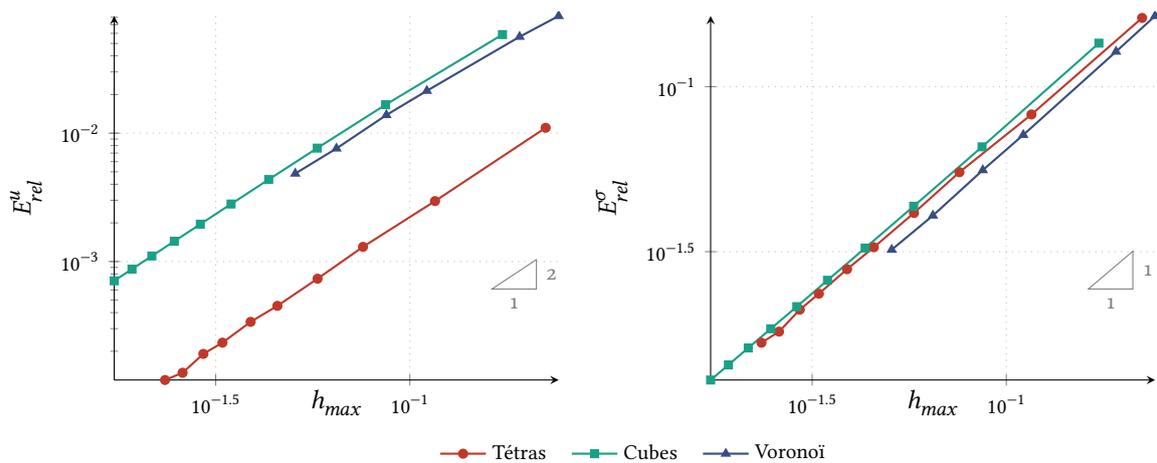


FIG. 3.11 : **Courbes de convergence** sur différents maillages pour le cas du cube homogène. Toutes les familles de maillages présentent les ordres attendus.

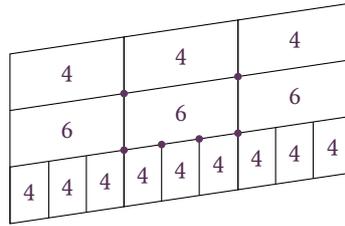


FIG. 3.12 : **Zoom sur la non conformité du maillage.** Chaque maille est naturellement traitée comme un polygone à 4 ou 6 sommets.

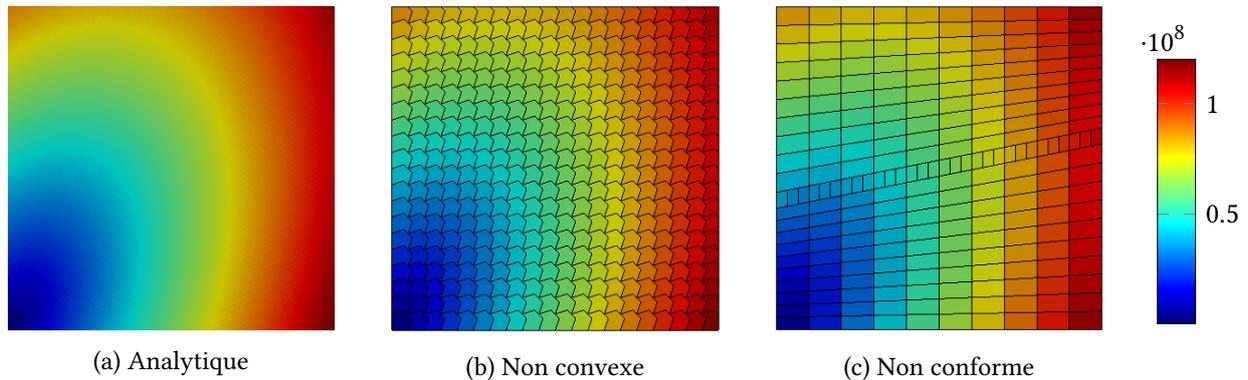


FIG. 3.13 : **Contrainte de Von Mises** calculée sur des maillages non convexes et non conforme. Les écarts par rapport à la solution exacte sont reportés sur la figure 3.9.

3.4.1 Traitement de maillages particuliers

Toujours dans le cas du problème homogène bidimensionnel, on considère des maillages moins classiques : un maillage non convexe et un maillage non conforme. On note que le maillage non conforme s'utilise de manière naturelle en traitant les mailles voisines de la bande centrale comme des polygones à 6 sommets (voir figure 3.12) : il n'y a pas de traitement particulier des *hanging nodes* comme en éléments finis classiques, ce qui laisse la possibilité d'effectuer facilement du raffinement local.

Après résolution du problème sur ces maillages, on représente la contrainte équivalente de Von Mises définie par l'équation (2.3) sur les figures 3.13b et 3.13c. La figure 3.13a représente à titre de comparaison la contrainte de Von Mises calculée à partir de la solution analytique. La valeur des champs calculés est qualitativement correcte sur les deux maillages. À défaut d'effectuer une véritable étude de convergence en espace, les couples (h_{max}, E_{rel}^u) et $(h_{max}, E_{rel}^\sigma)$ calculés sur ces exemples permettent de situer les points sur le graphique 3.9, en rose pour le maillage non convexe et en marron pour le maillage non conforme. On observe alors que pour chacun des graphiques, ces deux points se situent quasiment sur les courbes obtenues avec les autres types de maillages. L'ordre de grandeur de l'erreur n'est donc pas fortement pénalisé par la forme singulière de ces maillages. Notons également que ces maillages sont relativement sobres par rapport à ceux usuellement utilisés pour illustrer la grande tolérance des VEM, que l'on trouvera par exemple dans [PG15].

3.4.2 Comparaison aux éléments finis

Pour positionner la méthode par rapport à celle des éléments finis, on considère un cas bidimensionnel de type poutre, ce qui est courant dans la communauté des mécaniciens, schématisé sur la figure 3.14. Fixée par son extrémité gauche, elle subit une flexion parabolique appliquée sur son extrémité droite. Pour

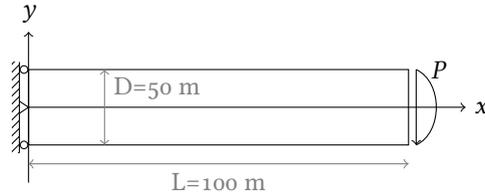


FIG. 3.14 : **Schématisme** d'un cas poutre plane, avec chargement parabolique. Ce type de problèmes admet une distribution plane de contraintes.

ce type de problèmes, une approche en contraintes planes peut être adoptée. Le tenseur des rigidités du matériau, homogène de constantes mécaniques $E = 210$ GPa et $\nu = 0.3$, est donc donné par l'équation (2.10). Les caractéristiques géométriques sont $L = 500$ m et $D = 50$ m, et permettent de calculer le moment d'inertie selon la relation $I = \frac{D^3}{12}$. Le chargement P parabolique, maximal de valeur $p = -10^{-4}$ en $y = 0$ et nul en $y = \pm \frac{D}{2}$, s'écrit

$$P = \frac{-F}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad \text{où} \quad F = -\frac{2}{3} p D = \frac{10^6}{3}$$

et est appliqué dans la direction \mathbf{e}_y . La solution analytique de ce problème [TG51] est donnée par

$$u_x = \frac{Fy}{6EI} \left((6L - 3x)x + (2 + \nu)(y^2 - \frac{D^2}{4}) \right), \quad u_y = \frac{-F}{6EI} \left(3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right),$$

et permet de calculer les déformations et les contraintes associées à cette configuration. Pour comparer la méthode à celle des éléments finis, la poutre est maillée avec des éléments rectangulaires ou triangulaires. Dans les deux cas, deux familles de maillages sont générées : une famille de maillages peu allongés, de ratio (1 : 2), et une famille de maillages très allongés, de ratio (1 : 1250), représentés sur la figure 3.15.

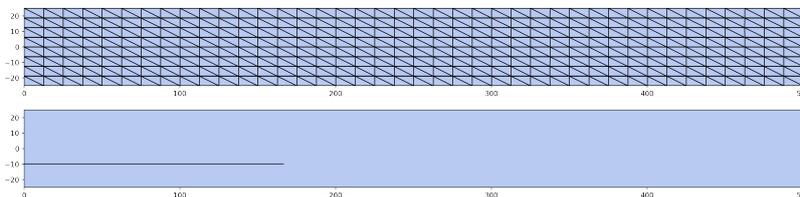


FIG. 3.15 : **Exemples de maillages au ratio 1 : 2 (haut) et au ratio 1 : 1250 (bas)**. Le maillage allongé est constitué de 3×375 rectangles, mais seul l'un d'entre eux est représenté pour obtenir une illustration visible.

Le déplacement vertical de la fibre neutre (l'axe $y = 0$) de la poutre, aussi appelé flèche, est représenté pour quelques maillages rectangulaires sur la figure 3.16. La légende indique le nombre d'éléments dans la direction \mathbf{e}_x . Les deux méthodes convergent vers la solution exacte lorsque la taille des mailles diminue. Sur

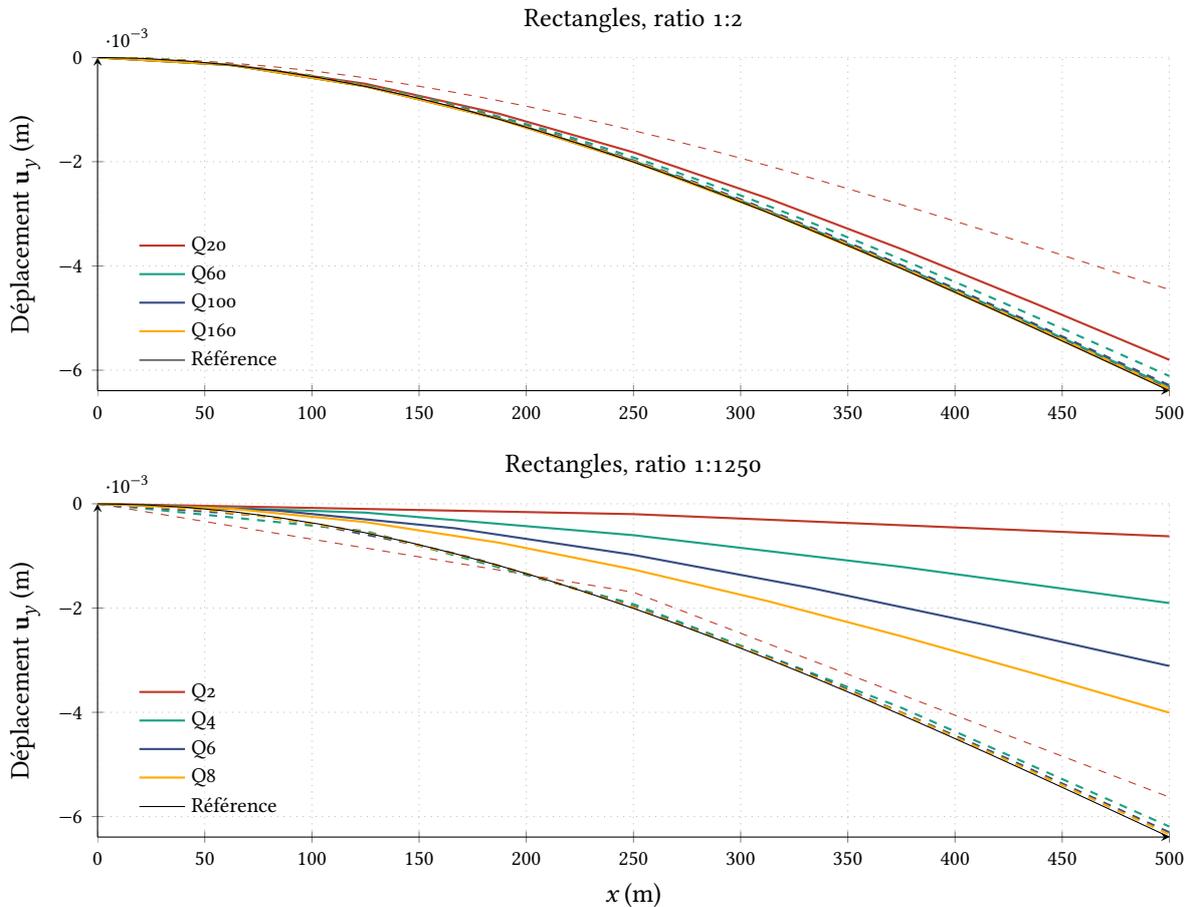


FIG. 3.16 : **Comparaison des éléments finis P_1 (traits pleins) et des éléments virtuels (tirets)** sur les maillages quadrangulaires (Q), la légende indiquant le nombre de mailles dans la direction e_x . Sur les maillages allongés, les éléments virtuels convergent bien plus rapidement.

la famille de maillages peu allongés, les résultats sont quasiment identiques pour les deux méthodes, excepté sur les maillages les plus grossiers où les éléments virtuels donnent une moins bonne approximation. En revanche, sur les maillages fortement allongés, le résultat des éléments finis est largement plus éloigné de la solution exacte, et cette méthode converge lentement. La méthode des éléments virtuels, elle, donne un bien meilleur résultat même si le faible nombre d'éléments en x entraîne une mauvaise interpolation visible au niveau des x faibles. Cette figure illustre une seconde fois l'importance du terme de stabilisation, et confirme que le choix effectué dans la section 3.3.1 permet d'avoir une méthode robuste vis-à-vis de la déformation du maillage.

Sur les maillages triangulaires, comme expliqué précédemment, les éléments virtuels dégénèrent en éléments finis ce qui rend la comparaison inutile. En revanche, on propose ici de tirer à nouveau parti de la flexibilité autorisée dans les maillages pour améliorer la solution. Le maillage de base, constitué de triangles, est transformé en introduisant des nœuds supplémentaires au centre des arêtes comme schématisé sur la figure 3.17. Ainsi, les éléments ne sont plus vus comme des triangles mais comme des hexagones. En conséquence, l'espace d'approximation n'est plus réduit à P_1^d et le terme de stabilisation n'est plus identiquement nul. Cela permet d'obtenir des résultats différents des éléments finis, représentés sur la figure



FIG. 3.17 : **Transformation du type des cellules.** En ajoutant des sommets supplémentaires, chaque élément est considéré comme un hexagone à six côtés et non comme un triangle à 3 côtés.

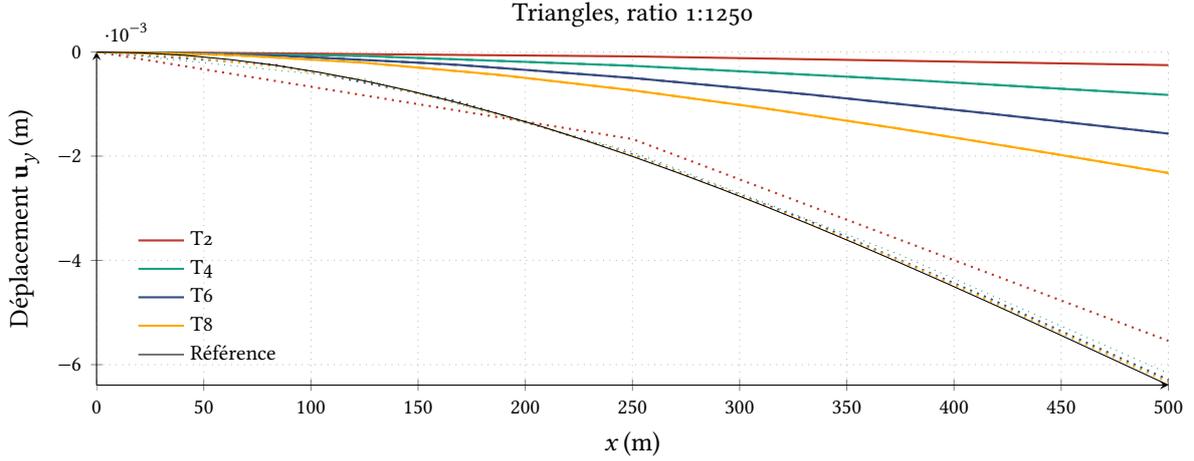


FIG. 3.18 : **Comparaison des éléments finis P1 (traits pleins), des éléments virtuels (tirets), et des éléments virtuels avec hexagones (pointillés)** sur les maillages triangles (T), la légende indiquant le nombre de mailles dans la direction \mathbf{e}_x . Sans modification du maillage, traits pleins et tirets sont confondus. La modification en hexagones permet d'améliorer les résultats.

3.18 pour les maillages triangles allongés. Évidemment, cette manipulation augmente le nombre de degrés de liberté, mais elle permet d'obtenir une solution numérique de bien meilleure qualité, tout en conservant un ordre d'approximation polynômial égal à un. On aurait d'ailleurs pu se contenter de n'ajouter qu'un nœud par triangle, par exemple sur les arêtes diagonales. Avec les éléments finis, un moyen d'améliorer le résultat aurait été de considérer des éléments P2, ce qui aurait également augmenté le nombre de degrés de liberté. Cet exemple illustre donc à nouveau une utilisation possible de la liberté sur les maillages offerte par la méthode.

3.4.3 Comportement à la limite incompressible

Une autre propriété intéressante des éléments virtuels est leur comportement lorsque le matériau est à la limite du domaine incompressible. Les matériaux presque incompressibles se caractérisent par un coefficient de Poisson ν tendant vers $\frac{1}{2}$, ou, de manière équivalente, par un coefficient λ tendant vers $+\infty$. Pour comprendre ce que cela implique, la forme bilinéaire $a^\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \overline{\overline{\mathbf{C}}} \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_u : \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_v$ du problème élastique est réécrite sous sa forme équivalente

$$a^\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2G \int_\Omega \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_u : \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_v + \lambda \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{u}) \operatorname{div}(\mathbf{v}). \quad (3.27)$$

Pour que l'énergie reste bornée lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, il est nécessaire que $\operatorname{div}(\mathbf{u}) \rightarrow 0$. Cela est problématique en éléments finis classiques sur des triangles ou des rectangles car les seuls éléments appartenant

à l'espace d'approximation *et* dont la divergence est nulle sont des constantes, voir [BS08, chap. 11] ou [PW09]. À cause de cette dégénérescence de l'espace d'approximation, les résultats numériques obtenus sont fortement détériorés, et on emploie le terme *locking* pour qualifier ce phénomène. Une autre manière de voir les choses consiste à examiner les estimations d'erreurs habituellement établies pour les méthodes numériques, telle que celle formulée pour les éléments virtuels dans le lemme 3.1 : la constante contrôlant l'erreur explose lorsque les paramètres physiques du problème deviennent trop grands, et l'erreur entre la solution exacte et la solution numérique n'est plus contrôlée. Par ailleurs, des phénomènes de type locking peuvent également apparaître pour la même raison lors de la résolution de problèmes poroélastiques, selon les valeurs prises par le coefficient c_0 , la matrice de mobilité $\bar{\kappa}$ et le pas de temps. C'est pourquoi il est nécessaire d'être averti de l'existence de cette artéfact numérique et des éventuelles solutions à mettre en place.

Il a été remarqué qu'avec la méthode des éléments virtuels et dans le cas du problème élastique, deux paramètres peuvent être ajustés de manière à atténuer ce problème. Sans fournir d'explication rigoureuse, la suite de cette section expose ces observations. Le cas illustratif est un problème de cavité entraînée issu de la thèse [Lem13]. Dans un domaine carré de taille unitaire, un déplacement est imposé sur le bord supérieur $y = 1$ par la condition de Dirichlet $\mathbf{g}_D = (1, 0)$ tandis que les trois autres bords sont fixés ($\mathbf{g}_D = \mathbf{0}$). Le second membre \mathbf{f} est nul, et les coefficients élastiques ont pour valeur $E = 1000$ Pa et $\nu = 0.4999$. La solution de ce problème n'est analytiquement pas connue. Une solution de référence est donc calculée sur un maillage triangulaire très fin, de plus de cent mille sommets. En dehors de ce maillage de référence, les discrétisations utilisées sont décrites dans le tableau 3.1. Le nombre d'inconnues est volontairement faible

	Triangles	Carrés	Voronoi
# sommets	481	441	402
# cellules	896	400	200
h_{max}	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$7.07 \cdot 10^{-2}$	$9.17 \cdot 10^{-2}$

TAB. 3.1 : Maillages utilisés pour la mise en évidence du locking sur le cas issu de [Lem13].

pour que la résolution du maillage ne fasse pas disparaître l'effet de locking. On tente également d'avoir un diamètre h comparable sur les différents maillages. Les maillages sont comparés en représentant l'une ou l'autre des variables calculées suivantes :

- la composante u_x du déplacement en fonction de y sur la ligne verticale $x = \frac{1}{2}$;
- la composante u_y du déplacement en fonction de x sur la ligne horizontale $y = \frac{1}{2}$.

Augmentation du nombre de degrés de liberté par maille Formellement, il suffit pour éviter le locking d'utiliser un espace d'approximation local contenant des fonctions à divergence nulle et non constantes. En éléments virtuels, plus l'élément considéré a de sommets, plus la taille de l'espace d'approximation local est grande. Il semble que dans ce cas, des fonctions de base possédant les propriétés requises existent dans l'espace d'approximation. La figure 3.19 expose le champ de déplacement calculé sur les maillages du tableau 3.1. Sur les deux graphes, on remarque que la solution calculée sur le maillage triangulaire ou sur le maillage carré est de mauvaise qualité, même si leur comportement semble différent : dans le premier cas, la solution a tendance à osciller, tandis que dans le second cas, la solution a tendance à rester constante. Pour la composante u_x du déplacement, le maillage de Voronoï permet d'obtenir une solution numérique nettement plus proche de la référence. C'est plus discutable pour la composante u_y

du champ de déplacement. Le lien entre le nombre de degrés de liberté et le locking est approfondi dans [BLM14, chap. 8] pour la méthode des différences finies mimétiques qui est à l'origine de celle des éléments virtuels. Dans cet ouvrage, les auteurs recommandent l'ajout d'un degré de liberté sur les arêtes lorsqu'elles sont plus de trois à partager un même sommet, sous peine de pâtir du locking. Ici, les sommets des maillages carrés et triangles sont quasiment tous le point de rencontre de plus de trois arêtes (quatre dans le cas des carrés, jusqu'à six dans le cas des triangles). En revanche, pour les maillages de Voronoï, le nombre d'arêtes connectant chaque sommet est en général de trois. L'étude effectuée dans l'ouvrage sus-cité pourrait donc expliquer que le locking soit moins visible sur ce maillage.

Changement du terme de stabilisation Le second paramètre permettant de réduire le phénomène de locking est le coefficient s_K utilisé en facteur de la forme de stabilisation et explicité dans la partie 3.3.1. Jusqu'alors, le choix retenu en deux dimensions était $s_K = \max |C_{ijkl}|$, ce qui équivaut pour le problème d'élasticité isotrope à $s_K = \lambda + 2G$. Lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, le terme de stabilisation devient trop important par rapport au terme de consistance. Une stratégie peut alors consister à borner artificiellement le terme de stabilisation, voire à ne pas tenir compte de la partie en λ : on prend alors $s_K = 2G$ et on représente à nouveau le déplacement \mathbf{u}_y sur la figure 3.20. Puisque le coefficient ne s'applique pas aux maillages triangulaires, seuls les maillages carrés et Voronoï sont testés ici. Pour ces deux maillages, on observe une amélioration significative du résultat lorsque cette technique est utilisée.

Il semblerait qu'on puisse établir un lien entre cette technique et certaines formulations mixtes du problème d'élasticité linéaire utilisées en éléments finis, connues pour éviter le problème de locking. En effet, ne stabiliser que la partie en G revient à écrire sur chaque maille

$$a^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 2G \int_K \bar{\epsilon}(\pi^K \mathbf{u}_h) : \bar{\epsilon}(\pi^K \mathbf{v}_h) + 2G \sum_{i \in \mathcal{M}_K} (\mathbf{u}_h - \pi^K \mathbf{u}_h)(V_i) \cdot (\mathbf{v}_h - \pi^K \mathbf{v}_h)(V_i) + \lambda \int_K \operatorname{div}(\pi^K \mathbf{u}_h) \operatorname{div}(\pi^K \mathbf{v}_h).$$

D'un autre coté, en utilisant une formulation mixte, le problème faible (3.27) peut se réécrire sous la forme

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in (V_g \times L^2(\Omega))$ tels que pour tout $(\mathbf{v}, q) \in (V_0 \times L^2(\Omega))$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2G \bar{\epsilon}_u : \bar{\epsilon}_v + \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\ \int_{\Omega} (p - \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u})) q &= 0. \end{aligned}$$

Pour le discrétiser, on cherche p_h dans un espace de dimension inférieure à celui dans lequel on cherche \mathbf{u}_h . Typiquement, on peut chercher \mathbf{u}_h dans $V_{h,g}$ et p_h dans l'espace des constantes. Dans ce cas, en utilisant la projection L^2 orthogonale π^0 qui vérifie $\int_K p_h = \int_K \pi^0 p_h$, la seconde ligne permet d'obtenir

$$\int_K \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}_h) = \int_K p_h = \int_K \pi^0 p_h = \int_K \lambda \pi^0(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h)).$$

De plus, en réutilisant l'égalité $\operatorname{div}(\mathbf{u}_h) = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u}_h)$, l'expression du projecteur π^K donnée par l'équation (3.16), et la ligne précédente, on montre que

$$\forall \mathbf{v}_h \in V_{h,g}, \quad \int_K \operatorname{div}(\pi^K \mathbf{v}_h) = \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) = \int_K \pi^0(\operatorname{div}(\mathbf{v}_h)).$$

En injectant ce résultat dans la première ligne du système mixte, on obtient finalement

$$\sum_K \int_K 2G \overline{\epsilon_{u_h}} : \overline{\epsilon_{v_h}} + \int_K \lambda \pi^0(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h)) \pi^0(\operatorname{div}(\mathbf{v}_h)) = \sum_K \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h$$

ou de manière équivalente

$$\sum_K \int_K 2G \overline{\epsilon_{u_h}} : \overline{\epsilon_{v_h}} + \int_K \lambda \operatorname{div}(\pi^K \mathbf{u}_h) \operatorname{div}(\pi^K \mathbf{v}_h) = \sum_K \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h.$$

En approchant la forme bilinéaire approchée $\int_K 2G \overline{\epsilon_{u_h}} : \overline{\epsilon_{v_h}}$ sur chaque maille par la procédure des éléments virtuels, on aboutit finalement à la même formulation que celle des éléments virtuels stabilisés par $s^K = 2G$. Pour plus de détails sur le lien entre ces deux approches, voir par exemple [BBM13; NNR18]. Cette méthode rappelle également les techniques de sous intégration utilisées en éléments finis pour réduire le phénomène de locking.

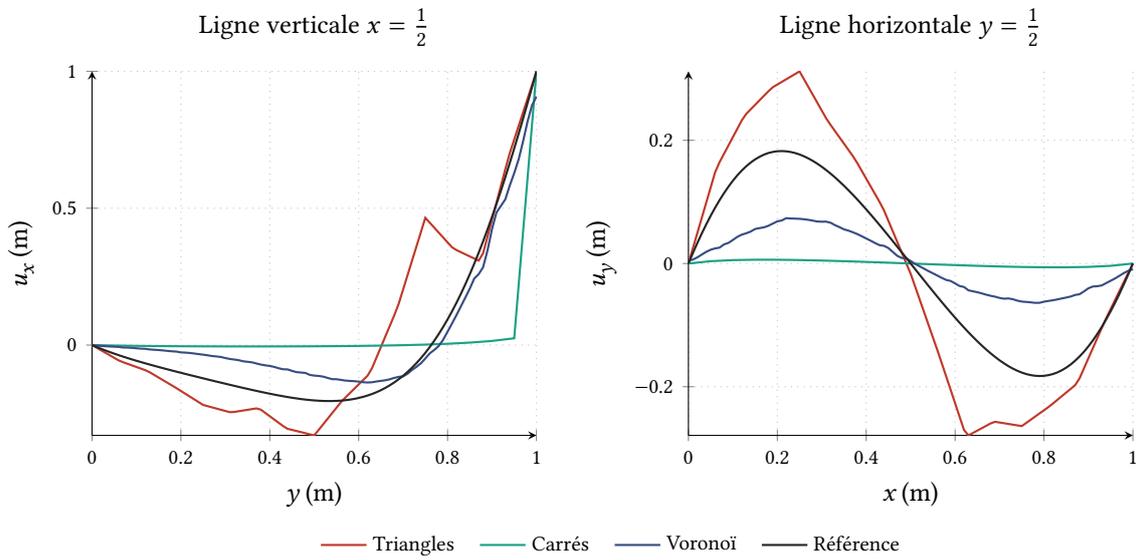


FIG. 3.19 : **Comparaison du déplacement calculé** avec différents maillages pour le problème de cavité entraînée.

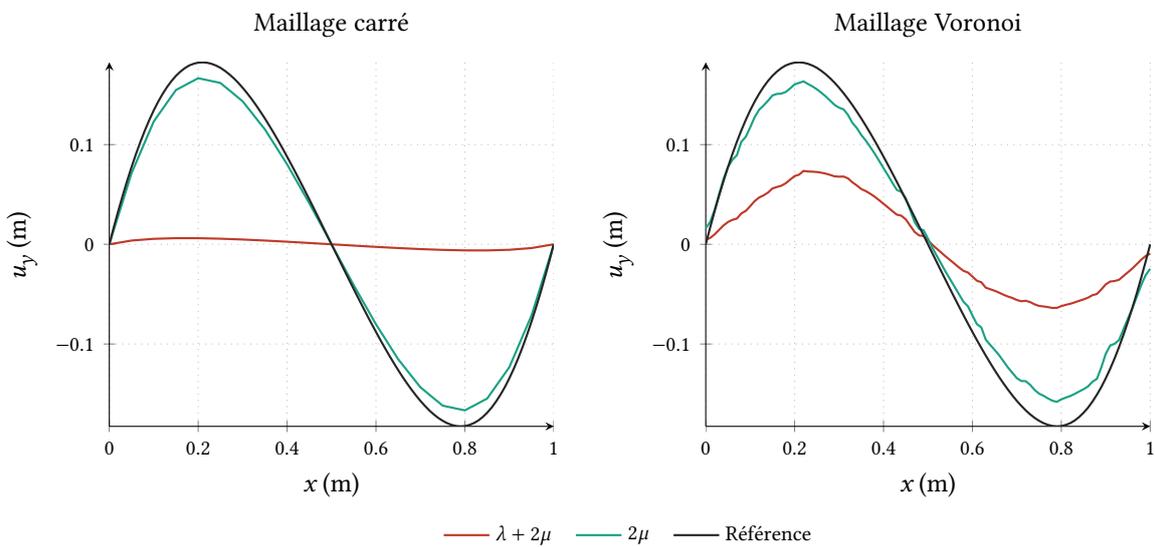


FIG. 3.20 : **Comparaison du déplacement calculé** avec différentes valeurs du coefficient de stabilisation pour le problème de cavité entraînée.