

Ce premier chapitre est consacré à la présentation du modèle stratigraphique considéré dans cette thèse, également décrit dans [18] et [16]. Dans un premier temps, nous ferons un bref état de l'art sur les principaux types de modèles stratigraphiques (§I-1). Puis nous décrirons le modèle considéré dans le cas d'une seule espèce de sédiments (§I-2), en nous intéressant tout d'abord au modèle de transport diffusif et à son origine. Nous tenterons ensuite d'expliquer les phénomènes modélisés par la contrainte sur le taux d'érosion introduite dans le modèle (§I-2.2), puis nous décrirons son couplage avec le modèle diffusif (§I-2.3). Nous terminerons par quelques exemples visant à illustrer le modèle et l'influence des paramètres physiques (§I-2.5). Dans un dernier paragraphe (§I-3), nous étendrons le modèle diffusif sous contrainte de taux d'érosion maximal au cas d'un nombre quelconque de lithologies, pour finir par quelques exemples illustratifs.

I-1 Les modèles stratigraphiques : un état de l'art

De nombreux processus physiques interviennent dans la formation des bassins sédimentaires, et n'ont pas tous lieu sur les mêmes échelles de temps et d'espace. De plus, à une échelle donnée, le mode de répartition des sédiments dans le bassin peut être appréhendé de différentes manières. Généralement, les modèles stratigraphiques sont regroupés en trois classes (voir [52], [29], [30] ou [50] par exemple) :

- les *modèles géométriques*, qui supposent l'existence d'un profil d'équilibre pour la surface des bassins sédimentaires ;
- les *modèles "particulaires"*, qui utilisent les équations de la dynamique des fluides ;
- les *modèles diffusifs*, qui simulent le transport des sédiments par une équation de diffusion.

Le principe des modèles géométriques est le suivant : dans un premier temps, des profils de dépôt sont déterminés par des principes géométriques, puis les processus de sédimentation et d'érosion sont simulés à l'intérieur de ces profils par des lois empiriques (voir par exemple [8], [43], [44]). Ces modèles supposent donc l'existence d'un profil d'équilibre du bassin et ne considèrent pas la dynamique du transport des sédiments. Ils permettent des calculs rapides ainsi que l'utilisation de méthodes d'inversion automatique pour calibrer sur les données les paramètres du modèle comme le niveau de la mer, le socle ou les apports en sédiments ([29], [50]). Toutefois, ces modèles ne sont utilisables qu'en 2D, dépendent fortement de la géométrie de départ choisie ([29]) et ne couplent pas les processus de sédimentation et d'érosion, traités séparément ([52]).

Les modèles particuliers s'appuient sur les équations de Navier-Stokes et visent à décrire le transport des sédiments dans l'eau (rivière, milieu marin) en simulant le déplacement de chaque grain de sédiments dans le fluide (voir par exemple [9], [56], [45] ou [61]). Le dépôt et l'érosion des sédiments sont contrôlés par la vitesse du fluide, la taille des grains... Ces modèles permettent donc de simuler les faciès de façon très détaillée et réaliste sur de petites échelles de temps et d'espace (simulation d'un chenal ou d'un delta en tenant compte de l'influence des vagues par exemple dans [56]). Toutefois, ils nécessitent une connaissance très précise des paramètres régissant le bassin ([29]) et sont souvent très coûteux en temps de calcul (nombreux paramètres). Ils ne sont donc pas utilisés pour des simulations à l'échelle des bassins sédimentaires, mais plutôt pour prédire l'impact des processus géologiques sur l'environnement sur des échelles de temps de l'ordre du jour à la dizaine d'années (ensablement des ports par exemple).

Enfin, les modèles diffusifs se placent à une échelle plus macroscopique et utilisent la conservation de la masse dans le bassin combinée à des lois de transport diffusives en surface. Ces lois ne simulent pas

en détails chaque processus géologique, mais moyennent l'ensemble de ces phénomènes (transport par les rivières, glissements de terrain, effondrements,...). Parmi ces modèles, on peut citer [39], [46], [22], [1], [37], [52], [34], [57] et [29]. Des études ont montré qu'ils offraient une bonne description des processus de sédimentation et d'érosion pour de grandes échelles de temps et d'espace (pas de temps supérieurs à 10^4 ans, pas d'espace supérieur à 1 km environ), c'est-à-dire à l'échelle des bassins. Le lecteur pourra se référer à [39], [37], [52] ou [29].

Le modèle choisi dans DIONISOS est un modèle de type diffusif. Il vise en effet à simuler l'évolution de bassins sédimentaires multi-lithologiques 3D d'une largeur allant de la dizaine à plusieurs centaines de kilomètres, sur plusieurs centaines de milliers d'années à plusieurs dizaines de millions d'années. Pour plus de détails sur les raisons qui ont conduit à ce choix, le lecteur se reportera à la thèse de D. Granjeon [29].

I-2 Modèle monolithologique sous contrainte de taux d'érosion maximal

Nous allons maintenant présenter le modèle stratigraphique étudié dans cette thèse, en nous plaçant tout d'abord dans le cas d'une seule lithologie.

On considère donc un bassin sédimentaire dont on veut reconstruire l'histoire géologique. Plus précisément, on cherche à déterminer l'évolution de l'épaisseur de la couche de sédiments, notée et modélisée comme une fonction du temps $t > 0$ et de $x \in \Omega$, où on a noté $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ ou 2) l'extension horizontale du bassin supposée fixe (schéma I.1). Pour cela, on suppose connues les caractéristiques suivantes du bassin :

- la position de la surface du socle du bassin sur lequel reposent les sédiments, prise à une hauteur $H(x, t)$ par rapport à un niveau de référence, et dont les variations traduisent les effets de la tectonique ; ainsi $h + H$ représente la *topographie* du bassin et donne la coordonnée verticale de la surface du bassin ;
- les variations du niveau de la mer, noté $H_m(t)$, pris par rapport au même niveau de référence que le socle ;
- les apports de sédiments aux frontières et la production *in situ* dans le bassin.

Par la suite, nous noterons $b := H_m(t) - (h + H)(x, t)$ la *bathymétrie*, dont le signe caractérise l'environnement marin ou continental.

Etant donné qu'il ne s'agit pas de la difficulté principale du problème, la compaction n'est pas prise en compte ici, et on considère donc que la porosité des sédiments est nulle. Pour que le modèle soit complet, il faut donc maintenant définir les lois régissant le transport des sédiments à la surface du bassin.

I-2.1 Modèle diffusif monolithologique

Le transport des sédiments à la surface du bassin est un des processus majeurs intervenant dans le remplissage des bassins sédimentaires. Comme nous l'avons vu précédemment, il peut prendre plusieurs formes. On se place ici sur de grandes échelles de temps et d'espace, et les équations choisies pour le transport doivent donc être valables sur de telles échelles.

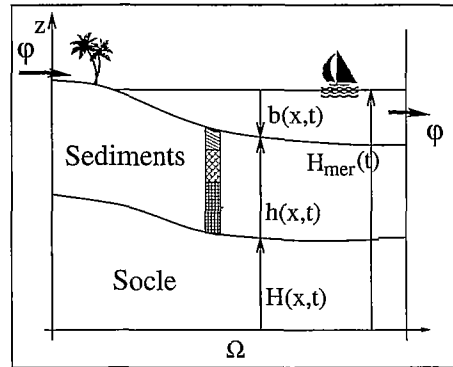


Figure I.1 : Bassin sédimentaire 2D

Origine et validation du modèle de transport diffusif

Le modèle de transport utilisé dans DIONISOS est un modèle empirique dans la mesure où il étend à de grandes échelles des lois de transport établies à petite échelle. Nous allons ici résumer brièvement l'origine de cette équation en nous appuyant sur les travaux de D. Granjeon (voir [29] et [30]).

On se place tout d'abord à l'échelle d'un cours d'eau, et on suppose que l'écoulement de l'eau atteint un régime d'équilibre. L'énergie motrice due à la gravité est donc entièrement dissipée par le frottement de l'eau contre le sol, d'où :

$$\tau = \rho g d S,$$

où on a noté τ la contrainte de cisaillement induite par l'écoulement de l'eau, ρ la masse volumique de l'eau, g l'accélération gravitaire, d la profondeur du cours d'eau et S sa pente. Pour calculer les forces de cisaillement, on utilise ici l'équation de Chezy :

$$\tau \sim u^2 = C^2 d S,$$

où u est la vitesse d'écoulement et C le coefficient de Chézy (donné par la formule de Strickler). Pour calculer la capacité de transport en sédiments Q_s du cours d'eau, on utilise ensuite la formule de Meyer-Peter et Müller (1948) :

$$Q_s \sim (\tau - \tau_c)^{3/2}$$

où τ_c représente la contrainte de cisaillement critique à partir de laquelle débute l'érosion. Le couplage de ces différentes équations permet ensuite d'obtenir l'équation de transport suivante :

$$Q_s = u_e Q_e S$$

où u_e est un coefficient de proportionnalité et Q_e le flux d'eau s'écoulant dans la rivière. La pente du cours d'eau étant supposée proportionnelle au gradient de la topographie, la conservation de la masse des sédiments donne finalement le modèle diffusif suivant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \text{div}[u_e Q_e \nabla(h + H)].$$

Une équation diffusive de ce type où le flux est proportionnel à la pente a été beaucoup utilisée pour modéliser le transport de sédiments sur de grandes échelles, et ces études ont contribué à valider ce modèle

empirique. On peut citer par exemple [46] et [22] pour la géodynamique, ou encore [39], [52], [34] et [30] pour la géologie. Ainsi, il est généralement admis qu'une équation de diffusion, prenant ou non en compte le flux d'eau, permet de bien simuler l'évolution globale des reliefs sur de grandes échelles de temps et d'espace : elle ne permet pas de simuler en détails chaque processus géologique, mais restitue convenablement la moyenne de ces processus. Un modèle de transport diffusif a donc été utilisé dans DIONISOS, de la forme :

$$Q_s = -(k_g + u_e Q_e) \nabla(h + H),$$

où k_g représente le coefficient de diffusion gravitaire. Dans cette thèse, nous ne considérerons pas le flux d'eau, et nous nous limiterons donc à un transport purement gravitaire ($Q_e = 0$). Pour plus de détails sur le transport fluvial, on pourra se référer à [36], [58], [29] ou [13].

Loi de transport considérée

Le modèle de transport considéré dans cette thèse traduit le glissement des sédiments à la surface le long des pentes sous l'effet de la gravité, sans tenir compte de l'eau présente dans le bassin. Le flux diffusif φ est donc pris proportionnel à la pente :

$$\varphi = -k \nabla(h + H).$$

Dans cette équation, k représente le coefficient de diffusion des sédiments. Strictement positif, il caractérise leur capacité à être transportés sous l'effet de la gravité. De nombreuses études ont été réalisées afin d'évaluer ce coefficient et de le modéliser, permettant ainsi de raffiner la loi de transport. Il a tout d'abord été pris constant sur tout le bassin dans [46] et [39]. Puis, dans [37], les auteurs ont proposé un coefficient de diffusion dépendant de la profondeur, en utilisant une valeur constante de part et d'autre du niveau de la mer. Le coefficient de diffusion a également été utilisé pour différencier les roches dures érodées des sédiments déposés ([37], [53]), ou encore pour caractériser les différentes lithologies ([52]). Ces modèles seront détaillés par la suite (sections I-2.2 et I-3).

Ici, le coefficient de diffusion est modélisé par une fonction discontinue de la bathymétrie, permettant de distinguer l'environnement marin de l'environnement terrestre :

$$k(b) = \begin{cases} k^m & \text{si } b \geq 0 \quad (\text{milieu marin}), \\ k^c & \text{sinon} \quad (\text{milieu continental}). \end{cases}$$

On introduit la fonction ψ définie par

$$\psi(b) = - \int_0^b k(u) du \quad (\text{I.1})$$

et le flux diffusif s'écrit finalement

$$\varphi = -\nabla\psi(b).$$

Modèle diffusif

La densité des sédiments étant supposée constante et leur porosité nulle, l'équation donnant l'évolution du bassin est alors une équation parabolique traduisant la conservation de la masse des sédiments dans le bassin :

$$\partial_t h + \operatorname{div} \varphi = S \quad \text{sur } \mathcal{D} = \Omega \times (0, T),$$

où S représente un terme de consommation ou de production des sédiments dans le bassin (formation de carbonates, récifs coraliens ...). Il est ici modélisé comme une fonction de $x \in \Omega$ et du temps t , mais d'autres modèles plus complexes existent. Par exemple, il peut être pris fonction de la bathymétrie afin de relier la production sous-marine des roches carbonatées à l'intensité de la lumière ([29]).

Enfin, on associe à cette équation de conservation des conditions aux limites de type Neumann : on introduit une partition dépendant du temps de la frontière $\partial\Omega$ de Ω , notée $(\Gamma_e(t), \Gamma_s(t))$, et on impose à la frontière du domaine des flux entrants $\varphi_e(x, t) < 0$ sur $\Gamma_e(t)$ et sortants $\varphi_s(x, t) \geq 0$ sur $\Gamma_s(t)$. Toutefois, le flux de sédiments sortant d'un bassin est une donnée très difficile à quantifier dans la pratique, et il faudrait peut-être envisager d'autres formes de conditions aux limites par la suite.

I-2.2 Limitation de l'érosion

Les modèles de transport diffusifs comme celui présenté plus haut considèrent que les processus de sédimentation et d'érosion sont symétriques. Toutefois, le transport ne peut s'appliquer qu'à des matériaux sous la forme de grains suffisamment petits pour être déplacés ([10], [1]). Dans la couche de sédiments, on peut donc distinguer, comme dans [1] et [13], une partie inférieure d'épaisseur R constituée de roches sédimentaires dures sur lesquelles le transport ne peut agir, et une couche de sédiments érodables d'épaisseur s (figure I.2). La quantité de sédiments transportés en chaque point du bassin ne peut donc excéder la disponibilité locale en matériaux mobiles : sédiments apportés de l'amont par les flux surfaciques et sédiments érodables produits localement par transformation des roches dures. Ainsi, le déplacement des sédiments peut ne plus être limité par la capacité de transport mais par la production *in situ* de matériau érodable.

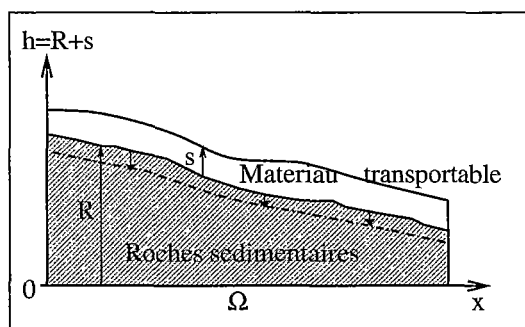


Figure I.2 : Limitation de l'érosion.

Une première solution utilisée dans [22] pour modéliser la ressource limitée en sédiments érodables consiste à considérer deux coefficients de diffusion d'ordres de grandeur différents : un pour quantifier l'érosion des roches dures et un, plus élevé, qui régit le transport et le dépôt des produits de cette érosion. Cette idée est reprise dans [53] où le coefficient de diffusion est lié à la porosité des sédiments :

$$k^* = \frac{\Phi}{\Phi_d} k,$$

Φ_d étant la porosité de dépôt et Φ celle de la roche érodée. Le coefficient k^* vaut donc un en sédimentation et peut être plus petit que un en érosion.

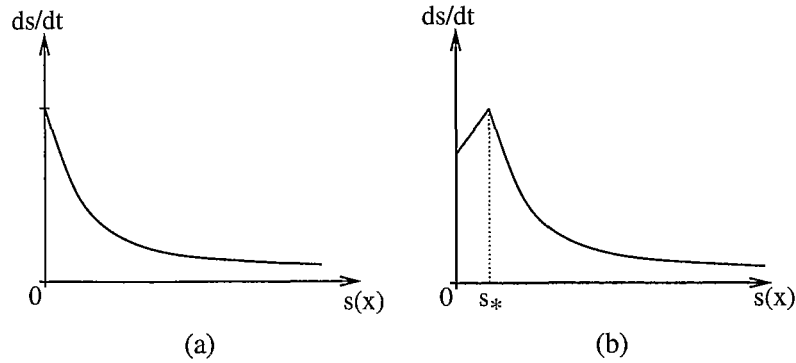


Figure I.3 : Modèles d'évolution du taux de production de sédiments transportables $\partial_t s$ en fonction de l'épaisseur s

D'autres modèles introduisent des lois décrivant la production *in situ* de sédiments érodables (voir par exemple [1], [57], [13]) en exprimant le fait que ce processus entraîne la baisse de l'interface R entre les roches sédimentaires dures et les sédiments transportables, et l'augmentation de l'épaisseur s . Le matériau transportable est produit sur place par des phénomènes dits de *weathering* dépendant du climat, de l'altitude, de l'humidité... (voir [1], [57], [33] ou [12]). La dépendance exacte du taux de production de ces sédiments avec l'épaisseur s n'est pas connue avec précision aujourd'hui, mais elle a fait l'objet de plusieurs études ([33] par exemple). Dans [1] et [57], le taux de production de sédiments transportables $\partial_t s$ est modélisé par une fonction décroissant exponentiellement avec l'épaisseur s de ces sédiments (figure I.3 (a)). Dans [13], les auteurs introduisent un pic du taux de production sous une couche non nulle de sédiments transportables, dans la mesure où les processus qui interviennent dépendent en partie de la présence d'eau (figure I.3 (b)). Ces lois de production sont ensuite associées, comme dans [1], à une contrainte sur la disponibilité en sédiments érodables de la forme :

$$h \geq R. \quad (\text{I.2})$$

Une dernière idée consiste, comme dans [30], à imposer directement une vitesse d'érosion maximale $-E \leq 0$ dépendant du climat, de la bathymétrie, de la composition et de l'âge des sédiments :

$$\partial_t h \geq -E. \quad (\text{I.3})$$

Enfin, on peut noter que ce problème de disponibilité en sédiments érodables apparaît également dans les rivières avec le transport fluvial (voir [36], [57], [58] ou [13]). La production *in situ* de sédiments est alors liée à l'incision du lit de la rivière par l'eau, et des lois spécifiques à cet environnement ont été définies.

Le modèle que nous considérons ici reprend l'idée de taux d'érosion maximal (I.3) proposée dans [30], mais la formulation (I.2) pourrait y être prise en compte de façon similaire. Le taux E est modélisé comme une fonction de $x \in \Omega$ et du temps t , avec $E(x, t) \geq 0$. On suppose de plus que $E(x, t) + S(x, t) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$ et tout temps t , ce qui peut s'interpréter comme le fait que la consommation de sédiments dans le bassin ne peut s'appliquer qu'à des matériaux érodables.

I-2.3 Couplage des deux modèles

Le couplage entre les modèles de transport diffusif et les modèles de limitation de l'érosion par une contrainte sur h ou $\partial_t h$ est un problème essentiel dans la mesure où ces deux phénomènes peuvent être dominants simultanément en différents points du bassin. Toutefois, il semble que ce couplage n'ait jamais été évoqué au niveau continu, et ne soit traité qu'au niveau discret (voir par exemple [1], [57], [30] pour le transport gravitaire, ou encore [36] et [58] pour le transport fluvial). Dans [36], [58] et [30], le bassin est divisé en cellules parcourues par ordre de topographie $h + H$ décroissante, et dans chaque cellule, la disponibilité en sédiments érodables et la capacité de transport sont calculées. Ceci permet de déterminer la quantité de sédiments qui sort réellement de la cellule : si la capacité de transport est inférieure à la quantité de sédiments disponibles, la cellule est dominée par le processus de transport ; sinon, c'est la production *in situ* de sédiments qui est le processus limitant. L'idée de base est donc de limiter les flux sortants de chaque cellule de telle sorte que ces flux soient maximum et que la solution vérifie la contrainte sur le taux d'érosion.

Comme on peut le voir au niveau discret, le couplage entre les deux modèles fait donc apparaître une partition du domaine Ω en deux sous-domaines : une zone où $\partial_t h \geq -E$, i.e. où la contrainte sur le taux d'érosion est vérifiée naturellement (le processus de transport domine), et une zone où le modèle diffusif donnerait $\partial_t h < -E$, et où on impose $\partial_t h := -E$ (la quantité de sédiments transportée est alors limitée par la production *in situ* de sédiments érodables). Il s'agit donc d'un problème de frontière libre dans la mesure où l'interface entre ces deux sous-domaines est une inconnue du problème, et il faut définir la condition de raccord entre les deux zones pour fermer le modèle.

Par ailleurs, le modèle doit être conservatif sur tout le domaine Ω . Reprenant l'idée du couplage au niveau discret, il faut donc construire un flux \mathbf{f} continu proportionnel à φ , de même orientation et tel que la norme de \mathbf{f} soit inférieure à celle de φ (sur \mathbb{R}^d). De plus, ce flux doit satisfaire l'équation de conservation :

$$\partial_t h + \operatorname{div} \mathbf{f} = S \quad \text{sur } \Omega \times (0, T),$$

avec $\mathbf{f} = \varphi$ dans la zone où $\partial_t h > -E$ (i.e. $\operatorname{div} \mathbf{f} < E + S$), et $\partial_t h = -E$ sinon (ou encore $\operatorname{div} \mathbf{f} = E + S$). La condition de raccord sera alors définie par la continuité de \mathbf{f} .

Une variable supplémentaire λ , que l'on impose inférieure ou égale à un, a donc été introduite dans le modèle. Elle joue le rôle de limiteur du flux diffusif φ et permet de définir le nouveau flux \mathbf{f} par $\mathbf{f} = \lambda \varphi$. La fermeture du modèle s'exprime alors de la façon suivante :

- si la contrainte sur le taux d'érosion est vérifiée, i.e. si $\partial_t h > -E$, on prend $\lambda := 1$ et le flux réel \mathbf{f} coïncide avec le flux diffusif φ ;
- sinon, $\lambda < 1$ et on impose $\partial_t h := -E$.

On voit que ceci peut se mettre sous la forme d'une condition d'unilatéralité :

$$\begin{cases} (\partial_t h + E)(1 - \lambda) = 0, \\ (\partial_t h + E) \geq 0, (1 - \lambda) \geq 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Omega \times (0, T). \quad (\text{I.4})$$

I-2.4 Modèle diffusif sous contrainte

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, le modèle diffusif sous contrainte exprime la conservation de la masse des sédiments dans le bassin en tenant compte du nouveau flux \mathbf{f} . En ce qui

concerne les conditions aux limites, la condition imposée sur le bord Γ_s doit être adaptée : le flux sortant, pris égal à φ_s dans le cas diffusif, peut ici être limité pour que la contrainte sur le taux d'érosion soit satisfaite. Le flux φ_s correspond donc à un flux sortant maximal, et la condition aux limites sur Γ_s peut se mettre sous la forme de la condition d'unilatéralité :

$$\begin{cases} (\varphi_s - \mathbf{f} \cdot \vec{n})(\partial_t h + E) = 0 & \text{sur } \Gamma_s, \\ (\varphi_s - \mathbf{f} \cdot \vec{n}) \geq 0, (\partial_t h + E) \geq 0 & \text{sur } \Gamma_s, \end{cases}$$

où on a noté \vec{n} le vecteur normal unitaire à la frontière $\partial\Omega$ sortant de Ω .

Finalement, la formulation mathématique du modèle diffusif monolithologique sous contrainte de taux d'érosion maximal est la suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{Conservation :} & \partial_t h + \text{div} [-\lambda \nabla \psi(b)] = S, & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ \text{Contrainte :} & \begin{cases} (\partial_t h + E)(1 - \lambda) = 0, \\ (\partial_t h + E) \geq 0, (1 - \lambda) \geq 0. \end{cases} & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ \text{CL et CI :} & \begin{cases} \mathbf{f} \cdot \vec{n} = \varphi_e & \text{sur } \Gamma_e, \\ (\varphi_s - \mathbf{f} \cdot \vec{n})(\partial_t h + E) = 0 & \text{sur } \Gamma_s, \\ (\varphi_s - \mathbf{f} \cdot \vec{n}) \geq 0, (\partial_t h + E) \geq 0 & \text{sur } \Gamma_s, \\ h|_{t=0} = h^0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \end{array}$$

Ce système ne peut être bien posé que si $\lambda \geq 0$, propriété que nous montrerons dans le cas discret. Il a été notamment étudié par G. Gagneux et G. Vallet de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour ([23]), et par R. Eymard et T. Gallouët dans le cas où le flux diffusif φ est connu ([20]).

I-2.5 Illustration du modèle

Calcul de la contrainte

Pour mieux comprendre le rôle de la variable λ , il est intéressant de considérer le problème à épaisseur de sédiments h donnée. Dans ce cas, le taux $\partial_t h$ est connu et égal à $-\text{div } \mathbf{f}$. La variable λ est donc solution du problème :

$$\begin{cases} (\text{div } \lambda \varphi - (E + S))(1 - \lambda) = 0, \\ (\text{div } \lambda \varphi - (E + S)) \leq 0, (1 - \lambda) \geq 0. \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

R. Eymard et T. Gallouët ont étudié ce problème, et les résultats de leurs travaux sont présentés dans [20]. Ils ont notamment déterminé, sous certaines hypothèses, l'expression de l'unique solution faible du problème (I.5) dans le cas 2D pour $S = 0$. Elle s'écrit d'après [20] (Proposition 2.1), si $\Omega = [a, b]$ et pour t fixé dans $(0, T)$,

$$\mathbf{f}(x, t) = (\lambda \varphi)(x, t) = \min_{y \in [a, x]} \left[\varphi^+(y, t) + \int_y^x E(u, t) du \right] - \min_{y \in [x, b]} \left[\varphi^-(y, t) + \int_x^y E(u, t) du \right] \quad (\text{I.6})$$

où, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $s^+ = \max(s, 0)$ et $s^- = \max(-s, 0)$.

Exemple

On se place dans le cas où $\Omega = [a, b]$ avec $a = 0$ et $b = 1$, $E = 20$, $S = 0$, $H = 0$, $h(x) = -\cos(2\pi x)$ et $k = 1$. On peut alors appliquer le résultat (I.6) montré dans [20], et on obtient :

$$\mathbf{f}(x) = \begin{cases} -2\pi \sin(2\pi x) & \text{si } x \leq x_1^* \text{ ou } x \geq x_2^*, \\ 20(x - 0.5) \sin, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } \lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq x_1^* \text{ ou } x \geq x_2^*, \\ \frac{-\pi \sin(2\pi x)}{10(x - 0.5)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où on a noté x_1^* et x_2^* les solutions de l'équation $-2\pi \sin(2\pi x) = 20(x - 0.5)$. Le résultat est donné sur la courbe I.4. Comme $f = \lambda\varphi$, les courbes donnant f et φ se coupent au point le plus haut du bassin ($x_0 = 0.5$) où $\varphi = 0$. Par ailleurs en ce point $\partial_x \varphi > E$. La contrainte est donc saturée et (I.5) impose $\partial_x f = E$. Ensuite, en suivant la ligne de plus grande pente à partir du sommet x_0 , on voit que, tant que $|\varphi| > |f|$, le flux f est donné par un segment de droite de pente E . Puis la courbe donnant f rejoint celle donnant φ en x_1^* et x_2^* .

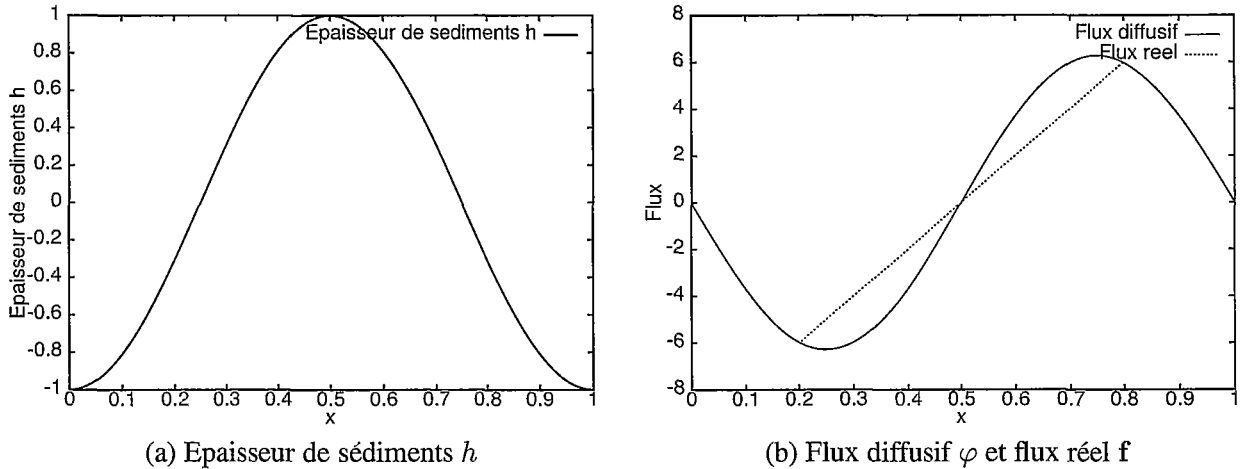


Figure I.4 : Calcul du flux réel f connaissant le flux diffusif φ : un exemple

Influence des paramètres physiques

Afin d'illustrer le modèle et l'influence des paramètres physiques (taux d'érosion maximal, coefficient de diffusion, niveau de la mer ...), je vais présenter ici quelques résultats numériques obtenus avec le schéma de discrétisation (III.1)-(III.5) décrit dans le chapitre III.

On considère un bassin sédimentaire 2D de base $\Omega = (0, L_b)$ avec $L_b = 200$ km. La hauteur du socle H est prise nulle, la topographie initiale est donnée par $h^0(x) = 25e^{-8\frac{x}{L_b}} + 10$ m, le niveau de la mer varie au cours du temps et des sédiments entrent dans le bassin en $x = 0$.

Sur la figure I.5, on peut voir l'influence du taux d'érosion maximal E sur l'évolution de la topographie du bassin pour un coefficient de diffusion indépendant de la bathymétrie. Si le taux d'érosion maximal est très grand (I.5-(a)), l'érosion du domaine n'est pas contrainte et le relief s'égalise très rapidement dans tout le bassin. Par contre, si E est faible par rapport à la capacité de transport (c'est le cas ici pour $E = 2$ m/Ma, courbe I.5-(b)), on voit que, là où la pente est très forte (x petit), l'érosion est limitée par la contrainte et $\partial_t h$ est constant.

Considérons maintenant un coefficient de diffusion dépendant de la bathymétrie : l'évolution du niveau de la mer a une influence sur le profil du bassin. Comme on peut le voir sur la figure I.6-(a), une cassure dans le relief coïncidant avec le niveau de la mer apparaît : elle est due au brusque changement de valeur du coefficient de diffusion entre les milieux continentaux et marins. De plus la valeur de ce dernier étant plus élevée en milieu continental qu'en milieu marin, le relief continental est quasiment aplati si E est très grand (modèle purement diffusif) tandis que le relief marin conserve une pente plus forte. Dans le cas où E est petit (figure I.6-(b)), le rivage coïncide avec l'interface zone sans contrainte / zone sous contrainte car la

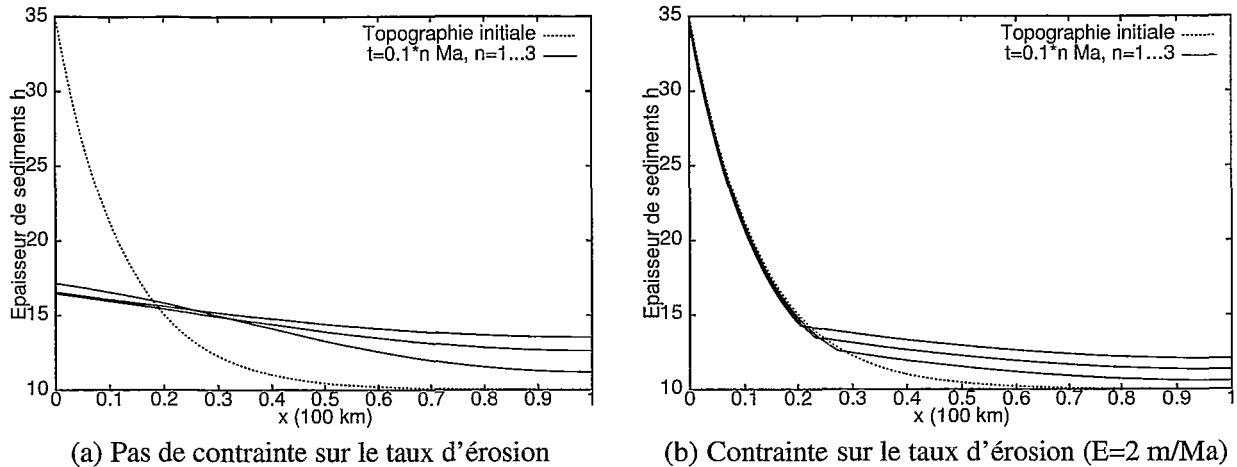


Figure I.5 : Cas test 2D : Evolution de l'épaisseur de sédiments h pendant 0.3 Ma (a) sans contrainte sur le taux d'érosion, et (b) avec contrainte sur le taux d'érosion ($E = 2$ m/Ma). Le coefficient de diffusion k est pris constant et égal à 10^4 m²/an.

capacité de transport en milieu marin est très faible par rapport au taux d'érosion maximal.

Enfin, on peut voir sur la figure I.7 le lien entre les différentes variables du système dans le cas où une partie du bassin est sous contrainte ($E = 2$ m/Ma). Lorsque le flux diffusif φ vérifie $\partial_x \varphi > E$, le limiteur de flux λ est strictement plus petit que 1, le flux réel f est un segment de pente E et le taux d'érosion $\partial_t h$ est tronqué à $-E$.

I-3 Cas multi-lithologique

Dans un bassin sédimentaire, plusieurs types de sédiments peuvent être mis en évidence, selon leur nature, la taille de leurs grains... Les constituants géologiques ainsi différenciés comme le sable, l'argile ou les carbonates, appelés *lithologies*, ont des propriétés et donc des comportements physiques différents. Par exemple, certains sont plus facilement transportables que d'autres, et donc plus présents dans les parties basses des bassins. Les modèles géométriques et les modèles particuliers distinguent en général plusieurs populations de sédiments caractérisées par la taille de leurs grains, mais les modèles diffusifs ont longtemps été formulés pour une seule lithologie. Dans cette partie, nous allons présenter un bref état de l'art sur la prise en compte de plusieurs lithologies dans les modèles diffusifs avant d'étendre le modèle considéré dans la thèse au cas d'un nombre quelconque de lithologies.

I-3.1 Les modèles diffusifs multi-lithologiques

Dans les modèles diffusifs cherchant à prendre en compte plusieurs lithologies, on trouve tout d'abord l'approche de *tri parfait* ([2], [48]) : seule la lithologie ayant les plus gros grains est déposée jusqu'à ce qu'elle ne soit plus disponible. Puis la lithologie suivante commence à être déposée. L'inconvénient de cette approche est qu'elle n'autorise pas le mélange des lithologies constaté dans le sous-sol.

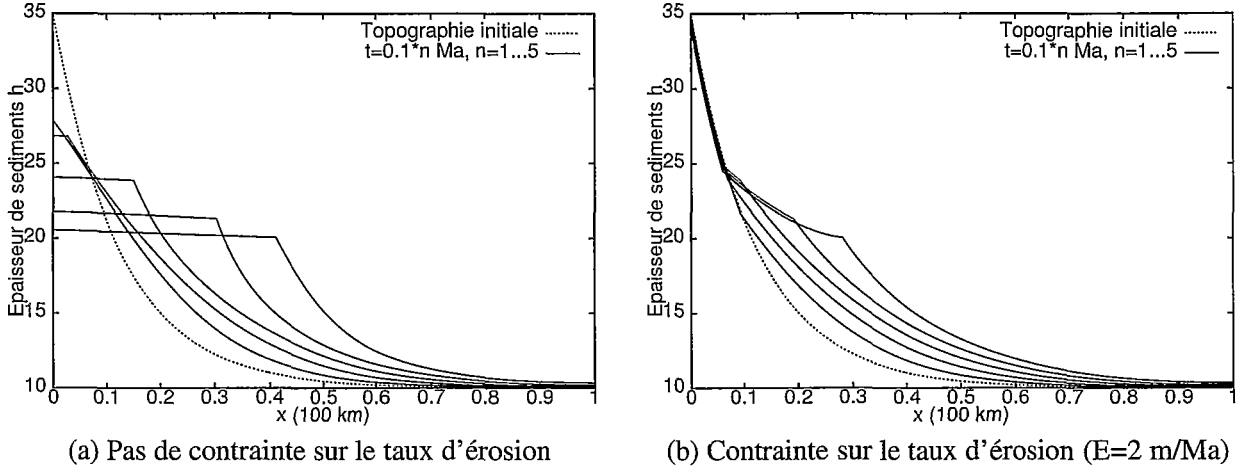


Figure I.6 : Cas test 2D : Evolution de l'épaisseur de sédiments h pendant 0.5 Ma (a) sans contrainte sur le taux d'érosion et (b) avec contrainte sur le taux d'érosion ($E = 2$ m/Ma). Le coefficient de diffusion k vaut $5 \cdot 10^4$ m^2/an en milieu continental et 10^3 m^2/an en milieu marin.

Dans [52], Rivenaes propose un modèle diffusif simulant le transport de deux lithologies (sable et argile) tout en autorisant leur mélange. Pour différencier les sédiments, il introduit un *coefficient de diffusion par lithologie*, plus grand pour l'argile que pour le sable : il caractérise ainsi le fait que ce dernier est plus difficilement transportable que l'argile en environnement marin peu profond. Le flux de chacune des lithologies est alors pris proportionnel à la pente, au coefficient de diffusion de la lithologie ainsi qu'à une fraction du flux total, que l'auteur a choisie égale à la *fraction volumique de la lithologie considérée*. Ceci assure notamment que si l'un des constituants n'est pas disponible, son flux sera nul. La loi diffusives ainsi définie est ensuite combinée à la conservation de la masse de chaque lithologie. On retrouve cette approche dans de nombreux articles comme [30] et [50].

I-3.2 Modèle multi-lithologique sous contrainte de taux d'érosion maximal

Nous allons maintenant étendre le modèle présenté dans le paragraphe I-2.4 au cas de plusieurs lithologies. On considère un bassin sédimentaire dans lequel les sédiments sont modélisés comme un mélange de L lithologies caractérisées par la taille des grains de leur population, et considérées comme des matériaux incompressibles de densité constante et de porosité nulle. On suppose de plus que les sédiments ne peuvent pas changer de nature (pas de passage d'une lithologie à une autre).

A l'intérieur de la couche de sédiments, c'est-à-dire pour une côte $\zeta \in (0, h(x, t))$ (schéma I.8), le mélange est décrit par sa composition donnée par les L concentrations $c_i(x, \zeta, t) \geq 0$ en lithologie i mesurées sur l'épaisseur des constituants, définies sur le domaine $\mathcal{B} = \{(x, \zeta, t) \mid x \in \Omega, \zeta \in (0, h(x, t)), t \in (0, T)\}$ et satisfaisant $\sum_{i=1 \dots L} c_i(x, \zeta, t) = 1$.

On caractérise également le mélange de sédiments transporté en surface, c'est-à-dire déposé en cas de sédimentation ou passant à la surface en cas d'érosion. On définit donc pour chaque lithologie i une concentration $c_i^s(x, t) \geq 0$ sur $\Omega \times (0, T)$, appelée par la suite *concentration de surface* et satisfaisant $\sum_{i=1 \dots L} c_i^s(x, t) = 1$. Le fait d'introduire en surface une concentration différente de la concentration à

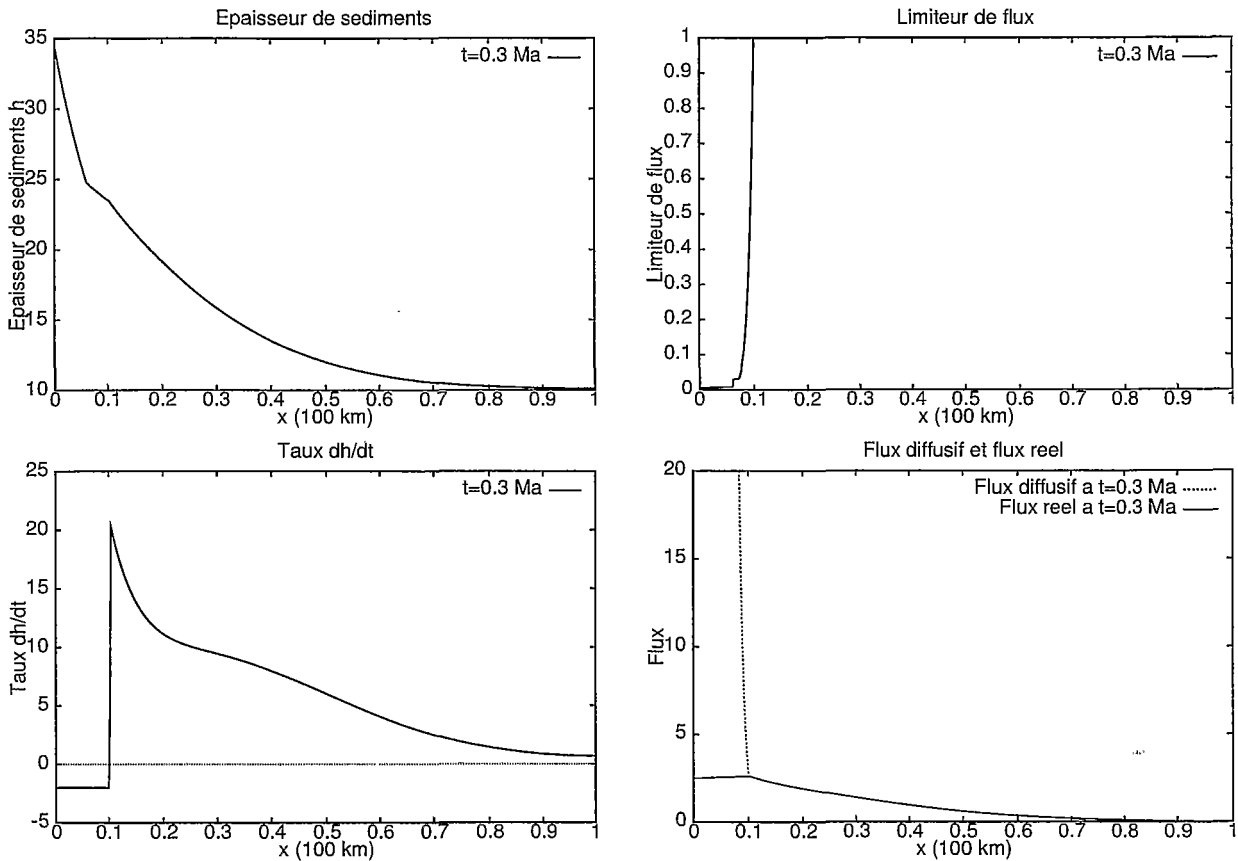


Figure I.7 : Cas test 2D : Courbes donnant l'épaisseur de sédiments h , le limiteur de flux λ , le taux $\partial_t h$, le flux diffusif φ et le flux réel f dans le bassin à $t = 0.3$ Ma. Le taux d'érosion maximal est $E = 2$ m/Ma, et le coefficient de diffusion vaut $5 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{an}$ en milieu continental et $10^3 \text{ m}^2/\text{an}$ en milieu marin.

l'intérieur de la couche de sédiments permet le mélange des lithologies tout en s'affranchissant de la couche superficielle d'homogénéisation introduite dans [52].

Considérons maintenant les équations de conservation régissant l'évolution du bassin.

Equations de conservation sur \mathcal{B}

Comme la compaction n'est pas considérée ici et que le transport des sédiments n'a lieu qu'en surface, la composition des sédiments à l'intérieur de la couche de sédiments, c'est-à-dire pour $\zeta < h(x, t)$, ne change pas au cours du temps : $\partial_t c_i = 0$ sur \mathcal{B} pour tout i . L'évolution de cette concentration est donc seulement gouvernée par la condition aux limites à la surface du bassin qui exprime le fait que, en sédimentation, la composition des sédiments déposés est par définition donnée par la concentration de surface : $c_i|_{\zeta=h} = c_i^s$ si $\partial_t h > 0$. Enfin, on impose une condition initiale c_i^0 pour c_i , et on obtient le

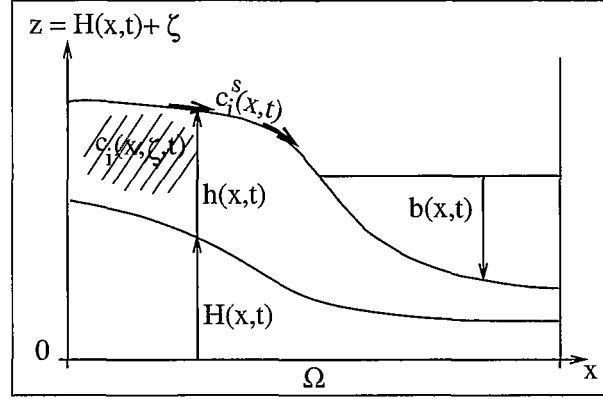


Figure I.8 : Bassin sédimentaire 2D avec plusieurs lithologies (sable, argile, ...)

système :

$$\begin{cases} \partial_t c_i = 0 & \text{sur } \mathcal{B} = \{(x, \zeta, t) \mid (x, t) \in \Omega \times (0, T), \zeta \in (0, h(x, t))\}, \\ c_i|_{\zeta=h} = c_i^s & \text{sur } \mathcal{D}^+ = \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) \mid \partial_t h(x, t) > 0\}, \\ c_i|_{t=0} = c_i^0 & \text{sur } \{(x, \zeta) \mid x \in \Omega, \zeta \in (0, h|_{t=0}(x))\}. \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

Si on se place maintenant dans le système où la coordonnée verticale d'un point est prise vers le bas à partir de la surface, soit : $\xi = h(x, t) - \zeta$, $u_i(x, \xi, t) = c_i(x, \zeta, t)$, le système (I.7) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u_i + \partial_t h \partial_\xi u_i = 0 & \text{sur } \mathcal{B} = \{(x, \xi, t) \mid (x, t) \in \Omega \times (0, T), \xi \in (0, h(x, t))\}, \\ u_i|_{\xi=0} = c_i^s & \text{sur } \mathcal{D}^+ = \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) \mid \partial_t h(x, t) > 0\}, \\ u_i|_{t=0} = u_i^0 & \text{sur } \{(x, \xi) \mid x \in \Omega, \xi \in (0, h|_{t=0}(x))\}, \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

où $u_i^0(x, \xi) = c_i^0(x, h|_{t=0}(x) - \xi)$. On obtient donc une équation d'advection avec la concentration de surface comme condition aux limites entrante au sommet du bassin en cas de sédimentation. Cette formulation sera utilisée dans le chapitre VI pour montrer l'existence d'une unique solution faible pour le problème sans contrainte avec des coefficients de diffusion unitaires.

Equations de conservation sur $\Omega \times (0, T)$

On exprime ensuite la conservation de la fraction $\mathcal{M}_i(x, t) = \int_0^{h(x,t)} c_i(x, \zeta, t) d\zeta$ en lithologie i mesurée sur la hauteur de sédiments en tout point du bassin :

$$\partial_t \mathcal{M}_i + \text{div } \varphi_i = S_i.$$

Dans cette équation, on a noté S_i un terme de production ou de consommation pour la lithologie i et φ_i le flux diffusif en lithologie i , pour lequel on reprend le modèle proposé dans [52] :

$$\varphi_i = -c_i^s k_i \nabla(h + H)$$

avec k_i le coefficient de diffusion de la lithologie i . Ce dernier est modélisé par la même fonction discontinue de la bathymétrie que dans le cas monolithologique, et on introduit pour chaque lithologie la fonction ψ_i

définie par :

$$\psi_i(b) = - \int_0^b k_i(u) du,$$

de telle sorte que le flux diffusif s'écrit $\varphi_i = -c_i^s \nabla \psi_i(b)$. De plus, pour tenir compte de la contrainte sur le taux d'érosion, on introduit une variable supplémentaire $\lambda \leq 1$ qui joue le rôle de limiteur du flux diffusif global $\varphi = \sum_{i=1 \dots L} \varphi_i$, et permet de définir pour chaque lithologie un nouveau flux $f_i = \lambda \varphi_i$. La conservation de la fraction \mathcal{M}_i s'écrit finalement :

$$c_i|_{\zeta=h} \partial_t h + \operatorname{div} [-\lambda c_i^s k_i(b) \nabla (h + H)] = S_i \quad \text{sur } \Omega \times (0, T). \quad (\text{I.9})$$

Dans ce système, on a pris en compte l'égalité $\partial_t \mathcal{M}_i = c_i|_{\zeta=h} \partial_t h$ qui découle formellement de (I.7) et de la définition de \mathcal{M}_i . On associe à (I.9) l'équation

$$\sum_{i=1}^L c_i^s = 1 \quad \text{sur } \Omega \times (0, T)$$

qui permet de relier la variable h à toutes les concentrations. Enfin, la fermeture du modèle s'exprime par la même condition d'unilatéralité (I.4) que dans le cas monolithologique.

Remarque I-3.1. La définition de la fraction \mathcal{M}_i suppose $h \geq 0$. En pratique, on prend en compte cette condition en plus de la condition d'unilatéralité (I.4) en imposant $E(h, x, t) = 0$ si $h \leq 0$.

Pour définir les termes sources S_i , on utilise une partition $(\mathcal{D}_p, \mathcal{D}_c)$ de $\mathcal{D} = \Omega \times (0, T)$. Sur le domaine \mathcal{D}_p , le terme S_i correspond à un taux de production S_i^p de la lithologie i (formation de carbonates par exemple) et vérifie $S_i^p \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, L$. Sur le domaine \mathcal{D}_c , il représente un taux de consommation des sédiments, proportionnel à la concentration de surface c_i^s : $S_i = c_i^s S^c$ pour tout $i = 1, \dots, L$ où $S^c(x, t) < 0$. On suppose alors que $E(x, t) + \sum_{i=1}^L S_i(x, t) \geq 0$ sur $\Omega \times (0, T)$. Comme nous l'avons évoqué dans le cas monolithologique, le terme de production S_i^p , pris ici fonction de $x \in \Omega$ et du temps t , pourrait aussi avoir une forme plus complexe, comme une dépendance non linéaire avec la bathymétrie pour relier la production à la lumière en milieu marin. Ce type de modèle ne sera pas pris en compte dans cette thèse.

Enfin, en ce qui concerne les conditions aux bords, on impose un flux sortant global maximal φ_s sur Γ_s et un flux entrant φ_e sur Γ_e réparti entre les lithologies i par les fractions $\mu_{e,i} \in [0, 1]$ telles que $\sum_{i=1, \dots, L} \mu_{e,i} = 1$. On posera par la suite $\varphi_{e,i} = \mu_{e,i} \varphi_e$ pour tout $i = 1 \dots L$.

La formulation du modèle diffusif multi-lithologique sous contrainte de taux d'érosion maximal s'écrit

finalement :

$$\text{Surface : } \begin{cases} c_i|_{\zeta=h} \partial_t h + \text{div}[-\lambda c_i^s \nabla \psi_i(b)] = S_i, \\ \sum_{i=1}^L c_i^s = 1, \end{cases} \quad \text{sur } \Omega \times (0, T), \quad (\text{I.10})$$

$$\text{Contrainte : } \begin{cases} (\partial_t h + E)(1 - \lambda) = 0, \\ \partial_t h + E \geq 0, 1 - \lambda \geq 0, \end{cases} \quad \text{sur } \Omega \times (0, T), \quad (\text{I.11})$$

$$\text{Colonnes : } \begin{cases} \partial_t c_i = 0 & \text{sur } \mathcal{B} = \{(x, \zeta, t) \mid (x, t) \in \Omega \times (0, T), \zeta \in (0, h(x, t))\}, \\ c_i|_{\zeta=h} = c_i^s & \text{sur } \mathcal{D}^+ = \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) \mid \partial_t h(x, t) > 0\}, \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

$$\text{CI et CL : } \begin{cases} \mathbf{f}_i \cdot \vec{n} = \varphi_{e,i} & \text{sur } \Gamma_e, \\ (\varphi_s - \sum_{i=1}^L \mathbf{f}_i \cdot \vec{n})(\partial_t h + E) = 0 & \text{sur } \Gamma_s, \\ (\varphi_s - \sum_{i=1}^L \mathbf{f}_i \cdot \vec{n}) \geq 0, (\partial_t h + E) \geq 0 & \text{sur } \Gamma_s, \\ h|_{t=0} = h^0 & \text{sur } \Omega, \\ c_i|_{t=0} = c_i^0 & \text{sur } \{(x, \zeta) \mid x \in \Omega, \zeta \in (0, h|_{t=0}(x))\}. \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

On obtient donc un système couplé, original et complexe dont l'étude reste à faire. Quelques invariants seront prouvés pour le problème sans contrainte dans le chapitre II, pour des coefficients de diffusion indépendants de la bathymétrie. Dans le chapitre VI, nous démontrerons l'existence d'une unique solution faible pour le problème sans contrainte avec des coefficients de diffusion unitaires dans lequel la variable épaisseur de sédiments se découple des autres inconnues. Toutefois, nous ne savons actuellement rien dire sur le caractère bien posé du problème complet.

I-3.3 Illustration du modèle

Comme nous l'avons vu, le coefficient de diffusion de chaque lithologie doit caractériser sa capacité à être transportée par gravité, et ainsi différencier son comportement des autres sédiments. Si l'on reprend le cas test du paragraphe I-2.5 avec deux lithologies, sans contrainte sur le taux d'érosion et des coefficients de diffusion indépendants de la bathymétrie, on peut montrer que le problème admet une solution stationnaire (voir chapitre II) dans le sens où $\partial_t^2 h = 0$ et $\partial_t c_i^s = 0$. Le bassin est alors toujours en sédimentation, $\partial_x h < 0$ en tout point, et la concentration de surface c_1^s est donnée sur la figure I.9 pour différentes valeurs du rapport k_1/k_2 entre les coefficients de diffusion. On voit alors que, si $k_1 = k_2$, les deux lithologies ont le même comportement et la composition des sédiments dans le bassin correspond à celle des sédiments entrants à la frontière ($c_1^s = \mu_{e,1} = 0.7$ ici). Pour un rapport k_1/k_2 supérieur à 1, les sédiments d'espèce 1 glissent plus rapidement que les autres et tombent donc les premiers au fond du bassin (c'est-à-dire dans la zone où x proche de 100 km). Lorsque le rapport k_1/k_2 devient très élevé, la répartition des lithologies dans le bassin est quasiment discontinue. D'autres exemples seront donnés dans le chapitre II.

Si l'on prend maintenant des coefficients de diffusion dépendant de la bathymétrie, les variations du niveau de la mer vont entraîner dans certaines parties du bassin des périodes d'érosion suivies de périodes de sédimentation. Ceci entraîne des discontinuités de la concentration de colonne en ces points dans la mesure où la composition des sédiments déposés est indépendante de celle des sédiments mis à nus par l'érosion et dont le dépôt remonte à une période plus ancienne. Un tel phénomène est illustré sur la figure I.10.

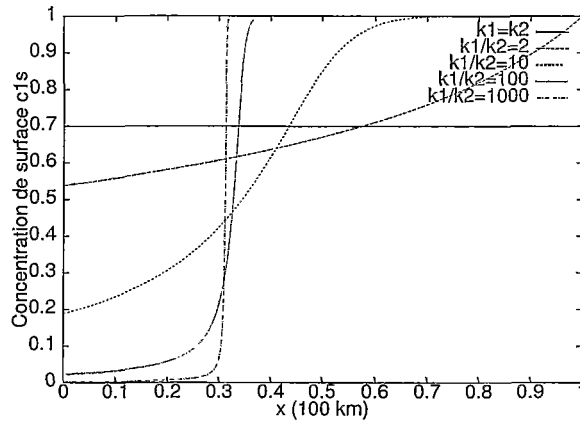


Figure I.9 : Cas test 2D : Concentration de surface de la lithologie 1 dans le bassin pour différents rapports k_1/k_2 , sans contrainte sur le taux d'érosion, $k_1^c = k_1^m = 10^5 \text{ m}^2/\text{an}$, et un flux entrant en $x = 0$ avec $\mu_{e,1} = 0.7$.

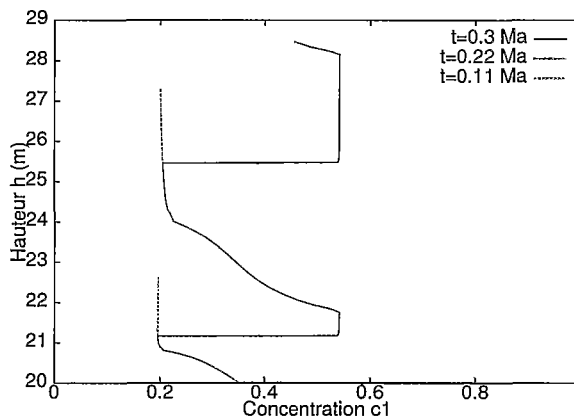


Figure I.10 : Cas test 2D : Concentration de colonne de la lithologie 1 à différents instants de la simulation en $x = 2 \text{ km}$, pour $E = 50 \text{ m/Ma}$ et des coefficients de diffusion égaux à $k_1^c = 10^5 \text{ m}^2/\text{an}$, $k_1^m = 10^4 \text{ m}^2/\text{an}$, $k_2^c = 5.10^4 \text{ m}^2/\text{an}$ et $k_2^m = 10^3 \text{ m}^2/\text{an}$.

