

Chapitre III : Solution proposé

III.1. Introduction

III.2. Encodage

III.3. Groupe stabilisateur

III.4. Calcule des syndromes

III.5. Décodage

III.6. Vérification formelle

III.7. Conclusion

III.1. Introduction :

La théorie des codes correcteurs s'intéresse à la protection de l'information [19]. Cette tâche est réalisée généralement en s'appuyant sur un encodage préalable bien choisi basé sur la redondance.

Ces dernières années, des évolutions importantes ont eu lieu dans le domaine quantique. De nombreux travaux théoriques ont conduit à la naissance de nouvelles solutions. Les plus intéressantes sont les codes stabilisateurs.

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle variante avec 4 qubits supplémentaires mais l'étape d'encodage nécessite dix portes quantiques seulement.

III.2. Encodage :

Le circuit d'encodage est le suivant :

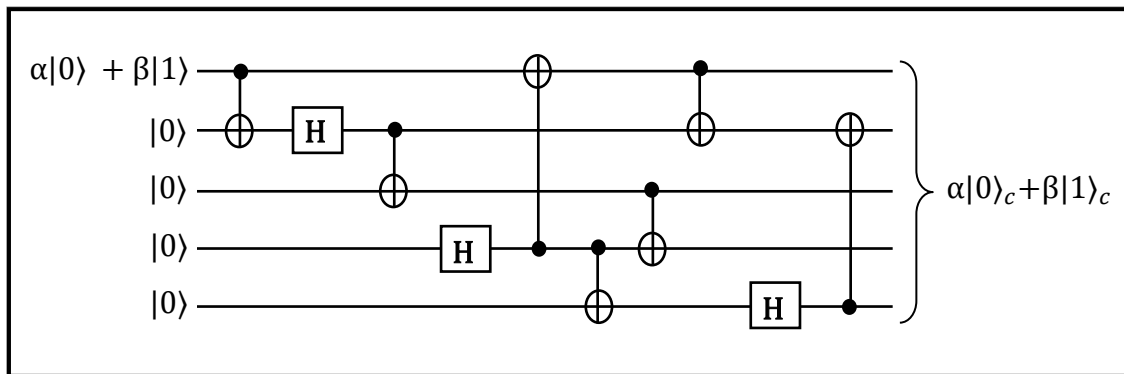


Fig. 3.1 : Le circuit d'encodage.

III.3. Groupe stabilisateur :

	5	4	3	2	1
M_0	I	Z	X	Z	X
M_1	Z	I	Z	Z	Z
M_2	X	Z	Z	X	I
M_3	X	X	X	I	Z

Tab 3.1: Les stabilisateurs.

III.4. Calcul des syndromes :

Le syndrome associé à chaque type d'erreur est donné par le circuit suivant :

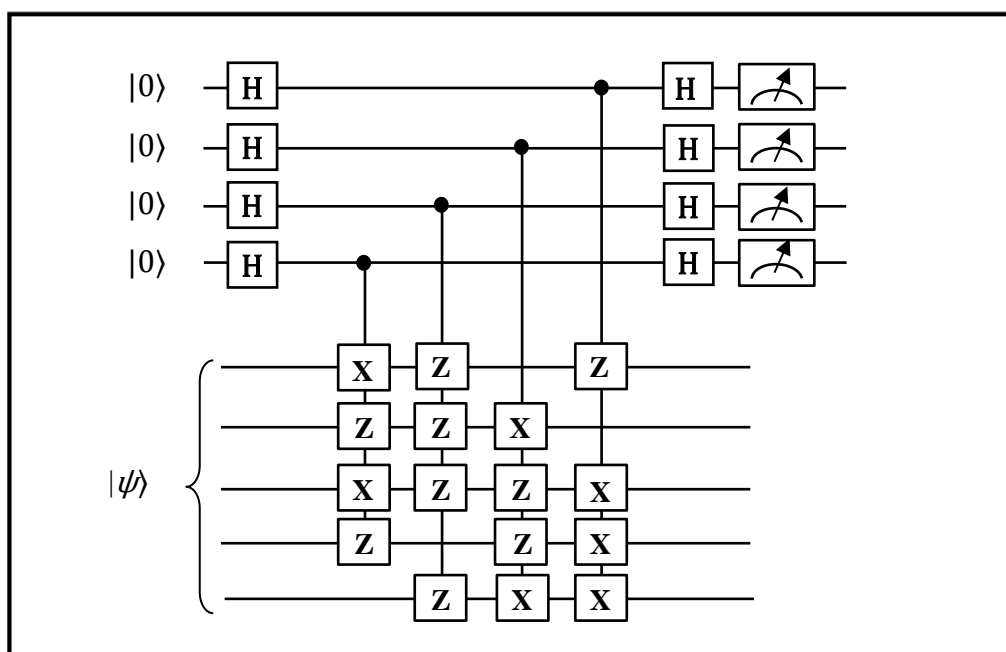


Fig. 3.2 : Calcul des syndromes d'erreur.

Les syndromes d'erreurs sont résumés dans le tableau qui suit :

	$X_0Y_0Z_0$	$X_1Y_1Z_1$	$X_2Y_2Z_2$	$X_3Y_3Z_3$	$X_4Y_4Z_4$	1
$M_0 = X_0Z_1X_2Z_3$	+ - -	- - +	+ - -	- - +	+ + +	+
$M_1 = Z_0Z_1Z_2Z_4$	- - +	- - +	- - +	+ + +	- - +	+
$M_2 = X_1Z_2Z_3X_4$	+ + +	+ - -	- - +	- - +	+ - -	+
$M_3 = Z_0X_2X_3X_4$	- - +	+ + +	+ - -	+ - -	+ - -	+

Tab 3.2: Syndromes d'erreurs .

III.5. Décodage :

Le circuit de décodage est le suivant :

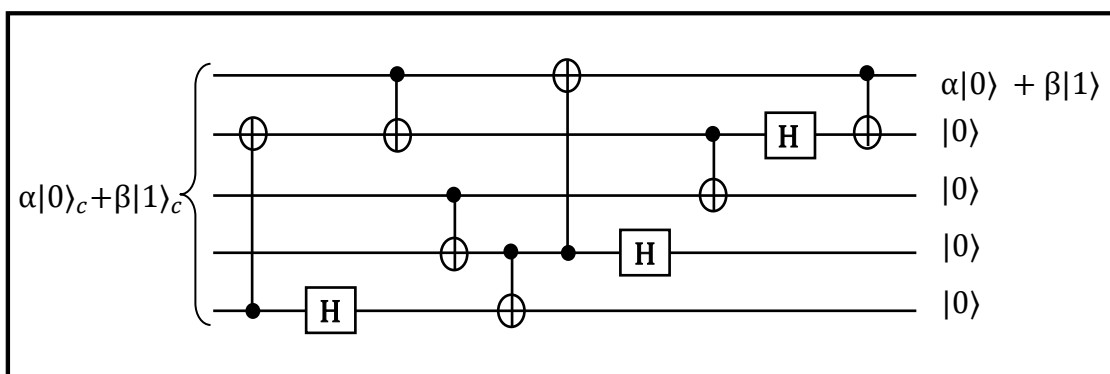


Fig. 3.3: Le circuit de décodage.

III.6. Vérification formelle :

Soit le qubit ψ défini par :

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

On commence par une étape d'encodage. Elle consiste d'abord à l'ajout de quatre qubits supplémentaires. Ensuite, on procède par une intrication de tout le système quantique y compris le qubit initial.

$$|\psi_1\rangle = \alpha |00000\rangle + \beta |10000\rangle$$

- Porte 01 : CNot(1,2)

$$|\psi_2\rangle = \alpha |00000\rangle + \beta |11000\rangle$$

- Porte 02 : H(2)

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |00000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |01000\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |10000\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2}} |11000\rangle$$

- Porte 03 : CNot(2,3)

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |00000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |01100\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |10000\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2}} |11100\rangle$$

- Porte 04 : H(4)

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\alpha}{2} |00010\rangle + \frac{\alpha}{2} |01100\rangle + \frac{\alpha}{2} |01110\rangle + \frac{\beta}{2} |10000\rangle + \frac{\beta}{2} |10010\rangle - \frac{\beta}{2} |11100\rangle - \frac{\beta}{2} |11110\rangle$$

- Porte 05 : CNot(4,1)

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\alpha}{2} |10010\rangle + \frac{\alpha}{2} |01100\rangle + \frac{\alpha}{2} |11110\rangle + \frac{\beta}{2} |10000\rangle + \frac{\beta}{2} |00010\rangle - \frac{\beta}{2} |11100\rangle - \frac{\beta}{2} |01110\rangle$$

- Porte 06 : CNot(4,5)

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\alpha}{2} |10011\rangle + \frac{\alpha}{2} |01100\rangle + \frac{\alpha}{2} |11111\rangle + \frac{\beta}{2} |10000\rangle + \frac{\beta}{2} |00011\rangle - \frac{\beta}{2} |11100\rangle - \frac{\beta}{2} |01111\rangle$$

- Porte 07 : CNot(3,4)

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\alpha}{2} |10011\rangle + \frac{\alpha}{2} |01110\rangle + \frac{\alpha}{2} |11101\rangle + \frac{\beta}{2} |10000\rangle + \frac{\beta}{2} |00011\rangle - \frac{\beta}{2} |11110\rangle - \frac{\beta}{2} |01101\rangle$$

- Porte 08 : CNot(1,2)

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\alpha}{2} |11011\rangle + \frac{\alpha}{2} |01110\rangle + \frac{\alpha}{2} |10101\rangle + \frac{\beta}{2} |11000\rangle + \frac{\beta}{2} |00011\rangle - \frac{\beta}{2} |10110\rangle - \frac{\beta}{2} |01101\rangle$$

- Porte 09 : H(5)

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00000\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00001\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11010\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11011\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01110\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01111\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10100\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10101\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11000\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11001\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00010\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00011\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10110\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10111\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01100\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01101\rangle$$

- Porte 10 : CNot(5,2)

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00000\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01001\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11010\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10011\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01110\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00111\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10100\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11101\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11000\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10001\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00010\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01011\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10110\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11111\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01100\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00101\rangle$$

✓ $|\psi_2\rangle$ c'est l'état sans erreurs (le mot de code valide).

❖ Simulation d'une Erreur:

Injecter une erreur X sur le premier qubit :

$$|\psi_3\rangle = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10000\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11001\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01010\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00011\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11110\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10111\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00100\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01101\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01000\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00001\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10010\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11011\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00110\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01111\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11100\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10101\rangle$$

❖ Mesure du syndrome :

Ajout des quatre qubits du syndrome:

$$|\psi_3\rangle = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10000000\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11001000\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01010000\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00011000\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11110000\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10111000\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00100000\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01101000\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01000000\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00001000\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10010000\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11011000\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00110000\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01111000\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11100000\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10101000\rangle$$

- Porte H(6) :

$$|\psi_3\rangle = \frac{\alpha}{4} |10000000\rangle + \frac{\alpha}{4} |10000100\rangle + \frac{\alpha}{4} |11001000\rangle + \frac{\alpha}{4} |11001100\rangle + \frac{\alpha}{4} |01010000\rangle + \frac{\alpha}{4} |01010100\rangle - \frac{\alpha}{4} |00011000\rangle - \frac{\alpha}{4} |00011100\rangle + \frac{\alpha}{4} |11110000\rangle + \frac{\alpha}{4} |11110100\rangle + \frac{\alpha}{4} |10111000\rangle + \frac{\alpha}{4} |10111100\rangle + \frac{\alpha}{4} |00100000\rangle + \frac{\alpha}{4} |00100100\rangle - \frac{\alpha}{4} |01101000\rangle - \frac{\alpha}{4} |01101100\rangle + \frac{\beta}{4} |01000000\rangle + \frac{\beta}{4} |01000100\rangle + \frac{\beta}{4} |00001000\rangle + \frac{\beta}{4} |00001100\rangle + \frac{\beta}{4} |10010000\rangle + \frac{\beta}{4} |10010100\rangle - \frac{\beta}{4} |11011000\rangle - \frac{\beta}{4} |11011100\rangle - \frac{\beta}{4} |11011000\rangle - \frac{\beta}{4} |11011100\rangle - \frac{\beta}{4} |00110000\rangle - \frac{\beta}{4} |00110100\rangle - \frac{\beta}{4} |01111000\rangle - \frac{\beta}{4} |01111100\rangle - \frac{\beta}{4} |11100000\rangle - \frac{\beta}{4} |11100100\rangle + \frac{\beta}{4} |10101000\rangle + \frac{\beta}{4} |10101100\rangle$$

- Porte H(7) :

$$|\psi_3\rangle = \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |10000000\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |10000010\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |10000100\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |10000110\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |11001000\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |11001010\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |11001100\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |11001110\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |01010000\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |01010010\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |01010100\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |01010110\rangle - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |00011000\rangle - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |00011010\rangle - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |00011100\rangle - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |00011110\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |11110000\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |11110010\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |11110100\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |11110110\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |10111000\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |10111010\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |10111100\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |10111110\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |00100000\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |00100010\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |00100100\rangle + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |00100110\rangle - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |01101000\rangle - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |01101010\rangle - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |01101100\rangle - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} |01101110\rangle$$

- Porte H(9) :

$$\begin{aligned}
 |\psi_3\rangle = & \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |000010101\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |000110101\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |001000101\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |001100101\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |010000101\rangle \\
 & + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |010100101\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |011010101\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |011110101\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |100000101\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |100100101\rangle \\
 & + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |101010101\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |101110101\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |110010101\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |110110101\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |111000101\rangle \\
 & + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |111100101\rangle
 \end{aligned}$$

❖ Correction d'erreur :

Résultat de mesure = 0101, donc erreur de type X1

- ✓ La correction : appliquer la porte X sur le premier qubit :

$$\begin{aligned}
 |\psi_4\rangle = & \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |100010101\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |100110101\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |101000101\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |101100101\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |110000101\rangle \\
 & + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |110100101\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |111010101\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |111110101\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |000000101\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |000100101\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |001010101\rangle \\
 & + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |001110101\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |010010101\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |010110101\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |011000101\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |011100101\rangle
 \end{aligned}$$

- ✓ Suppression des quatre qubits du syndrome:

$$\begin{aligned}
 |\psi_4\rangle = & \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10001\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10011\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10100\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10110\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11000\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11010\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11101\rangle - \\
 & \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11111\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00000\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00010\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00101\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00111\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01001\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01011\rangle - \\
 & \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01100\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01110\rangle
 \end{aligned}$$

❖ Décodage :

Application de circuit de décodage :

- Porte CNot(5,2) :

$$\begin{aligned}
 |\psi_5\rangle = & \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11001\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11011\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10100\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10110\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |11000\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |11010\rangle - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |10101\rangle - \\
 & \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |10111\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00000\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00010\rangle + \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01101\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01111\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |00001\rangle - \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |00011\rangle - \\
 & \frac{\beta}{2\sqrt{2}} |01100\rangle + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} |01110\rangle
 \end{aligned}$$

- Porte H(5) :

$$\begin{aligned}
 |\psi_5\rangle = & \frac{\beta}{4} |11000\rangle - \frac{\beta}{4} |11001\rangle - \frac{\alpha}{4} |11010\rangle + \frac{\alpha}{4} |11011\rangle + \frac{\alpha}{4} |10100\rangle + \frac{\alpha}{4} |10101\rangle - \frac{\beta}{4} |10110\rangle - \\
 & \frac{\beta}{4} |10111\rangle + \frac{\beta}{4} |11000\rangle + \frac{\beta}{4} |11001\rangle + \frac{\alpha}{4} |11010\rangle + \frac{\alpha}{4} |11011\rangle - \frac{\alpha}{4} |10100\rangle + \frac{\alpha}{4} |10101\rangle - \frac{\beta}{4} |10110\rangle + \frac{\beta}{4} |10111\rangle + \frac{\alpha}{4} \\
 & |00000\rangle + \frac{\alpha}{4} |00001\rangle + \frac{\beta}{4} |00010\rangle + \frac{\beta}{4} |00011\rangle + \frac{\beta}{4} |01100\rangle - \frac{\beta}{4} |01101\rangle + \frac{\alpha}{4} |01110\rangle - \frac{\alpha}{4} |01111\rangle + \frac{\alpha}{4} |00000\rangle - \frac{\alpha}{4} \\
 & |00001\rangle - \frac{\beta}{4} |00010\rangle + \frac{\beta}{4} |00011\rangle - \frac{\beta}{4} |01100\rangle - \frac{\beta}{4} |01101\rangle + \frac{\alpha}{4} |01110\rangle + \frac{\alpha}{4} |01111\rangle
 \end{aligned}$$

Après la simplification :

$$|\psi_5\rangle = \frac{\beta}{2} |11000\rangle + \frac{\alpha}{2} |11011\rangle + \frac{\alpha}{2} |10101\rangle - \frac{\beta}{2} |10110\rangle + \frac{\alpha}{2} |01110\rangle + \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\beta}{2} |00011\rangle - \frac{\beta}{2} |01101\rangle$$

• Porte CNot(1,2) :

$$|\psi_5\rangle = \frac{\beta}{2} |10000\rangle + \frac{\alpha}{2} |10011\rangle + \frac{\alpha}{2} |11101\rangle - \frac{\beta}{2} |11110\rangle + \frac{\alpha}{2} |01110\rangle + \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\beta}{2} |00011\rangle - \frac{\beta}{2} |01101\rangle$$

• Porte CNot(3,4) :

$$|\psi_5\rangle = \frac{\beta}{2} |10000\rangle + \frac{\alpha}{2} |10011\rangle + \frac{\alpha}{2} |11111\rangle - \frac{\beta}{2} |11100\rangle + \frac{\alpha}{2} |01100\rangle + \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\beta}{2} |00011\rangle - \frac{\beta}{2} |01111\rangle$$

• Porte CNot(4,5) :

$$|\psi_5\rangle = \frac{\beta}{2} |10000\rangle + \frac{\alpha}{2} |10010\rangle + \frac{\alpha}{2} |11110\rangle - \frac{\beta}{2} |11100\rangle + \frac{\alpha}{2} |01100\rangle + \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\beta}{2} |00010\rangle - \frac{\beta}{2} |01110\rangle$$

• Porte CNot(4,1) :

$$|\psi_5\rangle = \frac{\beta}{2} |10000\rangle + \frac{\alpha}{2} |00010\rangle + \frac{\alpha}{2} |01110\rangle - \frac{\beta}{2} |11100\rangle + \frac{\alpha}{2} |01100\rangle + \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\beta}{2} |10010\rangle - \frac{\beta}{2} |11110\rangle$$

• Porte H(4) :

$$|\psi_5\rangle = \frac{\beta}{2} |10000\rangle + \frac{\beta}{2} |10010\rangle + \frac{\alpha}{2} |00000\rangle - \frac{\alpha}{2} |00010\rangle + \frac{\alpha}{2} |01100\rangle - \frac{\alpha}{2} |01110\rangle - \frac{\beta}{2} |11100\rangle - \frac{\beta}{2} |11110\rangle + \frac{\alpha}{2} |01100\rangle + \frac{\alpha}{2} |01110\rangle + \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\alpha}{2} |00010\rangle + \frac{\beta}{2} |10000\rangle - \frac{\beta}{2} |10010\rangle - \frac{\beta}{2} |11100\rangle + \frac{\beta}{2} |11110\rangle$$

Après la simplification :

$$|\psi_5\rangle = \frac{\beta}{\sqrt{2}} |10000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |00000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |01100\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2}} |11100\rangle$$

• Porte CNot(2,3) :

$$|\psi_5\rangle = \frac{\beta}{\sqrt{2}} |10000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |00000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |01000\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2}} |11000\rangle$$

• Porte H(2) :

$$|\psi_5\rangle = \frac{\beta}{2} |10000\rangle + \frac{\beta}{2} |11000\rangle + \frac{\alpha}{2} |00000\rangle + \frac{\alpha}{2} |01000\rangle + \frac{\alpha}{2} |00000\rangle - \frac{\alpha}{2} |01000\rangle - \frac{\beta}{2} |10000\rangle + \frac{\beta}{2} |11000\rangle$$

Après la simplification :

$$|\psi_5\rangle = \alpha |00000\rangle + \beta |11000\rangle$$

- Porte CNot(1,2) :

$$|\psi_5\rangle = \alpha |00000\rangle + \beta |10000\rangle$$

- ✓ Suppression des qubits auxiliaires :

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

III.7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau correcteur quantique basé sur les codes stabilisateurs. L'idée de base est de trouver un encodage tel que :

- On peut définir un ensemble d'opérateurs qui ont la particularité d'avoir comme vecteurs propres les états erronés ainsi que l'état sans erreur.
- La mesure des valeurs propres associées à ces opérateurs ne modifie pas l'état traité.
- Le résultat de la mesure signe sans ambiguïté le type d'erreur. Une fois l'erreur détectée, il suffit d'apporter la correction adéquate.

Dans la solution proposée, il s'agit d'un encodeur à 5 qubits utilisant 10 portes quantiques seulement. Les propriétés spécifiques des opérateurs de Pauli nous a permis de repérer facilement l'ensemble des stabilisateurs. Pour valider notre proposition, une vérification manuelle des résultats a été réalisé. On a constaté que c'est une tâche très difficile, donc l'automatisation des calculs par un simulateur constitue la solution la plus appropriée. Cela fera l'objet du chapitre suivant.