

Chapitre II

Invariants et solutions particulières

Table des matières

II-1 Invariants dans le cas bilithologique 2D	46
II-1.1 Erosion ($\partial_t h < 0$)	47
II-1.2 Sédimentation ($\partial_t h > 0$)	47
II-2 Applications	48
II-2.1 Un exemple dans le cas $k_1 = k_2$	48
II-2.2 Calcul de solutions “stationnaires” : $\partial_t c = 0, \partial_t^2 h = 0$	51
II-3 Généralisation au cas multi-lithologique 2D	57
II-4 Généralisation au cas multi-lithologique 3D	65

Dans ce chapitre, nous allons nous placer dans le cas sans contrainte sur le taux d'érosion, et nous allons chercher à déterminer des solutions particulières du problème.

Pour cela, nous allons démontrer l'existence d'invariants, tout d'abord dans le cas 2D bilitologique (voir §II-1), puis en étendant les résultats obtenus au cas 2D multi-lithologique (§II-3) et au cas général 3D multi-lithologique (§II-4). Ces invariants vont ensuite nous permettre de calculer des solutions particulières quasi-stationnaires du problème 2D (voir §II-2 et §II-3) utilisées dans le chapitre III pour effectuer des calculs d'erreurs sur les schémas de discrétisation.

Nous allons donc étudier le problème simplifié suivant pour tout $i = 1, \dots, L$, sur $\mathcal{D} = \Omega \times (0, T)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1$ ou 2 :

$$\text{Surface : } \begin{cases} c_i|_{z=h} \partial_t h + \text{div}[-c_i^s k_i \nabla h] = 0, \\ \sum_{i=1}^L c_i^s = 1, \end{cases} \quad \text{sur } \mathcal{D} = \Omega \times (0, T), \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Colonnes : } \begin{cases} \partial_t c_i = 0 & \text{sur } \{(x, z, t) \mid (x, t) \in \mathcal{D} \text{ et } z \in (0, h(x, t))\}, \\ c_i|_{z=h} = c_i^s & \text{sur } \{(x, t) \in \mathcal{D} \mid \partial_t h(x, t) > 0\}, \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$$\text{CI et CL : } \begin{cases} (-c_i^s k_i \nabla h) \cdot \vec{n} = \varphi_{e,i} & \text{sur } \Gamma_e, i = 1, \dots, L, \\ -(\sum_{i=1}^L c_i^s k_i) \nabla h \cdot \vec{n} = \varphi_s & \text{sur } \Gamma_s, \\ h|_{t=0} = h^0 & \text{sur } \Omega, \\ c_i|_{t=0} = c_i^0 & \text{sur } \{(x, z) \mid x \in \Omega, z \in (0, h|_{t=0}(x))\}, \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

où on a noté \vec{n} le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$ sortant de Ω . Nous supposons par la suite que les coefficients de diffusion k_i sont indépendants de la bathymétrie pour chaque lithologie ($k_i^m = k_i^c = k_i$), et que, pour tout $i = 1, \dots, L$,

$$c_i^0(x, z) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^L c_i^0(x, z) = 1 \quad \text{sur } \{(x, z) \mid x \in \Omega, z \in (0, h|_{t=0}(x))\}.$$

II-1 Invariants dans le cas bilitologique 2D

Nous nous plaçons ici dans le cas bilitologique et nous utiliserons, dans ce paragraphe et le suivant, les notations :

$$c = c_1^s, \quad \bar{c} = c_1, \quad c^* = \bar{c}|_{z=h}, \quad \varphi_i = -c_i^s k_i \partial_x h \quad \text{pour } i = 1, 2, \quad \text{et } \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Par ailleurs, on ne cherche ici que des solutions du problème (II.1)-(II.3) telles que la concentration c soit bornée dans l'intervalle $[0, 1]$. On peut alors définir

$$\mu = \mu(c) = \frac{ck_1}{ck_1 + (1-c)k_2} \in [0, 1].$$

On en déduit alors que $\varphi_1 = \mu\varphi$ et $\varphi_2 = (1 - \mu)\varphi$.

Enfin, en sommant les équations de conservation (II.1) sur \mathcal{D} pour $i = 1, 2$, on obtient :

$$\partial_t h + \partial_x \varphi = 0 \quad \text{sur } \mathcal{D}. \quad (\text{II.4})$$

Dans toute la suite, on supposera h au moins de classe C^2 sur $\bar{\mathcal{D}}$.

II-1.1 Érosion ($\partial_t h < 0$)

En érosion, $c^* = \bar{c}|_{z=h}$ est connu. En utilisant (II.4), on obtient l'équation suivante, valable sur tout ouvert \mathcal{O} de $\bar{\mathcal{D}}$ où $\partial_t h < 0$:

$$-c^* \partial_x \varphi + \partial_x(\mu \varphi) = 0. \quad (\text{II.5})$$

On a de plus $c^* \partial_x \varphi \in L^\infty(\mathcal{O})$ d'après [25].

II-1.2 Sédimentation ($\partial_t h > 0$)

En sédimentation, (II.2) donne $\bar{c}|_{z=h} = c$. L'équation de conservation sur \mathcal{D} pour la lithologie 1 s'écrit donc, en utilisant (II.4),

$$-c \partial_x \varphi + \partial_x(\mu \varphi) = 0. \quad (\text{II.6})$$

A. Cas $k_1 = k_2$

Dans le cas où $k_1 = k_2 = k$, on a $\mu = c$ et $\varphi = -k \partial_x h$. La variable hauteur de sédiments se découple donc des autres inconnues et vérifie le problème parabolique

$$\partial_t h - k \partial_x^2 h = 0 \text{ sur } \mathcal{D}, \quad (\text{II.7})$$

avec des conditions aux bords de type Neumann.

En supposant Ω un intervalle borné de \mathbb{R}^d de classe C^∞ et en choisissant h^0 et les flux aux bords selon les hypothèses du Théorème 5.3 de [41] (p. 320), l'équation (II.7) admet une unique solution $h \in C^2(\bar{\mathcal{D}})$. Alors φ est de classe C^1 sur $\bar{\mathcal{D}}$ et la solution h peut ensuite être utilisée pour déterminer les concentrations. Plaçons-nous sur un ouvert \mathcal{O} de $\bar{\mathcal{D}}$ où $\partial_t h > 0$ et où le flux φ ne s'annule pas, et supposons que le problème (II.1)-(II.3) admet une solution c bornée dans l'intervalle $[0, 1]$. Alors, d'après (II.6),

$$\partial_x c = 0 \text{ sur } \mathcal{O}. \quad (\text{II.8})$$

B. Cas général

Dans le cas général, on a le résultat suivant :

Proposition II-1.1. *Supposons que le problème (II.1)-(II.3) admette une solution $h \in C^2(\bar{\mathcal{D}})$ et une solution $c \in L^\infty(\mathcal{D})$ bornée dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que, sur tout ouvert \mathcal{O} de $\bar{\mathcal{D}}$ où $\partial_t h > 0$ et où φ ne s'annule pas, μ soit dérivable par rapport à x avec $\partial_x \mu \in L^\infty(\mathcal{O})$. Alors, sur chacun de ces ouverts \mathcal{O} et en notant $\alpha = \max(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2})$, le système (II.1)-(II.3) possède l'invariant*

$$J(\mu, \varphi) = \frac{(\mu |\varphi|)^{\alpha k_1}}{(\mu |\varphi|)^{\alpha k_1} + ((1 - \mu) |\varphi|)^{\alpha k_2}} \quad (\text{II.9})$$

tel que $\partial_x J = 0$ sur \mathcal{O} .

Preuve. Soit \mathcal{O} un ouvert de \bar{D} où $\partial_t h > 0$ et où le flux φ ne s'annule pas. On suppose tout d'abord que $\varphi > 0$ sur cet ouvert, et on notera par la suite $P_1 = \alpha k_1 \geq 1$, $P_2 = \alpha k_2 \geq 1$ et $D = (\varphi_1^{P_1} + \varphi_2^{P_2})^{-1}$. Alors :

$$\partial_\varphi J = \frac{1}{D^2} \varphi_1^{P_1} \varphi_2^{P_2} (P_1 - P_2) \quad \text{et} \quad \partial_\mu J = \frac{1}{D^2} \varphi \varphi_1^{P_1-1} \varphi_2^{P_2-1} (P_1 \varphi_2 + P_2 \varphi_1).$$

Or,

$$\partial_x J = \partial_\varphi J \partial_x \varphi + \partial_\mu J \partial_x \mu,$$

et (II.6) donne, grâce aux hypothèses faites sur les solutions,

$$\varphi \partial_x \mu = (c - \mu) \partial_x \varphi.$$

Par suite,

$$\partial_x J = \frac{\partial_x \varphi}{D^2} \varphi_1^{P_1-1} \varphi_2^{P_2-1} \left[(P_1 - P_2) \varphi_1 \varphi_2 + \varphi (c - \mu) (P_1 \varphi_2 + P_2 \varphi_1) \right],$$

ce qui s'écrit encore

$$\partial_x J = \frac{\partial_x \varphi}{D^2} \varphi_1^{P_1-1} \varphi_2^{P_2-1} \left[(P_1 - P_2) \varphi_1 \varphi_2 + \varphi [(c - \mu) P_1 \varphi_2 - ((1 - c) - (1 - \mu)) P_2 \varphi_1] \right]. \quad (\text{II.10})$$

Or

$$c(1 - \mu)P_1 = (1 - c)\mu P_2 = \alpha(ck_1 + (1 - c)k_2),$$

donc en multipliant cette dernière égalité par φ et en utilisant les définitions $\varphi_1 = \mu \varphi$, $\varphi_2 = (1 - \mu) \varphi$, on obtient

$$c \varphi_2 P_1 = (1 - c) \varphi_1 P_2,$$

d'où finalement (II.10) donne $\partial_x J = 0$.

Dans le cas où $\varphi < 0$ sur \mathcal{O} , le même raisonnement s'applique. \square

II-2 Applications

Nous allons maintenant calculer des solutions particulières du problème (II.1)-(II.3) dans le cas 2D bilithologique en utilisant les résultats du paragraphe précédent.

II-2.1 Un exemple dans le cas $k_1 = k_2$

Nous considérons ici le problème (II.1)-(II.3) dans le cas bilithologique avec $k_1 = k_2 = k$, des conditions aux bords de type Neumann homogènes, et les conditions initiales suivantes :

$$h^0(x) = 1 + \cos \frac{4\pi x}{l} \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad c^0(x, z) = c^0(x) = \frac{x}{l} \text{ sur } \{(x, z) \mid x \in \Omega, z \in (0, h^0(x))\}.$$

Alors, en utilisant une méthode de séparation des variables, on peut montrer que l'équation parabolique (II.7) admet l'unique solution h égale à

$$h(x, t) = 1 + \cos \left(\frac{4\pi x}{l} \right) e^{-kt \left(\frac{4\pi}{l} \right)^2} \in C^\infty(\bar{D}).$$

On en déduit que le flux φ vaut

$$\varphi(x, t) = \frac{4\pi k}{l} e^{-kt \left(\frac{4\pi}{l}\right)^2} \sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right) \in C^\infty(\bar{D}),$$

et s'annule donc en $x = 0, \frac{l}{4}, \frac{l}{2}$ et l . La dérivée $\partial_t h$ est du signe de $-\cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right)$, donc les zones du bassin en sédimentation et en érosion ne dépendent pas du temps (voir figure II.1). De même, le support de φ ne varie pas au cours du temps.

Nous allons maintenant chercher une solution $c = c_1^s$ du problème indépendante du temps et nous allons tout d'abord montrer qu'une telle solution est continue sur tout ouvert de $\bar{\Omega}$ où le flux φ ne s'annule pas. On se place donc sur un tel ouvert \mathcal{O} , à un instant donné $t > 0$. Comme $\partial_z c^0 = 0$ et qu'une zone en érosion l'est pour tout temps $t > 0$, la concentration de colonne est égale à la concentration initiale c^0 et on a en érosion $\bar{c}|_{z=h} = c^* = c^0 \in C^1(\bar{\Omega})$. Ainsi, en utilisant l'hypothèse $c \in L^\infty(\mathcal{O})$, la régularité de h donne $c \partial_x h(\cdot, t) \in L^\infty(\mathcal{O})$ et $c^* \partial_t h(\cdot, t) = \partial_x (c k \partial_x h(\cdot, t)) \in L^\infty(\mathcal{O})$. On en déduit que $c \partial_x h(\cdot, t) \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$, et donc que $c \partial_x h(\cdot, t) \in C^0(\bar{\mathcal{O}})$.

On a vu que, dans les zones en érosion du bassin ($\partial_t h < 0$), c'est-à-dire $x \in (0, \frac{l}{8}), (\frac{3l}{8}, \frac{5l}{8})$ et $(\frac{7l}{8}, l)$, $c^* = c^0$. L'équation (II.5) peut donc se réécrire :

$$\partial_x [(c - c^0) \varphi] = -\frac{\varphi}{l}.$$

En intégrant cette équation, on obtient, pour tout $x \in (0, \frac{l}{8}) \cup (\frac{3l}{8}, \frac{l}{2}) \cup (\frac{l}{2}, \frac{5l}{8}) \cup (\frac{7l}{8}, l)$,

$$c(x) = \frac{x}{l} + \frac{\cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right) - 1}{4\pi \sin\left(\frac{4\pi x}{l}\right)} \in [0, 1].$$

De plus, on voit que $\lim_{x \rightarrow (\frac{l}{2})^-} c(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{l}{2})^+} c(x) = \frac{1}{2}$. On peut donc prolonger c par continuité en $x = \frac{l}{2}$ en posant $c(\frac{l}{2}) = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, d'après le paragraphe II-1.2, sur tout ouvert en sédimentation où le flux φ ne s'annule pas, c'est-à-dire sur les intervalles $(\frac{l}{8}, \frac{l}{4}), (\frac{l}{4}, \frac{3l}{8}), (\frac{5l}{8}, \frac{3l}{4})$ et $(\frac{3l}{4}, \frac{7l}{8})$ ici, toute solution c bornée dans l'intervalle $[0, 1]$ satisfait $\partial_x c = 0$ sur ces ouverts. En utilisant la continuité de c montrée précédemment, on obtiendrait :

$$c(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} & \text{si } x \in [\frac{l}{8}, \frac{l}{4}), \\ \frac{3}{8} + \frac{1}{4\pi} & \text{si } x \in (\frac{l}{4}, \frac{3l}{8}], \\ \frac{5}{8} - \frac{1}{4\pi} & \text{si } x \in [\frac{5l}{8}, \frac{3l}{4}), \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{4\pi} & \text{si } x \in (\frac{3l}{4}, \frac{7l}{8}], \end{cases}$$

et on vérifie que c est alors bien une solution de (II.6) indépendante du temps.

La solution obtenue pour c est représentée sur la figure II.1. Cet exemple illustre la discontinuité possible de la concentration de surface aux points où le flux φ s'annule : ici, la concentration de surface est discontinue aux points bas où il y a sédimentation, mais est continue aux points hauts en érosion.

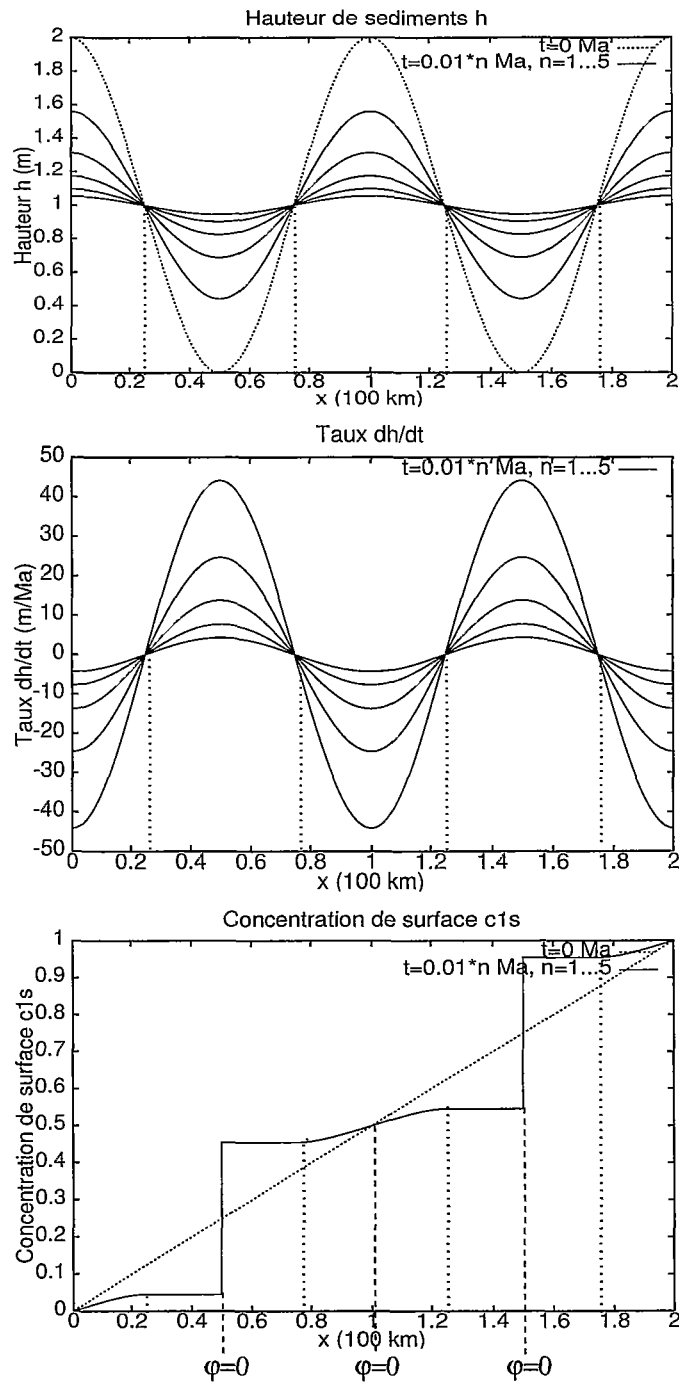


Figure II.1 : Epaisseur de sédiments h , concentration de surface c_1^s et taux $\partial_t h$ pour l'exemple du paragraphe II-2.1.

II-2.2 Calcul de solutions "stationnaires" : $\partial_t c = 0, \partial_t^2 h = 0$

Les conditions aux bords sont ici notées :

$$\begin{aligned} \varphi|_{x=0} &= f_0, \varphi|_{x=l} = f_1, \\ \text{si } f_0 > 0, \varphi_1|_{x=0} &= \mu_0 f_0, \varphi_2|_{x=0} = (1 - \mu_0) f_0, \\ \text{si } f_1 < 0, \varphi_1|_{x=l} &= \mu_1 f_1, \varphi_2|_{x=l} = (1 - \mu_1) f_1, \end{aligned}$$

avec $\mu_0, \mu_1 \in [0, 1]$, et ces conditions sont supposées indépendantes du temps. Dans ce paragraphe, nous allons chercher des solutions du problème (II.1)-(II.3) telles que $c \in [0, 1]$ et

$$\partial_t^2 h = 0 \text{ sur } \mathcal{D}, \partial_t c = 0 \text{ sur } \Omega. \quad (\text{II.11})$$

Supposant h et c suffisamment régulières, on obtient, en dérivant l'équation (II.4) par rapport au temps et en utilisant l'hypothèse (II.11) :

$$\partial_x [-(k_1 c + k_2(1 - c)) \partial_x (\partial_t h)] = 0.$$

Les flux imposés au bord du domaine étant indépendants du temps, on a également :

$$[-(k_1 c + k_2(1 - c)) \partial_x (\partial_t h)]|_{x=0} = [-(k_1 c + k_2(1 - c)) \partial_x (\partial_t h)]|_{x=l} = 0.$$

On en déduit que : $\partial_t h = -\partial_x \varphi$ est indépendant de x et de t , et par suite : $\varphi = x \left(\frac{f_1 - f_0}{l} \right) + f_0$ et $\partial_t h = \frac{f_0 - f_1}{l}$.

Réciproquement, toute solution du système (II.1)-(II.3) telle que :

$$\partial_t h = \frac{f_0 - f_1}{l} \text{ et } \varphi(x) = x \left(\frac{f_1 - f_0}{l} \right) + f_0 \quad (\text{II.12})$$

vérifie (II.11), et $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$.

Nous allons maintenant déterminer les solutions du problème (II.1)-(II.3) pour les concentrations en fonction du signe des flux aux bords f_0 et f_1 . Pour cela, nous allons utiliser le fait que le taux $\partial_t h$ est indépendant de $x \in \Omega$ et du temps t : le bassin est soit toujours en sédimentation, soit toujours en érosion, et l'épaisseur de sédiments évolue à vitesse constante.

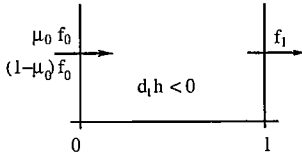
A. Cas $k_1 = k_2$

Erosion : $\partial_t h < 0$, i.e. $f_0 - f_1 < 0$

Le signe de $\partial_t h$ ne dépendant pas du temps, on est ici toujours en érosion. Par suite $\bar{c} = c^0$, donc, en se plaçant dans le cas $\partial_z c^0 = 0, c^* = c^0$ et l'équation (II.5) donne

$$\partial_x (c \varphi) = c^0(x) \left(\frac{f_1 - f_0}{l} \right). \quad (\text{II.13})$$

- 1^{er} cas : $f_0 > 0$

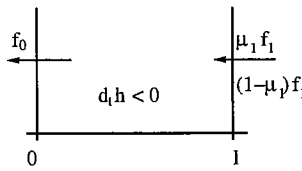


Alors $f_1 > 0$, φ ne s'annule pas sur $\bar{\Omega}$ et on a une condition aux limites sur c au bord $x = 0$ où le flux est entrant. En intégrant l'équation (II.13) entre 0 et x , on obtient :

$$c(x) = \frac{\mu_0 f_0 + \frac{f_1 - f_0}{l} \int_0^x c^0(y) dy}{x \left(\frac{f_1 - f_0}{l} \right) + f_0} \quad \text{sur } [0, l].$$

Quelques exemples de solution pour c obtenus avec différentes valeurs de c^0 sont présentés sur la figure II.2.

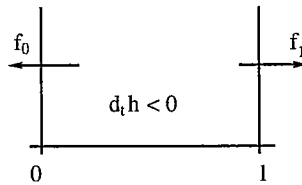
- 2^{eme} cas : $f_0 < 0, f_1 < 0$



Alors φ ne s'annule pas sur $\bar{\Omega}$ et on a une condition aux limites sur c au bord $x = l$ où le flux est entrant. Le raisonnement est le même qu'au cas précédent :

$$c(x) = \frac{\mu_1 f_1 - \frac{f_1 - f_0}{l} \int_x^l c^0(y) dy}{x \left(\frac{f_1 - f_0}{l} \right) + f_0} \quad \text{sur } [0, l].$$

- 3^{eme} cas : $f_0 \leq 0, f_1 \geq 0$



Le flux φ s'annule alors en $x^* = \frac{f_0 l}{f_0 - f_1} \in \bar{\Omega}$ et il n'y a pas de flux entrant aux bords. En intégrant l'équation (II.13) entre x^* et x , on obtient :

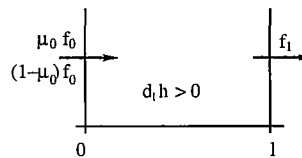
$$c(x) = \frac{\frac{f_1 - f_0}{l} \int_{x^*}^x c^0(y) dy}{x \left(\frac{f_1 - f_0}{l} \right) + f_0} \quad \text{sur } [0, l] \setminus \{x^*\},$$

et on peut prolonger c par continuité en x^* en posant $c(x^*) = c^0(x^*)$. Dans le cas où c^0 est constante, on obtient ainsi $c = c^0$, ce qui est logique puisque les deux lithologies ont le même comportement ($k_1 = k_2$) et qu'il n'y a pas d'apport extérieur de sédiments dans le bassin : les sédiments transportés à la surface sont les sédiments présents initialement dans le bassin qui ont été érodés et dont la composition n'a pas été modifiée par le transport. Un exemple de solution est présenté sur la figure II.3.

Sédimentation : $\partial_t h > 0$, i.e. $f_0 - f_1 > 0$

Dans ce cas, $c^* = c$, le flux φ s'annule en $x^* = \frac{f_0 l}{f_0 - f_1}$ et on a vu que $\partial_x c = 0$ sur tout ouvert de $\bar{\Omega}$ ne contenant pas x^* .

- 1^{er} cas : $f_1 > 0$



Alors $f_0 > 0$, φ ne s'annule pas sur $\bar{\Omega}$ et on a une condition aux limites sur c au bord $x = 0$ où le flux est entrant. On voit donc que $c(x) = \mu_0$ est solution du problème (II.6) sur $[0, l]$: les deux lithologies ayant le même comportement ($k_1 = k_2$), les sédiments déposés ont la même composition que les sédiments entrant en $x = 0$.

- 2^{eme} cas : $f_1 < 0, f_0 < 0$

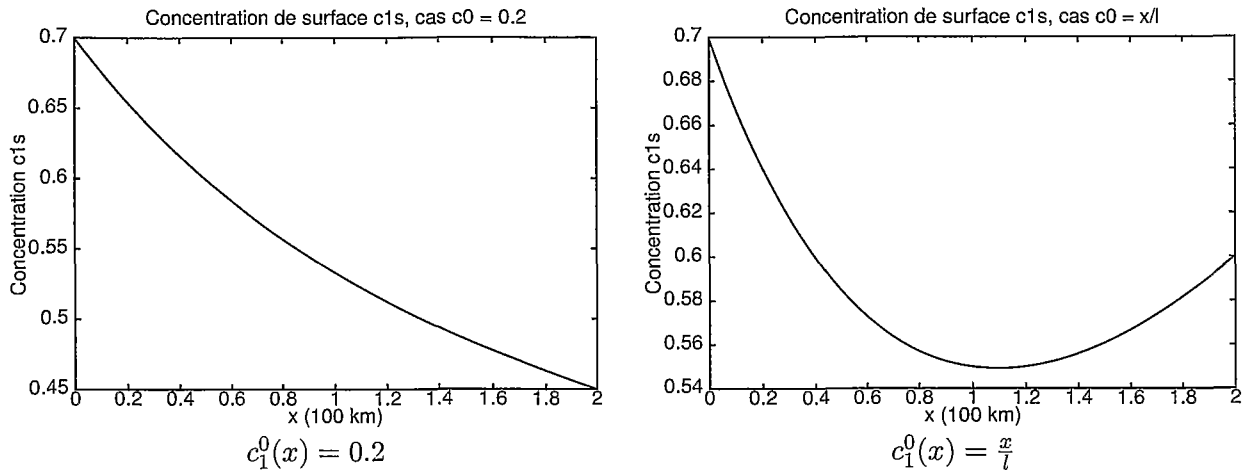


Figure II.2 : Concentration de surface c_1^s obtenue dans le cas “stationnaire” bilitologique, en érosion, avec $k_1 = k_2 = 5.10^4 m^2/an$, $f_0 = 0.1 m^2/an$, $f_1 = 0.2 m^2/an$, $\mu_0 = 0.7$ et différentes valeurs de c_1^0 .

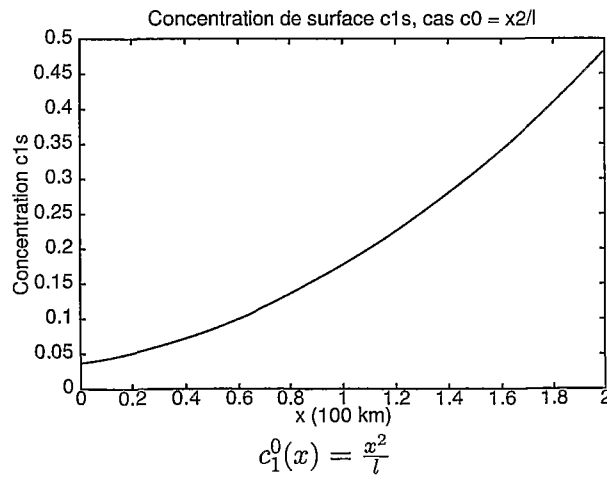
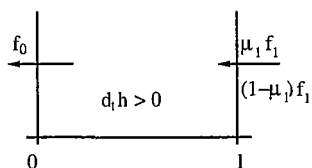
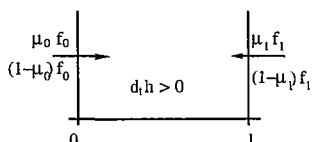


Figure II.3 : Concentration de surface c_1^s obtenue dans le cas “stationnaire” bilitologique, en érosion, avec $k_1 = k_2 = 5.10^4 m^2/an$, $f_0 = -0.1 m^2/an$, $f_1 = 0.2 m^2/an$, $\mu_0 = 0.7$ et $c_1^0 = x^2/l$.



Alors $x^* \notin \bar{\Omega}$, et le même raisonnement que précédemment donne $c(x) = \mu_1$ solution de (II.6) sur $[0, l]$.

• 3^{eme} cas : $f_1 < 0, f_0 > 0$



Alors $x^* \in \Omega$, et les conditions entrantes aux bords donnent

$$c(x) = \begin{cases} \mu_0 & \text{sur } [0, x^*], \\ \mu_1 & \text{sur } (x^*, l], \end{cases}$$

solution de (II.6) sur $[0, l] \setminus \{x^*\}$.

Remarque II-2.1. Si $f_1 = 0$ dans le 1^{er} cas (resp. $f_0 = 0$ dans le 2^{eme} cas), le résultat obtenu pour μ (égal à c ici) n'est plus valable que sur $[0, l)$ (resp. sur $(0, l]$).

Remarque II-2.2. Dans le cas particulier où $f_0 = f_1 \neq 0$, on a $\varphi = f_0$ et $\partial_x(\mu f_0) = 0$ d'après (II.6). On en déduit que c est constante, et est donc égale à μ_0 si $f_0 > 0$, et à μ_1 si $f_0 < 0$.

Quelques exemples de solution pour c obtenus avec différentes valeurs des flux aux bords f_0 et f_1 sont présentés sur la figure II.4.

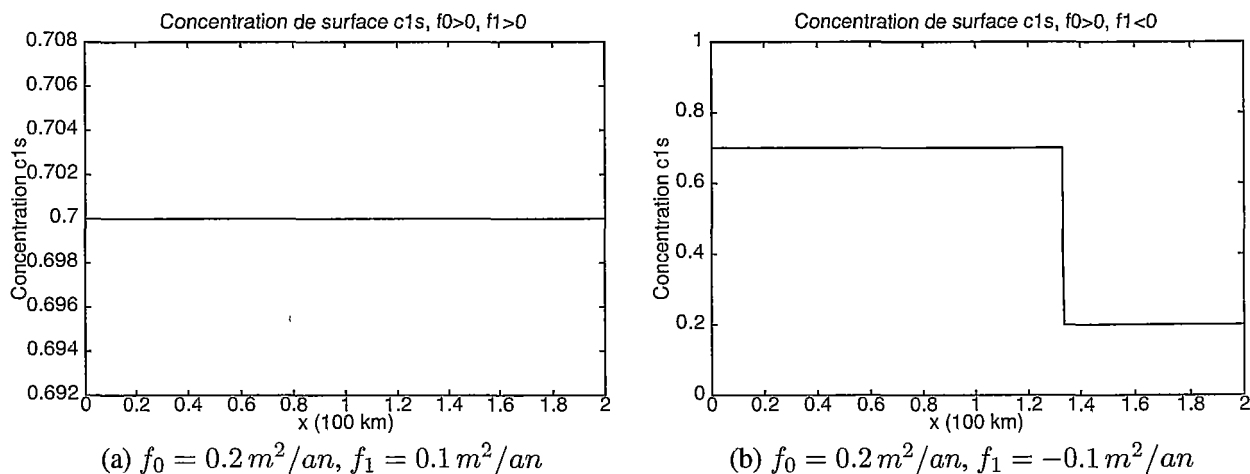


Figure II.4 : Concentration de surface c_1^s obtenue dans le cas "stationnaire" bilithologique, en sédimentation, avec $k_1 = k_2 = 5.10^4 \text{ m}^2/an$, $\mu_0 = 0.7$, $\mu_1 = 0.2$, et différentes valeurs de f_0 et f_1 .

B. Cas $k_1 \neq k_2$

Erosion : $\partial_t h < 0$, i.e. $f_0 - f_1 < 0$

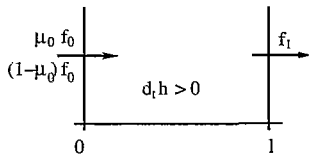
En érosion, on obtient pour μ les mêmes résultats que ceux obtenus pour c dans le cas $k_1 = k_2$ (le flux φ est

indépendant des coefficients de diffusion).

Sédimentation : $\partial_t h > 0$, i.e. $f_0 - f_1 > 0$

Dans ce cas, $c^* = c$ et le flux φ s'annule en $x^* = \frac{f_0 l}{f_0 - f_1}$. De plus, φ étant de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$, on déduit de (II.6) grâce à l'hypothèse $c \in L^\infty(\mathcal{O})$ que $\partial_x \mu \in L^\infty$ sur tout ouvert de $\bar{\Omega}$ ne contenant pas x^* et on peut donc appliquer la Proposition II-1.1.

• 1^{er} cas : $f_1 > 0$



Alors $f_0 > 0$ et φ ne s'annule pas sur $\bar{\Omega}$. On peut donc appliquer la Proposition II-1.1 en considérant la condition aux limites entrante en $x = 0$. Si $\mu_0 \in (0, 1)$, on a nécessairement $\mu \in (0, 1)$ (d'après (II.9), comme f_0 et φ sont non nuls, si $\mu = 0$ (resp. $\mu = 1$), alors $\mu_0 = 0$ (resp. $\mu_0 = 1$)). On en déduit que $J \in (0, 1)$ et que $\bar{J} = \frac{J}{1-J}$ est également un invariant du problème. La valeur de μ est donc donnée implicitement sur $[0, l]$ par l'équation

$$\mu^{-k_1} (1 - \mu)^{k_2} = \mu_0^{-k_1} (1 - \mu_0)^{k_2} \left(1 - \frac{(f_0 - f_1)x}{f_0 l} \right)^{k_1 - k_2},$$

qui admet pour tout $x \in [0, l]$ une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. En effet, la fonction $\mu \mapsto \mu^{-k_1} (1 - \mu)^{k_2}$ est monotone, décroissante et surjective de $[0, 1]$ dans $[0, +\infty)$.

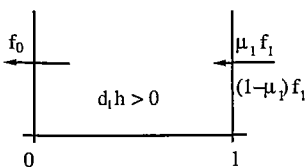
Par ailleurs, en notant $r = k_1/k_2$, l'équation précédente se réécrit :

$$\frac{1 - \mu}{\mu^r} = \frac{1 - \mu_0}{\mu_0} \left(\frac{F(x)}{\mu_0} \right)^{r-1}$$

où on a noté $F(x) = 1 - \frac{(f_0 - f_1)x}{f_0 l}$. On voit donc que, si $F(x) < \mu_0$, c'est-à-dire $x > \bar{x} = \frac{(1 - \mu_0)f_0 l}{f_0 - f_1}$, alors μ tend vers 1 quand $r \rightarrow \infty$. Dans le cas contraire ($F(x) > \mu_0$), μ tend vers 0 quand $r \rightarrow \infty$. On tend donc vers une répartition discontinue des sédiments quand le rapport entre les coefficients de diffusion tend vers l'infini.

Enfin, si $\mu_0 \in \{0, 1\}$, la Proposition II-1.1 donne $\mu = \mu_0$ sur $[0, l]$.

• 2^{eme} cas : $f_1 < 0, f_0 < 0$

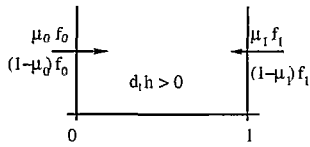


Alors $x^* \notin \bar{\Omega}$, et, si $\mu_1 \in (0, 1)$, le même raisonnement que précédemment donne μ de façon unique dans $[0, 1]$ par :

$$\mu^{-k_1} (1 - \mu)^{k_2} = \mu_1^{-k_1} (1 - \mu_1)^{k_2} \left(1 + \frac{(f_0 - f_1)(l - x)}{f_1 l} \right)^{k_1 - k_2} \quad \text{sur } [0, l].$$

Sinon, $\mu = \mu_1$ sur $[0, l]$.

• 3^{eme} cas : $f_1 < 0, f_0 > 0$



Alors $x^* \in \Omega$. Tout d'abord, dans le cas où μ_0 et μ_1 sont dans l'ouvert $(0, 1)$, le même raisonnement que dans les cas précédents donne :

$$\begin{cases} \mu^{-k_1} (1 - \mu)^{k_2} = \mu_0^{-k_1} (1 - \mu_0)^{k_2} \left(1 - \frac{(f_0 - f_1)x}{f_0 l}\right)^{k_1 - k_2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{f_0 l}{f_0 - f_1}\right), \\ \mu^{-k_1} (1 - \mu)^{k_2} = \mu_1^{-k_1} (1 - \mu_1)^{k_2} \left(1 + \frac{(f_0 - f_1)(l - x)}{f_1 l}\right)^{k_1 - k_2} & \text{si } x \in \left(\frac{f_0 l}{f_0 - f_1}, l\right]. \end{cases}$$

Reste à déterminer μ en $x^* = \frac{f_0 l}{f_0 - f_1}$.

$k_1 > k_2 > 0$:

Si $x \in \left[0, \frac{f_0 l}{f_0 - f_1}\right)$, on a :

$$\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^{\frac{1}{k_2}} \left(\frac{1}{1 - \mu}\right)^{\left|\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right|} = \underbrace{\frac{1}{\mu_0^{\frac{1}{k_2}}} (1 - \mu_0)^{\frac{1}{k_1}} \left(1 - \frac{(f_0 - f_1)x}{f_0 l}\right)^{\left|\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right|}}_{\rightarrow 0 \left[x \rightarrow \left(\frac{f_0 l}{f_0 - f_1}\right)^-\right]}$$

Or, $\mu \in [0, 1]$, donc $\frac{1}{1 - \mu} \in [1, \infty)$ et ne peut donc tendre vers 0. Par suite, on doit avoir $\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^{\frac{1}{k_2}} \rightarrow 0 \left[x \rightarrow \left(\frac{f_0 l}{f_0 - f_1}\right)^-\right]$, ce qui implique $\mu \rightarrow 1$.

Si $x \in \left(\frac{f_0 l}{f_0 - f_1}, l\right]$, on a :

$$\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^{\frac{1}{k_2}} \left(\frac{1}{1 - \mu}\right)^{\left|\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right|} = \underbrace{\frac{1}{\mu_1^{\frac{1}{k_2}}} (1 - \mu_1)^{\frac{1}{k_1}} \left(1 + \frac{(f_0 - f_1)(l - x)}{f_1 l}\right)^{\left|\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right|}}_{\rightarrow 0 \left[x \rightarrow \left(\frac{f_0 l}{f_0 - f_1}\right)^+\right]}$$

Le même raisonnement que précédemment montre alors que l'on doit avoir $\mu \rightarrow 1 \left[x \rightarrow \left(\frac{f_0 l}{f_0 - f_1}\right)^+\right]$.

Ainsi, on peut prolonger μ par continuité en $x^* = \frac{f_0 l}{f_0 - f_1}$ en posant $\mu = 1$.

$k_2 > k_1 > 0$:

Un raisonnement similaire montre que l'on peut prolonger μ par continuité en $x^* = \frac{f_0 l}{f_0 - f_1}$ en posant $\mu = 0$. Au point bas x^* , les sédiments sont donc composés exclusivement de la lithologie la plus diffusive.

Par ailleurs, on peut montrer comme dans le premier cas ($f_1 > 0$) le résultat suivant, en notant $r = k_1/k_2$:

$$\begin{aligned} \text{Si } x < x^*, & \begin{cases} \text{si } x > \bar{x}_g = \frac{(1 - \mu_0) f_0 l}{f_0 - f_1}, & \mu \rightarrow 1 [r \rightarrow +\infty], \\ \text{si } x < \bar{x}_g, & \mu \rightarrow 0 [r \rightarrow +\infty]. \end{cases} \\ \text{Si } x > x^*, & \begin{cases} \text{si } x < \bar{x}_d = l - \frac{(\mu_1 - 1) f_1 l}{f_0 - f_1}, & \mu \rightarrow 1 [r \rightarrow +\infty], \\ \text{si } x > \bar{x}_d, & \mu \rightarrow 0 [r \rightarrow +\infty]. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Enfin, si $\mu_0 \in \{0, 1\}$ (resp. $\mu_1 \in \{0, 1\}$), alors μ est égal à μ_0 (resp. μ_1) sur $[0, x^*)$ (resp. sur $(x^*, l]$).

Remarque II-2.3. *Les remarques II-2.1 et II-2.2 sont encore valables ici.*

Quelques exemples de solution pour c obtenus avec différentes valeurs des flux aux bords et des coefficients de diffusion sont présentés sur la figure II.5.

Dans le cas où $f_0 > 0$ et $f_1 > 0$, le flux φ est strictement positif sur $\bar{\Omega}$, et par suite $\partial_x h < 0$. Ainsi, les sédiments ayant le coefficient de diffusion le plus élevé glissent les premiers au fond du bassin, i.e. vers $x = l$ où la topographie est la plus faible. Dans le cas II.5-(a), le point $\bar{x} = 2.4$ est en dehors du bassin et on retrouve le fait que $\mu \rightarrow 0$ quand $r = k_1/k_2 \rightarrow +\infty$: le flux sortant f_1 est suffisamment fort pour que les sédiments les plus diffusifs ne s'accumulent pas en $x = l$ et disparaissent quasiment lorsque $k_1 \gg k_2$. Dans le cas II.5-(b), le flux sortant f_1 est moins fort et les sédiments ayant le coefficient de diffusion le plus élevé s'accumulent vers $x = l$. Le point $\bar{x} = 1.33$ est dans le bassin et la répartition des sédiments est quasiment discontinue quand $r \rightarrow \infty$. Pour $k_1 = k_2$, on retrouve $c(x) = \mu_0 = 0.4$: les deux lithologies ayant le même comportement, la composition des sédiments dans le bassin correspond à celle des sédiments apportés à la frontière.

Pour des flux entrants à chaque bord du bassin (courbes II.5-(c) et II.5-(d)), le bassin a une forme de cuvette avec un point bas en x^* , où le flux φ s'annule et change de signe ($x^* = 4/3$ ici). Comme précédemment, les sédiments ayant le coefficient de diffusion le plus élevé glissent les premiers au fond du bassin, c'est-à-dire autour du point bas x^* . Pour $k_1 > k_2$, on retrouve le fait que μ , et donc c , vaut 1 en x^* . Pour $k_1 = k_2$, les deux lithologies ont le même comportement : la concentration de surface c_s^1 correspond donc, de part et d'autre du point bas, à la répartition dans les flux entrants donnée par μ_0 et μ_1 . Enfin, lorsque le rapport k_1/k_2 tend vers l'infini, on voit apparaître la répartition discontinue des sédiments aux points \bar{x}_g et \bar{x}_d donnée par (II.14).

II-3 Généralisation au cas multi-lithologique 2D

On se place ici dans le cas multi-lithologique, c'est-à-dire $L \geq 2$. Comme dans le paragraphe II-1, on ne cherche ici que des solutions du problème (II.1)-(II.3) telles que les concentrations c_i^s soient dans l'intervalle $[0, 1]$. On peut alors définir, pour tout $i = 1, \dots, L$,

$$\mu_i = \frac{c_i^s k_i}{\sum_{j=1}^L c_j^s k_j} \in [0, 1].$$

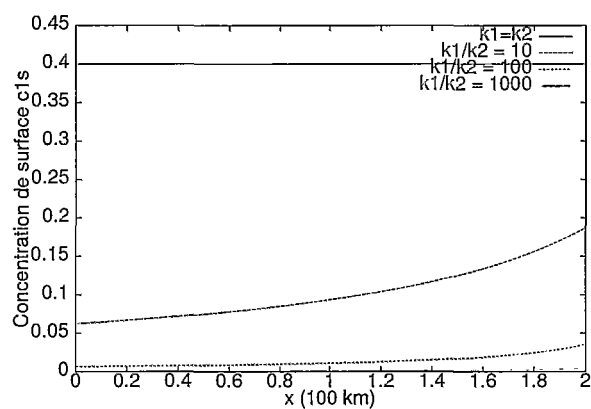
On notera par la suite $\varphi_i = -c_i^s k_i \partial_x h$, $\varphi = \sum_{i=1}^L \varphi_i$. On a donc $\varphi_i = \mu_i \varphi$ pour tout i .

En sommant les équations de conservation (II.1) sur \mathcal{D} pour tout $i = 1, \dots, L$, on obtient comme dans le cas bilithologique

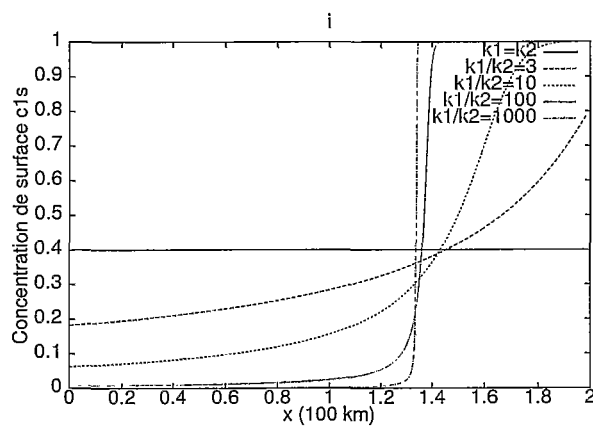
$$\partial_t h + \partial_x \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{D}. \quad (\text{II.15})$$

Dans toute la suite, on supposera h au moins de classe C^2 sur $\bar{\mathcal{D}}$.

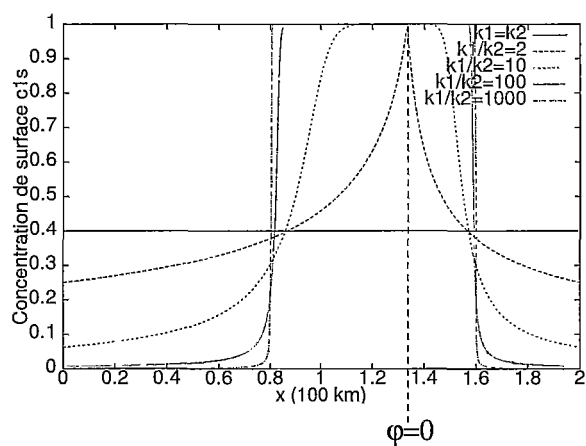
Les résultats obtenus en érosion dans le paragraphe II-1 se généralisent immédiatement au cas multi-lithologique.



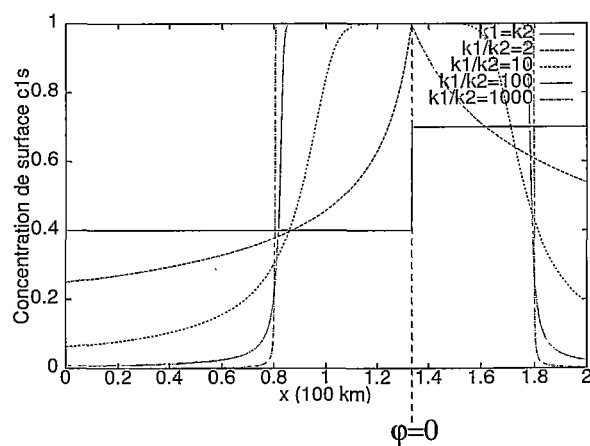
(a) $f_0 = 0.2 m^2/an$, $f_1 = 0.1 m^2/an$,
 $\mu_0 = 0.4$



(b) $f_0 = 0.2 m^2/an$, $f_1 = 0.02 m^2/an$,
 $\mu_0 = 0.4$



(c) $f_0 = 0.2 m^2/an$, $f_1 = -0.1 m^2/an$,
 $\mu_0 = \mu_1 = 0.4$



(d) $f_0 = 0.2 m^2/an$, $f_1 = -0.1 m^2/an$,
 $\mu_0 = 0.4$, $\mu_1 = 0.7$

Figure II.5 : Concentration de surface c_1^s obtenue dans le cas "stationnaire" bilithologique, en sédimentation, avec $k_2 = 10^4 m^2/an$ et différentes valeurs de f_0 , f_1 , μ_0 , μ_1 et k_1 .

Plaçons-nous maintenant en sédimentation ($\partial_t h > 0$). On a alors le résultat suivant :

Proposition II-3.1. *Supposons que le problème (II.1)-(II.3) admette une solution $h \in C^2(\bar{D})$ et des solutions $c_i^s \in L^\infty(D)$ bornées dans l'intervalle $[0, 1]$ pour tout $i = 1, \dots, L$ telles que, sur tout ouvert \mathcal{O} de \bar{D} où $\partial_t h > 0$ et où φ ne s'annule pas, μ_i soit dérivable par rapport à x avec $\partial_x \mu_i \in L^\infty(\mathcal{O})$. Alors, sur chacun de ces ouverts \mathcal{O} , le système (II.1)-(II.3) possède L invariants J_i , $i = 1, \dots, L$, tels que $\partial_x J_i = 0$ sur \mathcal{O} , donnés par*

$$J_i(\varphi, \mu_1, \dots, \mu_L) = \frac{|\varphi_i|^{P_i}}{\sum_{j=1}^L |\varphi_j|^{P_j}} \quad (\text{II.16})$$

où $P_j = \alpha k_j$ et $\alpha = \max_{j=1, \dots, L} \left(\frac{1}{k_j} \right)$. Par ailleurs, pour tout sous-ensemble $\{i_1, \dots, i_{L-1}\}$ de $\{1, \dots, L\}$ (les i_j étant distincts), les invariants $J_{i_1}, \dots, J_{i_{L-1}}$ sont indépendants.

Preuve. Soit \mathcal{O} un ouvert de \bar{D} où $\partial_t h > 0$ et où le flux φ ne s'annule pas. On suppose tout d'abord que $\varphi > 0$ sur \mathcal{O} . Soit $i \in \{1, \dots, L\}$. On notera par la suite $D = \left(\sum_{j=1}^L \varphi_j^{P_j} \right)^{-1}$. Alors :

$$\partial_\varphi J_i = \frac{1}{D^2} \varphi \left[\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1, \dots, L}} \varphi_i^{P_i} \varphi_j^{P_j} (P_i - P_j) \right], \quad \partial_{\mu_i} J_i = \frac{1}{D^2} P_i \varphi \varphi_i^{P_i-1} \left(\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1, \dots, L}} \varphi_j^{P_j} \right),$$

et, pour tout $k \neq i$, $k \in \{1, \dots, L\}$,

$$\partial_{\mu_k} J_i = -\frac{1}{D^2} P_k \varphi \varphi_i^{P_i} \varphi_k^{P_k-1}.$$

Or,

$$\partial_x J_i = \partial_\varphi J_i \partial_x \varphi + \partial_{\mu_i} J_i \partial_x \mu_i + \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1, \dots, L}} \partial_{\mu_j} J_i \partial_x \mu_j, \quad (\text{II.17})$$

et (II.6) donne, grâce aux hypothèses faites sur les solutions,

$$\varphi \partial_x \mu_j = (c_j^s - \mu_j) \partial_x \varphi \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, L.$$

Par suite,

$$\partial_x J_i = \frac{\partial_x \varphi}{D^2} \varphi \left[\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1, \dots, L}} \varphi_i^{P_i} \varphi_j^{P_j} (P_i - P_j) + \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1, \dots, L}} \varphi [\varphi_i^{P_i-1} \varphi_j^{P_j-1} (P_i \varphi_j (c_i^s - \mu_i) - P_j \varphi_i (c_j^s - \mu_j))] \right]. \quad (\text{II.18})$$

De plus, pour tout $j \in \{1, \dots, L\}$,

$$P_j \frac{c_j^s}{\mu_j} = \alpha k_j \sum_{p=1}^L c_p^s \frac{k_p}{k_j} = \alpha \sum_{p=1}^L c_p^s k_p$$

est indépendant de j , et par suite,

$$c_i^s \mu_j P_i = c_j^s \mu_i P_j \quad \text{pour tout } i, j = 1, \dots, L.$$

On déduit finalement, en utilisant ce résultat dans (II.18), que l'on a bien $\partial_x J_i = 0$.

Enfin, les variables $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_{L-1}}$ sont linéairement indépendantes ($\mu_{i_L} = 1 - \mu_{i_1} - \dots - \mu_{i_{L-1}}$), donc les invariants $J_{i_1}, \dots, J_{i_{L-1}}$ le sont aussi.

Dans le cas où $\varphi < 0$ sur \mathcal{O} , le même raisonnement s'applique. \square

Remarque II-3.1. Dans le cas $L = 2$, on retrouve le résultat de la Proposition II-1.1.

Remarque II-3.2. Si $k_i = k$ pour tout $i = 1, \dots, L$, alors $J_i = \mu_i = c_i^s$.

Enfin, on a également le résultat suivant :

Proposition II-3.2. On se place ici dans le cas $L \geq 3$. Supposons que le problème (II.1)-(II.3) admette une solution $h \in C^2(\bar{\mathcal{D}})$ et des solutions $c_i^s \in [0, 1]$ pour tout $i = 1, \dots, L$ telles que, sur tout ouvert \mathcal{O} de $\bar{\mathcal{D}}$ où $\partial_t h > 0$, μ_i soit dérivable par rapport à x avec $\partial_x \mu_i \in L^\infty(\mathcal{O})$. Alors, sur chacun de ces ouverts \mathcal{O} et pour tout triplet (i, j, k) avec i, j, k distincts dans $\{1, \dots, L\}$, le système (II.1)-(II.3) possède, sur tout ouvert de \mathcal{O} où μ_i, μ_j et μ_k sont strictement positifs, l'invariant J_{ijk} donné par

$$J_{ijk}(\mu_i, \mu_j, \mu_k) = \mu_i^{\frac{k_i(k_j - k_k)}{\mathbb{K}^2}} \mu_j^{\frac{k_j(k_k - k_i)}{\mathbb{K}^2}} \mu_k^{\frac{k_k(k_i - k_j)}{\mathbb{K}^2}} \quad (\text{II.19})$$

et tel que $\varphi \partial_x J_{ijk} = 0$, où on a noté $\mathbb{K} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L k_p$.

Preuve. Soit \mathcal{O} un ouvert de $\bar{\mathcal{D}}$ où $\partial_t h > 0$, et soit (i, j, k) un triplet avec i, j, k distincts dans l'ensemble $\{1, \dots, L\}$. On se place sur un ouvert de \mathcal{O} où μ_i, μ_j et $\mu_k > 0$. Alors

$$\partial_{\mu_i} J_{ijk} = \frac{k_i(k_j - k_k)}{\mathbb{K}^2} \frac{J_{ijk}}{\mu_i}, \quad \partial_{\mu_j} J_{ijk} = \frac{k_j(k_k - k_i)}{\mathbb{K}^2} \frac{J_{ijk}}{\mu_j}, \quad \partial_{\mu_k} J_{ijk} = \frac{k_k(k_i - k_j)}{\mathbb{K}^2} \frac{J_{ijk}}{\mu_k}, \quad (\text{II.20})$$

$$\text{et } \varphi \partial_x J_{ijk} = \varphi \sum_{p=i,j,k} \partial_{\mu_p} J_{ijk} \partial_x \mu_p. \quad (\text{II.21})$$

Or, on a vu que

$$(\mu_p - c_p^s) \partial_x \varphi + \varphi \partial_x \mu_p = 0 \quad \forall p = 1, \dots, L, \quad (\text{II.22})$$

d'où, en sommant les équations (II.22) pondérées par $\partial_{\mu_p} J_{ijk}$ pour $p = i, j, k$, il vient :

$$\left(\sum_{p=i,j,k} \partial_{\mu_p} J_{ijk} (\mu_p - c_p^s) \right) \partial_x \varphi + \left(\sum_{p=i,j,k} \partial_{\mu_p} J_{ijk} \partial_x \mu_p \right) \varphi = 0. \quad (\text{II.23})$$

De plus, (II.20) donne, en utilisant le fait que $k_p \frac{c_p^s}{\mu_p}$ est indépendant de p ,

$$\partial_{\mu_i} J_{ijk} (\mu_i - c_i^s) + \partial_{\mu_j} J_{ijk} (\mu_j - c_j^s) + \partial_{\mu_k} J_{ijk} (\mu_k - c_k^s) = 0.$$

On en déduit, en utilisant (II.21) et (II.23), que $\varphi \partial_x J_{ijk} = 0$, ce qui permet de conclure. \square

Applications

1. Exemple du paragraphe II-2.1

On reprend ici l'exemple du paragraphe II-2.1 en l'étendant au cas de 3 lithologies, avec $k_i = k$ pour $i = 1, 2, 3$. Les solutions pour h et φ sont les mêmes, et on prend comme conditions initiales pour les concentrations :

$$\begin{cases} c_1^0(x, z) = c_1^0(x) = x/2l \\ c_2^0(x, z) = c_2^0(x) = x/3l \end{cases} \quad \text{sur } \{(x, z) \mid x \in \Omega, z \in (0, h^0(x))\}.$$

Le même raisonnement que dans le paragraphe II-2.1 donne alors, pour les zones en érosion :

$$\begin{cases} c_1^s(x) = \frac{x}{2l} + \frac{\cos(\frac{4\pi x}{l}) - 1}{8\pi \sin(\frac{4\pi x}{l})} \in [0, 1], \\ c_2^s(x) = \frac{x}{3l} + \frac{\cos(\frac{4\pi x}{l}) - 1}{12\pi \sin(\frac{4\pi x}{l})} \in [0, 1], \end{cases} \quad \text{sur } (0, \frac{l}{8}) \cup (\frac{3l}{8}, \frac{l}{2}) \cup (\frac{l}{2}, \frac{5l}{8}) \cup (\frac{7l}{8}, l),$$

et on peut prolonger c_1^s (resp. c_2^s) par continuité en $x = \frac{l}{2}$ en posant $c_1^s(\frac{l}{2}) = \frac{1}{4}$ (resp. $c_2^s(\frac{l}{2}) = \frac{1}{6}$).

Dans les zones en sédimentation, on obtient :

$$c_1^s(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} - \frac{1}{8\pi} & \text{si } x \in [\frac{l}{8}, \frac{l}{4}), \\ \frac{3}{16} + \frac{1}{8\pi} & \text{si } x \in (\frac{l}{4}, \frac{3l}{8}], \\ \frac{5}{16} - \frac{1}{8\pi} & \text{si } x \in [\frac{5l}{8}, \frac{3l}{4}), \\ \frac{7}{16} + \frac{1}{8\pi} & \text{si } x \in (\frac{3l}{4}, \frac{7l}{8}], \end{cases} \quad c_2^s(x) = \begin{cases} \frac{1}{24} - \frac{1}{12\pi} & \text{si } x \in [\frac{l}{8}, \frac{l}{4}), \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{12\pi} & \text{si } x \in (\frac{l}{4}, \frac{3l}{8}], \\ \frac{5}{24} - \frac{1}{12\pi} & \text{si } x \in [\frac{5l}{8}, \frac{3l}{4}), \\ \frac{7}{24} + \frac{1}{12\pi} & \text{si } x \in (\frac{3l}{4}, \frac{7l}{8}]. \end{cases}$$

Les concentrations de surface c_1^s et c_2^s sont représentées sur la figure II.6.

2. Calcul de solutions "stationnaires" : $\partial_t c_i^s = 0, \partial_t^2 h = 0$

On s'intéresse ici au calcul de solutions stationnaires pour 3 lithologies en reprenant les résultats du paragraphe II-2.2.

Les conditions aux bords sont ici notées :

$$\begin{aligned} & \varphi|_{x=0} = f_0, \varphi|_{x=l} = f_l, \\ & \text{si } f_0 > 0, \varphi_1|_{x=0} = \mu_0^1 f_0, \varphi_2|_{x=0} = \mu_0^2 f_0, \varphi_3|_{x=0} = (1 - \mu_0^1 - \mu_0^2) f_0, \\ & \text{si } f_l < 0, \varphi_1|_{x=l} = \mu_l^1 f_l, \varphi_2|_{x=l} = \mu_l^2 f_l, \varphi_3|_{x=l} = (1 - \mu_l^1 - \mu_l^2) f_l \end{aligned}$$

avec $\mu_0^1, \mu_0^2, \mu_l^1$ et $\mu_l^2 \in [0, 1]$, $1 - \mu_0^1 - \mu_0^2 \in [0, 1]$, $1 - \mu_l^1 - \mu_l^2 \in [0, 1]$, et ces conditions sont supposées indépendantes du temps. Dans ce paragraphe, nous allons chercher des solutions du problème (II.1)-(II.3) telles que $c_i^s \in [0, 1]$ et

$$\partial_t^2 h = 0 \text{ sur } \mathcal{D}, \quad \partial_t c_i^s = 0 \text{ sur } \Omega \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

Alors on peut montrer, comme dans le cas bilithologique, que ces solutions vérifient (II.12).

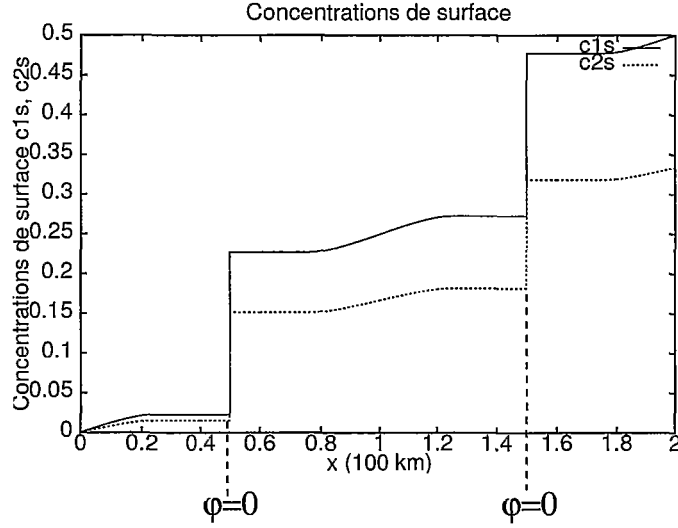
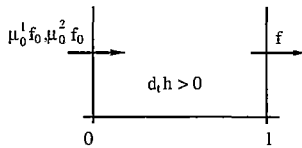


Figure II.6 : Concentrations de surface c_1^s et c_2^s pour l'exemple du paragraphe II-2.1 étendu à trois lithologies.

Sédimentation : $\partial_t h > 0$, i.e. $f_0 - f_1 > 0$

Dans ce cas, le flux φ s'annule en $x^* = \frac{f_0 l}{f_0 - f_1}$. Nous allons utiliser l'invariant défini dans la Proposition II-3.1 et dans lequel le flux diffusif φ est connu. Pour cela, nous allons supposer que le problème admet des solutions c_i^s bornées dans l'intervalle $[0, 1]$ pour $i = 1, 2, 3$. Alors, en utilisant la régularité de φ et l'équation (II.1), on montre que $\partial_x \mu_i \in L^\infty(\mathcal{O})$ sur tout ouvert \mathcal{O} de \bar{D} où $\partial_t h > 0$ et où φ ne s'annule pas.

• 1^{er} cas : $f_1 > 0$

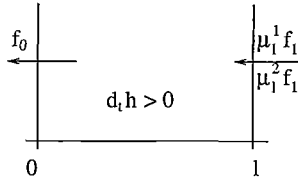


Alors $f_0 > 0$ et φ ne s'annule pas sur $\bar{\Omega}$. On peut donc appliquer la Proposition II-3.1 en considérant la condition aux limites entrante en $x = 0$. Si μ_0^1 et μ_0^2 sont non nuls avec $1 - \mu_0^1 - \mu_0^2 > 0$, on a alors nécessairement μ_1, μ_2 et μ_3 non nuls (d'après (II.16), comme f_0 et φ sont non nuls, si $\mu_1 = 0$ (resp. $\mu_2 = 0, \mu_3 = 0$), alors $\mu_0^1 = 0$ (resp. $\mu_0^2 = 0, 1 - \mu_0^1 - \mu_0^2 = 0$)). Ainsi, $J_i \in (0, 1)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $J_1/J_2, J_2/J_3$ sont également des invariants du problème. La valeur de μ_1 et μ_2 est donc donnée implicitement sur $[0, l]$ par :

$$\begin{cases} \mu_1^{-k_1} \mu_2^{k_2} = (\mu_0^1)^{-k_1} (\mu_0^2)^{k_2} \left(1 - \frac{(f_0 - f_1)x}{f_0 l}\right)^{k_1 - k_2}, \\ \mu_2^{-k_2} (1 - \mu_1 - \mu_2)^{k_3} = (\mu_0^2)^{-k_2} (1 - \mu_0^1 - \mu_0^2)^{k_3} \left(1 - \frac{(f_0 - f_1)x}{f_0 l}\right)^{k_2 - k_3}. \end{cases}$$

Si $\mu_0^1 \in \{0, 1\}$ (resp. $\mu_0^2 \in \{0, 1\}$), alors, d'après la Proposition II-3.1, $\mu_1 = \mu_0^1$ (resp. $\mu_2 = \mu_0^2$) sur $[0, l]$.

• 2^{eme} cas : $f_1 < 0, f_0 < 0$

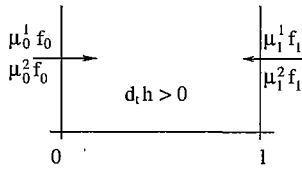


Alors $x^* \notin \bar{\Omega}$, et le même raisonnement que précédemment donne, si μ_l^1, μ_l^2 et $1 - \mu_l^1 - \mu_l^2$ sont non nuls,

$$\begin{cases} \mu_1^{-k_1} \mu_2^{k_2} = (\mu_l^1)^{-k_1} (\mu_l^2)^{k_2} \left(1 + \frac{(f_0 - f_1)(l-x)}{f_1 l} \right)^{k_1 - k_2}, \\ \mu_2^{-k_2} (1 - \mu_1 - \mu_2)^{k_3} = (\mu_l^2)^{-k_2} (1 - \mu_l^1 - \mu_l^2)^{k_3} \left(1 + \frac{(f_0 - f_1)(l-x)}{f_1 l} \right)^{k_2 - k_3}. \end{cases}$$

Si $\mu_l^1 \in \{0, 1\}$ (resp. $\mu_l^2 \in \{0, 1\}$), alors, d'après la Proposition II-3.1, $\mu_1 = \mu_0^1$ (resp. $\mu_2 = \mu_0^2$) sur $[0, l]$.

• 3^{eme} cas : $f_1 < 0, f_0 > 0$



Alors $x^* \in \Omega$. Dans le cas où $\mu_0^1, \mu_0^2, \mu_l^1, \mu_l^2, 1 - \mu_0^1 - \mu_0^2$ et $1 - \mu_l^1 - \mu_l^2$ sont non nuls, le même raisonnement que dans les cas précédents donne :

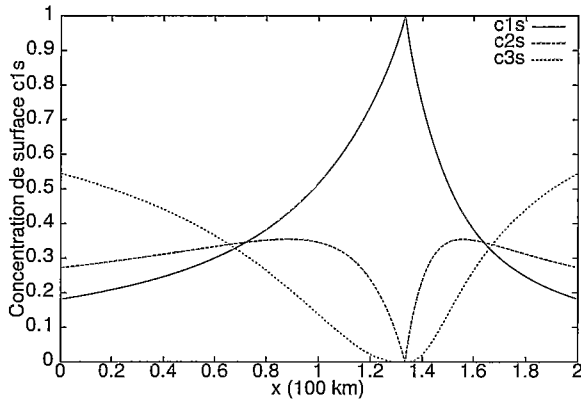
$$\begin{cases} \mu_1^{-k_1} \mu_2^{k_2} = (\mu_0^1)^{-k_1} (\mu_0^2)^{k_2} \left(1 - \frac{(f_0 - f_1)x}{f_0 l} \right)^{k_1 - k_2}, \\ \mu_2^{-k_2} (1 - \mu_1 - \mu_2)^{k_3} = (\mu_0^2)^{-k_2} (1 - \mu_0^1 - \mu_0^2)^{k_3} \left(1 - \frac{(f_0 - f_1)x}{f_0 l} \right)^{k_2 - k_3}, \end{cases} \quad \text{si } x \in \left[0, \frac{f_0 l}{f_0 - f_1} \right),$$

$$\begin{cases} \mu_1^{-k_1} \mu_2^{k_2} = (\mu_l^1)^{-k_1} (\mu_l^2)^{k_2} \left(1 + \frac{(f_0 - f_1)(l-x)}{f_1 l} \right)^{k_1 - k_2}, \\ \mu_2^{-k_2} (1 - \mu_1 - \mu_2)^{k_3} = (\mu_l^2)^{-k_2} (1 - \mu_l^1 - \mu_l^2)^{k_3} \left(1 + \frac{(f_0 - f_1)(l-x)}{f_1 l} \right)^{k_2 - k_3}, \end{cases} \quad \text{si } x \in \left(\frac{f_0 l}{f_0 - f_1}, l \right].$$

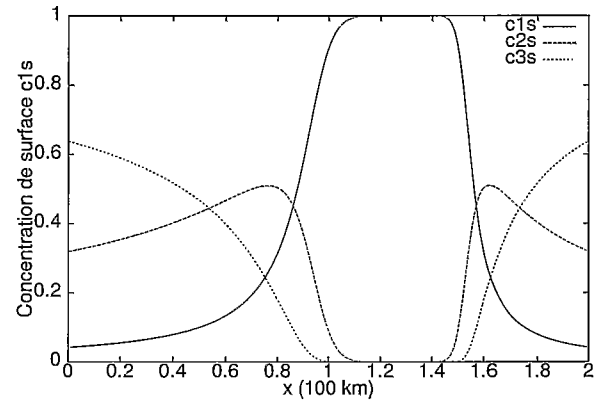
Reste à déterminer μ_1 et μ_2 en $x^* = \frac{f_0 l}{f_0 - f_1}$. On peut montrer, en reprenant le raisonnement du cas bilithologique, que si tous les coefficients de diffusion sont distincts, on peut prolonger les variables μ_i en x^* de telle sorte que seule la lithologie la plus diffusive soit présente en ce point.

Enfin, si $\mu_0^1 \in \{0, 1\}$ (resp. $\mu_0^2 \in \{0, 1\}$), alors $\mu_1 = \mu_0^1$ (resp. $\mu_2 = \mu_0^2$) sur $[0, x^*]$. Si $\mu_l^1 \in \{0, 1\}$ (resp. $\mu_l^2 \in \{0, 1\}$), alors $\mu_1 = \mu_l^1$ (resp. $\mu_2 = \mu_l^2$) sur $(x^*, l]$.

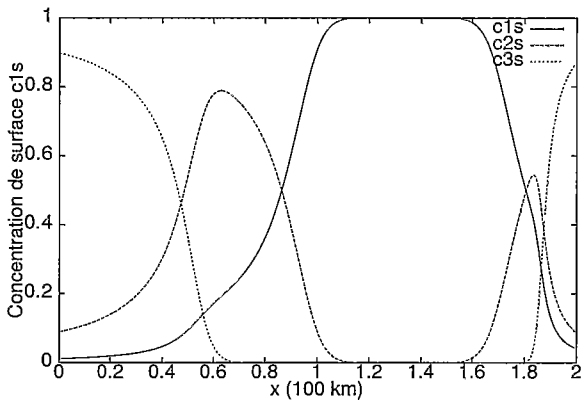
Quelques exemples de solution pour c_1^s et c_2^s sont représentés sur la figure II.7. On retrouve le fait que les sédiments ayant le coefficient de diffusion le plus élevé (la lithologie 1 ici) glissent les premiers au fond du bassin, c'est-à-dire autour du point bas x^* où φ change de signe ($x^* = 4/3$ ici). La concentration de surface c_1^s vaut 1 en x^* tandis que les concentrations c_2^s et c_3^s sont nulles en ce point. Enfin, on commence à distinguer sur les figures (c) et (d) les solutions limites lorsque le rapport entre les coefficients de diffusion tend vers l'infini, que l'on peut calculer en raisonnant comme dans le cas bilithologique.



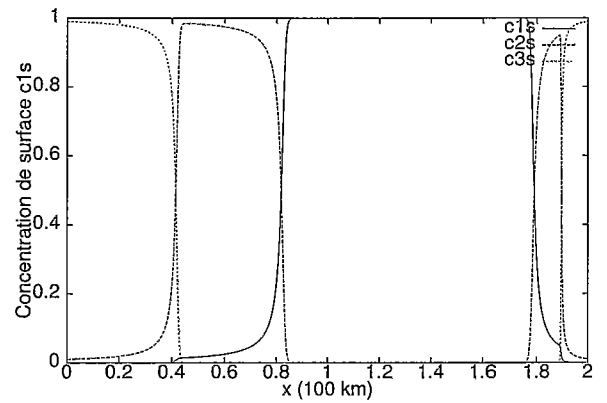
(a) $k_1/k_2 = k_2/k_3 = 2$
 $\mu_0^1 = \mu_l^1 = 0.4, \mu_0^2 = \mu_l^2 = 0.3$



(b) $k_1/k_2 = 10, k_2/k_3 = 2$
 $\mu_0^1 = \mu_l^1 = 0.4, \mu_0^2 = \mu_l^2 = 0.3$



(c) $k_1/k_2 = k_2/k_3 = 10$
 $\mu_0^1 = 0.4, \mu_l^1 = 0.7, \mu_0^2 = 0.3, \mu_l^2 = 0.15$



(d) $k_1/k_2 = k_2/k_3 = 100$
 $\mu_0^1 = 0.4, \mu_l^1 = 0.7, \mu_0^2 = 0.3, \mu_l^2 = 0.15$

Figure II.7 : Concentrations de surface obtenues dans le cas "stationnaire" multi-lithologique, en sédimentation, avec $f_0 = 0.2 \text{ m}^2/\text{an}$, $f_1 = -0.1 \text{ m}^2/\text{an}$, $k_3 = 10^3 \text{ m}^2/\text{an}$, et différentes valeurs de k_1 et k_2 .

II-4 Généralisation au cas multi-lithologique 3D

On se place ici dans le cas multi-lithologique ($L \geq 2$) avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Comme dans le paragraphe II-1, on ne cherche ici que des solutions du problème (II.1)-(II.3) pour les concentrations c_i^s qui soient dans l'intervalle $[0, 1]$. On peut alors définir, pour tout $i = 1, \dots, L$,

$$\mu_i = \frac{c_i^s k_i}{\sum_{j=1}^L c_j^s k_j} \in [0, 1].$$

On notera par la suite $\vec{\varphi}_i = -c_i^s k_i \nabla h$, $\vec{\varphi} = \sum_{i=1}^L \vec{\varphi}_i$. On a donc $\vec{\varphi}_i = \mu_i \vec{\varphi}$ pour tout i .

En sommant les équations de conservation (II.1) sur \mathcal{D} pour tout $i = 1, \dots, L$, on obtient comme dans le cas bilithologique

$$\partial_t h + \operatorname{div} \vec{\varphi} = 0 \text{ sur } \mathcal{D}. \quad (\text{II.24})$$

Dans toute la suite, on supposera h au moins de classe C^2 sur $\bar{\mathcal{D}}$.

Erosion ($\partial_t h < 0$) :

En érosion, $c_i|_{z=h}$ est connu. En utilisant (II.24), on obtient l'équation suivante, valable sur tout ouvert de $\bar{\mathcal{D}}$ où $\partial_t h < 0$:

$$-c_i|_{z=h} \operatorname{div} \vec{\varphi} + \operatorname{div} (\mu_i \vec{\varphi}) = 0. \quad (\text{II.25})$$

Sédimentation ($\partial_t h > 0$) :

En sédimentation, (II.2) donne $c_i|_{z=h} = c_i^s$. L'équation de conservation sur \mathcal{D} pour la lithologie i s'écrit donc, en utilisant (II.24),

$$-c_i^s \operatorname{div} \vec{\varphi} + \operatorname{div} (\mu_i \vec{\varphi}) = 0. \quad (\text{II.26})$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition II-4.1. *Supposons que le problème (II.1)-(II.3) admette une solution $h \in C^2(\bar{\mathcal{D}})$ et des solutions $c_i^s \in [0, 1]$ pour tout $i = 1, \dots, L$ telles que, sur tout ouvert \mathcal{O} de $\bar{\mathcal{D}}$ où $\partial_t h > 0$, μ_i soit dérivable par rapport à $x \in \Omega$ avec $\nabla \mu_i \in (L^\infty(\mathcal{O}))^d$. Alors, sur chacun de ces ouverts \mathcal{O} et pour tout $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, L\}$:*

(1) *Si $k_i < k_j$ (resp $k_j < k_i$), le système (II.1)-(II.3) possède, sur tout ouvert de \mathcal{O} où $\mu_i > 0$ (resp. $\mu_j > 0$) l'invariant*

$$\vec{I}_{ij} = \mu_i^{\frac{\alpha k_j}{k_i - k_j}} \mu_j^{\frac{\alpha k_i}{k_j - k_i}} \vec{\varphi} \quad (\text{II.27})$$

tel que $\operatorname{div} \vec{I}_{ij} = 0$, avec $\alpha = \frac{|k_i - k_j|}{\min(k_i, k_j)}$.

(2) *Si $k_i = k_j$, le système (II.1)-(II.3) possède, sur tout ouvert de \mathcal{O} où $\mu_j > 0$ l'invariant*

$$J_{ij} = \frac{\mu_i}{\mu_j} \quad (\text{II.28})$$

tel que $\nabla J_{ij} \cdot \vec{\varphi} = 0$.

Preuve. Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathcal{D} où $\partial_t h > 0$ et soit $i \neq j, i, j \in \{1, \dots, L\}$. On suppose tout d'abord que $k_i \neq k_j$, avec par exemple $k_i < k_j$ et on pose $J_{ij} = \mu_i^{\frac{\alpha k_j}{k_i - k_j}} \mu_j^{\frac{\alpha k_i}{k_j - k_i}}$, c'est-à-dire $\vec{I}_{ij} = J_{ij} \vec{\varphi}$. Alors :

$$\operatorname{div} \vec{I}_{ij} = J_{ij} \operatorname{div} \vec{\varphi} + \nabla J_{ij} \cdot \vec{\varphi}.$$

Or, on a :

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_i} = \frac{\alpha k_i}{k_i - k_j} \frac{J_{ij}}{\mu_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_j} = \frac{\alpha k_j}{k_j - k_i} \frac{J_{ij}}{\mu_j},$$

d'où, en utilisant le fait que $k_p \frac{c_p^s}{\mu_p}$ est indépendant de p : $J_{ij} = \frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_i} (\mu_i - c_i^s) + \frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_j} (\mu_j - c_j^s)$. Par suite,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{I}_{ij} &= \left(\frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_i} (\mu_i - c_i^s) + \frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_j} (\mu_j - c_j^s) \right) \operatorname{div} \vec{\varphi} + \left(\frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_i} \nabla \mu_i + \frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_j} \nabla \mu_j \right) \cdot \vec{\varphi} \\ &= \sum_{k=i,j} \frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_k} ((\mu_k - c_k^s) \operatorname{div} \vec{\varphi} + \nabla \mu_k \cdot \vec{\varphi}). \end{aligned}$$

Alors (II.26) donne, en utilisant les hypothèses faites sur les solutions,

$$(\mu_k - c_k^s) \operatorname{div} \vec{\varphi} + \nabla \mu_k \cdot \vec{\varphi} = 0 \quad (\text{II.29})$$

et finalement $\operatorname{div} \vec{I}_{ij} = 0$.

On suppose maintenant que $k_i = k_j$. Alors $\mu_i c_j^s = \mu_j c_i^s$ et (II.29) donne $\mu_j \nabla \mu_i \cdot \vec{\varphi} = \mu_i \nabla \mu_j \cdot \vec{\varphi}$. Or,

$$\nabla J_{ij} \cdot \vec{\varphi} = \left(\frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_i} \nabla \mu_i + \frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_j} \nabla \mu_j \right) \cdot \vec{\varphi},$$

où

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_i} = \frac{1}{\mu_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial J_{ij}}{\partial \mu_j} = -\frac{\mu_i}{\mu_j^2},$$

d'où finalement $\nabla J_{ij} = \vec{0}$. \square

Enfin, on montre, comme dans le cas 2D, l'existence d'invariants de deuxième espèce si $L \geq 3$:

Proposition II-4.2. *On se place ici dans le cas $L \geq 3$. Supposons que le problème (II.1)-(II.3) admette une solution $h \in C^2(\bar{\mathcal{D}})$ et des solutions $c_i^s \in [0, 1]$ pour tout $i = 1, \dots, L$ telles que, sur tout ouvert \mathcal{O} de $\bar{\mathcal{D}}$ où $\partial_t h > 0$, μ_i soit dérivable par rapport à $x \in \Omega$ avec $\nabla \mu_i \in (L^\infty(\mathcal{O}))^d$. Alors, sur chacun de ces ouverts \mathcal{O} et pour tout triplet (i, j, k) avec i, j, k distincts dans $\{1, \dots, L\}$, le système (II.1)-(II.3) possède, sur tout ouvert de \mathcal{O} où μ_i, μ_j et μ_k sont strictement positifs, l'invariant J_{ijk} tel que $\nabla J_{ijk} \cdot \vec{\varphi} = 0$, donné par*

$$J_{ijk}(\mu_i, \mu_j, \mu_k) = \mu_i^{\frac{k_i(k_j - k_k)}{\mathbb{K}^2}} \mu_j^{\frac{k_j(k_k - k_i)}{\mathbb{K}^2}} \mu_k^{\frac{k_k(k_i - k_j)}{\mathbb{K}^2}} \quad (\text{II.30})$$

où on a noté $\mathbb{K} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L k_p$.

Preuve. La démonstration découle immédiatement de celle faite dans le cas 2D (Proposition II-3.2).

\square