Instabilité de Möbius pour les poids à croissance lente

I.1. Introduction

Soit $h : [0,1[\to [0,+\infty[$ une fonction continue strictement croissante telle que $\lim_{r\to 1-} h(r) = +\infty$; h sera appelée un poids. Soit $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes f sur le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_h = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|e^{-h(|z|)} < +\infty.$$

On dit que $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ quand il existe $L > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$,

$$\|f\|_h \leq L \, \|f|_\Gamma\|_h,$$

où $\|f|_\Gamma\|_h = \sup_{\zeta\in\Gamma} |f(\zeta)|e^{-h(|\zeta|)}$. La borne inférieure de telles constantes L est notée $L_h(\Gamma)$.

On dit que l'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ satisfait la stabilité de Möbius lorsque tout ensemble Γ d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ vérifie

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} L_h(\Phi_w(\Gamma)) < +\infty,$$

où pour tout $w \in \mathbb{D}$, Φ_w est la fonction de Möbius donnée par

$$\Phi_w(z) = \frac{z-w}{1-\bar{w}z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

La distance pseudo-hyperbolique entre z et w de $\mathbb{D}$ est définie par $\rho(z,w) = |\Phi_w(z)|$. On dira que $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est hyperboliquement séparé si

$$\rho(\Gamma) = \inf\{\rho(z,w) \ : \ z, w \in \Gamma \ , \ z \neq w\} > 0.$$

Seip dans **[20]** a montré que lorsque $h(r) = \alpha \ln \frac{1}{1-r^2}$, $\alpha > 0$, une suite $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ si et seulement si elle contient une suite Γ' hyperboliquement séparée telle que sa densité hyperbolique inférieure uniforme vérifie

$$D^-(\Gamma') = \varliminf_{r\to 1-} \inf_{w\in\mathbb{D}} \frac{\sum_{z\in\Phi_w(\Gamma'):\frac{1}{2}<|z|<r} |\ln|z||}{|\ln(1-r)|} > \alpha. \tag{I.1.1}$$

Un élément essentiel de la preuve de Seip est le fait que l'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$ satisfait la stabilité de Möbius. En effet, si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$, alors $L_h(\Phi_w(\Gamma)) = L_h(\Gamma)$ pour tout $w \in \mathbb{D}$.

Berndtsson et Ortega–Cerdà dans **[1]** ont montré que la *condition* (I.1.1) est nécessaire pour les poids h dont le laplacien $\Delta h(z) = h''(|z|) + h'(|z|)/|z|$ vérifie qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $1/C \leq (1-|z|^2)^2 \Delta h(z) \leq C$. Seip dans **[22]** a prouvé que la *condition* (I.1.1) est également suffisante pour ce type de poids, par exemple quand $h(r) = \alpha \ln \dfrac{1}{1-r^2} + \beta \ln\ln \dfrac{e}{1-r^2}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Domański et Lindström ont donné une autre preuve de ces résultats dans **[6]**.

Dans tout ce *Chapitre I*, nous supposerons que le poids $h \in \mathcal{C}^1$, $h'(0) = 0$ et

$$\lim_{r \to 1-} (1-r) h'(r) = 0. \tag{I.1.2}$$

Nous nous intéressons donc aux poids h à croissance lente tels que

$$\lim_{r \to 1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|} = 0.$$

On prendra pour exemples

$$h(r) = \beta \ln\ln \frac{e}{1-r^2},\ \beta > 0, \ \text{ ou } h(r) = a\Big(\ln \frac{e}{1-r^2}\Big)^b,\ a > 0, 0 < b < 1.$$

Pour de tels poids h, nous définissons la h–densité inférieure non–uniforme d'une suite $\Gamma \subset \mathbb{D}$ par

$$D_0^-(\Gamma, h) = \varliminf_{r \to 1-} \frac{\sum_{z \in \Gamma : 1/2 < |z| < r} |\ln|z||}{h(r)}.$$

La h–densité inférieure uniforme de Γ est définie par

$$D^-(\Gamma, h) = \varliminf_{r \to 1-} \inf_{w \in \mathbb{D}} \frac{\sum_{z \in \Phi_w(\Gamma) : 1/2 < |z| < r} |\ln|z||}{h(r)}.$$

Une condition nécessaire pour que Γ soit un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ est qu'il contienne un sous–ensemble hyperboliquement séparé Γ' satisfaisant $D_0^-(\Gamma', h) > 1$. Réciproquement, nous donnons une condition suffisante précise d'échantillonnage dans le cas des suites régulièrement distribuées. Puis nous construisons un ensemble hyperboliquement séparé Γ d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, avec $D^-(\Gamma, h) = 0$. Par conséquent, notre condition nécessaire d'échantillonnage n'est pas préservée par les fonctions de Möbius et la stabilité de Möbius de l'échantillonnage n'est pas vérifiée dans nos espaces généraux. D'autre part, il existe un ensemble hyperboliquement séparé d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ dont la h–densité inférieure uniforme est infinie.

I.2. Condition nécessaire d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$

Nous commençons par faire de simples observations.

Lemme I.2.1. *Soit h une fonction continue. Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors Γ contient un sous–ensemble dénombrable Γ' qui est aussi un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, avec $L_h(\Gamma') = L_h(\Gamma)$.*

Démonstration. Soit Γ' un sous–ensemble dénombrable de Γ tel que l'adhérence de Γ' contient Γ. Soit $M > 1$ et $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Pour $z \in \Gamma$ tel que $f(z) \neq 0$, il existe $(z_j) \subset \Gamma'$ tel que z_j tend vers z quand $j \to +\infty$. Par continuité de h, pour tout j assez grand, $\left|f(z)e^{-h(|z|)} - f(z_j)e^{-h(|z_j|)}\right| \leq |f(z)|e^{-h(|z|)}/M$, et

$$|f(z)|e^{-h(|z|)} \leq |f(z_j)|e^{-h(|z_j|)} + \left|f(z)e^{-h(|z|)} - f(z_j)e^{-h(|z_j|)}\right| \leq \frac{1}{1-1/M}|f(z_j)|e^{-h(|z_j|)}.$$

D'où $L_h(\Gamma) \leq L_h(\Gamma') \leq (1-1/M)^{-1}L_h(\Gamma)$. Faisant $M \to +\infty$, notre résultat est prouvé. □

Puisque le disque unité est trivialement un ensemble d'échantillonnage, il existe un ensemble dénombrable d'échantillonnage pour tout $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Lemme I.2.2. *Soit $\delta \in [0,1[$. Pour tous $z, w \in \mathbb{D}$ tels que $\rho(z,w) \leq \delta$,*

$$1-\delta \leq \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}w|} \leq 1+\delta \quad et \quad \frac{1-\delta}{1+\delta} \leq \frac{1-|z|^2}{1-|w|^2} \leq \frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

Démonstration. On a

$$\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}w|} = \left|1+\frac{\bar{z}w-|z|^2}{1-\bar{z}w}\right| = |1+\bar{z}\Phi_z(w)|$$

et

$$|1+\bar{z}\Phi_z(w)| \in [1-\rho(z,w), 1+\rho(z,w)] \subset [1-\delta, 1+\delta].$$

D'autre part, on a

$$\frac{1-|z|^2}{1-|w|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}w|}\frac{|1-\bar{w}z|}{1-|w|^2},$$

d'où la conclusion par symétrie des rôles de z et w. □

Montrons maintenant le lemme de type Bernstein pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avant de donner des propriétés de l'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Lemme I.2.3. *Pour tout $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et pour $z, w \in \mathbb{D}$ avec $\rho(z,w) \leq 1/2$, nous avons*

$$\left|f(w)e^{-h(|w|)} - f(z)e^{-h(|z|)}\right| \leq c_h \, \|f\|_h \, \rho(z,w),$$

où $c_h = 4(\alpha_h + 2e^{\alpha_h})$ avec $\alpha_h = \sup_{r\in[0,1[}(1-r)h'(r)$.

Démonstration. Nous allons utiliser l'inégalité des accroissements finis comme dans la peuve du Lemme 5.1 [**11**, p.138]. Soient $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et $z, w \in \mathbb{D}$ tels que $\rho(z,w) \leq 1/2$. On a

$$\begin{aligned}
\big|f(w)e^{-h(|w|)} - f(z)e^{-h(|z|)}\big| &\leq \sup_{\eta\in[z,w]}\Big(\big|\frac{\partial}{\partial z}(fe^{-h})(\eta)\big| + \big|\frac{\partial}{\partial \bar z}(fe^{-h})(\eta)\big|\Big)|w-z| \\
\leq \sup_{\eta\in[z,w]}\Big(\frac{\alpha_h}{1-|\eta|}\|f\|_h &+ e^{-h(|\eta|)}\Big|\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta-\eta|=\frac{1-|\eta|}{2}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\eta)^2}\,d\zeta\Big|\Big)|w-z| \\
\leq 2(\alpha_h + 2e^{\alpha_h})\|f\|_h \sup_{\eta\in[z,w]}\frac{|w-z|}{1-|\eta|^2} &\leq c_h\,\|f\|_h\,\rho(z,w),
\end{aligned}$$

d'après le *Lemme I.2.2* avec $\delta = 1/2$. □

Proposition I.2.4. *Pour $\Gamma \subset \mathbb{D}$ ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, posons*

$$\delta_h(\Gamma) = \min\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{c_h L_h(\Gamma)}\Big),$$

où c_h est la constante du Lemme I.2.3. Soit $\tilde\Gamma \subset \mathbb{D}$; si

$$\rho(\Gamma,\tilde\Gamma) = \sup_{z\in\Gamma}\inf_{w\in\tilde\Gamma}\rho(z,w) < \delta_h(\Gamma),$$

alors

$$L_h(\tilde\Gamma) \leq \frac{L_h(\Gamma)}{1 - c_h L_h(\Gamma)\rho(\Gamma,\tilde\Gamma)} < +\infty.$$

Démonstration. On utilise la même méthode que dans la preuve du Lemme 5.15 [**11**, p.152–153], mais pour plus de clarté nous explicitons cette adaptation de démonstration. Soit $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et soit $\varepsilon \in]0, 1/2 - \rho(\Gamma,\tilde\Gamma)]$. Par définition de la borne supérieure, prenons $z \in \Gamma$ tel que $|f(z)|e^{-h(|z|)} \geq \|f|_\Gamma\|_h - \varepsilon$, ce qui implique $|f(z)|e^{-h(|z|)} \geq \|f\|_h/L_h(\Gamma) - \varepsilon$. Puis, par définition de la borne inférieure, prenons $w \in \tilde\Gamma$ tel que $\rho(z,w) \leq \rho(z,\tilde\Gamma) + \varepsilon$, ce qui implique $\rho(z,w) \leq \rho(\Gamma,\tilde\Gamma) + \varepsilon \leq 1/2$. Le *Lemme I.2.3* donne

$$\big||f(w)|e^{-h(|w|)} - |f(z)|e^{-h(|z|)}\big| \leq \big|f(w)e^{-h(|w|)} - f(z)e^{-h(|z|)}\big| \leq c_h\|f\|_h\rho(z,w).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
\|f|_{\tilde\Gamma}\|_h &\geq |f(w)|e^{-h(|w|)} \geq |f(z)|e^{-h(|z|)} - c_h\|f\|_h\rho(z,w) \\
&\geq \|f\|_h/L_h(\Gamma) - \varepsilon - c_h\|f\|_h\big(\rho(\Gamma,\tilde\Gamma) + \varepsilon\big).
\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers $0+$, nous avons

$$\|f|_{\tilde\Gamma}\|_h \geq \big(1/L_h(\Gamma) - c_h\rho(\Gamma,\tilde\Gamma)\big)\,\|f\|_h.$$

La définition de $L_h(\tilde\Gamma)$ implique

$$1/L_h(\tilde\Gamma) \geq 1/L_h(\Gamma) - c_h\rho(\Gamma,\tilde\Gamma) \quad \text{et } L_h(\tilde\Gamma) \leq L_h(\Gamma)/\big(1 - c_h L_h(\Gamma)\rho(\Gamma,\tilde\Gamma)\big).$$

□

Notons à partir d'ici K un ensemble quelconque.

Corollaire I.2.5. *Si $\Gamma = \{z_k\}_{k\in K}$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors tout $\tilde\Gamma = \{w_k\}_{k\in K}$ satisfaisant $\rho(z_k, w_k) \leq \delta_h(\Gamma)/2$ pour tout $k \in K$, est encore un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, avec*

$$L_h(\tilde\Gamma) \leq 2\, L_h(\Gamma).$$

Démonstration. Puisque $\rho(\Gamma,\tilde\Gamma) \leq \sup_{k\in K}\rho(z_k,w_k) \leq \delta_h(\Gamma)/2 < \delta_h(\Gamma)$ et que la fonction $x \mapsto L_h(\Gamma)/\big(1 - c_h L_h(\Gamma)x\big)$ est croissante sur $\big[0, \big(2c_h L_h(\Gamma)\big)^{-1}\big]$, la *Proposition I.2.4* nous donne

$$L_h(\tilde\Gamma) \leq \frac{L_h(\Gamma)}{1 - c_h L_h(\Gamma)\rho(\Gamma,\tilde\Gamma)} \leq \frac{L_h(\Gamma)}{1 - c_h L_h(\Gamma)\delta_h(\Gamma)/2} \leq 2\, L_h(\Gamma).$$

□

Lemme I.2.6. *Pour tout $\delta \in]0,1[$, tout ensemble $\Gamma \subset \mathbb{D}$ au plus dénombrable contient Γ' vérifiant $\rho(\Gamma') \geq \delta$ et $\rho(\Gamma,\Gamma') \leq \delta$.*

Démonstration. Soit $\Gamma = \{z_J\}_{J\in\mathbb{N}}$. Construisons récursivement $\Gamma' = \{w_k\}_{k\in[0,\beta[\subset\mathbb{N}}$, où $w_k = z_{\sigma(k)}$ et σ est une application strictement croissante : $\sigma(0) = 0$; si σ est définie sur $[0, k-1]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors on pose

$$\sigma(k) = \inf\big\{J > \sigma(k-1) \,:\, \inf_{l<k}\rho(z_J, z_{\sigma(l)}) \geq \delta\big\}$$

et si $\sigma(k) = +\infty$, on pose $\beta = k$ et on arrête. Si β n'est pas défini au cours de ce processus, c'est que $\beta = +\infty$.

Γ' sous-ensemble de Γ vérifie $\rho(\Gamma') = \inf\limits_{k}\inf\limits_{l<k}\rho(w_k, w_l) \geq \delta$. D'autre part pour tout $J \in \mathbb{N}$, il existe $k \in [1, \beta+1[\cap\mathbb{N}$ tel que soit $J = \sigma(k-1)$ et alors $\inf\limits_{w\in\Gamma'}\rho(z_J, w) = \rho(z_J, z_J) = 0$, soit $J \in]\sigma(k-1), \sigma(k)[$ et alors $\inf\limits_{w\in\Gamma'}\rho(z_J, w) \leq \inf\limits_{l<k}\rho(z_J, z_{\sigma(l)}) < \delta$. Donc on a aussi $\rho(\Gamma,\Gamma') = \sup\limits_{J\in\mathbb{N}}\inf\limits_{w\in\Gamma'}\rho(z_J, w) \leq \delta$. □

Corollaire I.2.7. *Si Γ est un ensemble dénombrable d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors Γ contient un sous–ensemble hyperboliquement séparé Γ' qui est encore un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.*

Démonstration. Le *Lemme I.2.6* appliqué avec $\delta = \delta_h(\Gamma)/2$ donne l'existence de $\Gamma' \subset \Gamma$ vérifiant $\rho(\Gamma') > 0$ et $\rho(\Gamma, \Gamma') \leq \delta_h(\Gamma)/2 < \delta_h(\Gamma)$. La *Proposition I.2.4* donne alors

$$L_h(\Gamma') \leq \frac{L_h(\Gamma)}{1 - c_h L_h(\Gamma)\rho(\Gamma, \Gamma')} \leq \frac{L_h(\Gamma)}{1 - c_h L_h(\Gamma)\delta_h(\Gamma)/2} \leq 2\, L_h(\Gamma).$$

□

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire en terme de h–densité inférieure non–uniforme afin qu'un sous–ensemble de $\mathbb{D}$ soit un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Théorème I.2.8. *Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors Γ contient un sous–ensemble hyperboliquement séparé Γ' tel que Γ' est encore un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et $D_0^-(\Gamma', h) > 1$.*

La preuve de ce théorème nécessite le lemme suivant.

Lemme I.2.9. *Si $\Gamma = \{z_k\}_{k \in K}$ est un ensemble hyperboliquement séparé d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, il existe $\tilde{\Gamma} = \{w_k\}_{k \in K}$ hyperboliquement séparé d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, tel que $0 \notin \tilde{\Gamma}$ et*

$$D_0^-(\Gamma, h) \geq \frac{1}{1 - \delta_0} D_0^-(\tilde{\Gamma}, h) \tag{I.2.1}$$

pour un certain $\delta_0 \in]0, 1[$.

Démonstration. Soit $\mu_\Gamma = \inf_{k \in K : z_k \neq 0} |z_k| \in]0, 1[$. Pour tous $\delta \in]0, 1[$ et $z \in \mathbb{D} \setminus \mu_\Gamma \mathbb{D}$,

$$\rho\Big(z, \frac{z}{|z|^\delta}\Big) = |z|^{1-\delta} \frac{1 - |z|^\delta}{1 - |z|^{2-\delta}} \leq \frac{1 - |z|^\delta}{1 - |z|^{2-\delta}} \leq \frac{1 - {\mu_\Gamma}^\delta}{1 - {\mu_\Gamma}^{2-\delta}}.$$

Donc

$$\lim_{\delta \to 0+} \sup_{z \in \mathbb{D} \setminus \mu_\Gamma \mathbb{D}} \rho\Big(z, \frac{z}{|z|^\delta}\Big) = 0,$$

et avec $\delta_1 = \min\big(\delta_h(\Gamma)/2, \rho(\Gamma)/4\big) \in]0, 1[$, il existe $\delta_0 \in]0, \delta_1]$ tel que pour tout $z \in \Gamma \setminus \{0\}$, $\rho\Big(z, \dfrac{z}{|z|^{\delta_0}}\Big) \leq \delta_1$. Posons, pour tout $k \in K$,

$$w_k = \begin{cases} \frac{z_k}{|z_k|^{\delta_0}} & \text{si } z_k \neq 0 \\ \delta_0 & \text{si } z_k = 0. \end{cases}$$

$\tilde{\Gamma}$ possède les propriétés suivantes. Pour tout $k \in K$, on a

$$\rho(z_k, w_k) \leq \min\big(\delta_h(\Gamma)/2, \rho(\Gamma)/4\big).$$

D'une part le *Corollaire I.2.5* donne $L_h(\tilde{\Gamma}) < +\infty$, et donc $\tilde{\Gamma}$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. D'autre part l'inégalité triangulaire pour la distance pseudohyperbolique ρ [**8**, p.4] donne que pour tous $k, l \in K$ tels que $z_k \neq z_l$,

$$\rho(\Gamma) \leq \rho(z_k, z_l) \leq \rho(z_k, w_k) + \rho(w_k, w_l) + \rho(w_l, z_l) \leq 2\rho(\Gamma)/4 + \rho(w_k, w_l),$$

donc, en passant aux bornes inférieures, $\rho(\tilde{\Gamma}) \geq \rho(\Gamma)/2 > 0$, et $\tilde{\Gamma}$ est hyperboliquement séparé.

Pour tout $r \in]1/2, 1[$ fixé, puisque $\delta_0 \leq \rho(\Gamma)/4 \leq 1/2$, pour $k \in K$ tel que $1/2 < |w_k| < r$, on a $z_k \neq 0$ et donc $w_k = \frac{z_k}{|z_k|^{\delta_0}}$; d'où les équivalences

$$1/2 < |w_k| < r \iff 1/2 < |z_k|^{1-\delta_0} < r \iff (1/2)^{\frac{1}{1-\delta_0}} < |z_k| < r^{1/(1-\delta_0)}.$$

Puisque pour $\delta_0 \in]0, 1[$, $\big(\forall x \in [0, 1[,\ x^{\frac{1}{1-\delta_0}} \leq x\,\big)$ implique $(1/2)^{\frac{1}{1-\delta_0}} \leq 1/2$ et $r^{\frac{1}{1-\delta_0}} \leq r$, il en résulte

$$\sum_{w_k \in \tilde{\Gamma}: 1/2 < |w_k| < r} |\ln |w_k|| \leq (1 - \delta_0) \sum_{z_k \in \Gamma: 1/2 < |z_k| < r} |\ln |z_k|| + \sum_{z_k \in \Gamma: (1/2)^{\frac{1}{1-\delta_0}} < |z_k| \leq 1/2} \left|\ln\big(|z_k|^{1-\delta_0}\big)\right|,$$

d'où

$$\sum_{w_k \in \tilde{\Gamma}: 1/2 < |w_k| < r} |\ln |w_k||/h(r) \leq \frac{1 - \delta_0}{h(r)} \sum_{z_k \in \Gamma: 1/2 < |z_k| < r} |\ln |z_k|| + \frac{\ln(2)\mathrm{Card}\,\big(\Gamma \cap (6/10)\mathbb{D}\big)}{h(r)}.$$

En faisant tendre r vers $1-$, on obtient bien $D_0^-(\Gamma, h) \geq D_0^-(\tilde{\Gamma}, h)/(1 - \delta_0)$. □

Démonstration du Théorème. Nous allons considérer les produits finis de Blaschke modifiés par Seip [**20**, p.32]. D'après le *Lemme I.2.1* et le *Corollaire I.2.7*, nous pouvons supposer que $\Gamma = \{z_k\}_{k \in K}$ est hyperboliquement séparé. Il suffit alors de prouver que $D_0^-(\Gamma, h) > 1$. Soit le $\tilde{\Gamma}$ du *Lemme I.2.9*. Posons, pour $r < 1$,

$$f_r(z) = \prod_{w_k \in \tilde{\Gamma} \cap r\mathbb{D}} \frac{1}{|w_k|} \Phi_{w_k}(z), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Il est clair que $f_r \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, $\|f_r\|_h \geq |f_r(0)| e^{-h(0)} = e^{-h(0)} > 0$ et

$$\|f_r|_{\tilde{\Gamma}}\|_h \leq \sup_{w \in \tilde{\Gamma} \setminus r\mathbb{D}} e^{-h(|w|)} \prod_{|w_k| < r} \frac{1}{|w_k|} |\Phi_{w_k}(w)| \leq e^{-h(r)} \prod_{|w_k| < r} \frac{1}{|w_k|}.$$

$\tilde\Gamma$ étant d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$,

$$\|f_r\|_h \le L_h(\tilde\Gamma)\, \|f_r|_{\tilde\Gamma}\|_h \ , \quad \text{et} \quad e^{-h(0)} \le L_h(\tilde\Gamma)\, e^{-h(r)} \prod_{|w_k|<r} \frac{1}{|w_k|}.$$

On en déduit

$$\prod_{|w_k|<r} \frac{1}{|w_k|} \ge \frac{e^{-h(0)}}{L_h(\tilde\Gamma)} e^{h(r)} > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{|w_k|<r} |\ln|w_k|| \ge \ln\big(e^{-h(0)}/L_h(\tilde\Gamma)\big) + h(r),$$

d'où

$$D_0^-(\tilde\Gamma, h) \ge 1 + \varliminf_{r\to 1-} \frac{\ln\big(e^{-h(0)}/L_h(\tilde\Gamma)\big) - \sum_{|w_k|\le 1/2} |\ln|w_k||}{h(r)} = 1.$$

D'après la *propriété* (I.2.1), $D_0^-(\Gamma, h) \ge (1-\delta_0)^{-1}\, 1 > 1.$ $\square$

I.3. Instabilité de Möbius de l'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$

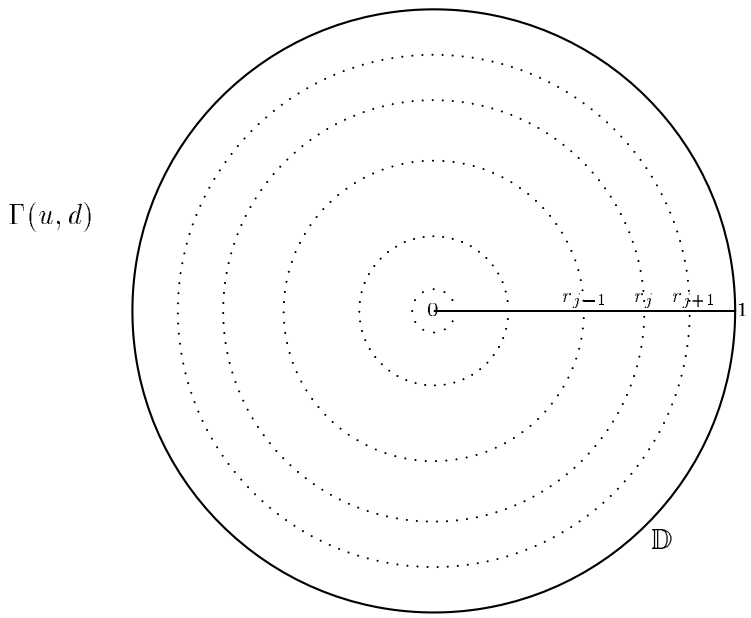
Maintenant nous allons étudier le cas des suites régulièrement distribuées. Nous allons donner à la fois une condition nécessaire et une condition suffisante en terme de séparation afin que ces suites soient des ensembles d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Soit $u = (r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_j \to 1-$. Soit $d > 0$. Posons

$$\Gamma_j(u,d) = \Big\{\ z \in \mathbb{D} : |z| = r_j \text{ et } z/|z| = e^{i2\pi m/([d^{-1}/(1-r_j)]+1)},\ 0 \le m \le [d^{-1}/(1-r_j)]\ \Big\},$$

$$\Gamma(u,d) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Gamma_j(u,d),$$

où $[x]$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.



Lemme I.3.1. *Si* $P = \sup_{j\in\mathbb{N}} e^{h(r_{j+1})-h(r_j)} < +\infty$, *alors* $\Gamma(u,d)$ *est un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ *pour tout* $d < \pi^{-1}\min\bigl(2^{-1},(c_h P)^{-1}\bigr)$, *où* c_h *est défini dans le Lemme I.2.3.*

DÉMONSTRATION. Soit $\Gamma(u) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigl\{z\in\mathbb{D} : |z| = r_j\bigr\}$. Nous estimons

$$\begin{aligned}
\rho(\Gamma(u),\Gamma(u,d)) &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{\theta\in[0,2\pi[} \inf_{0\leq m\leq[d^{-1}/(1-r_j)]+1} \rho\bigl(r_j e^{i\theta}, r_j e^{i2\pi m/([d^{-1}/(1-r_j)]+1)}\bigr)\\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-r_j^2} \sup_{\theta\in[0,2\pi[} \inf_{0\leq m\leq[d^{-1}/(1-r_j)]+1} \Bigl|1-e^{i\left(\theta-2\pi m/([d^{-1}/(1-r_j)]+1)\right)}\Bigr|\\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-r_j} \sup_{0\leq\theta<2\pi} \inf_{0\leq m\leq[d^{-1}/(1-r_j)]+1} \bigl|\theta-2\pi m/([d^{-1}/(1-r_j)]+1)\bigr|\\
&\leq 2\pi d \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{0\leq t<[d^{-1}/(1-r_j)]+1} \inf_{0\leq m\leq[d^{-1}/(1-r_j)]+1} |t-m| \qquad \leq \pi\, d.
\end{aligned}$$

Soit $z\in\mathbb{D}$; il existe $j\in\mathbb{N}$ tel que $r_j \leq |z| < r_{j+1}$. Pour $f\in\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, la croissance de h et le principe du maximum donnent

$$|f(z)|e^{-h(|z|)} \leq \sup_{|w|=r_{j+1}} |f(w)|e^{-h(r_j)} \leq P\,\|f|_{\Gamma(u)}\|_h.$$

Donc $L_h(\Gamma(u)) \leq P$ et $\Gamma(u)$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Si de plus $d < \pi^{-1}\min\bigl(2^{-1},(c_h P)^{-1}\bigr)$, alors

$$\rho(\Gamma(u),\Gamma(u,d)) \leq \pi\, d < \delta_h(\Gamma(u)).$$

D'après la *Proposition I.2.4*, $\Gamma(u,d)$ est aussi un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. □

La proposition suivante nous donne des exemples d'ensembles d'échantillonnage pour certains espaces $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Proposition I.3.2.

(a) *Si* $Q = \varliminf_{j\to+\infty} j/h(r_j) < +\infty$, *alors pour tout* $d \geq 2\ln(2)\,Q$, $\Gamma(u,d)$ *n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

(b) *Si* $u = \bigl(h^{-1}(j+h(0))\bigr)_{j\in\mathbb{N}}$, *alors on a à la fois* $P < +\infty$ *et* $Q < +\infty$.

(c) *Soit* $h_\beta(r) = \beta\ln\ln\dfrac{e}{1-r^2}$, $\beta > 0$, *et soit la suite* $u_\beta = \bigl(1-2^{-2^j+1}\bigr)_{j\in\mathbb{N}}$. *Si* $d < 38^{-1}15^{-\beta}$ *alors* $\Gamma(u_\beta,d)$ *est un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_{h_\beta}(\mathbb{D})$. *Réciproquement, si* $d \geq \frac{2}{\beta}$ *alors* $\Gamma(u_\beta,d)$ *n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_{h_\beta}(\mathbb{D})$.

(d) *Soit* $h_{a,b}(r) = a\Big(\ln \dfrac{e}{1-r^2}\Big)^b$, $a > 0$, $0 < b < 1$, *et soit la suite* $u_{a,b} = \big(1 - 2^{-j^{1/b}}\big)_{j\in\mathbb{N}}$. *Si* $d < 38^{-1}32^{-a}$ *alors* $\Gamma(u_{a,b}, d)$ *est un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_{h_{a,b}}(\mathbb{D})$. *Réciproquement, si* $d \geq \frac{2}{a}$ *alors* $\Gamma(u_{a,b}, d)$ *n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_{h_{a,b}}(\mathbb{D})$.

DÉMONSTRATION. (a). Soient u et $d > 0$. Puisque $\lim_{j\to+\infty} r_j = 1-$, le lemme de Cesàro donne $\lim_{j\to+\infty}(j+1)^{-1}\sum_{l=0}^{j}(1-r_l) = 0$, et, avec $l_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_{l_0} > 1/2 \geq r_{l_0-1}$, on a

$$\begin{aligned}
D_0^-(\Gamma(u,d),h) &\leq \overline{\lim_{j\to+\infty}} \sum_{z\in\Gamma(u,d):1/2<|z|<r_{j+1}} \frac{|\ln|z||}{h(r_{j+1})}\\
&\leq \overline{\lim_{j\to+\infty}} \sum_{l=l_0}^{j} \frac{|\ln r_l|\big([d^{-1}/(1-r_l)]+1\big)}{h(r_{j+1})}\\
&\leq \overline{\lim_{j\to+\infty}} \sum_{l=0}^{j} \frac{2\ln(2)(1-r_l)\big(d^{-1}/(1-r_l)+1\big)}{h(r_{j+1})}\\
&\leq 2\ln(2)Q\Big(\frac{1}{d} + \overline{\lim_{j\to+\infty}} \sum_{l=0}^{j} \frac{1-r_l}{j+1}\Big) \quad \leq \frac{2\ln(2)Q}{d}.
\end{aligned}$$

Donc si $d \geq 2\ln(2)Q$, alors $D_0^-(\Gamma(u,d),h) \leq 1$, et d'après le *Théorème I.2.8*, $\Gamma(u,d)$ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

(b). On a

$$P = \sup_{j\in\mathbb{N}} e^{(j+1+h(0))-(j+h(0))} = e < +\infty \qquad \text{et} \qquad Q = \lim_{j\to+\infty} \frac{j}{j+h(0)} = 1 < +\infty.$$

(c). Soit $\beta > 0$. On a

$$\begin{cases} \alpha_{h_\beta} = \sup_{r\in[0,1[}(1-r)h_\beta{}'(r) = 2\beta \sup_{r\in[0,1[} \frac{r}{1+r}\frac{1}{\ln\frac{e}{1-r^2}} \leq \beta \\ c_{h_\beta} = 4(\alpha_{h_\beta} + 2e^{\alpha_{h_\beta}}) \leq 4(\beta + 2e^\beta) \leq 12e^\beta. \end{cases}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
P^{1/\beta} &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\ln\frac{e}{1-r_{j+1}}}{\ln\frac{e/2}{1-r_j}} \quad \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\ln(e2^{2^{j+1}-1})}{\ln(e2^{2^j-2})}\\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{3\ln 2 - 1}{1 - 2\ln 2 + 2^j\ln 2} + 2 \quad \leq \frac{1+\ln 2}{1-\ln 2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\pi^{-1}\frac{1}{c_{h_\beta}P} \geq \frac{1}{12\pi e^\beta\Big(\frac{1+\ln 2}{1-\ln 2}\Big)^\beta} \geq 38^{-1}15^{-\beta},$$

et d'après le *Lemme I.3.1*, si $d < 38^{-1}15^{-\beta}$ alors $\Gamma(u_\beta, d)$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_{h_\beta}(\mathbb{D})$.

Réciproquement,

$$Q = \frac{1}{\beta} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{j}{\ln\ln\frac{e}{1-{r_j}^2}} = \frac{1}{\beta} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{j}{\ln\ln\left(2^{2^j-1}\right)} = \frac{1}{\beta} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{j}{\ln(2^j)} = \frac{1}{\beta\ln 2},$$

d'où, d'après le *point (a)*, si $d \geq 2/\beta$ alors $\Gamma(u_\beta, d)$ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_{h_\beta}(\mathbb{D})$.

(d). Soit $a > 0$, $0 < b < 1$. On a

$$\begin{cases} \alpha_{h_{a,b}} = \sup_{r\in[0,1[}(1-r){h_{a,b}}'(r) = 2ab\sup_{r\in[0,1[}\frac{r}{1+r}\left(\ln\frac{e}{1-r^2}\right)^{b-1} \leq ab \leq a \\ c_{h_{a,b}} = 4(\alpha_{h_{a,b}} + 2e^{\alpha_{h_{a,b}}}) \leq 4(a+2e^a) \leq 12e^a. \end{cases}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\ln P}{a} &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}}\left(\left(\ln\frac{e}{1-r_{j+1}}\right)^b - \left(\ln\frac{e/2}{1-r_j}\right)^b\right) \\ &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}}\left(\left(\ln\left(e2^{(j+1)^{1/b}}\right)\right)^b - \left(\ln\left(\frac{e}{2}2^{j^{1/b}}\right)\right)^b\right) \\ &\leq (\ln 2)^b \sup_{j\in\mathbb{N}}\left((j+1)\left(1+\frac{1}{(j+1)^{1/b}\ln 2}\right)^b - j\right) \\ &\leq (\ln 2)^b(1+1/\ln 2) \quad \leq 1+1/\ln 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\pi^{-1}\frac{1}{c_{h_{a,b}}P} \geq \frac{1}{12\pi e^a e^{a(1+1/\ln 2)}} \geq 38^{-1}32^{-a},$$

et d'après le *Lemme I.3.1*, si $d < 38^{-1}32^{-a}$ alors $\Gamma(u_{a,b}, d)$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_{h_{a,b}}(\mathbb{D})$.

Réciproquement,

$$Q = \frac{1}{a}\varliminf_{j\to+\infty}\frac{j}{\left(\ln\frac{e}{1-{r_j}^2}\right)^b} = \frac{1}{a}\varliminf_{j\to+\infty}\frac{j}{\left(\ln\left(2^{j^{1/b}}\right)\right)^b} = \frac{1}{a(\ln 2)^b} \leq \frac{1}{a\ln 2},$$

d'où, d'après le *point (a)*, si $d \geq 2/a$ alors $\Gamma(u_{a,b}, d)$ n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_{h_{a,b}}(\mathbb{D})$. $\square$

Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour l'espace $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D}), \alpha > 0$, alors

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} L_\alpha(\Phi_w(\Gamma)) = L_\alpha(\Gamma) < +\infty,$$

où $L_\alpha(\Gamma) = L_h(\Gamma)$ avec $h(r) = \alpha\ln\frac{1}{1-r^2}$. Ceci résulte du fait que pour tout $w \in \mathbb{D}$, $T_{\Phi_w} : f \mapsto (\Phi'_w)^\alpha.f\circ\Phi_w$ est une isométrie de $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$. Nous allons voir que cette propriété de stabilité de Möbius de l'échantillonnage n'est pas vérifiée pour nos espaces généraux. Le théorème suivant montre que la h–densité inférieure uniforme ne donne pas de condition nécessaire d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$; plus précisément

Théorème I.3.3. *Il existe Γ ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ tel que*

$$D^-(\Gamma, h) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord que

$$\lim_{r\to 1-} \frac{1-h^{-1}(h(r)+\ln 2)}{1-r} = 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_\varepsilon \in [0,1[$ tel que pour tout $r \in [r_\varepsilon, 1[$, $h'(r) \leq \varepsilon/(1-r)$, donc en intégrant,

$$\begin{aligned} \frac{1-h^{-1}(h(r)+\ln 2)}{1-r} &= \exp\Big(-\int_r^{h^{-1}(h(r)+\ln 2)} \frac{dx}{1-x}\Big) \\ &\leq \exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^{h^{-1}(h(r)+\ln 2)} h'(x)\,dx\Big) = \exp\Big(-\frac{\ln 2}{\varepsilon}\Big). \end{aligned}$$

Soit la suite $u = (r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ récursivement définie par $r_0 = 0$ et $r_{j+1} = h^{-1}\big(h(r_j)+\ln 2\big)$. Alors u vérifie

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{1-r_{j+1}}{1-r_j} = 0 \quad \text{et} \quad P = \sup_{j\in\mathbb{N}} e^{h(r_{j+1})-h(r_j)} = 2 < +\infty.$$

Posons $\Gamma(u) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \big\{z \in \mathbb{D} : |z| = r_j\big\}$. Reprenons l'argumentation de Khôi et Thomas dans [**12**, p.442], afin de prouver que $D^-(\Gamma(u), h) = 0$. Fixons $r < 1$ et posons pour $j \in \mathbb{N}$,

$$w_j = 1 - \sqrt{(1-r_j)(1-r_{j+1})} \in]r_j, r_{j+1}[.$$

Ainsi pour $z \in \Gamma(u), |z| < w_j$, nous avons

$$\big|\Phi_{w_j}(z)\big| \geq \Big|\frac{w_j - r_j}{1-w_j r_j}\Big| \geq \frac{(1-r_j)-(1-w_j)}{(1-r_j)+(1-w_j)} = \frac{1-\sqrt{\frac{1-r_{j+1}}{1-r_j}}}{1+\sqrt{\frac{1-r_{j+1}}{1-r_j}}} > r$$

pour $j \geq J(r)$, puisque $\lim_{j\to+\infty} \dfrac{1-r_{j+1}}{1-r_j} = 0$.
Similairement, pour $z \in \Gamma(u), |z| > w_j$,

$$\big|\Phi_{w_j}(z)\big| \geq \frac{(1-w_j)-(1-r_{j+1})}{(1-w_j)+(1-r_{j+1})} = \frac{1-\sqrt{\frac{1-r_{j+1}}{1-r_j}}}{1+\sqrt{\frac{1-r_{j+1}}{1-r_j}}} > r, \qquad \text{pour } j \geq J(r).$$

Donc, pour $\Phi_{w_{J(r)}}$, la somme numérateur dans l'expression de $D^-(\Gamma(u),h)$ est prise sur l'ensemble vide, d'où $D^-(\Gamma(u),h)=0$.

D'autre part, puisque $P=\sup_{j\in\mathbb{N}} e^{h(r_{j+1})-h(r_j)}<+\infty$, nous avons, d'après le *Lemme I.3.1*, que $\Gamma(u)$ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. $\square$

Le lemme suivant est la version uniforme du *Théorème I.2.8*.

Lemme I.3.4. *Soit h un poids tel que tout ensemble Γ d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ a la propriété*

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} L_h(\Phi_w(\Gamma))<+\infty.$$

Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors Γ contient un sous-ensemble hyperboliquement séparé Γ' tel que Γ' est encore un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et $D^-(\Gamma',h)>1$.

Démonstration. Reprenons notre preuve du *Théorème I.2.8*. On commence par supposer que $\Gamma=\{z_k\}_{k\in K}$ est hyperboliquement séparé. Alors le *Corollaire I.4.2* donne

$$\forall r\in[0,1[,\ \forall w\in\mathbb{D},\ \operatorname{Card}\big(\Phi_w\Gamma\cap r\mathbb{D}\big)\le C(\rho(\Gamma))\,\frac{1}{1-r}. \tag{I.3.1}$$

Soit une suite $(r_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ avec $1-\dfrac{1}{j+1}<r_j<1$ et une suite $(\Phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions de Möbius, telles que

$$\frac{\sum_{z_k\in\Gamma:1/2<|\Phi_j(z_k)|<r_j}|\ln|\Phi_j(z_k)||}{h(r_j)}\le D^-(\Gamma,h)+\frac{1}{j}.$$

Posons $\Gamma_j=\Phi_j\Gamma=\{z_{j,k}\}_{k\in K}$ puis construisons de nouveaux ensembles de points $\widetilde{\Gamma_j}=\{w_{j,k}\}_{k\in K}$ en posant

$$\forall j\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in K, w_{j,k}=\begin{cases}\frac{z_{j,k}}{|z_{j,k}|^{\delta_0}} & \text{si } |z_{j,k}|\ge\delta_0/2\\ \delta_0 & \text{si } z_{j,k}=0\\ \delta_0/2 & \text{si } |z_{j,k}|\in]0,\delta_0/2[,\end{cases}$$

où $\delta_0\in]0,\delta_1]$ est choisi tel que pour tout $z\in\mathbb{D}\setminus\frac{\delta_0}{2}\mathbb{D}$, $\rho\Big(z,\dfrac{z}{|z|^{\delta_0}}\Big)\le\delta_1=\min\Big(\dfrac{\delta_h(\Gamma)}{2},\dfrac{\rho(\Gamma)}{4}\Big)$. Alors les $\widetilde{\Gamma_j}$ vérifient

$$\forall j\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in K,\ \rho(z_{j,k},w_{j,k})\le\min\big(\delta_h(\Gamma)/2,\rho(\Gamma)/4\big). \tag{I.3.2}$$

Le *Corollaire I.2.5* donne par conséquent $L_h(\widetilde{\Gamma_j}) \leq 2\,L_h(\Gamma_j)$; h vérifiant la condition de Möbius, $L_h(\Gamma_j) \leq M(\Gamma, h)$; d'où

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ L_h(\widetilde{\Gamma_j}) \leq c_0(\Gamma, h) < +\infty. \tag{I.3.3}$$

D'autre part l'inégalité triangulaire pour ρ et la *propriété* (I.3.2) donnent

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \rho(\widetilde{\Gamma_j}) \geq \rho(\Gamma)/2 > 0. \tag{I.3.4}$$

Enfin d'après (I.3.1), pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\sum_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} : 1/2 < |w_{j,k}| < r_j} |\ln |w_{j,k}||}{h(r_j)} \leq (1 - \delta_0) \frac{\sum_{z_{j,k} \in \Gamma_j : 1/2 < |z_{j,k}| < r_j} |\ln |z_{j,k}||}{h(r_j)} + \frac{c_1(\Gamma)}{h(r_j)},$$

où $c_1(\Gamma) = C(\rho(\Gamma)) \dfrac{\ln 2}{1 - 0,6} < +\infty$, ce qui implique

$$\frac{\sum_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} : 1/2 < |w_{j,k}| < r_j} |\ln |w_{j,k}||}{h(r_j)} \leq (1 - \delta_0) \Big(D^-(\Gamma, h) + \frac{1}{j} \Big) + \frac{c_1(\Gamma)}{h(r_j)},$$

et donc en faisant tendre j vers $+\infty$,

$$D^-(\Gamma, h) \geq \frac{1}{1 - \delta_0} \varliminf_{j \to +\infty} \frac{\sum_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} : 1/2 < |w_{j,k}| < r_j} |\ln |w_{j,k}||}{h(r_j)}. \tag{I.3.5}$$

Considérons alors les produits de Blaschke modifiés par Seip (qui sont finis d'après la *propriété* (I.3.4))

$$f_j(z) = \prod_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} \cap r_j \mathbb{D}} \frac{1}{|w_{j,k}|} \Phi_{w_{j,k}}(z), \qquad z \in \mathbb{D},\ j \in \mathbb{N}^*.$$

Nous avons

$$\|f_j\|_h \geq e^{-h(0)}\ , \qquad \|f_j|_{\widetilde{\Gamma_j}}\|_h \leq e^{-h(r_j)} \prod_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} : |w_{j,k}| < r_j} \frac{1}{|w_{j,k}|}$$

et d'autre part, d'après la *propriété* (I.3.3),

$$\|f_j\|_h \leq c_0(\Gamma, h)\, \|f_j|_{\widetilde{\Gamma_j}}\|_h.$$

D'où

$$\sum_{w_{j,k} \in \widetilde{\Gamma_j} : |w_{j,k}| < r_j} |\ln |w_{j,k}|| \geq \ln \frac{e^{-h(0)}}{c_0(\Gamma, h)} + h(r_j).$$

Puisque d'après (I.3.1),

$$\sum_{w_{j,k}\in\widetilde{\Gamma_j}:|w_{j,k}|\leq 1/2} |\ln|w_{j,k}|| \quad \leq \operatorname{Card}\left(\widetilde{\Gamma_j}\cap(1/2)\overline{\mathbb{D}}\right)\,\ln(2/\delta_0)$$

$$\leq \operatorname{Card}\left(\Gamma_j\cap(1/2)^{1/(1-\delta_0)}\overline{\mathbb{D}}\right)\,\ln(2/\delta_0) \quad \leq C(\rho(\Gamma))\,\frac{\ln(2/\delta_0)}{1-\left((1/2)^{1/(1-\delta_0)}+1/10\right)},$$

nous avons, pour tout $j\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{w_{j,k}\in\widetilde{\Gamma_j}:1/2<|w_{j,k}|<r_j} |\ln|w_{j,k}|| \geq h(r_j)+c_2(\Gamma,h),$$

où $c_2(\Gamma,h)=\ln\dfrac{e^{-h(0)}}{c_0(\Gamma,h)}-C(\rho(\Gamma))\,\dfrac{\ln(2/\delta_0)}{9/10-(1/2)^{1/(1-\delta_0)}}$. Donc en faisant tendre j vers $+\infty$,

$$\varliminf_{j\to+\infty}\frac{\sum_{w_{j,k}\in\widetilde{\Gamma_j}:1/2<|w_{j,k}|<r_j}|\ln|w_{j,k}||}{h(r_j)} \geq 1+\varliminf_{j\to+\infty}\frac{c_2(\Gamma,h)}{h(r_j)}=1.$$

D'après la *propriété* (I.3.5), $D^-(\Gamma,h)\geq(1-\delta_0)^{-1}\,1>1$. □

Le *Lemme I.3.4* combiné au *Théorème I.3.3* donne finalement l'instabilité de Möbius de l'échantillonnage.

Corollaire I.3.5. *Il existe* Γ *ensemble d'échantillonnage pour* $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ *tel que*

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} L_h(\Phi_w(\Gamma))=+\infty.$$

Démonstration. D'après le *Théorème I.3.3*, il existe Γ ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ tel que $D^-(\Gamma,h)=0$. Mais par l'absurde, si h était tel que pour tout Γ ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, $\sup_{w\in\mathbb{D}} L_h(\Phi_w(\Gamma))<+\infty$, alors d'après le *Lemme I.3.4*, Γ vérifierait $D^-(\Gamma,h)>1$ et donc on aurait $0>1$, ce qui est absurde. □

I.4. Comparaison avec l'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$

Le but de cette section est de montrer que tout ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$ est aussi d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avec une h–densité inférieure uniforme qui est infinie. Nous avons le lemme suivant.

Lemme I.4.1. *Soit* Γ *hyperboliquement séparé, soit* $0<\delta<\rho(\Gamma)/2$ *et soit* $v:[0,1[\to]0,+\infty[$ *une fonction continue satisfaisant* $\sup_{\rho(z,w)\leq\delta}\dfrac{v(|z|)}{v(|w|)}<+\infty$. *Soit* $s\in\mathbb{R}$, $p>0$, f *holomorphe sur* $\mathbb{D}$ *et* $\mathbb{S}\subset\mathbb{D}$. *Alors*

$$\sum_{z_k\in\Gamma\cap\mathbb{S}}|f(z_k)|^p v(|z_k|)(1-|z_k|^2)^s\leq C\int_{\rho(z,\mathbb{S})<\rho(\Gamma)/2}|f(z)|^p v(|z|)(1-|z|^2)^{s-2}\,dm_2(z),$$

où m_2 est la mesure planaire de Lebesgue et C ne dépend que de δ, v et s.

DÉMONSTRATION. Fixons $z \in \mathbb{D}$; la sous–harmonicité de $|f|^p \circ \Phi_z^{-1}$ et le *Lemme I.2.2* donnent

$$\begin{aligned}
|f(z)|^p &= |f|^p \circ \Phi_z^{-1}(0) \leq \frac{1}{\pi\delta^2}(1-|z|^2)^{-2}\int_{\rho(z,w)<\delta}|f(w)|^p\Big(\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}w|}\Big)^4\,dm_2(w)\\
&\leq \frac{1}{\pi\delta^2}\sup_{\rho(z,w)<\delta}\Big(\frac{v(|z|)}{v(|w|)}\Big(\frac{1-|z|^2}{1-|w|^2}\Big)^{s-2}\Big(\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}w|}\Big)^4\Big)\times\\
&\qquad v(|z|)^{-1}(1-|z|^2)^{-s}\int_{\rho(z,w)<\delta}|f(w)|^p v(|w|)(1-|w|^2)^{s-2}\,dm_2(w)\\
&\leq C\,v(|z|)^{-1}(1-|z|^2)^{-s}\int_{\rho(z,w)<\delta}|f(w)|^p v(|w|)(1-|w|^2)^{s-2}\,dm_2(w).
\end{aligned}$$

Puisque $\{w \in \mathbb{D} : \rho(z_k, w) < \delta\} \cap \{w \in \mathbb{D} : \rho(z_l, w) < \delta\} = \emptyset$ quand $z_k \neq z_l \in \Gamma$, nous avons prouvé notre inégalité. □

Corollaire I.4.2. *Soit Γ hyperboliquement séparé. On a*

(a) *pour tout $r \in [0,1[$,* $\mathrm{Card}\big(\Gamma \cap r\mathbb{D}\big) \leq C(\rho(\Gamma))\dfrac{1}{1-r}$ *;*

(b) *pour tout $r \in [0,1[$,* $\sum_{z_k\in\Gamma:1/2<|z_k|<r}|\ln|z_k||/|\ln(1-r)| \leq \tilde{C}(\rho(\Gamma))$ *;*

(c) $D^-(\Gamma) \leq D_0^-(\Gamma) \leq \tilde{C}(\rho(\Gamma))$ *;*

(d) *pour tout $\varepsilon > 0$,* $\sum_{z_k\in\Gamma}(1-|z_k|)^{1+\varepsilon} < +\infty$.

DÉMONSTRATION. Le *Lemme I.4.1* avec $\delta = \rho(\Gamma)/3$, $s = 0$, $v = f = 1$ et $\mathbb{S} = r\mathbb{D}$ donne le *point (a)*. Le *Lemme I.4.1* avec $\delta = \rho(\Gamma)/3$, $s = 1$, $v = f = 1$ et $\mathbb{S} = r\mathbb{D} \setminus \frac{1}{2}\overline{\mathbb{D}}$ donne le *point (b)*. Par passage à la limite inférieure dans l'*inégalité (b)*, on obtient le *point (c)*. Le *Lemme I.4.1* avec $\delta = \rho(\Gamma)/3$, $s = 1+\varepsilon$, $v = f = 1$ et $\mathbb{S} = \mathbb{D}$ donne le *point (d)*. □

Lemme I.4.3. *Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D}), \alpha > 0$, alors Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.*

DÉMONSTRATION. Notons tout d'abord que h vérifie pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_\varepsilon \in [1/2, 1[$ tel que pour tout $r \in [r_\varepsilon, 1[$, $h'(r) \leq \varepsilon/(1-r)$, donc en intégrant,

$$\frac{e^{h\left(\sqrt{1-(1-r^2)/t}\right)}}{e^{h(r)}} = \exp\int_r^{\sqrt{1-(1-r^2)/t}} h'(x)dx \leq t^{2\varepsilon}, \qquad t \geq 1. \tag{I.4.1}$$

D'après le Théorème 1.1 [**20**, p.23], Γ contient une suite hyperboliquement séparée Γ' telle que $D^-(\Gamma') > \alpha$, et alors Γ' est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha'}(\mathbb{D})$ avec

$\alpha' = \min(\alpha, 1/2) < 1$. Ainsi nous pouvons supposer que Γ est un ensemble hyperboliquement séparé d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$ avec $\alpha < 1$. D'après la preuve du Théorème 7.1 [**20**, p.36–38], nous écrivons pour tout $f \in \mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$,

$$f(\zeta) = \sum_{z_k \in \Gamma} f(z_k) \Big(\frac{1-|z_k|^2}{1-|\zeta|^2}\Big)^{\alpha} g_k(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

avec

$$|g_k(\zeta)| \le C \frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\bar{z}_k\zeta|^2}.$$

Nous en déduisons que

$$\|f\|_h \le C \|f|_\Gamma\|_h \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} e^{-h(|\zeta|)} (1-|\zeta|^2)^{1-\alpha} \sum_{z_k \in \Gamma} e^{h(|z_k|)} \frac{(1-|z_k|^2)^{1+\alpha}}{|1-\bar{\zeta} z_k|^2}.$$

En outre, avec $v = e^h$ et $\delta = \rho(\Gamma)/5 \in]0, 1/5[$, notons que

$$\frac{\delta}{1-\delta} \le \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1-\delta}{\delta} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \Big(\frac{\delta}{1-\delta}\Big)^2}\right) \ge 1,$$

donc si $r \in [0, 1[$ alors

$$\begin{aligned} r &\le \frac{1-\delta}{\delta} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \Big(\frac{\delta}{1-\delta}\Big)^2}\right), \\ \Big(\frac{\delta}{1-\delta}\Big)^2 r^2 - \frac{2\delta}{1-\delta} r &+ \frac{1}{2} - \Big(\frac{\delta}{1-\delta}\Big)^2 \ge 0 \quad \text{et} \\ r + \frac{\delta}{1-\delta}(1-r^2) &\le \sqrt{1-(1-r^2)/2}. \end{aligned}$$

D'où, d'après le *Lemme I.2.2* et l'*inégalité* (I.4.1) avec $t = 2$, pour tous $z, w \in \mathbb{D}$ tels que $\rho(z, w) \le \delta$,

$$\frac{v(|z|)}{v(|w|)} \le \frac{e^{h\left(|w| + \frac{\delta}{1-\delta}(1-|w|^2)\right)}}{e^{h(|w|)}} \le \frac{e^{h\left(\sqrt{1-(1-|w|^2)/2}\right)}}{e^{h(|w|)}} \le \max\Big(2^{2\varepsilon}, e^{h\left(\sqrt{(1+r_\varepsilon^2)/2}\right) - h(0)}\Big),$$

la dernière inégalité venant en distinguant les cas $|w| > r_\varepsilon$ et $|w| \le r_\varepsilon$. Pour $\zeta \in \mathbb{D}$ fixé, le *Lemme I.4.1* appliqué avec $s = 1 + \alpha$, $p = 2$, $f_\zeta(z) = 1/(1 - \bar{\zeta} z)$ et $\mathbb{S} = \mathbb{D}$, donne

$$\sum_{z_k \in \Gamma} e^{h(|z_k|)} \frac{(1-|z_k|^2)^{1+\alpha}}{|1-\bar{\zeta} z_k|^2} \le C \int_{\mathbb{D}} e^{h(|z|)} \frac{1}{(1-|z|^2)^{1-\alpha} |1-\bar{\zeta} z|^2} \, dm_2(z).$$

Il en résulte, d'après le Théorème 1.7 [**11**, p.7], que pour tout $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D}) \subset \mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_h &\leq C\|f|_\Gamma\|_h \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{1-\alpha}}{e^{h(|\zeta|)}} \int_0^1 \frac{e^{h(r)}}{(1-r^2)^{1-\alpha}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta\ r\,dr}{|1-\zeta r e^{-i\theta}|^2} \\
&\leq C\|f|_\Gamma\|_h \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{1-\alpha}}{e^{h(|\zeta|)}} \int_0^1 \frac{e^{h(r)}}{(1-r^2)^{1-\alpha}} \frac{2r\,dr}{1-|\zeta|^2 r^2} \\
&\leq C\|f|_\Gamma\|_h \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} I(\zeta),
\end{aligned}$$

où

$$I(\zeta) = \int_{1-|\zeta|^2}^{+\infty} \frac{e^{h\left(\sqrt{1-(1-|\zeta|^2)/t}\right)}}{e^{h(|\zeta|)}} \frac{dt}{(|\zeta|^2+t)t^\alpha}.$$

Montrons pour finir que $\sup_{\zeta\in\mathbb{D}} I(\zeta) < +\infty$. Prenons $\varepsilon = \alpha/4$. Si $|\zeta| > r_\varepsilon$, alors, d'après (I.4.1),

$$I(\zeta) \leq \int_{1-|\zeta|^2}^1 \frac{dt}{t^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha/2}}{t^{1+\alpha}}\,dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha/2}} < +\infty.$$

Si $|\zeta| \leq r_\varepsilon$, alors, d'après (I.4.1),

$$\begin{aligned}
I(\zeta) &\leq e^{-h(0)} \int_{1-r_\varepsilon^2}^{+\infty} \frac{e^{h\left(\sqrt{1-(1-r_\varepsilon^2)/t}\right)}}{t^{\alpha+1}}\,dt \\
&\leq e^{h(r_\varepsilon)-h(0)} \left(\int_{1-r_\varepsilon^2}^1 \frac{dt}{t^{1+\alpha}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha/2}} \right) < +\infty.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

Théorème I.4.4. *Il existe un ensemble hyperboliquement séparé Γ d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ tel que $D^-(\Gamma, h) = +\infty$.*

Démonstration. Prenons Γ un ensemble hyperboliquement séparé d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$. D'après le *Lemme I.4.3*, Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ et d'après le Théorème 1.1 [**20**, p.23], $D^-(\Gamma) > \alpha > 0$. Donc

$$\begin{aligned}
D^-(\Gamma, h) &= \varliminf_{r\to 1-} \inf_{w\in\mathbb{D}} \frac{\sum_{z\in\Phi_w(\Gamma):1/2<|z|<r} |\ln|z||}{h(r)} \frac{|\ln(1-r)|}{|\ln(1-r)|} \\
&\geq D^-(\Gamma) \lim_{r\to 1-} |\ln(1-r)|/h(r) = +\infty.
\end{aligned}$$

□

CHAPITRE II

Séparation et ensemble de zéros pour les poids à croissance rapide

II.1. Introduction

Dans les espaces de type Bergman–Korenblum $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D}) = \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ avec $h(r) = \alpha \ln \frac{1}{1-r^2}$, $\alpha > 0$, on peut extraire de toute suite d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$, une suite hyperboliquement séparée et d'échantillonnage pour $\mathcal{A}^{-\alpha}(\mathbb{D})$. Considérons les poids h tels que

$$\lim_{r\to 1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|} = +\infty.$$

Nous remarquons qu'un ensemble hyperboliquement séparé ne peut être un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Donc nous introduisons un autre type de séparation des ensembles d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, comme dans **[17]**. Plus précisément, on étend h sur le disque unité $\mathbb{D}$ par $h(z) = h(|z|)$ et on pose

$$\rho_h(z,w) = |z-w|\sqrt{\Delta h}(\min(|z|,|w|)), \qquad z,w \in \mathbb{D}.$$

Un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est dit ρ_h–séparé si

$$\rho_h(\Gamma) = \inf\{\rho_h(z,w) \ : \ z,w \in \Gamma \ , \ z \neq w\} > 0.$$

Nous montrons que de tout ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, on peut extraire une suite ρ_h–séparée et d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. Grâce aussi à cette notion de ρ_h–séparation, nous donnons des exemples de suites régulièrement distribuées qui sont d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Ensuite nous étudions les ensembles de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$. On pose

$$\chi(r) = 1/\sqrt{\Delta h}(r) = (h''(r) + h'(r)/r)^{-1/2}.$$

Nous nous intéresserons aux poids h tels que

$$\begin{cases} h''(r)\chi^2(r) \to 1, \\ \chi(r) \text{ décroît vers } 0, \\ \chi'(r) \text{ tend vers } 0 \text{ quand } r \to 1- . \end{cases} \tag{II.1.1}$$

Ces conditions impliquent que

$$\lim_{r\to 1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|} = +\infty.$$

Nous supposons que h satisfait l'une des deux conditions indépendantes suivantes

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad : \quad && \sup_{r\in[0,1[} (1-r)|\chi'(r)|/\chi(r) < +\infty, \\ &(\mathrm{II}) \quad : \quad && \lim_{r\to 1-} |\chi'(r)||\ln\chi(r)| = 0. \end{aligned}$$

Donnons pour exemples typiques de poids pour (I)

$$h(r) = \Big(\ln \frac{1}{1-r^2}\Big) \ln\ln \frac{e}{1-r^2}, \quad h(r) = \frac{1}{1-r^2};$$

et pour (II)

$$h(r) = \exp \frac{1}{1-r^2}, \quad h(r) = \exp\exp \frac{1}{1-r^2}.$$

On définit les χ–densités uniformes suivantes

$$D^-_\chi(\Gamma) = \underline{\lim}_{R\to+\infty} \ \underline{\lim}_{|w|\to 1, w\in\mathbb{D}} \frac{\mathrm{Card}\big(\Gamma\cap\mathbb{D}(w, R\chi(w))\big)}{\pi R^2},$$

$$D^+_\chi(\Gamma) = \overline{\lim}_{R\to+\infty} \ \overline{\lim}_{|w|\to 1, w\in\mathbb{D}} \frac{\mathrm{Card}\big(\Gamma\cap\mathbb{D}(w, R\chi(w))\big)}{\pi R^2}.$$

Lorsque Γ est ρ_h–séparé, nous remarquons que $D^-_\chi(\Gamma) < +\infty$. Nous montrons, grâce à la formule de Jensen, qu'un ensemble Γ de zéros pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ a une χ–densité inférieure uniforme qui vérifie $D^-_\chi(\Gamma) \le 1/(2\pi)$. Nous terminons ce chapitre par la construction d'une fonction $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ ayant une croissance contrôlée et d'ensemble de zéros de χ–densité maximale, comme dans **[24]** et **[15]**. Plus précisément

Théorème II.1.1. *Soit h un poids vérifiant la condition (I) ou (II). Il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{D}$, d'ensemble de zéros Λ_h, telle que*

(a) Λ_h *est* ρ_h*–separé et* $\sup_{z\in\mathbb{D}} \rho_h(z, \Lambda_h) < +\infty$,

(b) $D^+_\chi(\Lambda_h) = D^-_\chi(\Lambda_h) = 1/(2\pi)$,

(c) $|f(z)| \asymp e^{h(z)}\rho_h(z, \Lambda_h), \quad z \in \mathbb{D}$.

II.2. Séparation

II.2.1. Echantillonnage et séparation hyperbolique. Dans cette sous–section, on va montrer qu'un ensemble hyperboliquement séparé n'est pas un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$.

Lemme II.2.1. *Un poids h satisfaisant les conditions* (II.1.1) *vérifie les propriétés*

$$\lim_{r\to 1-} \frac{1-r}{\chi(r)} = +\infty \quad et \quad \lim_{r\to 1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|} = +\infty.$$

Démonstration. L'égalité des accroissements finis pour χ donne

$$\lim_{r\to 1-} \chi(r)/(1-r) = 0.$$

Puisque $\chi^{-2}(r) = \Delta h(r) = (rh')'(r)/r$,

$$\lim_{r\to 1-} \frac{(rh')'(r)}{1/(1-r)^2} = +\infty.$$

Donc en intégrant deux fois,

$$\lim_{r\to 1-} \frac{h'(r)}{1/(1-r)} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 1-} \frac{h(r)}{\ln(1/(1-r))} = +\infty.$$

□

Le lemme suivant nous donne une minoration de la densité non–uniforme de Seip.

Lemme II.2.2. *Soit h un poids quelconque, et soit Γ un ensemble hyperboliquement séparé. Si Γ est un ensemble d'échantillonnage pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, alors*

$$D_0^-(\Gamma) = \varliminf_{R\to 1-} \frac{\sum_{z_k\in\Gamma:1/2<|z_k|<R} |\ln|z_k||}{|\ln(1-R)|} \geq \lim_{r\to 1-} \frac{h(r)}{|\ln(1-r)|}.$$

Démonstration. Soit $\mu_\Gamma = \inf\{|z_k|,\ z_k \in \Gamma\setminus\{0\}\}$. Pour $r \in]1/2, 1[$ et $s \in]\max(3/4, 1-\mu_\Gamma), 1[$, considérons la fonction test

$$g_{r,s}(z) = \frac{z}{1-s} \prod_{z_k\in\Gamma:0<|z_k|<r} \frac{\Phi_{z_k}(z)}{\rho(z_k, 1-s)}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Il est clair que $g_{r,s} \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, que

$$\|g_{r,s}\|_h \geq |g_{r,s}(1-s)|e^{-h(1-s)} = e^{-h(1-s)} \geq e^{-h(1/4)} > 0$$

et que

$$\sup_{\zeta\in\Gamma} |g_{r,s}(\zeta)|e^{-h(\zeta)} \leq \frac{e^{-h(r)}}{1-s} \prod_{0<|z_k|<r} \frac{1}{\rho(z_k, 1-s)}.$$