Chapitre VI

Existence et unicité d'une solution faible dans le cas de coefficients de diffusion unitaires

Table des matières

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à une version simplifiée du problème multi-lithologique (I.10)-(I.13) en ne considérant pas la contrainte sur le taux d'érosion et en supposant que les coefficients de diffusion des lithologies sont égaux, à un pour simplifier. La variable épaisseur de sédiments h *se découple alors des autres inconnues, les concentrations, et satisfait une équation parabolique linéaire. Les équations restantes, qui expriment la conservation de la masse des sédiments, couplent alors pour chaque lithologie* i *une équation linéaire du premier ordre pour la concentration de surface* c_i^s *avec une équation d'advection linéaire pour la concentration* c_i *qui admet* c_i^s *comme condition aux limites entrante à la surface du bassin en cas de sédimentation. Afin de traiter le problème de définition de la trace de* c_i *à la surface du bassin, nous avons défini une formulation faible pour le problème couplé (Définition VI-1.1), pour laquelle nous allons montrer l'existence d'une unique solution. Ce résultat est énoncé dans le Théorème VI-1.1.*

Le système est discrétisé de la même façon que dans le paragraphe III-1.1 en utilisant une intégration implicite en temps et une méthode Volume Fini en espace centrée sur les cellules. Nous allons alors montrer, sous l'Hypothèse VI-1.1, la convergence à une sous-suite près des solutions approchées de ce système pour la variable épaisseur de sédiments h *et les variables concentrations* c_i *et* c_i^s *vers une solution faible du problème (VI.6) au sens de la Définition VI-1.1 lorsque le pas d'espace et le pas de temps tendent vers 0. Ce résultat, énoncé dans le Théorème VI-2.1, nous donne ainsi l'existence d'une solution faible pour le problème couplé. La preuve de l'unicité de cette solution faible, donnée dans le paragraphe VI-4, utilise la linéarité du système (VI.6) par rapport aux variables concentrations ainsi que le problème adjoint, pour lequel on montre l'existence d'une solution faible en utilisant également la convergence d'un schéma numérique. Plus précisément, cette démonstration d'unicité utilise trois lemmes qui seront prouvés dans les paragraphes suivants. Le schéma numérique utilisé pour le problème adjoint et sa convergence vers une solution faible à une sous-suite près sont présentés dans le paragraphe VI-4.2. La preuve de cette convergence est une adaptation de celle donnée dans le paragraphe VI-3 pour le problème direct, et nous ne détaillerons donc que les principales différences. Pour montrer l'unicité de la solution faible, la principale difficulté réside dans deux lemmes donnant des résultats d'intégration par parties pour les solutions non régulières des systèmes directs et adjoints. La preuve de ces lemmes sera détaillée dans le paragraphe VI-4.3 pour les équations d'advection linéaires directe et adjointe, et dans le paragraphe VI-4.4 pour les équations linéaires du premier ordre directe et adjointe.*

Si l'on considère le couplage entre l'équation parabolique pour h *et les équations linéaires du premier ordre pour les variables* c_i^s*,* $i = 1, \dots, L$*, on peut voir que ce modèle présente des points communs avec les flux de Darcy diphasiques dans lesquels un tel couplage entre une équation elliptique ou parabolique et une équation hyperbolique apparaît. La convergence de schémas numériques pour ces modèles a fait l'objet de nombreuses études. On peut citer par exemple [49] pour la méthode Différences Finies, [11] et [3] pour les méthodes Eléments Finis mixtes et hybrides, [15] pour la discrétisation Eléments Finis - Volumes Finis, et enfin [60], [59] et [19] pour les schémas Volume Fini.*

Le plan de ce chapitre est le suivant. Le modèle mathématique simplifié est rappelé dans le paragraphe VI-1 et la formulation faible pour le problème couplé y est définie. Le schéma de discrétisation Volume Fini implicite en temps est donné dans le paragraphe VI-2. La section VI-3 est consacrée à la démonstration de la convergence de ce schéma numérique vers une solution faible : on montre tout d'abord la stabilité et des estimations d'erreur sur la solution discrète pour la variable épaisseur de sédiments et sa dérivée en temps (§VI-3.1), puis la convergence des solutions approchées pour les concentrations vers une solution faible (§VI-3.2). Enfin, dans le paragraphe VI-4, on s'attache à montrer l'unicité de cette solution faible.

Ces travaux ont été publiés dans [17] pour la convergence du schéma numérique (VI.11)-(VI.15) vers une solution faible, dans [25] pour l'unicité de cette solution faible, et dans [21] pour le tout.

VI-1 Modèle mathématique et formulation faible

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler le modèle mathématique considéré ici. Il s'agit du problème (I.10)-(I.13) dans lequel la contrainte sur le taux d'érosion n'est pas considérée. De plus, les coefficients de diffusion des lithologies sont pris égaux (à un pour fixer les idées). Cette hypothèse signifie, d'un point de vue physique, que les lithologies ont les mêmes propriétés de transport. La composition à l'intérieur du bassin est alors déterminée par les sédiments initialement présents dans ce bassin et par les sédiments apportés aux frontières. Enfin, par souci de simplicité, les déplacements du socle du bassin, les variations du niveau de la mer et les termes sources sont pris nuls.

La projection du bassin sur un plan de référence horizontal est considéré comme étant un domaine fixe $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1$ ou 2. On note h la variable épaisseur de sédiments définie sur le domaine $\mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}_+^*$, et $\mathcal{B}$ le domaine $\{(x, z, t) \,|\, (x, t) \in \mathcal{D}, z < h(x, t)\}$. Les équations donnant l'évolution du bassin sont les mêmes que dans le chapitre I.

En ce qui concerne les conditions aux limites, on les écrit ici de la façon suivante. On impose des conditions aux bords de type Neumann sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*$ pour h

$$\nabla h \cdot \vec{n} = g \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*,$$

avec $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ sortant de Ω, et des conditions aux limites de type Dirichlet pour les concentrations de surface :

$$c_i^s = \tilde{c}_i \text{ sur } \Sigma^+$$

avec $\Sigma^+ = \{(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \,|\, g(x, t) > 0\}$, $\tilde{c}_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, L$ et $\sum_{i=1}^L \tilde{c}_i = 1$. Enfin, on introduit une condition initiale pour l'épaisseur de sédiments ($h|_{t=0} = h^0$ sur Ω) et pour les concentrations dans le bassin : $c_i|_{t=0} = c_i^0$ sur le domaine $\{(x, z) \,|\, x \in \Omega, z < h^0(x)\}$ avec $c_i^0 \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, L$ et $\sum_{i=1}^L c_i^0 = 1$.

On obtient finalement le modèle suivant :

$$\text{En surface : } \left\{ \begin{array}{rll} c_i|_{z=h}\, \partial_t h + \mathrm{div}(-c_i^s \nabla h) &= 0 & \text{sur } \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ \sum_{i=1}^L c_i^s &= 1 & \text{sur } \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ \nabla h \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*} &= g & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ c_i^s|_{\Sigma^+} &= \tilde{c}_i & \text{sur } \Sigma^+ = \{(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \,|\, g(x, t) > 0\}, \\ h|_{t=0} &= h^0 & \text{sur } \Omega, \end{array} \right. \tag{VI.1}$$

$$\text{Dans le bassin : } \left\{ \begin{array}{rll} \partial_t c_i &= 0 & \text{sur } \mathcal{B} = \{(x, z, t) \,|\, (x, t) \in \mathcal{D}, z < h(x, t)\}, \\ c_i|_{z=h} &= c_i^s & \text{sur } \mathcal{D}^+ = \{(x, t) \in \mathcal{D} \,|\, \partial_t h(x, t) > 0\}, \\ c_i|_{t=0} &= c_i^0 & \text{sur } \{(x, z) \,|\, x \in \Omega, z < h^0(x)\}. \end{array} \right. \tag{VI.2}$$

Par la suite, nous allons considérer le nouveau système de coordonnées dans lequel la position verticale d'un point est mesurée vers le bas à partir de la surface du bassin, donné par le changement de variable $(x, \xi, t) = (x', h(x', t') - z, t')$. Dans ce nouveau système, on note $u_i(x, \xi, t) = c_i(x, h(x, t) - \xi, t)$ sur

$\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et $u_i^0(x,\xi) = c_i^0(x, h^0(x) - \xi, t)$ sur $\Omega \times \mathbb{R}_+^*$. On obtient alors le modèle diffusif multi-lithologique suivant :

$$\text{Conservation en surface :} \begin{cases} u_i|_{\xi=0}\, \partial_t h + \operatorname{div}(-c_i^s \nabla h) = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ \sum_{i=1}^L c_i^s = 1 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ \nabla h \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*} = g & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ c_i^s|_{\Sigma^+} = \tilde{c}_i & \text{sur } \Sigma^+, \\ h|_{t=0} = h^0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{VI.3}$$

$$\text{Conservation dans le bassin :} \begin{cases} \partial_t u_i + \partial_t h\, \partial_\xi u_i = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \\ u_i|_{\xi=0} = c_i^s & \text{sur } \mathcal{D}^+, \\ u_i|_{t=0} = u_i^0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases} \tag{VI.4}$$

Pour ce modèle simplifié, on voit en sommant les équations (VI.3) pour tout $i = 1, \ldots, L$ que la variable h satisfait l'équation parabolique

$$\begin{cases} \partial_t h - \Delta h = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ \nabla h \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*} = g & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ h_{|t=0} = h^0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{VI.5}$$

tandis que les variables concentrations (c_i^s, u_i) vérifient pour tout $i = 1, \ldots, L$ le système

$$\begin{cases} u_i|_{\xi=0}\, \partial_t h + \operatorname{div}(-c_i^s \nabla h) = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ c_i^s|_{\Sigma_+} = \tilde{c}_i & \text{sur } \Sigma^+, \\ \partial_t u_i + \partial_t h\, \partial_\xi u_i = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \\ u_i|_{\xi=0} = c_i^s & \text{sur } \mathcal{D}^+, \\ u_i|_{t=0} = u_i^0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases} \tag{VI.6}$$

La variable épaisseur de sédiments se découple donc des variables concentrations et satisfait le système linéaire (VI.5). La solution de ce problème est ensuite utilisée dans le système (VI.6), linéaire par rapport aux variables c_i^s et u_i.

Dans la suite, on fera les hypothèses suivantes sur les données :

Hypothèse VI-1.1.

(i) *Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, de classe C^∞,*

(ii) *$h^0 \in C^2(\bar{\Omega})$,*

(iii) *$g \in C^1(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+) \cap L^2(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+)$,*

(iv) *g et h^0 sont choisis selon les hypothèses du Théorème 5.3 de [41] (p. 320) de telle sorte que l'unique solution h de (VI.5) soit dans $C^2(\bar{\Omega} \times [0,T])$ pour tout $T > 0$,*

(v) *$\tilde{c}_i \in L^\infty(\Sigma^+)$ avec $\tilde{c}_i \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, L$ et $\sum_{i=1}^L \tilde{c}_i = 1$,*

(vi) *$u_i^0 \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$ avec $u_i^0 \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, L$ et $\sum_{i=1}^L u_i^0 = 1$,*

(vii) *Pour tout $T > 0$, les frontières $\partial\Sigma_T^+$ et $\partial\Sigma_T^-$ des ensembles $\Sigma_T^+ = \{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, g(x,t) > 0\}$ et $\Sigma_T^- = \{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, g(x,t) < 0\}$ sont l'union d'un nombre fini de variétés C^1 de dimension au plus $d-1$,*

(viii) Pour tout $T > 0$, les frontières $\partial\mathcal{D}_T^+$ et $\partial\mathcal{D}_T^-$ des ensembles $\mathcal{D}_T^+ = \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) > 0\}$, et $\mathcal{D}_T^- = \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) < 0\}$ sont l'union d'un nombre fini de variétés C^1 de dimension au plus d.

Dans la suite, on notera $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles

$$\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,|\, \mathrm{Supp}(\varphi) \text{ borné dans } \mathbb{R}^n\}.$$

Pour avoir une formulation mathématique rigoureuse du problème (VI.6), nous allons chercher des solutions faibles définies de la façon suivante pour tout $i = 1, \ldots, L$.

Définition VI-1.1. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée, et soit h la solution du problème (VI.5). Alors $(u_i, c_i^s) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \times L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$ est une solution faible de (VI.6) si :*
(i) *Pour tout $\varphi \in \mathcal{A} = \{v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+2}) \,|\, v(.,0,.) = 0 \text{ sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \setminus \mathcal{D}^+\}$*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \left[\partial_t \varphi(x,\xi,t) + \partial_t h(x,t)\, \partial_\xi \varphi(x,\xi,t)\right] u_i(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx \\ &+ \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} u_i^0(x,\xi)\, \varphi(x,\xi,0)\, d\xi\, dx + \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t h(x,t)\, c_i^s(x,t)\, \varphi(x,0,t)\, dt\, dx = 0, \end{aligned} \tag{VI.7}$$

(ii) *Pour tout $\psi \in \mathcal{A}_0 = \{v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+2}) \,|\, v(.,0,.) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \setminus \Sigma^+\}$*

$$\begin{aligned} &- \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \left[\partial_t \psi(x,\xi,t) + \partial_t h(x,t)\, \partial_\xi \psi(x,\xi,t)\right] u_i(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx \\ &- \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} u_i^0(x,\xi)\, \psi(x,\xi,0)\, d\xi\, dx + \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_\Omega c_i^s(x,t)\, \nabla h(x,t) \cdot \nabla \psi(x,0,t)\, dx \right. \\ &\left. \qquad - \int_{\partial\Omega} \tilde{c}_i(x,t)\, g(x,t)\, \psi(x,0,t) d\gamma(x) \right) dt = 0. \end{aligned} \tag{VI.8}$$

Le principal objectif de ce chapitre est alors de montrer le théorème suivant :

Théorème VI-1.1. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée. Alors, pour tout $i = 1, \ldots, L$, le problème (VI.6) admet au moins une solution faible (u_i, c_i^s) au sens de la Définition VI-1.1 satisfaisant $\sum_{i=1}^L u_i = 1$, $u_i \geq 0$, et $\sum_{i=1}^L c_i^s = 1$, $c_i^s \geq 0$. De plus, pour tout $i = 1, \ldots, L$, la solution faible u_i au sens de la Définition VI-1.1 est unique.*

Remarque VI-1.1. *L'existence et l'unicité sont encore vraies si on considère un modèle de compaction donné par une porosité liée à la profondeur $\Phi(h - z)$ et/ou si on considère un coefficient de diffusion non linéaire $k_i = k(h)$ pour tout $i = 1, \ldots, L$. La principale différence est alors que h représente la solution d'une équation parabolique non linéaire de la forme*

$$(1 - \Phi(h))\, \partial_t h + \Delta\Psi(h) = 0$$

avec $\Phi \in [0,1)$ régulière et $\Psi(h)$ strictement décroissante, régulière et à dérivée bornée.

VI-2 Schéma Volume Fini

Le système (VI.3)-(VI.4) est discrétisé par une intégration implicite en temps et une méthode Volume Fini en espace avec les variables centrées sur les cellules. Nous allons considérer par la suite des maillages Volume Fini admissibles selon la définition suivante :

Définition VI-2.1 (Maillages admissibles). *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 1$ ou 2. Par la suite, on notera $m(.)$ une mesure sur R^d, égale à la mesure de Lebesgue si $d \geqslant 1$; si $d = 0$, la mesure m d'un point est prise égale à 1 et celle de l'ensemble vide à 0. Un maillage Volume Fini admissible de Ω pour la discrétisation du problème (VI.3)-(VI.4) est donnée par une famille $\mathcal{K}$ de volumes de contrôle qui sont des sous-ensembles ouverts disjoints de Ω, et par une famille $\mathcal{P}$ de points de Ω, satisfaisant les propriétés suivantes :*
(i) *La fermeture de l'union de tous les volumes de contrôle de $\mathcal{K}$ est $\bar{\Omega}$.*
(ii) *Pour tout κ, $\kappa' \in \mathcal{K}$ avec $\kappa \neq \kappa'$, soit la mesure $m(\bar{\kappa} \cap \bar{\kappa}')$ de dimension $d-1$ est nulle, soit elle est strictement positive et $\bar{\kappa} \cap \bar{\kappa}'$ est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$. Dans la suite, on notera Σ_{int} la famille des sous-ensembles σ de Ω contenus dans des hyperplans de $\mathbb{R}^d$, ayant des mesures strictement positives et tels qu'il existe $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$ avec $m(\bar{\kappa} \cap \bar{\kappa}') > 0$ et $\bar{\sigma} = \bar{\kappa} \cap \bar{\kappa}'$. On notera également $\kappa|\kappa' \in \Sigma_{int}$ l'arête entre les cellules κ et κ'.*
(iii) *La famille $\mathcal{P} = (x_\kappa)_{\kappa \in \mathcal{K}}$ est telle que $x_\kappa \in \bar{\kappa}$ (pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$) et, si $\sigma = \kappa|\kappa'$, alors on doit avoir $x_\kappa \neq x_{\kappa'}$ avec la droite passant par x_κ et $x_{\kappa'}$ orthogonale à l'arête $\kappa|\kappa'$.*
(iv) *Pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, il existe un sous-ensemble Σ_κ de Σ_{int} tel que $\partial\kappa \setminus \partial\Omega = \bar{\kappa} \setminus (\kappa \cup \partial\Omega) = \cup_{\sigma \in \Sigma_\kappa} \bar{\sigma}$.*
Par la suite, on notera $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ ce maillage admissible.

Dans cette définition, aucune hypothèse n'est donc faite sur les arêtes du maillage à la frontière du domaine.

Soit $(\mathcal{K}, \Sigma, \mathcal{P})$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1. Dans toute la suite, on notera $\delta\mathcal{K}$ la taille de ce maillage définie par $\delta\mathcal{K} = \sup\{diam(\kappa), \kappa \in \mathcal{K}\}$, $|\kappa|$ (resp. $|\sigma|$, $|\partial\kappa \cap \partial\Omega|$) la mesure de dimension d de la cellule κ (resp. la mesure de dimension $d-1$ $m(\sigma)$, $m(\partial\kappa \cap \partial\Omega)$), $\mathcal{K}_\kappa$ l'ensemble des cellules voisines de la cellule κ (excluant κ), $T_\sigma = T_{\kappa\kappa'}$ la transmissibilité de l'arête $\sigma = \kappa|\kappa'$ définie par $T_{\kappa\kappa'} := \frac{|\sigma|}{d(\kappa,\kappa')}$ où $d(\kappa, \kappa')$ est la distance entre les points x_κ et $x_{\kappa'}$, $reg(\mathcal{K})$ un facteur géométrique défini par $reg(\mathcal{K}) = \max_{\substack{\sigma \in \Sigma_{int} \\ \sigma = \kappa|\kappa'}} \frac{\delta\mathcal{K}}{d(\kappa,\kappa')}$, et $\vec{n}_{\kappa\kappa'}$ le vecteur unitaire normal à $\sigma = \kappa|\kappa'$ sortant de κ.

Pour un ensemble donné $\mathcal{P} = (x_\kappa)_{\kappa \in \mathcal{K}}$ de points disjoints de Ω, un exemple de maillage admissible au sens de la Définition VI-2.1 est le maillage Voronoï dont les volumes de contrôle κ sont définis par

$$\kappa = \{x \in \Omega \mid d(x, x_\kappa) < d(x, x_{\kappa'}) \text{ pour tout } x_{\kappa'} \in \mathcal{P}, x_{\kappa'} \neq x_\kappa\}. \tag{VI.9}$$

Enfin, on notera $X(\mathcal{K})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles sur Ω qui sont constantes sur chaque volume de contrôle du maillage. Pour tout sous-ensemble $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$, $\chi_\mathcal{O}$ désignera la fonction telle que $\chi_\mathcal{O}(y) = 1$ si $y \in \mathcal{O}$ et $\chi_\mathcal{O}(y) = 0$ sinon. Et, pour toute fonction f, on définit $f^+ = \max(f, 0) \geqslant 0$, $f^- = -\min(f, 0) \geqslant 0$, d'où $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

Par la suite, on utilisera la semi-norme discrète H^1 définie dans [19] :

Définition VI-2.2. *(Semi-norme discrète H^1)*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 1$ ou 2, et $(\mathcal{K}, \Sigma, \mathcal{P})$ un maillage Volume Fini admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1. Pour $u \in X(\mathcal{K})$, la semi-norme discrète H^1 de u est définie par :

$$|u|_{1,\mathcal{K}} = \Big(\sum_{\sigma \in \Sigma_{int}} T_\sigma (D_\sigma u)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

où u_κ désigne la valeur de u sur le volume de contrôle $\kappa \in \mathcal{K}$ et $D_\sigma u = |u_\kappa - u_{\kappa'}|$ pour $\sigma = \kappa|\kappa'$.

Remarque VI-2.1. *Soit $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1, et $|\Omega|$ la mesure de dimension d du domaine Ω. En calculant la mesure de l'ensemble des cônes de sommet x_κ et de base $\sigma \in \Sigma_\kappa$ pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$ et tout $\sigma \in \Sigma_\kappa$, on peut montrer que*

$$\sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_{int} \\ \sigma = \kappa|\kappa'}} |\sigma| \, d(\kappa, \kappa') \leq d \, |\Omega|. \tag{VI.10}$$

La discrétisation en temps est notée t^n, $n \in I\!N$, avec $t^0 = 0$ et $\Delta t^{n+1} := t^{n+1} - t^n > 0$. Dans la suite, l'exposant $n \in I\!N$ sera utilisé pour désigner les variables prises au temps t^n. Supposant l'ensemble $\{\Delta t^n \,|\, n \in I\!N^*\}$ borné, on notera $\Delta t = \sup\{\Delta t^n \,|\, n \in I\!N^*\}$ et, pour tout $T > 0$ donné, on désignera par $N_{\Delta t}$ l'entier tel que $t^{N_{\Delta t}} < T \leqslant t^{N_{\Delta t}+1}$.

Nous allons maintenant donner la discrétisation du système (VI.3)-(VI.4), qui est obtenue de la même façon que le schéma totalement implicite (III.1)-(III.5) pour le problème complet (§III-1.1). Pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, on définit les valeurs initiales suivantes :

1. h_κ^0 est une approximation de l'épaisseur initiale h^0 sur κ définie par $h_\kappa^0 = h^0(x_\kappa)$,
2. $u_{i,\kappa}^0$, pour toute lithologie i, est l'approximation de u_i^0 sur la cellule κ, définie par $u_{i,\kappa}^0(\xi) = \frac{1}{|\kappa|} \int_\kappa u_i^0(x, \xi)\, dx$ pour $\xi \in I\!R_+^*$; on définit de plus $c_{i,\kappa}^0$ sur $(-\infty, h_\kappa^0)$ par $c_{i,\kappa}^0(z) = u_{i,\kappa}^0(h_\kappa^0 - z)$.

La discrétisation Volume Fini implicite en temps du système (VI.3)-(VI.4) s'écrit alors, sur tout volume de contrôle $\kappa \in \mathcal{K}$ entre les temps t^n et t^{n+1} :

Conservation des sédiments en surface :

$$\begin{gathered}\frac{\Delta \mathcal{M}_{i,\kappa}^{n+1}}{\Delta t^{n+1}} |\kappa| + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} c_{i,\kappa\kappa'}^{s,n+1} \, T_{\kappa\kappa'} (h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) \\ -|\partial\kappa \cap \partial\Omega| \, \tilde{c}_{i,\kappa}^{n+1} g_\kappa^{(+),n+1} + |\partial\kappa \cap \partial\Omega| \, c_{i,\kappa}^{s,n+1} g_\kappa^{(-),n+1} = 0,\end{gathered} \tag{VI.11}$$

$$\sum_{i=1}^L c_{i,\kappa}^{s,n+1} = 1, \tag{VI.12}$$

Conservation des sédiments dans les colonnes :

$$\text{Si } h_\kappa^{n+1} \geq h_\kappa^n \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{M}_{i,\kappa}^{n+1} = c_{i,\kappa}^{s,n+1} (h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n) \\ c_{i,\kappa}^{n+1}(z) = c_{i,\kappa}^n(z), \; z < h_\kappa^n \\ c_{i,\kappa}^{n+1}(z) = c_{i,\kappa}^{s,n+1}, \; z \in (h_\kappa^n, h_\kappa^{n+1}) \end{array} \right. \tag{VI.13}$$

$$\text{sinon} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{M}_{i,\kappa}^{n+1} = \int_{h_\kappa^n}^{h_\kappa^{n+1}} c_{i,\kappa}^n(z) dz \\ c_{i,\kappa}^{n+1}(z) = c_{i,\kappa}^n(z), \; z < h_\kappa^{n+1}. \end{array} \right. \tag{VI.14}$$

Dans (VI.11)-(VI.14), on a utilisé les notations suivantes :

1. h_κ^n est l'approximation de l'épaisseur de sédiments h au temps t^n sur la cellule κ,
2. $c_{i,\kappa}^{s,n+1}$ est l'approximation de la concentration de surface en lithologie i au temps t^{n+1} sur κ,
3. la fonction $c_{i,\kappa}^n(z)$, définie dans la colonne $(-\infty, h_\kappa^n)$, est l'approximation de la concentration des sédiments en lithologie i dans la colonne $\{(x,z) \,|\, x \in \kappa, z < h(x,t^n)\}$ au temps t^n,
4. $c_{i,\kappa\kappa'}^{s,n+1}$ est l'évaluation décentrée amont de la concentration de surface en lithologie i à l'arête σ entre les cellules κ et κ' par rapport au signe de $h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}$:

$$c_{i,\kappa\kappa'}^{s,n+1} = \begin{cases} c_{i,\kappa}^{s,n+1} \text{ si } h_\kappa^{n+1} > h_{\kappa'}^{n+1}, \\ c_{i,\kappa'}^{s,n+1} \text{ sinon ,} \end{cases}$$

5. $g_\kappa^{(+),n+1}$ et $g_\kappa^{(-),n+1}$ sont les approximations des flux aux bords g^+ et g^- définies par :

$$g_\kappa^{(+),n+1} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t^{n+1}} \frac{1}{|\partial\kappa \cap \partial\Omega|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\kappa\cap\partial\Omega} g^+(x,t)\, d\gamma(x) dt & \text{si } |\partial\kappa \cap \partial\Omega| \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$g_\kappa^{(-),n+1} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t^{n+1}} \frac{1}{|\partial\kappa \cap \partial\Omega|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\kappa\cap\partial\Omega} g^-(x,t)\, d\gamma(x) dt & \text{si } |\partial\kappa \cap \partial\Omega| \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et par suite, pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$,

$$g_\kappa^{n+1} = \frac{1}{\Delta t^{n+1}} \frac{1}{|\partial\kappa \cap \partial\Omega|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\kappa\cap\partial\Omega} g(x,t)\, d\gamma(x) dt = g_\kappa^{(+),n+1} - g_\kappa^{(-),n+1},$$

6. $\tilde{c}_{i,\kappa}^{n+1}$ est l'approximation de la fonction $\tilde{c}_i$ prolongée par 0 sur $(\partial\Omega \times I\!R_+^*) \setminus \Sigma^+$:

$$\tilde{c}_{i,\kappa}^{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t^{n+1}} \frac{1}{|\partial\kappa \cap \partial\Omega|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\kappa\cap\partial\Omega} \tilde{c}_i(x,t)\, d\gamma(x)\, dt & \text{si } |\partial\kappa \cap \partial\Omega| \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et il en résulte que $\tilde{c}_{i,\kappa}^{n+1} \in [0,1]$.

Considérant le système de coordonnées $\xi = h_\kappa^n - z$, la fonction $u_{i,\kappa}^n$ est définie pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $n \geq 0$ et $i = 1, \ldots, L$ par

$$u_{i,\kappa}^n(\xi) = c_{i,\kappa}^n(h_\kappa^n - \xi) \text{ pour tout } \xi \in I\!R_+^*. \tag{VI.15}$$

Pour obtenir une discrétisation complète du modèle, il suffit ensuite de projeter, pour chaque cellule κ, la condition initiale $u_{i,\kappa}^0(\xi)$ sur l'espace des fonctions continues par morceaux dans la direction ξ. Le schéma (VI.13)-(VI.15) génère alors à chaque nouveau temps t^{n+1} une approximation constante par morceaux de $u_{i,\kappa}^{n+1}(\xi)$, avec un maillage irrégulier dépendant du temps dans la direction ξ.

Pour plus de simplicité, on supposera dans la suite de ce chapitre que $\Delta t = \Delta t^n$ pour tout $n \geq 1$, mais tous les résultats présentés s'étendent facilement à des pas de temps variables.

Dans les paragraphes VI-3.1 et VI-3.2, nous allons montrer, pour tout $n \geq 0$, l'existence de solutions $(h_\kappa^n)_{\kappa\in\mathcal{K}}$, $(c_{i,\kappa}^{s,n+1})_{\kappa\in\mathcal{K}}$, $(c_{i,\kappa}^n)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ et $(u_{i,\kappa}^n)_{\kappa\in\mathcal{K}}$, $i = 1, \ldots, L$, au problème (VI.11)-(VI.15). Ces solutions sont uniques sauf pour la concentration de surface $c_{i,\kappa}^{s,n+1}$ qui est arbitraire (telle que $\sum_{j=1}^L c_{j,\kappa}^{s,n+1} = 1$) sur certains points dégénérés $(\kappa, n+1)$ pour lesquels elle est choisie selon le Lemme VI-3.1.

Pour tout maillage admissible $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ de Ω au sens de la Définition VI-2.1, tout pas de temps $\Delta t > 0$ et $i = 1, \ldots, L$, soit $h_{\mathcal{K},\Delta t}$, $c^s_{i,\mathcal{K},\Delta t}$ les fonctions définies sur $\Omega \times \mathbb{R}^*_+$ et $u_{i,\mathcal{K},\Delta t}$ la fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+$ par

$$\left\{ \begin{aligned} h_{\mathcal{K},\Delta t}(x,t) &= h^{n+1}_\kappa, \\ u_{i,\mathcal{K},\Delta t}(x,\xi,t) &= u^{n+1}_{i,\kappa}(\xi), \\ c^s_{i,\mathcal{K},\Delta t}(x,t) &= c^{s,n+1}_{i,\kappa}, \end{aligned} \right. \tag{VI.16}$$

pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$, $t \in (t^n, t^{n+1}]$, $\xi \in \mathbb{R}^*_+$, $n \geq 0$, où h^n_κ, $c^n_{i,\kappa}$ sont les solutions de (VI.11)-(VI.15) et $c^{s,n+1}_{i,\kappa}$ une solution de (VI.11)-(VI.15) choisie selon le Lemme VI-3.1.

Dans le paragraphe VI-3, nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème VI-2.1. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $(\mathcal{K}_m, \Sigma^m_{int}, \mathcal{P}_m)$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1 et $\Delta t_m > 0$. Supposons de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $reg(\mathcal{K}_m) \leq \alpha$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et que $\Delta t_m \to 0$, $\frac{\delta \mathcal{K}_m}{\sqrt{\Delta t_m}} \to 0$ quand $m \to \infty$.*

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $i = 1, \ldots, L$, soit $h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$, $u_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$, les fonctions définies de manière unique par (VI.16) et $c^s_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$ une fonction définie par (VI.16) à partir d'une solution de (VI.11)-(VI.15) choisie selon le Lemme VI-3.1 avec $\mathcal{K} = \mathcal{K}_m$, $\Delta t = \Delta t_m$.

Alors la suite $(h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution h du problème (VI.5) dans $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ pour tout $T > 0$, et il existe une sous-suite de $(\mathcal{K}_m, \Delta t_m)_{m \in \mathbb{N}}$, toujours notée $(\mathcal{K}_m, \Delta t_m)_{m \in \mathbb{N}}$, telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, L\}$, la sous-suite $(c^s_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m \in \mathbb{N}}$ (resp. $(u_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m \in \mathbb{N}}$) converge vers une fonction c^s_i dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^*_+)$ (resp. u_i dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+)$) pour la topologie faible-$\star$. De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, L\}$, la limite (u_i, c^s_i) est une solution faible du problème (VI.6) au sens de la Définition VI-1.1.

On peut noter que les résultats énoncés dans le Théorème VI-2.1 sont encore valables si seuls les points (i) à (vi) de l'Hypothèse VI-1.1 sont vérifiés. Enfin, on déduit de ce théorème et du Théorème VI-1.1 le résultat suivant, qui établit la convergence de la suite complète des approximations de la concentration dans le bassin vers la solution faible :

Théorème VI-2.2. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $(\mathcal{K}_m, \Sigma^m_{int}, \mathcal{P}_m)$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1 et $\Delta t_m > 0$. Supposons de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $reg(\mathcal{K}_m) \leq \alpha$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et que $\Delta t_m \to 0$, $\frac{\delta \mathcal{K}_m}{\sqrt{\Delta t_m}} \to 0$ quand $m \to \infty$.*

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $i = 1, \ldots, L$, soit $h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$ et $u_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$ les uniques solutions de (VI.11)-(VI.15) définies par (VI.16) avec $\mathcal{K} = \mathcal{K}_m$, $\Delta t = \Delta t_m$.

Alors la suite $(h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution h du problème (VI.5) dans $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ pour tout $T > 0$, et la suite $(u_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution faible u_i de (VI.6) au sens de la Définition VI-1.1 dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+)$ pour la topologie faible-$\star$.

VI-3 Existence, stabilité et convergence du schéma

Dans ce paragraphe, nous allons montrer le résultat de convergence énoncé dans le Théorème VI-2.1, d'abord pour la solution approchée de l'épaisseur de sédiments (§VI-3.1), puis pour les concentrations (§VI-3.2).

VI-3.1 Stabilité et convergence pour l'épaisseur de sédiments approchée et sa dérivée en temps

En sommant les équations (VI.11) sur $i = 1, \ldots, L$, on voit que, pour tout $n \in I\!N$, la solution $(h_\kappa^{n+1})_{\kappa\in\mathcal{K}}$ satisfait la discrétisation Volume Fini implicite suivante de (VI.5) :

$$|\kappa|\frac{h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n}{\Delta t} + \sum_{\kappa'\in\mathcal{K}_\kappa} T_{\kappa\kappa'}(h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) - |\partial\kappa \cap \partial\Omega|\, g_\kappa^{n+1} = 0, \tag{VI.17}$$

avec $h_\kappa^0 = h^0(x_\kappa)$. La preuve de l'existence et de l'unicité de la solution $(h_\kappa^n)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ pour tout $n \geq 1$ est classique et se trouve par exemple dans [19] pour tout maillage admissible $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ de Ω.

La proposition suivante fournit des estimations d'erreur sur h et sa dérivée en temps. Les estimations d'erreur sur h ont déjà été montrées dans [19].

Proposition VI-3.1. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée. Soit h la solution du problème (VI.5), $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1, $T > 0$, et $\Delta t \in (0, T)$. Pour tout $n \in \{0, ..., N_{\Delta t} + 1\}$, soit $(h_\kappa^n)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ la solution de (VI.17) et $e_\mathcal{K}^n \in X(\mathcal{K})$ définie par $e_\mathcal{K}^n(x) = e_\kappa^n = h(x_\kappa, t^n) - h_\kappa^n$ pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$. Alors il existe D_1, D_2, D_3 et $D_4 > 0$ ne dépendant que de $\|\nabla\partial_t h\|_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$, $\|h\|_{L^\infty(0,2T;W^{2,\infty}(\Omega))}$, T et Ω tels que :*

$$\|e_\mathcal{K}^n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq D_1(\Delta t + \delta\mathcal{K})^2 \text{ pour tout } n \in \{1, \ldots, N_{\Delta t} + 1\}, \tag{VI.18}$$

$$\sum_{n=0}^{N_{\Delta t}} \Delta t\, |e_\mathcal{K}^{n+1}|^2_{1,\mathcal{K}} \leq D_2\,(\Delta t + \delta\mathcal{K})^2, \tag{VI.19}$$

$$\sum_{n=0}^{N_{\Delta t}} \Delta t \left\|\frac{e_\mathcal{K}^{n+1} - e_\mathcal{K}^n}{\Delta t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq D_3\frac{(\delta\mathcal{K} + \Delta t)^2}{\Delta t}, \tag{VI.20}$$

$$\text{et } \sum_{n=0}^{N_{\Delta t}} \Delta t \sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}} |\sigma|\, d(\kappa,\kappa')\Bigg(\frac{h_{\kappa'}^{n+1} - h_\kappa^{n+1}}{d(\kappa,\kappa')} - \frac{1}{\Delta t}\frac{1}{|\sigma|}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_\sigma \nabla h(x,t)\cdot\vec{n}_{\kappa\kappa'} d\gamma(x)\, dt\Bigg)^2 \leq D_4(\Delta t + \delta\mathcal{K})^2. \tag{VI.21}$$

Preuve. En intégrant l'équation (VI.5) sur le volume de contrôle $\kappa \in \mathcal{K}$ et sur l'intervalle de temps (t^n, t^{n+1}) pour tout $n \in \{0, \ldots, N_{\Delta t}\}$, on obtient

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_\kappa \partial_t h(x,t)\, dx dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\partial\kappa} \nabla h(x,t)\cdot\vec{n}_\kappa\, d\gamma(x) dt = 0 \tag{VI.22}$$

où $\vec{n}_\kappa$ est le vecteur unitaire normal à $\partial\kappa$ sortant de κ. En soustrayant (VI.17) à (VI.22)/Δt et en utilisant la définition de g_κ^{n+1}, on obtient l'équation suivante pour l'erreur e_κ^{n+1}

$$|\kappa|\frac{e_\kappa^{n+1} - e_\kappa^n}{\Delta t} + \sum_{\kappa'\in\mathcal{K}_\kappa} T_{\kappa\kappa'}(e_\kappa^{n+1} - e_{\kappa'}^{n+1}) = -|\kappa| P_\kappa^n - \sum_{\sigma\in\Sigma_\kappa} |\sigma| R_{\kappa,\sigma}^n \tag{VI.23}$$

avec les résidus

$$R^n_{\kappa,\sigma} = \frac{1}{\Delta t}\frac{1}{|\sigma|}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_\sigma\Big[\frac{h(x_{\kappa'},t^{n+1}) - h(x_\kappa,t^{n+1})}{d(\kappa,\kappa')} - \nabla h(x,t)\cdot\vec{n}_{\kappa\kappa'}\Big]d\gamma(x)dt$$

pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa$, $\sigma = \kappa|\kappa'$, et

$$P^n_\kappa = \frac{1}{\Delta t}\frac{1}{|\kappa|}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_\kappa(\partial_t h(x,t) - \partial_t h(x_\kappa,t))\,dxdt \quad \text{pour tout } \kappa\in\mathcal{K}.$$

Grâce à la régularité de h, il existe $C_1 > 0$ ne dépendant que de $\|\nabla\partial_t h\|_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$ tel que

$$|P^n_\kappa| \le C_1\,\delta\mathcal{K}, \tag{VI.24}$$

et $C_2 > 0$ ne dépendant que de $\|\partial_t\nabla h\|_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$ et $\|h\|_{L^\infty(0,2T;W^{2,\infty}(\Omega))}$ tel que

$$|R^n_{\kappa,\sigma}| \le C_2\,(\delta\mathcal{K} + \Delta t). \tag{VI.25}$$

Ainsi, en multipliant l'équation (VI.23) par e^{n+1}_κ et en sommant sur les cellules $\kappa\in\mathcal{K}$, on obtient l'estimation

$$\begin{aligned}\sum_{\kappa\in\mathcal{K}}|\kappa|(e^{n+1}_\kappa - e^n_\kappa)e^{n+1}_\kappa + \Delta t\sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}} T_{\kappa\kappa'}(e^{n+1}_\kappa - e^{n+1}_{\kappa'})^2\\ = -\Delta t\sum_{\kappa\in\mathcal{K}}|\kappa|P^n_\kappa\,e^{n+1}_\kappa - \Delta t\sum_{\kappa\in\mathcal{K}}\sum_{\sigma\in\Sigma_\kappa}|\sigma|R^n_{\kappa,\sigma}\,e^{n+1}_\kappa.\end{aligned} \tag{VI.26}$$

Notons que $R_{\kappa,\sigma} = -R_{\kappa',\sigma}$ pour tout $\sigma = \kappa|\kappa' \in \Sigma_{int}$, si bien que l'on peut définir, pour toute arête $\sigma\in\Sigma_{int}$, $R_\sigma = |R_{\kappa,\sigma}|$ avec $\sigma\in\Sigma_\kappa$. Ainsi, en utilisant dans (VI.26) l'égalité $(e^{n+1}_\kappa - e^n_\kappa)\,e^{n+1}_\kappa = \frac{1}{2}\big[(e^{n+1}_\kappa)^2 - (e^n_\kappa)^2 + (e^{n+1}_\kappa - e^n_\kappa)^2\big]$, l'inégalité de Young, (VI.10), (VI.24) et (VI.25), on obtient

$$\begin{aligned}\|e^{n+1}_\mathcal{K}\|^2_{L^2(\Omega)} + \Delta t\,|e^{n+1}_\mathcal{K}|^2_{1,\mathcal{K}} \le \|e^n_\mathcal{K}\|^2_{L^2(\Omega)}\\ +\Delta t\,C_3\,(\Delta t + \delta\mathcal{K})\,\|e^{n+1}_\mathcal{K}\|^2_{L^2(\Omega)} + \Delta t\,C_4\,(\delta\mathcal{K} + \Delta t)^2\end{aligned} \tag{VI.27}$$

avec C_3 et C_4 ne dépendant que de $\|\nabla\partial_t h\|_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$, $\|h\|_{L^\infty(0,2T;W^{2,\infty}(\Omega))}$ et Ω.
L'estimation (VI.18) se déduit de (VI.27) en utilisant les mêmes arguments que dans [19]. L'inégalité (VI.19) est obtenue en sommant (VI.27) sur $n\in\{0,\ldots,N_{\Delta t}\}$, en utilisant l'inégalité (VI.18) et la propriété $e^0_\kappa = 0$ pour tout $\kappa\in\mathcal{K}$.

Ensuite, (VI.19) est équivalent à

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N_{\Delta t}}\Delta t\sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}}|\sigma|\,d(\kappa,\kappa')\Big(\frac{h^{n+1}_{\kappa'} - h^{n+1}_\kappa}{d(\kappa,\kappa')} - \frac{h(x_{\kappa'},t^{n+1}) - h(x_\kappa,t^{n+1})}{d(\kappa,\kappa')}\Big)^2\\ \le D_2\,(\Delta t + \delta\mathcal{K})^2.\end{aligned} \tag{VI.28}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N_{\Delta t}}\Delta t\sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}}|\sigma|\,d(\kappa,\kappa')\Big(\frac{h(x_{\kappa'},t^{n+1}) - h(x_\kappa,t^{n+1})}{d(\kappa,\kappa')}\\ -\frac{1}{\Delta t}\frac{1}{|\sigma|}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_\sigma\nabla h(x,t)\cdot\vec{n}_{\kappa\kappa'}d\gamma(x)dt\Big)^2\\ = \sum_{n=0}^{N_{\Delta t}}\Delta t\sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}}|\sigma|\,d(\kappa,\kappa')(R^n_\sigma)^2 \le C_5\,(\delta\mathcal{K} + \Delta t)^2\end{aligned} \tag{VI.29}$$

avec C_5 ne dépendant que de $\|\nabla \partial_t h\|_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$, $\|h\|_{L^\infty(0,2T;W^{2,\infty}(\Omega))}$, T et Ω. Ainsi, (VI.21) se déduit de (VI.28) et (VI.29).

Pour montrer l'équation (VI.20), on multiplie (VI.23) par $(e_\kappa^{n+1} - e_\kappa^n)/\Delta t$ et on somme sur $\kappa \in \mathcal{K}$:

$$\Delta t \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} |\kappa| \left(\frac{e_\kappa^{n+1} - e_\kappa^n}{\Delta t} \right)^2 + \sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}} T_{\kappa\kappa'} (e_\kappa^{n+1} - e_{\kappa'}^{n+1})(e_\kappa^{n+1} - e_{\kappa'}^{n+1} - e_\kappa^n + e_{\kappa'}^n)$$
$$= -\Delta t \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} |\kappa| P_\kappa^n \frac{e_\kappa^{n+1} - e_\kappa^n}{\Delta t} - \sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}} |\sigma| R_{\kappa,\sigma}^n (e_\kappa^{n+1} - e_{\kappa'}^{n+1} - e_\kappa^n + e_{\kappa'}^n).$$

Il résulte ensuite de $(e_\kappa^{n+1} - e_{\kappa'}^{n+1})(e_\kappa^{n+1} - e_{\kappa'}^{n+1} - e_\kappa^n + e_{\kappa'}^n) = \frac{1}{2}\left[(e_\kappa^{n+1} - e_{\kappa'}^{n+1})^2 - (e_\kappa^n - e_{\kappa'}^n)^2 + (e_\kappa^{n+1} - e_{\kappa'}^{n+1} - e_\kappa^n + e_{\kappa'}^n)^2 \right]$ et de l'inégalité de Young que

$$\begin{aligned} 2\Delta t \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} |\kappa| \left(\frac{e_\kappa^{n+1} - e_\kappa^n}{\Delta t} \right)^2 &+ \sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}} T_{\kappa\kappa'} (e_\kappa^{n+1} - e_{\kappa'}^{n+1} - e_\kappa^n + e_{\kappa'}^n)^2 \\ + \sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}} T_{\kappa\kappa'} (e_\kappa^{n+1} - e_{\kappa'}^{n+1})^2 &\le \sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}} T_{\kappa\kappa'} (e_\kappa^n - e_{\kappa'}^n)^2 \\ &+ \Delta t \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} |\kappa|\, (P_\kappa^n)^2 + \Delta t \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} |\kappa| \left(\frac{e_\kappa^{n+1} - e_\kappa^n}{\Delta t} \right)^2 \\ + \sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}} d(\kappa,\kappa')\, |\sigma|\, (R_\sigma^n)^2 &+ \sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{int}\\ \sigma=\kappa|\kappa'}} T_{\kappa\kappa'} (e_\kappa^{n+1} - e_{\kappa'}^{n+1} - e_\kappa^n + e_{\kappa'}^n)^2. \end{aligned} \tag{VI.30}$$

En sommant l'équation (VI.30) pour tout $n \in \{0, \dots, N_{\Delta t}\}$ et en utilisant (VI.24), (VI.25), (VI.10) et la propriété $e_\kappa^0 = 0$ pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, on obtient finalement

$$\sum_{n=0}^{N_{\Delta t}} \Delta t \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} |\kappa| \left(\frac{e_\kappa^{n+1} - e_\kappa^n}{\Delta t} \right)^2 \le C_6\, (\delta\mathcal{K})^2 + C_7 \frac{(\Delta t + \delta\mathcal{K})^2}{\Delta t}$$

avec C_6 et $C_7 > 0$ ne dépendant que de $\|\nabla \partial_t h\|_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$, $\|h\|_{L^\infty(0,2T;W^{2,\infty}(\Omega))}$, Ω et T, et on en déduit (VI.20). □

Remarque VI-3.1. D'après l'équation (VI.20) donnée dans la Proposition VI-3.1, la dérivée en temps discrète de l'erreur tend vers zero avec la taille du maillage et le pas de temps sous une condition CFL inverse. Cette condition est due au fait que le schéma Volume Fini est implicite en temps et que peu d'hypothèses ont été faites sur la régularité de h. Toutefois, il est possible de s'affranchir de cette condition CFL inverse en supposant h beaucoup plus régulière. Un tel résultat se trouve dans [51].

Corollaire VI-3.1. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée. Soit h la solution du problème (VI.5), $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1, $T > 0$, $\Delta t \in (0,T)$, et soit $\beta > 0$ tel que $\delta\mathcal{K} \le \beta\sqrt{\Delta t}$. Pour tout $n \in \{0, \dots, N_{\Delta t}+1\}$, soit $(h_\kappa^n)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ la solution de (VI.17), et $h_{\mathcal{K}}^n \in X(\mathcal{K})$ (resp.*

$\delta_t h^n_{\mathcal{K}} \in X(\mathcal{K})$) définie par $h^n_{\mathcal{K}}(x) = h^n_\kappa$ (resp. $\delta_t h^n_{\mathcal{K}}(x) = \frac{h^{n+1}_\kappa - h^n_\kappa}{\Delta t}$) pour $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$. Alors, il existe $D_5 > 0$ ne dépendant que de $\|h\|_{L^\infty(0,2T;W^{2,\infty}(\Omega))}$, $\|\nabla\partial_t h\|_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$, Ω et T, et D_6, D_6', $D_6'' > 0$ dépendant de $\|\partial_t h\|_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$, $\|h\|_{L^\infty(0,2T;W^{2,\infty}(\Omega))}$, $\|\nabla\partial_t h\|_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$, Ω, T, avec D_6 dépendant également de β, tels que

$$\sum_{n=0}^{N_{\Delta t}} \Delta t\, |h^{n+1}_{\mathcal{K}}|^2_{1,\mathcal{K}} \leq D_5 \tag{VI.31}$$

$$\text{et } \sum_{n=0}^{N_{\Delta t}} \Delta t\, \|\delta_t h^n_{\mathcal{K}}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq D_6' + D_6'' \frac{(\delta\mathcal{K} + \Delta t)^2}{\Delta t} \leq D_6. \tag{VI.32}$$

Preuve. La démonstration est immédiate en utilisant les estimations d'erreur (VI.19), (VI.20), la régularité de h et l'inégalité (VI.10). □

Pour tout maillage admissible $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ de Ω au sens de la Définition VI-2.1 et pour tout pas de temps $\Delta t > 0$, soit $(h^n_\kappa)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ la solution de (VI.17) pour tout $n \geq 0$ et $\delta_t h_{\mathcal{K},\Delta t}$ la fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^*_+$ par

$$\delta_t h_{\mathcal{K},\Delta t}(x,t) = \frac{h^{n+1}_\kappa - h^n_\kappa}{\Delta t} \tag{VI.33}$$

pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$ et $t \in (t^n, t^{n+1}]$, $n \geq 0$.

Proposition VI-3.2. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 satisfaite et soit h la solution du problème (VI.5). Considérons une famille de discrétisations admissibles $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P}, \Delta t)$ de $\Omega \times \mathbb{R}^*_+$, avec $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1 et $\Delta t > 0$ un pas de temps. Pour une discrétisation donnée $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P}, \Delta t)$ de cette famille, soit $h_{\mathcal{K},\Delta t}$ (resp. $\delta_t h_{\mathcal{K},\Delta t}$) la fonction définie par (VI.16) (resp. par (VI.33)) à partir de la solution de (VI.17). Alors, pour tout $T > 0$, $h_{\mathcal{K},\Delta t}$ converge vers h dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ quand Δt et $\delta\mathcal{K}$ tendent vers 0, et $\delta_t h_{\mathcal{K},\Delta t}$ converge vers $\partial_t h$ dans $L^2(\Omega\times(0,T))$ quand Δt, $\delta\mathcal{K}$ et $\dfrac{\delta\mathcal{K}}{\sqrt{\Delta t}}$ tendent vers 0.*

Preuve. Soit $T > 0$ et $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P}, \Delta t)$ une discrétisation admissible de $\Omega \times \mathbb{R}^*_+$ avec $\Delta t < T$. Pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$ et $t \in (t^n, t^{n+1}]$, $n \in \{0, \ldots, N_{\Delta t}\}$, on a

$$\begin{aligned} h(x,t) - h_{\mathcal{K},\Delta t}(x,t) &= \big(h(x,t) - h(x_\kappa, t^{n+1})\big) + \big(h(x_\kappa, t^{n+1}) - h^{n+1}_\kappa\big) \\ &= \big(h(x,t) - h(x_\kappa, t^{n+1})\big) + e^{n+1}_\kappa. \end{aligned}$$

Par suite, pour tout $t \in (t^n, t^{n+1}]$, $n \in \{0, \ldots, N_{\Delta t}\}$,

$$\int_\Omega |h(x,t) - h_{\mathcal{K},\Delta t}(x,t)|^2 dx \leq 2 \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} \Big[\int_\kappa |h(x,t) - h(x_\kappa, t^{n+1})|^2 dx + |\kappa| (e^{n+1}_\kappa)^2 \Big]. \tag{VI.34}$$

D'après la Proposition VI-3.1, il existe $C_1 > 0$ ne dépendant que de $\|\nabla\partial_t h\|_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$, $\|h\|_{L^\infty(0,2T;W^{2,\infty}(\Omega))}$ et Ω tel que

$$\sum_{\kappa\in\mathcal{K}} |\kappa| (e^{n+1}_\kappa)^2 \leq C_1 \big(\Delta t + \delta\mathcal{K}\big)^2 \text{ pour tout } n \in \{0, \ldots, N_{\Delta t}\}. \tag{VI.35}$$

De plus, grâce à la régularité de h, il existe $C_2 > 0$ ne dépendant que de $||\partial_t h||_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$ et $||\nabla h||_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$ tel que, pour tout $x \in \kappa$ et $t \in (t^n, t^{n+1}]$:

$$|h(x,t) - h(x_\kappa, t^{n+1})| \leq C_2(\delta\mathcal{K} + \Delta t). \tag{VI.36}$$

Ainsi, en utilisant (VI.35) et (VI.36) dans l'équation (VI.34), on obtient pour tout $t \in (0,T)$:

$$||h(.,t) - h_{\mathcal{K},\Delta t}(.,t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C_3(\delta\mathcal{K} + \Delta t)^2,$$

et par suite

$$||h - h_{\mathcal{K},\Delta t}||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_3'(\delta\mathcal{K} + \Delta t) \tag{VI.37}$$

avec C_3, C_3' ne dépendant que de $||\nabla\partial_t h||_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$, $||\partial_t h||_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$, $||h||_{L^\infty(0,2T;W^{2,\infty}(\Omega))}$ et Ω, ce qui donne la convergence de $h_{\mathcal{K},\Delta t}$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$ et $t \in (t^n, t^{n+1}]$, $n \in \{0, \dots, N_{\Delta t}\}$, on a

$$\partial_t h(x,t) - \delta_t h_{\mathcal{K},\Delta t}(x,t) = \left(\partial_t h(x,t) - \frac{h(x_\kappa, t^{n+1}) - h(x_\kappa, t^n)}{\Delta t}\right) + \frac{e_\kappa^{n+1} - e_\kappa^n}{\Delta t}.$$

Grâce à la régularité de h, il existe $C_4 > 0$ ne dépendant que de $||\partial_t^2 h||_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$ et $||\nabla\partial_t h||_{L^\infty(\Omega\times(0,2T))}$ tel que

$$\left|\frac{h(x_\kappa, t^{n+1}) - h(x_\kappa, t^n)}{\Delta t} - \partial_t h(x,t)\right| \leq C_4(\delta\mathcal{K} + \Delta t).$$

Cette inégalité combinée à (VI.20) donne

$$||\partial_t h - \delta_t h_{\mathcal{K},\Delta t}||^2_{L^2(\Omega\times(0,T))} \leq C_5(\delta\mathcal{K} + \Delta t)^2 + C_6\frac{(\delta\mathcal{K} + \Delta t)^2}{\Delta t},$$

avec C_5 et C_6 ne dépendant que de Ω, T et $||h||_{W^{2,\infty}(\Omega\times(0,2T))}$. Ainsi, on a montré la convergence de $\delta_t h_{\mathcal{K},\Delta t}$ vers $\partial_t h$ dans $L^2(\Omega \times (0,T))$ quand Δt, $\delta\mathcal{K}$ et $\frac{\delta\mathcal{K}}{\sqrt{\Delta t}} \to 0$. □

VI-3.2 Convergence de suites de concentrations approchées vers une solution faible

Nous allons d'abord montrer l'existence d'une solution pour les concentrations satisfaisant des estimations de stabilité, et nous en déduirons la convergence faible-$\star$ à une sous-suite près de ces concentrations dans L^∞.

Existence, stabilité et convergence faible-$\star$

Lemme VI-3.1. *Soit $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1, $\Delta t > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(h_\kappa^n)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ la solution de (VI.17). Pour $i \in \{1, \dots, L\}$ et $n \in \mathbb{N}$, le système d'équations (VI.11)-(VI.14) admet une unique solution $(c_{i,\kappa}^n)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ et au moins une solution $(c_{i,\kappa}^{s,n+1})_{\kappa\in\mathcal{K}}$ telle que*

$$c_{i,\kappa}^{s,n+1} \in [0,1] \textit{ pour tout } \kappa \in \mathcal{K} \textit{ et } n \in \mathbb{N}. \tag{VI.38}$$

De plus, on a

$$c_{i,\kappa}^n(z) \in [0,1] \textit{ pour tout } \kappa \in \mathcal{K},\ z < h_\kappa^n \textit{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Preuve. La démonstration est la même que celle de la Proposition III-1.7. Grâce au décentrage amont de la concentration de surface dans les flux, $c_{i,\kappa}^{s,n+1}$ peut être calculé explicitement dans toute cellule non dégénérée. Sinon $c_{i,\kappa}^{s,n+1}$ est choisie arbitrairement telle que $\sum_{i=1}^{L} c_{i,\kappa}^{s,n+1} = 1$. De plus, on a dans ce cas $h_\kappa^{n+1} = h_\kappa^n$ et il n'existe donc qu'une seule solution $c_{i,\kappa}^{n+1}$ au système (VI.13)-(VI.14) pour chaque lithologie. □

Pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $n \in I\!N$ et tout $t \in (t^n, t^{n+1}]$, on définit l'interpolation suivante de l'épaisseur de sédiments discrète :

$$h_\kappa(t) = h_\kappa^n + (t - t^n)\,\frac{h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n}{\Delta t}, \tag{VI.39}$$

et on étend, pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, les solutions discrètes $(c_{i,\kappa}^n)_{n\in I\!N}$, $(u_{i,\kappa}^n)_{n\in I\!N}$ et $(c_{i,\kappa}^{s,n+1})_{n\in I\!N}$ données par le Lemme VI-3.1 à des fonctions de $t \in I\!R_+$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} c_{i,\kappa}(z,t) = \left\{\begin{array}{ll} c_{i,\kappa}^n(z)\,\chi_{(-\infty,h_\kappa^n]} + c_{i,\kappa}^{s,n+1}\,\chi_{(h_\kappa^n,h_\kappa(t))} & \text{si } h_\kappa^{n+1} \geq h_\kappa^n, \\ c_{i,\kappa}^n(z)\,\chi_{(-\infty,h_\kappa(t))} & \text{sinon,} \end{array}\right. \\ \qquad\qquad \text{pour tout } t \in (t^n, t^{n+1}] \text{ et } z < h_\kappa(t), \\ c_{i,\kappa}(z,0) = c_{i,\kappa}^0(z) \text{ pour tout } z < h_\kappa^0, \end{array}\right. \tag{VI.40}$$

$$u_{i,\kappa}(\xi,t) = c_{i,\kappa}(h_\kappa(t) - \xi, t) \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ et } \xi \in I\!R_+^*, \tag{VI.41}$$

$$c_{i,\kappa}^s(t) = c_{i,\kappa}^{s,n+1} \text{ pour tout } t \in (t^n, t^{n+1}]. \tag{VI.42}$$

Pour tout maillage admissible $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ de Ω au sens de la Définition VI-2.1 et pour tout pas de temps $\Delta t > 0$, soit $\bar{u}_{i,\mathcal{K},\Delta t}$ la fonction définie sur $\Omega \times I\!R_+^* \times I\!R_+$ et $c_{i,\mathcal{K},\Delta t}$ la fonction définie sur $\{(z,t)\,|\,t \geq 0,\ z < h_\kappa(t)\}$ par

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{u}_{i,\mathcal{K},\Delta t}(x,\xi,t) = u_{i,\kappa}(\xi,t), \\ c_{i,\mathcal{K},\Delta t}(x,z,t) = c_{i,\kappa}(z,t), \end{array}\right. \tag{VI.43}$$

pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$, $t \geq 0$, $\xi \in I\!R_+^*$ et $z < h_\kappa(t)$.

D'après le Lemme VI-3.1, les fonctions $c_{i,\mathcal{K},\Delta t}$, $\bar{u}_{i,\mathcal{K},\Delta t}$, $u_{i,\mathcal{K},\Delta t}$ définies de façon unique par (VI.43), (VI.16), et toute fonction $c_{i,\mathcal{K},\Delta t}^s$ définie par (VI.16) à partir d'une solution de (VI.11)-(VI.15) choisie selon le Lemme VI-3.1 prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. On en déduit le résultat suivant :

Proposition VI-3.3. *Pour tout $m \in I\!N$, soit $(\mathcal{K}_m, \Sigma_{int}^m, \mathcal{P}_m)$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1 et $\Delta t_m > 0$. Supposons que $\Delta t_m \to 0$ et $\delta\mathcal{K}_m \to 0$ quand $m \to \infty$.*

Pour tout $m \in I\!N$ et $i = 1, \ldots, L$, soit $u_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$ (resp. $\bar{u}_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$) l'unique fonction définie par (VI.16) (resp. par (VI.43)) et $c_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}^s$ la fonction définie par (VI.16) à partir d'une solution de (VI.11)-(VI.15) choisie selon le Lemme VI-3.1 avec $\mathcal{K} = \mathcal{K}_m$, $\Delta t = \Delta t_m$.

Alors, sous l'Hypothèse VI-1.1, il existe une sous-suite de $(\mathcal{K}_m, \Delta t_m)_{m\in I\!N}$, toujours notée $(\mathcal{K}_m, \Delta t_m)_{m\in I\!N}$, telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, L\}$,
(i) la sous-suite $(c_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}^s)_{m\in I\!N}$ converge vers une fonction c_i^s dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+^*)$ pour la topologie faible-$\star$,
(ii) les sous-suites $(u_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in I\!N}$ et $(\bar{u}_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in I\!N}$ convergent vers une fonction u_i dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+^* \times I\!R_+^*)$ pour la topologie faible-$\star$.

Preuve. Par souci de lisibilité, nous n'écrirons pas l'indice i dans cette démonstration. Grâce au Lemme VI-3.1, la suite $(c^s_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ (resp. $(u_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$, et $(\bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$) est bornée dans $L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*)$ (resp. dans $L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)$). Par suite, il existe une sous-suite de $(\mathcal{K}_m,\Delta t_m)_{m\in\mathbb{N}}$, toujours notée $(\mathcal{K}_m,\Delta t_m)_{m\in\mathbb{N}}$, telle que $(c^s_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ (resp. $(u_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$, et $(\bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$), converge vers c^s (resp. u, et u') dans $L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*)$ (resp. dans $L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)$) pour la topologie faible-$\star$. Il nous reste donc à montrer que $u=u'$ dans $L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)$.

En utilisant les définitions (VI.15) et (VI.41), les fonctions $\bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$ et $u_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$ sont liées de la façon suivante pour $\kappa\in\mathcal{K}_m$ et $t\in(t^n,t^{n+1}]$:

$$u_\kappa^{n+1}(\xi)=\begin{cases} u_\kappa(\xi-(h_\kappa(t)-h_\kappa^n),t) & \text{pour tout } \xi\geq h_\kappa(t)-h_\kappa^n \quad \text{si } h_\kappa^{n+1}\geq h_\kappa^n,\\ u_\kappa(\xi+(h_\kappa(t)-h_\kappa^{n+1}),t) & \text{pour tout } \xi\geq 0 \quad \text{si } h_\kappa^{n+1}<h_\kappa^n.\end{cases}$$

Soit $\varphi\in C_c^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)$ et $T>0$ tels que $\varphi(.,.,t)=0$ pour tout $t\geq T$. Comme les concentrations sont bornées dans $[0,1]$, on peut montrer que

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega\int_{\mathbb{R}_+^*}\int_{\mathbb{R}_+^*}(\bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}-u_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})\,\varphi(x,\xi,t)\,dx\,d\xi\,dt\Big|\\ \leq C_1\sum_{n=0}^{N_{\Delta t_m}}\Delta t_m\sum_{\kappa\in\mathcal{K}_m}|\kappa||h_\kappa^{n+1}-h_\kappa^n|\end{aligned}$$

avec C_1 ne dépendant que de φ, Ω et T. Il résulte de l'estimation (VI.32) que

$$\Big|\int_\Omega\int_{\mathbb{R}_+^*}\int_{\mathbb{R}_+^*}(\bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}-u_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})\,\varphi(x,\xi,t)\,dx\,d\xi\,dt\Big|\to 0 \text{ quand } m\to\infty.$$

Ainsi, $u=u'$ dans l'espace des distributions sur $\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ et donc dans $L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)$. □

Terme de flux

La proposition suivante énonce un résultat de convergence pour le terme de flux qui apparaît dans la discrétisation de l'équation de conservation en surface. Il sera utilisé pour montrer que (u_i,c_i^s) satisfait la seconde équation (VI.8) de la formulation faible.

Proposition VI-3.4. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée et soit h la solution du problème (VI.5). Considérons une famille de discrétisations admissibles $(\mathcal{K},\Sigma_{int},\mathcal{P},\Delta t)$ de $\Omega\times\mathbb{R}_+^*$, avec $(\mathcal{K},\Sigma_{int},\mathcal{P})$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1 et $\Delta t>0$ un pas de temps. On suppose de plus qu'il existe α et $\beta>0$ tels que, pour toute discrétisation $(\mathcal{K},\Sigma_{int},\mathcal{P},\Delta t)$ de cette famille, $\delta\mathcal{K}\leq\beta\sqrt{\Delta t}$ et $reg(\mathcal{K})\leq\alpha$. Pour toute discrétisation admissible $(\mathcal{K},\Sigma_{int},\mathcal{P},\Delta t)$, soit $h_{\mathcal{K},\Delta t}$ la fonction définie par (VI.16) à partir de la solution de (VI.17), et soit $(c_{i,\kappa}^{s,n+1})_{\kappa\in\mathcal{K}_m,n\geq 0}$ une solution de (VI.11)-(VI.14) choisie selon le Lemme VI-3.1. Soit $T>0$. Alors, pour tout $\varphi\in\mathcal{A}_0^s=\{v\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1})\,|\,v(x,t)=0 \text{ sur } \partial\Omega\times\mathbb{R}_+^*\setminus\Sigma^+\}$ et pour tout $i=1,\ldots,L$,*

$$T_{i,\mathcal{K},\Delta t}\to\int_0^T\Big(\int_\Omega c_i^s(x,t)\,\nabla h(x,t)\cdot\nabla\varphi(x,t)\,dx-\int_{\partial\Omega}\tilde{c}_i(x,t)\,g(x,t)\,\varphi(x,t)\,d\gamma(x)\Big)\,dt$$

quand $\Delta t \to 0$, *avec*

$$T_{i,\mathcal{K},\Delta t} = \sum_{n=0}^{N_{\Delta t}} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathcal{K}} \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} T_{\kappa\kappa'} c_{i,\kappa\kappa'}^{s,n+1} (h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) \varphi(x_\kappa, t^{n+1})$$
$$- \sum_{n=0}^{N_{\Delta t}} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathcal{K}} |\partial\kappa \cap \partial\Omega| \left(g_\kappa^{(+),n+1} \bar{c}_{i,\kappa}^{n+1} - g_\kappa^{(-),n+1} c_{i,\kappa}^{s,n+1} \right) \varphi(x_\kappa, t^{n+1}).$$

Preuve. La preuve de cette proposition est une adaptation au couplage entre une équation parabolique et une équation hyperbolique du résultat montré dans [19] pour le couplage entre une équation elliptique et une équation hyperbolique dans le cas d'un flux de Darcy diphasique. Elle est reportée dans l'annexe A. □

Propriété des colonnes

La proposition suivante établit que les concentrations de colonne interpolées en temps $\bar{u}_{i,\mathcal{K},\Delta t}$, $i = 1, \dots, L$, satisfont au sens faible une équation d'advection linéaire. Cette propriété sera utilisée dans la preuve du Théorème VI-2.1 pour montrer la convergence, à une sous-suite près, des solutions approchées vers une solution de la formulation faible de (VI.6).

Proposition VI-3.5. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée, et soit h la solution du problème (VI.5). Soit $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1, $T > 0$ et $\Delta t \in (0, T)$.*

Soit $h_{\mathcal{K},\Delta t}$, $u_{i,\mathcal{K},\Delta t}$, $i = 1, \dots, L$, (resp. $\delta_t h_{\mathcal{K},\Delta t}$, et $\bar{u}_{i,\mathcal{K},\Delta t}$, $i = 1, \dots, L$) les fonctions définies de manière unique par (VI.16) (resp. par (VI.33), et (VI.43)) et $c_{i,\mathcal{K},\Delta t}^s$, $i = 1, \dots, L$, une fonction définie par (VI.16) à partir d'une solution de (VI.11)-(VI.15) choisie selon le Lemme VI-3.1.

Alors, pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$ et $i \in \{1, \dots, L\}$:

(i) pour tout $\varphi \in W_T = \{v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \,|\, v(.,T) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\}$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} [\partial_t \varphi(\xi, t) + \partial_t h_\kappa(t)\, \partial_\xi \varphi(\xi, t)]\, u_{i,\kappa}(\xi, t)\, d\xi\, dt + \int_{\mathbb{R}_+} u_{i,\kappa}^0(\xi) \varphi(\xi, 0)\, d\xi + \int_0^T \partial_t h_\kappa(t) u_{i,\kappa}(0, t) \varphi(0, t)\, dt = 0, \tag{VI.44}$$

(ii) pour tout $\varphi \in \mathcal{A}_{T,\kappa}^s = \{v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \,|\, v(.,T) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } v(0,t) = 0 \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ tel que } \partial_t h_\kappa(t) \leq 0\}$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} [\partial_t \varphi(\xi, t) + \partial_t h_\kappa(t)\, \partial_\xi \varphi(\xi, t)]\, u_{i,\kappa}(\xi, t)\, d\xi\, dt + \int_{\mathbb{R}_+} u_{i,\kappa}^0(\xi) \varphi(\xi, 0)\, d\xi + \int_0^T \partial_t h_\kappa(t) c_{i,\kappa}^s(t) \varphi(0, t)\, dt = 0. \tag{VI.45}$$

Preuve. D'après la définition (VI.40), $\partial_t c_{i,\kappa}(z,t) = 0$ pour tout $z \in (-\infty, h_\kappa(t))$ et $t \in (0,T)$. Il en résulte que pour tout $\psi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ à support compact, on a

$$0 = \int_0^T \int_{-\infty}^{h_\kappa(t)} \partial_t c_{i,\kappa}(z,t)\psi(z,t)dz\,dt = \int_0^T \partial_t\left(\int_{-\infty}^{h_\kappa(t)} c_{i,\kappa}(z,t)\psi(z,t)dz\right)dt$$
$$- \int_0^T \int_{-\infty}^{h_\kappa(t)} c_{i,\kappa}(z,t)\partial_t\psi(z,t)dz\,dt - \int_0^T \partial_t h_\kappa(t) c_{i,\kappa}(h_\kappa(t),t)\psi(h_\kappa(t),t)\,dt,$$

et par suite

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{-\infty}^{h_\kappa(t)} c_{i,\kappa}(z,t)\partial_t\psi(z,t)dz\,dt + \int_0^T \partial_t h_\kappa(t) c_{i,\kappa}(h_\kappa(t),t)\psi(h_\kappa(t),t)\,dt \\ - \int_{-\infty}^{h_\kappa(T)} c_{i,\kappa}(z,T)\psi(z,T)\,dz + \int_{-\infty}^{h_\kappa(0)} c^0_{i,\kappa}(z)\psi(z,0)\,dz = 0.\end{aligned} \tag{VI.46}$$

Soit φ dans W_T, et $\psi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\psi(z,t) = \varphi(h_\kappa(t) - z, t) \quad \forall\,(z,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

En considérant l'équation (VI.46) dans le nouveau système de coordonnées $\xi = h_\kappa(t) - z$ et en utilisant la propriété $\varphi(.,T) = 0$, on obtient l'équation (VI.44). Enfin, en utilisant la définition de $\mathcal{A}^s_{T,\kappa}$ et le fait que $u_{i,\kappa}(0,t) = c^s_{i,\kappa}(t)$ si $\partial_t h_\kappa(t) > 0$, on obtient l'équation (VI.45). □

Convergence

Nous allons maintenant montrer que les limites $(u_i, c^s_i)_{i=1,\dots,L}$ sont des solutions de la formulation faible donnée dans la Définition VI-1.1.

Lemme VI-3.2. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^1(\mathcal{O})$ qui converge vers f dans $L^1(\mathcal{O})$. On définit, pour tout $g \in L^1(\mathcal{O})$, $S^+_g = \{x \in \mathcal{O}\,|\,g(x) > 0\}$ et $S^-_g = \{x \in \mathcal{O}\,|\,g(x) \le 0\}$. Alors*

$$I_n = \int_{\mathcal{O}} f_n \chi_{S^+_{f_n} \cap S^-_f} \to 0 \text{ quand } n \to \infty, \text{ et } J_n = \int_{\mathcal{O}} f_n \chi_{S^-_{f_n} \cap S^+_f} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Preuve. Notons que si $f \in L^1(\mathcal{O})$, alors f^+ et f^- sont également dans $L^1(\mathcal{O})$, et par suite

$$I_n = \int_{\mathcal{O}} f_n \chi_{S^+_{f_n}} \chi_{S^-_f} = \int_{\mathcal{O}} f^+_n \chi_{S^-_f} = \int_{\mathcal{O}} (f^+_n - f^+)\chi_{S^-_f} + \int_{\mathcal{O}} f^+ \chi_{S^-_f}.$$

Comme $\int_{\mathcal{O}} f^+ \chi_{S^-_f} = 0$ et $|f^+_n - f^+| \le |f_n - f|$ sur $\mathcal{O}$, on en déduit que $I_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Le raisonnement est le même pour J_n. □

Montrons maintenant le résultat de convergence énoncé dans le Théorème VI-2.1.

Preuve. Preuve du Théorème VI-2.1
La convergence des solutions approchées pour l'épaisseur de sédiments vers la solution du problème (VI.5)

a déjà été prouvée dans la Proposition VI-3.2. Montrons maintenant que les limites $(u_i, c_i^s)_{i=1,\dots,L}$ données par la Proposition VI-3.3 satisfont la formulation faible du problème (VI.6) au sens de la Définition VI-1.1.

Soit $i \in \{1,\dots,L\}$ et $\varphi \in \mathcal{A}$. Comme $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+2})$, il existe $T > 0$ tel que, pour tout $t \geq T$, $\varphi(.,.,t) = 0$. Soit $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta t_{m_0} < T$. Par souci de lisibilité, nous n'écrirons pas l'indice i dans cette démonstration.

Pour tout $\kappa \in \mathcal{K}_m$, $m \in \mathbb{N}$, on voit que $\varphi(x_\kappa,.,.) \in W_T$. En appliquant l'équation (VI.44) à la fonction test $\varphi(x_\kappa,.,.)$ et en sommant l'équation obtenue sur $\kappa \in \mathcal{K}_m$, on obtient, pour tout $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned}\underbrace{\sum_{\kappa\in\mathcal{K}_m} |\kappa| \int_{\mathbb{R}_+}\int_0^T \left[\partial_t\varphi(x_\kappa,\xi,t) + \partial_t h_\kappa(t)\,\partial_\xi\varphi(x_\kappa,\xi,t)\right] u_\kappa(\xi,t)\,dt\,d\xi}_{(A_m)} \\ + \underbrace{\sum_{\kappa\in\mathcal{K}_m} |\kappa| \int_{\mathbb{R}_+} u_\kappa^0(\xi)\varphi(x_\kappa,\xi,0)\,d\xi}_{(B_m)} \\ + \underbrace{\sum_{\kappa\in\mathcal{K}_m} |\kappa| \int_0^T \partial_t h_\kappa(t) u_\kappa(0,t)\varphi(x_\kappa,0,t)\,dt}_{(C_m)} = 0.\end{aligned} \tag{VI.47}$$

Dans cette équation, (A_m) est égal à

$$\int_\Omega\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^T \left[\partial_t\varphi_{\mathcal{K}_m}(x,\xi,t) + \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)\,\partial_\xi\varphi_{\mathcal{K}_m}(x,\xi,t)\right] \bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,\xi,t)\,dt\,d\xi\,dx,$$

avec $\varphi_{\mathcal{K}_m}(x,\xi,t) = \varphi(x_\kappa,\xi,t)$ pour tout $x \in \kappa$. D'après la Proposition VI-3.2, la suite de fonctions $(\delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $\partial_t h$ dans $L^2(\Omega\times(0,T))$ quand $m \to \infty$. Comme $\varphi \in \mathcal{A}$, on en déduit que la suite $(\partial_\xi\varphi_{\mathcal{K}_m}\cdot\delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $\partial_\xi\varphi\cdot\partial_t h$ dans $L^1(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)$. Enfin, comme la suite $(\bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)$ pour la topologie faible-$\star$, on en conclut que

$$(A_m) \to \int_\Omega\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \left[\partial_t\varphi(x,\xi,t) + \partial_t h(x,t)\,\partial_\xi\varphi(x,\xi,t)\right] u(x,\xi,t)\,dt\,d\xi\,dx \text{ quand } m\to\infty. \tag{VI.48}$$

On définit $u_{\mathcal{K}_m}^0$ par $u_{\mathcal{K}_m}^0(x,\xi) = u_\kappa^0(\xi)$ pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}_m$ et $\xi \in \mathbb{R}_+^*$. D'après l'Hypothèse VI-1.1 sur u^0, $u_{\mathcal{K}_m}^0$ converge vers u^0 dans $L^1(\Omega\times(0,T))$ pour tout $T > 0$, et par suite

$$(B_m) \to \int_\Omega\int_{\mathbb{R}_+} u^0(x,\xi)\varphi(x,\xi,0)\,d\xi\,dx \text{ quand } m\to\infty. \tag{VI.49}$$

Dans l'équation (VI.47), (C_m) est égal à

$$(C_m) = \int_\Omega\int_0^T \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)\bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,0,t)\varphi_{\mathcal{K}_m}(x,0,t)\,dt\,dx.$$

Par la suite, nous allons utiliser les notations suivantes

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^+_{\mathcal{K}_m} &= \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t) > 0\},\\
\mathcal{P}^-_{\mathcal{K}_m} &= \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t) \le 0\},\\
\mathcal{P}^+ &= \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) > 0\},\\
\mathcal{P}^- &= \{(x,t) \in \Omega \times (0,T) \,|\, \partial_t h(x,t) \le 0\}.
\end{aligned}$$

En remarquant que $\mathcal{P}^+_{\mathcal{K}_m} = (\mathcal{P}^+ \backslash (\mathcal{P}^+ \cap \mathcal{P}^-_{\mathcal{K}_m})) \cup (\mathcal{P}^+_{\mathcal{K}_m} \cap \mathcal{P}^-)$ et $\mathcal{P}^-_{\mathcal{K}_m} = (\mathcal{P}^- \backslash (\mathcal{P}^- \cap \mathcal{P}^+_{\mathcal{K}_m})) \cup (\mathcal{P}^-_{\mathcal{K}_m} \cap \mathcal{P}^+)$, on obtient

$$\begin{aligned}
(C_m) = &\int_\Omega \int_0^T \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)\, c^s_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)\, \varphi_{\mathcal{K}_m}(x,0,t)\\
&\qquad [\chi_{\mathcal{P}^+} - \chi_{\mathcal{P}^+ \cap \mathcal{P}^-_{\mathcal{K}_m}} + \chi_{\mathcal{P}^+_{\mathcal{K}_m} \cap \mathcal{P}^-}]\, dt\, dx\\
&+ \int_\Omega \int_0^T \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)\, \bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,0,t)\, \varphi_{\mathcal{K}_m}(x,0,t)\\
&\qquad [\chi_{\mathcal{P}^-} - \chi_{\mathcal{P}^- \cap \mathcal{P}^+_{\mathcal{K}_m}} + \chi_{\mathcal{P}^-_{\mathcal{K}_m} \cap \mathcal{P}^+}]\, dt\, dx.
\end{aligned}$$

Comme les fonctions $c^s_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)$, $\bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,0,t)$ et $\varphi_{\mathcal{K}_m}(x,0,t)$ sont bornées sur $\Omega \times (0,T)$ et comme $(\delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $\partial_t h$ dans $L^2(\Omega \times (0,T))$, le Lemme VI-3.2 appliqué à la suite $(\delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ donne :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^T \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)\, c^s_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)\, \varphi_{\mathcal{K}_m}(x,0,t)[-\chi_{\mathcal{P}^+ \cap \mathcal{P}^-_{\mathcal{K}_m}} + \chi_{\mathcal{P}^+_{\mathcal{K}_m} \cap \mathcal{P}^-}]\, dt\, dx \to 0,\\
&\int_\Omega \int_0^T \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)\, \bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,0,t) \varphi_{\mathcal{K}_m}(x,0,t)[-\chi_{\mathcal{P}^- \cap \mathcal{P}^+_{\mathcal{K}_m}} + \chi_{\mathcal{P}^-_{\mathcal{K}_m} \cap \mathcal{P}^+}]\, dt\, dx \to 0
\end{aligned}$$

quand $m \to \infty$. De plus, $\varphi \in \mathcal{A}$, donc la suite $(\varphi_{\mathcal{K}_m}(.,0,.)\, \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(.,0,.)\, \partial_t h$ dans $L^1(\Omega \times (0,T))$. Comme la suite $(c^s_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers c^s dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^*_+)$ pour la topologie faible-$\star$, on en conclut que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^T \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t) c^s_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t) \varphi_{\mathcal{K}_m}(x,0,t)\, \chi_{\mathcal{P}_+}\, dt\, dx \to\\
&\qquad \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t) c^s(x,t) \varphi(x,0,t)\, \chi_{\mathcal{P}_+}\, dt\, dx \text{ quand } m \to \infty.
\end{aligned}$$

Sur $\chi_{\mathcal{P}_-}$, on a par définition $\varphi(x,0,t) = 0$. Comme $\bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,0,t)$ est bornée et que la suite $(\varphi_{\mathcal{K}_m}(.,0,.)\, \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(.,0,.)\, \partial_t h$ dans $L^1(\Omega \times (0,T))$, on obtient

$$\int_\Omega \int_0^T \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)\, \bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,0,t)\, \varphi_{\mathcal{K}_m}(x,0,t)\, \chi_{\mathcal{P}_-}\, dt\, dx \to 0 \text{ quand } m \to \infty,$$

et finalement

$$(C_m) \to \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t) c^s(x,t) \varphi(x,0,t) dt\, dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t h(x,t) c^s(x,t) \varphi(x,0,t)\, dt\, dx$$

quand $m \to \infty$. Ainsi, (u_i, c^s_i) satisfait la première équation (VI.7) de la formulation faible.

Soit $\varphi \in \mathcal{A}_0$. Comme $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^{d+2})$, il existe $T > 0$ tel que $\varphi(.,.,t) = 0$ pour tout $t \ge T$. Soit $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta t_{m_0} < T$.

En multipliant l'équation (VI.11) par $\varphi(x_\kappa, 0, t^{n+1})$ et en sommant l'équation obtenue sur $\kappa \in \mathcal{K}_m$ et $n \in \{0, \ldots, N_{\Delta t_m}\}$, on obtient, pour tout $m \geq m_0$,

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{N_{\Delta t_m}} \sum_{\kappa \in \mathcal{K}_m} |\kappa| \Delta \mathcal{M}_\kappa^{n+1} \varphi(x_\kappa, 0, t^{n+1})}_{(1_m)}$$
$$+ \underbrace{\sum_{n=0}^{N_{\Delta t_m}} \Delta t_m \sum_{\kappa \in \mathcal{K}_m} \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} c_{\kappa\kappa'}^{s,n+1} T_{\kappa\kappa'} (h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) \varphi(x_\kappa, 0, t^{n+1})}_{(2_m)}$$
$$- \underbrace{\sum_{n=0}^{N_{\Delta t_m}} \Delta t_m \sum_{\kappa \in \mathcal{K}_m} |\partial\kappa \cap \partial\Omega| \left(\tilde{c}_\kappa^{n+1} g_\kappa^{(+),n+1} - c_\kappa^{s,n+1} g_\kappa^{(-),n+1} \right) \varphi(x_\kappa, 0, t^{n+1})}_{(3_m)} = 0.$$

Comme $\varphi(.,0,.) \in \mathcal{A}_0^s$, la Proposition VI-3.4 appliquée avec $\mathcal{K} = \mathcal{K}_m$ et $\Delta t = \Delta t_m$ donne la convergence de (2_m) + (3_m) vers

$$\begin{aligned} A &= \int_0^T \left(\int_\Omega c^s(x,t) \nabla h(x,t) \cdot \nabla \varphi(x,0,t)\, dx - \int_{\partial\Omega} \tilde{c}(x,t) g(x,t) \varphi(x,0,t) d\gamma(x) \right) dt \\ &= \int_{I\!R_+} \left(\int_\Omega c^s(x,t) \nabla h(x,t) \cdot \nabla \varphi(x,0,t)\, dx - \int_{\partial\Omega} \tilde{c}(x,t) g(x,t) \varphi(x,0,t) d\gamma(x) \right) dt \end{aligned}$$

quand $m \to \infty$. Montrons maintenant la convergence de

$$A'_m = -(1_m) = -\sum_{n=0}^{N_{\Delta t_m}} \sum_{\kappa \in \mathcal{K}_m} |\kappa| \Delta \mathcal{M}_\kappa^{n+1} \varphi(x_\kappa, 0, t^{n+1})$$

vers

$$\begin{aligned} B = \int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_{I\!R_+} &\left[\partial_t \varphi(x,\xi,t) + \partial_t h(x,t)\, \partial_\xi \varphi(x,\xi,t) \right] u(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx \\ &+ \int_\Omega \int_{I\!R_+} u^0(x,\xi) \varphi(x,\xi,0)\, d\xi\, dx \end{aligned}$$

quand $m \to \infty$. En utilisant (VI.48) et (VI.49), on a, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I\!R^{d+2}) \supset \mathcal{A}_0$,

$$\begin{aligned} B'_m = &\sum_{\kappa \in \mathcal{K}_m} |\kappa| \int_{I\!R_+} \int_0^T \left[\partial_t \varphi(x_\kappa,\xi,t) + \partial_t h_\kappa(t)\, \partial_\xi \varphi(x_\kappa,\xi,t) \right] u_\kappa(\xi,t)\, dt\, d\xi \\ &+ \sum_{\kappa \in \mathcal{K}_m} |\kappa| \int_{I\!R_+} u_\kappa^0(\xi) \varphi(x_\kappa,\xi,0)\, d\xi \to B \text{ quand } m \to \infty, \end{aligned}$$

et, en utilisant (VI.47), $B'_m = -\sum_{\kappa \in \mathcal{K}_m} |\kappa| \int_0^T \partial_t h_\kappa(t) u_\kappa(0,t) \varphi(x_\kappa,0,t)\, dt$. Ainsi, il nous suffit de montrer que $|A'_m - B'_m| \to 0$ quand $m \to \infty$.

Pour $\kappa \in \mathcal{K}_m$ donné et $n \in \{0, \ldots, N_{\Delta t_m}\}$, on a par définition

$$\Delta \mathcal{M}_\kappa^{n+1} = \begin{cases} \int_{h_\kappa^n}^{h_\kappa^{n+1}} c_\kappa^{n+1}(z) dz & \text{si } h_\kappa^{n+1} \geq h_\kappa^n, \\ \int_{h_\kappa^n}^{h_\kappa^{n+1}} c_\kappa^n(z)\, dz & \text{si } h_\kappa^{n+1} < h_\kappa^n. \end{cases}$$

Si on fait dans ces intégrales le changement de variables $z = h_\kappa(t)$, on peut montrer que, en sédimentation ($h_\kappa^{n+1} \geq h_\kappa^n$) comme en érosion ($h_\kappa^{n+1} < h_\kappa^n$),

$$\Delta\mathcal{M}_\kappa^{n+1} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} c_\kappa(h_\kappa(t), t)\partial_t h_\kappa(t)\, dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} u_\kappa(0, t)\partial_t h_\kappa(t)\, dt.$$

En substituant cette égalité dans la définition de A'_m, on obtient

$$B'_m - A'_m = \sum_{\kappa\in\mathcal{K}_m} |\kappa| \int_T^{t^{N_{\Delta t_m}+1}} \bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x, 0, t)\, \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x, t)\varphi(x_\kappa, 0, t)dt -$$
$$\sum_{\kappa\in\mathcal{K}_m} |\kappa| \sum_{n=0}^{N_{\Delta t_m}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x, 0, t)\delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x, t)[\varphi(x_\kappa, 0, t^{n+1}) - \varphi(x_\kappa, 0, t)]\, dt.$$

Grâce à la régularité de φ, il existe $C_1 > 0$ ne dépendant que de φ tel que $|\varphi(x_\kappa, 0, t^{n+1}) - \varphi(x_\kappa, 0, t)| \leq C_1\, \Delta t_m$ pour tout $t \in [t^n, t^{n+1}]$. Comme la fonction $\delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$ est bornée uniformément dans $L^2(\Omega \times (0, t^{N_{\Delta t_m}+1}))$, comme $\bar{u}_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m} \in [0, 1]$ et $|t^{N_{\Delta t_m}+1} - T| < \Delta t_m$, $|A'_m - B'_m|$ converge bien vers 0 quand $m \to \infty$, ce qui met fin à la démonstration du théorème. $\square$

Ainsi, la convergence du schéma (VI.11)-(VI.15) appliquée à une famille de maillages admissibles $(\mathcal{K}_m, \Sigma^m_{int}, \mathcal{P}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et de pas de temps $\Delta t_m > 0$ satisfaisant les hypothèses du Théorème VI-2.1 donne l'existence d'une solution faible (u_i, c_i^s) au problème (VI.6) au sens de la Définition VI-1.1. Pour construire une telle famille de maillages, on considère par exemple pour tout $m \in \mathbb{N}$ le pas de temps $\Delta t_m = \frac{1}{m+1}$, la famille de points $\mathcal{P}_m = \{\frac{\mathbf{k}}{m+1}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\mathrm{d}}\}$ et la famille $\mathcal{K}_m$ de volumes de contrôle définie par (VI.9). En utilisant la régularité du domaine borné Ω, on peut vérifier que cette famille de maillages satisfait bien les hypothèses du Théorème VI-2.1.

VI-4 Unicité de la solution faible

Nous allons maintenant montrer l'unicité de la solution faible u_i au sens de la Définition VI-1.1 pour tout $i = 1, \ldots, L$.

VI-4.1 Preuve du Theorème VI-1.1

Pour démontrer le Théorème VI-1.1, nous avons besoin d'étudier pour toute concentration de surface $c_i^s \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$ la formulation faible (VI.7) de l'équation d'advection linéaire $\partial_t u_i + \partial_t h\, \partial_\xi u_i = 0$ avec c_i^s comme condition aux limites entrante sur $\mathcal{D}^+$ et u_i^0 comme condition initiale. Il nous faut également prouver une formule d'intégration par parties pour les solutions de cette équation et de son équation adjointe. Ces résultats sont énoncés dans le lemme suivant dont la preuve se trouve dans le paragraphe VI-4.3.

Par la suite, nous noterons $\mathcal{L}$ l'opérateur $\mathcal{L} = \partial_t + \partial_t h\, \partial_\xi$.

Lemme VI-4.1. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée. Alors, pour tout $T > 0$, toute fonction $f \in$*

$L^\infty(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$, $l^s \in L^\infty(\mathcal{D}_T^+)$ et $v^0 \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+^*)$, l'équation

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = f & \text{sur } \Omega \times I\!R_+^* \times (0,T), \\ v|_{\xi=0} = l^s & \text{sur } \mathcal{D}_T^+, \\ v|_{t=0} = v^0 & \text{sur } \Omega \times I\!R_+^*, \end{cases} \tag{VI.50}$$

possède une unique solution faible dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$ dans le sens où, pour tout $\varphi \in \{\phi \in C_c^\infty(I\!R^{d+2}) \mid \phi(.,0,.) = 0$ sur $\Omega \times (0,T) \setminus \mathcal{D}_T^+$ et $\phi(.,.,T) = 0$ sur $\Omega \times I\!R_+^*\}$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \Big((\mathcal{L}\varphi)(x,\xi,t)\, v(x,\xi,t) + f(x,\xi,t)\, \varphi(x,\xi,t) \Big)\, dt\, d\xi\, dx \\ &+ \int_\Omega \int_{I\!R_+} v^0(x,\xi)\, \varphi(x,\xi,0)\, d\xi\, dx + \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\, l^s(x,t)\, \varphi(x,0,t)\, dt\, dx = 0. \end{aligned} \tag{VI.51}$$

La solution faible v de (VI.50) possède une trace en $t = T$ dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+^*)$, et la fonction $v\, \partial_t h$ possède une trace en $\xi = 0$ dans $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ telles que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(I\!R^{d+2})$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \Big((\mathcal{L}\varphi)(x,\xi,t)\, v(x,\xi,t) + f(x,\xi,t)\, \varphi(x,\xi,t) \Big)\, dt\, d\xi\, dx \\ &\quad + \int_\Omega \int_{I\!R_+} \Big(v(x,\xi,0)\, \varphi(x,\xi,0) - v(x,\xi,T)\, \varphi(x,\xi,T) \Big)\, d\xi\, dx \\ &\quad\quad + \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\, v(x,0,t)\, \varphi(x,0,t)\, dt\, dx = 0. \end{aligned} \tag{VI.52}$$

Soit $T > 0$, et w la solution faible dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$ du problème adjoint

$$\begin{cases} -\mathcal{L}w = r & \text{sur } \Omega \times I\!R_+^* \times (0,T), \\ w|_{\xi=0} = q^s & \text{sur } \mathcal{D}_T^-, \\ w|_{t=T} = w^T & \text{sur } \Omega \times I\!R_+^*, \end{cases} \tag{VI.53}$$

définie de la même façon que précédemment, avec $r \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$ une fonction à support compact sur $\bar\Omega \times I\!R_+ \times [0,T]$, $w^T \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+^*)$ une fonction à support compact sur $\bar\Omega \times I\!R_+$, et $q^s \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$. Alors on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \Big(v(x,\xi,t)\, (\mathcal{L}w)(x,\xi,t) + (\mathcal{L}v)(x,\xi,t)\, w(x,\xi,t) \Big)\, dt\, d\xi\, dx \\ &\quad - \int_\Omega \int_{I\!R_+} \Big(v(x,\xi,T)\, w(x,\xi,T) - v(x,\xi,0)\, w(x,\xi,0) \Big)\, d\xi\, dx \\ &\quad\quad + \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\, v(x,0,t)\, w(x,0,t)\, dt\, dx = 0. \end{aligned} \tag{VI.54}$$

Soit (v_i, d_i^s) la différence entre deux solutions faibles de (VI.6). Grâce à la linéarité du système d'équations (VI.6), les fonctions (v_i, d_i^s) vérifient la formulation faible (VI.7)-(VI.8) avec des conditions aux bords et initiales homogènes.

Soit $T > 0$. D'après le Lemme VI-4.1, la fonction $v_i\, \partial_t h$ possède une trace en $\xi = 0$ dans $L^\infty(\Omega \times (0,T))$, notée $v_i|_{\xi=0}\, \partial_t h$. Alors, en utilisant la formule d'intégration par parties (VI.52) du

Lemme VI-4.1 et la formulation faible (VI.8), on obtient, pour tout $\varphi \in \{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1}) \mid \phi(x,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T) \setminus \Sigma_T^+, \text{ et } \phi(x,T) = 0 \text{ sur } \Omega\}$,

$$\int_\Omega \int_0^T v_i(x,0,t)\, \partial_t h(x,t)\, \varphi(x,t)\, dt\, dx + \int_\Omega \int_0^T d_i^s(x,t)\, \nabla h(x,t) \cdot \nabla\varphi(x,t)\, dt\, dx = 0. \tag{VI.55}$$

On en déduit aisément que

$$\operatorname{div}(-d_i^s\, \nabla h) = -v_i|_{\xi=0}\, \partial_t h \in L^\infty(\Omega \times (0,T)). \tag{VI.56}$$

Comme $\partial_t h - \Delta h = 0$, on a également

$$\nabla h \cdot \nabla d_i^s = (v_i|_{\xi=0} - d_i^s)\, \partial_t h \in L^\infty(\Omega \times (0,T)). \tag{VI.57}$$

Considérons maintenant le problème adjoint

$$\left\{\begin{aligned} -w_i|_{\xi=0}\, \partial_t h + \operatorname{div}(q_i^s \nabla h) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0,T), \\ q_i^s|_{\Sigma_T^-} &= 0 && \text{sur } \Sigma_T^-, \\ -\mathcal{L} w_i &= v_i && \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T), \\ w_i|_{\xi=0} &= q_i^s && \text{sur } \mathcal{D}_T^-, \\ w_i|_{t=T} &= v_i|_{t=T} && \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}\right. \tag{VI.58}$$

Le lemme suivant donne l'existence d'au moins une solution faible (w_i, q_i^s) dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T)) \times L^\infty(\Omega \times (0,T))$ pour ce problème adjoint, définie de façon similaire à la Définition VI-1.1 (Définition VI-4.1). La démonstration de ce lemme utilise la convergence du schéma numérique (VI.11)-(VI.14) adaptée au cas d'un second membre non nul v_i dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))$. Elle se trouve dans le paragraphe VI-4.2.

Lemme VI-4.2. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée. Alors le problème (VI.58) possède au moins une solution faible (w_i, q_i^s) au sens de la Définition VI-4.1.*

Si on considère une telle solution faible (w_i, q_i^s), on obtient comme précédemment

$$\operatorname{div}(q_i^s\, \nabla h) = w_i|_{\xi=0}\, \partial_t h \in L^\infty(\Omega \times (0,T)). \tag{VI.59}$$

En utilisant les équations (VI.57) et (VI.59), on voit que la fonction $\operatorname{div}(q_i^s\, d_i^s\, \nabla h)$ est dans $L^\infty(\Omega \times (0,T))$. Il résulte alors du Lemme VI-4.13 démontré dans le paragraphe VI-4.4 que le champ de vecteur $q_i^s d_i^s \nabla h$ possède une trace normale dans $L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$. Comme formellement d_i^s s'annule sur Σ_T^+, q_i^s s'annule sur Σ_T^-, et comme la trace normale g de ∇h s'annule sur $\partial\Omega \times (0,T) \setminus (\Sigma_T^+ \cup \Sigma_T^-)$, la trace normale de $q_i^s d_i^s \nabla h$ s'annule sur la frontière $\partial\Omega \times (0,T)$. Ce résultat est établi par le lemme suivant pour lequel une preuve rigoureuse sera donnée dans le paragraphe VI-4.4.

Lemme VI-4.3. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée. Alors, pour tout $T > 0$, pour toute solution faible (w_i, q_i^s) du problème adjoint (VI.58) et toute solution faible (v_i, d_i^s) du problème (VI.6) avec des conditions aux limites et initiales homogènes, on a*

$$\int_\Omega \int_0^T \operatorname{div}(q_i^s\, d_i^s\, \nabla h)\, dt\, dx = 0. \tag{VI.60}$$

Comme la vitesse $\partial_t h$ est bornée uniformément sur $\bar{\Omega} \times [0,T]$ pour tout temps $T > 0$, la fonction v_i (resp. sa trace $v_i|_{t=T}$) est à support compact dans $\bar{\Omega} \times I\!R_+ \times [0,T]$ (resp. dans $\bar{\Omega} \times I\!R_+$) (voir aussi la définition de la solution caractéristique de (VI.6) dans le paragraphe VI-4.3). En appliquant la formule d'intégration par parties (VI.54) du Lemme VI-4.1 à $v = v_i$ et $w = w_i$, on obtient pour tout $T > 0$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T |v_i|^2(x,\xi,t)\,dt\,d\xi\,dx + \int_\Omega \int_{I\!R_+} |v_i|^2(x,\xi,T)\,d\xi\,dx \\ = \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\,v_i(x,0,t)\,w_i(x,0,t)\,dt\,dx. \end{aligned} \tag{VI.61}$$

En utilisant le Lemme VI-4.3 et l'intégration sur $\Omega \times (0,T)$ de l'équation (VI.59) multipliée par d_i^s, on obtient

$$\int_\Omega \int_0^T d_i^s(x,t)\,w_i(x,0,t)\,\partial_t h(x,t)dt\,dx + \int_\Omega \int_0^T q_i^s(x,t)\,\nabla d_i^s(x,t)\cdot\nabla h(x,t)\,dt\,dx = 0. \tag{VI.62}$$

De la même façon, multiplier l'équation (VI.57) par q_i^s et intégrer le résultat obtenu sur $\Omega \times (0,T)$ donne

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^T \Big(v_i(x,0,t) - d_i^s(x,t)\Big)\,q_i^s(x,t)\,\partial_t h(x,t)dt\,dx \\ - \int_\Omega \int_0^T q_i^s(x,t)\,\nabla d_i^s(x,t)\cdot\nabla h(x,t)\,dt\,dx = 0. \end{aligned} \tag{VI.63}$$

Enfin, en sommant les équations (VI.62) et (VI.63) et en tenant compte des conditions aux limites $w_i|_{\xi=0} = q_i^s$ sur $\mathcal{D}_T^-$, $v_i|_{\xi=0} = d_i^s$ sur $\mathcal{D}_T^+$, et du fait que $\partial_t h = 0$ sur $\Omega \times (0,T) \setminus (\mathcal{D}_T^+ \cup \mathcal{D}_T^-)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^T \Big(w_i(x,0,t)\,d_i^s(x,t) + v_i(x,0,t)\,q_i^s(x,t) - d_i^s(x,t)\,q_i^s(x,t)\Big)\,\partial_t h(x,t)dt\,dx \\ = \int_\Omega \int_0^T v_i(x,0,t)\,w_i(x,0,t)\,\partial_t h(x,t)dt\,dx = 0. \end{aligned} \tag{VI.64}$$

Cette équation combinée à (VI.61) permet de conclure la démonstration du Théorème VI-1.1.

VI-4.2 Existence d'une solution pour le problème adjoint

Le but de ce paragraphe est de prouver le Lemme VI-4.2 donnant l'existence d'une solution faible pour le problème adjoint (VI.58). La démonstration utilise la convergence d'un schéma de discrétisation Volume Fini de façon similaire au paragraphe VI-3. Afin de nous ramener au cas traité dans ce paragraphe, nous allons plutôt considérer ici le problème direct (VI.5)-(VI.6) sur $\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T)$, $T > 0$, mais avec des seconds membres non nuls $f_i \in L^\infty(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$ dans les équations d'advection : en utilisant les mêmes notations que précédemment, nous allons en fait étudier le système

$$\left\{ \begin{aligned} u_i|_{\xi=0}\,\partial_t h + \mathrm{div}(-c_i^s \nabla h) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0,T), \\ c_i^s|_{\Sigma_T^+} &= \tilde{c}_i && \text{sur } \Sigma_T^+, \\ \mathcal{L}u_i &= f_i && \text{sur } \Omega \times I\!R_+^* \times (0,T), \\ u_i|_{\xi=0} &= c_i^s && \text{sur } \mathcal{D}_T^+, \\ u_i|_{t=0} &= u_i^0 && \text{sur } \Omega \times I\!R_+^*, \end{aligned} \right. \tag{VI.65}$$

pour tout $i = 1, \ldots, L$, avec h donné par (VI.5). De plus, nous ne ferons pas d'hypothèse sur le signe ni sur la valeur de la somme sur les lithologies i des conditions initiales u_i^0 et aux limites $\tilde{c}_i$. Par la suite, les hypothèses faites sur les données seront les suivantes :

Hypothèse VI-4.1.

(i) *Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, de classe C^∞,*

(ii) $h^0 \in C^2(\bar{\Omega})$,

(iii) $g \in C^1(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*) \cap L^2(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$,

(iv) *g et h^0 sont choisis selon les hypothèses du Théorème 5.3 de [41] (p. 320) de telle sorte que l'unique solution h de (VI.5) soit dans $C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$,*

(v) *$\tilde{c}_i \in L^\infty(\Sigma_{2T}^+)$ pour tout $i = 1, \ldots, L$,*

(vi) *$u_i^0 \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$ pour tout $i = 1, \ldots, L$,*

(vii) *$f_i \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0, 2T))$ pour tout $i = 1, \ldots, L$.*

Comme toute solution faible de (VI.5)-(VI.6) est par définition dans L^∞, l'étude du problème adjoint (VI.58) sous l'Hypothèse VI-1.1 revient à étudier le problème direct (VI.65) sous l'Hypothèse VI-4.1. En effet, les points (vii) et $(viii)$ de l'Hypothèse VI-1.1 n'interviennent pas dans la démonstration du Théorème VI-2.1 comme nous l'avons fait remarquer plus haut.

Afin d'obtenir une formulation mathématique rigoureuse du problème (VI.65), nous allons chercher des solutions faibles définies de la façon suivante pour tout $i = 1, \ldots, L$.

Définition VI-4.1. *Supposons l'Hypothèse VI-4.1 vérifiée, et soit h la solution du problème (VI.5). Alors $(u_i, c_i^s) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T)) \times L^\infty(\Omega \times (0,T))$ est une solution faible de (VI.65) si :*
(i) *Pour tout $\varphi \in \{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+2}) \,|\, \phi(.,0,.) = 0$ sur $\Omega \times (0,T) \setminus \mathcal{D}_T^+$ et $\phi(.,.,T) = 0$ sur $\Omega \times \mathbb{R}_+\}$*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T (\mathcal{L}\varphi)(x,\xi,t)\, u_i(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx + \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T f_i(x,\xi,t)\, \varphi(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx \\ &+ \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} u_i^0(x,\xi)\, \varphi(x,\xi,0)\, d\xi\, dx + \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\, c_i^s(x,t)\, \varphi(x,0,t)\, dt\, dx = 0, \end{aligned} \tag{VI.66}$$

(ii) *Pour tout $\psi \in \{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+2}) \,|\, \phi(.,0,.) = 0$ sur $\partial\Omega \times (0,T) \setminus \Sigma_T^+$ et $\phi(.,.,T) = 0$ sur $\Omega \times \mathbb{R}_+\}$*

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T (\mathcal{L}\psi)(x,\xi,t)\, u_i(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx - \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T f_i(x,\xi,t)\, \psi(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx \\ &- \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} u_i^0(x,\xi)\, \psi(x,\xi,0)\, d\xi\, dx + \int_0^T \left(\int_\Omega c_i^s(x,t)\, \nabla h(x,t) \cdot \nabla\psi(x,0,t)\, dx \right. \\ &\left. - \int_{\partial\Omega} \tilde{c}_i(x,t)\, g(x,t)\, \psi(x,0,t) d\gamma(x) \right) dt = 0. \end{aligned} \tag{VI.67}$$

Dans la suite, on notera $\bar{f}_i$, pour tout $i = 1, \ldots, L$, la fonction obtenue par le changement de variables $(x, z, t) = (x', h(x', t') - z, t')$ dans f_i :

$$\bar{f}_i(x,z,t) = f_i(x, h(x,t) - z, t) \text{ sur } \mathcal{B}_T = \{(x,z,t) \,|\, (x,t) \in \Omega \times (0,T), z < h(x,t)\}.$$

Dans ce nouveau système de coordonnées, les variables c_i vérifient pour tout $i = 1, \ldots, L$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t c_i & = & \bar{f}_i & \text{sur } \mathcal{B}_T, \\ c_i|_{z=h} & = & c_i^s & \text{sur } \mathcal{D}_T^+. \end{array} \right. \tag{VI.68}$$

Le but de ce paragraphe est de montrer le Théorème VI-4.1 donné ci-dessous, qui établit l'existence d'une solution faible au problème (VI.65) au sens de la Définition VI-4.1. Sous l'Hypothèse VI-1.1, le Lemme VI-4.2 est un corollaire immédiat du Théorème VI-4.1.

La démonstration du Théorème VI-4.1 est obtenue en adaptant la preuve de la convergence du schéma Volume Fini (VI.11)-(VI.14) au cas de seconds membres non nuls dans l'équation d'advection. Elle s'articule de la manière suivante : on définit tout d'abord le schéma numérique obtenu par la discrétisation de (VI.5) et (VI.65), puis on montre l'existence, l'unicité, la stabilité des solutions discrètes, et enfin la convergence de ces solutions vers une solution faible au sens de la Définition VI-4.1. Dans ce dernier paragraphe, seules les principales différences avec la démonstration du Théorème VI-2.1 seront détaillées.

Schéma Volume Fini

Le schéma de discrétisation Volume Fini défini ici est le même que celui du paragraphe VI-2, sauf pour les concentrations de colonne. En effet, d'après l'équation (VI.68) et en utilisant les mêmes notations que dans le paragraphe VI-2, l'inconnue discrète $c_{i,\kappa}^{n+1}(z)$, $n \geq 0$, est ici définie comme la solution exacte au temps t^{n+1} du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t c_{i,\kappa}(z,t) & = & \bar{f}_{i,\kappa}(z,t), & \\ c_{i,\kappa}(z,t^n) & = & c_{i,\kappa}^n(z) & \text{si } z < h_\kappa^n, \\ c_{i,\kappa}(h_\kappa(t),t) & = & c_{i,\kappa}^{s,n+1} & \text{si } \partial_t h_\kappa(t) > 0, \end{array} \right. \tag{VI.69}$$

pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $t \in (t^n, t^{n+1}]$, $z < h_\kappa(t)$, avec

$$\bar{f}_{i,\kappa}(z,t) = \frac{1}{|\kappa|} \int_\kappa \bar{f}_i(x,z,t) dx,$$

$$h_\kappa(t) = h_\kappa^n + (t - t^n)\, \partial_t h_\kappa(t), \quad \text{et } \partial_t h_\kappa(t) = \frac{h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n}{\Delta t} \text{ pour tout } t \in (t^n, t^{n+1}]. \tag{VI.70}$$

Ceci conduit à la discrétisation suivante des équations (VI.5) et (VI.65) :

Epaisseur de sédiments :

$$|\kappa| \frac{h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n}{\Delta t} + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} T_{\kappa\kappa'}(h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) - |\partial\kappa \cap \partial\Omega|\, g_\kappa^{n+1} = 0, \tag{VI.71}$$

Conservation des sédiments en surface :

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta \mathcal{M}_{i,\kappa}^{n+1}}{\Delta t} |\kappa| + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} c_{i,\kappa\kappa'}^{s,n+1} T_{\kappa\kappa'} (h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) \\ &-|\partial\kappa \cap \partial\Omega| \, \bar{c}_{i,\kappa}^{n+1} g_\kappa^{(+),n+1} + |\partial\kappa \cap \partial\Omega| \, c_{i,\kappa}^{s,n+1} g_\kappa^{(-),n+1} = 0, \end{aligned} \tag{VI.72}$$

Sédiments dans les colonnes :

$$\Delta \mathcal{M}_{i,\kappa}^{n+1} = \begin{cases} c_{i,\kappa}^{s,n+1} (h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n) & \text{si } h_\kappa^{n+1} \geq h_\kappa^n, \\ \int_{h_\kappa^n}^{h_\kappa^{n+1}} c_{i,\kappa}^n(z) dz & \text{sinon,} \end{cases} \tag{VI.73}$$

$$c_{i,\kappa}^{n+1}(z) = \begin{cases} c_{i,\kappa}^n(z) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \bar{f}_{i,\kappa}(z,t)\, dt & \text{si } z \leq \min(h_\kappa^n, h_\kappa^{n+1}), \\ c_{i,\kappa}^{s,n+1} + \int_{t^n + \Delta t \left(\frac{z - h_\kappa^n}{h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n} \right)}^{t^{n+1}} \bar{f}_{i,\kappa}(z,t)\, dt & \text{si } h_\kappa^n < z < h_\kappa^{n+1}, \end{cases} \tag{VI.74}$$

$$u_{i,\kappa}^n(\xi) = c_{i,\kappa}^n(h_\kappa^n - \xi) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}_+^*. \tag{VI.75}$$

Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer l'existence de solutions $(h_\kappa^n)_{\kappa \in \mathcal{K}}$, $(c_{i,\kappa}^{s,n+1})_{\kappa \in \mathcal{K}}$, $(c_{i,\kappa}^n)_{\kappa \in \mathcal{K}}$ et $(u_{i,\kappa}^n)_{\kappa \in \mathcal{K}}$, $i = 1, \ldots, L$, $n \in \{0, \ldots, N_{\Delta t}\}$, au problème (VI.71)-(VI.75). Ces solutions sont uniques sauf pour la concentration de surface $c_{i,\kappa}^{s,n+1}$ qui est arbitraire sur certains points dégénérés $(\kappa, n+1)$ pour lesquels elle est choisie selon le Lemme VI-4.4 énoncé plus loin. Pour tout maillage admissible $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ de Ω au sens de la Définition VI-2.1, tout pas de temps $\Delta t > 0$ et $i = 1, \ldots, L$, on définit, comme dans le paragraphe VI-2, les fonctions $h_{\mathcal{K},\Delta t}$, $c_{i,\mathcal{K},\Delta t}^s$ sur $\Omega \times (0, (N_{\Delta t}+1)\,\Delta t]$ et $u_{i,\mathcal{K},\Delta t}$ sur $\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0, (N_{\Delta t}+1)\,\Delta t]$ par

$$\begin{cases} h_{\mathcal{K},\Delta t}(x,t) = h_\kappa^{n+1}, \\ u_{i,\mathcal{K},\Delta t}(x,\xi,t) = u_{i,\kappa}^{n+1}(\xi), \\ c_{i,\mathcal{K},\Delta t}^s(x,t) = c_{i,\kappa}^{s,n+1}, \end{cases} \tag{VI.76}$$

pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$, $t \in (t^n, t^{n+1}]$, $n \in \{0, \ldots, N_{\Delta t}\}$, $\xi \in \mathbb{R}_+^*$, avec h_κ^n et $u_{i,\kappa}^n$ les solutions de (VI.71)-(VI.75) et $c_{i,\kappa}^{s,n+1}$ une solution de (VI.71)-(VI.75) choisie selon le Lemme VI-4.4.

Alors l'objectif de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

Théorème VI-4.1. *Supposons l'Hypothèse VI-4.1 vérifiée. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $(\mathcal{K}_m, \Sigma_{int}^m, \mathcal{P}_m)$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1 et $\Delta t_m \in (0,T)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $reg(\mathcal{K}_m) \leq \alpha$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et que $\Delta t_m \to 0$, $\frac{\delta \mathcal{K}_m}{\sqrt{\Delta t_m}} \to 0$ quand $m \to \infty$.*

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $i = 1, \ldots, L$, soit $h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$, $u_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$ les fonctions définies de manière unique par (VI.76) et $c_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}^s$ une fonction définie par (VI.76) à partir d'une solution de (VI.71)-(VI.75) choisie selon le Lemme VI-4.4 avec $\mathcal{K} = \mathcal{K}_m$, $\Delta t = \Delta t_m$.

Alors la suite $(h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution h du problème (VI.5) dans $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, et il existe une sous-suite de $(\mathcal{K}_m, \Delta t_m)_{m \in \mathbb{N}}$, toujours notée $(\mathcal{K}_m, \Delta t_m)_{m \in \mathbb{N}}$, telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, L\}$, la sous-suite $(c_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}^s)_{m \in \mathbb{N}}$ (resp. $(u_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m \in \mathbb{N}}$) converge vers une fonction c_i^s dans $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ (resp. u_i dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))$) pour la topologie faible-$\star$. De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, L\}$, la limite (u_i, c_i^s) est une solution faible du problème (VI.65) au sens de la Définition VI-4.1.

Preuve du Theorème VI-4.1

La démonstration du Théorème VI-4.1 est très similaire à celle du Théorème VI-2.1 donnant l'existence d'une solution faible au problème (VI.6) au sens de la Définition VI-1.1.

L'existence, l'unicité et la convergence de la suite des épaisseurs de sédiments discrètes $(h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ vers la solution de (VI.5) ont déjà été montrées dans le paragraphe VI-3.1.

En ce qui concerne les variables concentrations, le système (VI.11)-(VI.14) diffère de (VI.71)-(VI.75) par les seconds membres $f_i \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,2T))$, $i = 1,\ldots,L$, dans les équations d'advection, et par le fait que les valeurs des conditions initiales et des conditions aux limites ne sont pas contraintes dans L^∞. Malgré ces différences, nous allons suivre les mêmes étapes que dans la démonstration du Théorème VI-2.1 : nous allons tout d'abord montrer l'existence d'une solution bornée pour les concentrations discrètes (Lemme VI-4.4), ce qui conduit à la convergence de ces concentrations dans L^∞ pour la topologie faible-$\star$ (Proposition VI-4.1). Ensuite, nous montrerons que les solutions discrètes satisfont au sens faible une équation d'advection linéaire (Proposition VI-4.2) qui est finalement utilisée pour prouver que les concentrations discrètes convergent vers une solution faible du problème.

Lemme VI-4.4. *Supposons l'Hypothèse VI-4.1 vérifiée. Soit $(\mathcal{K},\Sigma_{int},\mathcal{P})$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1, $\Delta t \in (0,T)$, $M_i = \max\left(||u_i^0||_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*)}, ||\tilde{c}_i||_{L^\infty(\Sigma_{2T}^+)}\right) + 2T||f_i||_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times(0,2T))}$ pour tout $i \in \{1,\ldots,L\}$ et, pour tout $n \in \{0,\ldots,N_{\Delta t}+1\}$, soit $(h_\kappa^n)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ la solution de (VI.71). Pour $i \in \{1,\ldots,L\}$ et $n \in \{0,\ldots,N_{\Delta t}\}$, le système (VI.72)-(VI.75) admet une unique solution $(c_{i,\kappa}^{n+1})_{\kappa\in\mathcal{K}}$ et au moins une solution $(c_{i,\kappa}^{s,n+1})_{\kappa\in\mathcal{K}}$ telle que*

$$|c_{i,\kappa}^{s,n+1}| \leq M_i \textit{ pour tout } \kappa \in \mathcal{K} \textit{ et } n \in \{0,\ldots,N_{\Delta t}\}. \tag{VI.77}$$

De plus, on a

$$|c_{i,\kappa}^n(z)| \leq M_i \textit{ pour tout } \kappa \in \mathcal{K},\ n \in \{0,\ldots,N_{\Delta t}+1\} \textit{ et } z < h_\kappa^n. \tag{VI.78}$$

Preuve. Comme l'expression du terme d'accumulation discret est la même que pour le problème (VI.11)-(VI.14), la preuve de l'existence et de l'unicité des concentrations approchées $(c_{i,\kappa}^{s,n+1})_{\kappa\in\mathcal{K}}$, $(c_{i,\kappa}^n)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ and $(u_{i,\kappa}^n)_{\kappa\in\mathcal{K}}$, $i = 1,\ldots,L$, est identique (voir le Lemme VI-3.1 pour plus de détails).
Les inégalités (VI.77) et (VI.78) sont obtenues par induction sur $n \in \{0,\ldots,N_{\Delta t}\}$ et sur les volumes de contrôle triés par ordre de topographie décroissante. Considérons un volume de contrôle $\kappa \in \mathcal{K}$ et un pas de temps $n \geq 0$. L'hypothèse d'induction est la suivante : $|c_{i,\kappa'}^n(z)| \leq M_i^n$ pour tout $\kappa' \in \mathcal{K}$, et, pour toutes les cellules plus hautes $\kappa' \in \mathcal{K}$ telles que $h_\kappa^{n+1} < h_{\kappa'}^{n+1}$, $|c_{i,\kappa'}^{s,n+1}| \leq M_i^n$ avec $M_i^n = \max\left(||u_i^0||_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*)}, ||\tilde{c}_i||_{L^\infty(\Sigma_{2T}^+)}\right) + n\Delta t\,||f_i||_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times(0,2T))}$.

Considérons tout d'abord le cas de l'érosion pour lequel $h_\kappa^{n+1} \leq h_\kappa^n$. Il résulte de l'hypothèse d'induction sur n et sur les volumes de contrôle que

$$\begin{aligned}
&|c_{i,\kappa}^{s,n+1}|\Big(\sum_{\substack{\kappa'\in\mathcal{K}_\kappa\\ h_\kappa > h_{\kappa'}}} T_{\kappa\kappa'}(h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) + |\partial\kappa\cap\partial\Omega|\, g_\kappa^{(-),n+1}\Big)\\
&\leq M_i^n\Big(|\partial\kappa\cap\partial\Omega|\, g_\kappa^{(+),n+1} + \sum_{\substack{\kappa'\in\mathcal{K}_\kappa\\ h_\kappa \leq h_{\kappa'}}} T_{\kappa\kappa'}(h_{\kappa'}^{n+1} - h_\kappa^{n+1}) + \frac{|\kappa|}{\Delta t}(h_\kappa^n - h_\kappa^{n+1})\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le fait que l'épaisseur de sédiments discrète satisfait l'équation (VI.71), on obtient

$$\left(|c_{i,\kappa}^{s,n+1}| - M_i^n\right) \underbrace{\left(\sum_{\substack{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa \\ h_\kappa > h_{\kappa'}}} T_{\kappa\kappa'}(h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) + |\partial\kappa \cap \partial\Omega|\, g_\kappa^{(-),n+1} \right)}_{A_\kappa^+} \leq 0.$$

Dans cette équation, soit le terme A_κ^+ est strictement positif, soit il s'annule. Dans le premier cas, on a nécessairement $|c_{i,\kappa}^{s,n+1}| \leq M_i^n$ pour tout $i = 1, \ldots, L$. Dans le second cas, le point $(\kappa, n+1)$ est dit dégénéré dans le sens où les concentrations $c_{i,\kappa}^{s,n+1}$ peuvent être choisies arbitrairement dans l'intervalle $[-M_i^n, M_i^n]$.

Supposons maintenant que $h_\kappa^{n+1} > h_\kappa^n$ (sédimentation). En procédant comme précédemment, on obtient

$$|c_{i,\kappa}^{s,n+1}| \left(\frac{|\kappa|}{\Delta t}(h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n) + \sum_{\substack{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa \\ h_\kappa > h_{\kappa'}}} T_{\kappa\kappa'}(h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) + |\partial\kappa \cap \partial\Omega|\, g_\kappa^{(-),n+1} \right)$$
$$\leq M_i^n \left(|\partial\kappa \cap \partial\Omega|\, g_\kappa^{(+),n+1} + \sum_{\substack{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa \\ h_\kappa \leq h_{\kappa'}}} T_{\kappa\kappa'}(h_{\kappa'}^{n+1} - h_\kappa^{n+1}) \right),$$

ce qui donne, en utilisant l'équation (VI.71),

$$\left(|c_{i,\kappa}^{s,n+1}| - M_i^n\right) \left(\frac{|\kappa|}{\Delta t}(h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n) + \sum_{\substack{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa \\ h_\kappa > h_{\kappa'}}} T_{\kappa\kappa'}(h_\kappa^{n+1} - h_{\kappa'}^{n+1}) + |\partial\kappa \cap \partial\Omega|\, g_\kappa^{(-),n+1} \right) \leq 0.$$

Comme on a supposé $h_\kappa^{n+1} > h_\kappa^n$, le second terme entre parenthèses est strictement positif, et par suite $|c_{i,\kappa}^{s,n+1}| \leq M_i^n$.

Cette démonstration est encore valable pour $n = 0$ et pour les cellules les plus hautes $\kappa_0 \in \mathcal{K}$ à tout temps t^{n+1}, $n \geq 0$.

Enfin, pour les concentrations dans le bassin, on a par définition $|c_{i,\kappa}^0(z)| \leq ||u_i^0||_{L^\infty(\Omega \times I\!R_+^*)}$ et, pour $n \in \{0, \ldots, N_{\Delta t}\}$, (VI.74) donne facilement l'inégalité

$$||c_{i,\kappa}^{n+1}(.)||_{L^\infty(-\infty, h_\kappa^{n+1})} \leq \max\left(||c_{i,\kappa}^n(.)||_{L^\infty(-\infty, h_\kappa^n)}, |c_{i,\kappa}^{s,n+1}| \right) + \Delta t\, ||f_i||_{L^\infty(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,2T))} \leq M_i^{n+1},$$

ce qui conclut la démonstration. □

Notant $c_{i,\kappa}(z,t)$ la solution exacte au temps t de (VI.69) pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $t \in (0, (N_{\Delta t}+1)\Delta t]$ et $z < h_\kappa(t)$, on peut étendre pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$ les solutions discrètes $(u_{i,\kappa}^n)_{n \in \{0,\ldots,N_{\Delta t}+1\}}$ et $(c_{i,\kappa}^{s,n+1})_{n \in \{0,\ldots,N_{\Delta t}\}}$ données par le Lemme VI-4.4 à des fonctions de $t \in (0, (N_{\Delta t}+1)\Delta t]$ de la façon suivante :

$$u_{i,\kappa}(\xi, t) = c_{i,\kappa}(h_\kappa(t) - \xi, t) \text{ pour tout } t \in (0, (N_{\Delta t}+1)\Delta t] \text{ et } \xi \in I\!R_+^*, \tag{VI.79}$$
$$c_{i,\kappa}^s(t) = c_{i,\kappa}^{s,n+1} \text{ pour tout } t \in (t^n, t^{n+1}]. \tag{VI.80}$$

Et on déduit aisément du Lemme VI-4.4 que les fonctions $c_{i,\kappa}(z,t)$ et $u_{i,\kappa}(\xi,t)$ sont bornées dans l'intervalle $[-M_i, M_i]$ pour tout $i = 1,\dots,L$.

On définit maintenant $\bar{u}_{i,\mathcal{K},\Delta t}$ sur $\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,(N_{\Delta t}+1)\Delta t)$ par

$$\bar{u}_{i,\mathcal{K},\Delta t}(x,\xi,t) = u_{i,\kappa}(\xi,t) \tag{VI.81}$$

pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$. On a alors la proposition suivante :

Proposition VI-4.1. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $(\mathcal{K}_m, \Sigma_{int}^m, \mathcal{P}_m)$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1 et $\Delta t_m \in (0,T)$. Supposons que $\Delta t_m \to 0$ et $\delta\mathcal{K}_m \to 0$ quand $m \to \infty$.*

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $i = 1,\dots,L$, soit $u_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$ (resp. $\bar{u}_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$) la fonction définie de manière unique par (VI.76) (resp. par (VI.81)) et $c^s_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$ la fonction définie par (VI.76) à partir d'une solution de (VI.72)-(VI.75) choisie selon le Lemme VI-4.4 avec $\mathcal{K} = \mathcal{K}_m$, $\Delta t = \Delta t_m$.

Alors, sous l'Hypothèse VI-4.1, il existe une sous-suite de $(\mathcal{K}_m, \Delta t_m)_{m\in\mathbb{N}}$, toujours notée $(\mathcal{K}_m, \Delta t_m)_{m\in\mathbb{N}}$, telle que pour tout $i \in \{1,\dots,L\}$,
(i) la sous-suite $(c^s_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction c^s_i dans $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ pour la topologie faible-$\star$,
(ii) les sous-suites $(u_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ et $(\bar{u}_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ convergent vers une fonction u_i dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))$ pour la topologie faible-$\star$.

Preuve. Notant u_i (resp. $\bar{u}_i$) la limite quand $m \to \infty$ de la sous-suite $(u_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\bar{u}_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m})_{m\in\mathbb{N}}$) dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))$, la seule difficulté consiste à montrer que $u_i = \bar{u}_i$. Ceci est obtenu comme dans la démonstration de la Proposition VI-3.3 en utilisant l'hypothèse $f_i \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,2T))$, les bornes (VI.32), (VI.77), (VI.78) sur les solutions, et la relation suivante : pour $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}_m$ et $t \in (t^n, t^{n+1}]$,

$$u_{i,\kappa}^{n+1}(\xi) = \begin{cases} \begin{array}{l} u_{i,\kappa}\big(\xi - (h_\kappa(t) - h_\kappa^n), t\big) \\ + \int_{t^n}^t f_{i,\kappa}\big(\xi - (h_\kappa(t) - h_\kappa^n), s\big)\, ds \end{array} & \text{pour tout } \xi \geq h_\kappa(t) - h_\kappa^n \quad \text{si } h_\kappa^{n+1} \geq h_\kappa^n, \\[2ex] \begin{array}{l} u_{i,\kappa}\big(\xi + (h_\kappa(t) - h_\kappa^{n+1}), t\big) \\ + \int_t^{t^{n+1}} f_{i,\kappa}\big(\xi + (h_\kappa(t) - h_\kappa^{n+1}), s\big)\, ds \end{array} & \text{pour tout } \xi \geq 0 \quad \text{si } h_\kappa^{n+1} < h_\kappa^n, \end{cases}$$

avec $f_{i,\kappa}(\xi,t) = \bar{f}_{i,\kappa}(h_\kappa(t) - \xi, t)$. □

Ensuite, pour montrer la convergence des solutions approchées vers une solution faible du problème couplé, on établit, comme dans le paragraphe VI-3.2, que les fonctions $c_{i,\kappa}(z,t)$ satisfont une équation d'advection linéaire. En effet, en utilisant (VI.69), la Proposition VI-3.5 s'étend immédiatement à :

Proposition VI-4.2. *Supposons l'Hypothèse VI-4.1 vérifiée et soit h la solution du problème (VI.5). Soit $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition VI-2.1 et $\Delta t \in (0,T)$.*

Soit $h_{\mathcal{K},\Delta t}$, $u_{i,\mathcal{K},\Delta t}$, $i = 1,\dots,L$, (resp. $\bar{u}_{i,\mathcal{K},\Delta t}$, $i = 1,\dots,L$) les fonctions définies de manière unique par (VI.76) (resp. par (VI.81)) et $c^s_{i,\mathcal{K},\Delta t}$, $i = 1,\dots,L$, une fonction définie par (VI.76) à partir d'une solution de (VI.72)-(VI.75) choisie selon le Lemme VI-4.4.

Alors, pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$ et $i \in \{1, \ldots, L\}$:
(i) pour tout $\varphi \in \{\phi \in C_c^\infty(I\!R^2) \,|\, \phi(.,T) = 0$ sur $I\!R_+\}$,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{I\!R_+} \left[\partial_t \varphi(\xi,t) + \partial_t h_\kappa(t)\, \partial_\xi \varphi(\xi,t)\right] u_{i,\kappa}(\xi,t)\, d\xi\, dt + \int_0^T \int_{I\!R_+} f_{i,\kappa}(\xi,t)\varphi(\xi,t)\, d\xi\, dt \\ + \int_{I\!R_+} u_{i,\kappa}^0(\xi)\varphi(\xi,0)\, d\xi + \int_0^T \partial_t h_\kappa(t) u_{i,\kappa}(0,t)\varphi(0,t)\, dt = 0,\end{aligned} \tag{VI.82}$$

(ii) pour tout $\varphi \in \{\phi \in C_c^\infty(I\!R^2) \,|\, \phi(.,T) = 0$ sur $I\!R_+$ et $\phi(0,t) = 0$ pour tout $t > 0$ tel que $\partial_t h_\kappa(t) \leq 0\}$,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{I\!R_+} \left[\partial_t \varphi(\xi,t) + \partial_t h_\kappa(t)\, \partial_\xi \varphi(\xi,t)\right] u_{i,\kappa}(\xi,t)\, d\xi\, dt + \int_0^T \int_{I\!R_+} f_{i,\kappa}(\xi,t)\varphi(\xi,t)\, d\xi\, dt \\ + \int_{I\!R_+} u_{i,\kappa}^0(\xi)\varphi(\xi,0)\, d\xi + \int_0^T \partial_t h_\kappa(t) c_{i,\kappa}^s(t)\varphi(0,t)\, dt = 0.\end{aligned} \tag{VI.83}$$

Nous allons maintenant démontrer le Théorème VI-4.1.

La preuve de la convergence du schéma numérique (VI.11)-(VI.14) dans le paragraphe VI-3.2 n'utilise pas directement la valeur des bornes sur les solutions discrètes ni la valeur de la somme sur les lithologies des concentrations discrètes, mais seulement la stabilité de ces solutions et le découplage de l'épaisseur de sédiments des variables concentrations. Pour adapter la démonstration du Théorème VI-2.1 à notre cas, il nous faut donc juste montrer la convergence des termes contenant les fonctions f_i, $i = 1, \ldots, L$.

La première expression (VI.66) dans la formulation faible est obtenue en utilisant l'équation d'advection linéaire discrète (VI.82) appliquée à $\varphi(x_\kappa, \xi, t)$, $\varphi \in \{\phi \in C_c^\infty(I\!R^{d+2}) \,|\, \phi(.,0,.) = 0$ sur $\Omega \times (0,T) \setminus \mathcal{D}_T^+$ et $\phi(.,.,T) = 0$ sur $\Omega \times I\!R_+\}$. La convergence de cette équation vers (VI.66) n'a été montrée que dans le cas $f_i = 0$. Il nous reste donc à prouver que :

$$D_{i,m} = \sum_{\kappa \in \mathcal{K}_m} |\kappa| \int_0^T \int_{I\!R_+} f_{i,\kappa}(\xi,t)\, \varphi(x_\kappa,\xi,t)\, d\xi\, dt \to \int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T f_i(x,\xi,t)\, \varphi(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx \tag{VI.84}$$

quand $m \to \infty$.

Nous montrerons ensuite la convergence vers (VI.67) de la somme sur $\kappa \in \mathcal{K}_m$ et $n \in \{0, \ldots, N_{\Delta t_m}\}$ de l'équation (VI.72) multipliée par $\varphi(x_\kappa, 0, t^{n+1})$, $\varphi \in \{\phi \in C_c^\infty(I\!R^{d+2}) \,|\, \phi(.,0,.) = 0$ sur $\partial\Omega \times (0,T) \setminus \Sigma_T^+$ et $\phi(.,.,T) = 0$ sur $\Omega \times I\!R_+\}$. En procédant comme dans le paragraphe VI-3.2 et en utilisant (VI.84), cela revient à prouver que

$$E_{i,m} = \sum_{\kappa \in \mathcal{K}_m} |\kappa| \int_0^T \partial_t h_\kappa(t) u_{i,\kappa}(0,t)\varphi(x_\kappa,0,t)\, dt - \sum_{\kappa \in \mathcal{K}_m} |\kappa| \sum_{n=0}^{N_{\Delta t_m}} \Delta\mathcal{M}_{i,\kappa}^{n+1} \varphi(x_\kappa, 0, t^{n+1}) \to 0 \tag{VI.85}$$

quand $m \to \infty$.

Montrons maintenant (VI.84) et (VI.85).

Tout d'abord, on peut prouver que la fonction $f_{i,\mathcal{K}_m}$ définie par $f_{i,\mathcal{K}_m}(x,\xi,t) = f_{i,\kappa}(\xi,t) = \frac{1}{|\kappa|} \int_\kappa \bar{f}_i(y, h_\kappa(t) - \xi, t)\, dy$ pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}_m$, $\xi \in I\!R_+^*$, $t \in (0,T)$, converge vers f_i dans

$L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))$ en utilisant un argument de densité, l'hypothèse $f_i \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,2T))$, et les bornes (VI.32), (VI.37). Ce résultat donne immédiatement (VI.84).

Ensuite, pour tout $\kappa \in \mathcal{K}_m$, $n \in \{0,\ldots,N_{\Delta t_m}\}$ et $i \in \{1,\ldots,L\}$, on montre facilement que

$$\Delta \mathcal{M}_{i,\kappa}^{n+1} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} u_{i,\kappa}(0,t)\partial_t h_\kappa(t)\,dt - \begin{cases} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{t^n}^{t} \bar{f}_{i,\kappa}(h_\kappa(t),s)\,ds\right) \partial_t h_\kappa(t)\,dt & \text{si } h_\kappa^{n+1} < h_\kappa^n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

En substituant cette égalité dans la définition de $E_{i,m}$, on obtient

$$\begin{aligned} E_{i,m} &= \sum_{\kappa\in\mathcal{K}_m} \int_\kappa \int_T^{t^{N_{\Delta t_m}+1}} \bar{u}_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,0,t)\, \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)\, \varphi(x_\kappa,0,t)dt\,dx \\ &+ \sum_{\kappa\in\mathcal{K}_m} \sum_{n=0}^{N_{\Delta t_m}} \int_\kappa \int_{t^n}^{t^{n+1}} \bar{u}_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,0,t)\, \delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t)\, [\varphi(x_\kappa,0,t^{n+1}) - \varphi(x_\kappa,0,t)]\,dt\,dx \\ &- \sum_{n=0}^{N_{\Delta t_m}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{K}_m \\ h_\kappa^{n+1}<h_\kappa^n}} |\kappa| \left(\int_{t^n}^{t} \bar{f}_{i,\kappa}(h_\kappa(t),s)ds\right) \partial_t h_\kappa(t)\, \varphi(x_\kappa,0,t^{n+1})\,dt, \end{aligned}$$

avec $\delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}(x,t) = \partial_t h_\kappa(t) = (h_\kappa^{n+1} - h_\kappa^n)/\Delta t_m$ pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}_m$, $t \in (t^n, t^{n+1}]$. Grâce à la régularité de φ, il existe $D_3 > 0$ ne dépendant que de φ tel que $|\varphi(x_\kappa,0,t^{n+1}) - \varphi(x_\kappa,0,t)| \le D_3\,\Delta t_m$ pour tout $t \in [t^n, t^{n+1}]$. Comme la fonction $\delta_t h_{\mathcal{K}_m,\Delta t_m}$ est bornée uniformément dans $L^2(\Omega \times (0, t^{N_{\Delta t_m}+1}))$ (voir (VI.32)), comme $\bar{u}_{i,\mathcal{K}_m,\Delta t_m} \in [-M_i, M_i]$, $\bar{f}_i \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,2T))$ et $|t^{N_{\Delta t_m}+1} - T| < \Delta t_m$, $E_{i,m}$ converge bien vers 0 quand $m \to \infty$: la limite (u_i, c_i^s) satisfait l'équation (VI.67), ce qui met fin à la démonstration du Théorème VI-4.1.

VI-4.3 Preuve du Lemme VI-4.1

La démonstration du Lemme VI-4.1 utilise les caractéristiques $\zeta(.;x,\xi,t)$ et la "solution caractéristique" v_c de l'équation (VI.50) (voir [27]) définie par (VI.89). Nous allons notamment montrer que cette solution est l'unique solution faible de (VI.50) et satisfait les propriétés du Lemme VI-4.1.

La preuve utilise une partition de l'unité sur un recouvrement de $\mathbb{R}^{d+2}$ construit à partir des caractéristiques, tel que sur chaque ouvert du recouvrement qui coupe la frontière $\Omega \times \partial[\mathbb{R}_+^* \times (0,T)]$, la solution caractéristique v_c est régulière moyennant des données régulières. Ceci nous permettra de déduire facilement les formules d'intégration par parties données dans le Lemme VI-4.1. Afin de rester loin des frontières $\partial\mathcal{D}_T^+ \times \{\xi = 0\}$, $\partial\mathcal{D}_T^- \times \{\xi = 0\}$, et $\Omega \times \{\xi = 0\} \times \{t = 0, T\}$, nous avons également besoin d'une astuce donnée dans [5] pour montrer que leur contribution dans les intégrations par parties est nulle.

Pour tout $(x,\xi,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, on définit la caractéristique $\zeta(.;x,\xi,t)$ par

$$\zeta(s;x,\xi,t) = \int_t^s \partial_t h(x,r)\,dr + \xi = h(x,s) - h(x,t) + \xi \tag{VI.86}$$

pour tout $s \in I\!R_+$. Pour tout $(x, \xi, t) \in \bar{\Omega} \times I\!R_+ \times [0, T]$, l'instant d'entrée τ_e et l'instant de sortie τ_s de la caractéristique $\zeta(.; x, \xi, t)$ dans et hors du domaine $\Omega \times I\!R_+^* \times (0, T)$ sont définis par

$$\begin{cases} \tau_e(x, \xi, t) = \inf\{s \text{ tel que } 0 \leq s \leq t \text{ et } \zeta(s; x, \xi, t) \geq 0\}, \\ \tau_s(x, \xi, t) = \sup\{s \text{ tel que } t \leq s \leq T \text{ et } \zeta(s; x, \xi, t) \geq 0\}. \end{cases} \tag{VI.87}$$

On peut alors montrer le lemme suivant :

Lemme VI-4.5. *Pour tout* $(x, \xi, t) \in \Omega \times I\!R_+ \times [0, T]$ *tel que* $\tau = \tau_e(x, \xi, t) > 0$, $(x, \tau) \in \overline{\mathcal{D}_T^+} \cap \Omega \times (0, T]$.

Nous allons maintenant introduire un recouvrement de $I\!R^{d+2}$ construit à partir des caractéristiques tel que, sur chaque ouvert, on puisse contrôler la régularité des solutions des équations d'advection directes et adjointes, et ainsi déduire les formules d'intégration par parties.

Grâce à la régularité de la frontière $\partial\Omega$, on peut prolonger h en une fonction C^2 sur un voisinage ouvert $\omega \times [0, T]$ de $\bar{\Omega} \times [0, T]$ dans $I\!R^d \times [0, T]$. On notera $\bar{h}$ cette fonction et $\bar{\zeta}$ la caractéristique correspondante définie sur $\omega \times I\!R_+ \times [0, T]$.

On peut alors vérifier que l'ensemble

$$V_0 = \Big\{(x, \xi, \pm t) \,|\, x \in \omega,\ t \in [0, T),\ \xi = \bar{\zeta}(t; x, \eta, 0) \text{ avec } \eta \in I\!R_+^*, \bar{\zeta}(s; x, \eta, 0) > 0 \text{ pour tout } s \in [0, t]\Big\}$$

définit un voisinage ouvert de $\bar{\Omega} \times I\!R_+^* \times \{t = 0\}$. De même,

$$V_T = \Big\{(x, \xi, t), (x, \xi, 2T - t) \,|\, x \in \omega,\ t \in (0, T],\ \xi = \bar{\zeta}(t; x, \eta, T) \text{ avec } \eta \in I\!R_+^*, \\ \bar{\zeta}(s; x, \eta, T) > 0 \text{ pour tout } s \in [t, T]\Big\}$$

définit un voisinage ouvert de $\bar{\Omega} \times I\!R_+^* \times \{t = T\}$.

L'ensemble

$$V_{\mathcal{D}^+} = \Big\{(x, \pm\xi, t) \,|\, (x, t) \in \omega \times (0, T), \xi = \bar{\zeta}(t; x, 0, s), t \geq s > 0, \partial_t \bar{h}(x, r) > 0 \text{ pour tout } r \in [s, t]\Big\}$$

définit quant à lui un voisinage ouvert de $\{(x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, T) \,|\, \partial_t h(x, t) > 0\} \times \{\xi = 0\}$, et

$$V_{\mathcal{D}^-} = \Big\{(x, \pm\xi, t) \,|\, (x, t) \in \omega \times (0, T), \xi = \bar{\zeta}(t; x, 0, s), t \leq s < T, \partial_t \bar{h}(x, r) < 0 \text{ pour tout } r \in [t, s]\Big\}$$

un voisinage ouvert de $\{(x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, T) \,|\, \partial_t h(x, t) < 0\} \times \{\xi = 0\}$.

Soit $\mathcal{D}^0$ l'intérieur de $\big\{(x, t) \in \omega \times (0, T) \,|\, \partial_t \bar{h}(x, t) = 0\big\}$ dans $\omega \times (0, T)$, et

$$V_{\mathcal{D}^0} = \big\{(x, \xi, t) \,|\, (x, t) \in \mathcal{D}^0, \xi \in (-1, 1)\big\}$$

un voisinage ouvert de $\mathcal{D}^0 \times \{\xi = 0\}$.

Enfin, pour rester éloigné de l'ensemble $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ avec $B_1 = \partial\mathcal{D}_T^+ \times \{\xi = 0\}$, $B_2 = \partial\mathcal{D}_T^- \times \{\xi = 0\}$, $B_3 = \Omega \times \{\xi = 0\} \times \{t = 0\}$, et $B_4 = \Omega \times \{\xi = 0\} \times \{t = T\}$, on considère $\delta > 0$ et l'ensemble

$$V_S^\delta = \big\{(x, \xi, t) \in I\!R^{d+2} \,|\, d_S(x, \xi, t) < 3\delta\big\}$$

avec $d_S(x,\xi,t)$ la distance du point (x,ξ,t) à l'ensemble S.

La construction est complétée en notant que pour tout $\delta > 0$, il existe un ouvert V_c^δ tel que

$$\left(V_0, V_T, V_{\mathcal{D}^+}, V_{\mathcal{D}^-}, V_{\mathcal{D}^0}, V_S^\delta, V_c^\delta\right)$$

définisse un recouvrement de $I\!R^{d+2}$ avec $\bar{\Omega} \times I\!R_+ \times \{t=0,T\} \cap V_c^\delta = \emptyset$ et $\bar{\Omega} \times \{\xi = 0\} \times [0,T] \cap V_c^\delta = \emptyset$.

Finalement, une partition de l'unité est construite sur ce recouvrement, notée

$$\left(\omega_0^\delta, \omega_T^\delta, \omega_{\mathcal{D}^+}^\delta, \omega_{\mathcal{D}^-}^\delta, \omega_{\mathcal{D}^0}^\delta, \omega_S^\delta, \omega_c^\delta\right).$$

D'après l'Hypothèse VI-1.1, l'ensemble S est l'union d'un nombre fini de variétés de classe C^1 de dimension au plus d. Ainsi, selon [5], la fonction ω_S^δ peut être choisie telle que

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_S^\delta(x,\xi,t) = 1 \text{ si } d_S(x,\xi,t) < \delta, \\ \omega_S^\delta(x,\xi,t) = 0 \text{ si } d_S(x,\xi,t) > 2\delta, \\ \text{Mesure}\left(\text{ Supp } (\omega_S^\delta) \cap \{(x,\xi,t), |(x,\xi,t)| \le R\}\right) \le C(R)\delta^2, \\ \sup\left(\|\partial_\xi \omega_S^\delta\|_{L^\infty}, \|\partial_t \omega_S^\delta\|_{L^\infty}\right) \le \frac{C}{\delta}. \end{array}\right. \tag{VI.88}$$

Nous allons maintenant définir la solution caractéristique v_c de (VI.50) formellement sur $\Omega \times [0,+\infty) \times [0,T]$ par :

$$v_c(x,\xi,t) = \left\{\begin{array}{ll} l^s(x,\tau_e(x,\xi,t)) & \text{si } (x,\tau_e(x,\xi,t)) \in \mathcal{D}_T^+ \\ v^0(x,\zeta(0;x,\xi,t)) & \text{si } \tau_e(x,\xi,t) = 0 \end{array}\right. + \int_{\tau_e(x,\xi,t)}^t f(x,\zeta(s;x,\xi,t),s)\,ds. \tag{VI.89}$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme VI-4.6. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 satisfaite. Alors la fonction v_c est dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$ et vérifie*

$$\|v_c\|_{L^\infty(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))} \le \|l^s\|_{L^\infty(\mathcal{D}_T^+)} + \|v^0\|_{L^\infty(\Omega\times I\!R_+^*)} + T\,\|f\|_{L^\infty(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))}.$$

Preuve. D'après l'Hypothèse VI-1.1, l'ensemble

$$\{(x, \xi = \zeta(s;x,0,t), s) \,|\, s \in [\tau_e(x,0,t), \tau_s(x,0,t)], (x,t) \in \partial\mathcal{D}_T^+ \cap \Omega \times (0,T)\}$$

est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue $dx\,d\xi\,ds$ (voir le calcul du terme $\mathcal{I}_1$ par la suite). On déduit du Lemme VI-4.5 que la fonction v_c est définie p.p. sur $\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$ une fonction test, et considérons l'intégrale

$$\int_{\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T)} v_c(x,\xi,t)\,\varphi(x,\xi,t)\,dx\,d\xi\,dt = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 \text{ avec}$$

$$\mathcal{I}_1 = \int_{\left\{(x,\xi,t)\in\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T) \,|\, (x,\tau_e(x,\xi,t))\in\mathcal{D}_T^+\right\}} l^s(x,\tau_e(x,\xi,t))\,\varphi(x,\xi,t)\,dx\,d\xi\,t,$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_{\left\{(x,\xi,t)\in\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T) \,|\, \tau_e(x,\xi,t)=0\right\}} v^0(x,\zeta(0;x,\xi,t))\,\varphi(x,\xi,t)\,dx\,d\xi\,dt,$$

$$\mathcal{I}_3 = \int_{\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T)} \int_{\tau_e(x,\xi,t)}^t f(x,\zeta(s;x,\xi,t),s)\,\varphi(x,\xi,t)\,ds\,dx\,d\xi\,dt.$$

En utilisant le changement de variables $(x,\xi,t) = (y,\zeta(s;y,0,\tau),s)$, le premier terme se réécrit

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \int_{\mathcal{D}_T^+}\int_\tau^{\tau_s(y,0,\tau)} l^s(y,\tau)\,\partial_t h(y,\tau)\,\varphi(y,\zeta(s;y,0,\tau),s)\,ds\,dy\,d\tau\\ &\le \|l^s\|_{L^\infty(\mathcal{D}_T^+)}\int_{\mathcal{D}_T^+}\int_\tau^{\tau_s(y,0,\tau)} \partial_t h(y,\tau)\,|\varphi(y,\zeta(s;y,0,\tau),s)|\,ds\,dy\,d\tau.\end{aligned}$$

Revenant aux variables de départ, on voit que $\mathcal{I}_1$ est borné par $\|l^s\|_{L^\infty(\mathcal{D}_T^+)}\,\|\varphi\|_{L^1(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))}$. En utilisant maintenant le changement de variables $(x,\xi,t) = (y,\zeta(s;y,\eta,0),s)$, le second terme se réécrit

$$\mathcal{I}_2 = \int_\Omega\int_{I\!R_+}\int_0^{\tau_s(y,\eta,0)} v^0(y,\eta)\,\varphi(y,\zeta(s;y,\eta,0),s)\,ds\,d\eta\,dy$$

pour lequel on obtient la borne $\mathcal{I}_2 \le \|v^0\|_{L^\infty(\Omega\times I\!R_+^*)}\,\|\varphi\|_{L^1(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))}$. Enfin, en utilisant le changement de variables $(x,\xi,t,s) = (y,\zeta(t';y,\eta,s'),t',s')$, on montre que $\mathcal{I}_3$ est borné par $T\,\|f\|_{L^\infty(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))}$ $\|\varphi\|_{L^1(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))}$. □

Lemme VI-4.7. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée. Alors $\mathcal{L}v_c = f$.*

Preuve. Soit $\mathcal{T} \in L^\infty(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))$ tel que, pour tout $(x_0,\xi_0,t_0) \in \Omega\times I\!R_+^*\times(0,T)$, il existe un voisinage V de (x_0,ξ_0,t_0) dans $\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T)$ et $s \in (0,T)$ tel que $\zeta(s;x,\xi,t) > 0$ et $\mathcal{T}(x,\zeta(s;x,\xi,t),s) = \mathcal{T}(x,\xi,t)$ pour tout $(x,\xi,t) \in V$. Montrons alors que $\mathcal{L}\mathcal{T} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))$ et donc dans $L^\infty(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))$. Soit φ une fonction test dans $C_c^\infty(V)$. On a

$$\int_V \mathcal{T}(x,\xi,t)\,(\mathcal{L}\varphi)(x,\xi,t)\,dx\,d\xi\,dt = \int_V \mathcal{T}(x,\zeta(s;x,\xi,t),s)\,(\mathcal{L}\varphi)(x,\xi,t)\,dx\,d\xi\,dt.$$

En considérant le changement de variables $(x',\xi',t') = (x,\zeta(s;x,\xi,t),t)$ transformant V en V' et la fonction ϕ telle que $\phi(x',\xi',t') = \varphi(x,\xi,t)$ sur V', on obtient

$$\int_V \mathcal{T}(x,\xi,t)\,(\mathcal{L}\varphi)(x,\xi,t)\,dx\,d\xi\,dt = \int_{V'} \mathcal{T}(x',\xi',s)\,\partial_{t'}\phi(x',\xi',t')\,dx'\,d\xi'\,dt' = 0.$$

Pour conclure que $\mathcal{L}\mathcal{T} = 0$, il suffit ensuite de considérer la fonction test $\psi \in C_c^\infty(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))$, un recouvrement fini de $\mathrm{Supp}(\psi)$ satisfaisant la propriété ci-dessus et une partition de l'unité sur ce recouvrement.

La propriété ci-dessus est clairement satisfaite pour les fonctions τ_e, $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ avec

$$\mathcal{T}_1(x,\xi,t) = l^s(x,\tau_e(x,\xi,t))\,\chi_{\{(x,\xi,t)\in\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T)\,|\,(x,\tau_e(x,\xi,t))\in\mathcal{D}_T^+\}}$$

et

$$\mathcal{T}_2(x,\xi,t) = v^0(x,\zeta(0;x,\xi,t))\,\chi_{\{(x,\xi,t)\in\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T)\,|\,\tau_e(x,\xi,t)=0\}}$$

sur $\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T)$. On en déduit que $\mathcal{L}(\tau_e) = \mathcal{L}\mathcal{T}_1 = \mathcal{L}\mathcal{T}_2 = 0$ et $\mathcal{L}\mathcal{T}_3 = f$ avec $\mathcal{T}_3$ la fonction définie par $\mathcal{T}_3(x,\xi,t) = \int_{\tau_e(x,\xi,t)}^t f(x,\zeta(s;x,\xi,t),s)\,ds$, ce qui prouve finalement que $\mathcal{L}v_c = \mathcal{L}\mathcal{T}_1 + \mathcal{L}\mathcal{T}_2 + \mathcal{L}\mathcal{T}_3 = f$. □

Afin de montrer la formule d'intégration par parties (VI.52), nous avons besoin du lemme suivant, qui est une application directe de la version *up-to-the boundary* du Lemme de Friedrichs énoncée dans [7] (Corollary 3.2 p. 882).

Lemme VI-4.8. *L'espace de fonctions $C_c^\infty(\bar\Omega \times \mathbb{R}_+ \times [0,T])$ est dense dans l'espace de Hilbert*

$$W_{\mathcal{L}}(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T)) = \{v \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T)) \text{ tel que } \mathcal{L}v \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))\}$$

muni de la norme $\|v\|_{W_{\mathcal{L}}(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times(0,T))} = \|v\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times(0,T))} + \|\mathcal{L}v\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times(0,T))}$.

Soit $\mathbf{n} = (n_x, n_\xi, n_t)$ le vecteur unitaire normal à la frontière $\partial[\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T)]$ sortant de $\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T)$ et défini presque partout. Il résulte du Lemme VI-4.8 que l'on peut prolonger l'opérateur de trace continu $\gamma_{\mathcal{L}}$ de $W_{\mathcal{L}}(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))$ dans $L^2[\Omega; H^{-1/2}(\partial[\mathbb{R}_+^* \times (0,T)])]$ tel que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\bar\Omega \times \mathbb{R}_+ \times [0,T])$, $\gamma_{\mathcal{L}}\varphi = \varphi(n_t + \partial_t h\, n_\xi)|_{\Omega\times\partial[\mathbb{R}_+^*\times(0,T)]}$, et vérifiant

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T \phi(x,\xi,t)\, \mathcal{L}v(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx + \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T v(x,\xi,t)\, \mathcal{L}\phi(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx \\ = \int_\Omega \int_{\partial[\mathbb{R}_+^*\times(0,T)]} \phi(x,\xi,t)\, \gamma_{\mathcal{L}} v(x,\xi,t) d\sigma\, dx\end{aligned} \tag{VI.90}$$

pour tout $\phi \in L^2[\Omega; H^1(\mathbb{R}_+^* \times (0,T))]$, avec l'intégrale sur $\Omega \times \partial[\mathbb{R}_+^* \times (0,T)]$ prise au sens du produit de dualité.

Le lemme suivant établi que (VI.52) est satisfaite par toute fonction $v \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))$ telle que $\mathcal{L}v \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))$, ce qui est le cas en particulier pour $v = v_c$ d'après les Lemmes VI-4.6 et VI-4.7.

Lemme VI-4.9. *Pour toute fonction $v \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))$ telle que $\mathcal{L}v \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))$, la trace $\gamma_{\mathcal{L}}v$ appartient à $L^\infty(\Omega \times \partial[\mathbb{R}_+^* \times (0,T)])$ et vérifie*

$$\|\gamma_{\mathcal{L}}v\|_{L^\infty(\Omega\times\partial[\mathbb{R}_+^*\times(0,T)])} \leq C\left(\|v\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times(0,T))} + \|\mathcal{L}v\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}_+^*\times(0,T))}\right)$$

avec C independant de v. Cette trace est notée $v_c(.,0,.)\partial_t h$ en $\xi = 0$, $v_c(.,.,0)$ en $t = 0$, $v_c(.,.,T)$ en $t = T$, et on a la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^T \Big((\mathcal{L}\phi)(x,\xi,t)\, v(x,\xi,t) + (\mathcal{L}v)(x,\xi,t)\, \phi(x,\xi,t)\Big)\, dt\, d\xi\, dx \\ + \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} \Big(v(x,\xi,0)\, \phi(x,\xi,0) - v(x,\xi,T)\, \phi(x,\xi,T)\Big)\, d\xi\, dx \\ + \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\, v(x,0,t)\, \phi(x,0,t)\, dt\, dx = 0\end{aligned} \tag{VI.91}$$

pour tout $\phi \in L^1[\Omega; W^{1,1}(\mathbb{R}_+^* \times (0,T))]$.

Preuve. Comme v et $\mathcal{L}v$ appartiennent à $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times (0,T))$, (VI.90) est vraie pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+2})$.

L'espace $C_c^\infty(\bar\Omega \times \mathbb{R}_+ \times [0,T])$ est dense dans $L^1[\Omega; W^{1,1}(\mathbb{R}_+^* \times (0,T))]$ et l'opérateur de trace de $L^1[\Omega; W^{1,1}(\mathbb{R}_+^* \times (0,T))]$ dans $L^1(\Omega \times \partial[\mathbb{R}_+^* \times (0,T)])$ est surjectif. Il en résulte que l'ensemble des traces de $C_c^\infty(\bar\Omega \times I\!R_+ \times [0,T])$ dans $\Omega \times \partial[I\!R_+^* \times (0,T)]$ définit un espace dense dans $L^1(\Omega \times \partial[I\!R_+^* \times (0,T)])$ noté $C_c^\infty(\bar\Omega \times \partial[I\!R_+^* \times (0,T)])$.

Pour toute fonction θ de $C_c^\infty(\bar\Omega \times \partial[I\!R_+^* \times (0,T)])$, on peut construire un relèvement $\phi \in L^2[\Omega; H^1(I\!R_+^* \times (0,T))]$ à support compact telle que

$$\|\phi\|_{L^1[\Omega;W^{1,1}(I\!R_+^*\times(0,T))]} \leq C\|\theta\|_{L^1(\Omega\times\partial[I\!R_+^*\times(0,T)])}$$

avec C independant de θ. Ainsi, on a

$$\int_\Omega \int_{\partial[I\!R_+^*\times(0,T)]} \theta\, \gamma_{\mathcal{L}} v d\sigma\, dx \leq C \left(\|v\|_{L^\infty(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))} + \|\mathcal{L}v\|_{L^\infty(\Omega\times I\!R_+^*\times(0,T))}\right) \|\theta\|_{L^1(\Omega\times\partial[I\!R_+^*\times(0,T)])}$$

pour tout $\theta \in C_c^\infty(\bar\Omega \times \partial[I\!R_+^* \times (0,T)])$. On conclut par densité que $\gamma_{\mathcal{L}} v$ appartient à $L^\infty(\Omega \times \partial[I\!R_+^* \times (0,T)])$. La formule d'intégration par parties résulte alors de (VI.90) et de la densité de $C_c^\infty(\bar\Omega \times I\!R_+ \times [0,T])$ dans $L^1[\Omega; W^{1,1}(I\!R_+^* \times (0,T))]$. □

Nous allons maintenant utiliser la partition de l'unité pour montrer que v_c est une solution faible, c'est-à-dire que $v_c(.,0,.)\partial_t h = l^s$ sur $\mathcal{D}_T^+$ et $v_c(.,.,0) = v^0$.

Lemme VI-4.10. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée. Alors v_c est une solution faible de (VI.50).*

Preuve. Considérons une fonction φ dans $C_c^\infty(I\!R^{d+2})$ telle que $\varphi(.,0,.) = 0$ sur $\Omega \times (0,T) \setminus \mathcal{D}_T^+$ et $\varphi(.,.,T) = 0$ sur $\Omega \times I\!R_+^*$. Par construction des ensembles V_0 et $V_{\mathcal{D}^+}$, si on suppose les données f, v^0 et l^s régulières, la fonction v_c est régulière sur les ensembles $V_0 \cap \bar\Omega \times I\!R_+ \times [0,T]$ et $V_{\mathcal{D}^+} \cap \bar\Omega \times I\!R_+ \times [0,T]$. Par suite, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \Big(\mathcal{L}(\varphi\,\omega_0^\delta)(x,\xi,t)\, v_c(x,\xi,t) + f(x,\xi,t)\,(\varphi\,\omega_0^\delta)(x,\xi,t)\Big)\, dt\, d\xi\, dx \\ + \int_\Omega \int_{I\!R_+} v^0(x,\xi)\,(\varphi\,\omega_0^\delta)(x,\xi,0)\, d\xi\, dx = 0\end{aligned} \tag{VI.92}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \Big(\mathcal{L}(\varphi\,\omega_{\mathcal{D}^+}^\delta)(x,\xi,t)\, v_c(x,\xi,t) + f(x,\xi,t)\,(\varphi\,\omega_{\mathcal{D}^+}^\delta)(x,\xi,t)\Big)\, dt\, d\xi\, dx \\ + \int_\Omega \int_0^T \partial_t h(x,t)\, l^s(x,t)\,(\varphi\,\omega_{\mathcal{D}^+}^\delta)(x,0,t)\, dt\, dx = 0.\end{aligned} \tag{VI.93}$$

D'après le Lemme VI-4.6, v_c est une fonction linéaire continue de f, v^0 et l^s pour les normes L^∞. On en déduit que (VI.92) et (VI.93) s'étendent par continuité et densité aux données f, v^0 et l^s dans L^∞.

Par définition de φ et en utilisant (VI.91), on a

$$\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \Big(\mathcal{L}(\varphi\,(\omega_{\mathcal{D}^-}^\delta + \omega_T^\delta))(x,\xi,t)\, v_c(x,\xi,t) + f\,\varphi\,(\omega_{\mathcal{D}^-}^\delta + \omega_T^\delta)(x,\xi,t)\Big)\, dt\, d\xi\, dx = 0. \tag{VI.94}$$

L'égalité

$$\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \Big(\mathcal{L}(\varphi\,(\omega_{\mathcal{D}^0}^\delta + \omega_c^\delta))(x,\xi,t)\, v_c(x,\xi,t) + f\,\varphi\,(\omega_{\mathcal{D}^0}^\delta + \omega_c^\delta)(x,\xi,t)\Big)\, dt\, d\xi\, dx = 0 \tag{VI.95}$$

est clairement satisfaite pour toute fonction régulière. D'après le Lemme VI-4.8 et comme les fonctions v_c et $\mathcal{L}\, v_c$ sont dans $L^\infty(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$ et φ est à support compact, (VI.95) s'étend immédiatement à v_c par densité.

Enfin, d'après les propriétés (VI.88) vérifiées par la fonction ω_S^δ, on a

$$\left|\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \Big(\mathcal{L}(\varphi\, \omega_S^\delta)(x,\xi,t)\, v_c(x,\xi,t) + f(x,\xi,t)\, (\varphi\, \omega_S^\delta)(x,\xi,t)\Big)\, dt\, d\xi\, dx\right| \leq C(\varphi, v_c)\, \delta, \quad \text{(VI.96)}$$

avec $C(\varphi, v_c)$ ne dépendant que de φ et v_c. En passant à la limite $\delta \to 0$, on voit que v_c est bien une solution faible. □

Le lemme suivant établit que v_c est l'unique solution faible de (VI.50). La démonstration utilise à nouveau la partition de l'unité.

Lemme VI-4.11. *Supposons l'Hypothèse VI-1.1 vérifiée. Alors v_c est l'unique solution faible de (VI.50).*

Preuve. Soit u une solution faible de (VI.50) avec $f = v^0 = l^s = 0$. Alors, au sens des distributions, $\mathcal{L}u = 0$ sur $\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T)$, et la trace $\gamma_{\mathcal{L}} u$ (dans $L^\infty(\Omega \times \partial[I\!R_+^* \times (0,T)])$ d'après le Lemme VI-4.9) s'annule sur $\mathcal{D}_T^+ \cup \Omega \times I\!R_+^* \times \{t = 0\}$. Sur les ensembles $V_0 \cap \Omega \times I\!R_+^* \times [0,T)$ et $V_{\mathcal{D}^+} \cap \Omega \times I\!R_+ \times (0,T)$, l'équation $\mathcal{L}u = 0$ peut être intégrée le long des caractéristiques en utilisant les conditions aux bords, ce qui conduit à $u = 0$ sur ces ensembles. Pour toute fonction ψ dans $C_c^\infty(I\!R^{d+2})$, on considère la fonction à support compact

$$w(x,\xi,t) = \int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \int_{\tau_s(x,\xi,t)}^t \psi(x, \zeta(s;x,\xi,t), s)\, ds\, dt\, d\xi\, dx \quad \text{(VI.97)}$$

qui est, d'après les résultats précédents appliqués au problème adjoint, une solution faible de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mathcal{L}w = \psi & \text{sur } \Omega \times I\!R_+^* \times (0,T), \\ w|_{\xi=0} = 0 & \text{sur } \mathcal{D}_T^-, \\ w|_{t=T} = 0 & \text{sur } \Omega \times I\!R_+^*. \end{array}\right. \quad \text{(VI.98)}$$

Comme $u = 0$ sur $(V_0 \cup V_{\mathcal{D}^+}) \cap \Omega \times I\!R_+ \times [0,T]$, on a clairement

$$\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \mathcal{L}[uw(\omega_{\mathcal{D}^+}^\delta + \omega_0^\delta)](x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx = 0.$$

Soit ρ une fonction de $C_c^\infty(I\!R^{d+2})$ telle que $\rho = 1$ sur le support compact de w. Comme $\rho\, u$ appartient à $W_{\mathcal{L}}(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$ et comme w est régulière sur $(V_T \cup V_{\mathcal{D}^-}) \cap \bar{\Omega} \times I\!R_+ \times [0,T]$, l'équation (VI.90) appliquée à $v = \rho\, u$ et $\phi = w(\omega_{\mathcal{D}^-}^\delta + \omega_T^\delta)$ donne

$$\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \mathcal{L}[uw(\omega_{\mathcal{D}^-}^\delta + \omega_T^\delta)](x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx = 0.$$

De même, comme $(u\, w)$ appartient à $W_{\mathcal{L}}(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$, on conclut par densité des fonctions régulières dans $W_{\mathcal{L}}(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$ que

$$\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \mathcal{L}[uw(\omega_{\mathcal{D}^0}^\delta + \omega_c^\delta)](x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx = 0.$$

Enfin, comme précédemment,

$$\left| \int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \mathcal{L}[uw\, \omega_S^\delta](x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx \right| \leq C(u,w)\, \delta,$$

et, en passant à la limite $\delta \to 0$, on obtient

$$\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \mathcal{L}(uw)(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx = -\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \psi(x,\xi,t)\, u(x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx = 0$$

pour tout $\psi \in C_c^\infty(I\!R^{d+2})$, ce qui termine la démonstration. □

Démonstration de la formule d'intégration par parties (VI.54)

D'après le Lemme VI-4.11, les solutions v et w des problèmes direct et adjoint (VI.50) et (VI.53) sont définies par leurs solutions caractéristiques, et w est à support compact sur $\bar{\Omega} \times I\!R_+ \times [0,T]$. D'après les Lemmes VI-4.6 et VI-4.9, les fonctions v et w et leurs traces dépendent continûment des données f, v^0, l^s, r, q^s, et w^T pour les normes L^∞, si bien qu'il suffit de montrer la formule d'intégration par parties (VI.54) en supposant les données régulières.

Soit ρ une fonction de $C_c^\infty(I\!R^{d+2})$ telle que $\rho = 1$ sur le support compact de w. Sur les ensembles $V_0 \cap \bar{\Omega} \times I\!R_+ \times [0,T]$ et $V_{\mathcal{D}^+} \cap \bar{\Omega} \times I\!R_+ \times [0,T]$, la solution v est régulière et on peut donc appliquer la formule d'intégration par parties (VI.52) à w et $\varphi = v\,(\omega_{\mathcal{D}^+}^\delta + \omega_0^\delta)\,\rho$. De même, sur les ensembles $V_T \cap \bar{\Omega} \times I\!R_+ \times [0,T]$ et $V_{\mathcal{D}^-} \cap \bar{\Omega} \times I\!R_+ \times [0,T]$, la solution w est régulière et on peut appliquer la formule d'intégration par parties (VI.52) à v et $\varphi = w\,(\omega_{\mathcal{D}^-}^\delta + \omega_T^\delta)$. Comme $(v\,w)$ appartient à l'espace de fonctions $W_{\mathcal{L}}(\Omega \times I\!R_+^* \times (0,T))$, il résulte du Lemme de densité VI-4.8 que

$$\int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \mathcal{L}[vw(\omega_{\mathcal{D}^0}^\delta + \omega_c^\delta)](x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx = 0.$$

L'estimation

$$\left| \int_\Omega \int_{I\!R_+} \int_0^T \mathcal{L}[vw\, \omega_S^\delta](x,\xi,t)\, dt\, d\xi\, dx \right| \leq C(v,w)\, \delta,$$

et le passage à la limite $\delta \to 0$ permettent de conclure.

VI-4.4 Preuve du Lemme VI-4.3

Pour démontrer le Lemme VI-4.3, nous allons utiliser le résultat suivant, qui se montre en utilisant la version *up-to-the boundary* du lemme de Friedrichs énoncée dans [7] (Corollary 3.2 p. 882).

Lemme VI-4.12. *L'espace de fonctions $C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,T])$ est dense dans l'espace de Hilbert*

$$W_h(\Omega \times (0,T)) = \left\{ v \in L^2(\Omega \times (0,T)) \text{ tel que } \nabla h \cdot \nabla v \in L^2(\Omega \times (0,T)) \right\}$$

muni de la norme $\|v\|_{W_h(\Omega \times (0,T))} = \|v\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} + \|\nabla h \cdot \nabla v\|_{L^2(\Omega \times (0,T))}$.

Il résulte du Lemme VI-4.12 que l'on peut prolonger l'opérateur de trace continu γ_h de $W_h(\Omega\times(0,T))$ sur $L^2[(0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega)]$ tel que $\gamma_h\varphi = \varphi\nabla h\cdot n_x|_{\partial\Omega\times(0,T)}$ pour tout $\varphi\in C^\infty(\bar\Omega\times[0,T])$, et

$$\int_\Omega\int_0^T \operatorname{div}(\phi\, v\,\nabla h)\,dt\,dx = \int_0^T\int_{\partial\Omega}\phi\,\gamma_h v\,dtd\sigma \tag{VI.99}$$

pour tout $\phi\in L^2[(0,T);H^1(\Omega)]$, avec l'intégrale sur la frontière $\partial\Omega\times(0,T)$ prise au sens du produit de dualité.

Comme dans le paragraphe précédent, on peut montrer le lemme suivant.

Lemme VI-4.13. *Pour toute fonction $v\in L^\infty(\Omega\times(0,T))$ telle que $\nabla h\cdot\nabla v\in L^\infty(\Omega\times(0,T))$, la trace $\gamma_h v$ est dans $L^\infty(\partial\Omega\times(0,T))$ et on a*

$$\int_\Omega\int_0^T \operatorname{div}(\phi\, v\,\nabla h)\,dt\,dx = \int_0^T\int_{\partial\Omega}\phi\,\gamma_h v\,dtd\sigma \tag{VI.100}$$

pour tout $\phi\in L^1[(0,T);W^{1,1}(\Omega)]$.

D'après (VI.56) et le Lemme VI-4.13, la trace $\gamma_h\, d_i^s$ est dans $L^\infty(\partial\Omega\times(0,T))$. De plus, en utilisant (VI.55) et le Lemme VI-4.13, on voit que $\gamma_h\, d_i^s$ s'annule sur Σ_T^+. Les mêmes remarques s'appliquent à la trace $\gamma_h\, q_i^s$ sur Σ_T^-. Comme $\nabla h\cdot n_x>0$ sur Σ_T^+ et $\nabla h\cdot n_x<0$ sur Σ_T^-, on en déduit que la trace de d_i^s s'annule sur Σ_T^+ et que celle de q_i^s s'annule sur Σ_T^-.

D'après les équations (VI.59) et (VI.56), les fonctions $q_i^s\, d_i^s$ et $\nabla h\cdot\nabla(q_i^s\, d_i^s)$ appartiennent à $L^\infty(\Omega\times(0,T))$. Par suite, la trace $\gamma_h(q_i^s\, d_i^s)$ est dans $L^\infty(\partial\Omega\times(0,T))$. Pour prouver le Lemme VI-4.3, nous avons besoin de montrer que $\gamma_h(q_i^s\, d_i^s)=0$. La preuve se fait comme dans le paragraphe VI-4.3 en utilisant un recouvrement du domaine $\bar\Omega\times[0,T]$ construit à partir des trajectoires du champ de vecteur ∇h et une partition de l'unité. Pour travailler loin de l'ensemble $Z=\partial\Sigma_T^+\cup\partial\Sigma_T^-\cup\partial\Omega\times\{t=0,T\}$, on utilise à nouveau l'astuce donnée dans [5] et l'Hypothèse VI-1.1.

Soit ω un voisinage ouvert de $\bar\Omega$ et $\bar h$ une fonction C^2 prolongeant h sur $\omega\times[0,T]$. On définit pour tout $(x,t)\in\omega\times(0,T)$ les trajectoires $X(\tau;x,t)$ du champ de vecteur $\nabla\bar h$ comme les solutions maximales dans ω de

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial\tau}(\tau;x,t) &= \nabla\bar h(X(\tau;x,t),t),\\ X(0;x,t) &= x.\end{aligned}\right. \tag{VI.101}$$

Comme $\nabla h\cdot n_x>0$ sur Σ_T^+, pour tout $a\in\Sigma_T^+$, il existe un voisinage ouvert v_a de a dans Σ_T^+ et $1>\epsilon_a>0$ tels que l'ensemble

$$\mathcal{V}_a = \{(X(\tau;x,t),t)\,|\,(x,t)\in v_a,\ \tau\in(-\epsilon_a,\epsilon_a)\}$$

vérifie

(i) $\mathcal{V}_a$ est un voisinage ouvert de a dans $\omega\times(0,T)$,

(ii) le changement de variables $(x'=X(\tau;x,t), t'=t)$ définit un difféomorphisme C^1 de $v_a\times(-\epsilon_a,\epsilon_a)$ dans $\mathcal{V}_a$.

Par suite, l'ensemble

$$W_+ = \bigcup_{a \in \Sigma_T^+} \mathcal{V}_a$$

est un voisinage ouvert de Σ_T^+ dans $\omega \times (0, T)$. Soit W_- le voisinage ouvert de Σ_T^- dans $\omega \times (0, T)$ construit par le même procédé.

Soit Σ_T^0 l'intérieur de l'ensemble $\{(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \,|\, g(x,t) = 0\}$ dans $\partial\Omega \times (0,T)$. D'après la régularité de la frontière de Ω, on peut définir un voisinage W_0 de Σ_T^0 dans $\omega \times (0,T)$ tel que $W_0 \cap (\bar{\Sigma}_T^+ \cup \bar{\Sigma}_T^-) = \emptyset$.

Pour tout $(x,t) \in I\!R^{d+1}$, soit $d_Z(x,t)$ la distance entre le point (x,t) et l'ensemble $Z = \partial\Sigma_T^+ \cup \partial\Sigma_T^- \cup \partial\Omega \times \{t = 0, T\}$, et soit W_Z^δ l'ensemble

$$W_Z^\delta = \{(x,t) \in I\!R^{d+1} \,|\, d_Z(x,t) < 3\delta\}.$$

Il existe un ensemble ouvert W_c^δ tel que

$$\Big(W_+, W_-, W_0, W_Z^\delta, W_c^\delta\Big)$$

définisse un recouvrement de $I\!R^{d+1}$ avec $\partial\Omega \times [0,T] \cap W_c^\delta = \emptyset$. Une partition de l'unité est construite sur ce recouvrement, notée

$$\Big(\theta_+^\delta, \theta_-^\delta, \theta_0^\delta, \theta_Z^\delta, \theta_c^\delta\Big).$$

D'après l'Hypothèse VI-1.1, l'ensemble Z est l'union d'un nombre fini de variétés de dimension au plus $d-1$. Par suite, d'après [5], la fonction θ_Z^δ peut être choisie telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_Z^\delta(x,t) = 1 \text{ si } d_Z(x,t) < \delta, \\ \theta_Z^\delta(x,t) = 0 \text{ si } d_Z(x,t) > 2\delta, \\ \text{Mesure } \Big(\text{ Supp } (\theta_Z^\delta) \cap \{(x,t), |(x,t)| \le R\}\Big) \le C(R)\delta^2, \\ |||\nabla \theta_Z^\delta|||_{L^\infty} \le \frac{C}{\delta}. \end{array} \right. \tag{VI.102}$$

Considérons le changement de variables $(x = X(\tau; x', t'), t = t')$ de $\bigcup_{a \in \Sigma_T^+} v_a \times (-\epsilon_a, \epsilon_a)$ dans W_+, et notons $\bar{d}_i^s$, $\bar{\beta}$ les fonctions telle que $\bar{d}_i^s(x', t', \tau) = d_i^s(X(\tau; x', t'), t')$ et $\bar{\beta}(x', t', \tau) = \beta(X(\tau; x', t'), t')$ avec $\beta = (v_i|_{\xi=0} - d_i^s)\, \partial_t h$. Alors la fonction $\bar{d}_i^s$ satisfait l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial \tau} \bar{d}_i^s(x', t', \tau) = \bar{\beta}(x', t', \tau), \\ \bar{d}_i^s(x', t', 0) = 0, \end{array} \right.$$

ce qui conduit à

$$\bar{d}_i^s(x', t', \tau) = \int_0^\tau \bar{\beta}(x', t', s)\, ds, \tag{VI.103}$$

et

$$\int_{W_+} d_i^s(x,t)\, \phi(x,t)\, dx\, dt \le \|\beta\|_{L^\infty(W_+ \cap \Omega \times (0,T))} \|\phi\|_{L^1(W_+)} \tag{VI.104}$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(W_+)$.

Supposons dans un premier temps que β est dans $C_c^\infty(\Omega \times (0,T))$. Il résulte alors de (VI.103) que la fonction d_i^s est régulière sur $W_+ \cap \bar{\Omega} \times (0,T)$, et on peut donc appliquer (VI.99) à $\phi = \theta_+^\delta\, d_i^s$ et $v = q_i^s$:

$$\int_\Omega \int_0^T \operatorname{div}(\theta_+^\delta\, d_i^s\, q_i^s\, \nabla h)\, dt\, dx = 0. \tag{VI.105}$$

D'après (VI.104), l'égalité (VI.105) reste valable par continuité et densité pour $\beta \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$, et donc pour la fonction d_i^s de départ.

Les mêmes arguments appliqués à q_i^s et W_- donnent

$$\int_\Omega \int_0^T \operatorname{div}(\theta_-^\delta\, d_i^s\, q_i^s\, \nabla h)\, dt\, dx = 0. \tag{VI.106}$$

Comme la fonction $q_i^s\, d_i^s$ appartient à $W_h(\Omega\times(0,T))$, on obtient par densité à partir du Lemme VI-4.12

$$\int_\Omega \int_0^T \operatorname{div}[(\theta_0^\delta + \theta_c^\delta)\, d_i^s\, q_i^s\, \nabla h]\, dt\, dx = 0. \tag{VI.107}$$

Enfin, d'après les propriétés (VI.102) vérifiées par la fonction θ_Z^δ, on voit clairement que

$$\left| \int_\Omega \int_0^T \operatorname{div}(\theta_Z^\delta\, d_i^s\, q_i^s\, \nabla h)\, dt\, dx \right| \leq C(h, d_i^s, q_i^s)\, \delta. \tag{VI.108}$$

Le passage à la limite $\delta \to 0$ dans les équations (VI.105), (VI.106), (VI.107) et (VI.108) permet de conclure.