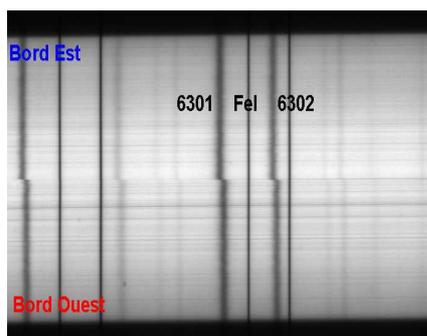


Stages et projets expérimentaux de 3ème année de licence (L3)
Initiation à la Physique du Soleil,
diagnostics spectroscopiques et polarimétriques, effets Doppler et Zeeman

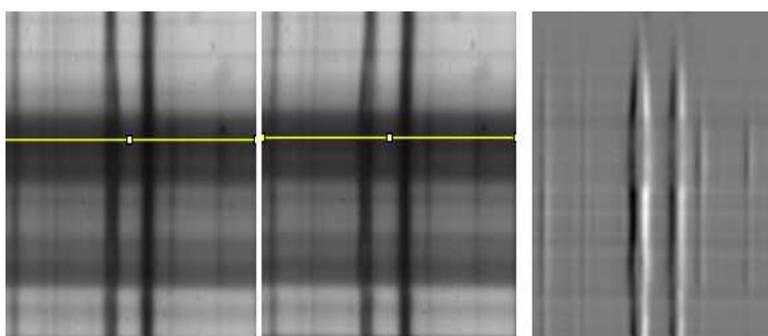


Jean-Marie.Malherbe@obspm.fr
Observatoire de Paris-Meudon
15 Novembre 2014

Chapitre 1: rayonnement continu, fonction de Planck	
<i>Cours</i>	2
<i>TP et expériences</i>	3
Chapitre 2: Equilibre thermodynamique et formation des raies spectrales, élargissement Doppler, décalage Doppler	
<i>Cours</i>	7
<i>TP et expériences</i>	16
Chapitre 3: Introduction au transfert de rayonnement dans une atmosphère	
<i>Cours</i>	19
<i>TP et expériences</i>	28
Chapitre 4: Optique de polarisation et ses applications	
<i>Cours</i>	29
<i>TP et expériences</i>	48
Chapitre 5: Processus de diffusion de la lumière et polarisation associée	
<i>Cours</i>	57
<i>TP et expériences</i>	53
Chapitre 6: L'effet Zeeman et la mesure des champs magnétiques à distance	
<i>Cours</i>	60
<i>TP et expériences</i>	68
Annexe: Le grand spectrographe de 14 m de la Tour Solaire	
69	



Effet Doppler (rotation solaire)



Raies en polarisation circ. droite et gauche et signal Zeeman

Chapitre 1

Rayonnement continu et fonction de Planck

1 - Fonction de Planck du corps noir : densité de rayonnement et intensité

Paradoxalement, le spectre continu (donc en négligeant les raies spectrales) du soleil et des étoiles est proche d'un spectre de corps noir (objet idéal de température T uniforme et constante en équilibre thermodynamique complet sans échange avec l'extérieur). Le spectre de corps noir fournit une bonne approximation de la température de surface (dite effective) des étoiles. La densité spectrale volumique d'énergie du corps noir est :

$$E_v = (8 \pi h v^3 / C^3) / [\exp (h v / k T) - 1] \quad \text{en J m}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$$

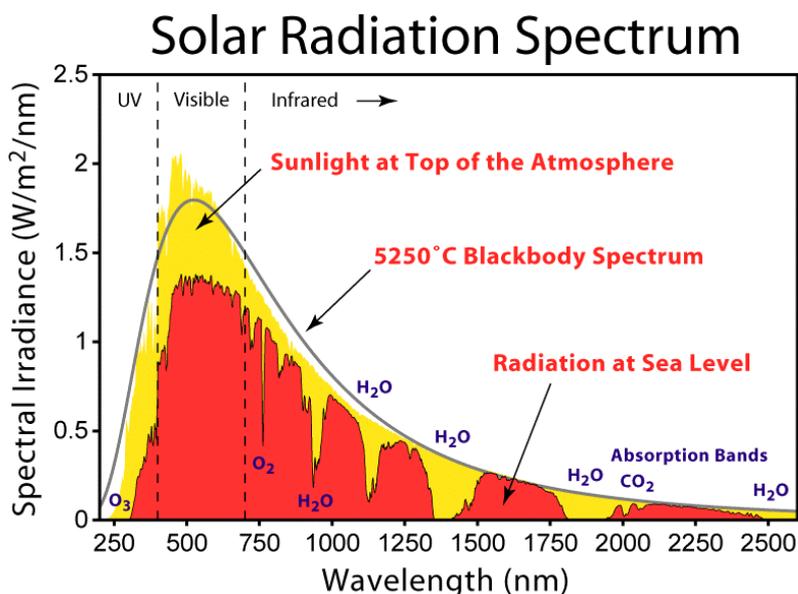
L'intensité spectrale du corps noir est :

$$B_v = E_v (C / 4\pi) = (2 h v^3 / C^2) / [\exp (h v / k T) - 1] \quad \text{en W st}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \quad (\text{st} = \text{stéradian})$$

De la relation $B_v dv = B_\lambda d\lambda$ avec $\lambda = C/v$, il vient $B_\lambda = B_v C/\lambda^2$ d'où :

$$B_\lambda = (2 h C^2 / \lambda^5) / [\exp (h C / \lambda k T) - 1]$$

L'intensité spectrale du corps noir pour T = 5750 K est représentée ci dessous avec en superposition l'intensité spectrale de rayonnement du soleil en fonction de la longueur d'onde.



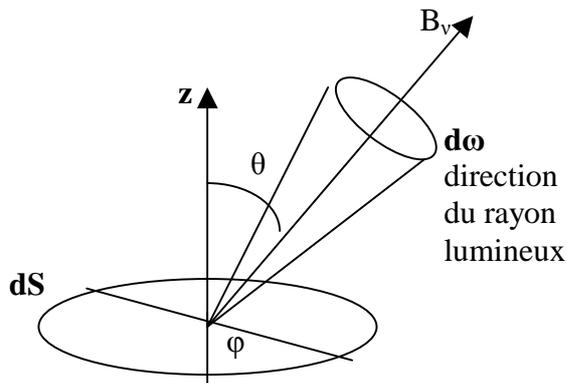
La densité spectrale d'énergie intégrée sur les fréquences donne :

$$E = \int_0^\infty E_v dv = a T^4 \quad \text{en J m}^{-3} \quad \text{avec } a = 8 \pi^5 k^4 / (15 C^3 h^3) = 7.56 \cdot 10^{-16} \text{ MKSA}$$

L'intensité spectrale du corps noir intégrée sur les fréquences vaut :

$$B = \int_0^\infty B_v dv = \sigma T^4 / \pi \quad \text{en W st}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

avec $\sigma = a C / 4 = 2 \pi^5 k^4 / (15 C^2 h^3) = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ **constante de Stefan**



Le flux d'énergie radiative traversant une surface dS sous l'angle θ est $F = \int B \cos\theta \, d\omega$ avec $d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ angle solide élémentaire tel que $0 < \theta < \pi/2$ et $0 < \varphi < 2\pi$.

$$F = \int B \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = B \int d\varphi \int \cos\theta \sin\theta \, d\theta = B 2\pi (1/2) = B \pi = \sigma T^4$$

La puissance en Watts rayonnée par 1 m² de corps noir est donc égale à $F = \sigma T^4$

On définit la température effective du soleil en exprimant l'égalité entre la puissance rayonnée L du soleil et celle du corps noir : $L = 3.86 \cdot 10^{26} \text{ W} = 4 \pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$
avec R rayon du soleil ; on en déduit pour le soleil $T_{\text{eff}} = 5750 \text{ K}$ environ

Loi de Wien

Le maximum λ_{max} de la fonction B_λ est obtenu en résolvant l'équation $dB_\lambda/d\lambda = 0$, équation qui n'a pas de solution analytique et donne numériquement:

$$h C / \lambda_{\text{max}} k T = 4.965 \quad (\text{ce nombre est solution de } e^x = (1 - x/5)^{-1})$$

ce qui donne $\lambda_{\text{max}} T = 2.9 \cdot 10^{-3}$ ou loi de Wien

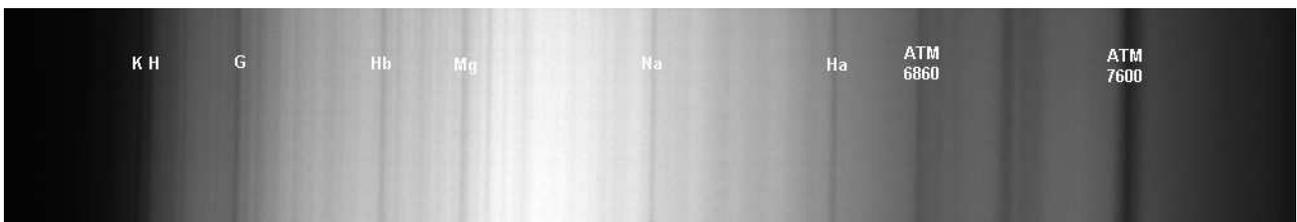
Le maximum de la fonction de Planck se décale vers le bleu lorsque T augmente. Pour le soleil, il se trouve à $\lambda_{\text{max}} = 5000 \text{ \AA}$ dans le vert.

Médiane $\lambda_{1/2}$ de la fonction B_λ : elle est telle que $\int_0^{\lambda_{1/2}} B_\lambda \, d\lambda = \int_{\lambda_{1/2}}^\infty B_\lambda \, d\lambda$

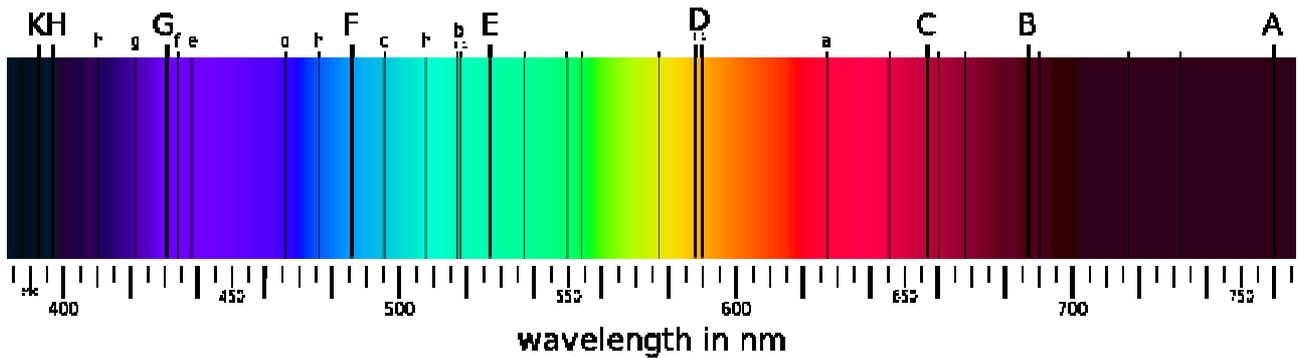
On trouve numériquement $\lambda_{1/2} = 1.42 \lambda_{\text{max}} = 7100 \text{ \AA}$ pour le soleil, ce qui veut dire que presque la moitié de l'énergie est rayonnée dans l'infra rouge.

2 - TP n°1: spectre solaire et température de corps noir du soleil

Il est possible à partir de la loi de Wien de déterminer une température de corps noir du soleil en identifiant la longueur d'onde λ_{max} du maximum d'émission en fonction de la longueur d'onde. Pour ce faire, enregistrer le spectre solaire en utilisant le matériel L3 (spectro ALPY + caméras CCD). On effectuera une coupe que l'on tracera en identifiant les raies larges.



spectre solaire obtenu à l'aide du spectro ALPY (les raies larges sont identifiées)

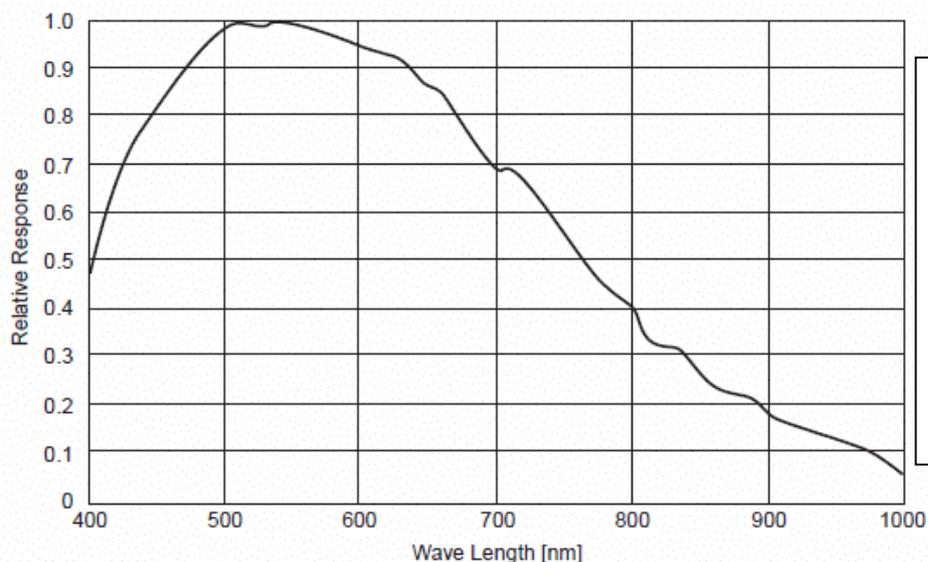


Les principales raies (les plus larges, dites de Fraunhofer, leur découvreur) sont visibles:

- K Ca⁺ 393.4 nm
- H Ca⁺ 396.8 nm
- G molécule CH 430 nm
- F H β série de Balmer de l'Hydrogène 486.0 nm
- b Triplet du Magnésium 516.7, 517.3, 518.3 nm
- D Doublet du Sodium 589.0, 589.6 nm
- C H α série de Balmer de l'Hydrogène 656.3 nm
- G' H γ série de Balmer de l'Hydrogène 434.0 nm
- h H δ série de Balmer de l'Hydrogène 410.2 nm
- A ATM O₂ atmosphère de la Terre dans l'infra rouge (759.4 nm)
- B ATM O₂ atmosphère de la Terre dans le rouge (686.7 nm)
- E Fer 527.0 nm

Le spectro ALPY est composé d'un GRISM (réseau en transmission + prisme). Sa résolution est voisine de 1 nm (R=600). Pour ne pas perdre d'informations, il faut échantillonner le spectre à une fraction de sa résolution théorique, soit moins de 0.5 nm. **La dispersion est-elle constante ?**

En théorie, il faut corriger le spectre obtenu par la réponse spectrale du capteur (ci dessous) ainsi que par la transmission atmosphérique moyenne qui chute dans le bleu. En réalité, la transmission atmosphérique dépend des conditions d'observation et varie avec la hauteur du soleil. La réponse du spectro n'est pas non plus uniforme le long du spectre de 400 à 800 nm, nous ne la connaissons pas. Ces incertitudes expliquent la difficulté de cette expérience, pourtant simple en apparence... et la raison pour laquelle la variabilité du spectre solaire est étudiée de nos jours hors atmosphère.



Réponse spectrale du capteur CCD SONY ICX285 (caméra ATIK), maximale entre 510 et 540 nm de longueur d'onde (pixels de 6.45 microns, 20000 électrons de capacité maximale par pixel)

Spectral Response Curve

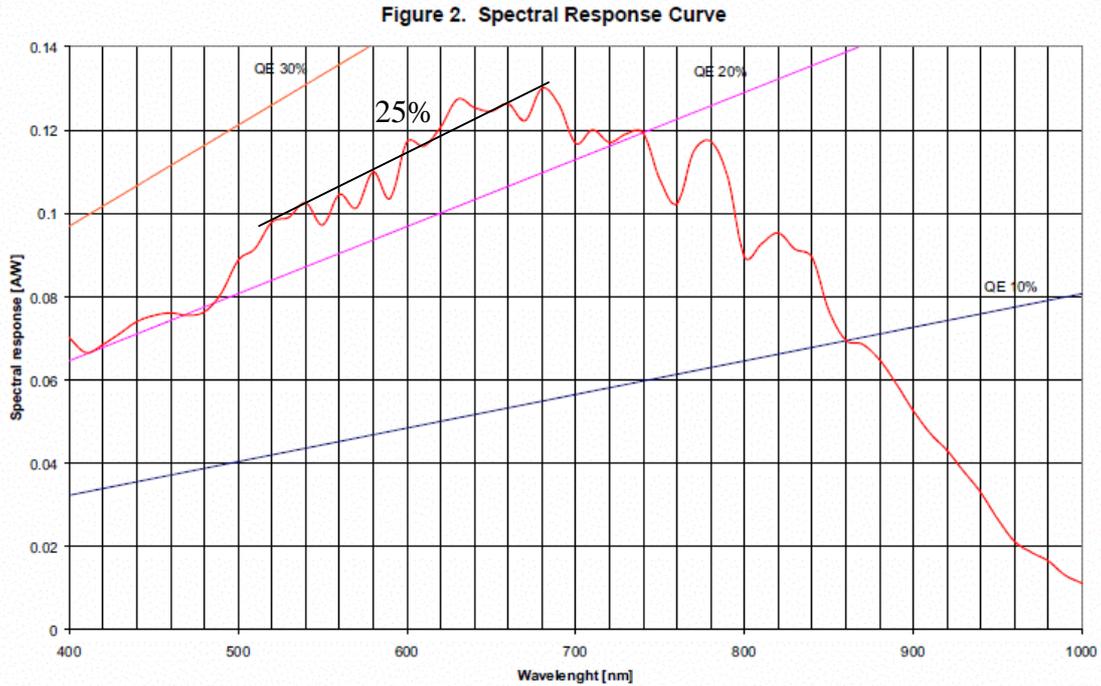
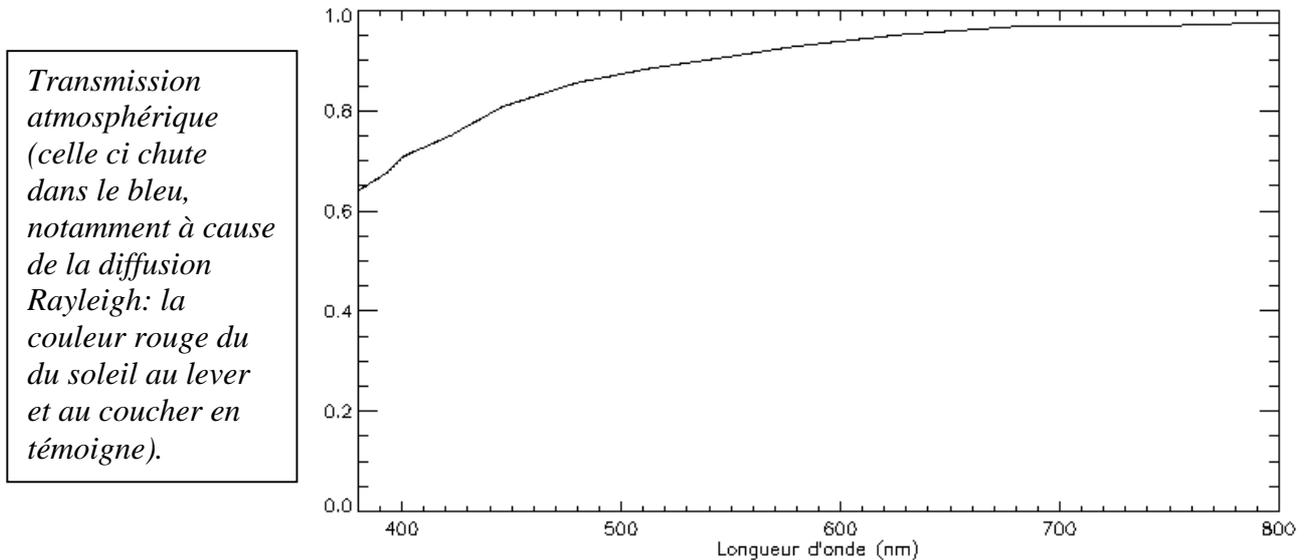


Figure 2 shows the characteristics of the spectral response. The curve is measured directly on the pixels. It includes the effects of nonsensitive areas in the pixel, for example, interconnection lines. The sensor is light sensitive between 400 and 1000 nm. The peak QE * FF is 25% approximately 650 nm. In view of a fill factor of 35%, the QE is close to 70% between 500 and 700 nm.

Réponse spectrale du capteur CMOS IBIS6600 (caméra PIXELINK), maximale de 520 à 680 nm de longueur d'onde (pixels de 3.5 microns, 20000 électrons de capacité maximale par pixel)



3 - TP n°2: différence de température des taches et des facules par rapport au soleil "calme"

La température effective du soleil est de $T_1 = 5750$ K, ou température du soleil "calme".

On peut supposer, en première approximation, que les taches (régions magnétisées plus froides) et les facules (régions également magnétisées plus chaudes) rayonnent selon des corps noirs à des températures différentes de celle du soleil "calme".

Sur une bande spectrale étroite centrée sur la longueur d'onde λ , le rapport R des intensités émises par deux corps noirs aux températures T_1 et T_2 est donné par:

$$R = \frac{[\exp(h C / \lambda k T_2) - 1]}{[\exp(h C / \lambda k T_1) - 1]}$$

En mesurant R, il est ainsi possible d'en déduire T_2 connaissant T_1 .

Il est recommandé de ne pas mesurer l'intensité émise par un point unique, mais de faire une moyenne sur une zone d'une dizaine de pixels au moins.

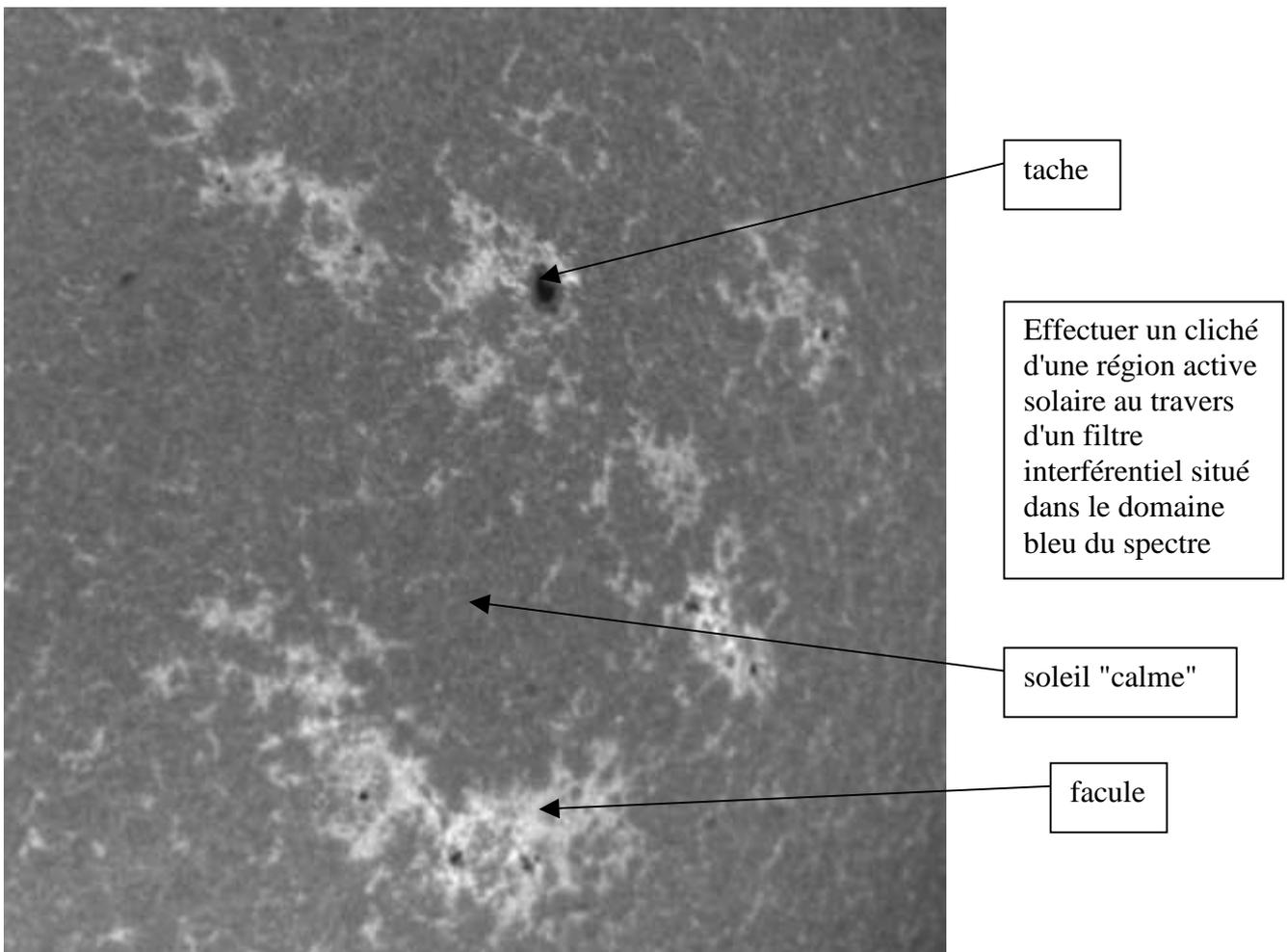
Modèle simplifié de tache

La loi de Bernouilli $\rho v^2/2 + \rho g z + P + B^2/2\mu_0 = \text{constante}$ le long d'une ligne fluide traduit la conservation de l'énergie (cinétique, potentielle de pesanteur, interne, magnétique).

v est la vitesse le long d'une ligne fluide, P la pression, B le champ magnétique, z l'altitude, g la gravité, ρ la masse volumique du gaz.

Si $v=0$, $z=0$, on obtient en première approximation $B^2/2\mu_0$ (dans la tache) = $P_{\text{extérieure}}$

Avec une pression extérieure de 1000 Pa, on obtient $B = 0.05$ T, valeur réaliste pour les champs magnétiques solaires concentrés.



Chapitre 2

Equilibre thermodynamique et formation des raies spectrales

1 - Le spectre des atomes hydrogénoïdes (transitions quantiques)

Un atome hydrogénoïde est composé d'un noyau de charge électrique $+Ze$ et d'un unique électron de charge $-e$. On peut citer par exemple l'hydrogène neutre HI, dont les raies sont caractéristiques de la chromosphère solaire (à 8000 K), et l'ion HeII, dans la transition chromosphère couronne (à 80000 K). En théorie classique, on considère que l'électron est en rotation autour du noyau à la vitesse angulaire ω et à la distance r du noyau, de telle sorte que : $m_e \omega^2 r = Z e^2 / (4 \pi \epsilon_0 r^2)$

Dans le modèle de Bohr, le moment cinétique orbital L de l'électron est quantifié par la loi:

$$L = n \hbar = m_e \omega r^2$$

Où $\hbar = h / 2\pi$ et où n est un nombre entier positif.

On déduit de ces deux relations $r = n^2 \hbar^2 \epsilon_0 / (m_e \pi Z e^2)$

soit numériquement $r = 0.53 n^2 / Z$ Angströms ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$). Le rayon de l'atome d'hydrogène est égal à $\hbar^2 \epsilon_0 / (m_e \pi e^2) = 0.53 \text{ \AA}$ au niveau fondamental ($n = 1, Z = 1$).

L'énergie totale E_n de l'atome est la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m_e \omega^2 r^2$ et de l'énergie potentielle $-Z e^2 / (4 \pi \epsilon_0 r)$. On trouve :

$$E_n = - (Z^2 / n^2) [e^4 m_e / (8 h^2 \epsilon_0^2)] = - R_H Z^2 / n^2 = -13.6 Z^2 / n^2 \text{ électrons Volt}$$

$R_H = e^4 m_e / (8 h^2 \epsilon_0^2)$ est la constante de Rydberg égale numériquement à 13.6 eV.

Les transitions quantiques entre deux niveaux m et n font intervenir l'absorption ou l'émission d'un photon dont l'énergie correspond à la différence d'énergie entre les deux niveaux électroniques :

$$h \nu_{mn} = h C / \lambda_{mn} = - R_H Z^2 (1/n^2 - 1/m^2)$$

ν_{mn} et λ_{mn} sont respectivement la fréquence et la longueur d'onde de la transition quantique.

L'énergie d'ionisation ($m \rightarrow \infty$) à partir du niveau de départ n vaut $E_i = R_H Z^2 / n^2 = 13.6 Z^2 / n^2$ eV ; pour l'atome d'Hydrogène, l'énergie d'ionisation à partir du fondamental ($n = 1, Z = 1$) est égale à la constante de Rydberg $R_H = 13.6$ eV.

Le spectre de l'atome d'Hydrogène ($Z = 1$)

UV : Série de **Lyman**, transitions du niveau $1 \rightarrow n > 1$: $\Delta E = h \nu = h C / \lambda = R_H (1 - 1/n^2)$

En énergie: $\Delta E = h \nu$: 10.2 eV \rightarrow 13.6 eV (continu, $n \rightarrow \infty$);

en longueur d'onde $\Delta E = h C / \lambda$ d'où λ : 1216 Å (Ly α) \rightarrow 912 Å (continu de Lyman)

Dénomination : Ly α ($1 \rightarrow 2$) ; Ly β ($1 \rightarrow 3$) ; Ly γ ($1 \rightarrow 4$) ...

Energie d'ionisation 13.6 eV ou 912 Å (continu de Lyman: $\lambda < 912 \text{ \AA}$, transitions lié-libre)

Visible : série de **Balmer**, transitions du niveau $2 \rightarrow n > 2$: $\Delta E = h \nu = h C / \lambda = R_H (1/4 - 1/n^2)$

En énergie: $\Delta E = h \nu$: 1.9 eV \rightarrow 3.4 eV (continu, $n \rightarrow \infty$);

en longueur d'onde $\Delta E = h C / \lambda$ d'où λ : 6563 Å (H α) \rightarrow 3650 Å (continu de Balmer)

Dénomination : H α ($2 \rightarrow 3$) ; H β ($2 \rightarrow 4$) ; H γ ($2 \rightarrow 5$) ...

Energie d'ionisation 3.4 eV ou 3650 Å (continu de Balmer: $\lambda < 3650 \text{ \AA}$, transitions lié-libre)

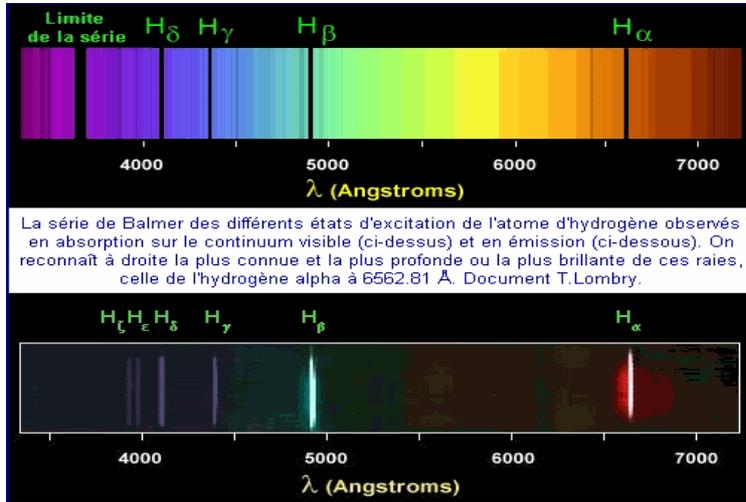
IR, Série de Paschen, transitions du niveau $3 \rightarrow n > 3$: $\Delta E = h \nu = h C / \lambda = R_H (1/9 - 1/n^2)$

En énergie: $\Delta E = h \nu$: 0.7 eV \rightarrow 1.5 eV (continu, $n \rightarrow \infty$);

en longueur d'onde $\Delta E = h C / \lambda$ d'où λ : 18775 Å (Pa α) \rightarrow 8214 Å (continu de Paschen)

Dénomination : Pa α ($3 \rightarrow 4$) ; Pa β ($3 \rightarrow 5$) ; Pa γ ($3 \rightarrow 6$) ...

Energie d'ionisation 1.5 eV ou 8214 Å (continu de Paschen: $\lambda < 8214$ Å, transitions lié-libre)



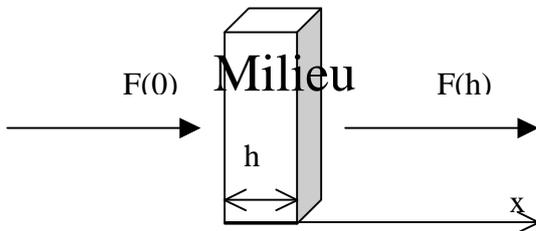
Série de Balmer de l'atome d'Hydrogène.
en haut : raies d'absorption
en bas : raies d'émission.

La limite de la série est à 3650 Å (énergie d'ionisation, continu de Balmer)

2 – Sections efficaces

Les sections efficaces servent à quantifier les interactions matière rayonnement (absorption, émission, diffusion). Elles représentent une surface d'interaction et se mesurent en m^2 .

Considérons un flux F de particules rencontrant un obstacle composé de N cibles par unité de volume, d'épaisseur h , et appelons σ la section efficace d'interaction.



On peut écrire $dF = -F \sigma N dx$ avec σ en m^2 et N en m^{-3}

En intégrant (en supposant σ et N indépendants de x), il vient $F(h) = F(0) \exp(-\sigma N h)$

La quantité $\tau = \sigma N h$ est l'épaisseur (ou profondeur) optique du milieu. Lorsqu'on observe le soleil, on voit les régions dont la profondeur optique est voisine de 1 à la longueur d'onde de l'observation.

Plus généralement, on peut écrire $d\tau = \sigma N dx$; dans ce cas $F(h) = F(0) \exp(-\tau)$ avec $\tau = \int_0^h \sigma N dx$

Processus de diffusion des photons:

- la diffusion des photons par les atomes fait passer l'atome d'un niveau d'énergie n vers m , immédiatement suivie de la transition inverse de m vers n , avec ré-émission d'un photon de même énergie mais de direction différente: c'est la diffusion cohérente ou résonante
- La diffusion des photons par les électrons libres : la section de diffusion Thomson des photons par les électrons libres est: $\sigma \approx 6.65 \cdot 10^{-29} m^2$
- La diffusion des photons par les molécules: diffusion Rayleigh, qui varie en $1/\lambda^4$

Les collisions avec les électrons libres:

Sections efficaces de collision avec des électrons libres : $\sigma \approx 10^{-20} \text{ m}^2 \approx \pi a^2$ (a rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène) : la collision provoque un changement d'orbite (hyperbolique) de l'électron dans le champ de l'atome (transition « **libre – libre** ») qui peut passer à un niveau d'excitation supérieur ou inférieur (excitation ou desexcitation collisionnelle). Le rayon de Bohr est $a = (h^2 \epsilon_0) / (\pi m_e e^2) = 0.5 \text{ \AA}$.

L'absorption ou l'émission des photons:

- Sections efficaces de collision avec les photons (photo ionisation) : $\sigma \approx 10^{-21}$ à 10^{-22} m^2 . La photo ionisation correspond à la perte d'un électron par l'atome (transition « **lié – libre** »).
- Sections efficaces de collision avec les photons (photo excitation) : $\sigma \approx 10^{-14}$ à 10^{-16} m^2 . La photo excitation correspond à une transition quantique « **lié – lié** », mais la section efficace est très élevée uniquement dans un intervalle de fréquences très étroit correspondant aux raies spectrales.

3 – Formation des raies spectrales ; profil Lorentzien ; amortissement naturel

Les sections efficaces de photo excitation (transitions quantiques « **lié- lié** ») sont très élevées dans le domaine très étroit de fréquence des raies. Considérons un électron de position x lié au noyau par la force de rappel $-kx$, subissant un amortissement $-m\gamma dx/dt$, et oscillant dans un champ électrique $E e^{i\omega t}$ représentant la vibration lumineuse de pulsation $\omega = 2\pi\nu$. m et -e sont respectivement la masse et la charge de l'électron ; γ est son amortissement (en s^{-1}). Le principe de la dynamique donne :

$$m d^2x/dt^2 + m\gamma dx/dt + kx = -e E e^{i\omega t} \text{ et l'on pose } x = X e^{i\omega t}$$

On peut montrer que le coefficient d'amortissement γ s'obtient en égalisant la puissance moyenne dissipée par la force de frottement $\langle m\gamma(dx/dt)^2 \rangle$ à la puissance moyenne rayonnée par l'électron (établie en L2 par ta théorie du rayonnement dipolaire et les potentiels retardés):

$$\gamma = (1/4\pi\epsilon_0) (2/3) e^2 \omega_0^2 / (m C^3) \text{ avec } \omega_0^2 = k/m \text{ pulsation de résonance}$$

Pour la raie H α ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$), on a $\omega_0 = 2\pi C / \lambda = 2.87 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$, d'où $\gamma = 5.2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$, cela représente en longueur d'onde une largeur de $\Delta\lambda = \lambda \gamma / \nu_0 = \lambda^2 \gamma / C = 10^{-3} \text{ \AA}$, ce qui est très petit.

La résolution de l'équation du mouvement donne : $X = (-e/m) E / (\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega)$

Comme $\langle (dx/dt)^2 \rangle = 1/2 |X|^2 \omega^2$, la puissance moyenne absorbée par la dissipation est égale à :
 $\langle P_f \rangle = 1/2 m\gamma |X|^2 \omega^2 = 1/2 \gamma (e^2/m) E^2 \omega^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]$

En posant $\omega = 2\pi\nu$, il vient $\langle P_f \rangle = (\gamma/8\pi^2) (e^2/m) E^2 / [(v_0^2/v - v)^2 + (\gamma/2\pi)^2]$

Au voisinage de la fréquence de résonance ν_0 , on a $(v_0^2/v - v) \approx 2(v_0 - v)$, d'où
 $\langle P_f \rangle \approx (\gamma/32\pi^2) (e^2/m) E^2 / [(v - v_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$

La section efficace σ (en m^2) de photo ionisation est définie comme le rapport de la puissance moyenne dissipée $\langle P_f \rangle$ (en W) à la puissance moyenne électromagnétique transportée par unité de surface (moyenne du vecteur de Poynting $\langle P \rangle$ en W/m^2), égale au produit $C \epsilon_0 E^2/2$:

$$\sigma(\nu) = \langle P_f \rangle / \langle P \rangle = \langle P_f \rangle / (C \epsilon_0 E^2/2) = [e^2 / (16\pi^2 \epsilon_0 m C)] \gamma / [(v - v_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$$

Avec $\gamma = 2 \pi e^2 \nu_0^2 / (3 \epsilon_0 m C^3)$, on obtient finalement la section efficace en fonction de ν :

$$\sigma(\nu) = [e^4 / (24\pi \epsilon_0^2 m^2 C^4)] \nu_0^2 / [(v - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$$

Introduisons la section efficace de diffusion Thomson de la lumière sur les électrons libres,

$$\sigma_{\text{th}} = e^4 / (6\pi \epsilon_0^2 m^2 C^4)$$

alors on obtient $\sigma = \frac{1}{4} \sigma_{\text{th}} v_0^2 / [(v - v_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$

A la fréquence centrale de la raie, $v = v_0$ implique $\sigma(v_0) = \sigma_{\text{th}} 4 \pi^2 v_0^2 / \gamma^2 = \sigma_{\text{th}} 4 \pi^2 C^2 / (\gamma^2 \lambda_0^2)$

Sachant que $\sigma_{\text{th}} = 6.63 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$, on en déduit, pour la raie H α ($\lambda_0 = 6563 \text{ \AA}$, $\gamma = 5.2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$) que $\sigma(\text{H}\alpha) \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$. La section efficace au cœur des raies est très grande.

La section efficace totale sur l'ensemble du profil s'obtient par intégration sur les fréquences.

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(v) dv = e^2 / (4 \epsilon_0 m C)$$

En mécanique quantique, on introduit un facteur multiplicatif appelé *force d'oscillateur* f_{nm} de la transition de telle sorte que $\sigma_{\text{tot}} = f_{\text{nm}} [e^2 / (4 \epsilon_0 m C)]$. La force d'oscillateur est un nombre inférieur à l'unité (0.641 pour H α , 0.119 pour H β par exemple).

Formation du spectre d'absorption sur le disque

L'équation de transfert du rayonnement s'écrit le long d'un axe Oz vertical dirigé vers l'extérieur:

$$dI_v/dz = \rho j_v - \rho k_v I_v$$

où I_v est l'intensité lumineuse, ρ la masse volumique, j_v l'émission et k_v le coefficient d'absorption. Au centre du disque en l'absence d'émission, on peut supposer que $j_v = 0$ d'où

$$dI_v/dz = - \rho k_v I_v = - N \sigma(v) I_v$$

où N est le nombre d'atomes par unité de volume et $\sigma(v)$ la section efficace d'interaction photon/matière vue ci dessus. Si l'on suppose pour simplifier que N et $\sigma(v)$ sont indépendants de z , cette équation s'intègre et donne $I_v(z) = I_v(0) \exp[-N \sigma(v) z]$. On peut prendre, s'il s'agit de la photosphère à la température supposée uniforme T , $I_v(0) = B_v(T)$ où $B_v(T)$ est la fonction de Planck. Dans ce cas, $I_v(z) = B_v \exp[-N \sigma(v) z] \approx B_v - B_v N \sigma(v) z$. S'il y a plusieurs raies de plusieurs éléments chimiques, alors:

$$I_v(z) \approx B_v - B_v z [\sum N_i \sigma_i(v)]$$

L'intensité résulte donc de deux composantes: un spectre continu B_v auquel se superposent des raies d'absorption représentées par le second terme $- B_v z [\sum N_i \sigma_i(v)]$.

Formation du spectre d'émission au limbe

Au limbe au dessus du disque en l'absence d'absorption, on peut supposer que $k_v = 0$ d'où $dI_v/dz = \rho j_v$ avec $j_v = k_v B_v = N \sigma(v) B_v$.

Si l'on suppose pour simplifier que N et $\sigma(v)$ sont indépendants de z , cette équation s'intègre et donne $I_v(z) = B_v N \sigma(v) z$. S'il y a plusieurs raies de plusieurs éléments chimiques, on a:

$$I_v(z) = B_v z [\sum N_i \sigma_i(v)] \quad \text{Il s'agit d'un spectre de raies en émission.}$$

4 – Loi de Boltzmann de distribution des niveaux d'énergie en équilibre thermodynamique

Soit N_n et N_m les nombres d'atomes respectivement aux niveaux d'énergie E_n et E_m , chaque niveau d'énergie i ayant un poids statistique g_i . La loi de Boltzmann permet de connaître la répartition des atomes en fonction de leur niveau d'énergie :

$$N_n / N_m = (g_n / g_m) \exp - [(E_n - E_m) / kT]$$

k constante de Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23}$ MKSA), T température du milieu en Kelvins.

g_n est le poids statistique du niveau n ou nombre d'états de même énergie.

Par exemple :

$g_n = 2 n^2$ pour le niveau n des atomes de type hydrogénoïde (le facteur 2 vient du spin)

$g_J = 2J+1$ pour un atome dans un état $^{2S+1}L_J$ (L, S, J moment cinétique orbital, de spin, et total)

5 - Loi de Maxwell de distribution des vitesses ; profil Doppler ; largeur Doppler

La fonction de distribution du module des vitesses v d'un gaz d'atomes de masse m en équilibre thermodynamique à la température T est donnée par la loi :

$$f(v) = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp(-1/2 m v^2 / kT) 4 \pi v^2 \quad \text{avec} \quad \int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

Cette fonction de distribution présente un maximum pour $v_{\max} = (2kT / m)^{1/2}$

La *vitesse moyenne* est $\langle v \rangle = \int v f(v) dv / \int f(v) dv = 2 v_{\max} / \sqrt{\pi} = [8kT / (\pi m)]^{1/2}$

On a typiquement 14 km/s dans la photosphère et 145 km/s dans la couronne pour de l'Hydrogène ou des protons.

La *vitesse quadratique moyenne* est $\langle v^2 \rangle = \int v^2 f(v) dv / \int f(v) dv = 3/2 v_{\max}^2 = \boxed{3 kT / m}$

de sorte que *l'énergie cinétique moyenne* est $\langle E_c \rangle = 1/2 m \langle v^2 \rangle = \boxed{3/2 kT}$

Lorsque l'on s'intéresse au mouvement des particules dans une seule direction de l'espace (cas de l'effet Doppler thermique par exemple), on utilise la forme suivante de la loi de Maxwell :

$$f(v) = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp(-1/2 m v^2 / kT)$$

L'effet Doppler mène à un décalage en fréquence tel que $(v - v_0) / v_0 = v / C$ où v_0 est la fréquence au repos et l'on obtient un profil Doppler **gaussien** dont la distribution en fréquence est :

$$f(v) = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp[-1/2 m C^2 ((v - v_0)^2 / v_0^2) / kT] = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp[-((v - v_0)^2 / \Delta v_D^2)]$$

La quantité $\boxed{\Delta v_D = (v_0 / C) (2 k T / m)^{1/2}}$ s'appelle largeur Doppler du profil.

Sa demi largeur à mi hauteur vaut $\Delta v = (\ln 2)^{1/2} \Delta v_D = (v_0 / C) (2 \ln 2 k T / m)^{1/2}$

En longueur d'onde, avec λ_0 longueur d'onde au repos, on obtient $\boxed{\Delta \lambda_D = (\lambda_0 / C) (2 k T / m)^{1/2}}$ largeur Doppler, et

$\Delta \lambda = (\ln 2)^{1/2} \Delta \lambda_D = (\lambda_0 / C) (2 \ln 2 k T / m)^{1/2}$ demi largeur à mi hauteur du profil

On retient que la *largeur totale à mi hauteur* est $2\Delta \lambda = 2 (\lambda_0 / C) (2 \ln 2 k T / m)^{1/2}$

Plus la température est élevée, et plus la masse des atomes constituant le gaz est faible, plus la largeur Doppler est grande. A titre d'exemple, on trouve :

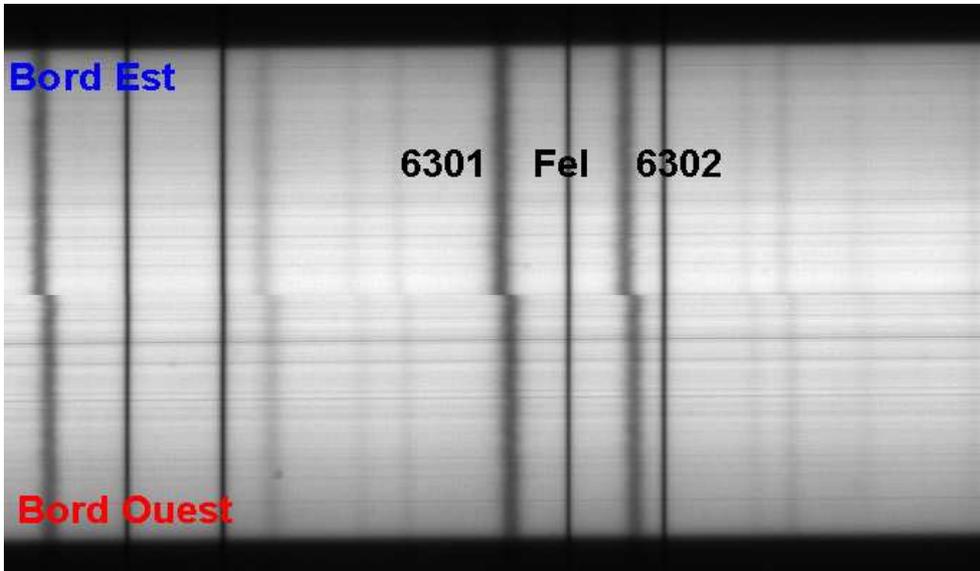
H α : $T = 10^4$ K, $2\Delta \lambda = 0.47 \text{ \AA}$ dans la chromosphère

Fe : $T = 10^4$ K, $2\Delta \lambda = 0.06 \text{ \AA}$ dans la photosphère

Fe : $T = 10^6$ K, $2\Delta \lambda = 0.62 \text{ \AA}$ dans la couronne (raies élargies par la température)

6 – Vitesses Doppler macroscopiques (déplacements de matière)

Lorsqu'un déplacement de matière macroscopique se produit, les raies sont décalées en bloc de la quantité $\Delta\lambda = \lambda V/C$ où V est la vitesse de la matière. Le décalage spectral se fait vers les courtes longueurs d'onde lors d'un mouvement d'approche (blueshift) et vers les grandes longueurs d'onde lors d'un mouvement d'éloignement (redshift). L'effet Doppler ne permet de mesurer que la projection du vecteur vitesse sur la ligne de visée.



Effet Doppler aux bords EST et OUEST du Soleil: les raies telluriques fines ont une position invariable.

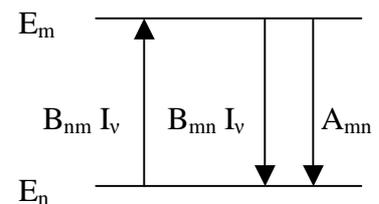
7 – Coefficients d'Einstein et équilibre statistique; loi de Planck, rayonnement du corps noir

Considérons l'équilibre statistique entre deux niveaux m et n à la température T . Soit N_m et N_n les densités volumiques (en m^{-3}) des populations des niveaux m et n , soumises par ailleurs à l'intensité spectrale de rayonnement I_ν ($W m^{-2} Hz^{-1} st^{-1}$).

La variation de population du niveau m est donnée par :

$$dN_m/dt = - A_{mn} N_m - B_{mn} N_m I_\nu + B_{nm} N_n I_\nu$$

émission spontanée *émission induite* *absorption*



Les coefficients A_{mn} , B_{mn} et B_{nm} sont les coefficients d'Einstein (tabulés). A_{mn} se mesure en s^{-1} et mesure l'inverse de la durée de vie des niveaux (facteur d'amortissement γ des raies).

A l'équilibre statistique, on a $dN_m/dt = 0$, d'où l'on tire :

$$I_\nu = (A_{mn}/B_{mn}) / [(B_{nm} N_n / B_{mn} N_m) - 1]$$

D'après la loi de Boltzman, $N_n/N_m = (g_n/g_m) \exp [-(E_n-E_m)/kT]$, et d'autre part I_ν est égale à l'intensité spectrale de rayonnement du corps noir B_ν , d'où il vient :

$$I_\nu = (A_{mn}/B_{mn}) / [(B_{nm} g_n / B_{mn} g_m) \exp(- (E_n-E_m) /kT) - 1] = \boxed{B_\nu = (2 h \nu^3 / C^2) / [\exp(h\nu / kT) - 1]}$$

C'est l'intensité spectrale du corps noir qui se mesure en $W st^{-1} m^{-2} Hz^{-1}$ (st = stéradian).

En identifiant, on trouve : $A_{mn}/B_{mn} = 2 h \nu^3 / C^2$ et $B_{mn} g_m = B_{nm} g_n$, avec $h \nu = E_m - E_n$

Les coefficients A_{mn} sont reliés au coefficient d'amortissement phénoménologique γ introduit plus haut dans les sections efficaces. En effet, sans champ de rayonnement, on a :

$$dN_m/dt = - \sum_{n < m} A_{mn} N_m = - N_m \sum_{n < m} A_{mn} = - N_m \gamma_m \text{ avec } \boxed{\gamma_m = \sum_{n < m} A_{mn} = 1/\tau_m}$$

γ_m est l'inverse de la durée de vie τ_m du niveau m

Les coefficients B_{mn} sont reliés aux forces d'oscillateur par $f_{mn} = (\epsilon_0 m C / \pi e^2) B_{mn} h\nu_{mn}$

RAPPEL: $I_\nu = B_\nu$ à l'équilibre thermodynamique

Paradoxalement, le spectre continu du soleil et des étoiles est proche du spectre de corps noir B_ν (objet à l'équilibre thermodynamique de température uniforme T). L'intensité spectrale B intégrée sur les fréquences vaut :

$$B = \sigma T^4 / \pi \text{ en } W \text{ st}^{-1} m^{-2}$$

avec $\sigma = 2 \pi^5 k^4 / (15 C^2 h^3) = 5.67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ constante de Stefan

et la puissance en Watts rayonnée par $1 m^2$ de corps noir dans toutes les directions de l'espace (4π stéradian) est égale à σT^4 (en $W m^{-2}$).

8 – Amortissement collisionnel ; théorie de l'impact de Weisskopf

Les collisions, tout comme l'agitation thermique que nous avons vue (Doppler thermique), constituent un facteur important d'élargissement des raies. Nous allons utiliser ici la théorie la plus simple, celle de l'impact de Weisskopf, qui a ensuite entraîné de nombreux développements.

Soit t_c la durée entre deux collisions. On assimile l'atome perturbé par la collision à un oscillateur harmonique qui émet pendant le temps T fini un train d'onde de la forme $A e^{2i\pi\nu_0 t}$, ν_0 étant la fréquence propre de l'oscillateur. Le spectre de puissance de ce train d'onde de durée finie T est égal à $|F(\nu)|^2$ où $F(\nu)$ est la transformée de Fourier que l'on calcule par :

$$F(\nu) = A \int_0^T e^{2i\pi\nu_0 t} e^{-2i\pi\nu t} dt = A (e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)T} - 1) / (2i\pi(\nu_0 - \nu))$$

Weisskopf suppose que la densité de probabilité pour que le temps entre deux collisions soit égal à T est une loi exponentielle de marche au hasard du type $(1/\tau) e^{-T/\tau}$ où τ est le temps **moyen** entre deux collisions, avec la normalisation $\int (1/\tau) e^{-T/\tau} dT = 1$. Le spectre de puissance moyen des trains d'onde est alors donné par :

$$E(\nu) = \int_0^{+\infty} |F(\nu)|^2 (1/\tau) e^{-T/\tau} dT = |A|^2 \int_0^{+\infty} [\sin^2(\pi(\nu_0 - \nu)T) / (\pi^2(\nu_0 - \nu)^2)] e^{-T/\tau} d(T/\tau)$$

Faisons le changement de variable $u = T/\tau$, il vient :

$$E(\nu) = |A|^2 \int_0^{+\infty} [\sin^2(\pi(\nu_0 - \nu) \tau u) / (\pi^2(\nu_0 - \nu)^2)] e^{-u} du = |A|^2 / (2\pi^2) / [(\nu_0 - \nu)^2 + (1/2\pi\tau)^2]$$

On normalise la fonction $E(\nu)$ telle que $\int E(\nu) d\nu = 1$, et on obtient :

$$\boxed{E(\nu) = (1/\pi) (\gamma/4\pi) / [(\nu_0 - \nu)^2 + (\gamma/4\pi)^2] \text{ avec } \gamma = 2/\tau}$$

Il s'agit donc d'un **profil Lorentzien d'amortissement** $\gamma = 2/\tau$ de demi largeur en fréquence $\gamma/4\pi$

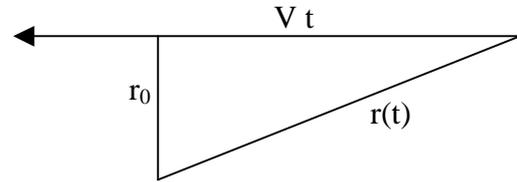
La difficulté consiste maintenant à évaluer l'amortissement γ , donc τ . Pour ce faire, on introduit la section efficace de collision σ (m^2) avec les particules fixes, qui est telle que :

$$\sigma N (V \tau) = 1$$

avec N densité (m^{-3}) des particules perturbatrices, V leur vitesse moyenne, et τ temps moyen entre deux collisions, $V \tau$ étant la distance moyenne parcourue par les perturbateurs entre deux collisions.

Si la distribution des vitesses est une loi de Maxwell, on a $V = (8 k T / \pi m)^{1/2}$, T température, k constante de Boltzmann, m masse des projectiles. Connaissant σ , N et V, on en déduira $\tau = 1 / \sigma N V$.

Le calcul de σ revient au calcul du paramètre d'impact r_0 des perturbateurs, supposés aller en ligne droite à la vitesse constante V.



$$\sigma = \pi r_0^2$$

$r(t) = (r_0^2 + V^2 t^2)^{1/2}$ est la distance du projectile à l'instant t.

Weisskopf suppose que l'effet de la collision est de générer un changement de phase de l'oscillateur de la forme $\Delta\omega = C_p / r^p$

Où C_p est une constante et p un nombre entier dépendant de la nature de l'interaction :

{	p = 2	effet Stark linéaire (interaction Hydrogène + particule chargée)
	p = 3	collision résonante (interaction entre deux atomes identiques)
	p = 4	effet Stark quadratique (interaction atome + particule chargée)
	p = 6	forces de Van der Waals (interaction entre atomes de natures différentes)

Weisskopf calcule alors le déphasage total introduit par la collision :

$$\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\omega dt = C_p \int_{-\infty}^{+\infty} (r_0^2 + V^2 t^2)^{-p/2} dt = C_p r_0^{-p} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + V^2 t^2 / r_0^2)^{-p/2} dt$$

On pose $u = V t / r_0$

$$\delta = C_p r_0^{-p+1/V} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + u^2)^{-p/2} du \quad \text{où} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + u^2)^{-p/2} du = \sqrt{\pi} \Gamma((p-1)/2) / \Gamma(p/2) = \alpha_p$$

formule dans laquelle $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma telle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, avec la formule de récurrence $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$, permettant de calculer le coefficient numérique α_p :

$\alpha_2 = \pi$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = \pi/2$ et $\alpha_6 = 3\pi/8$ pour p=2, 3, 4 et 6, selon la nature de la collision.

Le calcul du paramètre d'impact r_0 repose sur l'hypothèse $\delta = 1$, ce qui donne $r_0 = [V / (C_p \alpha_p)]^{1/1-p}$, dont on déduit l'amortissement :

$$\gamma = 2/\tau = 2 \sigma N V = 2 \pi r_0^2 N V = 2 \pi N V [V / (C_p \alpha_p)]^{2/1-p}$$

Il est important de constater que l'amortissement γ varie comme $N V^{(p-3)/(p-1)}$, N et V étant respectivement la densité et la vitesse des particules perturbatrices, et lorsqu'on introduit la dépendance de V en fonction de la température T, γ varie comme $N T^{(p-3)/(2p-2)}$

{	p = 2	effet Stark linéaire : γ varie comme $N T^{-1/2}$
	p = 3	collision résonante : γ varie comme N
	p = 4	effet Stark quadratique : γ varie comme $N T^{1/6}$
	p = 6	forces de Van der Waals : γ varie comme $N T^{3/10}$

Cette présentation très simplifiée montre que, dans la photosphère et la chromosphère (T voisin de 10^4 K mais N variant de plusieurs ordres de grandeur), l'élargissement est proportionnel à N.

Il existe des tables donnant $\gamma = a N T^b$ en fonction du projectile et de l'atome perturbé. Dans le cas de l'interaction atome lourd / Hydrogène (cas des forces de Van der Waals), on a par exemple:

$$\gamma \approx 10^{-15} N T^{0.35} \text{ s}^{-1}$$

avec N densité des atomes d'Hydrogène en m^{-3} . Il est intéressant de comparer le rapport des largeurs collisionnelles et naturelles $\gamma_{\text{coll}} / \gamma_{\text{nat}}$ dans l'atmosphère solaire sachant qu'une valeur typique de la largeur naturelle est $\gamma_{\text{nat}} = 10^8 \text{ s}^{-1}$.

La photosphère s'étend de 0 à 500 km, et la chromosphère de 500 à 2000 km d'altitude. Sur 2000 km, la température T varie peu, mais la densité N décroît considérablement.

variation de T de 0 → 500 km → 2000 km : 6400 K → 4170 K → 10000 K (T ≈ constante)
 variation de N de 0 → 500 km → 2000 km : $2 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3} \rightarrow 2 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \rightarrow 2 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$ (variation 10^6)

donne la variation de $\gamma_{\text{coll}} / \gamma_{\text{nat}}$ de 0 → 500 km → 2000 km : **40 → 0.3 → 10^{-4}**

L'élargissement collisionnel, lorentzien, est important dans la photosphère et s'efface donc dans la chromosphère.

Pour convertir en longueur d'onde, on utilise $\Delta\lambda = \lambda_0 \gamma / v_0 = \lambda_0^2 \gamma / C$ où λ_0 est la longueur d'onde de la raie. La largeur naturelle, en longueur d'onde, étant de l'ordre de 10^{-3} \AA , on en déduit que la largeur collisionnelle est au plus de l'ordre de $40 \cdot 10^{-3} \text{ \AA} = 0.04 \text{ \AA}$ dans la photosphère, ce qui reste inférieur à l'élargissement Doppler (gaussien), compris selon l'élément entre **0.5 \AA** (Hydrogène) et **0.05 \AA** (Fer) dans la photosphère ou dans la chromosphère.

9 – Convolution des sections efficaces Gaussiennes et Lorentziennes, profil de Voigt

La demi largeur Doppler $\Delta\lambda_D = (\lambda_0 / C) (2 k T / m)^{1/2}$ est souvent insuffisante pour rendre compte de la largeur réelle des profils de raie, c'est pourquoi on est souvent appelé à introduire une vitesse de macroturbulence supplémentaire v_m de distribution Gaussienne, tout comme la distribution des vitesses thermiques est gaussienne autour de $v_t = (2kT / m)^{1/2}$.

On sait que le produit de convolution de deux Gaussiennes de paramètres **a** et **b** est une nouvelle gaussienne de paramètre égal à $(a^2 + b^2)^{1/2}$

La demi largeur Doppler devient donc $\Delta\lambda_D = (\lambda_0 / C) (v_m^2 + v_t^2)^{1/2} = (\lambda_0 / C) (v_m^2 + 2 k T / m)^{1/2}$

En ce qui concerne les profils Lorentziens, le produit de convolution de deux Lorentziennes de paramètres **a** et **b** est une nouvelle Lorentzienne de paramètre égal à $(a + b)$.

les largeurs naturelles des niveaux de la transition γ_m , γ_n et collisionnelles γ_{coll} sont donc additives.

Le profil de la section efficace résultante est donc la convolution d'une Gaussienne de largeur Doppler équivalente:

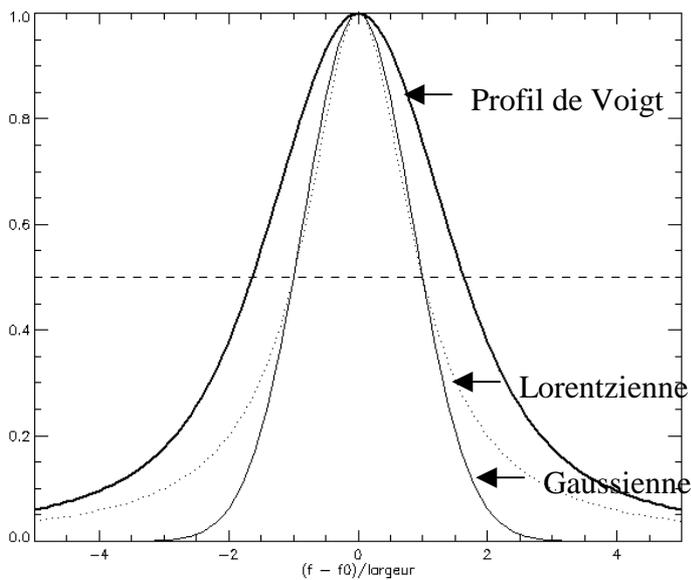
$$\Delta v_D = (v_0 / C) (v_m^2 + v_t^2)^{1/2},$$

et d'une Lorentzienne de largeur équivalente:

$$\Gamma / 4\pi = [\gamma_m + \gamma_n + \gamma_{\text{coll}}] / 4\pi,$$

que l'on appelle profil de Voigt, donné par la fonction de Harris, calculable numériquement :

$$H(a,u) = (a/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 / (a^2 + (u-y)^2)} dy \quad \text{où } u = (v - v_0) / \Delta v_D \text{ et } a = \Gamma / (4\pi \Delta v_D)$$



Exemple de section efficace à profil de Voigt, qui est la convolution:

- d'une section efficace Lorentzienne de largeur à mi hauteur $\Gamma/4\pi$
- d'une section efficace Gaussienne de largeur à mi hauteur $(\ln 2)^{1/2} \Delta v_D$

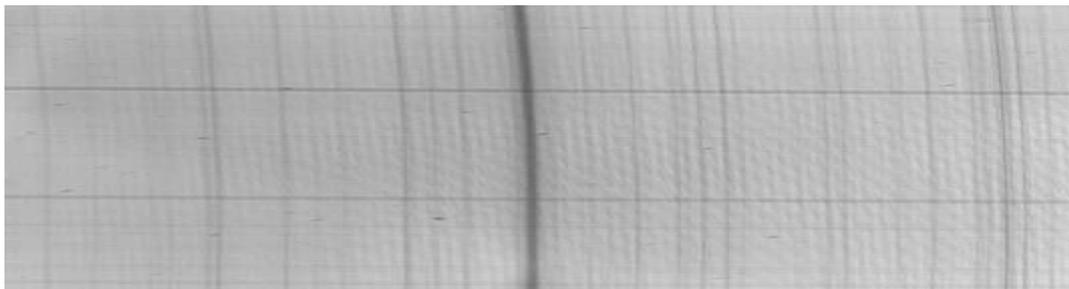
Le cœur du profil de Voigt est de type Gaussien alors que les ailes sont de type Lorentzien

10 - TP et Expériences

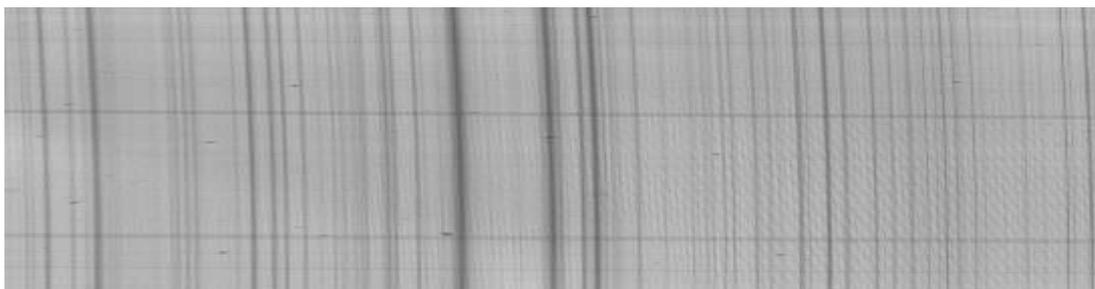
a) TP n°1: spectre détaillé du soleil

On dispose d'un petit spectrographe LHIRES de résolution $R = 18000$ (c'est à dire environ 0.03 nm ou 0.3 \AA) permettant d'observer le spectre solaire en bandes de 10 nm environ. En installant le spectrographe directement dans le faisceau de la Tour Solaire, ou bien au foyer d'une petite lunette, acquérir le spectre solaire de 380 nm à 700 nm par bandes de 10 nm en tournant le réseau de diffraction. La résolution optique étant de 0.3 \AA , il faut avoir un échantillonnage inférieur ou égal à 0.15 \AA , échantillonnage qui dépend de la caméra employée (ATIK ou PIXELINK).

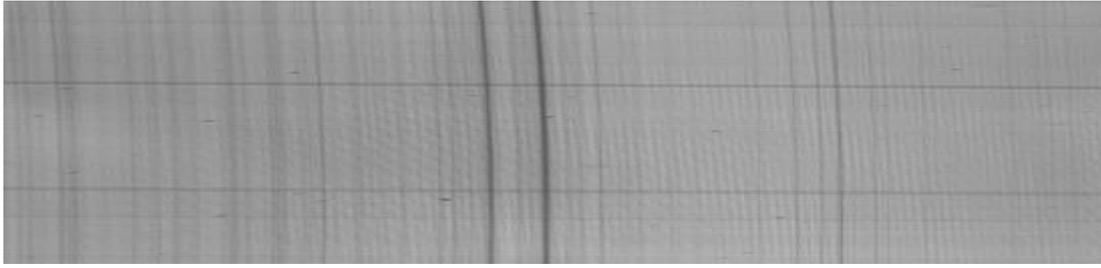
- Quantifier et optimiser l'échantillonnage du spectre (dépend de la caméra utilisée)
- Rendre homogène la valeur moyenne de chaque bande
- Tenter de raccorder les bandes entre elles en longueur d'onde par recouvrement
- Essayer d'identifier les raies de Fraunhofer
- Produire un spectre sous la forme d'une longue bande unique



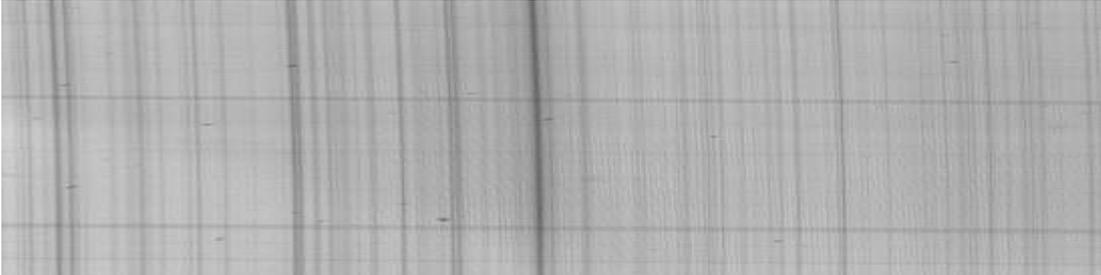
Raie Halpha de l'Hydrogène (domaine autour de 650 nm)



Triplet du Magnésium (domaine autour de 520 nm)



Doublet du Sodium (domaine autour de 590 nm)



Raie Hbeta de l'Hydrogène (domaine autour de 490 nm)

b) TP n°2: Elargissement Doppler des raies et température

Prendre au centre du soleil des profils de la raie H α et d'une raie du Fer, par exemple 630.15 nm. Estimer leur largeur à mi hauteur. En supposant que l'élargissement des raies est purement Doppler, en déduire l'ordre de grandeur de la température.

c) TP n°3: Vitesse de rotation du soleil

Effectuer un spectre d'une raie du Fer (domaine spectral vers 630.1 nm par exemple) aux bords EST et OUEST du soleil au voisinage de l'équateur. Déduire du décalage Doppler des deux spectres la vitesse de rotation du soleil en km/s puis sa vitesse angulaire en degrés par jour. On donne le rayon solaire: $R = 700\,000$ km.

d) TP n°4: Effet Evershed sur les taches

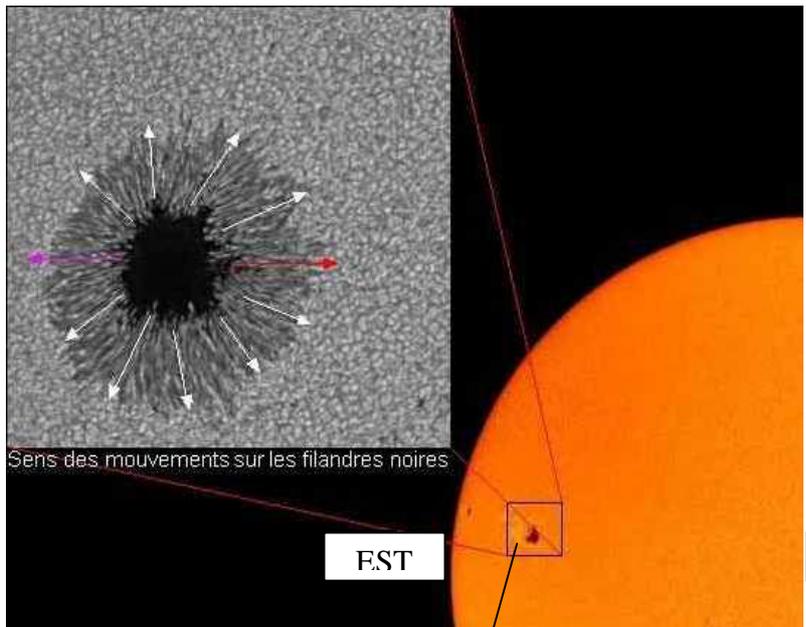
Dans la pénombre des taches, il existe des mouvements de matière plus ou moins radiaux de quelques km/s dirigés de l'ombre vers l'extérieur: c'est l'effet Evershed. Ces mouvements étant à prédominance horizontale, ils seront mieux détectés par effet Doppler sur les raies spectrales dans une tache proche du limbe solaire, à cause de la perspective. On y observera un "redshift" côté limbe et un "blueshift" côté centre disque. Utiliser de préférence une raie du Fer non sensible au champ magnétique, par exemple FeI 557.6 nm.

Imaginer un mécanisme expliquant l'effet Evershed, sachant que les champs magnétiques décroissent de l'intérieur de la tache (ombre) vers sa périphérie (pénombre). Une valeur typique des champs au centre des taches est de 0.1 T.

On pourra penser à la loi de Bernoulli généralisée en présence de champ magnétique le long d'une ligne fluide pour chercher une explication simple:

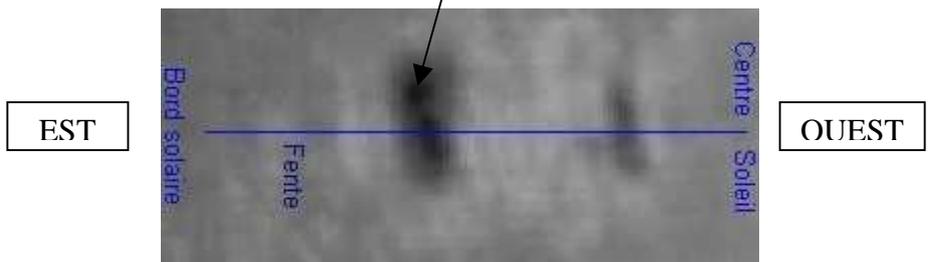
$$P + \frac{B^2}{2\mu_0} + \rho g z + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{constante}$$

où P est la pression gazeuse, $\frac{B^2}{2\mu_0}$ la densité volumique d'énergie magnétique, $\rho g z$ la densité d'énergie potentielle de pesanteur et $\frac{1}{2} \rho V^2$ la densité d'énergie cinétique.

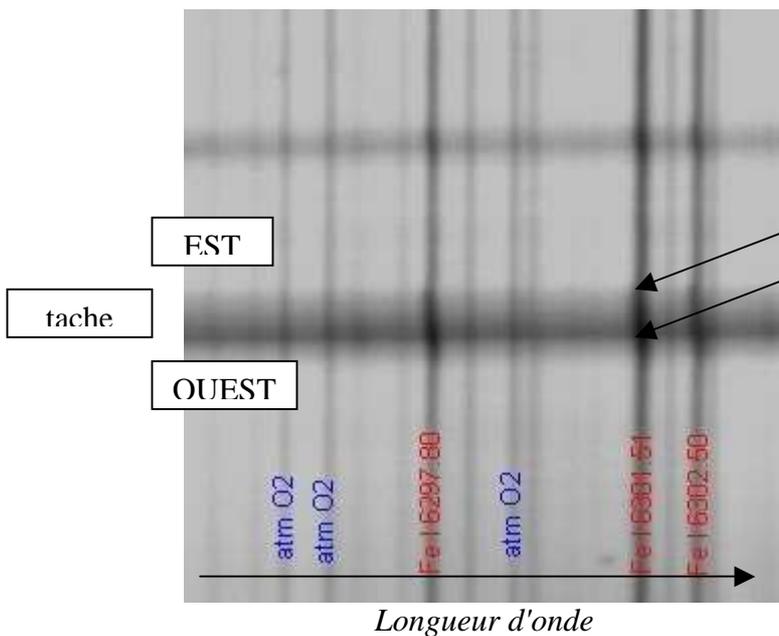


Remerciements à
André et Sylvain
Rondi pour ces
observations

Positionner la fente d'entrée du spectrographe sur une tache assez proche du limbe en orientant la fente dans le sens EST OUEST, à l'aide éventuellement d'un rotateur de champ permettant de choisir convenablement l'orientation.



Prendre quelques spectres de raies du fer comme 557.6 nm (insensible au champ magnétique). Sur l'exemple ci dessous, il s'agit des raies 630.1 nm et 630.2 nm (elles sont sensibles au champ magnétique, ce qui a l'inconvénient de mélanger les effets Doppler et Zeeman).



Pourquoi les raies
sont-elles inclinées ?
Estimer la différence
de vitesse Doppler
entre la partie EST
et la partie OUEST
de la tache. On
donnera le résultat
en km/s.

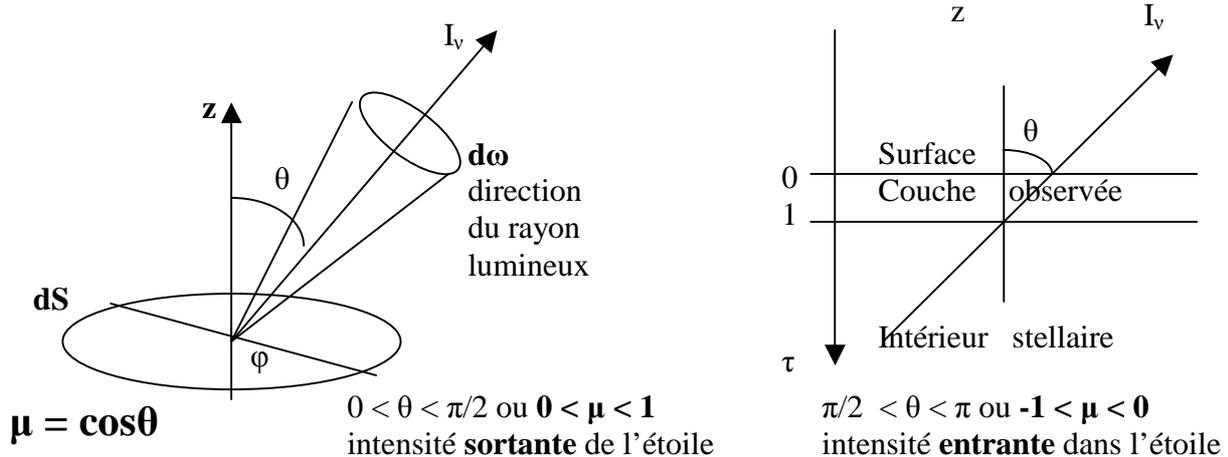
Chapitre 3

Introduction au transfert de rayonnement dans une atmosphère

Application: assombrissement centre bord du soleil

1 - Quelques définitions

Avant d'aborder l'équation de transfert de rayonnement, qui permet de calculer l'intensité lumineuse émergente I_ν (en $\text{W m}^{-2} \text{st}^{-1} \text{Hz}^{-1}$) d'une atmosphère en fonction de l'intensité lumineuse incidente ou des sources d'intensité internes S_ν , nous devons introduire quelques définitions de base.



On considère un pinceau lumineux sortant de la surface de l'étoile sous l'angle θ avec la normale dans l'angle solide $d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ tel que $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$.

Le rayon sort de l'étoile si l'on a $0 < \theta < \pi/2$ ou si $0 < \mu = \cos\theta < 1$.

Il entre dans l'étoile si $\pi/2 < \theta < \pi$ ou $-1 < \mu = \cos\theta < 0$.

Quand on observe le centre du disque solaire, on est à $\theta = 0$, $\mu = 1$; quand on observe le limbe solaire, on est à $\theta = \pi/2$, $\mu = 0$.

On choisit un axe vertical Oz orienté vers l'extérieur de l'étoile et orthogonal à la surface. Par contre, la profondeur optique τ , nulle à la surface de l'étoile, augmente vers l'intérieur. La couche de l'étoile observée est à profondeur optique unité $\tau = 1$, le centre de l'étoile étant à profondeur optique infinie. On explicitera cette quantité plus loin.

L'intensité lumineuse I_ν se mesure en $\text{W st}^{-1} \text{m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$: c'est un flux (puissance par unité de surface, de fréquence et d'angle solide). L'énergie lumineuse qui passe dans le cône d'angle solide $d\omega$, au travers de la surface dS , dans le temps dt , et entre les fréquences ν et $\nu+d\nu$ est :

$$\boxed{dE_\nu = I_\nu \cos\theta \, dS \, d\omega \, dt \, d\nu} \text{ en Joules}$$

On définit l'intensité moyenne J_ν par $J_\nu = (1/4\pi) \int I_\nu \, d\omega$ (1) intégré sur les 4π stéradian de tout l'espace avec $d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

Le flux d'énergie radiative traversant une surface dS sous l'angle θ est $F_\nu = \int I_\nu \cos\theta \, d\omega$ intégré sur les 4π stéradian de l'espace tel que $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$.

L'intégrale ci dessus représente le flux total net, somme des flux entrants et sortants.

Le flux sortant est intégré pour $0 < \theta < \pi/2$ et le flux entrant sur $\pi/2 < \theta < \pi$.

Avec φ intégré de 0 à 2π : Flux sortant: $F_v = \int_0^{\pi/2} I_v \cos\theta \, d\omega$ Flux entrant: $F_v = \int_{\pi/2}^{\pi} I_v \cos\theta \, d\omega$

Si le champ de radiation est isotrope (indépendant des angles), par exemple lorsqu'on est en équilibre thermodynamique avec $I_v = B_v$ fonction de Planck, le flux net est nul, car $\int \cos\theta \, d\omega = \int \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0$ (pour $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$).

On définit aussi :

$H_v = (1/4\pi) \int I_v \cos\theta \, d\omega = F_v / 4\pi$ et $K_v = (1/4\pi) \int I_v \cos^2\theta \, d\omega$

intégrés sur les 4π stéradian de l'espace tel que $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$.

H_v et K_v sont donc les moments de I_v pondérés par $\mu = \cos\theta$ d'ordre 1 et 2.

2 - Densité d'énergie radiative et pression radiative

Considérons un élément de volume dV , de section dS . La quantité d'énergie entrant dans dV par dS dirigée dans le pinceau d'angle solide $d\omega$ sous l'angle θ et pendant dt est égale à :
 $dE_v = I_v \cos\theta \, dS \, d\omega \, dt \, dv$ avec $dV = dS \cos\theta \, C \, dt$

On en déduit : $dS \cos\theta \, dt = dV / C$

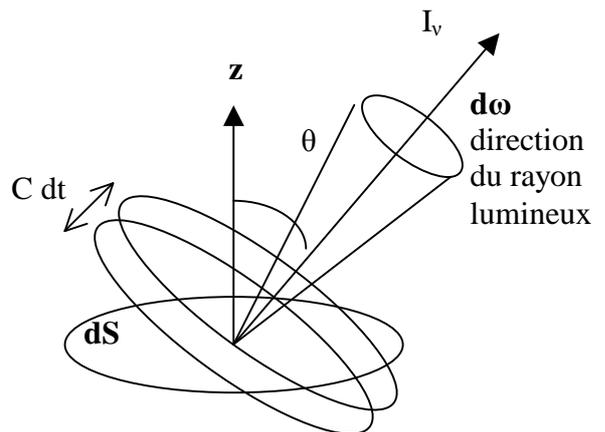
$dE_v / (dV \, dv) = I_v \, d\omega / C = dU_v$

Intégrons sur les 4π stéradian :

la quantité $U_v = (1/C) \int I_v \, d\omega$

est une densité volumique d'énergie par unité de fréquence, et se mesure en $J \, m^{-3} \, Hz^{-1}$

Comme $J_v = (1/4\pi) \int I_v \, d\omega$, on en déduit : $U_v = (4\pi / C) J_v \, (J \, m^{-3} \, Hz^{-1})$



Si le champ de rayonnement est **isotrope**, donc indépendant des angles, alors $\int I_v \, d\omega = I_v \int d\omega = 4\pi I_v$ et $U_v = (4\pi / C) I_v$ (en $J \, m^{-3} \, Hz^{-1}$)

La pression du rayonnement qui s'exerce sur la surface dS se déduit de $dE_v = I_v \cos\theta \, dS \, d\omega \, dt \, dv$ de manière simple. Un déplacement $C \, dt$ des photons dans la direction d'angle solide $d\omega$ du rayon lumineux et durant de temps dt se traduit par un parcours dz sur Oz normal à la surface dS tel que $dz \cos\theta = C \, dt$, d'où $dt = dz \cos\theta / C$ et $dE_v = I_v \cos\theta \, dS \, d\omega \, (dz \cos\theta / C) \, dv$

donc $dE_v = I_v \cos^2\theta \, dS \, d\omega \, dz \, dv / C = I_v \cos^2\theta \, dV \, d\omega \, dv / C = P_{v,\omega} \, dV \, d\omega \, dv$ (avec $dV = dS \, dz$)

où $P_{v,\omega} = I_v \cos^2\theta / C$ est la pression radiative par stéradian et par unité de fréquence ($Pa \, st^{-1} \, Hz^{-1}$)

En intégrant sur les 4π stéradian pour $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$, on obtient la pression radiative par unité de fréquence:

$P_v = \int I_v \cos^2\theta \, d\omega / C = (4\pi / C) K_v \, (en \, Pa \, Hz^{-1})$ (remarque : $1 \, Pa = 1 \, J \, m^{-3}$)

où $K_v = (1/4\pi) \int I_v \cos^2\theta \, d\omega$ (moment d'ordre 2 de l'intensité). La pression radiative correspond à un transfert d'impulsion d'origine photonique, la quantité de mouvement du photon étant égale à $h\nu / C$. Si le rayonnement est isotrope, $P_v = (I_v / C) \int \cos^2\theta \, d\omega = (4\pi/3) I_v / C$ (en Pa Hz⁻¹). La pression radiative totale intégrée sur les fréquences est alors $P = (4\pi/3) I / C$ (en Pa).

3 - Cas particulier : rayonnement isotrope (indépendant de θ et φ)

Si l'intensité de rayonnement I_v est isotrope, elle ne dépend pas des angles θ et φ , et les formules se simplifient. En intégrant une première fois sur φ de 0 à 2π , on obtient avec $\mu = \cos\theta$:

$d\omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta = -2\pi \, d\mu$, et μ varie de 1 à -1 lorsque θ varie de 0 à π

$$\int d\omega = -\int_1^{-1} 2\pi \, d\mu = \int_{-1}^1 2\pi \, d\mu = 4\pi \quad \text{d'où l'on tire } J_v = I_v \text{ et } U_v = (4\pi / C) I_v$$

$$\text{De même, } \int \mu \, d\omega = \int_{-1}^1 2\pi \mu \, d\mu = 0 \text{ d'où l'on tire } H_v = F_v = 0$$

$$\text{et } \int \mu^2 \, d\omega = \int_{-1}^1 2\pi \mu^2 \, d\mu = 4\pi/3 \text{ d'où l'on tire } K_v = I_v / 3 \text{ et } P_v = (4\pi / C) I_v / 3$$

Comme la densité volumique d'énergie par unité de fréquence est $U_v = (4\pi / C) I_v$, on en déduit que $P_v = U_v / 3$. Pression radiative par unité de fréquence ou densité volumique d'énergie par unité de fréquence sont donc synonymes. On a en résumé :

Cas du rayonnement isotrope

$$J_v = I_v, \quad H_v = F_v = 0, \quad K_v = I_v / 3 = J_v / 3, \quad P_v = (4\pi / C) I_v / 3 = U_v / 3, \quad U_v = (4\pi / C) I_v$$

Le flux total net est nul, ce qui signifie que le flux entrant est égal au flux sortant (en valeur absolue), ils sont égaux à

$$F_{\text{out}} = 2\pi \int I_v \mu \, d\mu \text{ pour } \mu \text{ variant de } 0 \text{ à } 1, \text{ soit } F_{\text{out}} = \pi I_v$$

$$F_{\text{in}} = 2\pi \int I_v \mu \, d\mu \text{ pour } \mu \text{ variant de } -1 \text{ à } 0, \text{ soit } F_{\text{in}} = -\pi I_v$$

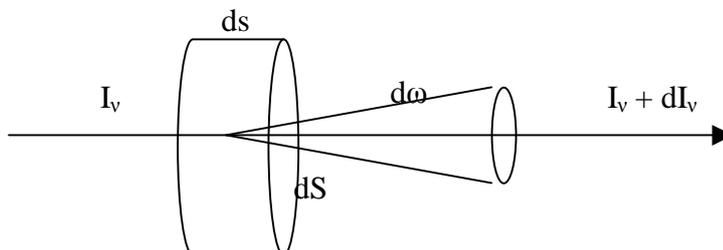
$$\text{On a bien } F_v = F_{\text{out}} + F_{\text{in}} = 0$$

4 - Diffusion, absorption, et émission du rayonnement

Pour résoudre les questions de transfert de rayonnement, on décrit les processus d'absorption, d'émission et de diffusion par des coefficients macroscopiques dépendant de la fréquence (les raies spectrales correspondent par exemple à une variation brusque du coefficient d'absorption ou d'émission dans un domaine de longueur d'onde très étroit de l'ordre de 0.1 nm). Considérons un volume dV de matière, de section dS et de longueur ds , de masse volumique ρ .

L'énergie absorbée par cet élément de volume pendant le temps dt , entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$, par un pinceau lumineux dans l'angle solide $d\omega$ est :

$$dE\nu = k_\nu I_\nu \rho \, dS \, ds \, d\nu \, d\omega \, dt$$



où k_ν est le coefficient d'absorption ou opacité, relié à la section efficace σ d'absorption par la relation :

$$k_\nu \rho = \sigma N$$

Le produit $k_\nu \rho ds$ est sans unité. σ s'exprime en m^2 , N est le nombre de particules par unité de volume en m^{-3} , ρ la masse volumique en $kg\ m^{-3}$, donc k_ν s'exprime en $m^2\ kg^{-1}$.

Le libre parcours moyen des photons (en mètres) est donné par $l_{pm} = 1 / (k_\nu \rho) = 1 / (\sigma N)$

En présence de processus de diffusion, on introduit un coefficient de diffusion, souvent appelé σ_ν de même unité que k_ν (et à ne pas confondre avec une section efficace) de telle sorte que l'énergie diffusée par l'élément de volume dV pendant le temps dt , entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$, par un pinceau lumineux dans l'angle solide $d\omega$ est:

$$dE_\nu = \sigma_\nu I_\nu \rho dS ds d\nu d\omega dt$$

Ainsi, l'effet combiné absorption/diffusion se traduit par l'ajout des coefficients $k_\nu + \sigma_\nu$

L'énergie émise par l'élément de volume pendant le temps dt , entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$, par un pinceau lumineux dans l'angle solide $d\omega$ est:

$$dE_\nu = j_\nu \rho dS ds d\nu d\omega dt$$

j_ν , coefficient d'émission, se mesure en $W\ kg^{-1}\ Hz^{-1}\ st^{-1}$ j_ν est homogène à $k_\nu I_\nu$

A l'équilibre thermodynamique avec le champ de rayonnement, on a $I_\nu = B_\nu(T)$ où $B_\nu(T)$ est la fonction de Planck, T la température, donc $j_\nu = k_\nu B_\nu(T)$. Lorsqu'on fait l'hypothèse, dans un milieu de température non uniforme, que les propriétés de la matière dans un petit volume sont les mêmes qu'à l'équilibre thermodynamique pour la température locale, on dit qu'on est en **ETL** (équilibre thermodynamique local).

5 - Equation de transfert du rayonnement

La variation d'énergie du pinceau qui traverse l'élément de volume dV pendant le temps dt , entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$, dans l'angle solide $d\omega$ est $dE_\nu = dI_\nu dS d\nu d\omega dt$ de sorte que:

$$dI_\nu dS d\nu d\omega dt = j_\nu \rho dS ds d\nu d\omega dt - k_\nu I_\nu \rho dS ds d\nu d\omega dt,$$

ce qui aboutit à l'équation de transfert $dI_\nu/ds = \rho (j_\nu - k_\nu I_\nu)$

On introduit la fonction source $S_\nu = j_\nu / k_\nu$ qui se mesure comme l'intensité en $W\ m^{-2}\ Hz^{-1}\ st^{-1}$

Avec cette définition, il vient : $dI_\nu/ds = -\rho k_\nu (I_\nu - S_\nu)$

La profondeur optique τ_ν est définie par $d\tau_\nu = -k_\nu \rho ds$

Il s'agit d'un nombre sans dimension qui augmente lorsque l'on s'enfonce dans l'intérieur stellaire. La profondeur optique est nulle à la surface de l'étoile (au dessus de son atmosphère).

On admet que l'on observe la couche située à la profondeur optique 1 pour la longueur d'onde de référence souvent prise à $\lambda = 500\ nm$.

Dans le coeur des raies d'absorption, comme k_ν est grand, la profondeur optique 1 est située plus haut dans l'atmosphère (ds petit) que dans le continu des raies (où k_ν est petit, donc ds plus grand). Pour cette raison, on observe plus haut dans le coeur des raies que dans le continu des raies (par

exemple, la chromosphère est visible dans le coeur des raies du Calcium ou des raies de Balmer de l'Hydrogène, alors que la photosphère apparaît dans les ailes des raies et les continus adjacents).

Avec cette définition, l'équation de transfert s'écrit $dI_\nu/d\tau_\nu = I_\nu - S_\nu$

dont la forme générale en tenant compte de la direction θ faite entre le rayon lumineux et la normale à la surface est :

$$\mu dI_\nu/d\tau_\nu = I_\nu - S_\nu \quad \text{avec} \quad \mu = \cos\theta$$

$d\tau_\nu = -k_\nu \rho ds = -\sigma N ds$, ds abscisse curviligne le long de la direction de propagation, k_ν coefficient d'absorption, ρ masse volumique, ou une formulation équivalente avec σ section efficace (m^2), N nombre d'atomes par unité de volume (m^{-3}).

L'intensité $I_\nu = I_\nu(\nu, \tau_\nu, \mu)$ dépend de la fréquence ν , de la profondeur optique τ_ν et de $\mu = \cos\theta$. Dans une atmosphère plan parallèle, on aurait $d\tau_\nu = -k_\nu \rho dz$ et I_ν dépendrait de ν , z , et μ .

La fonction source S_ν est égale à la fonction de Planck $B_\nu = (2 h \nu^3 / C^2) / [\exp(h \nu / k T) - 1]$ lorsqu'on est en **ETL** à la température T avec le champ de rayonnement, en l'absence de diffusion.

D'une façon générale, si l'on a à l'**ETL** une contribution d'absorption et d'émission thermique (k_ν , B_ν), plus une diffusion continue des photons **isotrope** (σ_ν , J_ν , diffusion Thomson par les électrons libres, Rayleigh par les atomes ou les molécules, σ_ν étant le coefficient de diffusion, J_ν l'intensité moyenne), alors on écrira :

$$S_\nu = (k_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu) / (k_\nu + \sigma_\nu),$$

Soit $S_\nu = B_\nu$ en absorption/émission pure de rayonnement, ou $S_\nu = J_\nu$ en diffusion pure isotrope.

Dans le cas d'une raie spectrale superposée sur un fond continu, on aurait $k_\nu = k_{c\nu} + k_{r\nu} \Phi_\nu$ où $k_{c\nu}$ désigne le coefficient d'absorption du continu, $k_{r\nu}$ celui de la raie pondéré par le profil d'absorption de la raie Φ_ν (un profil Lorentzien, Gaussien ou de Voigt en fonction de ν).

L'équation de transfert a pour solution générale :

$$I_\nu(\mu, \tau_1) = I_\nu(\mu, \tau_2) e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} + e^{\tau_1/\mu} \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\nu(t) e^{-t/\mu} dt/\mu$$

Rappel: lorsque $0 \leq \mu \leq 1$ l'intensité est sortante de l'étoile; si $-1 \leq \mu \leq 0$ l'intensité est entrante.

Cas où $0 \leq \mu \leq 1$:

L'intensité est sortante et provient du centre de l'étoile où l'on fait l'hypothèse que $\tau_2 \rightarrow \infty$

On obtient alors en posant $\tau = \tau_1$:

$$I_\nu(\mu, \tau) = e^{\tau/\mu} \int_{\tau}^{\infty} S_\nu(t) e^{-t/\mu} dt/\mu \quad \text{pour } 0 \leq \mu \leq 1$$

L'intensité émergente à la surface de l'étoile est donc $I_\nu(\mu, 0) = \int_0^{\infty} S_\nu(t) e^{-t/\mu} dt/\mu$

cas simples : $S(t) = a + b t$ donnera $I_\nu(\mu, \tau) = a + b \mu + b \tau$ et $I_\nu(\mu, 0) = a + b \mu$

$S(t) = a + b t + c t^2$ donnera $I_\nu(\mu, \tau) = a + b (\mu + \tau) + c (\tau^2 + 2\tau\mu + 2\mu^2)$ et $I_\nu(\mu, 0) = a + b \mu + 2c \mu^2$

Cas où $-1 \leq \mu \leq 0$:

L'intensité est entrante et on fait l'hypothèse que l'on connaît $I_\nu(\mu, 0)$ intensité entrante à la surface de l'étoile en $\tau_2 = 0$. On obtient alors en posant $\tau = \tau_1$:

$$I_\nu(\mu, \tau) = I_\nu(\mu, 0) e^{\tau/\mu} - e^{\tau/\mu} \int_0^\tau S_\nu(t) e^{-t/\mu} dt/\mu \quad \text{pour } -1 \leq \mu \leq 0$$

Si l'on néglige l'intensité entrante à la surface de l'étoile, alors on obtient la solution

$$I_\nu(\mu, \tau) = - e^{\tau/\mu} \int_0^\tau S_\nu(t) e^{-t/\mu} dt/\mu \quad \text{pour } -1 \leq \mu \leq 0$$

6 - Transfert simplifié du rayonnement au travers d'une couche mince (photosphère)

Si l'on connaît le rayonnement émergent à la base de la photosphère solaire $I_\nu(\mu, \tau_2)$ en $\tau = \tau_2$, qui peut être considéré comme égal approximativement à la fonction de Planck B_ν (spectre continu), alors on peut calculer l'intensité au sommet de la photosphère en $\tau = \tau_1$, connaissant la fonction source entre τ_1 et τ_2 . Considérons le haut de la photosphère comme surface de l'étoile (profondeur optique nulle) et supposons que la fonction source est nulle dans la photosphère, alors:

$$I_\nu(\mu, \tau_1) = B_\nu e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu}$$

Situons nous au sommet de la photosphère: $\tau_1 = 0$ implique $I_\nu(\mu, 0) = B_\nu e^{-\tau_2/\mu}$

Si le rayonnement est radial ($\mu = 1$) et si k_ν et ρ sont indépendants de l'altitude z , alors $d\tau_\nu = -k_\nu \rho dz$ s'intègre et donne $\tau_\nu = -k_\nu \rho z$ ($z = 0$ à la surface de l'étoile, $z < 0$ à l'intérieur, dans la photosphère). Dans ce cas très simplifié, on a:

$$I_\nu(0) = B_\nu e^{k_\nu \rho z}$$

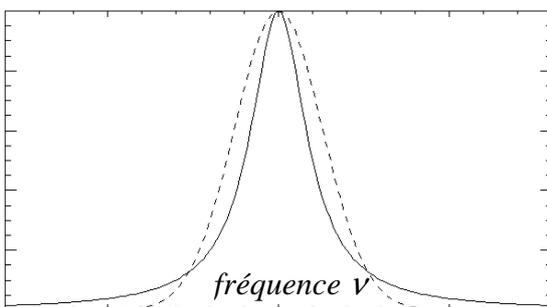
Appelons h l'épaisseur de la couche traversée ($z = -h$) et supposons que l'épaisseur optique correspondante ($k_\nu \rho h$) soit faible devant 1 (développement limité à l'ordre 1):

$$I_\nu(0) \approx B_\nu (1 - k_\nu \rho h) = B_\nu (1 - \sigma(\nu) N h)$$

On aura alors:

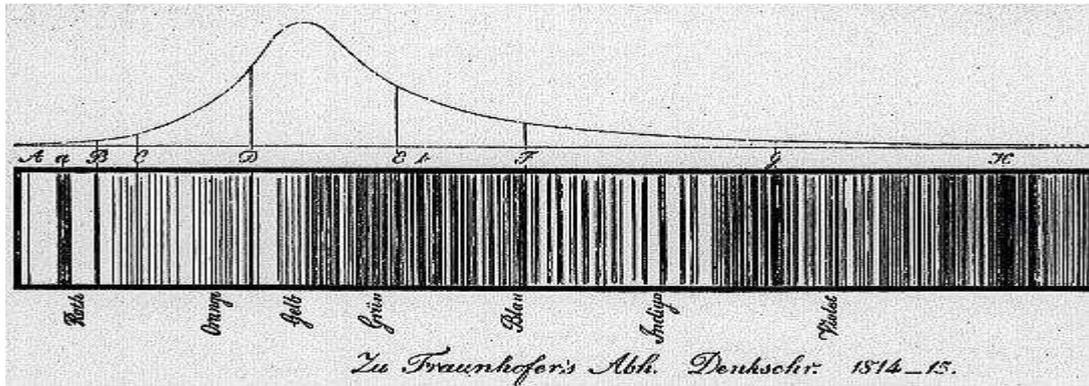
$I_\nu(0) \approx B_\nu$ en dehors des raies (spectre continu)

$I_\nu(0) \approx B_\nu - B_\nu \sigma(\nu) N h$ dans les raies avec $\sigma(\nu)$ section efficace (m^2) de profil typique gaussien ou lorentzien en fonction de la fréquence (ailes lorentziennes et coeur gaussien; $\sigma \rightarrow 0$ dans les ailes et on retrouve la fonction de Planck; σ grand dans les raies, et l'on obtient donc des dépressions dans le continu correspondant aux raies d'absorption de Fraunhofer, figures ci dessous).



Forme de la section efficace $\sigma(\nu)$ dans les raies spectrales (fréquence en abscisse).
trait continu: lorentzienne en $1 / (a^2 + \nu^2)$
tirets: gaussienne en $e^{-\nu^2/b^2}$
 (a et b constantes)





Raies larges dites "de Fraunhofer" superposées au spectre continu du soleil

7 - Moments de l'équation de transfert du rayonnement à fonction source isotrope

Moment d'ordre 0 de l'équation de transfert: $\mu dI_v/d\tau_v = I_v - S_v$

Il consiste à intégrer sur les 4π stéradian d'angle solide : $d[\int I_v \mu d\omega] / d\tau_v = \int I_v d\omega - \int S_v d\omega$

Remarquant que $\int I_v d\omega = 4\pi J_v$ et que $\int I_v \mu d\omega = 4\pi H_v$ et en faisant l'hypothèse que la fonction source S_v est isotrope, c'est à dire indépendante des angles θ et φ de telle sorte que $\int S_v d\omega = 4\pi S_v$, il vient avec $d\omega = -2\pi d\mu$, μ variant de 1 à -1 pour θ de 0 à π :

$$dH_v/d\tau_v = J_v - S_v$$

Moment d'ordre 1 de l'équation de transfert: $\mu dI_v/d\tau_v = I_v - S_v$

Il consiste à multiplier par μ puis à intégrer sur les 4π stéradian d'angle solide :

$$d[\int I_v \mu^2 d\omega] / d\tau_v = \int I_v \mu d\omega - \int S_v \mu d\omega$$

Remarquant que $\int I_v \mu d\omega = 4\pi H_v$ et que $\int I_v \mu^2 d\omega = 4\pi K_v$ et en faisant l'hypothèse que la fonction source S_v est isotrope, c'est à dire indépendante des angles θ et φ de telle sorte que $\int S_v \mu d\omega = S_v \int \mu d\omega = 0$, il vient :

$$dK_v/d\tau_v = H_v$$

8 - Condition de l'équilibre radiatif

Une atmosphère est en équilibre radiatif si l'énergie perdue par un pinceau de rayonnement est égale à l'énergie reçue par ce pinceau :

Energie perdue :

$$\int_0^\infty \left[\int_{4\pi} k_v I_v d\omega \right] dv = \int_0^\infty k_v \left[\int_{4\pi} I_v d\omega \right] dv = 4\pi \int_0^\infty k_v J_v dv \text{ car par définition } J_v = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_v d\omega$$

car k_v ne dépend pas de l'angle solide $d\omega$

Energie reçue :

$$\int_0^\infty \left[\int_{4\pi} j_v d\omega \right] dv = \int_0^\infty k_v \left[\int_{4\pi} S_v d\omega \right] dv = 4\pi \int_0^\infty k_v S_v dv \text{ car } j_v = k_v S_v \text{ et } S_v \text{ ne dépend pas de } \omega$$

La condition d'équilibre radiatif s'écrit donc ainsi :

$$\int_0^{\infty} k_v J_v dv = \int_0^{\infty} k_v S_v dv = \int_0^{\infty} j_v dv$$

Pour une **atmosphère grise** (k_v , J_v , S_v indépendants de v), cette égalité se traduit par $\mathbf{J = S}$, J et S étant les quantités indépendantes de la fréquence. Cette égalité reste vraie pour les quantités J et S intégrées sur la fréquence si k_v en est indépendant (il sort alors des intégrales sur v).

Reprenons l'équation de transfert $(\mu/\rho) dI_v/dz = -k_v I_v + j_v$

Et intégrons sur l'angle solide et les fréquences.

$$(1/\rho) d/dz \left[\int_0^{\infty} \int_{4\pi} I_v \mu d\omega dv \right] = \int_0^{\infty} \left[\int_{4\pi} (-k_v I_v + j_v) d\omega \right] dv = \int_{4\pi} \left[\int_0^{\infty} (-k_v I_v + j_v) dv \right] d\omega = 0$$

En effet, l'équilibre radiatif impose la condition $\int_0^{\infty} (-k_v I_v + j_v) dv = 0$

Comme on a par définition $F_v = \int I_v \mu d\omega$, flux radiatif net, on en déduit :

$$dF/dz = 0 \text{ ou } F = \int F_v dv \text{ est le flux net intégré sur les fréquences}$$

Le flux total d'énergie radiative (entrant + sortant) est donc **constant** dans l'atmosphère.

A l'équilibre thermodynamique, lorsque $I_v = B_v$ fonction de Planck indépendante des angles θ et φ ,

on a $\mathbf{F = 0}$ car $\int \mu d\omega = -2\pi \int \mu d\mu = 0$ ($\mu = \cos\theta$ variant de 1 à -1 et φ de 0 à 2π).

Le flux entrant est donc égal au flux sortant. Il se calcule aisément sachant que

$$B = \int_0^{\infty} B_v dv = \sigma T^4 / \pi \text{ en } W \text{ st}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

$$\mathbf{F_{out} = 2\pi \int_0^1 B \mu d\mu = \pi B = \sigma T^4 \text{ (en } W \text{ m}^{-2}\text{) et } \mathbf{F_{in} = -F_{out}}$$

9 - Un modèle simple : le cas gris et l'assombrissement centre bord

L'atmosphère grise a pour particularité d'avoir ses quantités (intensité, fonction source, coefficient d'absorption) indépendants de la fréquence : c'est donc un modèle d'école qui n'existe pas, mais présente néanmoins l'intérêt d'expliquer correctement l'assombrissement centre bord du soleil.

Nous reprenons les équations de base :

$$\mu dI_v/d\tau_v = I_v - S_v \text{ devient par intégration sur les fréquences } \mu dI/d\tau = I - S$$

avec $I = \int I_v dv$ et $S = \int S_v dv$

Nous supposons que la fonction source S est isotrope et peut se mettre sous la forme d'une fonction affine de la profondeur optique τ : $\mathbf{S(\tau) = a + b \tau}$ où a et b sont deux constantes.

$$\text{L'équation de transfert a pour solution } I(\mu, \tau) = e^{\tau/\mu} \int_{\tau}^{\infty} S(t) e^{-t/\mu} dt / \mu$$

Par intégration avec $S(\tau) = a + b \tau$, on obtient facilement $\mathbf{I(\mu, \tau) = a + b \mu + b \tau}$

Par intégration sur les 4π stéradian ($0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$), on calcule J , H et K :

$J = (1/4\pi) \int I d\omega = (-1/2) \int I d\mu$ (car $d\omega = -2\pi d\mu$) pour θ variant de 0 à π donc μ de 1 à -1.

On trouve $J(\tau) = S(\tau) = a + b \tau$

$H(\tau) = (1/4\pi) \int I \mu d\omega = (-1/2) \int I \mu d\mu = b/3 = H = \text{constante}$, d'où l'on pose $b = 3H$

Et le flux total net $F(\tau) = \int I \mu d\omega = 4\pi H(\tau) = 4\pi H = \text{constante}$

$K(\tau) = (1/4\pi) \int I \mu^2 d\omega = (-1/2) \int I \mu^2 d\mu = (a + b \tau)/3 = J(\tau)/3$

Pour exprimer a en fonction de H, on doit examiner les flux sortant et entrant en $\tau = 0$:

$$F_{\text{out}} = -2\pi \int_1^0 I \mu d\mu = 2\pi (a/2 + b/3)$$

$$\text{On a bien } F = F_{\text{out}} + F_{\text{in}} = 4\pi b/3 = 4\pi H$$

$$F_{\text{in}} = -2\pi \int_0^{-1} I \mu d\mu = 2\pi (-a/2 + b/3)$$

La détermination de a résulte du fait qu'il n'y a aucun flux entrant dans l'étoile en $\tau = 0$:

$F_{\text{in}} = 0$ implique $a = (2/3) b = 2H$, et par conséquent $F_{\text{out}} = F = 4\pi b/3 = 4\pi H$

En conclusion, on obtient le modèle simple :

$I(\mu, \tau) = H (2 + 3\mu + 3\tau)$ $J(\tau) = S(\tau) = H (2 + 3\tau)$

A la surface de l'étoile, on a $\tau = 0$, d'où : $I(\mu, 0) = H (2 + 3\mu)$

Au centre du disque stellaire, on a $\mu = \cos\theta = 1$, d'où : $I(1, 0) = I_{\text{centre}} = 5H$

On peut donc écrire la loi d'assombrissement centre bord : $I(\mu, 0) = I_{\text{centre}} (2/5 + 3/5 \mu)$

Celle ci prédit qu'**au limbe** ($\mu = \cos\theta = 0$) l'intensité n'est plus que de **0.4** I_{centre}

Remarque importante sur le cas gris: justification de la fonction source

Le résultat, ici exact, $K(\tau) = J(\tau)/3$ est souvent utilisé en première approximation dans les cas plus complexes et porte le nom « **d'approximation d'Eddington** ».

Dans une atmosphère où la fonction source est isotrope (c'est à dire indépendante des angles θ et φ), le moment d'ordre 0 de l'équation de transfert donne (paragraphe 7):

$$dH_v/d\tau_v = J_v - S_v$$

et le moment d'ordre 1 donne :

$$dK_v/d\tau_v = H_v.$$

Par intégration sur les fréquences, il vient $dH/d\tau = J - S$ et $dK/d\tau = H$

Comme l'équilibre radiatif impose $\int k_v J_v dv = \int k_v S_v dv$, cette équation devient dans le cas gris (k_v constant) : $\int J_v dv = \int S_v dv$, c'est à dire $J = S$ par intégration sur les fréquences.

Dans ce cas, on obtient $dH/d\tau = 0$ qui entraîne:

H = constante, et **K(τ) = H τ + Cte**.

L'hypothèse d'Eddington $K(\tau) = J(\tau)/3$ fournit $J(\tau) = 3H\tau + Cte = S(\tau)$, et concorde avec notre postulat de départ, à savoir que la fonction source est une fonction affine de la profondeur optique.

Variation de la température avec la profondeur

La connaissance de $J(\tau) = S(\tau) = H (2 + 3 \tau)$ permet d'établir une loi de variation de la température avec la profondeur optique, sachant qu'à l'équilibre thermodynamique on a $B_\nu = S_\nu$, où B_ν est la fonction de Planck. Après avoir intégré sur les fréquences on obtient $B = S$, avec (voir plus haut) :

$$B = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma T^4 / \pi \text{ en } \text{W st}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

On en déduit $\sigma T^4 / \pi = H (2 + 3 \tau)$, soit encore $T^4 = T_0^4 (1 + 3/2 \tau)$ **croissant avec τ** .
où T_0 est définie par $H = \sigma T_0^4 / (2\pi)$. $T_0 = T(\tau = 0)$ est la température **de surface** de l'étoile.

L'assombrissement centre bord traduit donc le fait que la température augmente avec la profondeur, ou décroît avec l'altitude. On peut relier la température de surface T_0 à la température effective T_{eff} en écrivant que le flux sortant de l'étoile, intégré sur les fréquences, est :

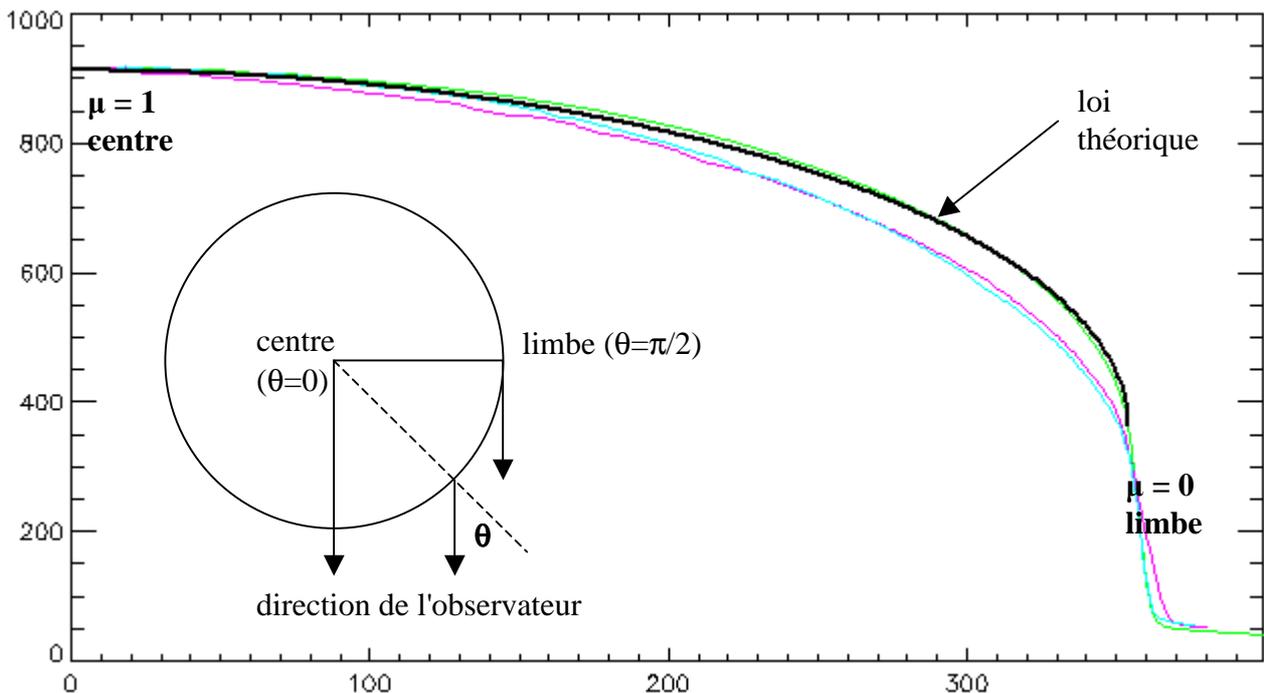
$$F_{\text{out}} = 4\pi H = \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad \text{d'où } H = \sigma T_{\text{eff}}^4 / (4\pi) = \sigma T_0^4 / (2\pi),$$

Ce qui donne finalement $T_{\text{eff}}^4 = 2 T_0^4$, donc $T_0 = 2^{-1/4} T_{\text{eff}} \approx 0.84 T_{\text{eff}}$

Pour le soleil, $T_{\text{eff}} = 5750 \text{ K}$ donne $T_0 = 4850 \text{ K}$ (température du haut de la photosphère).

10 - TP: Mesure de l'assombrissement centre bord du soleil

Effectuer des observations du soleil avec plusieurs filtres larges ($>10 \text{ nm}$), ainsi qu'en lumière blanche. Tracer les courbes d'assombrissement centre bord en fonction de $\mu = \cos\theta$ ($0 < \mu < 1$). Le résultat est-il conforme aux prédictions théoriques ?



chapitre 4

Optique de polarisation et ses applications

1 - Polariseur linéaire

Considérons une onde plane progressive harmonique (OPPH) se propageant le long de l'axe Oz et dont le champ électrique a pour vibration $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz + \phi), 0)$.

Rappelons que la polarisation est linéaire si $\phi = 0$ (orientation fixe du vecteur \mathbf{E}).

Dans les autres cas, elle est elliptique, les axes de l'ellipse étant non colinéaires aux axes Ox, Oy.

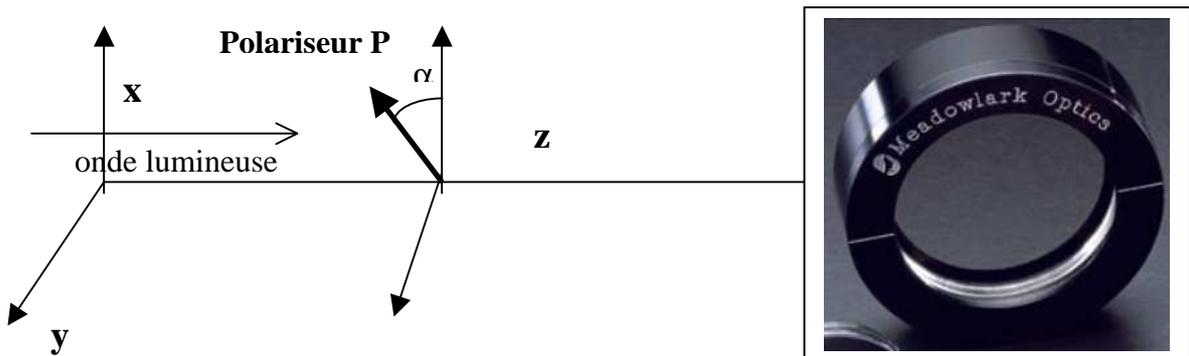
Si $\phi = \pm\pi/2$, la polarisation est elliptique et les axes de l'ellipse sont Ox et Oy.

Elle devient circulaire seulement si $E_x = E_y$ (la norme du vecteur \mathbf{E} est alors constante). Elle est dans ce dernier cas particulier circulaire gauche si $\phi = -\pi/2$ et circulaire droite si $\phi = \pi/2$ (impose le sens de rotation du vecteur \mathbf{E} , droit ou gauche).

Un polariseur d'axe Ox ne laisse passer que la composante $E_x \cos(\omega t - kz)$ selon Ox, un polariseur d'axe Oy ne laisse passer que la composante $E_y \cos(\omega t - kz + \phi)$ selon Oy, et un polariseur incliné d'un angle α quelconque dans le plan (xOy) laisse passer la combinaison $E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz + \phi) \sin(\alpha)$. La lumière sortant d'un polariseur est polarisée linéairement (on dit aussi à polarisation rectiligne), ce qui signifie que la vibration possède une direction fixe dans l'espace, celle de l'axe d'acceptance du polariseur (direction que l'on schématise par une flèche). L'intensité vaut $I = \langle [E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz + \phi) \sin(\alpha)]^2 \rangle$, soit si est ϕ constant:

$$I = \frac{1}{2} [E_x^2 \cos^2(\alpha) + E_y^2 \sin^2(\alpha) + E_x E_y \cos(\phi) \sin(2\alpha)].$$

Lorsque ϕ est aléatoire (lumière naturelle), $\langle \cos(\phi) \rangle = 0$ et il reste $I = \frac{1}{2} [E_x^2 \cos^2(\alpha) + E_y^2 \sin^2(\alpha)]$.



Si la lumière incidente est polarisée linéairement, par exemple selon Ox: $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz), 0, 0)$:

- un polariseur d'axe Ox ($\alpha = 0$) transmet $E_x \cos(\omega t - kz)$, donc toute la lumière incidente;
- un polariseur d'axe Oy ($\alpha = \pi/2$) ne transmet rien; il y a extinction totale;
- un polariseur d'axe quelconque (α) transmet $E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha)$, donc une fraction de la lumière incidente; si l'intensité incidente est $I_0 = \langle [E_x \cos(\omega t - kz)]^2 \rangle = E_x^2/2$, alors le polariseur transmet l'intensité $I = I_0 \cos^2(\alpha)$. Cette intensité est donc modulée par le facteur $\cos^2(\alpha)$.

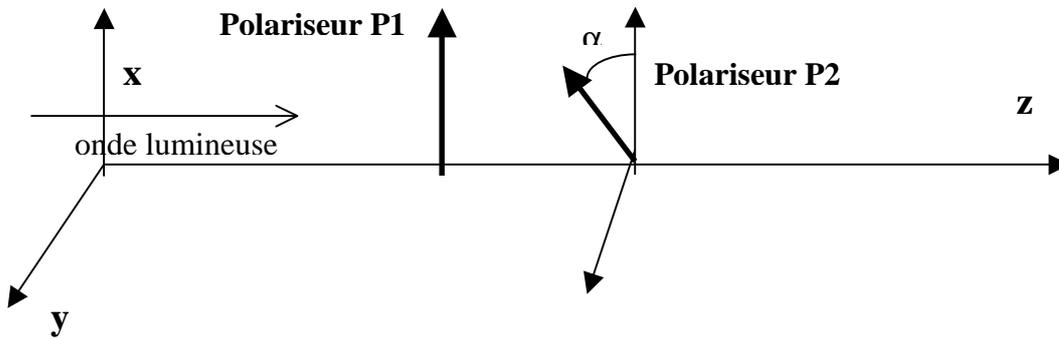
2 - Polariseurs linéaires croisés

Considérons un polariseur P_1 d'axe Ox et un second polariseur P_2 incliné d'un angle α quelconque dans le plan (xOy). L'onde incidente est représentée par $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz + \phi), 0)$.

La lumière issue du premier polariseur est de la forme $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz), 0, 0)$ et n'a de composante que sur l'axe Ox. La lumière issue du second polariseur s'écrit $E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha)$ et son intensité

est donnée par $I = I_0 \cos^2(\alpha)$ où $I_0 = \langle [E_x \cos(\omega t - kz)]^2 \rangle = E_x^2/2$. Cette intensité est modulée par le facteur $\cos^2(\alpha)$.

Il y a extinction lorsque $\alpha = \pi/2 + k\pi$ (donc lorsque les axes des polariseurs sont orthogonaux).



3 - Lames retardatrices

Un retardateur est un élément biréfringent (cristal de spath, de quartz, de MgF2, cristal liquide) possédant deux axes orthogonaux (rapide "Fast" et lent "Slow"). La vitesse de phase V de la vibration (C/n_o et C/n_e pour les rayons ordinaire et extraordinaire, qui sont spatialement confondus et parallèles à Oz) diffère selon que le champ électrique est porté ou projeté sur l'axe rapide ou sur l'axe lent. Ces deux axes sont orthogonaux à la direction de propagation Oz et contenus dans le plan xOy . Ils introduisent un retard δ entre eux (déphasage) qui est fonction de l'épaisseur e traversée et de la différence Δn des indices de réfraction ordinaire n_o et extraordinaire n_e ($\Delta n = 0.17$ pour le spath, -0.01 pour le quartz). Une onde en $\cos(\omega t)$ en entrée devient $\cos(\omega t + \phi)$ en sortie, où :

$\phi_F = - (2 \pi / \lambda) (e C / V_F)$ est la phase sur l'axe "Fast"

$\phi_S = - (2 \pi / \lambda) (e C / V_S)$ est la phase sur l'axe "Slow" avec $V_S < V_F$

Le déphasage entre les axes "Slow" et "Fast" (retard $\delta < 0$ à **ajouter à l'axe "Slow"**) est donné par :

$\phi_S = \phi_F + \delta$, d'où $\delta = (2 \pi / \lambda) e C (1/V_F - 1/V_S) < 0$ et avec $n = C/V$ (V vitesse de phase),

$|\delta| = (2 \pi / \lambda) (|\Delta n| e)$ où λ est la longueur d'onde dans le vide

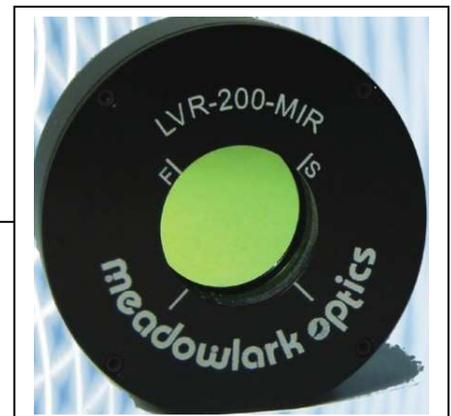
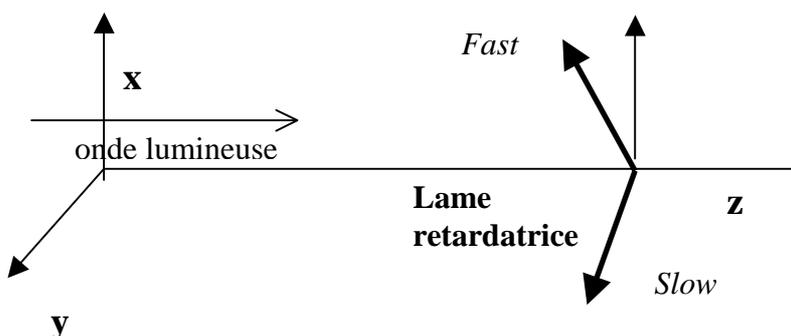
Pour le spath, l'axe "Slow" correspond au rayon ordinaire ($n_o > n_e$); pour le quartz c'est le contraire.

Lorsque $\delta = 0$, on a une simple lame à faces parallèles

Lorsque $\delta = -\pi/2$ ou $-3\pi/2$, on a une lame **quart d'onde**

Lorsque $\delta = -\pi$, on a une lame **demi onde**

Lorsque $\delta = -2\pi$, on a une lame **onde**



Attention ! Δn est une fonction de λ , de sorte qu'une lame retardatrice n'est en général exactement quart d'onde ou demi onde que pour seulement **une** (lames ordinaires) ou **deux** valeurs (lames dites achromatiques) de la longueur d'onde. Dans le cas des cristaux liquides, le cristal est disposé entre 2 électrodes transparentes entre lesquelles on ajuste une différence de potentiel qui permet de faire varier $|\delta|$ de façon continue entre 0 et 2π . On a alors un retardateur variable, qui peut devenir exactement quart ou demi onde pour n'importe quelle longueur d'onde selon la tension appliquée.

Une lame quart d'onde sert à transformer une polarisation linéaire en polarisation circulaire, et vice versa. Une lame demi onde sert à obtenir une polarisation linéaire symétrique par rapport aux axes "Fast" et "Slow".

Material	n_o	n_e	Δn
beryl $\text{Be}_3\text{Al}_2(\text{SiO}_3)_6$	1.602	1.557	-0.045
calcite CaCO_3	1.658	1.486	-0.172
calomel Hg_2Cl_2	1.973	2.656	+0.683
ice H_2O	1.309	1.313	+0.014
lithium niobate LiNbO_3	2.272	2.187	-0.085
magnesium fluoride MgF_2	1.380	1.385	+0.006
quartz SiO_2	1.544	1.553	+0.009
ruby Al_2O_3	1.770	1.762	-0.008
rutile TiO_2	2.616	2.903	+0.287
peridot $(\text{Mg}, \text{Fe})_2\text{SiO}_4$	1.690	1.654	-0.036
sapphire Al_2O_3	1.768	1.760	-0.008
sodium nitrate NaNO_3	1.587	1.336	-0.251
tourmaline (complex silicate)	1.669	1.638	-0.031
zircon, high ZrSiO_4	1.960	2.015	+0.055
zircon, low ZrSiO_4	1.920	1.967	+0.047

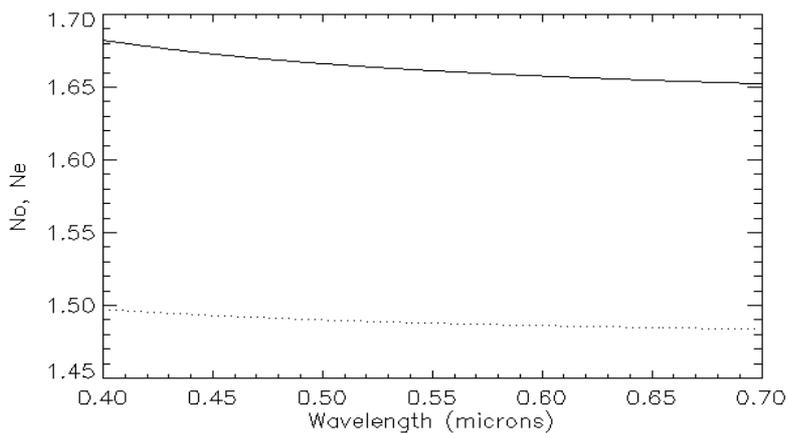
Valeurs des indices de réfraction (à $\lambda = 590 \text{ nm}$) ordinaires n_o et extraordinaires n_e pour quelques cristaux

En pratique, n_o et n_e dépendent de la longueur d'onde de la lumière. Par exemple :
 indice ordinaire du spath (λ en microns):

$$n_o = (2.69705 + 0.0192064 / (\lambda^2 - 0.01820) - 0.0151624 \lambda^2)^{1/2}$$

indice extraordinaire du spath (λ en microns):

$$n_e = (2.18438 + 0.0087309 / (\lambda^2 - 0.01018) - 0.0024411 \lambda^2)^{1/2}$$



n_o et n_e en fonction de la longueur d'onde pour le spath

Prenons maintenant une onde incidente représentée par \mathbf{E} ($E_x \cos(\omega t - kz)$, $E_y \cos(\omega t - kz + \phi)$, 0).

a) Lame quart d'onde

La lame quart d'onde introduit un **déphasage de $-\pi/2$** entre les composantes du champ électrique \mathbf{E} projetées sur les axes "Fast" et "Slow" (ajouter $-\pi/2$ sur "Slow").

- Si les axes (Fast, Slow) d'une lame quart d'onde sont colinéaires respectivement aux axes Ox et Oy, nous aurons en sortie le champ:

$(E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz + \phi - \pi/2), 0)$ c'est à dire $(E_x \cos(\omega t - kz), E_y \sin(\omega t - kz + \phi), 0)$.

Il s'agit d'une polarisation elliptique gauche.

- Si les axes (Slow, Fast) de la lame quart d'onde sont colinéaires respectivement aux axes Ox et Oy, nous aurons en sortie le champ:

$(E_x \cos(\omega t - kz - \pi/2), E_y \cos(\omega t - kz + \phi), 0)$ c'est à dire $(E_x \cos(\omega t - kz - \pi/2), -E_y \sin(\omega t - kz + \phi - \pi/2), 0)$.

Il s'agit d'une polarisation elliptique droite.

- Si l'on part d'une polarisation linéaire $(E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz), 0)$, on obtient en sortie:

$(E_x \cos(\omega t - kz), E_y \sin(\omega t - kz), 0)$ si l'axe "Fast" est Ox, ou bien

$(E_x \cos(\omega t - kz - \pi/2), -E_y \sin(\omega t - kz - \pi/2), 0)$ si l'axe "Slow" est Ox.

Lorsque $E_x = E_y$, la polarisation elliptique devient circulaire puisque la norme du vecteur **E** est constante. Le vecteur **E** tourne alors vers la gauche (circulaire gauche) ou vers la droite (circulaire droite) selon le positionnement des axes (Fast, Slow) de la lame dans le repère (xOy). Une lame quart d'onde peut donc transformer une polarisation linéaire en circulaire, et vice versa.

Si Ox est l'axe "Fast", le déphasage sur Oy (axe lent) est $-\pi/2$ et on obtient:

$E_x (\cos(\omega t - kz), \sin(\omega t - kz), 0)$. C'est une polarisation circulaire gauche.

Si Ox est l'axe "Slow", le déphasage sur Ox est $-\pi/2$ et on obtient:

$E_x (\cos(\omega t - kz - \pi/2), -\sin(\omega t - kz - \pi/2), 0)$. C'est une polarisation circulaire droite.

b) Lame demi onde

La lame demi onde introduit un **déphasage de $-\pi$** entre les composantes du champ électrique **E** projetées sur les axes "Fast" et "Slow" (ajouter $-\pi$ sur "Slow").

Si les axes d'une lame demi d'onde sont colinéaires aux axes Ox et Oy, nous aurons en sortie:

$(E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz + \phi - \pi), 0) = (E_x \cos(\omega t - kz), -E_y \cos(\omega t - kz + \phi), 0)$ si Ox est "Fast" ou bien

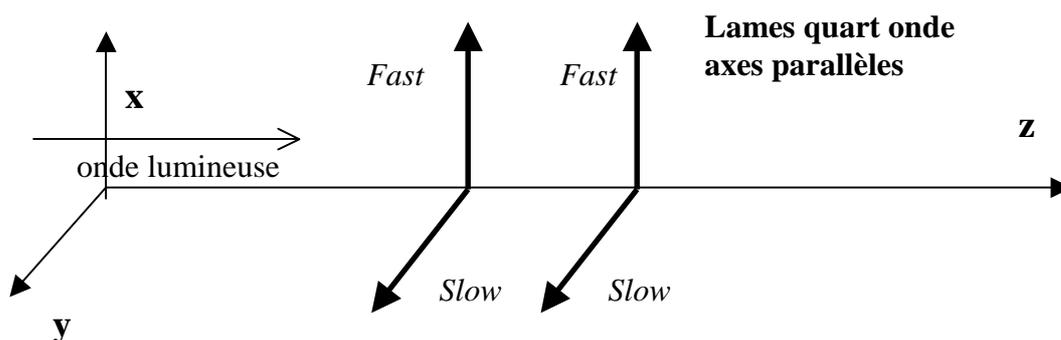
$(E_x \cos(\omega t - kz - \pi), E_y \cos(\omega t - kz + \phi - \pi), 0) = (-E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz + \phi), 0)$ si Ox est "Slow"

La lame demi d'onde introduit donc un changement de signe d'une composante, c'est à dire une symétrie par rapport aux axes "Fast" et "Slow".

4 - Association de deux lames en série

On s'intéresse au cas où les axes des lames sont parallèles ou orthogonaux.

a) Pour deux lames quart d'onde en série:



Pour une lame d'épaisseur e , avec ω pulsation de l'onde, V_F et V_S vitesses de propagation selon les axes Fast et Slow, le retard de l'axe "Slow" par rapport à l'axe "Fast" est donné par:

$$\delta = \omega e (1/V_F - 1/V_S)$$

Prenons maintenant deux lames en série d'épaisseur e_1 et e_2 .

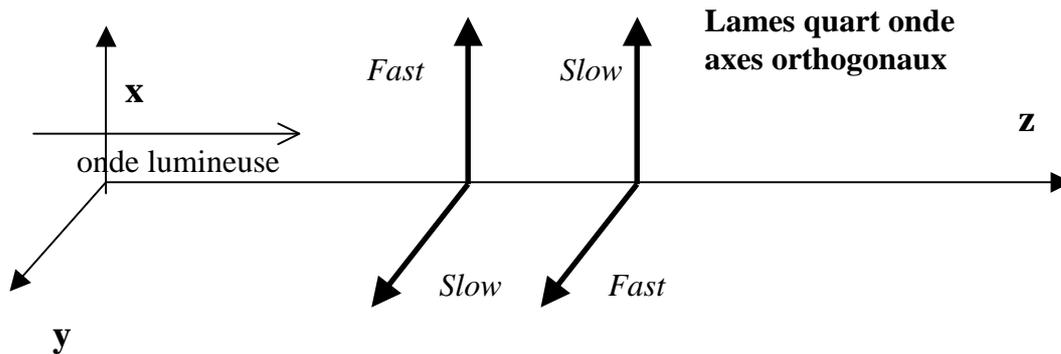
Lorsque les axes sont parallèles, les retards s'ajoutent sur l'axe "Slow":

- le retard sur Oy à la sortie de la première lame est $\delta_1 = \omega e_1 (1/V_F - 1/V_S) = -\pi/2 + 2p\pi$

- le retard sur Oy à la sortie de la seconde lame est $\delta_2 = \omega e_2 (1/V_F - 1/V_S) = -\pi/2 + 2n\pi$

Le retard cumulé sur l'axe Oy par rapport à l'axe Ox est donc $\delta = \delta_1 + \delta_2 = -\pi$ modulo 2π

On a donc une lame équivalente à demi onde.



Lorsque les axes sont tournés de 90° entre les deux lames quart d'onde:

- le retard sur Oy à la sortie de la première lame est $\delta_1 = \omega e_1 (1/V_F - 1/V_S) = -\pi/2 + 2p\pi$

- le retard sur Ox à la sortie de la seconde lame est $\delta_2 = \omega e_2 (1/V_F - 1/V_S) = -\pi/2 + 2n\pi$

Les deux axes Ox et Oy restent en phase à 2π près; on a donc une lame zéro onde (si $e_1 = e_2$) ou onde d'ordre multiple (si $e_1 \neq e_2$), qui reste sans effet, comme une lame à faces parallèles.

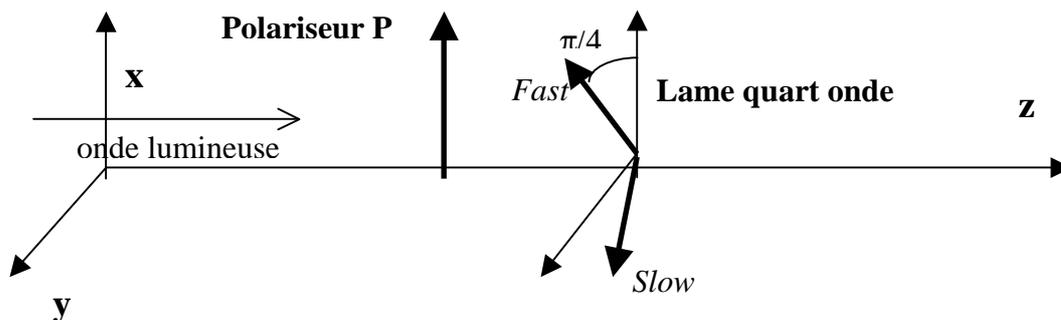
b) Deux lames demi onde en série seront pour les mêmes raisons équivalentes à une lame zéro onde ou onde d'ordre multiple, donc sans effet, que leurs axes respectifs soient parallèles ou orthogonaux. Dans le premier cas (axes parallèles), le retard cumulé sur l'axe "Slow" Oy est:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = (-\pi + 2p\pi) + (-\pi + 2n\pi) = 0 \text{ modulo } 2\pi \text{ (onde d'ordre multiple).}$$

Dans le second cas (axes orthogonaux), Ox et Oy restent en phase à 2π près (lame zéro onde si $e_1 = e_2$ ou onde d'ordre multiple si $e_1 \neq e_2$).

5 - Polariseurs circulaires droits (RH) et gauches (LH) - (Right/Left Handed)

Ils sont constitués d'un polariseur linéaire assemblé à une lame quart d'onde orientée à 45° .



Partons d'une onde incidente représentée par \mathbf{E} ($E_x \cos(\omega t - kz)$, $E_y \cos(\omega t - kz + \phi)$, 0). Le polariseur laisse passer la composante sur Ox et transmet ($E_x \cos(\omega t - kz)$, 0, 0).

- Dans le système d'axes (Fast, Slow) propre à la lame quart d'onde, le champ incident sur la lame a pour coordonnées:

$$\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz) \sqrt{2}/2, -E_x \cos(\omega t - kz) \sqrt{2}/2, 0).$$

et en sortie, dans le système d'axes (Fast, Slow), le champ sortant a pour coordonnées:

$$\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz) \sqrt{2}/2, -E_x \cos(\omega t - kz + \delta) \sqrt{2}/2, 0),$$

$$\text{où } \delta = \omega e (1/V_F - 1/V_S) = -\pi/2 + 2k\pi$$

avec ω pulsation de l'onde, e épaisseur de la lame, V_F et V_S vitesses de propagation selon les axes rapides et lents.

\mathbf{E} s'écrit donc ($E_x \cos(\omega t - kz) \sqrt{2}/2$, $-E_x \sin(\omega t - kz) \sqrt{2}/2$, 0) dans le repère (Fast, Slow).

La norme de \mathbf{E} est constante. Le vecteur \mathbf{E} tourne vers la droite lorsqu'on regarde la lame depuis l'extrémité de l'axe Oz. On obtient donc une polarisation circulaire droite (Right Handed, RH).

- Si l'on place en sortie un polariseur dont l'axe d'acceptance fait un angle α avec l'axe "Fast", il transmet le signal $\sqrt{2}/2 E_x [\cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) - \sin(\omega t - kz) \sin(\alpha)]$ soit $\sqrt{2}/2 E_x \cos(\omega t - kz + \alpha)$ dont l'intensité est constante *quelle que soit son orientation* et égale à $1/4 E_x^2$.

- Si l'on intervertit les axes (Fast, Slow) en tournant la lame quart d'onde de 90° par exemple, \mathbf{E} s'écrit dans le repère (Slow, Fast) en entrée ($E_x \cos(\omega t - kz) \sqrt{2}/2$, $-E_x \cos(\omega t - kz) \sqrt{2}/2$, 0), et en sortie $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz + \delta) \sqrt{2}/2$, $-E_x \cos(\omega t - kz) \sqrt{2}/2$, 0) où $\delta = -\pi/2 + 2k\pi$, ce qui se transforme en:

$$\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz - \pi/2) \sqrt{2}/2, E_x \sin(\omega t - kz - \pi/2) \sqrt{2}/2, 0)$$

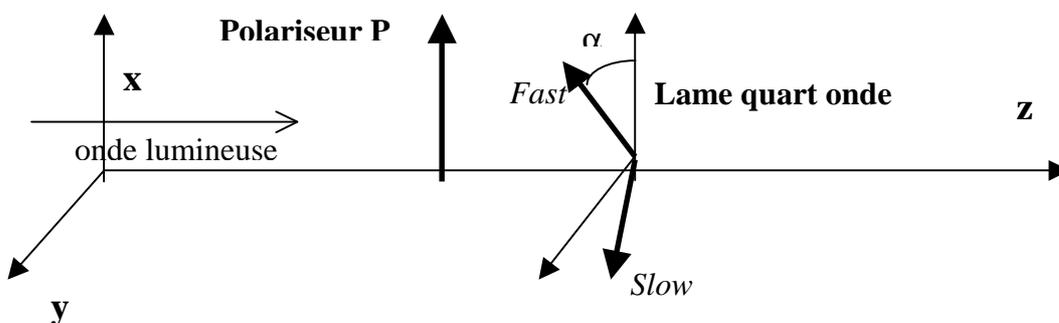
La norme de \mathbf{E} est constante. Le vecteur \mathbf{E} tourne vers la gauche lorsqu'on regarde la lame depuis l'extrémité de l'axe Oz. On obtient une polarisation circulaire gauche (Left Handed, LH).

- Si l'on place en sortie un polariseur dont l'axe d'acceptance fait un angle α avec l'axe "Slow", il transmet le signal $\sqrt{2}/2 E_x [\cos(\omega t - kz - \pi/2) \cos(\alpha) + \sin(\omega t - kz - \pi/2) \sin(\alpha)]$ soit $\sqrt{2}/2 E_x \cos(\omega t - kz - \pi/2 - \alpha)$, ou encore $\sqrt{2}/2 E_x \sin(\omega t - kz - \alpha)$ dont l'intensité est constante *quelle que soit son orientation*.

Les polariseurs circulaires servent donc à créer des polarisations circulaires droites ou gauches (selon l'orientation des axes Fast, Slow de la lame quart d'onde par rapport à l'axe d'acceptance du polariseur).

6 - Polariseur linéaire et lame quart d'onde: polarisation elliptique ou circulaire

On constitue le montage suivant, la lame quart d'onde étant tournée d'un angle α quelconque.



L'onde incidente est représentée par \mathbf{E} ($E_x \cos(\omega t - kz)$, $E_y \cos(\omega t - kz + \phi)$, 0). Le polariseur laisse passer la composante sur Ox et transmet ($E_x \cos(\omega t - kz)$, 0, 0).

- Dans le système d'axes (Fast, Slow) propre à la lame quart d'onde, le champ incident sur la lame a pour coordonnées: $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha), -E_x \cos(\omega t - kz) \sin(\alpha), 0)$.
 et en sortie dans le système d'axes (Fast, Slow), \mathbf{E} devient:
 $(E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha), -E_x \cos(\omega t - kz + \delta) \sin(\alpha), 0)$,

avec $\delta = \omega e (1/V_F - 1/V_S) = -\pi/2 + 2k\pi$,

\mathbf{E} s'écrit $(E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha), -E_x \sin(\omega t - kz) \sin(\alpha), 0) = (E_1, E_2, 0)$

La polarisation est elliptique car $(E_1 / \cos(\alpha))^2 + (E_2 / \sin(\alpha))^2 = E_x^2 = \text{constante}$ et devient circulaire lorsque la norme du vecteur \mathbf{E} est constante, seulement quand α prend les valeurs $\pi/4$ (circulaire droite) ou $-\pi/4$ (circulaire gauche). L'intensité sortante vaut $I = \frac{1}{2} E_x^2$ et est constante.

En revenant aux axes Ox, Oy , on obtient:

$\mathbf{E} = E_x [\cos(\omega t - kz) \cos^2(\alpha) + \sin(\omega t - kz) \sin^2(\alpha), \cos(\alpha)\sin(\alpha) (\cos(\omega t - kz) - \sin(\omega t - kz)), 0]$

- Si l'on place en sortie un second polariseur parallèle au premier, seule la composante

$E_x [\cos(\omega t - kz) \cos^2(\alpha) + \sin(\omega t - kz) \sin^2(\alpha)]$ est transmise,

et son intensité vaut $I = \frac{1}{2} E_x^2 (\cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha))$.

Or $(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))^2 = 1 = \cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha) + 2 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha)$, d'où $I = \frac{1}{2} E_x^2 (1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\alpha))$

Elle est minimale (mais pas nulle) lorsque α vaut $\pi/4$ modulo $\pi/2$.

- Si l'on place en sortie un second polariseur orthogonal au premier, seule la composante

$E_x [\cos(\alpha)\sin(\alpha) (\cos(\omega t - kz) - \sin(\omega t - kz))]$ est transmise

et son intensité vaut $I = E_x^2 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha)$, d'où $I = \frac{1}{4} E_x^2 \sin^2(2\alpha)$

Elle est nulle lorsque α vaut 0 modulo $\pi/2$.

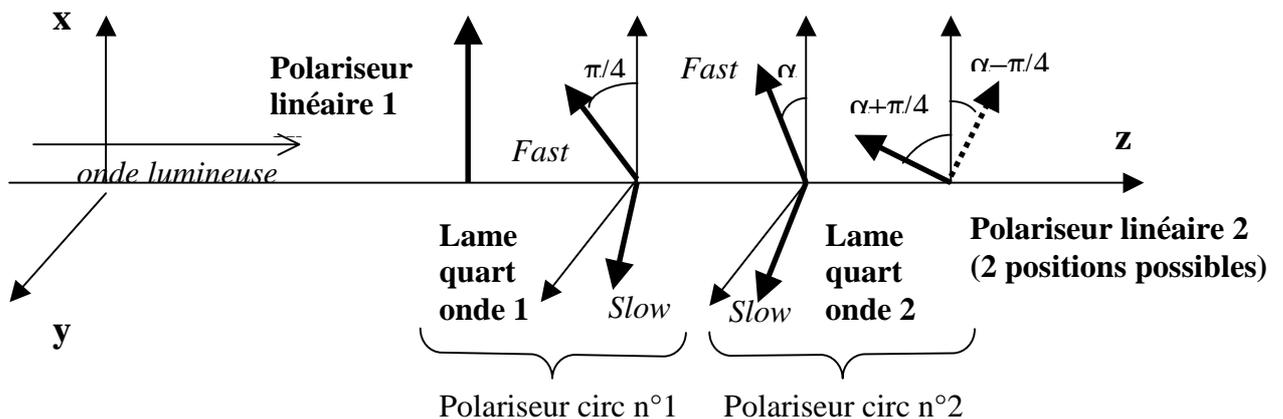
7 - Polariseurs circulaires en série

Reprenons une onde incidente représentée par $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz + \phi), 0)$ tombant sur un polariseur circulaire (polariseur linéaire n°1 d'axe Ox + lame quart d'onde n°1 à 45°).

Effet du polariseur circulaire droit n°1

Le polariseur n°1 transmet $(E_x \cos(\omega t - kz), 0, 0)$ qui devient dans le système d'axes (Fast, Slow) de la lame quart d'onde n°1 $\mathbf{E} = E_x \sqrt{2}/2 (\cos(\omega t - kz), -\cos(\omega t - kz), 0)$ en entrée.

En sortie de la lame n°1, on a dans le repère (Fast, Slow) $\mathbf{E} = E_x \sqrt{2}/2 (\cos(\omega t - kz), -\sin(\omega t - kz), 0)$ en appliquant un déphasage de $-\pi/2$ à l'axe "Slow". La lumière sortante est donc polarisée circulairement. La norme de \mathbf{E} vaut $\frac{1}{2} E_x^2$. C'est l'intensité issue du polariseur circulaire n°1.



Effet du polariseur circulaire droit n°2

La lumière attaque ensuite un second polariseur circulaire de même nature dont la lame quart d'onde fait face à la lame n°1, les axes des deux lames faisant entre eux un angle égal à $\pi/4 - \alpha$.

Dans le repère (Fast, Slow) de la lame n°2, le champ électrique entrant a pour coordonnées :

$$\mathbf{E} = E_x \sqrt{2}/2 (\cos(\omega t - kz) \cos(\pi/4 - \alpha) + \sin(\omega t - kz) \sin(\pi/4 - \alpha), \cos(\omega t - kz) \sin(\pi/4 - \alpha) - \sin(\omega t - kz) \cos(\pi/4 - \alpha), 0)$$

$$\text{soit } \mathbf{E} = E_x \sqrt{2}/2 (\cos(\omega t - kz - \pi/4 + \alpha), -\sin(\omega t - kz - \pi/4 + \alpha), 0)$$

En sortie de la lame n°2 avec un déphasage de $-\pi/2$ appliqué à l'axe "Slow", on obtient dans son repère propre (Fast, Slow):

$$\mathbf{E} = E_x \sqrt{2}/2 (\cos(\omega t - kz - \pi/4 + \alpha), \cos(\omega t - kz - \pi/4 + \alpha), 0)$$

Ce champ doit être maintenant projeté sur la bissectrice des axes (Fast, Slow) de la lame n°2 qui représente l'axe d'acceptance du polariseur linéaire n°2. On obtient alors en sortie une polarisation linéaire à $\alpha + \pi/4$ de l'axe Ox et représentée par la vibration :

$$E = E_x \sqrt{2}/2 (\cos(\omega t - kz - \pi/4 + \alpha) \sqrt{2}/2 + \cos(\omega t - kz - \pi/4 + \alpha) \sqrt{2}/2) = E_x \cos(\omega t - kz - \pi/4 + \alpha)$$

dont l'intensité est constante, *indépendante de l'angle entre les deux polariseurs circulaires*, et égale à $1/2 E_x^2$.

Polariseurs circulaires de nature différente (droit, gauche)

Si le second polariseur circulaire n'est pas de même nature que le premier, c'est que le polariseur n°2 fait un angle de $\alpha - \pi/4$ avec l'axe Ox. On a vu qu'en sortie de la lame 2, on a dans le repère (Fast, Slow):

$$\mathbf{E} = E_x \sqrt{2}/2 (\cos(\omega t - kz - \pi/4 + \alpha), \cos(\omega t - kz - \pi/4 + \alpha), 0)$$

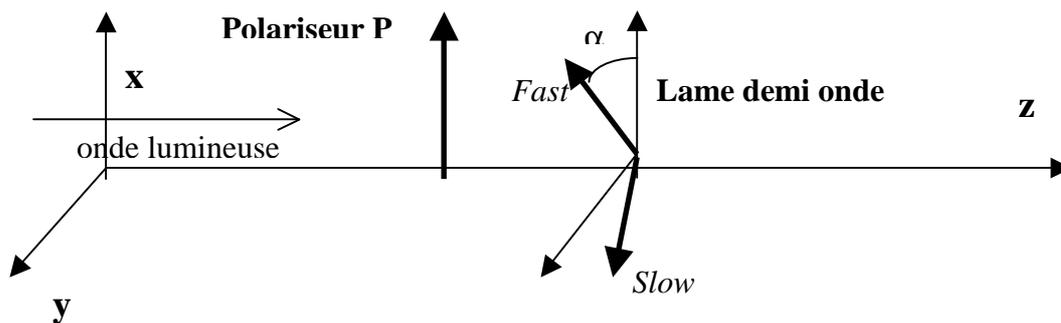
Ce champ doit être maintenant projeté sur l'axe d'acceptance du polariseur n°2. On obtient alors en sortie une extinction totale, puisque la vibration projetée est :

$$E_x \sqrt{2}/2 (\cos(\omega t - kz - \pi/4 + \alpha) \sqrt{2}/2 - \cos(\omega t - kz - \pi/4 + \alpha) \sqrt{2}/2) = 0$$

dont l'intensité est nulle *quelque soit l'angle entre les deux polariseurs circulaires*.

8 - Polariseur linéaire et lame demi d'onde: rotateur de polarisation linéaire

On constitue le montage suivant, la lame demi d'onde étant tournée d'un angle α quelconque.



Partons d'une onde incidente représentée par $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz + \phi), 0)$. Le polariseur laisse passer la composante sur Ox et transmet $(E_x \cos(\omega t - kz), 0, 0)$ d'intensité $1/2 E_x^2$.

Dans le système d'axes (Fast, Slow) propre à la lame demi d'onde, le champ incident sur la lame a pour coordonnées: $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha), -E_x \cos(\omega t - kz) \sin(\alpha), 0)$.

et en sortie $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha), -E_x \cos(\omega t - kz + \delta) \sin(\alpha), 0)$,

avec $\delta = \omega e (1/V_F - 1/V_S) = -\pi + 2k\pi$

\mathbf{E} s'écrit $(E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha), E_x \cos(\omega t - kz) \sin(\alpha), 0) = E_x \cos(\omega t - kz) (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$

En revenant aux axes Ox, Oy, on obtient par projection:

$$\mathbf{E} = E_x \cos(\omega t - kz) (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha), 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha), 0) = E_x \cos(\omega t - kz) (\cos(2\alpha), \sin(2\alpha), 0)$$

Il s'agit d'une polarisation linéaire tournée de 2α par rapport à Ox . L'intensité sortante est égale à l'intensité entrante et est indépendante de la rotation.

L'association d'un polariseur et d'une lame demi onde est donc un rotateur de polarisation linéaire.

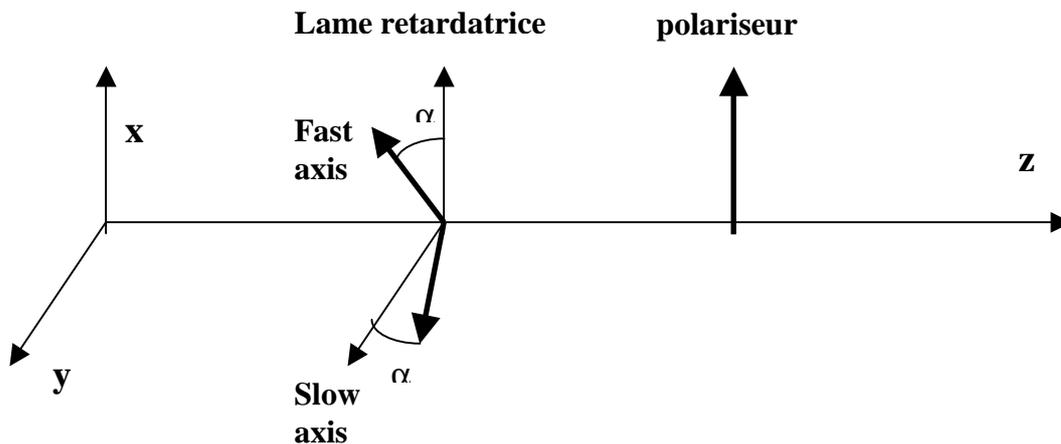
La rotation est de $\pi/2$ lorsque α vaut $\pi/4$.

- Si l'on place en sortie un second polariseur parallèle au premier, seule la composante $E_x \cos(\omega t - kz) \cos(2\alpha)$ est transmise, et son intensité vaut $I = \frac{1}{2} E_x^2 \cos^2(2\alpha)$. Elle est nulle lorsque α vaut $\pi/4$ modulo $\pi/2$.

- Si l'on place en sortie un second polariseur orthogonal au premier, seule la composante $E_x \cos(\omega t - kz) \sin(2\alpha)$ est transmise, et son intensité vaut $I = \frac{1}{2} E_x^2 \sin^2(2\alpha)$. Elle est nulle lorsque α vaut 0 modulo $\pi/2$.

9 - Un polarimètre simple

Considérons un polarimètre constitué d'un retardateur introduisant un déphasage δ et dont les axes font un angle α avec les axes Ox et Oy (azimuth α), suivi d'un polariseur P orienté selon l'axe Ox .



Partons d'une onde incidente représentée par $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz + \phi), 0)$.

En projection sur les axes (Fast, Slow), on a en entrée sur la lame retardatrice:

$$E_F = E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz + \phi) \sin(\alpha),$$

$$E_S = - E_x \cos(\omega t - kz) \sin(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz + \phi) \cos(\alpha),$$

Et en sortie de la lame retardatrice:

$$E_F = E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz + \phi) \sin(\alpha),$$

$$E_S = - E_x \cos(\omega t - kz + \delta) \sin(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz + \phi + \delta) \cos(\alpha),$$

Le polariseur laisse passer la composante sur Ox qui vaut $E_F \cos(\alpha) - E_S \sin(\alpha)$, soit:

$$[E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz + \phi) \sin(\alpha)] \cos(\alpha) - [- E_x \cos(\omega t - kz + \delta) \sin(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz + \phi + \delta) \cos(\alpha)] \sin(\alpha)$$

ou encore:

$$\underline{E_x [\cos(\omega t - kz) \cos^2(\alpha) + \cos(\omega t - kz + \delta) \sin^2(\alpha)] + E_y [\cos(\omega t - kz + \phi) - \cos(\omega t - kz + \phi + \delta)] \cos(\alpha) \sin(\alpha)}$$

a) Cas d'une lame à orientation α fixe et retard δ variable (cristaux liquides)

Prenons $\alpha = \pi/4$, dans ce cas le polariseur laisse passer sur l'axe Ox :

$$\frac{1}{2} E_x [\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t - kz + \delta)] + \frac{1}{2} E_y [\cos(\omega t - kz + \phi) - \cos(\omega t - kz + \phi + \delta)]$$

ou plus simplement:

$$E_x \cos(\omega t - kz + \delta/2) \cos(\delta/2) + E_y \sin(\omega t - kz + \phi + \delta/2) \sin(\delta/2)$$

L'intensité sortante est $I = \langle [E_x \cos(\omega t - kz + \delta/2) \cos(\delta/2) + E_y \sin(\omega t - kz + \phi + \delta/2) \sin(\delta/2)]^2 \rangle$ soit:

$$I = \frac{1}{2} E_x^2 \cos^2(\delta/2) + \frac{1}{2} E_y^2 \sin^2(\delta/2) + E_x E_y \sin(\delta) \langle \cos(\omega t - kz + \delta/2) \sin(\omega t - kz + \phi + \delta/2) \rangle$$

$$\text{or } \langle \cos(\omega t - kz + \delta/2) \sin(\omega t - kz + \phi + \delta/2) \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin(2\omega t - 2kz + \phi + \delta) + \sin(\phi) \rangle = \frac{1}{2} \sin(\phi)$$

Donc l'intensité sortante est $I = \frac{1}{2} [E_x^2 \cos^2(\delta/2) + E_y^2 \sin^2(\delta/2) + E_x E_y \sin(\delta) \sin(\phi)]$

Effet d'une lame quart d'onde à retard $\delta = -\pi/2$

$$I_1 = \frac{1}{2} [E_x^2 / 2 + E_y^2 / 2 - E_x E_y \sin(\phi)]$$

Effet d'une lame trois quarts d'onde à retard $\delta = -3\pi/2$

$$I_2 = \frac{1}{2} [E_x^2 / 2 + E_y^2 / 2 + E_x E_y \sin(\phi)]$$

$I_1 + I_2 = E_x^2 / 2 + E_y^2 / 2$ fournit l'intensité de la lumière.

$I_1 - I_2 = - E_x E_y \sin(\phi)$ fournit une quantité qui caractérise la polarisation de la lumière incidente.

$I_1 - I_2$ est nul pour une polarisation linéaire ($\phi = 0$). Si la lumière incidente est polarisée circulairement droite ou gauche avec $E_x = E_y$ et $\phi = \pm\pi/2$, on a $I_1 + I_2 = E_x^2$ et $I_1 - I_2 = \pm E_x^2$, et le rapport $(I_1 - I_2) / (I_1 + I_2)$ ou taux de polarisation circulaire vaut -1 ou +1.

Effet d'une lame zéro onde telle que $\delta = 0$

$$I_1 = \frac{1}{2} E_x^2$$

Effet d'une lame demi onde telle que $\delta = \pi$

$$I_2 = \frac{1}{2} E_y^2$$

$I_1 + I_2 = E_x^2 / 2 + E_y^2 / 2$ fournit l'intensité de la lumière.

$I_1 - I_2 = E_x^2 / 2 - E_y^2 / 2$ fournit une quantité qui caractérise la polarisation de la lumière incidente.

$I_1 - I_2$ est nulle pour une polarisation circulaire ($E_x = E_y$). Si la lumière incidente est polarisée linéairement ($\phi = 0$) avec $E_x = \cos(\beta) E_0$, $E_y = \sin(\beta) E_0$, on a $I_1 + I_2 = E_0^2/2$ et $I_1 - I_2 = E_0^2/2 \cos(2\beta)$. On définit le taux de polarisation linéaire par le rapport $(I_1 - I_2) / (I_1 + I_2) = \cos(2\beta)$ qui varie entre -1 et +1. Sa mesure donne $\cos(2\beta)$ et permet donc de remonter à deux orientations possibles de la polarisation linéaire (2β ou -2β modulo 2π car on ne connaît pas le sinus), chaque orientation étant donc définie à π près ($\pm\beta$ modulo π).

b) Cas d'une lame à orientation α variable et retard δ fixe (lames de quartz rotatives)

Le polariseur laisse passer sur l'axe d'acceptance Ox:

$$E_x [\cos(\omega t - kz) \cos^2(\alpha) + \cos(\omega t - kz + \delta) \sin^2(\alpha)] + E_y [\cos(\omega t - kz + \phi) - \cos(\omega t - kz + \phi + \delta)] \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

Prenons $\alpha = \pi/4$, dans ce cas le polariseur laisse passer:

$$\frac{1}{2} E_x [\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t - kz + \delta)] + \frac{1}{2} E_y [\cos(\omega t - kz + \phi) - \cos(\omega t - kz + \phi + \delta)]$$

ou encore $E_x \cos(\omega t - kz + \delta/2) \cos(\delta/2) + E_y \sin(\omega t - kz + \phi + \delta/2) \sin(\delta/2)$

Donc l'intensité sortante est $I_1 = \frac{1}{2} [E_x^2 \cos^2(\delta/2) + E_y^2 \sin^2(\delta/2) + E_x E_y \sin(\delta) \sin(\phi)]$

Prenons $\alpha = -\pi/4$, dans ce cas le polariseur laisse passer:

$$\frac{1}{2} E_x [\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t - kz + \delta)] - \frac{1}{2} E_y [\cos(\omega t - kz + \phi) - \cos(\omega t - kz + \phi + \delta)]$$

ou encore $E_x \cos(\omega t - kz + \delta/2) \cos(\delta/2) - E_y \sin(\omega t - kz + \phi + \delta/2) \sin(\delta/2)$

Donc l'intensité sortante est

$$I_2 = \frac{1}{2} [E_x^2 \cos^2(\delta/2) + E_y^2 \sin^2(\delta/2) - E_x E_y \sin(\delta) \sin(\phi)]$$

Effet d'une lame quart d'onde à retard $\delta = -\pi/2$ pour $\alpha = \pm\pi/4$

I_1 et I_2 deviennent avec $\delta = -\pi/2$:

$$I_1 = \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 - E_x E_y \sin(\phi)]$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 + E_x E_y \sin(\phi)]$$

$I_1 + I_2 = E_x^2/2 + E_y^2/2$ fournit l'intensité de la lumière.

$I_1 - I_2 = - E_x E_y \sin(\phi)$ fournit une quantité qui caractérise la polarisation de la lumière incidente.

On retrouve les mêmes résultats que ci dessus pour lame à orientation fixe, retard variable.

Effet d'une lame demi onde à retard $\delta = -\pi$ pour $\alpha = 0, \pi/4, \pi/8, 3\pi/8$

Le polariseur laisse passer sur l'axe d'acceptance Ox:

$$E_x [\cos(\omega t - kz) \cos^2(\alpha) + \cos(\omega t - kz + \delta) \sin^2(\alpha)] + E_y [\cos(\omega t - kz + \phi) - \cos(\omega t - kz + \phi + \delta)] \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

On obtient avec $\delta = -\pi$:

$$E_x \cos(\omega t - kz) [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] + 2 E_y \cos(\omega t - kz + \phi) \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

soit plus simplement:

$$E_x \cos(\omega t - kz) \cos(2\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz + \phi) \sin(2\alpha)$$

Prenons $\alpha = 0$, dans ce cas le polariseur laisse passer:

$$E_x \cos(\omega t - kz)$$

Intensité sortante

$$I_1 = \frac{1}{2} E_x^2$$

Prenons $\alpha = \pi/4$, dans ce cas le polariseur laisse passer:

$$E_y \cos(\omega t - kz + \phi)$$

Intensité sortante

$$I_2 = \frac{1}{2} E_y^2$$

Prenons $\alpha = \pi/8$, dans ce cas le polariseur laisse passer:

$$(\sqrt{2}/2) [E_x \cos(\omega t - kz) + E_y \cos(\omega t - kz + \phi)]$$

Intensité sortante

$$I_3 = \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 + E_x E_y \cos(\phi)]$$

Prenons $\alpha = 3\pi/8$, dans ce cas le polariseur laisse passer:

$$(\sqrt{2}/2) [-E_x \cos(\omega t - kz) + E_y \cos(\omega t - kz + \phi)]$$

Intensité sortante

$$I_4 = \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 - E_x E_y \cos(\phi)]$$

Cas d'une polarisation circulaire: $E_x = E_y$ et $\phi = \pi/2$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4$$

Cas d'une polarisation linéaire: $E_x = E_0 \cos(\beta)$, $E_y = E_0 \sin(\beta)$ et $\phi = 0$

$$I_1 = \frac{1}{2} E_0^2 \cos^2(\beta)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} E_0^2 \sin^2(\beta)$$

$$\text{donne } \frac{(I_1 - I_2)}{(I_1 + I_2)} = \cos(2\beta)$$

$$I_3 = \frac{1}{2} [E_0^2/2 + E_0^2 \cos(\beta)\sin(\beta)] = \frac{1}{2} E_0^2 [1 + \sin(2\beta)]$$

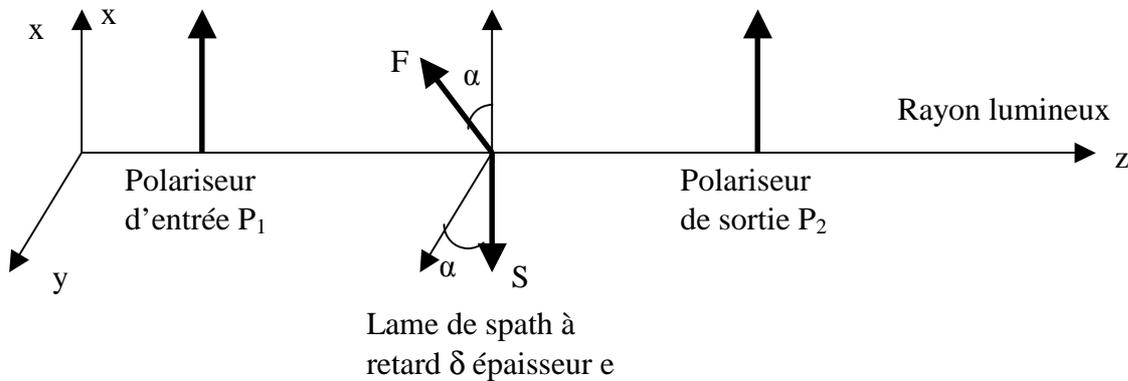
$$I_4 = \frac{1}{2} [E_0^2/2 - E_0^2 \cos(\beta)\sin(\beta)] = \frac{1}{2} E_0^2 [1 - \sin(2\beta)]$$

donne $(I_3 - I_4)/(I_3 + I_4) = \sin(2\beta)$

Il est alors possible de déterminer la direction de la polarisation β à partir de $\cos(2\beta)$ et de $\sin(2\beta)$, mais β sera déterminé modulo π .

10 - Spectre cannelé formé par une lame biréfringente d'épaisseur quelconque

Il s'agit du principe de base mis en oeuvre dans les filtres de LYOT. Un spectre cannelé peut être formé par une lame biréfringente entre deux polariseurs d'axes d'acceptance parallèles ou croisés entre eux. Les axes Fast (rapide) et Slow (lent) de la lame font un angle α avec les axes Ox et Oy ci dessous. En général, on se place à $\alpha = 45^\circ$ de l'axe d'acceptance des polariseurs.



On se place sous incidence normale. La lame de spath introduit un retard de phase entre la vibration sur l'axe "Fast" et sur l'axe "Slow" égal à $\delta = (2\pi/\lambda) \Delta n e$, où $\Delta n = n_o - n_e$ est la différence entre les indices ordinaire et extraordinaire (pour le spath, $n_o = 1.658$ et $n_e = 1.486$ soit $\Delta n = 0.172$).

La lumière issue du premier polariseur P_1 est de la forme $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz), 0, 0)$.

Les projections sur les axes (Fast, Slow) de la lame donnent en entrée:

$$\mathbf{E} = (E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha), -E_x \cos(\omega t - kz) \sin(\alpha), 0)$$

En sortie, un déphasage δ apparaît entre les deux composantes, de sorte que l'on obtient:

$$\mathbf{E} = (E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha), -E_x \cos(\omega t - kz + \delta) \sin(\alpha), 0)$$

On projette sur le polariseur P_2 , qui laisse passer sur Ox:

$$E_x [\cos(\omega t - kz) \cos^2(\alpha) + \cos(\omega t - kz + \delta) \sin^2(\alpha)] \text{ dont l'intensité lumineuse est:}$$

$$I = E_x^2 [\cos^4(\alpha) / 2 + \sin^4(\alpha) / 2 + 2 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) \langle \cos(\omega t - kz) \cos(\omega t - kz + \delta) \rangle]$$

$$\text{Or } \langle \cos(\omega t - kz) \cos(\omega t - kz + \delta) \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos(2\omega t - 2kz) + \cos(\delta) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\delta)$$

$$\text{donc } I = \frac{1}{2} E_x^2 [\cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha) + 2 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) \cos(\delta)]$$

Sachant que $(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))^2 = 1 = \cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha) + 2 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha)$, on en déduit

$$I = \frac{1}{2} E_x^2 [1 - 2 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) + 2 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) \cos(\delta)] = \frac{1}{2} E_x^2 [1 - 4 \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) \sin^2(\delta/2)],$$

$$I = \frac{1}{2} E_x^2 [1 - \sin^2(2\alpha) \sin^2(\delta/2)]$$

I varie entre $\frac{1}{2} E_x^2$ (intensité maximale) et $\frac{1}{2} E_x^2 \cos^2(\delta/2)$ lorsque l'on tourne la lame à retard δ .

Lorsque $\alpha = \pi/4$, on obtient $I = \frac{1}{2} E_x^2 \cos^2(\delta/2)$

Il s'agit d'un spectre cannelé, les cannelures (maxima) étant données par $\delta/2 = k\pi = (\pi/\lambda) \Delta n e$, d'où

$$\lambda = \Delta n e / k \quad \text{avec } k \text{ nombre entier positif}$$

Si le polariseur P_2 est orienté selon l'axe Oy , on en sort la projection du champ sur Oy :

$$E_x [\cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) \sin(\alpha) - \cos(\omega t - kz + \delta) \sin(\alpha) \cos(\alpha)]$$

$$\text{soit } E_x \sin(\alpha) \cos(\alpha) [\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t - kz + \delta)]$$

L'intensité est $I = E_x^2 \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \langle \cos(\omega t - kz) \cos(\omega t - kz + \delta) \rangle]$

$$\text{Or } \langle \cos(\omega t - kz) \cos(\omega t - kz + \delta) \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos(2\omega t - 2kz) + \cos(\delta) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\delta)$$

$$\text{donc } I = E_x^2 \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) [1 - \cos(\delta)] = 2 E_x^2 \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) \sin^2(\delta/2)$$

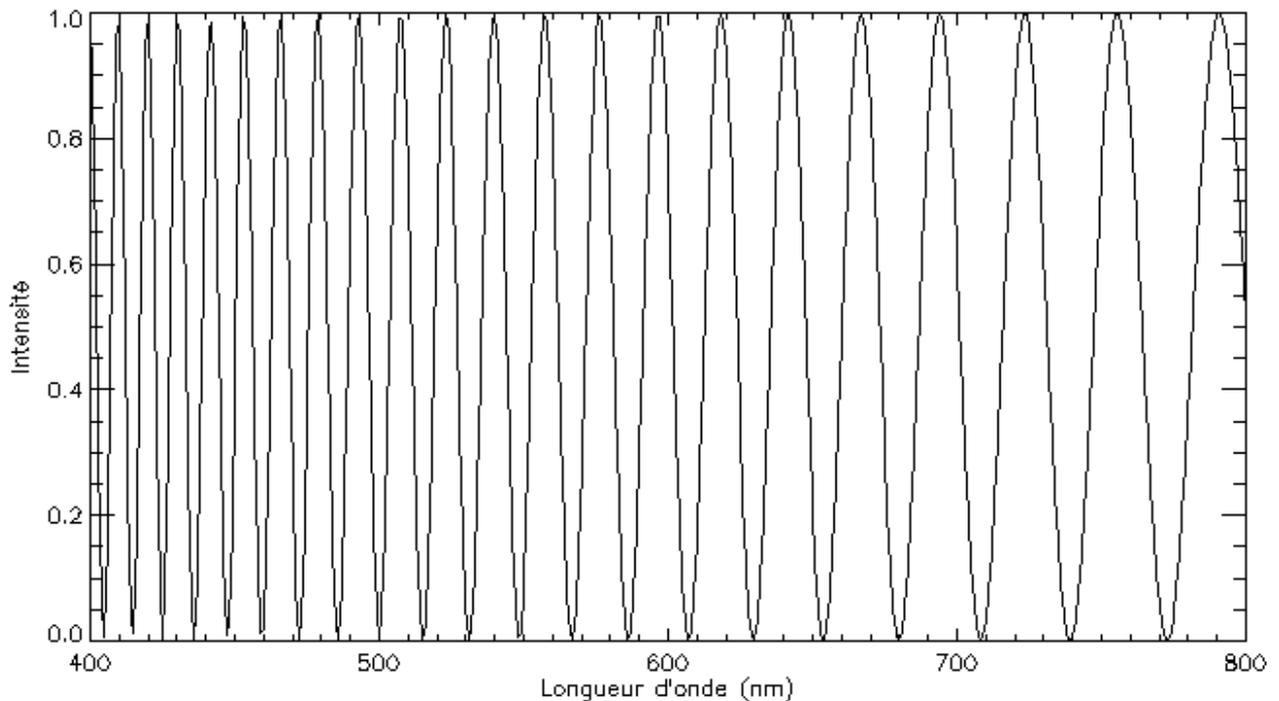
$$\text{soit finalement } I = \frac{1}{2} E_x^2 \sin^2(2\alpha) \sin^2(\delta/2)$$

I varie entre 0 (extinction) et $\frac{1}{2} E_x^2 \sin^2(\delta/2)$ lorsque l'on tourne la lame à retard δ .

$$\text{Lorsque } \alpha = \pi/4, \text{ on obtient } I = \frac{1}{2} E_x^2 \sin^2(\delta/2)$$

Il s'agit d'un spectre cannelé, les cannelures (maxima) étant données par $\delta/2 = \pi/2 + k\pi$, d'où

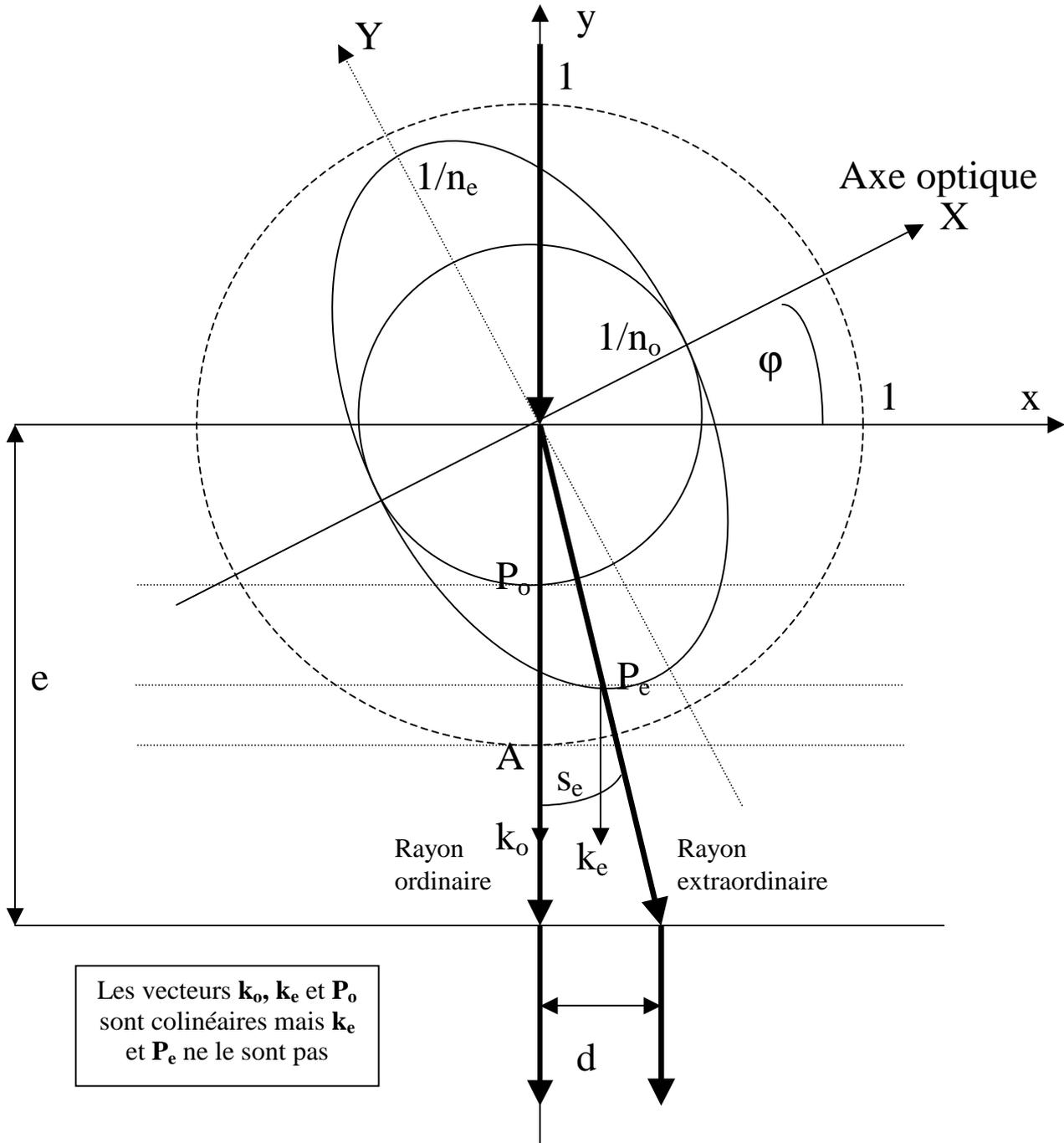
$$\lambda = \Delta n e / (k + \frac{1}{2})$$



Exemple de spectre cannelé (lame de spath de 0.1 mm d'épaisseur): les cannelures ne sont pas équidistantes en longueur d'onde, mais elles le sont en fréquence

11 - Le séparateur biréfringent en incidence normale

Un séparateur de faisceau est une lame à faces parallèles biréfringente dans laquelle les axes "Fast" et "Slow" ne sont pas orthogonaux à la direction de propagation Oz, donc ne sont pas contenus dans le plan xOy, ce qui était le cas des lames retardatrices vues plus haut.



Séparateur biréfringent en spath – construction d'Huyghens

$n_e=1.486$; $n_o=1.654$

ellipse d'équation $X^2 n_o^2 + Y^2 n_e^2 = 1$ pour le rayon extraordinaire, demi axes de longueur $1/n_o$ et $1/n_e$ dans le repère XOY (axes "Fast", "Slow")

cercle de rayon $1/n_o$ pour le rayon ordinaire

cercle de rayon $1/1$ pour le rayon incident dans l'air d'indice 1

axe optique dans le plan d'incidence, épaisseur du cristal e, séparation d

Le séparateur délivre deux faisceaux parallèles linéairement polarisés et de polarisations orthogonales (il est en ce sens équivalent à un ensemble de deux polariseurs perpendiculaires). On utilise la construction d'Huyghens (figure ci dessus) qui permet de construire les vecteurs de Poynting des rayons ordinaire \mathbf{P}_o et extraordinaire \mathbf{P}_e .

L'ellipse d'équation $X^2 n_o^2 + Y^2 n_e^2 = 1$ dans le repère (XOY) des axes (Fast, Slow) va définir la position du rayon extraordinaire. Elle a pour équation dans le repère (xOy) :

$$(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi))^2 + (-x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi))^2 = 1 \text{ car } X = x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) \text{ et } Y = -x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi)$$

La position du point P_e de coordonnées (x,y) définit le rayon extraordinaire ($\mathbf{OP}_e = \mathbf{P}_e$ vecteur de Poynting), à l'intersection de l'ellipse et du plan parallèle au front d'onde incident (représenté par les traits pointillés // Ox). Cette position est telle que la dérivée de y par rapport à x est nulle. En dérivant par rapport à x l'équation de l'ellipse, on trouve:

$$dy/dx = [n_e^2 \sin(\varphi) (-x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi)) - n_o^2 \cos(\varphi) (x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi))] / [n_o^2 \sin(\varphi) (x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi)) + n_e^2 \cos(\varphi) (-x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi))]$$

et $dy/dx = 0$ implique:

$$n_e^2 \sin(\varphi) (-x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi)) = n_o^2 \cos(\varphi) (x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi))$$

on en déduit une relation entre x et y:

$$y = x [n_e^2 \sin^2(\varphi) + n_o^2 \cos^2(\varphi)] / [(n_e^2 - n_o^2) \sin(\varphi) \cos(\varphi)]$$

En reportant cette relation liant x et y dans l'équation de l'ellipse, on obtient les coordonnées de P_e :

$$\begin{cases} x_e = (n_o^2 - n_e^2) / [n_o n_e (n_e^2 / \cos^2 \varphi + n_o^2 / \sin^2 \varphi)^{1/2}] \\ \text{puis} \\ y_e = - (n_o^2 \cos^2 \varphi + n_e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} / n_o n_e \end{cases}$$

On en déduit que $\tan(s_e) = -x_e/y_e = d / e = \sin(2\varphi) / (\cos(2\varphi) + (n_o^2 + n_e^2) / (n_o^2 - n_e^2))$

où s_e est l'angle qui définit la direction du vecteur de Poynting \mathbf{P}_e , e est l'épaisseur du séparateur et d la séparation obtenue entre les deux faisceaux émergents polarisés orthogonalement.

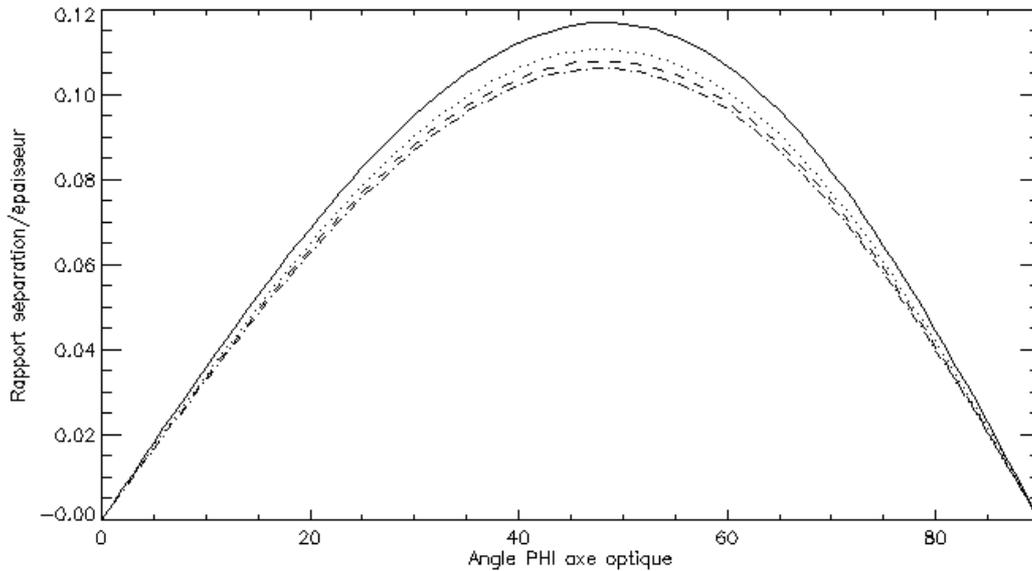
la séparation d est maximale, à e donné, lorsque la dérivée de $\tan(s_e) = d / e$ par rapport à φ est nulle. On obtient un angle φ_m donné par la relation:

$$\cos(2\varphi_m) = (n_e^2 - n_o^2) / (n_e^2 + n_o^2) \quad (\cos(2\varphi_m) < 0 \text{ pour le spath})$$

Pour le spath, $\varphi_m = 48^\circ$

Pour cette valeur de φ_m , on a alors $\tan(s_m) = d_m / e = (n_o^2 - n_e^2) / (2n_e n_o)$

ce qui donne numériquement pour le spath $d_m / e \approx 0.11$ et $s_m \approx 6^\circ$



Séparation $d/e = \sin(2\varphi) / (\cos(2\varphi) + (n_o^2 + n_e^2) / (n_o^2 - n_e^2))$ en fonction de la position de l'axe optique φ pour le spath à 400 nm (trait continu), 550 nm (pointillés), 700 nm (tirets), 850 nm (points et tirets)

12 - Paramètres de Stokes

Pour une vibration $\mathbf{E} = (E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz + \phi), 0) = (E_1, E_2, 0)$, on peut utiliser la notation complexe des OPPH :

$$\mathbf{E} = (E_x e^{i(\omega t - kz)}, E_y e^{i\phi} e^{i(\omega t - kz)}, 0) = (E_1, E_2, 0)$$

On définit 4 paramètres de Stokes (* désigne la quantité conjuguée) par les quantités quadratiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} (E_1 E_1^* + E_2 E_2^*) = \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2) \text{ ou intensité lumineuse} \\ Q = \frac{1}{2} (E_1 E_1^* - E_2 E_2^*) = \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2) \\ U = \frac{1}{2} (E_1 E_2^* + E_2 E_1^*) = E_x E_y \cos(\phi) \\ V = \frac{1}{2} i (E_2 E_1^* - E_1 E_2^*) = -E_x E_y \sin(\phi) \end{array} \right. \quad \boxed{\text{Q, U et V caractérisent l'état de polarisation de la lumière}}$$

Polarisation linéaire: $\phi = 0$ implique $V = 0$ et $I^2 = Q^2 + U^2$

Polarisation circulaire: $E_x = E_y$ et $\phi = \pm\pi/2$ implique $Q = U = 0$ et $V = \pm I$

Dans les autres cas, la polarisation est elliptique et $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$

Un polarimètre délivre une combinaison des paramètres de Stokes I, Q, U et V, quantités quadratiques mesurables permettant de remonter à la nature de la polarisation de la lumière.

Exemple 1: polarisation linéaire $\phi = 0$ avec $E_x = E_0 \cos(\beta)$ et $E_y = E_0 \sin(\beta)$

$$I = \frac{1}{2} E_0^2$$

$$Q = \frac{1}{2} E_0^2 \cos(2\beta)$$

$$U = \frac{1}{2} E_0^2 \sin(2\beta)$$

$$V = 0$$

Exemple 2: mesure des paramètres I et V avec un polarimètre composé d'un polariseur et d'une lame à retard variable δ orientée à 45° .

On a vu que le signal mesuré est $S = \frac{1}{2} [E_x^2 \cos^2(\delta/2) + E_y^2 \sin^2(\delta/2) + E_x E_y \sin(\delta) \sin(\phi)]$

Or $I = \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2)$ et $Q = \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2)$ impliquent les relations de réciprocity suivantes:
 $E_x^2 = I + Q$ et $E_y^2 = I - Q$

On a vu aussi que $V = - E_x E_y \sin(\phi)$, d'où

$S = \frac{1}{2} [\cos^2(\delta/2) (I + Q) + \sin^2(\delta/2) (I - Q) - \sin(\delta) V]$

$$S = \frac{1}{2} [I + \cos(\delta) Q - \sin(\delta) V]$$

Et l'on peut utiliser les combinaisons suivantes donnant accès à I, Q et V:

$$\begin{cases} \delta = 0, & S_1 = \frac{1}{2} [I + Q] \\ \delta = -\pi, & S_2 = \frac{1}{2} [I - Q] \\ \delta = -\pi/2, & S_3 = \frac{1}{2} [I + V] \\ \delta = -3\pi/2, & S_4 = \frac{1}{2} [I - V] \end{cases}$$

A partir des mesures des signaux S_1, S_2, S_3, S_4 , on obtient par somme et différence I et Q de S_1 et S_2 , puis I et V de S_3 et S_4 .

Exemple 3: mesure des paramètres I et V avec un polarimètre composé d'un polariseur et d'une lame à retard quart d'onde ($\delta = -\pi/2$) rotative orientée à $\pm 45^\circ$.

On a vu que l'on obtient les deux signaux suivants pour les orientations successives de 45° et -45° :

$$S_1 = \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 - E_x E_y \sin(\phi)]$$

$$S_2 = \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 + E_x E_y \sin(\phi)]$$

Or $I = \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2)$ et $Q = \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2)$ impliquent les relations de réciprocity suivantes:
 $E_x^2 = I + Q$ et $E_y^2 = I - Q$

On a vu aussi que $V = - E_x E_y \sin(\phi)$, d'où

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} [(I + Q) / 2 + (I - Q) / 2 + V] = \frac{1}{2} [I + V] \\ S_2 = \frac{1}{2} [(I + Q) / 2 + (I - Q) / 2 - V] = \frac{1}{2} [I - V] \end{cases}$$

A partir des mesures des signaux S_1, S_2 on obtient par somme et différence I et V.

13 - Chromatisme des lames à retard statiques et lames dites "achromatiques"

Les lames retardatrices présentent en général du chromatisme, parce que les indices de réfraction ordinaire et extraordinaire ne sont pas constants mais dépendent de la longueur d'onde. Par exemple, on donne en fonction de la longueur d'onde exprimée en Å:

pour le quartz SiO_2 ($n_e > n_o$):

$$n_o = 1.526 + 77.324 / (\lambda - 1521.0)$$

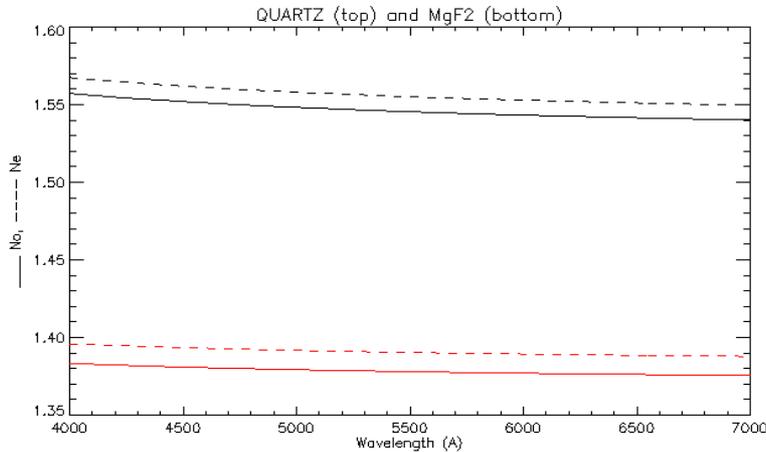
$$n_e = 1.535 + 80.288 / (\lambda - 1514.1)$$

pour MgF_2 ($n_e > n_o$):

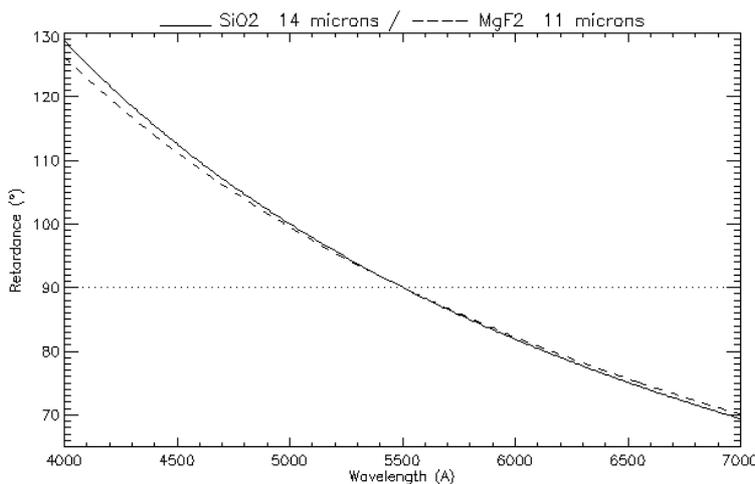
$$n_o' = 1.369 + 35.821 / (\lambda - 1492.5)$$

$$n_e' = 1.381 + 37.415 / (\lambda - 1494.7)$$

le retard $\delta = (2 \pi / \lambda) (n_e - n_o) e$ diminue en fonction de la longueur d'onde comme le montrent les figures suivantes pour des lames "quart d'onde" (l'épaisseur e a été calculée pour un retard quart d'onde de $\delta = \pi/2$ à $\lambda = 5500 \text{ \AA}$).



Indices de réfraction ordinaire — et extraordinaire ----- pour le quartz (en haut) et pour le fluorure de magnésium (en bas) en fonction de la longueur d'onde en \AA . Les indices décroissent lorsque la longueur d'onde augmente, et il en est de même de leur différence $n_e - n_o$



Retard $\delta = (2 \pi / \lambda) (n_e - n_o) e$ pour une lame de quartz d'épaisseur $e = 14 \mu$ — et pour une lame de MgF_2 d'épaisseur $e = 11 \mu$ ---- en fonction de la longueur d'onde. L'épaisseur e a été calculée pour que $\delta = \pi/2 = 90^\circ$ à $\lambda = 5500 \text{ \AA}$. On remarque que le retard varie considérablement de 130° à 70° entre 4000 et 7000 \AA . La lame présente donc un fort chromatisme.

L'inconvénient des lames précédentes consiste donc en un fort chromatisme : dès que l'on s'écarte de $\lambda = 5500 \text{ \AA}$, le retard s'écarte très rapidement de $\pi/2$ et la lame n'est plus quart d'onde. Pour atténuer cet effet, on place en série une lame de quartz SiO_2 d'épaisseur e et une lame de fluorure de magnésium MgF_2 d'épaisseur e' orientées telles que l'axe Fast de la première lame est orthogonal à l'axe Fast de la seconde (lames dites croisées). Le retard global introduit par les deux lames est :

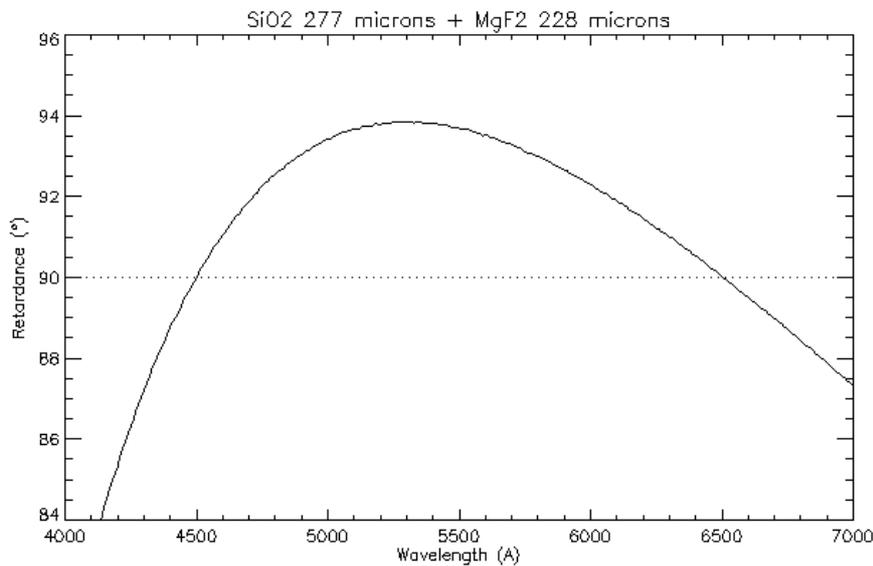
$$\delta = (2 \pi / \lambda) (\Delta n e - \Delta n' e')$$

avec $\Delta n = n_e - n_o$ pour le quartz et $\Delta n' = n_e' - n_o'$ pour MgF_2

Il est possible de calculer les épaisseurs e et e' pour que l'on ait une lame quart d'onde $\delta = \pi/2$ pour deux longueurs d'onde différentes, par exemple $\lambda_1 = 4500 \text{ \AA}$ et $\lambda_2 = 6500 \text{ \AA}$. On doit résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues e et e' , épaisseurs de la lame de quartz et de la lame MgF_2 :

$$\begin{cases} \Delta n(\lambda_1) e - \Delta n'(\lambda_1) e' = \lambda_1 / 4 \\ \Delta n(\lambda_2) e - \Delta n'(\lambda_2) e' = \lambda_2 / 4 \end{cases}$$

Après avoir calculé $\Delta n(\lambda_1)$, $\Delta n(\lambda_2)$, $\Delta n'(\lambda_1)$, $\Delta n'(\lambda_2)$, on tire e et e' (ici $e = 277 \mu$ et $e' = 228 \mu$), ce qui permet ensuite de représenter le retard global $\delta = (2 \pi / \lambda) (\Delta n e - \Delta n' e')$ en fonction de la longueur d'onde (figure ci dessous).

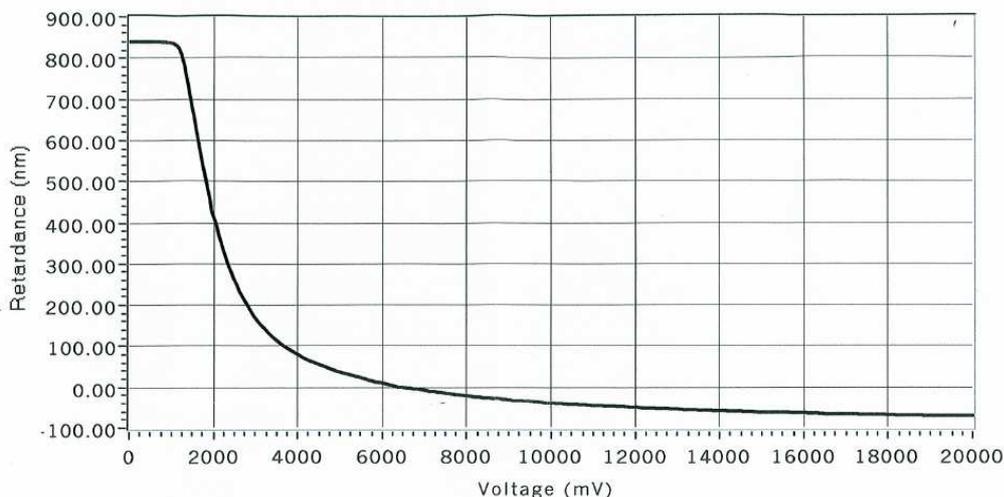


La combinaison en série de 2 lames croisées à différence de retard $\delta - \delta'$ en quartz (δ) et en MgF_2 (δ') permet de réduire considérablement le chromatisme de l'ensemble. Cette fois ci, le retard résultant $\delta - \delta'$ ne varie plus qu'entre 84° et 94° entre 4000 et 7000 Å. On a réalisé une lame dite achromatique, mais qui n'est pas encore parfaite.

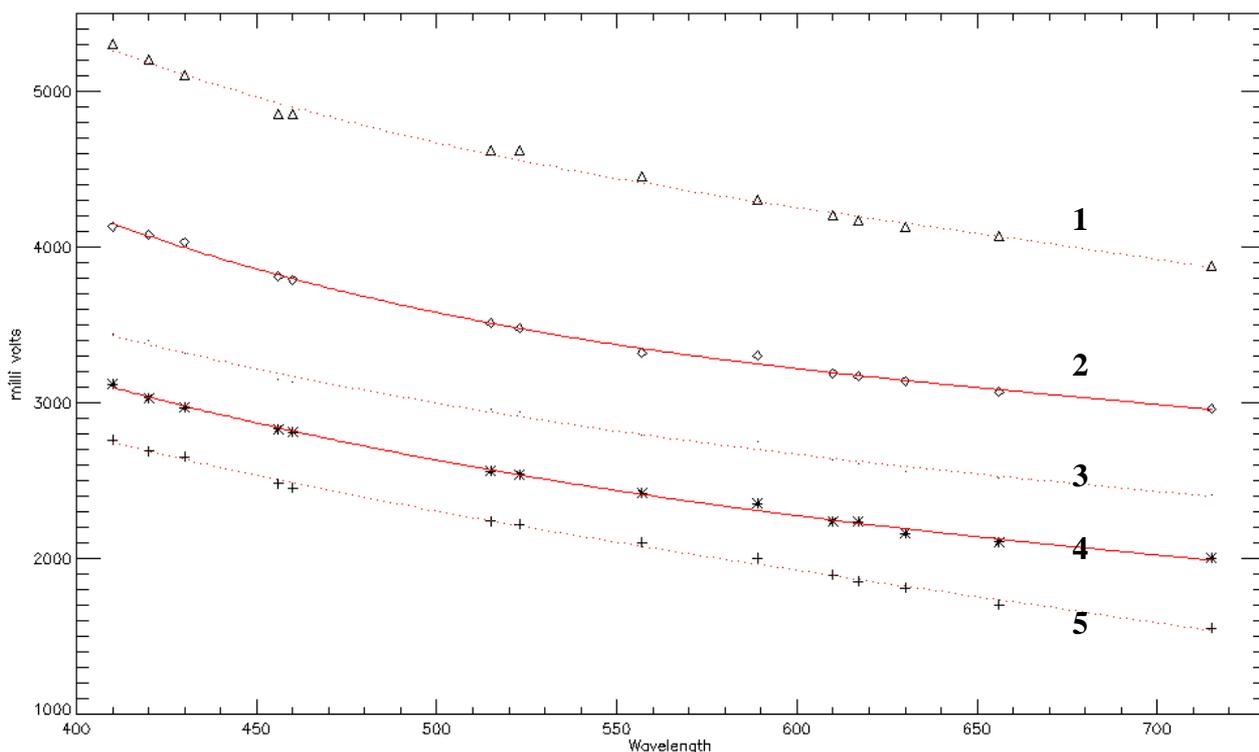
14 - Lames à retard δ variable à cristaux liquides

Ces lames retardatrices sont constituées d'un cristal liquide placé en sandwich entre deux électrodes transparentes auxquelles on applique une tension (condensateur plan transparent dont le diélectrique, constitué de cristaux liquides, manifeste une biréfringence fonction de la tension appliquée).

Un exemple de retard entre les axes "Fast" et "Slow" en fonction de la tension est représenté sur la figure ci dessous. Sous tension nulle, la biréfringence est maximale. Ces lames sont chromatiques. Si l'on prend une longueur d'onde de 400 nm, la figure montre qu'on a une lame quart d'onde pour 3500 mV et demi onde pour 2750 mV. Pour une longueur d'onde de 800 nm, on constate qu'on a une lame quart d'onde pour 2750 mV et demi onde pour 2000 mV. La lame se comporte comme une lame à faces parallèles (retard nul) pour 6750 mV. Pour un retard donné (par exemple quart d'onde), la tension à appliquer dépend de la longueur d'onde de la lumière.



Courbe de retard en nm en fonction de la tension en mV appliquée aux électrodes

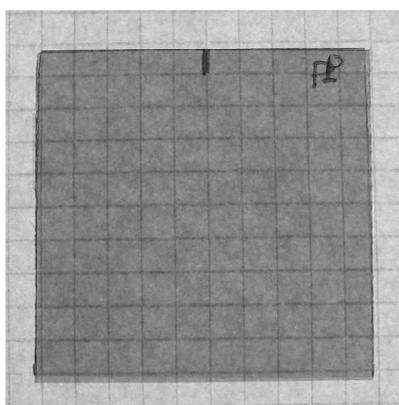


Exemple de tension à appliquer pour un retard $\delta = \pi/2$ (quart d'onde, 1), π (demi onde, 2), $3\pi/2$ (trois quarts d'onde, 3), 2π (onde, 4) et $5\pi/2$ (cinq quarts d'onde, 5), mettant en évidence le chromatisme des cristaux liquides en fonction de la longueur d'onde de la lumière.

15 - Travaux pratiques et expériences sur banc optique

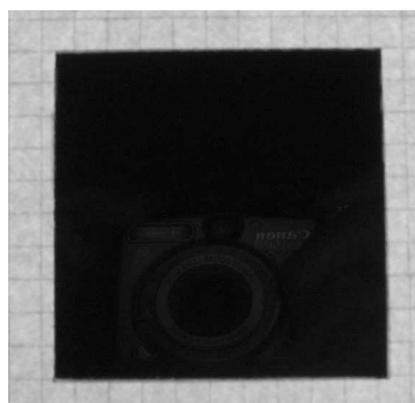
a) TP n°1: Polariseurs

Prendre deux polariseurs linéaires; les superposer en les faisant pivoter l'un par rapport à l'autre autour de l'axe optique orthogonal à leur plan. Exprimer l'intensité émergente en fonction de l'angle α entre les axes d'acceptance. Retrouver expérimentalement et expliquer la figure ci dessous.



Polariseurs axes parallèles ($\alpha = 0$)

Deux
polariseurs
superposés

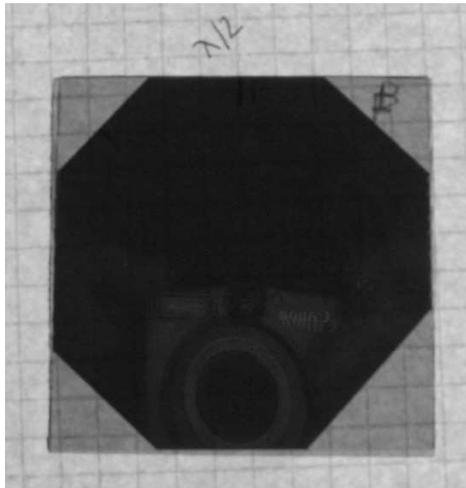


Polariseurs axes orthogonaux ($\alpha = \pi/2$)

b) TP n°2: lame demi onde entre deux polariseurs

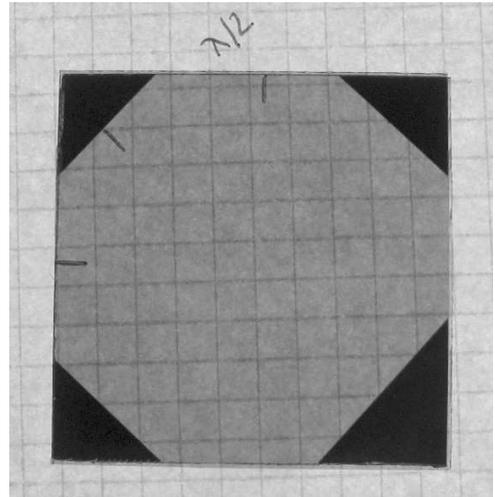
Prendre deux polariseurs linéaires dont les axes d'acceptance sont parallèles; insérer entre les deux une lame demi onde. Exprimer l'intensité émergente en fonction de l'angle α entre l'axe "Fast" de la

lame demi onde et les axes confondus des polariseurs. Reprendre l'exercice avec deux polariseurs croisés (axes d'acceptance orthogonaux). Retrouver expérimentalement et expliquer la figure ci dessous dans le cas où $\alpha = \pi/4$.



Polariseurs axes parallèles et $\alpha = \pi/4$

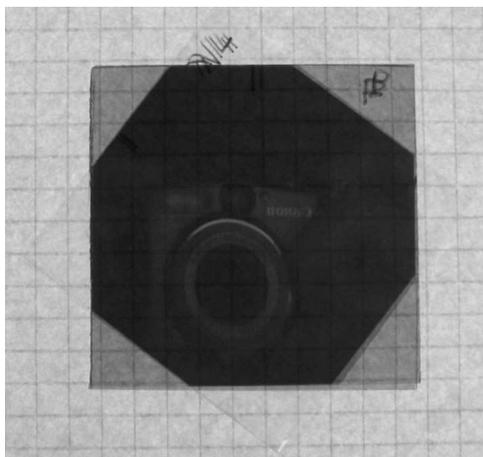
Deux polariseurs superposés et lame demi onde intercalée entre les polariseurs



Polariseurs axes orthogonaux et $\alpha = \pi/4$

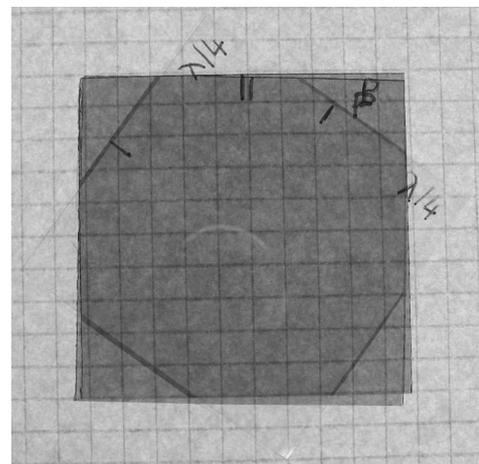
c) TP n°3: Assemblage de deux lames quart d'onde entre deux polariseurs

Prendre deux polariseurs linéaires dont les axes d'acceptance sont parallèles; prendre également deux lames quart d'onde et les superposer. Lorsque les axes (Fast, Slow) des deux lames sont confondus ou orthogonaux (croisés), donner respectivement le retard équivalent à l'ensemble des deux quart d'onde. Les insérer entre les deux polariseurs avec un angle de 45° . Retrouver expérimentalement et expliquer la figure ci dessous.



Axes (Fast, Slow) des quart onde confondus

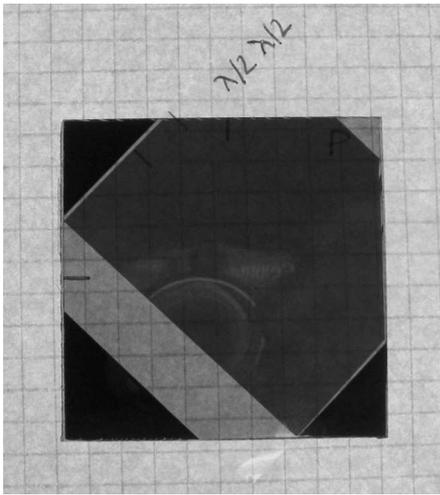
Deux polariseurs axes parallèles superposés et deux lames quart onde intercalées entre les polariseurs



Axes (Fast, Slow) des quart onde orthogonaux

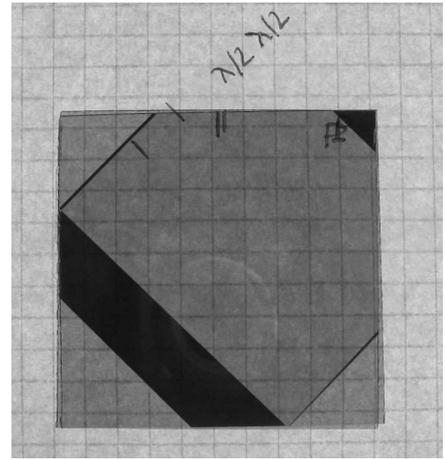
d) TP n°4: Assemblage de deux lames demi onde entre deux polariseurs

Prendre deux polariseurs linéaires ainsi que deux lames demi onde. et les superposer. Lorsque les axes (Fast, Slow) des demi onde sont confondus ou orthogonaux (croisés), donner respectivement le retard équivalent à l'ensemble des deux demi onde. Les insérer entre les deux polariseurs avec un angle de 45° , dans deux configurations: axes d'acceptance soit parallèles, soit orthogonaux. Retrouver expérimentalement et expliquer la figure ci dessous.

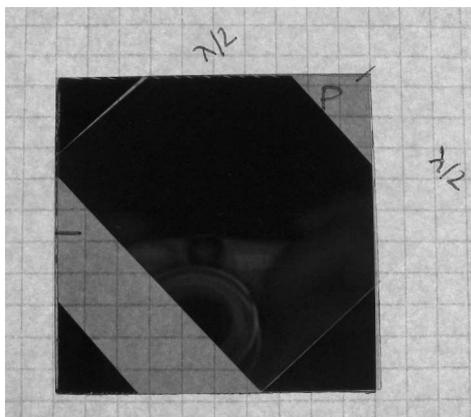


Polariseurs axes orthogonaux

Entre deux polariseurs, deux lames demi onde (axes Fast et Slow confondus), intercalées à 45° (et légèrement décalées l'une par rapport à l'autre)

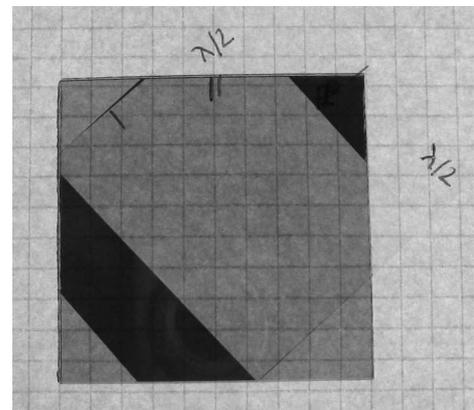


Polariseurs axes parallèles



Polariseurs axes orthogonaux

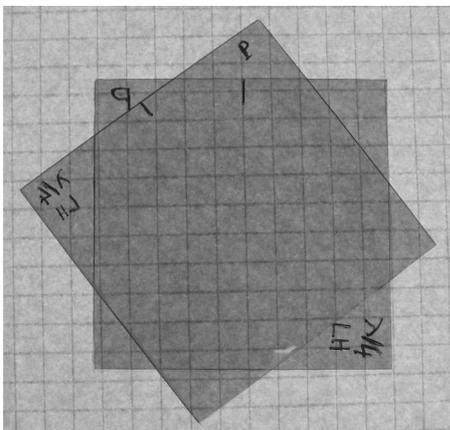
Entre deux polariseurs, deux lames demi onde (axes Fast et Slow orthogonaux), intercalées à 45° (et légèrement décalées l'une par rapport à l'autre)



Polariseurs axes parallèles

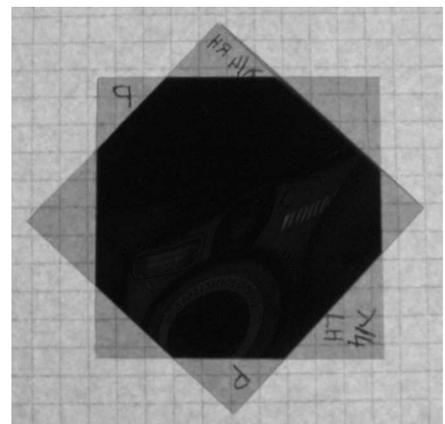
e) TP n°5: Assemblage de deux polariseurs circulaires

Prendre deux polariseurs circulaires gauche (LH) et les superposer (attention ! un polariseur circulaire est constitué d'un polariseur linéaire et d'une lame quart d'onde accolée à 45°; bien mettre en regard les côtés quart d'onde des deux polariseurs circulaires). Les faire tourner l'un par rapport à l'autre. Que constate t'on ? Y a t-il une variation angulaire ? Refaire la même expérience en superposant cette fois ci un polariseur circulaire droit (RH) et un polariseur circulaire gauche (LH). Expliquer les résultats d'un point de vue théorique ainsi que la figure ci dessous.



2 polariseurs circulaires gauche

Les côtés quart d'onde des polariseurs circulaires sont en regard



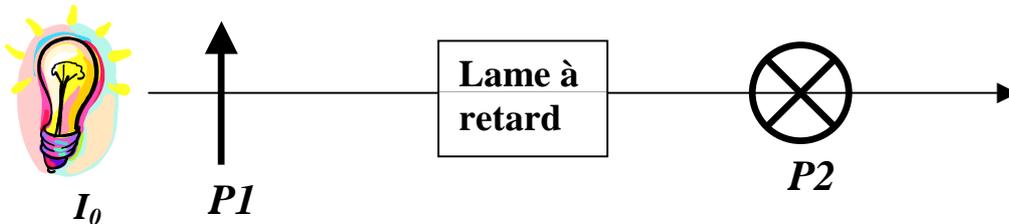
Polariseurs circulaires droit et gauche

f) TP n°6: Détermination des axes d'une lame à retard

La méthode consiste à placer la lame à retard entre deux polariseurs croisés (axes d'acceptance orthogonaux) P_1 et P_2 ; montrer que l'intensité lumineuse émergente suit la loi:

$$I = I_0 \sin^2(2\alpha) \sin^2(\delta/2)$$

où α est l'angle entre les axes "Fast" et "Slow" de la lame retardatrice et l'axe d'acceptance du polariseur P_1 , et δ le retard entre les axes "Fast" et "Slow". On remarque qu'il y a extinction totale lorsque le cristal biréfringent possède ses axes "Fast" et "Slow" parallèles aux axes d'acceptance croisés des deux polariseurs, c'est à dire lorsque $\alpha = 0$ (figure ci dessous), quelque soit le retard δ . La position d'extinction totale délivre donc les axes de la lame à retard.



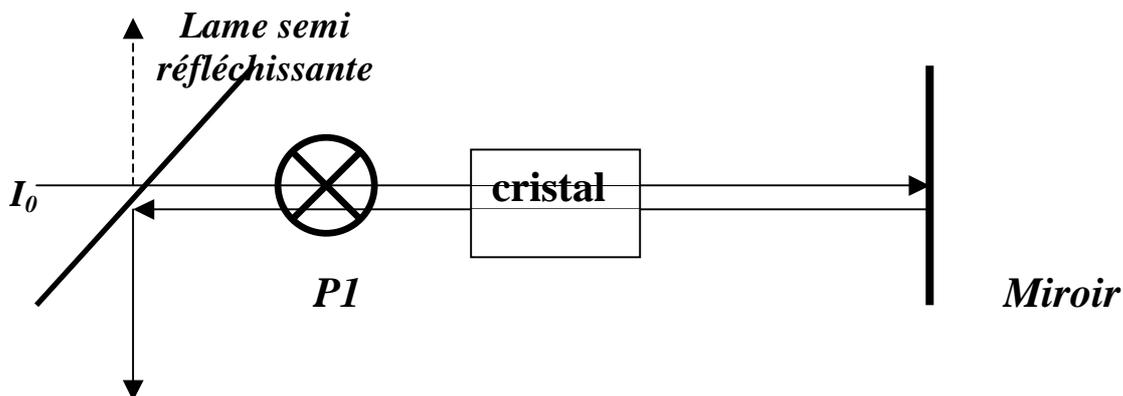
g) TP n°7: Calibration quart et trois quarts d'onde d'une lame à retard à cristal liquide

Un cristal liquide est un milieu biréfringent pris en sandwich entre deux électrodes transparentes. Le retard entre les axes "Fast" et "Slow" est variable en fonction des tensions appliquées. On désire trouver les tensions à appliquer pour un retard quart d'onde et trois quarts d'onde à la longueur d'onde de 630 nm.

1) Expliquer le montage proposé ci dessous. P_1 est un polariseur linéaire.

2) Montrer que l'intensité lumineuse émergente suit la loi: $I = I_0 (1 - \sin^2(2\alpha) \sin^2(\delta))$

où α est l'angle entre les axes "Fast" et "Slow" et l'axe d'acceptance du polariseur et δ le retard entre les axes "Fast" et "Slow" du cristal liquide. Si l'on choisit $\alpha = \pi/4$, cette loi devient plus simplement $I = I_0 \cos^2(\delta)$ et présente l'avantage d'une extinction totale lorsque $\delta = \pi/2$ ou $\delta = 3\pi/2$.



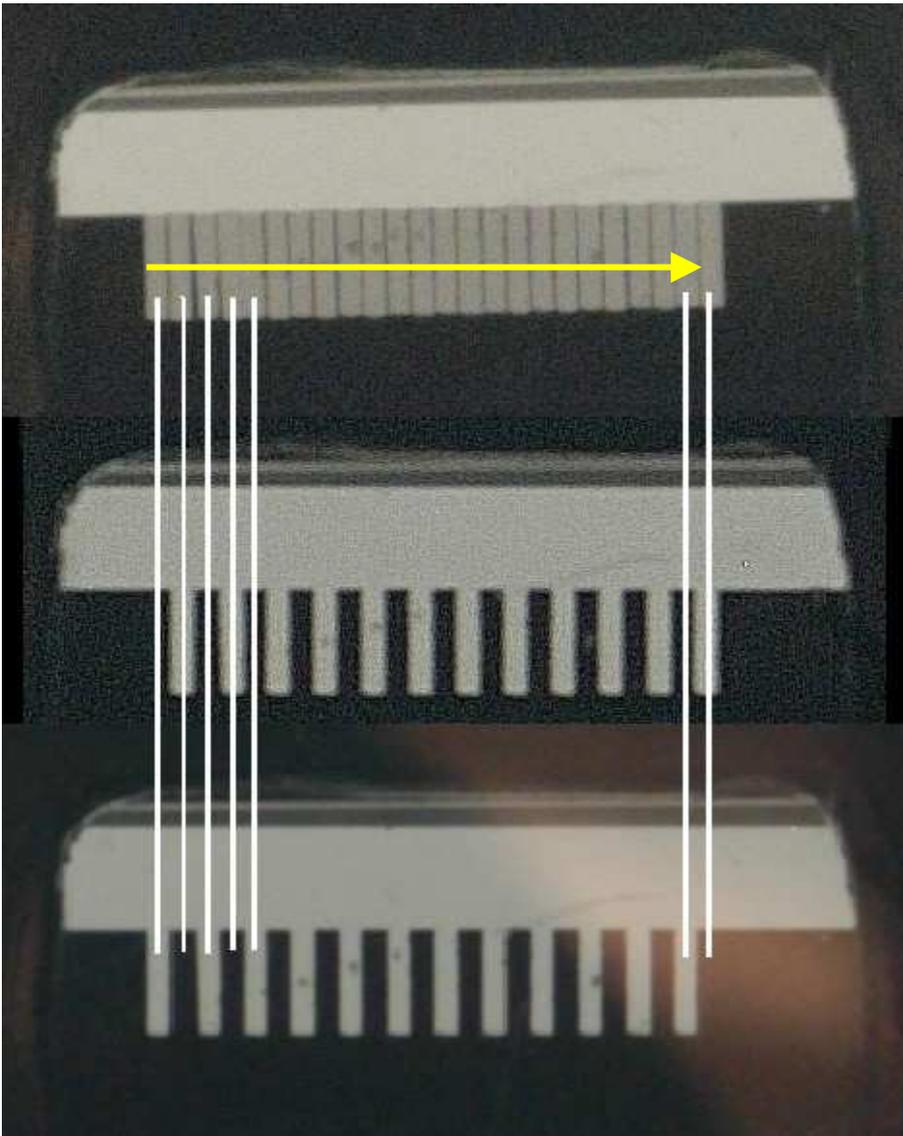
3) Après avoir déterminé la position des axes du cristal liquide par la méthode du TP précédent, réaliser le montage (placer le cristal tel que $\alpha = \pi/4$).

4) Trouver les tensions à appliquer pour un retard quart d'onde et trois quarts d'onde à la longueur d'onde de 630 nm.

h) TP n°8: Séparateur biréfringent en spath sous incidence normale

On place entre la source de lumière et le séparateur une grille métallique dont la distance entre barreaux est égale à la translation du faisceau extraordinaire par biréfringence. Expliquer pourquoi

les barreaux "semblent disparaître". On examine ensuite le dispositif au travers d'un polariseur linéaire, que l'on fait tourner, et les barreaux apparaissent de nouveau. Expliquer pourquoi.



Séparateur biréfringent en spath sous incidence normale ($i = 0$).
Direction de séparation dans le sens (Ox) de la flèche jaune.

Haut: vision directe

Milieu: vision au travers d'un polariseur d'axe Ox

Bas: vision au travers d'un polariseur d'axe Oy

chapitre 4

Processus de diffusion de la lumière et polarisation associée

Polarisation du ciel bleu; polarisation par diffusion résonante dans les raies

1 - Polarisation du rayonnement continu

Il s'agit de la diffusion Rayleigh par les électrons liés aux atomes ou molécules de l'atmosphère. Pour décrire un électron lié de manière simplifiée, prenons un modèle d'oscillateur harmonique le long de l'axe Ox dans lequel l'électron est lié à l'atome par la force $-m\omega_0^2 x$ avec un amortissement $-m\gamma dx/dt$ et soumis à une force $-e E e^{i\omega t}$ qui représente l'onde lumineuse de pulsation ω :

$$m d^2x/dt^2 = -m\omega_0^2 x - m\gamma dx/dt - e E_0 e^{i\omega t}$$

Son mouvement est obtenu en posant $x = X e^{i\omega t}$ d'où $X = (-e/m) E_0 / (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$

$$\text{et } |X|^2 = (e/m)^2 E_0^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]$$

On a vu (chapitre 2) que le coefficient d'amortissement γ (unité s^{-1}) s'obtient en égalisant la puissance moyenne dissipée par la force de frottement :

$$\langle P_f \rangle = m\gamma \langle (dx/dt)^2 \rangle = \frac{1}{2} m\gamma (dx/dt) (dx/dt)^* = \frac{1}{2} m\gamma |X|^2 \omega^2$$

à la puissance moyenne rayonnée par l'électron (théorie du rayonnement dipolaire, cours L2):

$$\begin{aligned} \langle P_{\text{ray}} \rangle &= (1 / 6\pi\epsilon_0 C^3) \langle (d^2p/dt^2)^2 \rangle \text{ où } p(t) = -e x(t) \text{ est le moment dipolaire de l'électron.} \\ &= (1 / 6\pi\epsilon_0 C^3) e^2 \langle (d^2x/dt^2)^2 \rangle = \frac{1}{2} (e^2 / 6\pi\epsilon_0 C^3) (d^2x/dt^2)(d^2x/dt^2)^* \\ &= e^2 / (12\pi\epsilon_0 C^3) |X|^2 \omega^4 \end{aligned}$$

L'égalité $\langle P_f \rangle = \langle P_{\text{ray}} \rangle$ fournit $\gamma = e^2 \omega^2 / (6\pi\epsilon_0 m C^3)$; l'amortissement dépend de la fréquence.

La section efficace σ (en m^2) d'interaction est définie comme le rapport de la puissance moyenne dissipée $\langle P_f \rangle$ (en W) à la moyenne du vecteur de Poynting $\langle P \rangle$ ou puissance de l'onde transportée par unité de surface (en $W m^{-2}$). Celle ci vaut $\langle P \rangle = C \langle \epsilon_0 E^2/2 + B^2 / 2 \mu_0 \rangle$ avec $B = E / C$,

$$\text{ce qui donne avec } \langle E^2 \rangle = E_0^2/2 \text{ et } \langle B^2 \rangle = E_0^2 / (2 C^2): \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} C \epsilon_0 E_0^2$$

La section efficace est donc définie par:

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) &= \langle P_f \rangle / \langle P \rangle = \frac{1}{2} m\gamma |X|^2 \omega^2 / [C \epsilon_0 E_0^2/2] \\ &= [e^4 / (6\pi\epsilon_0^2 m^2 C^4)] \omega^4 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2], \text{ et en fonction de la fréquence } \nu = \omega/2\pi \end{aligned}$$

$$\sigma(\nu) = \langle P_f \rangle / \langle P \rangle = [e^4 / (6\pi\epsilon_0^2 m^2 C^4)] \nu^4 / [(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + (\gamma/2\pi)^2 \nu^2]$$

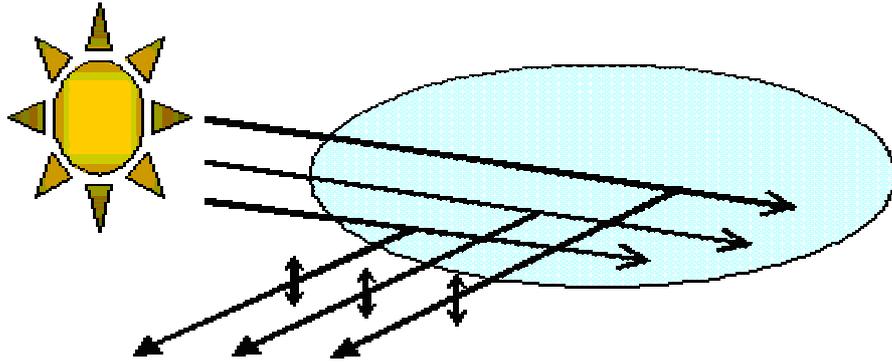
Le terme $(\gamma/2\pi)^2 \nu^2$ est négligeable devant le terme en $(\nu_0^2 - \nu^2)^2$, car $\gamma/2\pi$, de l'ordre de $10^8 s^{-1}$, est négligeable devant ν_0 , de l'ordre de $3.75 \cdot 10^{15} s^{-1}$ (domaine Ultra Violet), et ν , de l'ordre de $6 \cdot 10^{14} s^{-1}$ (domaine visible) sauf à la résonance pour laquelle on a exactement $\nu_0 = \nu$. Si l'on se situe loin de la résonance, on peut donc écrire:

$$\sigma(\nu) = \langle P_f \rangle / \langle P \rangle = [e^4 / (6\pi\epsilon_0^2 m^2 C^4)] \nu^4 / (\nu_0^2 - \nu^2)^2$$

Diffusion Thomson

Il s'agit d'électrons libres pour lesquels ν_0 est nul. Dans ce cas, $\sigma = \sigma_{\text{th}} = e^4 / (6\pi\epsilon_0^2 m^2 C^4) = 10^{-29} m^2$

Diffusion Rayleigh



Lumière diffusée vers l'observateur

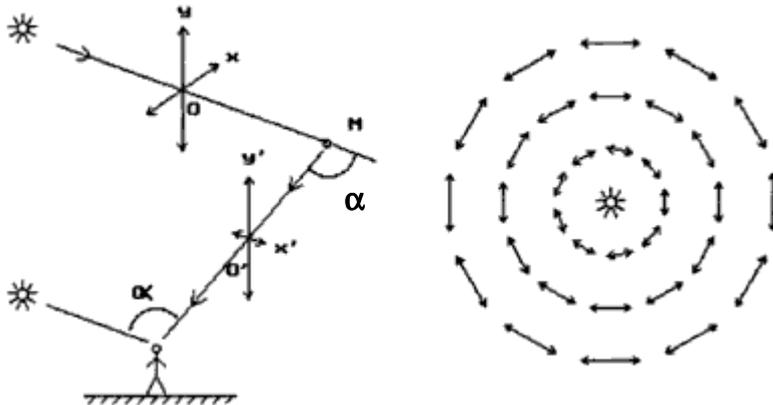
Dans ce cas, on obtient $\sigma(\nu) = \sigma_{th} \nu^4 / [(v_0^2 - \nu^2)^2]$

Comme nous avons ν (visible) $\ll \nu_0$ (UV), ou $\lambda \gg \lambda_0$, alors

$$\sigma(\nu) \approx \sigma_{th} \nu^4 / \nu_0^4 = \sigma_{th} \lambda_0^4 / \lambda^4$$

Cette relation explique le bleu du ciel dans l'atmosphère terrestre puisque la diffusion du bleu est environ 10 fois plus efficace que celle du rouge (facteur λ_0^4 / λ^4).

Distribution angulaire de la polarisation

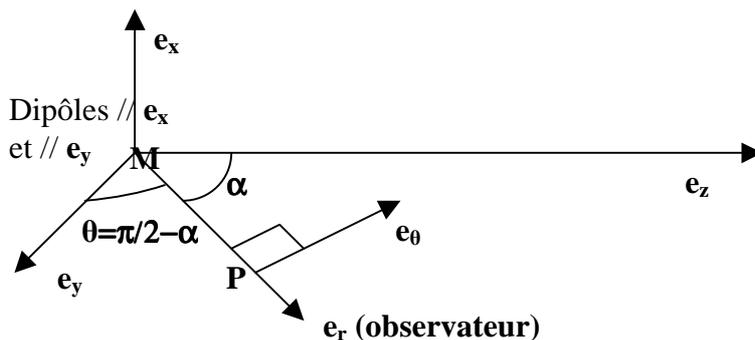


La lumière du soleil est non polarisée dans le plan (xOy) orthogonal à la direction de propagation Oz.
Si $\alpha = \pi/2$, la lumière diffusée est polarisée selon Oy'//Oy.
La figure de droite représente la direction de polarisation de la lumière diffusée par la source située en M. Elle est **orthoradiale** lorsque $\alpha = \pi/2$.

La répartition angulaire de la polarisation en fonction de α est donnée par la loi :

$$P(\alpha) = \sin^2\alpha / (1 + \cos^2\alpha)$$

vaut 1 lorsque $\alpha = \pi/2$ (à 90° de la direction du soleil) et zéro lorsque $\alpha = 0$ ou π (dans ou à l'opposé de la direction du soleil)



L'observateur en P observe dans la direction e_r le rayonnement de deux dipôles en M, l'un porté par e_x et l'autre porté par e_y

Pour démontrer cette relation, nous supposons que l'observateur observe en P dans la direction \mathbf{e}_r le rayonnement de deux dipôles situés en M, l'un porté par \mathbf{e}_x et l'autre porté par \mathbf{e}_y . En effet, l'onde incidente transversale de composantes E_x et E_y induit sur les deux axes l'apparition de deux dipôles de moment dipolaire $p_x = -e x(t)$ et $p_y = -e y(t)$ qui vibrent sans corrélation. $x(t)$ et $y(t)$ découlent des équations du mouvement simplifiées sur les deux axes:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -e E_x$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -e E_y$$

La lumière incidente n'étant pas polarisée, on a les relations concernant ses paramètres de Stokes:

$$\langle E_x^2 \rangle = \langle E_y^2 \rangle = I/2$$

$$\langle E_x E_y \rangle = 0$$

donc $Q = U = V = 0$ (E_x et E_y sont décorrélés).

La théorie des potentiels retardés (*cours L2*) nous donne pour le champ électrique \mathbf{E}_1 rayonné dans le plan (yOz) en P à la distance $r = MP$ du dipôle p_x porté par \mathbf{e}_x et situé en M:

$$\mathbf{E}_1 = - [1/4\pi\epsilon_0 r C^2] \frac{d^2p_x}{dt^2} \mathbf{e}_x$$

Comme $p_x = -e x(t)$, on a $\frac{d^2p_x}{dt^2} = -e \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e^2}{m} E_x$

$$\text{d'où } \mathbf{E}_1 = - [1/4\pi\epsilon_0 r C^2] \frac{e^2}{m} E_x \mathbf{e}_x$$

En ce qui concerne le champ électrique \mathbf{E}_2 rayonné dans le plan (yOz) en P à la distance $r = MP$ du dipôle p_y porté par \mathbf{e}_y et situé en M:

$$\mathbf{E}_2 = [1/4\pi\epsilon_0 r C^2] \frac{d^2p_y}{dt^2} \sin\theta \mathbf{e}_\theta$$

Comme $p_y = -e y(t)$, on a $\frac{d^2p_y}{dt^2} = -e \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e^2}{m} E_y$

$$\text{d'où } \mathbf{E}_2 = - [1/4\pi\epsilon_0 r C^2] \frac{e^2}{m} E_y \sin\theta \mathbf{e}_\theta = - [1/4\pi\epsilon_0 r C^2] \frac{e^2}{m} E_y \cos\alpha \mathbf{e}_\theta$$

\mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 sont décorrélés car proportionnels à E_x et E_y qui sont décorrélés. Le champ électrique total rayonné est transversal et s'écrit par superposition dans le repère orthonormé ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\theta$):

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = (1/4\pi\epsilon_0 r C^2) \frac{e^2}{m} [- E_x , E_y \cos\alpha] = k [- E_x , E_y \cos\alpha]$ où k est le facteur multiplicatif égal à $(1/4\pi\epsilon_0 r C^2) \frac{e^2}{m}$. Sachant que pour la lumière incidente, $\langle E_x^2 \rangle = \langle E_y^2 \rangle = I/2$ et $\langle E_x E_y \rangle = 0$, les paramètres de Stokes du champ rayonné total sont donnés par:

$$I_r = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle = k^2 (\langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle \cos^2\alpha) = k^2 (1 + \cos^2\alpha) I/2$$

$$Q_r = \langle E_1^2 \rangle - \langle E_2^2 \rangle = k^2 (\langle E_x^2 \rangle - \langle E_y^2 \rangle \cos^2\alpha) = k^2 (1 - \cos^2\alpha) I/2 = k^2 \sin^2\alpha I/2$$

$$U_r = 2 \langle E_1 E_2 \rangle = - k^2 (\langle E_x E_y \rangle \cos\alpha) = 0$$

$$V_r = 0$$

d'où le taux de polarisation linéaire $\boxed{Q_r / I_r = \sin^2\alpha / (1 + \cos^2\alpha) = P(\alpha)}$

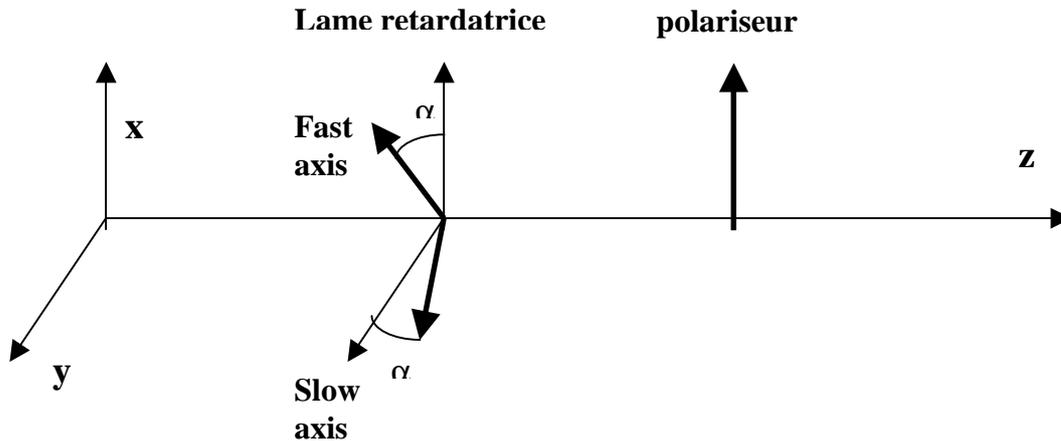
Ce facteur $P(\alpha)$ est multiplicatif des sections efficaces $\sigma(v)$ déterminées ci dessus.

Dans la réalité, la lumière n'est jamais totalement polarisée lorsqu'on observe à 90° de la direction du soleil, et on mesurera un taux de polarisation bien inférieur à l'unité. En effet, il existe d'autres processus de diffusion, notamment par des particules présentes dans l'atmosphère: poussières, cristaux de glace (cirrus) et fines gouttelettes d'eau (nuages, brumes, brouillard). Elles sont très

grandes devant la dimension atomique et la longueur d'onde de la lumière, dont le rayonnement ne peut plus être décrit par le modèle de l'électron lié ci dessus.

2 - Un polarimètre simple pour mesurer la polarisation linéaire

Considérons un polarimètre constitué d'un retardateur introduisant un déphasage δ et dont les axes font un angle α avec les axes Ox et Oy (azimuth α), suivi d'un polariseur P orienté selon l'axe Ox.



Partons d'une onde incidente à polarisation rectiligne et représentée par:
 $\mathbf{E} (E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz), 0)$.

En projection sur les axes (Fast, Slow), on a en entrée sur la lame retardatrice:

$$E_F = E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz) \sin(\alpha),$$

$$E_S = - E_x \cos(\omega t - kz) \sin(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha),$$

Et en sortie de la lame retardatrice:

$$E_F = E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz) \sin(\alpha),$$

$$E_S = - E_x \cos(\omega t - kz + \delta) \sin(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz + \delta) \cos(\alpha),$$

Le polariseur laisse passer la composante sur Ox qui vaut $E_F \cos(\alpha) - E_S \sin(\alpha)$, soit:

$$[E_x \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz) \sin(\alpha)] \cos(\alpha) - [- E_x \cos(\omega t - kz + \delta) \sin(\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz + \delta) \cos(\alpha)] \sin(\alpha)$$

ou encore:

$$\underline{E_x [\cos(\omega t - kz) \cos^2(\alpha) + \cos(\omega t - kz + \delta) \sin^2(\alpha)] + E_y [\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t - kz + \delta)] \cos(\alpha) \sin(\alpha)}$$

Effet d'une lame demi onde à retard $\delta = -\pi$ pour $\alpha = 0, \pi/4, \pi/8, 3\pi/8$

Le polariseur laisse passer sur l'axe d'acceptance Ox:

$$E_x \cos(\omega t - kz) [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] + 2 E_y \cos(\omega t - kz) \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

soit plus simplement:

$$\underline{E_x \cos(\omega t - kz) \cos(2\alpha) + E_y \cos(\omega t - kz) \sin(2\alpha)}$$

Prenons $\alpha = 0$, dans ce cas le polariseur laisse passer:

$$E_x \cos(\omega t - kz)$$

Intensité sortante

$$S_1 = \frac{1}{2} E_x^2$$

Prenons $\alpha = \pi/4$, dans ce cas le polariseur laisse passer:

$$E_y \cos(\omega t - kz + \phi)$$

Intensité sortante $S_2 = \frac{1}{2} E_y^2$

Prenons $\alpha = \pi/8$, dans ce cas le polariseur laisse passer:

$$(\sqrt{2}/2) [E_x \cos(\omega t - kz) + E_y \cos(\omega t - kz)]$$

Intensité sortante $S_3 = \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 + E_x E_y]$

Prenons $\alpha = 3\pi/8$, dans ce cas le polariseur laisse passer:

$$(\sqrt{2}/2) [-E_x \cos(\omega t - kz) + E_y \cos(\omega t - kz)]$$

Intensité sortante $S_4 = \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 - E_x E_y]$

Les paramètres de Stokes de la lumière analysée sont donnés par:

$$I = \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle = 2 (S_1 + S_2) = 2 (S_3 + S_4)$$

$$Q = \langle E_x^2 \rangle - \langle E_y^2 \rangle = 2 (S_1 - S_2)$$

$$U = 2 \langle E_x E_y \rangle = 2 (S_3 - S_4)$$

donc $Q/I = (S_1 - S_2) / (S_1 + S_2)$ et $U/I = (S_3 - S_4) / (S_3 + S_4)$

Le taux de polarisation linéaire est défini par $[(Q/I)^2 + (U/I)^2]^{1/2}$

Il vaut 1 pour une lumière totalement polarisée (dans notre exemple $I^2 = Q^2 + U^2$) et est inférieur à 1 pour une lumière partiellement polarisée, ce qui est le cas du ciel bleu.

Si $E_x = E_0 \cos(\beta)$ et $E_y = E_0 \sin(\beta)$ avec E_0 amplitude et β direction de la polarisation:

$$I = E_0^2$$

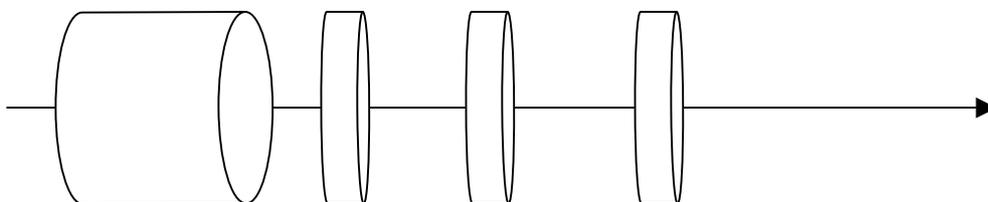
$$Q = E_0^2 \cos(2\beta)$$

$$U = E_0^2 \sin(2\beta)$$

Il est possible de remonter à l'orientation de la polarisation par $\tan(2\beta) = U/Q$

3 - TP n°1: expérience pour mesurer la polarisation linéaire du ciel bleu

Effectuer le montage suivant:



Objectif photo et caméra	filtre bleu	polariseur fixe	lame 1/2 onde rotative
-----------------------------	----------------	--------------------	---------------------------

Matériel nécessaire:

- un pied photo
- un appareil photo numérique ou caméra CCD de préférence
- un objectif (donnant sur le ciel champ de quelques degrés)
- un filtre interférentiel bleu

- un polariseur linéaire fixe d'orientation connue
- une lame demi onde positionnable à 0° , 22.5° , 45° et 67.5° de l'axe d'acceptance du polariseur

1) Diriger l'appareil photo à 90° du soleil sur le ciel bleu.

2) Effectuer 4 clichés avec les mêmes réglages (mode manuel, même diaphragme, même temps de pose) pour $\alpha = 0, \pi/4, \pi/8, 3\pi/8$ et les enregistrer en format JPEG. Attention de ne pas surexposer, les clichés seraient alors inutilisables.

On obtient donc 4 images que l'on ouvre avec IMAGE J (domaine public, téléchargeable).

Sélectionner le plan BLEU uniquement de chaque image pour en prendre la moyenne. On affecte ces valeurs moyennes aux signaux S_1, S_2, S_3, S_4 .

En déduire en combinant ces quatre signaux S_1, S_2, S_3, S_4 les quantités I, Q, U, puis les rapports Q/I et U/I et enfin le taux de polarisation linéaire $[(Q/I)^2 + (U/I)^2]^{1/2}$.

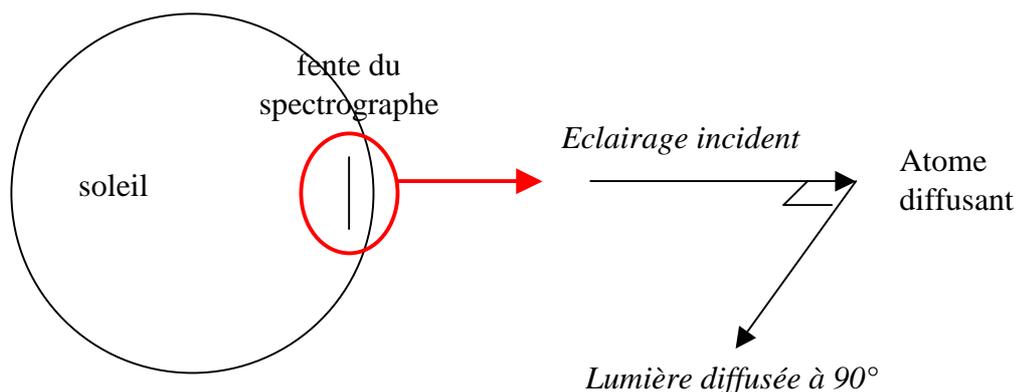
Tenter de trouver la direction de la polarisation par la relation $\tan(2\beta) = U/Q$. La direction de la polarisation trouvée devrait être orthoradiale par rapport au soleil.

3) Refaire ces mesures à 45° du soleil, puis à quelques degrés du soleil seulement (attention de ne pas faire entrer le soleil dans le champ).

Vérifier que le taux de polarisation est bien maximal à 90° du soleil.

4 - TP n°2: expérience pour mesurer la polarisation du rayonnement par diffusion résonante dans certaines raies solaires situées le bleu du spectre

Lorsqu'on observe au bord du soleil, sur le disque légèrement en deçà du limbe, la lumière recueillie est partiellement polarisée parce que le rayonnement issu de la photosphère est diffusé à environ 90° vers l'observateur par les atomes, et cette diffusion est plus importante dans le bleu. Ceci affecte non seulement le rayonnement continu, mais encore certaines raies dites de "diffusion résonante" (le photon absorbé est immédiatement réémis à 90° du rayonnement incident). Un bel exemple est celui de la raie du Strontium à 460.7 nm.



Au grand spectrographe de la Tour Solaire de Meudon, sélectionner le domaine spectral bleu autour de 460.7 nm. Positionner devant la fente du spectrographe le même polarimètre (polariseur + lame demi onde). Effectuer un cliché dans la position $\alpha = 0$ et un cliché dans la position $\alpha = \pi/4$. On obtient deux images $S_1(\lambda, x)$ et $S_2(\lambda, x)$ où x est l'abscisse le long de la fente du spectrographe.

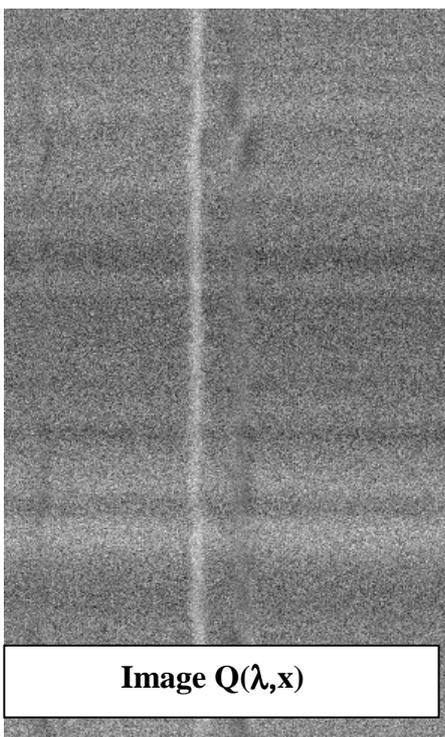
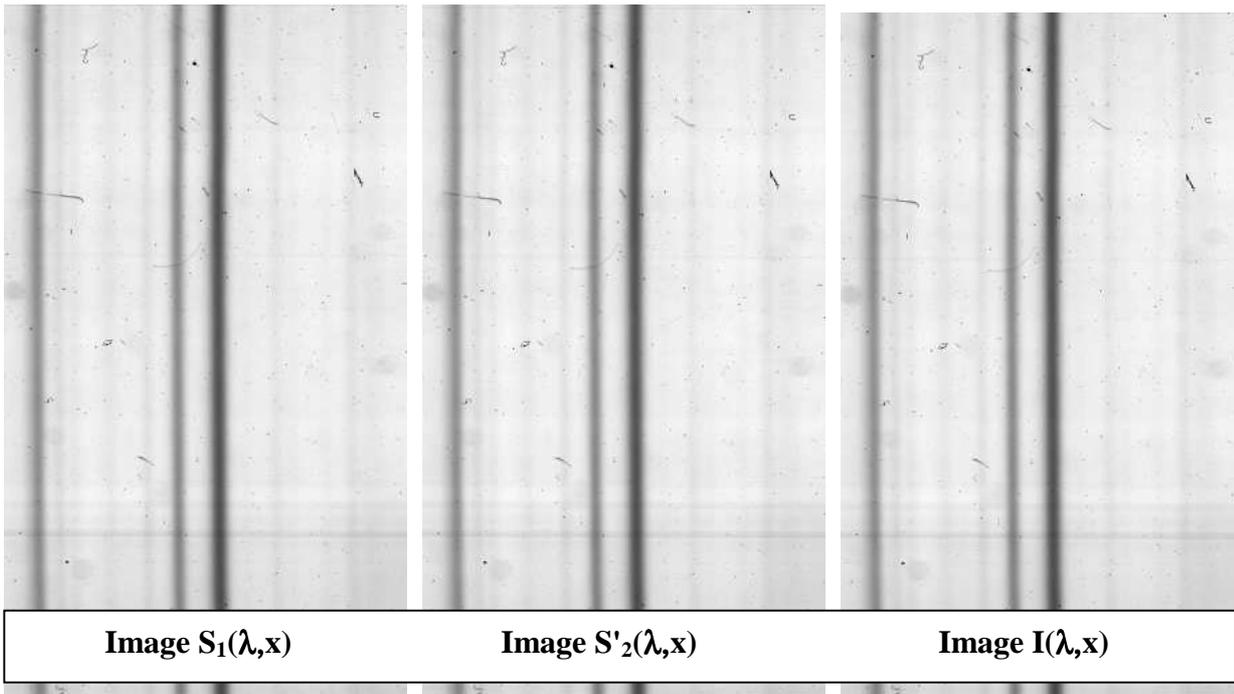
1) Avec IMAGE J, mesurer la moyenne des deux clichés et appliquer au second cliché un facteur multiplicatif **f** pour que sa moyenne soit égale à celle du premier cliché. Il faut en effet compenser la non simultanéité des deux clichés, qui induit une variation parasite de photométrie à cause de la

turbulence atmosphérique. On remplace donc $S_2(\lambda, x)$ par $S'_2(\lambda, x) = f * S_2(\lambda, x)$ de sorte que la moyenne de $S_1(\lambda, x)$ soit égale à la moyenne de $S'_2(\lambda, x)$, soit $\langle S_1(\lambda, x) \rangle = \langle S'_2(\lambda, x) \rangle$.

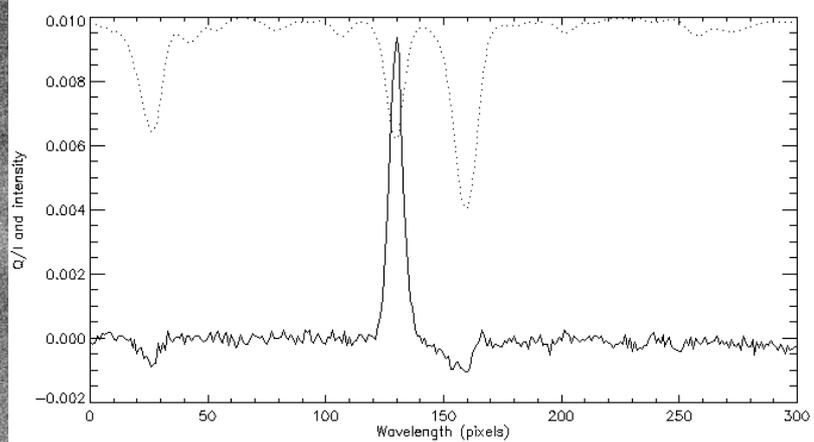
2) Calculer $Q(\lambda, x) = S_1(\lambda, x) + S'_2(\lambda, x)$ et $I(\lambda, x) = S_1(\lambda, x) - S'_2(\lambda, x)$.

3) Sommer toutes les lignes (ce qui revient à intégrer numériquement le long des colonnes sur la variable x) de $Q(\lambda, x)$ et de $I(\lambda, x)$ pour obtenir les nouvelles quantités $Q(\lambda)$ et $I(\lambda)$

4) Tracer le taux de polarisation $Q(\lambda) / I(\lambda)$ en fonction de la longueur d'onde λ . Que constatez vous sur la raie du Strontium à 460.7 nm ?



Polarisation par diffusion résonante de la raie SrI 460.7 nm
Rapport $Q(\lambda)/I(\lambda)$ après sommation des lignes (trait continu) et $I(\lambda)$ (trait pointillé)

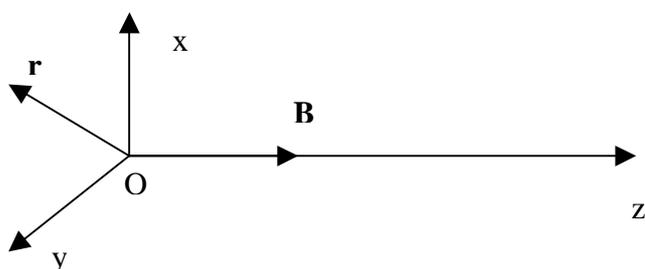


Chapitre 6

Effet Zeeman en théorie classique

L'effet Zeeman affecte les niveaux d'énergie et le rayonnement de l'atome lorsque celui-ci est plongé dans un champ magnétique. Dans ce chapitre, on prendra un modèle d'atome simplifié et assimilé à un oscillateur harmonique (électron) dont on étudiera les fréquences de rotation dans le champ magnétique ainsi que le rayonnement dipolaire à grande distance. On utilisera ainsi les outils de l'électromagnétisme et de la mécanique classique introduits en L1/L2; une description complète et rigoureuse nécessiterait l'usage de la mécanique quantique. Nous verrons néanmoins que les principaux résultats peuvent être approchés par la théorie classique. On verra aussi que les caractéristiques du rayonnement (polarisation) peuvent être décrits par la théorie du rayonnement dipolaire électrique basée sur les potentiels retardés créés par l'électron.

1 - Mouvement de l'électron dans un champ magnétique



On choisit un champ magnétique uniforme et on oriente l'axe Oz tel que $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$

Le noyau de l'atome est en O et l'électron est situé à l'extrémité du vecteur $\mathbf{r}(x,y,z)$. Sa masse est m et sa charge -e. Il est soumis à une force de rappel $-k \mathbf{r}$ (oscillateur harmonique). On pose:

$$\omega_0^2 = k/m \text{ pulsation propre}$$

et

$$\omega_g^2 = eB/m \text{ pulsation gyromagnétique.}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit vectoriellement en négligeant la force électrique devant la force magnétique, ainsi que tout frottement:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \mathbf{r} - e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge B \mathbf{e}_z$$

En projection sur les axes, cette équation devient:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \omega_g \frac{dy}{dt} = 0 & (1) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y - \omega_g \frac{dx}{dt} = 0 & (2) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0 & (3) \end{cases}$$

La 3ème équation donne par exemple $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t)$, qui représente une vibration linéairement polarisée selon l'axe Oz de pulsation ω_0 dans la direction du champ magnétique.

Pour résoudre les deux premières équations, on pose $u = x + i y$ et on effectue (1) + i (2). Il vient:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u - i \omega_g \frac{du}{dt} = 0$$

Posons $u = u_0 e^{i\omega t}$, on obtient $u_0 e^{i\omega t} (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_0 \omega_g) = 0$

Nous recherchons les solutions de $(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_0\omega_g) = 0$ telles que $\omega_g \ll \omega_0$. On obtient alors les deux solutions:

$$\boxed{\omega = \omega_g/2 + \omega_0 \text{ et } \omega = \omega_g/2 - \omega_0}, \text{ ce qui donne les deux solutions possibles:}$$

$$u_1 = u_0 [\cos(\omega_0 + \omega_g/2)t + i \sin(\omega_0 + \omega_g/2)t]$$

et

$$u_2 = u_0 [\cos((\omega_0 - \omega_g/2)t - i \sin((\omega_0 - \omega_g/2)t]$$

En supposant que $u_0 = x_0$ (réel), on en déduit les deux vibrations:

$$x = x_0 \cos(\omega_0 + \omega_g/2)t \quad \text{ou} \quad x = x_0 \cos(\omega_0 - \omega_g/2)t$$

et

$$y = x_0 \sin((\omega_0 + \omega_g/2)t \quad \text{ou} \quad y = -x_0 \sin((\omega_0 - \omega_g/2)t$$

2 - Rayonnement dipolaire électrique

On a vu ci dessus que l'électron en présence de champ magnétique dirigé selon se comporte comme un dipôle de moment dipolaire

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z + p_0 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]$$

$\mathbf{p}_1 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z$ est polarisé linéairement (ou orienté) selon \mathbf{e}_z (**la norme de \mathbf{p}_1 varie**)

$\mathbf{p}_0 = p_0 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]$ est polarisé circulairement dans un plan orthogonal à \mathbf{e}_z (**la norme de \mathbf{p}_0 est constante**) avec $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ (polarisation gauche, \mathbf{p}_0 tourne vers la gauche) ou $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$ (polarisation droite, \mathbf{p}_0 tourne vers la droite). Il y a donc 3 pulsations distinctes.

Le rayonnement dipolaire électrique s'obtient à la distance r du dipôle et à l'instant t (cours L2) par la théorie des potentiels retardés qui considère l'état du dipôle à l'instant $t-r/C$ pour tenir compte du temps de propagation à la vitesse de la lumière C :

Le potentiel vecteur

$$\mathbf{A} = (\mu_0 / 4\pi r) \mathbf{dp}(t-r/C) / dt$$

Le potentiel scalaire

$$V = -1 / (4\pi \epsilon_0 r) \text{div } \mathbf{p}(t-r/C)$$

d'où l'on tire les champs électriques et magnétiques par les relations

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}(V) - \partial\mathbf{A}/\partial t$$

On utilisera les formules d'analyse vectorielle connues. En particulier, si f est une fonction de l'espace et du temps, et si \mathbf{u} est un vecteur fixe dans l'espace:

$$\text{div}(\mathbf{fu}) = f \text{div } \mathbf{u} + \text{grad}(f) \cdot \mathbf{u} = \text{grad}(f) \cdot \mathbf{u}$$

$$\text{rot}(\mathbf{fu}) = f \text{rot } \mathbf{u} + \text{grad}(f) \wedge \mathbf{u} = \text{grad}(f) \wedge \mathbf{u}$$

a) Rayonnement sur Oz du dipôle $\mathbf{p}_1 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z$

Sur Oz, avec des fonctions en $f(z,t) = \cos[\omega(t-z/C)]$, il faut faire très attention parce que

$\partial f / \partial t = -\omega \sin[\omega(t-z/C)]$,
 et dans le gradient, $\partial f / \partial z = \omega/C \sin[\omega(t-z/C)]$

On trouve $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$ donc $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0$ vecteur de Poynting nul.

Le dipôle $\mathbf{p}_1 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z$ ne rayonne donc pas sur l'axe Oz.

b) Rayonnement sur Oz du dipôle $\mathbf{p}_0 = p_0 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]$

On trouve tous calculs faits: $V = 0$, donc

$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi z) p_0 [\cos(\omega(t-r/C)) \mathbf{e}_x + \sin(\omega(t-r/C)) \mathbf{e}_y] = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi z) \mathbf{p}_0(t-r/C)$
 dont la norme est constante. C'est une polarisation circulaire dans le plan xOy. $\mathbf{E} // \mathbf{p}_0$.

et $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) = (\mu_0 p_0 \omega^2 / 4\pi z C) [-\sin(\omega(t-r/C)) \mathbf{e}_x + \cos(\omega(t-r/C)) \mathbf{e}_y] = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi z C) \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{p}_0$
 dont la norme est aussi constante. C'est une polarisation circulaire dans le plan xOy. $\mathbf{B} \perp \mathbf{p}_0$.

On a $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{E} / C$, c'est la structure d'une onde plane.

Le vecteur de Poynting est $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0 = \mathbf{E}^2 / \mu_0 C \mathbf{e}_z$, et la polarisation est circulaire droite ou gauche (selon que $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ et $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$) dans le plan xOy.

c) Rayonnement dans le plan xOy du dipôle $\mathbf{p}_1 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z$ dans la direction définie par $\mathbf{OM} = r \mathbf{e}_r$

Dans le plan xOy, en coordonnées polaires (r, θ) , avec des fonctions en $f(r, t) = \cos[\omega(t-r/C)]$, il faut faire de nouveau très attention parce que

$\partial f / \partial t = -\omega \sin[\omega(t-r/C)]$,
 et dans le gradient, $\partial f / \partial r = \omega/C \sin[\omega(t-r/C)]$

On trouve tous calculs faits: $V = 0$, donc

$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi r) p_1 \cos(\omega_0(t-r/C)) \mathbf{e}_z$
 C'est donc une polarisation linéaire selon l'axe Oz.

et $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) = -(\mu_0 \omega^2 / 4\pi r C) p_1 \cos(\omega_0(t-r/C)) \mathbf{e}_\theta$
 C'est donc une polarisation linéaire orthoradiale dans le plan xOy.

On a $\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E} / C$, c'est la structure d'une onde plane.

Le vecteur de Poynting est $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0 = \mu_0 (\omega^2 p_1 / 4\pi r C)^2 \cos^2(\omega(t-r/C)) \mathbf{e}_r$, \mathbf{P} est radial et la polarisation est linéaire pour les deux vibrations possibles $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ et $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$.

d) Rayonnement dans le plan xOy du dipôle $\mathbf{p}_0 = p_0 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]$ dans la direction définie par $\mathbf{OM} = r \mathbf{e}_r$

$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \partial \mathbf{A} / \partial t = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi r) p_0 \sin(\omega(t-r/C) - \theta) \mathbf{e}_\theta$
 C'est une polarisation linéaire orthoradiale.

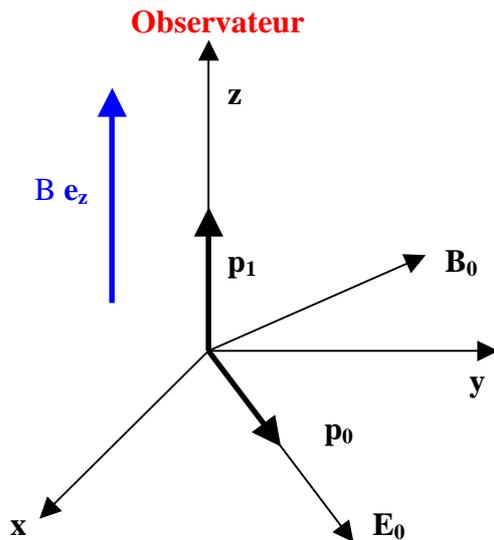
$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) = (\mu_0 \omega^2 / 4\pi r) p_0 \sin(\omega(t-r/C) - \theta) \mathbf{e}_z$
 C'est une polarisation linéaire selon l'axe Oz.

On a $\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E} / C$, c'est la structure d'une onde plane.

Le vecteur de Poynting est $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0 = \mu_0 (\omega^2 p_0 / 4\pi r C)^2 \sin^2(\omega(t-r/C)-\theta) \mathbf{e}_r$, \mathbf{P} est radial et la polarisation est linéaire pour les deux vibrations possibles $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ et $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$.

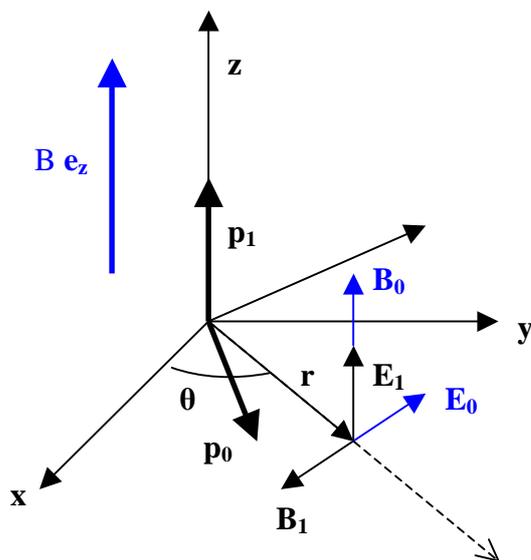
e) conclusion générale sur la polarisation du rayonnement

Le théorème de superposition permet de sommer les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} associés aux dipôles $\mathbf{p}_1 = p_1 \cos(\omega_0 t) \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{p}_0 = p_0 [\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y]$ de l'électron dans un champ magnétique $B \mathbf{e}_z$ avec $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ ou $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$.



Observation selon l'axe Oz: 2 polarisations circulaires

- le dipôle \mathbf{p}_1 ne rayonne pas, les champs associés sont nuls
- le dipôle \mathbf{p}_0 donne deux polarisations circulaires droite ou gauche aux pulsations $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ ou $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$
- \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 engendrés par \mathbf{p}_0 tournent dans le plan xOy (polarisation circulaire)
- Le vecteur de Poynting est // Oz



Observation dans le plan xOy: 3 polarisations linéaires

- \mathbf{p}_1 donne la polarisation linéaire $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ à la pulsation ω_0
- \mathbf{p}_0 donne deux polarisations linéaires $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ aux deux pulsations $\omega = \omega_g/2 + \omega_0$ ou $\omega = \omega_g/2 - \omega_0$
- Dans les 3 cas, le vecteur de Poynting est porté par \mathbf{e}_r donc radial

Observateur

Quand le champ magnétique est dirigé vers l'observateur (longitudinal), il y a donc 2 composantes polarisées circulairement dans un plan orthogonal au champ dites $\sigma+$ et $\sigma-$.

Quand le champ est orthogonal à la direction de l'observateur (transversal), il y a 3 composantes polarisées linéairement, la composante π et les deux composantes circulaires $\sigma+$ et $\sigma-$ qui, vues par la tranche, donnent aussi deux polarisations linéaires.

3 - Paramètres de Stokes: rappel du cours de polarisation

Pour une vibration $\mathbf{E} = (E_x \cos(\omega t - kz), E_y \cos(\omega t - kz + \phi), 0) = (E_1, E_2, 0)$, on peut utiliser la notation complexe des OPPH :

$$\mathbf{E} = (E_x e^{i(\omega t - kz)}, E_y e^{i\phi} e^{i(\omega t - kz)}, 0) = (E_1, E_2, 0)$$

On définit 4 paramètres de Stokes (* désigne la quantité conjuguée) par les quantités quadratiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} (E_1 E_1^* + E_2 E_2^*) = \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2) \text{ ou intensité lumineuse} \\ Q = \frac{1}{2} (E_1 E_1^* - E_2 E_2^*) = \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2) \\ U = \frac{1}{2} (E_1 E_2^* + E_2 E_1^*) = E_x E_y \cos(\phi) \\ V = \frac{1}{2} i (E_2 E_1^* - E_1 E_2^*) = -E_x E_y \sin(\phi) \end{array} \right.$$

Q, U et V caractérisent l'état de polarisation de la lumière

Un polarimètre délivre une combinaison des paramètres de Stokes I, Q, U et V, quantités quadratiques mesurables permettant de remonter à la nature de la polarisation de la lumière.

Exemple 1: mesure des paramètres I et V avec un polarimètre composé d'un polariseur et d'une lame à retard variable δ orientée à 45° .

On a vu que le signal mesuré est $S = \frac{1}{2} [E_x^2 \cos^2(\delta/2) + E_y^2 \sin^2(\delta/2) + E_x E_y \sin(\delta) \sin(\phi)]$

Or $I = \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2)$ et $Q = \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2)$ impliquent les relations de réciprocity suivantes:
 $E_x^2 = I + Q$ et $E_y^2 = I - Q$

On a vu aussi que $V = -E_x E_y \sin(\phi)$, d'où $S = \frac{1}{2} [\cos^2(\delta/2) (I + Q) + \sin^2(\delta/2) (I - Q) - \sin(\delta) V]$

$$S = \frac{1}{2} [I + \cos(\delta) Q - \sin(\delta) V]$$

Et l'on peut utiliser les combinaisons suivantes donnant accès à I, Q et V:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = -\pi/2, S_1 = \frac{1}{2} [I + V] \\ \delta = -3\pi/2, S_2 = \frac{1}{2} [I - V] \end{array} \right.$$

A partir des mesures des signaux S_1, S_2 on obtient par somme et différence I et V.

Exemple 2: mesure des paramètres I et V avec un polarimètre composé d'un polariseur et d'une lame à retard quart d'onde ($\delta = -\pi/2$) rotative orientée à $\pm 45^\circ$.

On a vu que l'on obtient les deux signaux suivants pour les orientations successives de 45° et -45° :

$$S_1 = \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 - E_x E_y \sin(\phi)]$$

$$S_2 = \frac{1}{2} [E_x^2/2 + E_y^2/2 + E_x E_y \sin(\phi)]$$

Or $I = \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2)$ et $V = -E_x E_y \sin(\phi)$, d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2} [I + V] \\ S_2 = \frac{1}{2} [I - V] \end{array} \right.$$

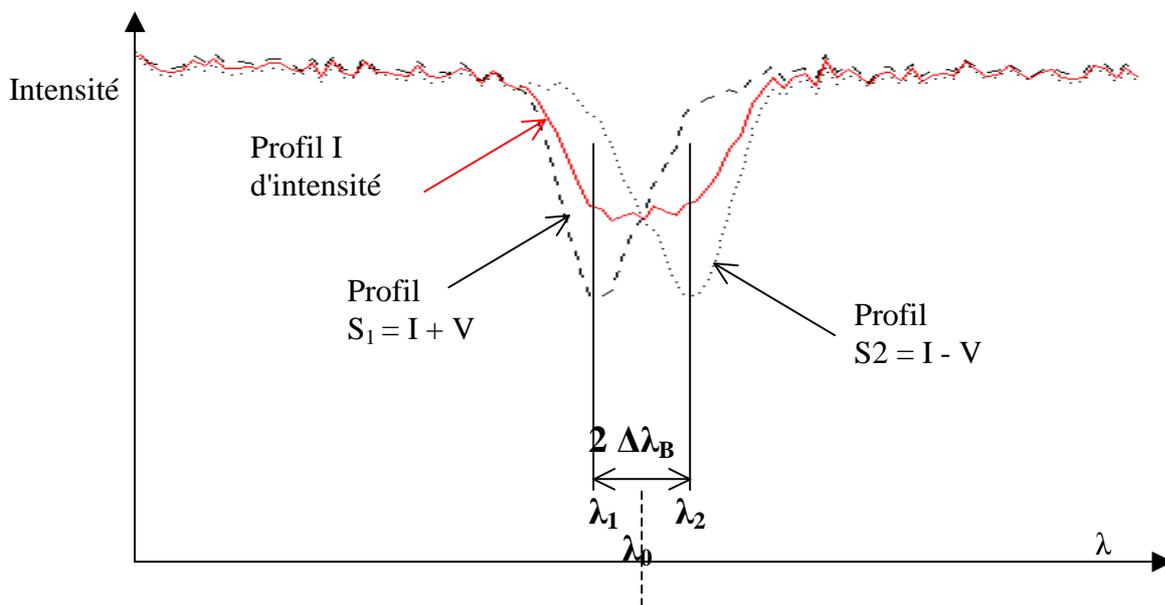
A partir des mesures des signaux S_1, S_2 on obtient par somme et différence I et V.

4 - Mesure à distance par effet Zeeman du module du champ magnétique B par la mesure des déplacements en longueur d'onde des composantes Zeeman des raies spectrales

La méthode consiste à repérer l'écartement en longueur d'onde $2 \Delta\lambda_B = \lambda_1 - \lambda_2$ entre les deux signaux $S_1 = I + V$ et $S_2 = I - V$ obtenus par un polarimètre (méthode décrite ci dessus) et injectés dans un spectrographe (pour les décomposer en longueur d'onde). Dans l'effet Zeeman, les raies spectrales sont dédoublées sous forme de deux composantes S_1 et S_2 de polarisation circulaire droite et gauche et décalées en longueur d'onde de la valeur $\pm\Delta\lambda_B$. Chaque composante se repère en longueur d'onde par la position de la dépression centrale du profil correspondant (λ_1, λ_2).

La théorie de l'effet Zeeman nous donne $\Delta\lambda_B = (\lambda_2 - \lambda_1)/2 = 4.67 \cdot 10^{-13} B g^* \lambda_0^2$

où λ_0 est la longueur d'onde du centre de la raie et g^* son facteur de Landé équivalent. On en déduit **B module du champ magnétique** (attention : B est en Gauss et λ_0 est en Å dans cette formule).



5 - Mesure à distance par effet Zeeman du champ magnétique longitudinal B// par la mesure du taux de polarisation circulaire des raies spectrales

La méthode consiste à déduire par combinaison linéaire des deux signaux $S_1 = I + V$ et $S_2 = I - V$ obtenus par un polarimètre (méthode décrite ci dessus) et injectés dans un spectrographe les profils de Stokes I et V (en fonction de la longueur d'onde). En faisant un développement limité des signaux S_1 et S_2 (décalés respectivement de $+\Delta\lambda_{B//}$ et de $-\Delta\lambda_{B//}$) en fonction de $\Delta\lambda_{B//}$, on obtient:

$$S_1(\lambda) = I_0(\lambda + \Delta\lambda_{B//}) = I_0(\lambda) + \Delta\lambda_{B//} \frac{dI_0}{d\lambda} = I_0(\lambda) + V(\lambda)$$

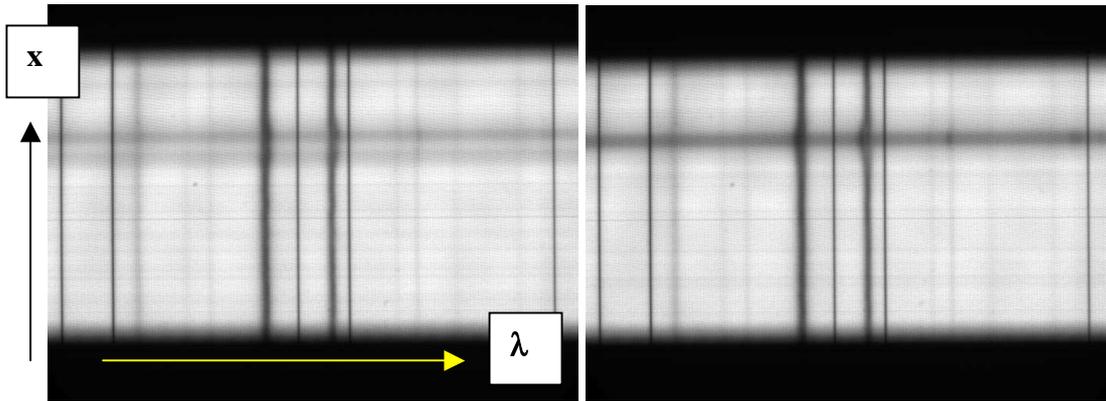
$$S_2(\lambda) = I_0(\lambda - \Delta\lambda_{B//}) = I_0(\lambda) - \Delta\lambda_{B//} \frac{dI_0}{d\lambda} = I_0(\lambda) - V(\lambda)$$

où $I_0(\lambda)$ désigne le profil non perturbé par le champ magnétique et $V(\lambda) = \Delta\lambda_{B//} \frac{dI_0}{d\lambda}$
 On en déduit que $I_0(\lambda) = \frac{1}{2} (S_1(\lambda) + S_2(\lambda))$
 et que $V(\lambda) = \frac{1}{2} (S_1(\lambda) - S_2(\lambda))$

donc finalement $V(\lambda)/I_0(\lambda) = (S_1(\lambda) - S_2(\lambda)) / (S_1(\lambda) + S_2(\lambda)) = \Delta\lambda_{B//} (dI_0/d\lambda) / I_0(\lambda)$
 et numériquement, ce taux de polarisation circulaire devient:

$$V/I_0(\lambda) = 4.67 \cdot 10^{-13} B_{//} g^* \lambda_0^2 (1/I_0) (dI_0/d\lambda)$$

formule dans laquelle $B_{//}$ est en Gauss (10^{-4} T) et la longueur d'onde en Å. λ_0 est la longueur d'onde du centre de la raie et g^* son facteur de Landé équivalent, ce sont des valeurs caractéristiques de la raie (données ci dessous).



Images spectrales $I+V(\lambda,x)$ et $I-V(\lambda,x)$, raies solaires FeI 6301 Å et 6302 Å mélangées avec des raies formées dans l'atmosphère terrestre

A partir des signaux $S_1(\lambda)$ et $S_2(\lambda)$, on déduit $I_0(\lambda)$ et $V(\lambda)$; par division on obtient $V(\lambda)/I_0(\lambda)$. Pour estimer aisément $(1/I_0) (dI_0/d\lambda)$, nous supposons que le profil non perturbé par le champ magnétique $I_0(\lambda)$ peut se mettre sous la forme d'une gaussienne, ce qui est une *hypothèse très simplificatrice*:

$$I_0(\lambda) = I_c (1 - r e^{-1/2 ((\lambda-\lambda_0)/\Delta\lambda)^2})$$

Avec r **dépression centrale** de la raie (nombre compris entre 0 et 1), I_c **intensité du continu** loin du centre de la raie, λ_0 **longueur d'onde centrale** de la raie, et $2 \Delta\lambda$ **largeur de la raie aux points d'inflexion du profil**. La dérivée de $I_0(\lambda)$ est maximale (ou minimale) aux points d'inflexion. En ces points particuliers où $\lambda = \lambda_0 \pm \Delta\lambda$, on obtient :

$$dI_0/d\lambda (\lambda_0 \pm \Delta\lambda) = \pm (I_c r / \Delta\lambda) e^{-1/2} \quad \text{et} \quad I_0(\lambda_0 \pm \Delta\lambda) = I_c (1 - r e^{-1/2})$$

$$d'où (1/I_0) dI_0/d\lambda (\lambda_0 \pm \Delta\lambda) = \pm r e^{-1/2} / ((1 - r e^{-1/2}) \Delta\lambda), \text{ et l'on en déduit}$$

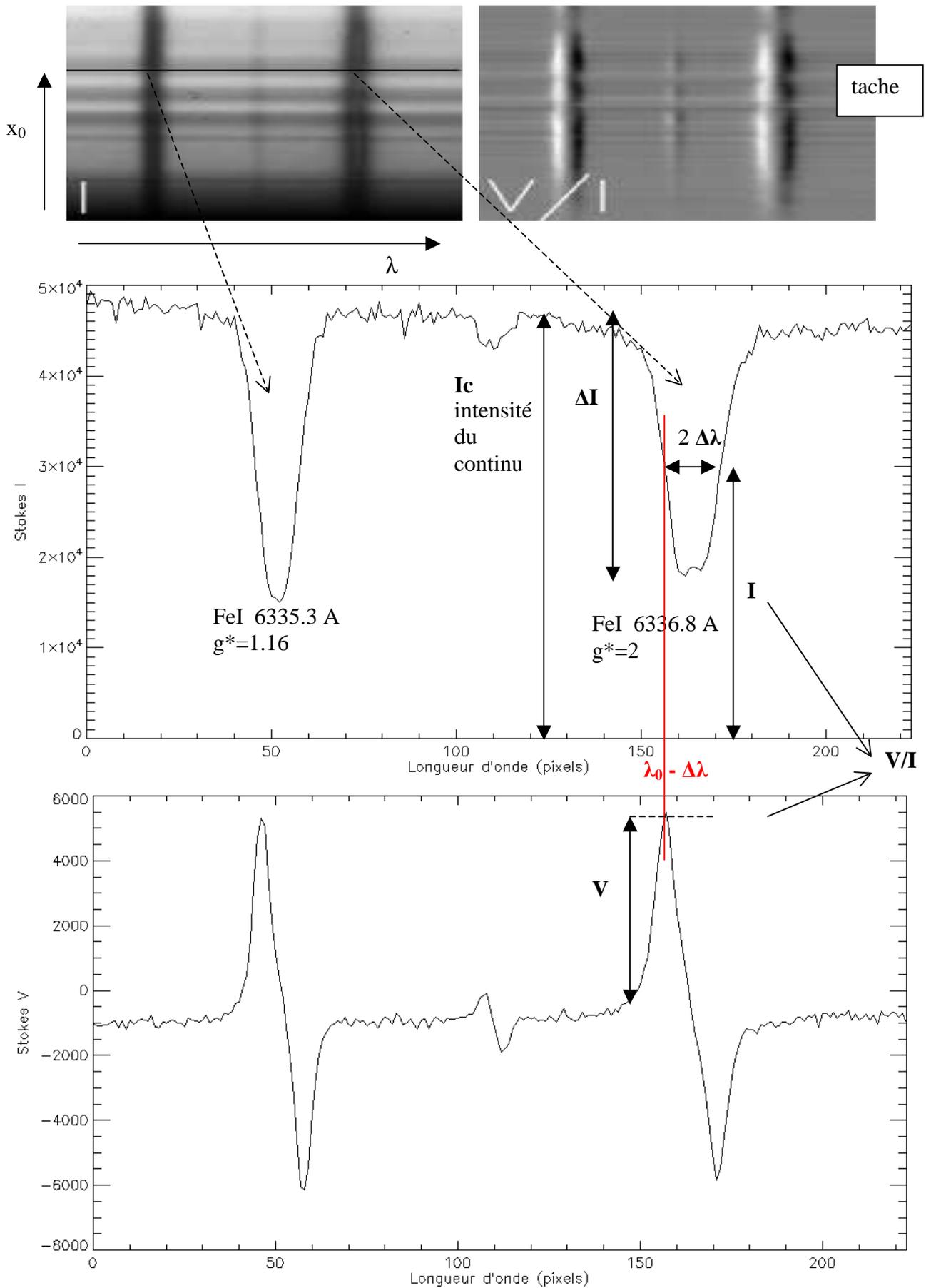
$$V/I (\lambda_0 \pm \Delta\lambda) = \pm 4.67 \cdot 10^{-13} B_{//} g^* \lambda_0^2 [r e^{-1/2} / ((1 - r e^{-1/2}) \Delta\lambda)]$$

En mesurant la dépression centrale $r = \Delta I / I_c$ et $\Delta\lambda$ (demi largeur aux points d'inflexion) sur les profils en intensité $I_0(\lambda)$ ainsi que le rapport V/I au **voisinage d'un des points d'inflexion**, c'est à dire soit $V/I(\lambda_0+\Delta\lambda)$, soit $V/I(\lambda_0-\Delta\lambda)$, on peut en déduire une estimation du champ longitudinal $B_{//}$, valeur qui peut être positive ou négative selon que la polarité est Nord ou Sud, c'est à dire sortante du soleil ou entrante.

On a donc une procédure simple permettant de mesurer:

- le **module du champ magnétique B** (méthode des déplacements en longueur d'onde des profils $I+V$ et $I-V$)
- la **projection du champ magnétique $B_{//}$ sur la ligne de visée** (mesure du taux de polarisation V/I aux points d'inflexion des profils)

De ces deux mesures, on peut déduire le champ magnétique transverse à la ligne de visée B_{\perp} puisque $B^2 = B_{//}^2 + B_{\perp}^2$, mais il ne sera pas possible de connaître l'orientation du champ transverse. Pour celà, il faudrait étudier la polarisation linéaire.



Profils $I_0(\lambda)$ en haut et $V(\lambda)$ en bas au point d'abscisse solaire x_0 pour deux raies du Fer observées. On étudie la raie de droite. On mesure $\Delta\lambda$, I_c , ΔI , $V(\lambda_0 - \Delta\lambda)$ et $I(\lambda_0 - \Delta\lambda)$.

6 - TP d'observation: mesure des champs magnétiques des taches par effet Zeeman

On étudie au spectrographe une raie en polarisation circulaire (raie du Fer par exemple) au dessus d'une tache solaire où le champ magnétique est assez intense (de l'ordre de 0.1 T). Obtenir sur la tache (ombre ou pénombre), deux ensembles d'images spectrales $I+V(\lambda, x)$ et $I-V(\lambda, x)$ en utilisant un polarimètre constitué:

- soit d'une lame quart d'onde statique rotative positionnable à 45° ou -45° de l'axe d'acceptance d'un polariseur
- soit d'un cristal liquide en position fixe à retard variable ($-\pi/2$ ou $-3\pi/2$) orienté à 45° de l'axe d'acceptance d'un polariseur

Les deux méthodes pourront être utilisées successivement pour comparer.

Les observations n'étant pas étalonnées en longueur d'onde, on déterminera la valeur du pixel spectral par comparaison avec un atlas du spectre solaire en ligne (site <http://solaire.obspm.fr>).

a) méthode 1: mesure du module du champ B par l'écartement des profils $I+V(\lambda)$ et $I-V(\lambda)$

On a vu que les profils $I+V(\lambda)$ et $I-V(\lambda)$ en un point donné du soleil sont décalés en longueur d'onde de la valeur $\pm\Delta\lambda_B$. Chaque profil se repère en longueur d'onde par la position de sa dépression centrale (λ_1, λ_2).

La théorie de l'effet Zeeman nous donne $\Delta\lambda_B = (\lambda_2 - \lambda_1)/2 = 4.67 \cdot 10^{-13} B g^* \lambda_0^2$

où λ_0 est la longueur d'onde du centre de la raie et g^* son facteur de Landé équivalent.

Déduire B de la mesure de $\Delta\lambda_B$ (attention : B est en Gauss et λ_0 est en Å dans cette formule).

b) méthode 2: mesure du champ longitudinal $B_{//}$ par le taux de polarisation circulaire V/I aux points d'inflexion

Le signal de sortie des deux polarimètres est donné dans le cours. Commencer par sommer les images $I+V$ et $I-V$ entre elles. Puis par somme et différence, en déduire $I(\lambda, x)$ et $V(\lambda, x)$.

Choisir **une position particulière x_0 sur la tache**. On obtient alors deux profils spectraux $I(\lambda, x_0)$ et $V(\lambda, x_0)$ ne dépendant que de la longueur d'onde. Tracer $V/I(\lambda, x_0)$ en fonction de la longueur d'onde. En déduire le taux de polarisation circulaire V/I aux points d'inflexion du profil, puis de ce taux, la valeur du champ magnétique longitudinal $B_{//}$ de la tache en utilisant la relation (qui suppose que la raie est gaussienne, voir cours):

$$V/I = 4.67 \cdot 10^{-13} B_{//} g^* \lambda_0^2 [r e^{-1/2} / ((1 - r e^{-1/2}) \Delta\lambda)]$$

où $\Delta\lambda$ est la demi largeur (en Å) de la raie aux points d'inflexion du profil et $r = \Delta I/I_c$ la dépression centrale (nombre compris entre 0 et 1) de la raie, que l'on mesurera. λ_0 est la longueur d'onde centrale de la raie (en Å). g^* est le facteur de Landé équivalent de la raie. Le résultat est exprimé en Gauss (1 Gauss = 10^{-4} T).

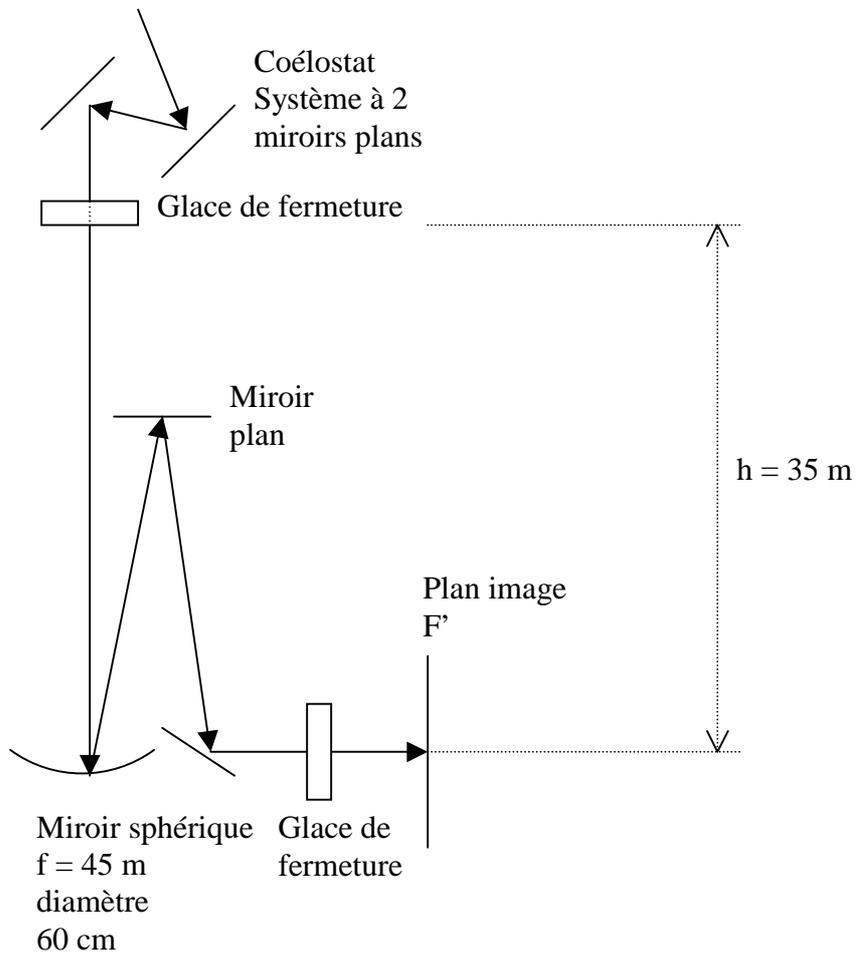
Des facteurs de Landé g^* pour des raies intéressantes:

FeI	$\lambda = 6301.5 \text{ \AA}$	$g^* = 1.67$	FeI	$\lambda = 6302.5 \text{ \AA}$	$g^* = 2.50$
FeI	$\lambda = 5247.1 \text{ \AA}$	$g^* = 2.00$	FeI	$\lambda = 5247.6 \text{ \AA}$	$g^* = 2.50$
FeI	$\lambda = 5250.2 \text{ \AA}$	$g^* = 3.00$	FeI	$\lambda = 6336.8 \text{ \AA}$	$g^* = 2.00$
FeI	$\lambda = 6173.3 \text{ \AA}$	$g^* = 2.50$	CaI	$\lambda = 6103.0 \text{ \AA}$	$g^* = 2.00$
NaI	$\lambda = 5896.0 \text{ \AA}$	$g^* = 1.33$	MgI	$\lambda = 5173.0 \text{ \AA}$	$g^* = 1.75$

c) De ces deux mesures, déduire pour terminer le champ magnétique transverse à la ligne de visée B_{\perp} par la relation $B^2 = B_{//}^2 + B_{\perp}^2$

Annexe: le grand spectrographe de 14 m de la Tour Solaire

1 - Tour solaire de Meudon : le télescope



*Les miroirs du coélost*at en haut de la Tour captent la lumière du soleil



1) *diamètre de l'image solaire au foyer F'*

le diamètre angulaire α du soleil, rapport du diamètre solaire (1 400 000 km) à la distance soleil terre ($150 \cdot 10^6$ km) est en moyenne de 9.3 milli radians = $0.53^\circ = 32' = 1920''$. Le diamètre de l'image au foyer du télescope de focale f vaut $d = \alpha f = 42$ cm.

2) *que vaut 1 seconde d'arc en mm dans l'image au foyer F' ?*

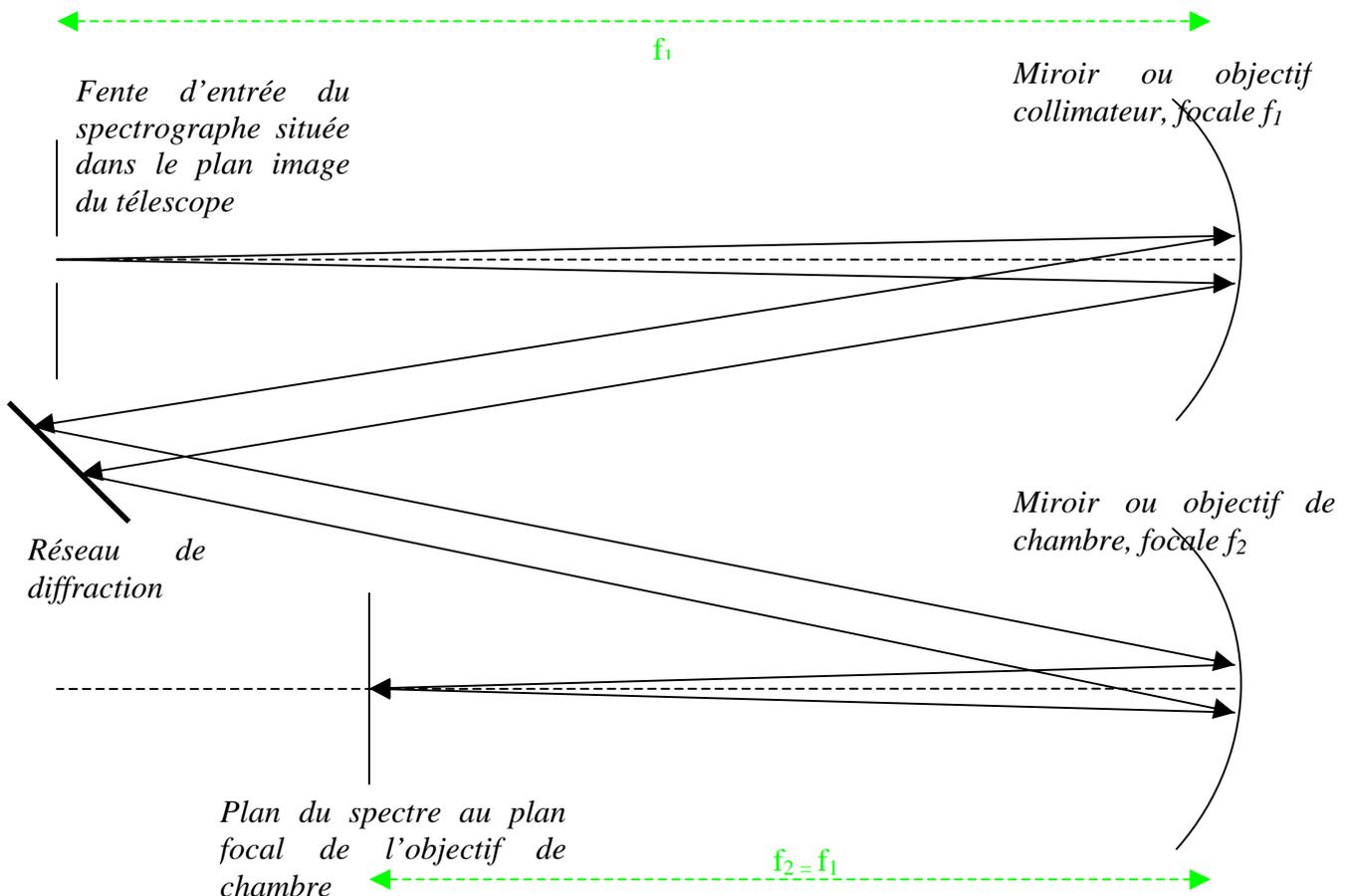
On a une image de diamètre 42 cm pour un diamètre apparent de $1920''$. On en déduit que la seconde d'arc est représentée par $420 \text{ mm} / 1920'' = 0.217 \text{ mm} = 217 \mu$

3) *pouvoir de résolution du télescope dans le vert à 500 nm*

la résolution angulaire du télescope est donnée par la relation $\theta = 1.22 \lambda / D$ pour la longueur d'onde λ , D diamètre du télescope. θ est le diamètre angulaire de la tache de diffraction d'une ouverture circulaire de diamètre D . On trouve numériquement avec $\lambda = 500 \text{ nm}$ et $D = 60 \text{ cm}$: $\theta = 0.2$ secondes de degré. Dans le bleu la résolution sera meilleure, et dans le rouge elle sera moindre.

2 - le spectrographe en simple passage : caractéristiques

Il est constitué d'un miroir collimateur ($f = 14 \text{ m}$) au foyer objet duquel se trouve la fente d'entrée du spectrographe et d'un objectif de chambre de même focale. Le spectrographe est alimenté par le télescope de 60 cm d'ouverture et de $f_t = 45 \text{ m}$ de distance focale. Caractéristiques du réseau : $1/d = 300$ traits/mm, angle de blaze $b = 63^\circ 26'$; la sélection des ordres est faite par des filtres interférentiels de 10 nm de bande passante.





Objectifs de chambre et collimateur du spectrographe; réseau et filtres sélecteurs d'ordre

1) *image de la pupille d'entrée du télescope par le collimateur*

la pupille d'entrée du télescope est constituée de la glace de fermeture haute sous la coupole ; la position de son image par le miroir du télescope peut être considérée grossièrement à l'infini. Dans ce cas, l'image de la pupille par le miroir collimateur du spectrographe se trouve au foyer image du collimateur, c'est à dire sur le réseau de diffraction.

2) *dans quel intervalle trouve t-on les valeurs de l'ordre d'interférence k quand on s'intéresse à des raies spectrales dans le domaine 4500 – 6500 Angströms (1 Å = 0.1 nm) ?*

Formule des réseaux: $\sin i + \sin i' = k \lambda / d$ (k nombre entier appelé ordre d'interférence, d distance entre deux traits du réseau, i et i' angles d'incidence et de diffraction)

Dans le blaze, on a $i = i' = b$ donc $2 \sin b = k \lambda / d$

ce qui donne $k \lambda = 59627 \text{ \AA}$ avec λ mesuré en Å, $d = 1/300 \text{ mm}$, $b = 63^\circ 26'$

$k = 13$ donne $\lambda = 4586 \text{ \AA}$ bleu

$k = 12$ donne $\lambda = 4969 \text{ \AA}$ bleu/vert

$k = 11$ donne $\lambda = 5420 \text{ \AA}$ vert

$k = 10$ donne $\lambda = 5962 \text{ \AA}$ jaune

$k = 9$ donne $\lambda = 6625 \text{ \AA}$ rouge

3) *dispersion du spectrographe dans le bleu ($\lambda \approx 4500 \text{ \AA}$) et dans le rouge ($\lambda \approx 6500 \text{ \AA}$).*

On pose $dx = f_2 di'$ et on différencie la formule des réseaux à incidence constante i; on obtient avec i' voisin de b:

$$dx/d\lambda = k f_2 / (d \cos b)$$

avec $f_2 = 14 \text{ m}$, $d = 1/300 \text{ mm}$, $b = 63^\circ 26'$

$k = 13$ donne $dx/d\lambda = 12.2 \text{ mm/\AA}$ dans le bleu (autour de $\lambda = 4586 \text{ \AA}$)

$k = 9$ donne $dx/d\lambda = 8.5 \text{ mm/\AA}$ dans le rouge (autour de $\lambda = 6625 \text{ \AA}$)

4) *résolution spectrale $\Delta\lambda$ en mÅ pour une fente d'entrée du spectrographe de 1" de degré de largeur, puis rapport $R = \lambda/\Delta\lambda$ dans le bleu ($\lambda \approx 4500 \text{ \AA}$) et dans le rouge ($\lambda \approx 6500 \text{ \AA}$).*

On pose $dx = f_1 di$ et on différencie la formule des réseaux à angle de diffraction constant i'; on obtient avec i voisin de b:

$d\lambda = dx d \cos b / (k f_1)$ soit $\Delta\lambda = \Delta x d \cos b / (k f_1)$ avec Δx largeur de la fente d'entrée du spectrographe.

Une seconde de degré correspond à $\Delta x = 0.217 \text{ mm}$ dans l'image. Avec cette valeur :

$k = 13$ donne $\Delta\lambda = 18 \text{ m}\text{\AA}$ dans le bleu (autour de $\lambda = 4586 \text{ \AA}$)

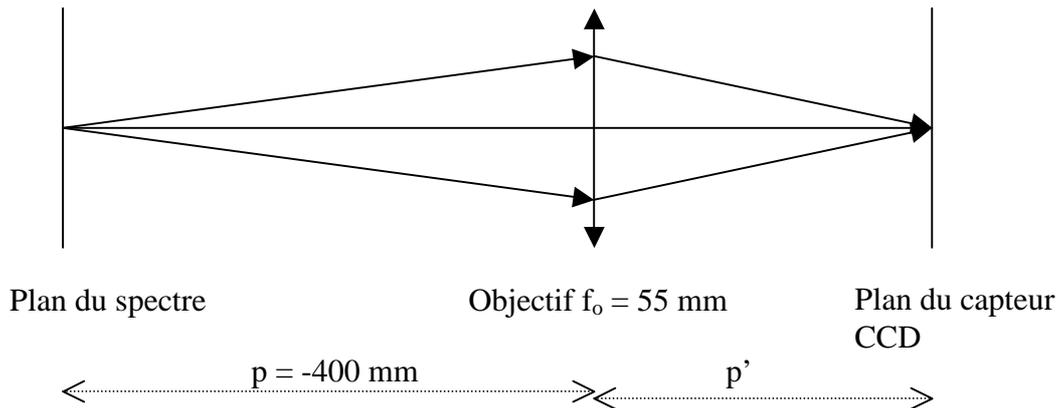
$k = 9$ donne $\Delta\lambda = 26 \text{ m}\text{\AA}$ dans le rouge (autour de $\lambda = 6625 \text{ \AA}$)

Dans le blaze, $\lambda = 2 d \sin b / k$, d'où l'on tire $R = \lambda / \Delta\lambda = 2 f_1 \tan b / \Delta x$

Ce rapport $R = \lambda / \Delta\lambda \approx 250\,000$ est indépendant de k et s'appelle **résolution du spectrographe**.

3 - sortie du spectrographe vers la caméra CCD

Un capteur CCD étant de petite dimension (de l'ordre de 1 cm^2), on réduit la taille du spectre obtenu au foyer du spectrographe à l'aide d'un objectif de 55 mm de distance focale.



5) rapport de réduction du spectre ainsi obtenu

Le rapport de réduction est donné par la relation de conjugaison $-1/p + 1/p' = 1/f_0$ avec $p = -400 \text{ mm}$ et $f_0 = 55 \text{ mm}$ (distance focale de l'objectif de la caméra). On en déduit $p' = 63.7 \text{ mm}$ et le grandissement vaut $\gamma = p'/p = -0.16$.

6) les pixels du capteur CCD sont carrés et font 12.9 microns de côté, on obtient un échantillonnage spectral différent dans le bleu ($\lambda \approx 4500 \text{ \AA}$) et dans le rouge ($\lambda \approx 6500 \text{ \AA}$)

Le détecteur possède un pixel carré de 12.9μ . On en déduit la valeur du pixel spectral :

dans le bleu ($k = 13$) : la dispersion $12.2 \text{ mm}/\text{\AA}$ devient $1.95 \text{ mm}/\text{\AA}$ sur le détecteur car on a réduit la taille du spectre (réduction de facteur 0.16)

1 pixel = $12.9 \mu = 0.0129 \text{ mm}$ correspond à $0.0129/1.95 = 0.0066 \text{ \AA} = 6.6 \text{ m}\text{\AA}$

dans le rouge ($k = 9$) : la dispersion $8.5 \text{ mm}/\text{\AA}$ devient $1.35 \text{ mm}/\text{\AA}$ sur le détecteur après réduction optique par le facteur 0.16 .

1 pixel = $12.9 \mu = 0.0129 \text{ mm}$ correspond à $0.0129/1.35 = 0.0096 \text{ \AA} = 9.6 \text{ m}\text{\AA}$

Le pixel spatial se calcule sachant qu'une seconde de degré sur le ciel représente $217 \mu \times 0.16 = 34.5 \mu$ après la réduction optique de facteur 0.16 .

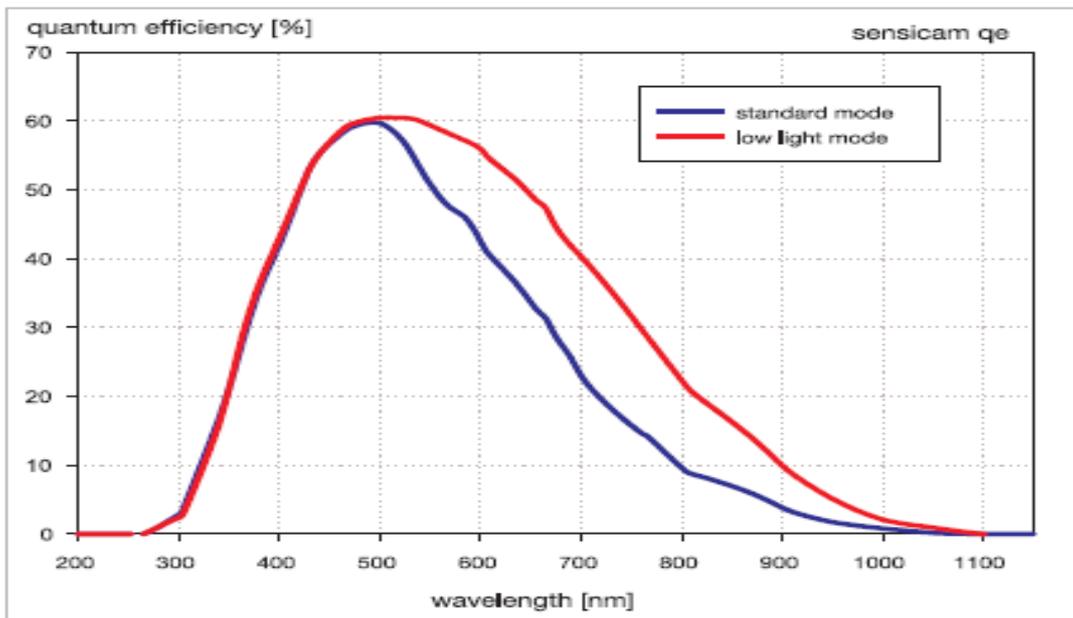
Du coup, sur le capteur CCD, 1 pixel = $12.9 \mu = 12.9/34.5'' = 0.37''$ environ

7) échantillonnage et résolution spectrale obtenue avec une fente de $1''$ de degré sur le ciel

Pour ne perdre aucune information, il faut que le pixel spectral sur le détecteur soit égal au plus à la moitié de la résolution spectrale du spectrographe. Cette condition est bien vérifiée: dans le rouge, par exemple, le pixel spectral est de $9.6 \text{ m}\text{\AA}$ pour une résolution de $\Delta\lambda = 26 \text{ m}\text{\AA}$.

4 - Capteur et caméra CCD

quantum efficiency up to 60 %, capteur SONY ICX285 interligne bas bruit de $4 e^-$ rms
 puits de potentiel par pixel de 18000 e
 rapport S/B à mi saturation voisin de 100
 12 bits dynamic range ($18000 e / 4 e = 4500$)
 thermoelectrical cooling (Peltier) down to $-12^\circ C$
 high resolution 1376×1040 pixel, utilisé en 688×520 par sommation (binning) 2×2 des pixels
 electronic shutter / exposure times from 500 ns to 3600 s
 binning (horizontal & vertical), 1, 2, 4, 8
 region of interest (ROI)
 10 frames per second at full CCD resolution (16 MHz)



Rendement quantique du détecteur CCD

5 - Signal et Bruit : quelques notions

L'arrivée des photons sur la caméra CCD suit une loi de Poisson de paramètre kt , k étant une constante et t le temps :

$$P(X=n) = \frac{(kt)^n e^{-kt}}{n!} \text{ pour } n \text{ entier}$$

Où X est la variable aléatoire donnant le nombre n de photons arrivés sur le détecteur au bout d'un temps t . On considérera que le détecteur convertit ensuite les photons en électrons, de manière proportionnelle.

Espérance mathématique ou nombre moyen de photons reçus au bout du temps t : $E(X) = kt$

$$\text{Ecart type} : \sigma(X) = (kt)^{1/2}$$

Le bruit de photons est $\sigma(X)$ et le signal est $E(X)$; comme $\sigma(X) = E(X)^{1/2}$, le bruit de photons est égal à la racine carrée du signal.

Le rapport *Signal/Bruit* du processus est défini par :

$$S/B = E(X)/\sigma(X) = kt / (kt)^{1/2} = (kt)^{1/2} = (E(X))^{1/2}$$

Il augmente donc comme la racine carrée du temps de pose t ou du nombre de photons reçus.

Notre capteur se trouvant à saturation pour un signal S de 18000 électrons, cela correspond à un bruit B de $\sqrt{18000} = 134$ électrons, soit un rapport S/B de $18000/134 = 134$ au mieux. Comme on ne travaille jamais à saturation, on considère que le rapport S/B de photons est au mieux voisin de 100.

Dans les régions sombres des spectres (coeur des raies), le signal peut descendre à 5% du continu adjacent, soit seulement $18000 \times 0.05 \approx 900$ électrons. Le bruit est alors de $\sqrt{900} = 30$ électrons, soit un rapport S/B de $900/30 = 30$ seulement, beaucoup plus faible !

Sur un spectre, on aura donc un rapport S/B dans la fourchette 30 - 100 selon qu'on s'intéresse au coeur, aux ailes ou aux continus adjacents des raies.

Bruit électronique de lecture

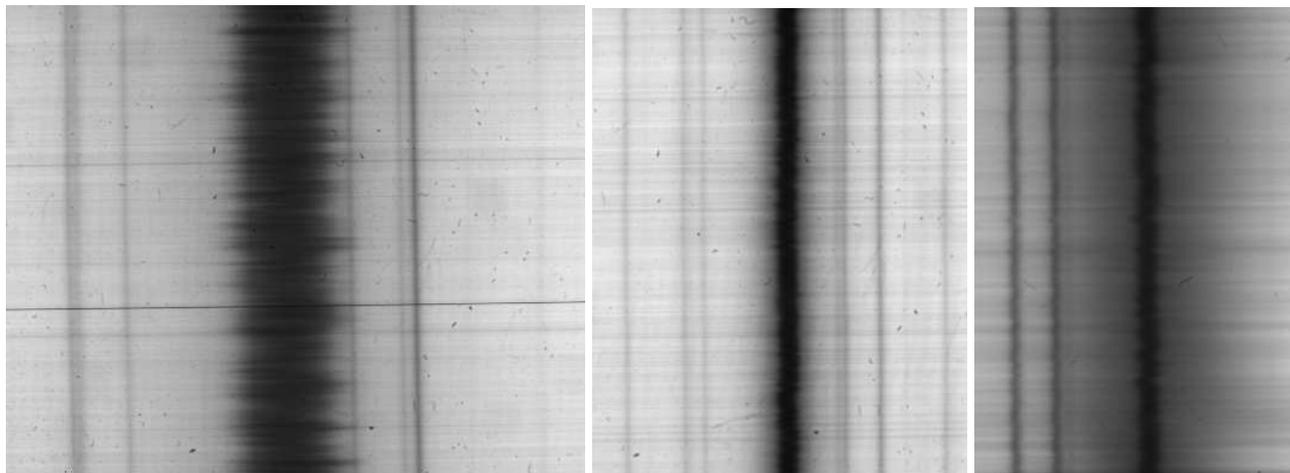
Au bruit de photons se conjugue un bruit électronique de lecture du capteur CCD, égal dans notre cas à $\sigma_c = 4$ électrons.

On montre que les bruits s'additionnent de manière quadratique, autrement dit, le bruit global est:

$$\sigma = (\sigma_c^2 + \sigma_{\text{phot}}^2)^{1/2}$$

où σ_{phot} est le bruit de photons (de 30 à 100 électrons dans le cas présent).

Avec un bon capteur à faible bruit électronique, ce qui est notre cas, le bruit de lecture σ_c est donc négligeable devant le bruit de photons σ_{phot} sur les spectres. Il n'en serait pas de même avec des capteurs courants dont le bruit de lecture σ_c peut monter à plusieurs dizaines d'électrons.



Exemples obtenus au spectrographe de 14 m de la tour solaire de Meudon: raies H alpha 656.3 nm, NaD1 589.6 nm, MgI 518.4 nm, CaI 422.7 nm

