

Discrétisation VEM-TPFA, un premier schéma couplé pour le système poroélastique

Dans le chapitre précédent, seul le système d'élasticité était considéré de manière à introduire et paramétrer la discrétisation par éléments virtuels de ce problème. Cette étape était préliminaire à l'objectif visé dans ce chapitre : construire et étudier une méthode de discrétisation couplée pour le système poroélastique, dans laquelle l'équation de mécanique est traitée par les éléments virtuels. Pour ce premier schéma couplé, la méthode des volumes finis à deux points (*Two-Points Flux Approximation* ou TPFA) est utilisée pour discrétiser la partie écoulement du problème. La première partie de ce chapitre décrit la construction de ce schéma couplé. Se plaçant d'abord dans le cadre général des volumes finis, le schéma est par la suite précisé en utilisant l'approximation TPFA. L'analyse numérique de ce schéma est proposée dans la seconde partie, où l'on obtient un résultat d'existence et d'unicité de la solution discrète ainsi qu'une estimation de l'erreur d'approximation. À l'instar du chapitre 3, la troisième section de ce chapitre complète la première en ajoutant quelques détails sur l'implémentation. Elle propose également une illustration des résultats d'analyse numérique. Enfin, le chapitre s'achève sur l'usage du schéma dans le cadre de problèmes physiques plus réalistes, tels que ceux présentés à la fin du chapitre 2.

Sommaire

4.1	Construction du schéma numérique	60
4.1.1	Discrétisation du système poroélastique	60
4.1.2	Cas du schéma volumes finis 2 points	62
4.2	Étude du schéma numérique VEM-TPFA	63
4.2.1	Existence et unicité d'une solution discrète	63
4.2.2	Majoration de l'erreur d'approximation	65
4.2.3	Majoration des erreurs d'interpolation	73
4.3	Implémentation et validation numérique	75
4.3.1	Implémentation du schéma	75
4.3.2	Patch test et limites de l'approximation à deux points	78

4.3.3	Validation numérique de l'estimation d'erreur	80
4.4	Calculs réalistes de problèmes physiques	81
4.4.1	Cas de compaction	81
4.4.2	Cas Mandel	84

4.1 Construction du schéma numérique

Le schéma couplé utilise une méthode éléments virtuels pour l'équation mécanique et une méthode volumes finis pour l'équation de conservation du fluide. Les développements de la première partie de cette section sont valides pour n'importe lesquelles de ces méthodes. À partir de la seconde partie et jusqu'à la fin de ce chapitre, on se focalise sur la méthode des éléments virtuels d'ordre 1 présentée précédemment et la méthode des volumes finis à deux points. Pour plus de simplicité, le terme de gravité dans (2.17b) n'est pas pris en compte.

4.1.1 Discrétisation du système poroélastique

Formulation intégrale du problème

La première étape consiste à réécrire les équations du système (2.17) dans un cadre variationnel ou intégral. Pour ce faire, l'espace fonctionnel V_0 , introduit pour les déplacements dans la partie 2.1.3 est complété par l'espace Q de sorte que

$$V_0 = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_{D_d}} = \mathbf{0} \right\}, \quad (4.1a)$$

$$Q = \left\{ p \in H^1(\Omega), \quad p|_{\Gamma_{D_p}} = 0 \right\}. \quad (4.1b)$$

Étant donnée $\mathbf{f} \in (L^2(]0, T[\times \Omega))^d$, une solution (\mathbf{u}, p) dans $(C^1[0, T[; V_0) \times (C^1[0, T[; Q)$ du problème continu (2.17) satisfait d'une part pour tout $\mathbf{v} \in V_0$

$$- \int_{\Omega} \mathbf{div}(\overline{\sigma_u}) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \text{presque partout dans }]0, T[$$

soit, en intégrant par parties,

$$\int_{\Omega} \overline{\sigma_u} : \overline{\epsilon_v} = \int_{\Omega} \overline{\overline{C}} \overline{\epsilon_u} : \overline{\epsilon_v} - \int_{\Omega} \alpha p \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_{N_d}} \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \quad (4.2)$$

et d'autre part, en réutilisant la décomposition de l'espace Ω en mailles K introduite dans la section 3.1.1, en intégrant (2.17b) sur chaque maille et en utilisant la formule de Stokes,

$$\forall K, \quad \int_K \partial_t(c_0 p + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{u})) + \int_{\partial K \setminus \Gamma_{N_p}} -\overline{\kappa} \nabla p \cdot \mathbf{n} = \int_K q - \int_{\partial K \cap \Gamma_{N_p}} \phi_N. \quad (4.3)$$

Discrétisation en temps

L'intervalle $[0, T]$ est discrétisé en une suite de pas de temps (t^n) tels que l'écart entre deux instants $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ soit constant. Toute fonction $\zeta(\mathbf{x}, t)$ évaluée au temps t^n est désignée par $\zeta^n(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x}, t^n)$ et les dérivées temporelles au premier ordre sont approchées par la méthode d'Euler implicite :

$$\partial_t \zeta^n(\mathbf{x}) \approx D^- \zeta^n(\mathbf{x}) := \frac{\zeta^n(\mathbf{x}) - \zeta^{n-1}(\mathbf{x})}{\Delta t}. \quad (4.4)$$

Discrétisation en espace

L'équation de la mécanique (4.2) diffère de celle obtenue en élasticité seule (2.13) uniquement par le terme de couplage $\int_{\Omega} \alpha p \operatorname{div}(\mathbf{v})$. En combinant le formalisme des méthodes variationnelles avec la discrétisation temporelle, on obtient le problème approché au temps t^n :

Trouver $\mathbf{u}_h^n \in V_{h,0}$ tel que $\forall \mathbf{v}_h \in V_{h,0}$,

$$a_h(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - \sum_K \alpha \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) p_h^n = \int_{\Omega} \mathbf{f}^n \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Gamma_{N_d}} \mathbf{t}_N^n \cdot \mathbf{v}_h \quad (4.5)$$

où $V_{h,0}$ et $a_h(\cdot, \cdot)$ désignent respectivement l'espace d'approximation des déplacements et la forme bilinéaire associée à la discrétisation. Cette formulation reste générale au sens où il est possible d'utiliser n'importe quelle méthode variationnelle, par exemple celle des éléments finis de Lagrange, pour définir $V_{h,0}$ et $a_h(\cdot, \cdot)$. Évidemment, on réutilise ici la méthode des éléments virtuels construite dans le chapitre 3, de sorte que l'espace $V_{h,0}$ est défini par l'équation (3.14) et la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ correspond à la forme approchée définie par (3.11).

D'autre part, la solution discrète en pression p_h est à chercher dans un espace discret Q_h qui dépend du choix de la méthode d'approximation pour l'équation d'écoulement et sera donc précisé ultérieurement (paragraphe 4.1.2). L'équation de conservation (4.3) est justement discrétisée en suivant le formalisme des volumes finis, décrit en détails dans [EGH00]. La caractéristique des méthodes volumes finis est d'approcher le flux $\int_{f \subset \partial K} -\bar{\kappa} \nabla p \cdot \mathbf{n}$ sortant de la maille K à travers la face f par un flux numérique noté \mathcal{F}_{Kf} . Plusieurs choix sont possibles pour la construction du flux numérique \mathcal{F}_{Kf} , mais ces schémas doivent respecter une propriété de conservativité : si la face f sépare les mailles K et L , alors l'égalité $\mathcal{F}_{Kf} = -\mathcal{F}_{Lf}$ doit être respectée. En utilisant la discrétisation en temps introduite plus haut, le schéma volumes finis s'écrit sous la forme

$$\forall K \in \tau_h, \forall n \in [1, N], \quad \int_K (c_0 p_h^n + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n)) + \Delta t \sum_{\substack{f \subset \partial K \\ f \notin \Gamma_{N_p}}} \mathcal{F}_{Kf}^n = \int_K (\Delta t q^n + c_0 p_h^{n-1} + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^{n-1})) - \Delta t \int_{\partial K \cap \Gamma_{N_p}} \phi_N^n. \quad (4.6)$$

La combinaison de ces deux discrétisations conduit au schéma couplé : pour chaque pas de temps t^n avec $n \geq 1$, trouver une solution $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in (V_{h,0} \times Q_h)$ au système (4.7) :

Discrétisation VEM-FV pour le système poroélastique

 Trouver $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in (V_{h,0} \times Q_h)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in V_{h,0}, \quad a_h(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - \sum_K \alpha \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) p_h^n &= \int_{\Omega} \mathbf{f}^n \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Gamma_{Nd}} \mathbf{t}_N^n \cdot \mathbf{v}_h \\ \forall K \in \tau_h, \int_K (c_0 p_h^n + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n)) + \Delta t \sum_{\substack{f \subset \partial K \\ f \notin \Gamma_{Np}}} \mathcal{F}_{Kf}^n &= \int_K (\Delta t q^n + c_0 p_h^{n-1} + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^{n-1})) - \Delta t \int_{\partial K \cap \Gamma_{Np}} \phi_N^n \end{aligned} \quad (4.7)$$

 avec à l'instant initial p_h^0 projection de $p^0 = p(\mathbf{x}, t^0)$ dans l'espace Q_h et $\mathbf{u}_h^0 \in V_{h,0}$ solution du problème

$$\forall \mathbf{v}_h \in V_{h,0}, \quad a_h(\mathbf{u}_h^0, \mathbf{v}_h) = \sum_K \alpha \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) p_h^0 + \int_{\Omega} \mathbf{f}^0 \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Gamma_{Nd}} \mathbf{t}_N^0 \cdot \mathbf{v}_h. \quad (4.8)$$

4.1.2 Cas du schéma volumes finis 2 points

Cette formulation générale est à préciser en choisissant l'espace d'approximation Q_h et la méthode d'approximation du flux numérique. Différentes alternatives existent (voir par exemple [Dro14] pour une revue des différentes méthodes), plus ou moins sophistiquées mais également plus ou moins coûteuses, offrant plusieurs possibilités pour le couplage avec l'équation de la mécanique. Dans un premier temps, on s'intéresse à la méthode dite à deux points qui fait intervenir une inconnue en pression par maille. Elle appartient à l'ensemble des méthodes dites *cell centered* où les inconnues sont localisées dans les mailles, qui sont compatibles avec la formulation (4.3). En conséquence, l'espace d'approximation Q_h est l'espace des fonctions constantes dans chaque cellule :

$$Q_h = \{p_h \in L^2(\Omega) \text{ tel que } p_{h_K} \in \mathbb{P}_0(K)\}. \quad (4.9)$$

On note que Q_h est inclus dans L^2 sans être un sous-espace de Q : $Q_h \not\subset Q$. Dans chaque élément K , la pression est calculée en utilisant un point de calcul \mathbf{x}_K qui peut possiblement différer du barycentre de la cellule, propriété qui sera illustrée dans la section 4.3. Le fait que la pression discrète soit constante par maille facilite grandement l'évaluation des intégrales puisque $\int_K p_h^n d\mathbf{x} = p_{h_K}^n \int_K d\mathbf{x}$. En particulier, le traitement du terme de couplage $\int_K \alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) p_h^n$ se réduit au calcul de $\alpha p_{h_K}^n \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)$, et donc à l'intégrale de la divergence des fonctions de base. Or, cette intégrale a déjà été calculée dans la méthode des éléments virtuels.

La méthode à deux points, approximation de base des volumes finis, souffre de certains inconvénients, le principal étant la contrainte dite d'orthogonalité. Dans le cas d'un tenseur $\bar{\kappa}$ isotrope, si une face f sépare les mailles K et L , dont la pression est approchée aux points \mathbf{x}_K et \mathbf{x}_L , alors le schéma n'est consistant que si le segment formé par ces points de calcul est orthogonal à la face : la propriété $(\mathbf{x}_K \mathbf{x}_L) \perp f$ doit être vérifiée. Dans le cas où le tenseur $\bar{\kappa}$ est anisotrope, la consistance est encore plus compliquée à obtenir puisque le maillage doit dans ce cas vérifier la contrainte dite de $\bar{\kappa}$ -orthogonalité

$$\bar{\kappa}^{-1}(\mathbf{x}_K \mathbf{x}_L) \perp f. \quad (4.10)$$

Dans la suite de ce chapitre, on supposera donc que $\bar{\kappa} = \kappa \bar{I}_d$, avec κ scalaire réel.

En contrepartie de cette limitation, la méthode à deux points est relativement simple à mettre en place et peu coûteuse. En effet, peu d'inconnues interviennent dans le calcul des flux numériques, ce qui conduit à un stencil étroit pour la matrice du système linéaire associé à la discrétisation. Cette méthode constitue donc un bon choix pour mettre en place un premier schéma couplé et en effectuer l'analyse mathématique. Avec cette méthode, le flux numérique est défini par

$$\mathcal{F}_{Kf}^n = \begin{cases} T_f(p_{h_K}^n - p_{h_L}^n) & \text{avec } T_f = \frac{|f|\kappa^{eq}}{d_{KL}} \text{ si } f \subset \Omega, \\ T_f p_{h_K}^n & \text{avec } T_f = \frac{|f|\kappa}{d_{Kf}} \text{ si } f \subset \Gamma_{D_p}, \end{cases} \quad (4.11)$$

où T_f est appelé *transmissivité* à travers la face f et fait intervenir pour les arêtes internes la perméabilité équivalente κ^{eq} calculée de manière harmonique grâce à la formule

$$\frac{d_{KL}}{\kappa^{eq}} = \frac{d_{Lf}}{\kappa_L} + \frac{d_{Kf}}{\kappa_K}. \quad (4.12)$$

La quantité d_{KL} (resp. d_{Kf}) correspond à la distance euclidienne entre les points \mathbf{x}_K et \mathbf{x}_L (resp. entre le point \mathbf{x}_K et la face f). Ce flux définit également la semi-norme H^1 discrète (qui est en réalité une norme H^1 discrète dans le cas où $\Gamma_{D_p} \neq \emptyset$)

$$|p_h|_{1,\tau} = \left(\sum_{f \subset \overline{\Omega} \setminus \Gamma_{N_p}} T_f D_f(p_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ avec } D_f(p_h) = \begin{cases} |p_{h_K} - p_{h_L}| & \text{si } f \subset \Omega, \\ |p_{h_K}| & \text{si } f \subset \Gamma_{D_p}. \end{cases} \quad (4.13)$$

L'usage de l'espace Q_h et de l'approximation à deux points pour calculer le flux dans l'équation (4.7) définit donc le schéma couplé VEM-TPFA.

4.2 Étude du schéma numérique VEM-TPFA

Dans cette section, on travaille sur l'étude numérique du schéma construit dans la section précédente. Pour simplifier les démonstrations, on travaille avec des conditions de Neumann nulles ($\mathbf{t}_N = \mathbf{0}, \phi_N = 0$). On montre dans la section 4.2.1 l'existence et l'unicité d'une solution discrète au schéma numérique, et on travaille sur une estimation de l'erreur numérique dans les sections 4.2.2 et 4.2.3.

4.2.1 Existence et unicité d'une solution discrète

On démontre dans cette partie le théorème suivant :

Théorème 4.1 *Le schéma (4.7) avec les flux de la méthode à deux points (4.11) admet pour tout temps t^n une unique solution discrète (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) .*

Soit \mathcal{O} l'opérateur associé au système d'équations (4.7). On cherche à chaque temps t^n une solution satisfaisant $\mathcal{O}(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) = b$ où b dépend des données et de la solution au temps précédent. Remarquant que :

- l'opérateur \mathcal{O} est linéaire (car a_h est bilinéaire et que les flux \mathcal{F}_{Kf}^n ainsi que les termes de couplage sont linéaires);

- le système est carré car composé de d équations ($d = 2$ ou 3) par nœuds "non Dirichlet" pour sa première ligne, par définition de $V_{h,0}$, plus une équation par maille pour sa seconde ligne, ce qui est égal au nombre d'inconnues (d par nœuds en déplacement et une par maille en pression) ;
- à l'instant initial, la solution (\mathbf{u}_h^0, p_h^0) , est uniquement définie par les données initiales ; plus précisément, p_h^0 est la projection de p^0 dans l'espace discret et \mathbf{u}_h^0 est solution du problème élastique discret (4.8), ce problème admettant une unique solution d'après le lemme 3.1 ;

il suffit de montrer qu'à chaque instant t^n , l'unique solution du système homogène

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in V_{h,0}, \quad a_h(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - \sum_K \alpha \int_K \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) p_h^n &= 0 \\ \forall K \in \tau_h, \quad \int_K (c_0 p_h^n + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n)) + \Delta t \sum_{\substack{f \subset \partial K \\ f \notin \Gamma_{N_p}}} \mathcal{F}_{Kf}^n &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

est $(0, 0)$. La première égalité est évaluée en $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h^n$ (car $\mathbf{u}_h^n \in V_{h,0}$) tandis que la seconde est multipliée par la valeur constante $p_{h_K}^n$, puis sommée sur l'ensemble des cellules :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^n) - \sum_K \alpha \int_K \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) p_h^n &= 0 \\ \sum_K \int_K (c_0 p_h^n p_{h_K}^n + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) p_{h_K}^n) + \Delta t \sum_K p_{h_K}^n \sum_{\substack{f \subset \partial K \\ f \notin \Gamma_{N_p}}} \mathcal{F}_{Kf}^n &= 0. \end{aligned}$$

En sommant ces deux égalités, il y a simplification des termes $\int_K \alpha \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) p_h^n$ d'où

$$a_h(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^n) + \int_{\Omega} c_0 p_h^n p_h^n + \Delta t \sum_K p_{h_K}^n \sum_{\substack{f \subset \partial K \\ f \notin \Gamma_{N_p}}} \mathcal{F}_{Kf}^n = 0. \quad (4.15)$$

Les deux premiers termes sont positifs par positivité de a_h et du produit scalaire. Pour le troisième terme, en réorganisant la somme sur les faces,

$$\begin{aligned} \sum_K p_{h_K}^n \sum_{\substack{f \subset \partial K \\ f \notin \Gamma_{N_p}}} \mathcal{F}_{Kf}^n &= \sum_{f \subset \Omega \setminus \partial \Omega} T_f \left((p_{h_K}^n - p_{h_L}^n) p_{h_K}^n + (p_{h_L}^n - p_{h_K}^n) p_{h_L}^n \right) + \sum_{f \subset \Gamma_{D_p}} T_f (p_{h_K}^n)^2 \\ &= \sum_{f \subset \Omega \setminus \partial \Omega} T_f (p_{h_K}^n - p_{h_L}^n)^2 + \sum_{f \subset \Gamma_{D_p}} T_f (p_{h_K}^n)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Chacun des trois termes dans la somme (4.15) est donc nul. La forme a_h étant définie positive, on a directement $\mathbf{u}_h^n = \mathbf{0}$. Pour p_h^n , on a la nullité si $c_0 > 0$ grâce au produit scalaire. Dans le cas contraire, le fait que la somme (4.16) soit nulle implique que $p_{h_K}^n = 0$ lorsque $f \subset \Gamma_{D_p}$. En raisonnant de proche en proche, on a $p_{h_L}^n = 0$ pour toutes les autres mailles et finalement $p_h^n = 0$.

Ainsi, on a montré que l'unique solution du système homogène est $(0, 0)$ et donc que l'opérateur \mathcal{O} associé est inversible. Pour tout second membre, le système non homogène $\mathcal{O}(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) = b$ admet une unique solution d'après les arguments énoncés en début de section.

4.2.2 Majoration de l'erreur d'approximation

Pour quantifier l'écart entre la solution exacte et la solution calculée, on introduit des opérateurs d'interpolation permettant d'obtenir le représentant de la solution exacte dans les espaces d'approximation discrets. L'opérateur permettant de passer d'une fonction suffisamment régulière de Q à son interpolée dans Q_h est noté P et est défini par

$$\forall K \in \tau_h, \forall \mathbf{x} \in K, \quad Pp(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}_K).$$

L'opérateur continu permettant de passer d'une fonction suffisamment régulière de V_0 à son interpolée dans $V_{h,0}$ est noté \tilde{P} et est défini à partir des degrés de liberté (*ie* les valeurs aux sommets) :

$$\forall i \in \mathcal{M}, \quad (\tilde{P}\mathbf{u})(V_i) = \mathbf{u}(V_i).$$

L'erreur entre la solution réelle et la solution approchée est décomposée en erreur d'interpolation E^I , qui dépend de la qualité des espaces d'approximation, et erreur du schéma E^A qui dépend de la qualité du schéma numérique :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} - \mathbf{u}_h &= \mathbf{u} - \tilde{P}\mathbf{u} + \tilde{P}\mathbf{u} - \mathbf{u}_h = E_{\mathbf{u}}^I + E_{\mathbf{u}}^A = E_{\mathbf{u}} \\ p - p_h &= p - Pp + Pp - p_h = E_p^I + E_p^A = E_p. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pour les besoins de l'analyse d'erreur, une projection depuis V_0 vers l'espace des fonctions affines par mailles $\mathbb{P}_1^d(K)$ est nécessaire. Dès lors que $\mathbf{u} \in (C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega))^d$, cette projection coïncide sur chaque maille avec celle définie par l'équation (3.16). L'erreur de projection associée à cet opérateur est notée

$$E_{\mathbf{u}}^{\pi} = \mathbf{u}|_K - \pi^K \mathbf{u}|_K. \quad (4.18)$$

Puisque cette quantité n'est pas globalement dans $H^1(\Omega)$, car discontinue aux interfaces, on définit la norme H^1 brisée

$$\|\cdot\|_{H^1(\tau)} = \left(\sum_{K \in \tau_h} \|\cdot\|_{H^1(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le travail de cette section vise à démontrer l'estimation suivante sur les erreurs d'approximation.

Proposition 4.2 *Sous réserve que la solution exacte soit suffisamment régulière et que $\Delta t \leq \frac{c_0}{2}$, l'erreur d'approximation du schéma satisfait*

$$\|E_{\mathbf{u}}^{A,N}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|E_p^{A,N}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \Delta t |E_p^{A,n}|_{1,\tau}^2 \leq \exp(t^N) (B\Delta t^2 + B' \|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1(\Omega)}^2 + E^I) \quad (4.19)$$

où $E_{\mathbf{u}}^{A,n}$ et $E_p^{A,n}$ sont les quantités définies par (4.17) évaluées au temps t^n , B et B' sont deux constantes positives dépendant des paramètres physiques $c_0, \alpha, d, |\Omega|$, des constantes d'ellipticité de a et a_n , des dérivées temporelles de la solution exacte $\partial_{tt}\mathbf{u}$ et $\partial_{tt}p$ et où le terme E^I défini par (4.33) regroupe les différentes erreurs d'interpolation et de projection.

La démonstration est séparée en trois étapes. En premier lieu, une égalité faisant intervenir les erreurs d'approximation est obtenue. En second lieu, le membre de droite est borné par une quantité indépendante des erreurs d'approximation. Enfin, une version discrète du lemme de Grönwall est utilisée pour conclure.

Première partie – obtention d’une égalité

Dans cette partie, toutes les grandeurs sont considérées à un temps donné t^n . L’exposant n des inconnues discrètes est donc omis pour une meilleure lisibilité. En utilisant la bilinéarité de a et a_h , des termes additionnels sont introduits dans la formulation variationnelle exacte (4.2) et approchée (4.7) : $\forall \mathbf{v}_h \in V_{h,0}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \tau_h} a(\mathbf{u}|_K - \pi^K \mathbf{u}|_K, \mathbf{v}_h) + \sum_{K \in \tau_h} a(\pi^K \mathbf{u}|_K, \mathbf{v}_h) - \alpha \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \\ -a_h(\tilde{P}\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + a_h(\tilde{P}\mathbf{u} - \sum_{K \in \tau_h} \pi^K \mathbf{u}|_K, \mathbf{v}_h) + \sum_{K \in \tau_h} a_h(\pi^K \mathbf{u}|_K, \mathbf{v}_h) - \alpha \int_{\Omega} p_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{v}_h. \end{aligned}$$

La soustraction de ces deux égalités et le fait que $a_h(\pi^K \mathbf{u}|_K, \mathbf{v}_h) = a(\pi^K \mathbf{u}|_K, \mathbf{v}_h)$ pour tout K car $\pi^K \mathbf{u}|_K \in \mathbb{P}_1^d(K)$ conduit à

$$a_h(E_{\mathbf{u}}^A, \mathbf{v}_h) - \alpha \int_{\Omega} E_p \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) = a\left(\sum_{K \in \tau_h} \pi^K \mathbf{u}|_K - \mathbf{u}|_K, \mathbf{v}_h\right) + a_h\left(\tilde{P}\mathbf{u} - \sum_{K \in \tau_h} \pi^K \mathbf{u}|_K, \mathbf{v}_h\right) + \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{v}_h.$$

Puisque $D^- E_{\mathbf{u}}^A \in V_{h,0}$ (l’opérateur D^- étant défini par (4.4)), on a en choisissant $\mathbf{v}_h = D^- E_{\mathbf{u}}^A$

$$a_h(E_{\mathbf{u}}^A, D^- E_{\mathbf{u}}^A) - \alpha \int_{\Omega} E_p \operatorname{div}(D^- E_{\mathbf{u}}^A) = a(-E_{\mathbf{u}}^{\pi}, D^- E_{\mathbf{u}}^A) + a_h(E_{\mathbf{u}}^{\pi} - E_{\mathbf{u}}^I, D^- E_{\mathbf{u}}^A) + \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot D^- E_{\mathbf{u}}^A. \quad (4.20)$$

Pour l’équation de conservation, on soustrait de la même manière les deux équations ci-dessous satisfaites par chacune des deux solutions

$$\begin{aligned} \int_K c_0 (D^- - D^- + \partial_t)(p(\mathbf{x}, t^n)) + \alpha \operatorname{div}((D^- - D^- + \partial_t)(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t^n))) + \int_{\partial K} -\kappa \nabla p(\mathbf{x}, t^n) \cdot \mathbf{n} &= \int_K q(\mathbf{x}, t^n) \\ \int_K c_0 D^- p_{h|K} + \alpha \operatorname{div}(D^- \mathbf{u}_h) + \sum_{f \subset \partial K} \mathcal{F}_{Kf} &= \int_K q(\mathbf{x}, t^n) \end{aligned}$$

puis on multiplie par la grandeur constante par maille E_p^A et on somme sur l’ensemble des mailles pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_0 D^- (E_p) E_p^A + \alpha \int_{\Omega} \operatorname{div}(D^- E_{\mathbf{u}}) E_p^A + \sum_K \sum_{f \subset \partial K} (\overline{F_{Kf}} - F_{Kf}^n) E_p^A \\ = \int_{\Omega} c_0 (D^- p - \partial_t p) E_p^A + \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div}((D^- \mathbf{u} - \partial_t \mathbf{u})) E_p^A \end{aligned} \quad (4.21)$$

où l’on a noté $\overline{F_{Kf}}$ le flux exact défini au temps t^n par $\overline{F_{Kf}} = \int_{f \subset \partial K} -\kappa \nabla p(\mathbf{x}, t^n) \cdot \mathbf{n}$. La différence entre le flux numérique \mathcal{F} et le flux exact \overline{F} doit être explicitée afin de séparer l’erreur due au schéma volumes finis et l’erreur due à l’interpolation dans l’espace discret Q_h : ainsi, on note F_{Kf}^* le flux numérique évalué en la projection Pp de la solution exacte de sorte que

$$\sum_K \sum_{f \subset \partial K} (\overline{F_{Kf}} - \mathcal{F}_{Kf}) E_p^A = \sum_K \sum_{f \subset \partial K} (\overline{F_{Kf}} - F_{Kf}^*) E_p^A + \sum_K \sum_{f \subset \partial K} (F_{Kf}^* - \mathcal{F}_{Kf}) E_p^A.$$

On remarque directement que la différence $(F_{Kf}^* - \mathcal{F}_{Kf})$ est égale au flux numérique \mathcal{F} évalué en E_p^A et non en p_h . Ainsi, en procédant à une réorganisation de la somme comme pour l'équation (4.16), on a

$$\sum_K \sum_{f \in \partial K} (\overline{F_{Kf}} - \mathcal{F}_{Kf}) E_p^A = \sum_K \sum_{f \in \partial K} (\overline{F_{Kf}} - F_{Kf}^*) E_p^A + |E_p^A|_{1,\tau}^2.$$

La seconde double somme s'assimile à une erreur d'interpolation et sera traitée prochainement. La première partie s'achève en sommant les équations (4.20) et (4.21) en remarquant la simplification partielle des termes de la forme $\int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{u})$ (cette simplification était totale lors de l'étude de stabilité du schéma continu) pour obtenir

$$a_h(E_{\mathbf{u}}^A, D^- E_{\mathbf{u}}^A) + \int_{\Omega} c_0 D^- E_p^A E_p^A + |E_p^A|_{1,\tau}^2 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6$$

avec

$$\begin{aligned} B_1 &= -\alpha \int_{\Omega} \operatorname{div}(D^- E_{\mathbf{u}}^I) E_p^A + \alpha \int_{\Omega} \operatorname{div}(D^- E_{\mathbf{u}}^A) E_p^I, & B_2 &= a(-E_{\mathbf{u}}^{\pi}, D^- E_{\mathbf{u}}^A) + a_h(E_{\mathbf{u}}^{\pi} - E_{\mathbf{u}}^I, D^- E_{\mathbf{u}}^A), \\ B_3 &= \int_{\Omega} c_0 (D^- p - \partial_t p) E_p^A + \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div}(D^- \mathbf{u} - \partial_t \mathbf{u}) E_p^A, & B_4 &= \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot D^- E_{\mathbf{u}}^A, \\ B_5 &= -\sum_K \sum_{f \in \partial K} (\overline{F_{Kf}} - F_{Kf}^*) E_p^A, & B_6 &= -c_0 \int_{\Omega} E_p^A D^- E_p^I. \end{aligned}$$

Deuxième partie – majoration

À ce stade, l'exposant temporel n est réintroduit et l'équation précédente est sommée sur n entre 1 et N . En utilisant l'égalité $2\mathcal{B}(u - v, u) = \mathcal{B}(u, u) + \mathcal{B}(u - v, u - v) - \mathcal{B}(v, v)$ valable pour toute forme bilinéaire symétrique, on a en notant $\|\mathbf{u}\|_{a_h}^2 = a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ la norme associée à la forme bilinéaire a_h

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_0 D^- E_p^{A,n} E_p^{A,n} &\geq \frac{c_0}{2\Delta t} (\|E_p^{A,n}\|_{L^2}^2 - \|E_p^{A,n-1}\|_{L^2}^2); \\ a_h(E_{\mathbf{u}}^{A,n}, D^- E_{\mathbf{u}}^{A,n}) &\geq \frac{1}{2\Delta t} (\|E_{\mathbf{u}}^{A,n}\|_{a_h}^2 - \|E_{\mathbf{u}}^{A,n-1}\|_{a_h}^2). \end{aligned}$$

La somme est donc télescopique et, en remarquant de plus que $E_p^{A,0} = 0$ et en utilisant la constante de coercivité de a_h notée $\tilde{\mu}$, celle-ci devient

$$\tilde{\mu} \|E_{\mathbf{u}}^{A,N}\|_{H^1}^2 + c_0 \|E_p^{A,N}\|_{L^2}^2 + 2 \sum_{n=0}^N \Delta t |E_p^{A,n}|_{1,\tau}^2 \leq \tilde{\mu} \|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1}^2 + 2\Delta t \sum_{n=1}^N (B_1^n + B_2^n + B_3^n + B_4^n + B_5^n + B_6^n).$$

Il reste à majorer chacune des sommes en temps du second membre. Pour ce faire, les outils utilisés sont :

1. l'inégalité de Young

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon} \text{ avec } \epsilon \geq 0, \quad (4.22)$$

souvent utilisée avec un ϵ différent sur le dernier pas de temps des sommes B_i^n ;

2. la relation

$$\forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d, \|\operatorname{div}(\mathbf{v})\|_{L^2} \leq \sqrt{d} |\mathbf{v}|_{H^1}; \quad (4.23)$$

3. les développements de Taylor de fonctions \mathcal{C}^2 en temps

$$D^-v(t^n) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \partial_t v(s) ds, \quad (4.24a)$$

$$D^-v(t^n) - \partial_t v(t^n) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \partial_{tt} v(s) (t^{n-1} - s) ds; \quad (4.24b)$$

4. la formule de sommation par parties discrète, valide pour toute forme bilinéaire \mathcal{B}

$$\sum_{k=1}^N \mathcal{B}(a_k, b_k - b_{k-1}) = - \sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{B}(b_k, a_{k+1} - a_k) + \mathcal{B}(a_N, b_N) - \mathcal{B}(a_1, b_0); \quad (4.25)$$

5. la double identité de Cauchy-Schwarz : pour deux variables discrétisées scalaires ou vectorielles a, b et $n \in [1, N]$, et en notant $b^n = b(\mathbf{x}, t^n)$,

$$\left| \int_{\Omega} (b^n - b^{n-1}) a^n \right| \leq \|a^n\|_{L^2} \left(\Delta t \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\partial_t b(s)\|_{L^2}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.26)$$

Dans ce qui suit, ϵ_r et ϵ_l sont deux réels strictement positifs quelconques et $\tilde{\epsilon}_r$ est défini par $\frac{1}{\tilde{\epsilon}_r} = 1 + \frac{1}{\epsilon_r}$.

• Majoration de $\Delta t B_1^n = -\alpha \Delta t \int_{\Omega} \operatorname{div} (D^- E_{\mathbf{u}}^{I,n}) E_p^{A,n} + \alpha \Delta t \int_{\Omega} \operatorname{div} (D^- E_{\mathbf{u}}^{A,n}) E_p^{I,n}$.

Les deux intégrales sont traitées séparément. Pour le premier terme, les outils 5 et 2 sont successivement utilisés,

$$\left| \Delta t \int_{\Omega} E_p^{A,n} \operatorname{div} (D^- E_{\mathbf{u}}^{I,n}) \right| = \sqrt{\Delta t} \|E_p^{A,n}\|_{L^2} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\operatorname{div} (\partial_t E_{\mathbf{u}}^I)\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{d \Delta t} \|E_p^{A,n}\|_{L^2} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^I\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

puis l'inégalité de Young est appliquée avec $\epsilon = \frac{1}{4}$ pour le dernier terme de la somme et $\epsilon = \frac{\epsilon_r}{4}$ pour les autres ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left| 2 \sum_{n=1}^N \alpha \Delta t \int_{\Omega} E_p^{A,n} \operatorname{div} (D^- E_{\mathbf{u}}^{I,n}) \right| &\leq \frac{\epsilon_r}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|E_p^{A,n}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{4} \|E_p^{A,N}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + 4d\alpha^2 \left(\frac{1}{\epsilon_r} \sum_{n=1}^{N-1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^I\|_{H^1}^2 + \int_{t^{N-1}}^{t^N} \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^I\|_{H^1}^2 \right). \end{aligned}$$

Afin de retrouver la norme en temps définie dans la section 2.2 par $\|g\|_{L^2(T)}^2 = \int_{t^0}^{t^N} g(s)^2 ds$, les termes manquants dans l'intégrale sont ajoutés au membre de droite, ceux-ci étant positifs :

$$\begin{aligned} \left| 2 \sum_{n=1}^N \alpha \Delta t \int_{\Omega} E_p^{A,n} \operatorname{div} (D^- E_{\mathbf{u}}^{I,n}) \right| &\leq \frac{\epsilon_r}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|E_p^{A,n}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{4} \|E_p^{A,N}\|_{L^2}^2 + 4d\alpha^2 \left(\frac{1}{\epsilon_r} \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^I\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 + \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^I\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \right) \\ &\leq \frac{\epsilon_r}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|E_p^{A,n}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{4} \|E_p^{A,N}\|_{L^2}^2 + 4d\alpha^2 \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_r} \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^I\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \right). \end{aligned}$$

Ceci achève la majoration de la première intégrale. Concernant la seconde, une sommation par parties est d'abord effectuée

$$2 \sum_{n=1}^N \Delta t \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div} (D^- E_{\mathbf{u}}^{A,n}) E_p^{I,n} = 2 \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div} (E_{\mathbf{u}}^{A,N}) E_p^{I,N} - 2 \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div} (E_{\mathbf{u}}^{A,0}) E_p^{I,1} - 2 \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div} (E_{\mathbf{u}}^{A,n}) D^- E_p^{I,n+1}$$

puis, en suivant la même procédure que précédemment, on aboutit à

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div} \left(E_{\mathbf{u}}^{A,N} \right) E_p^{I,N} \right| &\leq \frac{\epsilon_l}{4} \|E_{\mathbf{u}}^{A,N}\|_{H^1}^2 + \frac{4d\alpha^2}{\epsilon_l} \|E_p^{I,N}\|_{L^2}^2, \\ 2 \left| \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div} \left(E_{\mathbf{u}}^{A,0} \right) E_p^{I,1} \right| &\leq \frac{\epsilon_l}{4} \|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1}^2 + \frac{4d\alpha^2}{\epsilon_l} \|E_p^{I,1}\|_{L^2}^2, \\ 2 \left| \sum_{n=1}^{N-1} \alpha \Delta t \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(E_{\mathbf{u}}^{A,n} \right) D^- E_p^{I,n+1} \right| &\leq \frac{\epsilon_r}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|E_{\mathbf{u}}^{A,n}\|_{H^1}^2 + \frac{4d\alpha^2}{\epsilon_r} \|\partial_t E_p^I\|_{L^2(0,T;L^2)}^2. \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à combiner les deux termes pour obtenir l'estimation sur B_1 :

$$\begin{aligned} \left| 2\Delta t \sum_{n=1}^N B_1^n \right| &\leq \frac{\epsilon_r}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|E_p^{A,n}\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_r}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|E_{\mathbf{u}}^{A,n}\|_{H^1}^2 + \frac{\Delta t}{4} \|E_p^{A,N}\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_l}{4} \|E_{\mathbf{u}}^{A,N}\|_{H^1}^2 + \frac{\epsilon_l}{4} \|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1}^2 \\ &\quad + 4d\alpha^2 \left(\frac{\|\partial_t E_{\mathbf{u}}^I\|_{L^2(0,T;H^1)}^2}{\tilde{\epsilon}_r} + \frac{\|E_p^{I,N}\|_{L^2}^2}{\epsilon_l} + \frac{\|E_p^{I,1}\|_{L^2}^2}{\epsilon_l} + \frac{\|\partial_t E_p^I\|_{L^2(0,T;L^2)}^2}{\epsilon_r} \right). \quad (4.27) \end{aligned}$$

- Majoration de $\Delta t B_2^n = \Delta t \sum_{K \in \tau_h} a^K(-E_{\mathbf{u}}^{\pi,n}, D^- E_{\mathbf{u}}^{A,n}) + \Delta t \sum_{K \in \tau_h} a_h(E_{\mathbf{u}}^{\pi,n} - E_{\mathbf{u}}^{I,n}, D^- E_{\mathbf{u}}^{A,n})$.

On commence par traiter les formes bilinéaires a^K , dont on note M_K les constantes de continuité. Pour une fonction \mathbf{u} localement dans $(H^1(K))^d$ et une fonction \mathbf{v} globalement dans $(H^1(\Omega))^d$, étant donné $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{K \in \tau_h} a^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right| &\leq \sum_{K \in \tau_h} (M_K \|\mathbf{u}\|_{H^1(K)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(K)}) \leq \sum_{K \in \tau_h} \left(\frac{M_K^2}{2\epsilon} \|\mathbf{u}\|_{H^1(K)}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{v}\|_{H^1(K)}^2 \right) \\ &\leq \frac{M^2}{2\epsilon} \sum_{K \in \tau_h} \|\mathbf{u}\|_{H^1(K)}^2 + \frac{\epsilon}{2} \sum_{K \in \tau_h} \|\mathbf{v}\|_{H^1(K)}^2 = \frac{M^2}{2\epsilon} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\tau)}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

avec $M = \max_K M_K$. Puisque a^K est symétrique, une sommation par partie peut être effectuée

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^N \Delta t \sum_{K \in \tau_h} a^K(-E_{\mathbf{u}}^{\pi,n}, D^- E_{\mathbf{u}}^{A,n}) &= 2 \sum_{K \in \tau_h} a^K(-E_{\mathbf{u}}^{\pi,N}, E_{\mathbf{u}}^{A,N}) - 2 \sum_{K \in \tau_h} a^K(-E_{\mathbf{u}}^{\pi,1}, E_{\mathbf{u}}^{A,0}) \\ &\quad - 2 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{K \in \tau_h} a^K(-(E_{\mathbf{u}}^{\pi,n+1} - E_{\mathbf{u}}^{\pi,n}), E_{\mathbf{u}}^{A,n}) \end{aligned}$$

puis combinée avec le résultat précédent de sorte que

$$\begin{aligned} \left| 2 \sum_{K \in \tau_h} a^K(-E_{\mathbf{u}}^{\pi,N}, E_{\mathbf{u}}^{A,N}) \right| &\leq \frac{8M^2}{\epsilon_l} \|E_{\mathbf{u}}^{\pi,N}\|_{H^1(\tau)}^2 + \frac{\epsilon_l}{8} \|E_{\mathbf{u}}^{A,N}\|_{H^1}^2, \\ \left| 2 \sum_{K \in \tau_h} a^K(-E_{\mathbf{u}}^{\pi,1}, E_{\mathbf{u}}^{A,0}) \right| &\leq \frac{8M^2}{\epsilon_l} \|E_{\mathbf{u}}^{\pi,1}\|_{H^1(\tau)}^2 + \frac{\epsilon_l}{8} \|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Pour le troisième terme, en suivant l'idée de l'outil 5,

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{K \in \tau_h} |a^K(E_{\mathbf{u}}^{\pi, n+1} - E_{\mathbf{u}}^{\pi, n}, E_{\mathbf{u}}^{A, n})| &= 2 \sum_{K \in \tau_h} \left| a^K \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t E_{\mathbf{u}}^{\pi} E_{\mathbf{u}}^{A, n} \right) \right| \leq 2 \sum_{K \in \tau_h} M_K \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t E_{\mathbf{u}}^{\pi} \|E_{\mathbf{u}}^{A, n}\|_{H^1(K)} \\
 &\leq 2 \sum_{K \in \tau_h} M_K \left(\Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^{\pi}\|_{H^1(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|E_{\mathbf{u}}^{A, n}\|_{H^1(K)} \\
 &\leq \sum_{K \in \tau_h} \frac{8M^2}{\epsilon_r} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^{\pi}\|_{H^1(K)}^2 + \Delta t \frac{\epsilon_r}{8} \|E_{\mathbf{u}}^{A, n}\|_{H^1(K)}^2 \\
 &= \frac{8M^2}{\epsilon_r} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^{\pi}\|_{H^1(\tau)}^2 + \Delta t \frac{\epsilon_r}{8} \|E_{\mathbf{u}}^{A, n}\|_{H^1}^2.
 \end{aligned}$$

Les mêmes méthodes sont appliquées aux formes bilinéaires a_h^K , avec les notations \tilde{M}_K pour les constantes de continuité et $\tilde{M} = \max_K M_K$,

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{n=1}^N \Delta t \sum_{K \in \tau_h} a_h^K(E_{\mathbf{u}}^{\pi, n} - E_{\mathbf{u}}^{I, n}, D^- E_{\mathbf{u}}^{A, n}) &= 2 \sum_{K \in \tau_h} a_h^K(E_{\mathbf{u}}^{\pi, N} - E_{\mathbf{u}}^{I, N}, E_{\mathbf{u}}^{A, N}) - 2 \sum_{K \in \tau_h} a_h^K(E_{\mathbf{u}}^{\pi, 1} - E_{\mathbf{u}}^{I, 1}, E_{\mathbf{u}}^{A, 0}) \\
 &\quad - 2 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{K \in \tau_h} a_h^K((E_{\mathbf{u}}^{\pi, n+1} - E_{\mathbf{u}}^{\pi, n}) - (E_{\mathbf{u}}^{I, n+1} - E_{\mathbf{u}}^{I, n}), E_{\mathbf{u}}^{A, n}),
 \end{aligned}$$

les erreurs E^I et E^{π} étant traitées séparément :

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{K \in \tau_h} |a_h^K(E_{\mathbf{u}}^{\pi, N} - E_{\mathbf{u}}^{I, N}, E_{\mathbf{u}}^{A, N})| &\leq \frac{8\tilde{M}^2}{\epsilon_l} \|E_{\mathbf{u}}^{\pi, N}\|_{H^1(\tau)}^2 + \frac{4\tilde{M}^2}{\epsilon_l} \|E_{\mathbf{u}}^{I, N}\|_{H^1}^2 + \left(\frac{\epsilon_l}{8} + \frac{\epsilon_l}{4}\right) \|E_{\mathbf{u}}^{A, N}\|_{H^1}^2, \\
 2 \sum_{K \in \tau_h} |a_h^K(E_{\mathbf{u}}^{\pi, 1} - E_{\mathbf{u}}^{I, 1}, E_{\mathbf{u}}^{A, 0})| &\leq \frac{8\tilde{M}^2}{\epsilon_l} \|E_{\mathbf{u}}^{\pi, 1}\|_{H^1(\tau)}^2 + \frac{4\tilde{M}^2}{\epsilon_l} \|E_{\mathbf{u}}^{I, 1}\|_{H^1}^2 + \left(\frac{\epsilon_l}{8} + \frac{\epsilon_l}{4}\right) \|E_{\mathbf{u}}^{A, 0}\|_{H^1}^2, \\
 2 \sum_{K \in \tau_h} a_h^K |(E_{\mathbf{u}}^{\pi, n+1} - E_{\mathbf{u}}^{\pi, n}, E_{\mathbf{u}}^{A, n})| &\leq \frac{8\tilde{M}^2}{\epsilon_r} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^{\pi}\|_{H^1(\tau)}^2 + \frac{\epsilon_r}{8} \Delta t \|E_{\mathbf{u}}^{A, n}\|_{H^1}^2, \\
 2 \sum_{K \in \tau_h} a_h^K |(E_{\mathbf{u}}^{I, n+1} - E_{\mathbf{u}}^{I, n}, E_{\mathbf{u}}^{A, n})| &\leq \frac{4\tilde{M}^2}{\epsilon_r} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^I\|_{H^1}^2 + \frac{\epsilon_r}{4} \Delta t \|E_{\mathbf{u}}^{A, n}\|_{H^1}^2.
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient pour B_2 l'estimation

$$\begin{aligned}
 \left| 2\Delta t \sum_{n=1}^N B_2^n \right| &\leq \frac{\epsilon_r}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|E_{\mathbf{u}}^{A, n}\|_{H^1}^2 + \frac{\epsilon_l}{2} \|E_{\mathbf{u}}^{A, N}\|_{H^1}^2 + \frac{\epsilon_l}{2} \|E_{\mathbf{u}}^{A, 0}\|_{H^1}^2 + 4\tilde{M}^2 \left(\frac{\|E_{\mathbf{u}}^{I, 1}\|_{H^1}^2}{\epsilon_l} + \frac{\|E_{\mathbf{u}}^{I, N}\|_{H^1}^2}{\epsilon_l} + \frac{\|\partial_t E_{\mathbf{u}}^I\|_{L^2(0, T; H^1)}^2}{\epsilon_r} \right) \\
 &\quad + 8(M^2 + \tilde{M}^2) \left(\frac{\|E_{\mathbf{u}}^{\pi, 1}\|_{H^1(\tau)}^2}{\epsilon_l} + \frac{\|E_{\mathbf{u}}^{\pi, N}\|_{H^1(\tau)}^2}{\epsilon_l} + \frac{\|\partial_t E_{\mathbf{u}}^{\pi}\|_{L^2(0, T; H^1(\tau))}^2}{\epsilon_r} \right). \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

- Majoration de $\Delta t B_3^n = \Delta t \int_{\Omega} c_0 (D^- p^n - \partial_t p^n) E_p^{A, n} + \Delta t \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div} (D^- \mathbf{u}^n - \partial_t \mathbf{u}^n) E_p^{A, n}$.

Les différences entre les dérivées continues et discrètes sont remplacées par les développements de Taylor

(suivant l'outil 3)

$$\Delta t B_3^n = \int_{\Omega} c_0 \int_{t^{n-1}}^{t^n} \partial_{tt} p(s)(t^{n-1} - s) ds E_p^{A,n} + \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \partial_{tt} \mathbf{u}(s)(t^{n-1} - s) ds \right) E_p^{A,n}$$

puis la double identité de Cauchy-Schwarz (outil 5) est appliquée en notant cette fois que $\int_{t^{n-1}}^{t^n} (t^{n-1} - s)^2 ds = \frac{\Delta t^3}{3}$. Enfin, l'opérateur de divergence est majoré grâce à l'outil 2 ce qui donne

$$|\Delta t B_3^n| \leq c_0 \|E_p^{A,n}\|_{L^2} \left(\frac{\Delta t^3}{3} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\partial_{tt} p(s)\|_{L^2}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \alpha \|E_p^{A,n}\|_{L^2} \left(\frac{d\Delta t^3}{3} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\partial_{tt} \mathbf{u}(s)\|_{H^1}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Procédant comme lors de l'estimation de B_1 , l'inégalité de Young est appliquée avec $\epsilon = \frac{1}{4}$ pour le dernier terme de la somme en temps et $\epsilon = \frac{\epsilon_r}{4}$ pour les autres, d'où l'estimation de B_3

$$\left| 2\Delta t \sum_{n=1}^N B_3^n \right| \leq \frac{2\epsilon_r}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|E_p^{A,n}\|_{L^2}^2 + \frac{2\Delta t}{4} \|E_p^{A,N}\|_{L^2}^2 + \frac{4}{3} \Delta t^2 \left(c_0^2 \frac{\|\partial_{tt} p\|_{L^2(0,T;L^2)}^2}{\tilde{\epsilon}_r} + d\alpha^2 \frac{\|\partial_{tt} \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^1)}^2}{\tilde{\epsilon}_r} \right). \quad (4.29)$$

- Majoration de $\Delta t B_4^n = \Delta t \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n - \mathbf{f}_h^n) \cdot D^- E_{\mathbf{u}}^{A,n}$.

La différence $(\mathbf{f}^n - \mathbf{f}_h^n)$ est assimilée à une erreur d'interpolation et notée $E_{\mathbf{f}}^{I,n}$. En sommant par parties,

$$2\Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} E_{\mathbf{f}}^{I,n} \cdot D^- E_{\mathbf{u}}^{A,n} = 2 \int_{\Omega} E_{\mathbf{f}}^{I,N} E_{\mathbf{u}}^{A,N} - \int_{\Omega} 2E_{\mathbf{f}}^{I,1} E_{\mathbf{u}}^{A,0} - 2 \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Omega} (E_{\mathbf{f}}^{I,n+1} - E_{\mathbf{f}}^{I,n}) \cdot E_{\mathbf{u}}^{A,n}.$$

Chaque terme est majoré grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young :

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_{\Omega} E_{\mathbf{f}}^{I,N} E_{\mathbf{u}}^{A,N} \right| &\leq 2 \|E_{\mathbf{f}}^{I,N}\|_{L^2} \|E_{\mathbf{u}}^{A,N}\|_{L^2} \leq \frac{4}{\epsilon_l} \|E_{\mathbf{f}}^{I,N}\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_l}{4} \|E_{\mathbf{u}}^{A,N}\|_{H^1}^2, \\ 2 \left| \int_{\Omega} E_{\mathbf{f}}^{I,1} E_{\mathbf{u}}^{A,0} \right| &\leq 2 \|E_{\mathbf{f}}^{I,1}\|_{L^2} \|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{L^2} \leq \frac{4}{\epsilon_l} \|E_{\mathbf{f}}^{I,1}\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_l}{4} \|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1}^2, \\ 2 \left| \int_{\Omega} (E_{\mathbf{f}}^{I,n+1} - E_{\mathbf{f}}^{I,n}) \cdot E_{\mathbf{u}}^{A,n} \right| &\leq \|E_{\mathbf{u}}^{A,n}\|_{L^2} \left(\Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t E_{\mathbf{f}}^I\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{4}{\epsilon_r} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t E_{\mathbf{f}}^I\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_r}{4} \Delta t \|E_{\mathbf{u}}^{A,n}\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

puis il reste à remarquer que $\|E_{\mathbf{u}}^A\|_{L^2} \leq \|E_{\mathbf{u}}^A\|_{H^1}$ pour obtenir la majoration sur B_4 :

$$\left| 2\Delta t \sum_{n=1}^N B_4^n \right| \leq \frac{\epsilon_r}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|E_{\mathbf{u}}^{A,n}\|_{H^1}^2 + \frac{\epsilon_l}{4} \|E_{\mathbf{u}}^{A,N}\|_{H^1}^2 + \frac{4}{\epsilon_r} \|\partial_t E_{\mathbf{f}}^I\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \frac{4}{\epsilon_l} (\|E_{\mathbf{f}}^{I,N}\|_{L^2}^2 + \|E_{\mathbf{f}}^{I,1}\|_{L^2}^2) + \frac{\epsilon_l}{4} \|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1}^2. \quad (4.30)$$

- Majoration de $\Delta t B_5^n = -\Delta t \sum_K \sum_{f \in \partial K} (\overline{F_{Kf}^n} - F_{Kf}^{*,n}) E_p^{A,n}$.

Pour ce terme, on utilise la consistance des flux $\overline{F_{Kf}^n} = -F_{Lf}^n$ et $F_{Kf}^{*,n} = -F_{Lf}^{*,n}$. Ceci permet de réorganiser la

double somme de la manière suivante, où K et L désignent les mailles voisines de la face f :

$$\begin{aligned} \sum_K \sum_{f \subset \partial K} (\overline{F_{Kf}^n} - F_{Kf}^{*,n}) E_p^{A,n} &= \sum_{f \subset \Omega \setminus \Gamma_{N_p}} (\overline{F_{Kf}^n} - F_{Kf}^{*,n}) (E_{p_K}^{A,n} - E_{p_L}^{A,n}) \\ &\leq \left(\sum_{f \subset \Omega \setminus \Gamma_{N_p}} T_f^{-1} |\overline{F_{Kf}^n} - F_{Kf}^{*,n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{f \subset \Omega \setminus \Gamma_{N_p}} T_f D_f (E_p^{A,n})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \frac{|E_p^{A,n}|_{1,\tau}^2}{2} + \sum_{f \subset \Omega \setminus \Gamma_{N_p}} \frac{|\overline{F_{Kf}^n} - F_{Kf}^{*,n}|^2}{2T_f} \quad (\text{Young}). \end{aligned}$$

Le terme $\overline{F_{Kf}^n} - F_{Kf}^{*,n}$ ne dépend que de la solution exacte et fait donc partie des erreurs d'interpolation. Il demeure au membre de droite, et la majoration sur B_5 est directement donnée par

$$\left| 2\Delta t \sum_{n=1}^N B_5^n \right| \leq \sum_{n=1}^N \Delta t |E_p^{A,n}|_{1,\tau}^2 + \sum_{n=1}^N \Delta t \sum_{f \subset \Omega \setminus \Gamma_{N_p}} \frac{|\overline{F_{Kf}^n} - F_{Kf}^{*,n}|^2}{T_f}. \quad (4.31)$$

- Majoration de $\Delta t B_6^n = -\Delta t c_0 \int_{\Omega} E_p^{A,n} D^- E_p^{I,n}$.

Ce terme se traite simplement en utilisant la double identité de Cauchy-Schwarz puis l'inégalité de Young

$$|\Delta t B_6^n| \leq c_0 \|E_p^{A,n}\|_{L^2} \left(\Delta t \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\partial_t E_p^I\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\epsilon \Delta t}{2} \|E_p^{A,n}\|_{L^2}^2 + \frac{c_0^2}{2\epsilon} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|\partial_t E_p^I\|_{L^2}^2,$$

puis en fixant $\epsilon = \frac{1}{4}$ pour $n = N$ et $\epsilon = \frac{\epsilon_r}{4}$ pour les autres n . On obtient donc l'estimation sur B_6

$$\left| 2\Delta t \sum_{n=1}^N B_6^n \right| \leq \frac{\epsilon_r}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \|E_p^{A,n}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{4} \|E_p^{A,N}\|_{L^2}^2 + \frac{4c_0^2}{\epsilon_r} \|\partial_t E_p^I\|_{L^2(0,T;L^2)}^2. \quad (4.32)$$

En combinant les inégalités (4.27) à (4.32),

$$(\tilde{\mu} - \epsilon_l) \|E_{\mathbf{u}}^{A,N}\|_{H^1}^2 + (c_0 - \Delta t) \|E_p^{A,N}\|_{L^2}^2 + \sum_{n=0}^N \Delta t |E_p^{A,n}|_{1,\tau}^2 \leq \epsilon_r \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \left(\|E_{\mathbf{u}}^{A,n}\|_{H^1}^2 + \|E_p^{A,n}\|_{L^2}^2 \right) + \tilde{B} \Delta t^2 + \tilde{B}' \|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1}^2 + \tilde{E}^I$$

où \tilde{B} et \tilde{B}' dépendent de $c_0, \alpha, d, \tilde{\mu}, \partial_{tt} p, \partial_{tt} \mathbf{u}, \epsilon_l$ et ϵ_r . Le terme \tilde{E}^I regroupe les erreurs d'interpolation ou assimilées ainsi que l'erreur liée aux volumes finis (on note que même en dimension 3, le terme T_f^{-1} d'ordre $\mathcal{O}(h^{-1})$ s'élimine avec l'erreur due au flux et ne diverge donc pas) :

$$\begin{aligned} \tilde{E}^I &= \frac{2\tilde{M}}{\epsilon_l} \|E_{\mathbf{u}}^I\|_{L^\infty(0,T;H^1)}^2 + \left(\frac{4\tilde{M}^2}{\epsilon_r} + \frac{4d\alpha^2}{\tilde{\epsilon}_r} \right) \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^I\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \\ &+ \frac{4(M^2 + \tilde{M}^2)}{\epsilon_l} \|E_{\mathbf{u}}^{\pi}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\tau))}^2 + \frac{8(M^2 + \tilde{M}^2)}{\epsilon_r} \|\partial_t E_{\mathbf{u}}^{\pi}\|_{L^2(0,T;H^1(\tau))}^2 + \frac{2}{\epsilon_l} \|E_{\mathbf{f}}^I\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \frac{4}{\epsilon_r} \|\partial_t E_{\mathbf{f}}^I\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \\ &+ \frac{2d\alpha^2}{\epsilon_l} \|E_p^I\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \left(\frac{4d\alpha^2}{\epsilon_r} + \frac{4c_0^2}{\tilde{\epsilon}_r} \right) \|\partial_t E_p^I\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \sum_{n=1}^N \Delta t \sum_{f \subset \Omega \setminus \Gamma_{N_p}} \frac{|\overline{F_{Kf}^n} - F_{Kf}^{*,n}|^2}{T_f}. \end{aligned}$$

Troisième partie – conclusion

On utilise à présent l'hypothèse $\Delta t \leq \frac{c_0}{2}$ qui implique que $\frac{c_0}{2} \leq c_0 - \Delta t$ et permet d'absorber le Δt dans le membre de gauche. On fixe ensuite ϵ_l de sorte que $\epsilon_l < \tilde{\mu}$ puis $\epsilon_r = \min\{\tilde{\mu} - \epsilon_l, \frac{c_0}{2}, 1\}$. En divisant l'inégalité précédente par ϵ_r , il vient

$$\|E_{\mathbf{u}}^{A,N}\|_{H^1}^2 + \|E_p^{A,N}\|_{L^2}^2 + \sum_{n=0}^N \Delta t |E_p^{A,n}|_{1,\tau}^2 \leq \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left(\|E_{\mathbf{u}}^{A,n}\|_{H^1}^2 + \|E_p^{A,n}\|_{L^2}^2 \right) + B\Delta t^2 + B' \|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1}^2 + E^I$$

avec $B = \frac{\tilde{B}}{\epsilon_r}$ et $B' = \frac{\tilde{B}'}{\epsilon_r}$ dépendant de $c_0, \alpha, d, \tilde{\mu}, \partial_{tt}p$, et $\partial_{tt}\mathbf{u}$ et

$$E^I = \frac{1}{\epsilon_r} \tilde{E}^I. \quad (4.33)$$

La quantité positive $\Delta t (\|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1}^2 + \|E_p^{A,0}\|_{L^2}^2)$ a été ajoutée au membre de droite de manière à conclure grâce à une version discrète du lemme de Grönwall :

Lemme 4.3 Soit $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ deux suites de réels positifs et $C \in \mathbb{R}^+$. Supposons que

$$a_0 + b_0 \leq C$$

et qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall N \geq 1, \quad a_N + b_N \leq \lambda \sum_{m=0}^{N-1} a_m + C.$$

Alors,

$$\forall N \geq 0, \quad a_N + b_N \leq C \exp(\lambda N).$$

En appliquant le lemme avec $a_n = \|E_{\mathbf{u}}^{A,n}\|_{H^1} + \|E_p^{A,n}\|_{L^2}$, $b_n = \sum_{m=0}^n \Delta t |E_p^{A,m}|_{1,\tau}^2$, $\lambda = \Delta t$ et $C = B\Delta t^2 + B' \|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1}^2 + E^I$, on aboutit au résultat (4.19).

4.2.3 Majoration des erreurs d'interpolation

Pour achever l'analyse d'erreur, il reste à borner les quantités regroupées dans le terme E^I . Dans cette section, C et \tilde{C} désignent des constantes positives indépendantes du pas du maillage variant selon le contexte.

Opérateurs d'interpolation

Dans un premier temps, on remarque que les opérateurs d'interpolation et de dérivation en temps commutent : en effet, puisque les fonctions de base φ_i ne dépendent pas du temps, on a sur chaque élément K ,

$$\frac{\partial(\tilde{P}\mathbf{u})}{\partial t} = \sum_{i=1}^{M^K} \frac{\partial}{\partial t} \left(u_i^x \varphi_i^x(\mathbf{x}) + u_i^y \varphi_i^y(\mathbf{x}) + u_i^z \varphi_i^z(\mathbf{x}) \right) = \tilde{P}(\partial_t \mathbf{u}).$$

De la même manière, en développant l'expression de π^K sur chaque maille on montre que $\partial_t \pi(\mathbf{u}) = \pi(\partial_t \mathbf{u})$, l'argument principal étant que le gradient en espace et la dérivée en temps commutent pour des fonctions suffisamment régulières. La démonstration est également directe pour l'interpolation de la pression : $\partial_t P(p) = P(\partial_t p)$.

L'erreur d'interpolation $E_{\mathbf{u}}^I = \mathbf{u} - \tilde{P}\mathbf{u}$ est majorée en utilisant les résultats classiques d'interpolation, voir par exemple [All12, prop. 6.3.16] ou [DS80] : si $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^d$, il existe une constante C indépendante de h et de \mathbf{u} telle que

$$\|\mathbf{u} - \tilde{P}\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} = \|E_{\mathbf{u}}^I\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}. \quad (4.34)$$

Puisque l'erreur sur le second membre fait intervenir le même opérateur d'interpolation, on a cette fois en norme L^2

$$\|\mathbf{f} - \tilde{P}\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} = \|E_{\mathbf{f}}^I\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\|\mathbf{f}\|_{H^2(\Omega)}.$$

Les deux derniers opérateurs P et π^K conservant respectivement les constantes et les fonctions affines, d'après la théorie de Scott-Dupont [DS80],

$$\|p - Pp\|_{L^2(\Omega)} = \|E_p^I\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|p\|_{H^1(\Omega)}$$

et, sur chaque maille K ,

$$\|\mathbf{u}|_K - \pi^K \mathbf{u}|_K\|_{H^1(K)} \leq Ch_K\|\mathbf{u}\|_{H^2(K)} \quad \text{d'où} \quad \|E_{\mathbf{u}}^\pi\|_{H^1(\tau)} \leq Ch\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)}.$$

D'après ce qui précède, on a des estimations similaires pour les dérivées temporelles $\|\partial_t(E_{\mathbf{u}}^I)\|_{H^1(\Omega)}$, $\|\partial_t(E_p^I)\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\partial_t(E_p^I)\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\partial_t(E_{\mathbf{u}}^\pi)\|_{H^1(\tau)}$ avec cette fois la norme des dérivées $\partial_t \mathbf{u}$, $\partial_t \mathbf{f}$ et $\partial_t p$ dans le second membre.

Ces bornes sont valables à chaque pas de temps, ce qui permet de majorer les normes L^∞ et L^2 dans $[0, T]$ indépendamment du pas de temps : formellement, pour $p = 1$ ou $p = 2$,

$$\|E_v\|_{L^\infty(0,T;H^p(\Omega))} = \sup_{n \in [1,N]} \|E_v^n\|_{H^p(\Omega)} \leq \sup_{n \in [1,N]} C^n h \|v^n\|_{H^{p+1}(\Omega)} \leq \tilde{C}h \text{ avec } \tilde{C} = \sup_{n \in [1,N]} C^n \|v^n\|_{H^{p+1}(\Omega)}$$

et

$$\|E_v\|_{L^2(0,T;H^p(\Omega))} = \left(\sum_{n=1}^N \Delta t \|E_v^n\|_{H^p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^N \Delta t (C^n h \|v^n\|_{H^{p+1}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \tilde{C}h \text{ avec } \tilde{C} = t^N \sup_{n \in [1,N]} C^n \|v^n\|_{H^{p+1}(\Omega)}.$$

Erreur d'interpolation issue des volumes finis

Le terme issu de la discrétisation volumes finis s'écrit

$$\sum_{n=1}^N \Delta t \sum_{f \in \overline{\Omega} \setminus \Gamma_{N_p}} \frac{|F_{Kf}^n - F_{Kf}^{*,n}|^2}{T_f} = \sum_{n=1}^N \Delta t \sum_{f \in \overline{\Omega} \setminus \Gamma_{N_p}} \frac{|f| d_{KL} |F_{Kf}^n - F_{Kf}^{*,n}|^2}{\kappa^{eq} |f|^2}.$$

L'analyse du schéma volumes finis à deux points [EGH00, section 3.1.5] montre l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}^+$ dépendant seulement de la pression exacte $p(\mathbf{x}, t)$ telle que $\frac{|F_{Kf}^n - F_{Kf}^{*,n}|}{|f|} \leq Ch$. Cette constante inclut la norme des dérivées spatiales jusqu'au second ordre de p . De plus, $\sum |f| d_{KL} \leq d|\Omega|$, d'où en notant $\tilde{C} = \frac{d|\Omega|C^2}{\min(\kappa^{eq})}$,

$$\sum_{n=1}^N \Delta t \sum_{f \in \overline{\Omega} \setminus \Gamma_{N_p}} \frac{|F_{Kf}^n - F_{Kf}^{*,n}|^2}{T_f} \leq \sum_{n=1}^N \Delta t \frac{C^2 h^2}{\min(\kappa^{eq})} \sum_{f \in \overline{\Omega} \setminus \Gamma_{N_p}} |f| d_{KL} \leq \sum_{n=1}^N \Delta t \frac{C^2 h^2 d |\Omega|}{\min(\kappa^{eq})} \leq \tilde{C} t^N h^2.$$

L'erreur d'interpolation (au carré) liée au schéma volumes finis est donc également de l'ordre de h^2 .

Enfin, la solution initiale du déplacement \mathbf{u}^0 étant calculée en résolvant par éléments virtuels le problème élastique seul, le lemme 3.1 permet de majorer $\|E_{\mathbf{u}}^{A,0}\|_{H^1}^2$ par un terme lui aussi d'ordre h^2 . Il en résulte le théorème 4.4 :

Théorème 4.4 *Sous les hypothèses de la proposition 4.2, l'erreur d'approximation du schéma satisfait*

$$\left(\|E_{\mathbf{u}}^A\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \|E_p^A\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + |E_p^A|_{L^2(0,T;H^1(\tau))}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(h + \Delta t) \quad (4.35)$$

où C dépend des constantes d'ellipticité de a et a_h , des paramètres physiques $c_0, \alpha, d, |\Omega|, t^N$ et des normes de la solution exacte (\mathbf{u}, p) et de ses dérivées.

4.3 Implémentation et validation numérique

Pour ce premier schéma couplé, la partie la plus compliquée à implémenter reste celle des éléments virtuels. Celle-ci a justement été détaillée dans le chapitre précédent. Dans cette section, on ajoute quelques détails concernant la forme du système linéaire couplé, les développements relatifs aux volumes finis deux points et le traitement des termes de couplage. Quelques vérifications et premiers tests sont effectués, avant d'illustrer numériquement l'ordre de convergence obtenu dans le théorème 4.4.

4.3.1 Implémentation du schéma

De la même manière que pour la discrétisation du système élastique, le vecteur déplacement \mathbf{u}_h s'écrit dans la base des éléments virtuels $\mathbf{u}_h = \sum_{i \in \mathcal{M}} u_i^x \boldsymbol{\varphi}_i^x + u_i^y \boldsymbol{\varphi}_i^y + u_i^z \boldsymbol{\varphi}_i^z$ où \mathcal{M} représente l'ensemble des indices de sommets. De même, en introduisant pour la pression l'ensemble \mathfrak{M} des index des $\# \tau_h$ mailles et la base $\{\phi_k\}_{k \in \mathfrak{M}}$ dont les fonctions sont définies par

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ appartient à la maille d'indice } k \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a la décomposition $p_h = \sum_{k \in \mathfrak{M}} p_k \phi_k$.

En regroupant les inconnues du déplacement et celles de la pression sous la forme d'un vecteur $[\mathcal{U}, \mathcal{P}]$, le schéma (4.7) s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B} \\ \mathcal{B}^T & \mathcal{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U} \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^u \\ \mathcal{L}^p + \mathcal{L}^c \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

où les blocs correspondent aux quantités suivantes :

- La matrice \mathcal{A} carrée de taille $d \cdot \text{card}(\mathcal{M}_{\overline{D}_d})$ est exactement la matrice de rigidité des éléments virtuels qui aurait été obtenue pour le problème élastique, telle que définie dans la section 3.1.2 et calculée par la méthode décrite dans la section 3.2.
- La matrice \mathcal{F} carrée de taille $\text{card}(\mathfrak{M})$ est la matrice associée au schéma volumes finis deux points et serait celle obtenue pour la discrétisation de l'équation de conservation seule. Ses coefficients s'écrivent, en notant $\nu(K)$ l'ensemble des mailles voisines de K et T_f la transmissivité entre les mailles K et L définie par (4.11),

$$\mathcal{F}_{KK} = c_0 |K| + \Delta t \sum_{L \in \nu(K)} T_f \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{KL} = -\Delta t T_f. \quad (4.37)$$

- Le bloc \mathcal{B} est une matrice de couplage rectangulaire de taille $d \cdot \text{card}(\mathcal{M}_{\overline{D_d}}) \times \text{card}(\mathfrak{M})$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\boldsymbol{\varphi}_j^l, \phi_k) &= \alpha \int_K \phi_k \text{div}(\boldsymbol{\varphi}_j^l) = \alpha \int_K \text{div}(\boldsymbol{\varphi}_j^l) \text{ par définition de } \phi_k \\ &= \alpha |K| \langle \nabla \varphi_j \rangle^K \cdot \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (4.38)$$

où le calcul de la quantité $\langle \nabla \varphi_i \rangle^K$ sur la maille K d'indice k a déjà été détaillé section 3.1.3. Le calcul de ce terme est de toute façon requis pour l'assemblage de la matrice des éléments virtuels et n'entraîne donc pas de coût de calcul supplémentaire.

- Le vecteur \mathcal{L}^u de taille $d \cdot \text{card}(\mathcal{M}_{\overline{D_d}})$ est le second membre de l'équation élastique. Il est de la même forme que pour le système élastique, la subtilité étant que le terme imposé de Neumann représente ici la contrainte totale et non la contrainte effective. Dans le cas $\alpha = 0$, on retrouve le même second membre que celui du problème élastique.
- Le vecteur $\mathcal{L}^p + \mathcal{L}^c$ de taille $\text{card}(\mathfrak{M})$ constitue le second membre de l'équation de conservation. La première partie, \mathcal{L}^p , correspond au second membre de l'équation de conservation considérée seule, tandis que la seconde partie \mathcal{L}^c permet de tenir compte du terme de couplage $\alpha \int_K \text{div}(\mathbf{u}_h^{n-1})$ issu de la discrétisation en temps. Ces deux termes s'expriment respectivement selon

$$\mathcal{L}_K^p = |K|(c_0 p_K^{n-1} + \Delta t q_K^n) + |f| \Delta t \sum_{f \subset \partial K \cap \Gamma_{N_p}} \phi_N^n(\mathbf{x}^f) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_K^c = |K| \alpha \sum_{i \in \mathcal{M}_K} \langle \nabla \varphi_i \rangle^K \cdot \begin{pmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_i^z \end{pmatrix}^{n-1}.$$

Dans le terme \mathcal{L}^p , f désigne une face de bord en trois dimensions ou une arête de bord en deux dimensions. Les conditions aux limites de Neumann sont donc intégrées en évaluant la fonction ϕ_N^n au barycentre de l'entité de bord. Notons que dans le cas non couplé, \mathcal{L}^c est nul et le second membre est réduit à \mathcal{L}^p .

L'assemblage du système couplé réutilise l'implémentation des éléments virtuels (voir section 3.2) et est décrit dans l'algorithme 2. Par rapport au chapitre précédent, il reste à détailler l'assemblage de la matrice associée aux volumes finis.

Dans un premier temps, une boucle sur les faces du maillage est réalisée. En interrogeant la connectivité de l'objet face, on peut obtenir les deux objets cellules K et L séparés par cette face (ou l'unique objet K dans le cas où il s'agit d'une face de bord). Ceci permet, à l'aide des caractéristiques des cellules, de calculer la transmissivité T_f d'après la formule (4.11). Cette transmissivité est ensuite ajoutée dans la matrice \mathcal{F} selon

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{KK} &+= \Delta t T_f & \mathcal{F}_{KL} &-= \Delta t T_f \\ \mathcal{F}_{LL} &+= \Delta t T_f & \mathcal{F}_{LK} &-= \Delta t T_f \end{aligned}$$

dans le cas où la face f est interne et selon

$$\mathcal{F}_{KK} += \Delta t T_f \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_K^p += \Delta t T_f p_D(\mathbf{x}^f)$$

dans le cas où f est une face de Dirichlet. Dans un second temps, une boucle sur les cellules est effectuée pour ajouter le terme $\mathcal{F}_{KK} += c_0 |K|$ à la matrice.

Notons qu'en pratique, les termes $\langle \nabla \varphi_i \rangle^K$ et les transmissivités T_f sont calculés une seule fois en début de simulation et ne sont recalculés que si la géométrie est modifiée.

Algorithm 2 Implémentation du schéma couplé VEM-TFPA

```

1 Read mesh and compute each cell  $\diamond$  geometry
2 Initialisation :  $p^0$  being given, run algorithm 1 with load term  $\mathbf{f} - \alpha \mathbf{div}(p\bar{l}_d)$  to find  $\mathbf{u}^0$ 
3 while  $t < T$  do
4   for  $\diamond$  in mesh do
5     Compute local Vem matrix  $\mathcal{A}^\diamond$ . Store  $\langle \nabla \bullet \rangle^\diamond$  values! ▷ see section 3.2
6     Compute local coupling vector  $B^\diamond$ .
7     Compute local rhs  $\mathcal{L}^u_\diamond$ 
8     Compute  $\mathcal{L}^p(\diamond)$  and  $\mathcal{L}^c(\diamond)$  using  $\langle \nabla \bullet \rangle^\diamond$ ,  $\mathcal{P}^{n-1}$  and  $\mathcal{U}^{n-1}$ 
9     for non Dirichlet dof  $\bullet$  in  $\diamond$  do
10       $\mathcal{L}^u(\bullet) += \mathcal{L}^u_\diamond(\bullet)$ 
11      for non Dirichlet  $\bullet$  in  $\diamond$  do
12         $\mathcal{A}(\bullet, \bullet) += \mathcal{A}^\diamond(\bullet, \bullet)$ 
13        Set  $\mathcal{B}(\bullet, \diamond) = B^\diamond(\bullet)$ 
14      for Dirichlet  $\bullet$  in  $\diamond$  do
15         $\mathcal{L}^u(\bullet) -= \mathcal{A}^\diamond(\bullet, \bullet)g_D(\bullet)$ 
16         $\mathcal{L}^c(\diamond) -= B^\diamond(\bullet)g_D(\bullet)$ 
17   for each face  $l$  in mesh do
18     Compute transmissivity and assemble  $\mathcal{F}$  ▷ see above
19   Solve  $(d \cdot \text{card}(\mathcal{M}_{D_d}^-) + \text{card}(\mathfrak{M}))$  linear system  $\begin{bmatrix} \mathcal{A} & -B \\ B^T & \mathcal{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U} \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^u \\ \mathcal{L}^p + \mathcal{L}^c \end{bmatrix}$ 
20   Complete  $\mathcal{U}$  with Dirichlet  $\bullet$  values
21   for  $\diamond$  in mesh do
22     Compute stress vector and flux vector
23   Compute errors
24    $t \leftarrow t + \Delta t$ 

```

Concernant le post traitement, le calcul de la contrainte mécanique a déjà été détaillé dans le paragraphe 3.2. Pour la variable en pression, la vitesse v_f est reconstruite sur chaque maille K à l'aide de la formule

$$v_f^K = \frac{1}{|K|} \sum_{f \subset \partial K} \mathcal{F}_{Kf}^n(\mathbf{x}^f - \mathbf{x}^K) \quad (4.39)$$

où \mathcal{F}_{Kf}^n est le flux numérique de la méthode défini par l'expression (4.11) et évalué avec la pression calculée, et où \mathbf{x}^f et \mathbf{x}^K désignent respectivement le barycentre de la face f et de la maille K . En pratique, de la même manière que lors de l'assemblage du système, une boucle sur les faces du maillage est effectuée pour calculer les flux numériques et ajouter cette contribution aux mailles attenantes à la face.

En plus des écarts en déplacement et en contrainte définis pour l'élasticité par (3.26), on définit les écarts absolus et relatifs en pression E_{abs}^p et E_{rel}^p – comparables à des écarts dans l'espace L^2 – ainsi que les écarts absolus et relatifs en flux $E_{\text{abs}}^{\nabla p}$ et $E_{\text{rel}}^{\nabla p}$ par les expressions

$$E_{\text{abs}}^p = \|p_h - p\|_{L^2}, \quad E_{\text{rel}}^p = \frac{\|p_h - p\|_{L^2}}{\|p\|_{L^2}}, \quad E_{\text{abs}}^{\nabla p} = \|\bar{\kappa} \nabla p_h - \bar{\kappa} \nabla p\|_{L^2} \quad \text{et} \quad E_{\text{rel}}^{\nabla p} = \frac{\|\bar{\kappa} \nabla p_h - \bar{\kappa} \nabla p\|_{L^2}}{\|\bar{\kappa} \nabla p\|_{L^2}}. \quad (4.40)$$

Ces écarts sont calculés en approchant l'intégrale sur chaque maille par la valeur des pressions et des gradients au centre de ces mailles : par exemple,

$$\|p_h - p\|_{L^2} = \left(\sum_{K \in \tau_h} \int_K (p_h - p)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx \left(\sum_{K \in \tau_h} |K| (p_{h_K} - p(\mathbf{x}^K))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La même technique est utilisée pour la norme L^2 de la différence des gradients, en utilisant la reconstruction par cellule du gradient définie par l'équation (4.39). Néanmoins, la grandeur $E_{\text{abs}}^{\nabla p}$ ne fait pas forcément office de norme H^1 et cet indicateur est donc complété par un dernier écart calculé à partir de la semi-norme H^1 discrète spécifique au schéma définie par (4.13) :

$$E_{\text{abs}}^{\tau \nabla} = |p_h - p|_{1,\tau} = \left(\sum_{f \subset \Omega} T_f \left((p_{h_K} - p(\mathbf{x}^K)) - (p_{h_L} - p(\mathbf{x}^L)) \right)^2 + \sum_{f \subset \Gamma_{Dp}} T_f \left(p_{h_K} - p(\mathbf{x}^K) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.41)$$

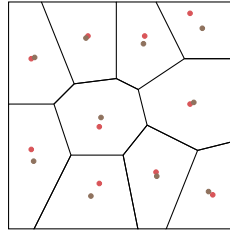
et

$$E_{\text{rel}}^{\tau \nabla} = \frac{E_{\text{abs}}^{\tau \nabla}}{|p|_{1,\tau}}.$$

4.3.2 Patch test et limites de l'approximation à deux points

Validation : système découplé Dans le cas où $\alpha = 0$, on a souligné que les seconds membres sont ceux des deux problèmes considérés seuls. Il est clair que, dans ce cas, la matrice \mathcal{B} est également nulle. On a alors un système diagonal par bloc, dont la résolution équivaut à résoudre séparément un problème de mécanique et un problème d'écoulement indépendants. Cette propriété permet de vérifier l'implémentation en comparant le code couplé aux codes éléments virtuels pour l'élasticité et volumes finis pour l'écoulement.

Patch test pour le système couplé Dans la section 3.3, la capacité des éléments virtuels à satisfaire le *patch test* était évoquée, c'est-à-dire à retrouver la solution exacte du problème lorsque celle-ci est polynomiale de degré un. On peut se demander si la discrétisation employée pour le système poroélastique satisfait également cette propriété. Cependant, avant même de considérer le système couplé, il faut avoir à l'esprit une limite des maillages de Voronoï. Un maillage de Voronoï est construit à partir d'un ensemble de points, appelés centres de Voronoï, de telle manière que chaque arête du maillage soit la médiatrice du segment formé par les deux centres de Voronoï des mailles adjacentes. Ces points sont donc particulièrement adaptés pour la discrétisation volumes finis deux points puisque par construction, ils vérifient la condition d'orthogonalité. En revanche, ces centres de Voronoï sont en général distincts des centres de masse des mailles comme illustré sur la figure 4.1. Or, lorsqu'une intégration numérique est nécessaire



• Centre de masse • Centre de Voronoï

FIG. 4.1 : **Maillage Voronoï** simplifié avec représentation des centres de Voronoï et des centres de masse. Ces points sont distincts dans le cas général.

(par exemple pour les calculs d'erreurs), la formule d'approximation utilisée se base sur le centre de masse : $\int_K f \approx |K|f(\mathbf{x}^K)$. Par conséquent, des erreurs numériques supplémentaires apparaissent lors de l'intégration.

Pour illustrer ce phénomène, on considère tout d'abord sur le carré unité l'équation de conservation seule. On choisit la solution exacte linéaire $p = -x + 2y$, le coefficient κ est fixé à 1 et des conditions de Dirichlet sont imposées sur tous les bords du domaine. Avec un maillage carré, les écarts E_{rel}^p et $E_{\text{rel}}^{\nabla p}$ sont bien nuls. Ce résultat, de référence, traduit la capacité du schéma volumes finis à approcher exactement des fonctions linéaires. Avec un maillage de Voronoï, plusieurs cas sont à distinguer. Si les centres de masse sont utilisés comme points de discrétisation pour la pression, les écarts E_{rel}^p et $E_{\text{rel}}^{\nabla p}$ sont significativement non nuls (de l'ordre de 10^{-2}). En effet, la condition d'orthogonalité n'étant pas respectée dans cette situation, il en résulte une mauvaise approximation des flux numériques. Si les centres de Voronoï sont utilisés pour discrétiser la pression, la condition d'orthogonalité est bien respectée. Cependant, on observe dans ce cas un écart en pression E_{rel}^p non nul et un écart en flux $E_{\text{rel}}^{\nabla p}$ nul. En réalité, comparer la solution calculée à la solution exacte sur les points de discrétisation permet de se rendre compte que les deux valeurs sont identiques. L'écart sur E_{rel}^p provient de la formule d'intégration utilisée pour le calcul de l'erreur, qui calcule la solution de référence aux centres de masse. D'ailleurs, modifier la formule d'intégration pour forcer l'évaluation de la solution exacte aux points de Voronoï permet d'obtenir un écart nul. Malheureusement, dans le cas général, modifier cette formule d'intégration ne donne plus une approximation consistante de l'intégrale. On note également que l'écart nul pour le gradient de pression s'explique par le fait que ∇p est constant sur ce cas et que la différence de position entre les deux types de centres n'a donc pas d'importance.

Ce problème se répercute également sur la résolution de cas couplés. On complète l'équation précédente par l'équation mécanique avec une solution exacte linéaire donnée par $\mathbf{u} = (3x - 2y, x + y)$, et des

Méthode	E_{rel}^p	$E_{\text{rel}}^{\nabla p}$	Commentaire
Carré	= 0	= 0	Référence
Voronoi, calcul de p_h aux centres de masse	$\neq 0$	$\neq 0$	Orthogonalité non respectée
Voronoi, calcul de p_h aux centres de Voronoï	$\neq 0$	= 0	Erreur due à l'intégration
Voronoi, calcul de p_h et p aux centres de Voronoï	= 0	= 0	Erreurs nulles, mais perte de consistance pour l'intégration numérique

TAB. 4.1 : Limites liées à la non coïncidence des centres de masse et de Voronoï lors de l'utilisation de l'approximation à deux points.

coefficients de couplage $\alpha = 1, c_0 = 0.5, E = 2.5, \nu = 0.25, \kappa = 1$. Avec un maillage constitué de carrés, tous les écarts E_{rel}^{\cdot} sont bien nuls. Avec un maillage de Voronoï, on retrouve pour les écarts en pression les résultats observés précédemment (cf tableau 4.1). En revanche, les écarts en déplacement E_{rel}^u et E_{rel}^σ sont non nuls sur ce cas. En effet, à la différence du cas non couplé, la matrice \mathcal{B} est à présent non nulle. Il a été vu que ses coefficients sont de la forme $\int_K p \operatorname{div}(\mathbf{u})$ ce qui ajoute à nouveau une erreur d'intégration en raison du décalage des centres. Cette intégrale intervenant dans l'équation de la mécanique, on observe un report de l'erreur d'intégration sur le champ de déplacement. En conséquence, l'usage du schéma VEM-TPFA ne satisfait pas le *patch test* sur les maillages de Voronoï.

Néanmoins, la solution recherchée n'étant pas linéaire dans le cas général, cette apparente incompatibilité entre l'intégration numérique et la condition d'orthogonalité devrait être invisible, dans la mesure où aussi bien l'approximation du flux que celle de l'intégrale sont d'ordre 1 en espace.

4.3.3 Validation numérique de l'estimation d'erreur

Afin justement d'illustrer cet ordre d'approximation et de retrouver le résultat de l'estimation d'erreur du théorème 4.4, on considère un cas académique bidimensionnel issu de [Lem13]. Soit le carré unité constitué d'un matériau poreux homogène, de paramètres $E = 2.5, \nu = 0.25$ pour le solide et $\bar{\kappa} = \kappa \bar{l}_2$ avec $\kappa = 1$ pour le fluide, couplés par les coefficients poroélastiques $\alpha = 1$ et $c_0 = 0.5$. L'intervalle de temps pour les simulations démarre à 0 pour s'achever à $T = 1$. On considère la solution analytique

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 10^{-2} \exp(-t) \begin{pmatrix} x^2 y \\ -x y^2 \end{pmatrix}, \quad p(\mathbf{x}, t) = \exp(-t) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right),$$

que l'on utilise pour calculer les chargements

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha \exp(-t)}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) - 2 \cdot 10^{-2} \exp(-t) y \\ \frac{\alpha \exp(-t)}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cdot 10^{-2} \exp(-t) x \end{pmatrix} \text{ et } q(\mathbf{x}, t) = (\kappa - c_0) \exp(-t) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

Des conditions aux limites de Dirichlet sont imposées sur les frontières pour les deux équations. Le domaine Ω est discrétisé par des mailles de Voronoï qui satisfont par définition la condition d'orthogonalité. On génère plusieurs maillages de diamètres maximums respectifs $h = 1.2 \cdot 10^{-1}, 5.5 \cdot 10^{-2}, 1.4 \cdot 10^{-2}, 4.5 \cdot 10^{-3}$ et $1.6 \cdot 10^{-3}$ et, simultanément, on considère plusieurs valeurs pour le pas de temps : $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.02, 0.01$. Pour chaque couple $(h, \Delta t)$, l'erreur d'approximation E^A définie par l'équation (4.35) est calculée. Son évolution est représentée sur la figure 4.2 en fonction du pas du maillage h pour un pas de temps donné (à gauche) ou en fonction de pas de temps pour un maillage donné (à droite). Deux comportements asymptotiques

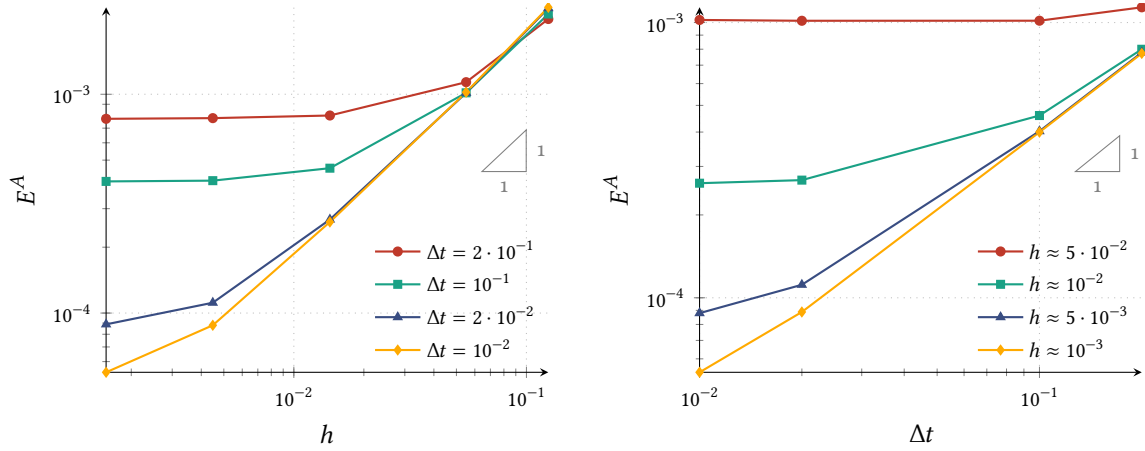


FIG. 4.2 : Évolution de l'erreur d'approximation en fonction du pas d'espace (gauche) ou du pas de temps (droite).

peuvent être distingués. D'un côté, si le pas de temps est trop grand, réduire le pas du maillage ne permet plus d'améliorer l'erreur. Ceci s'observe grâce à la courbe rouge du graphe de gauche ou grâce à la partie droite du graphe de droite. Dans cette situation, le terme en h est négligeable par rapport au terme en Δt dans l'estimation d'erreur. De l'autre côté, si le pas du maillage est trop grossier, réduire le pas de temps n'entraîne pas une réduction de l'erreur. Ceci s'observe dans la partie droite du graphe de gauche ou à l'aide de la courbe rouge du graphe de droite. Dans cette situation, le terme en Δt est négligeable devant le terme en h dans l'estimation d'erreur. Sur les deux graphes, on retrouve l'ordre de convergence attendu en regardant les courbes jaunes, où h (resp. Δt) est suffisamment petit pour ne pas perturber l'évolution de l'erreur en fonction de Δt (resp. h). La pente des droites jaunes est égale à un, comme le prévoit la formule d'estimation d'erreur. Entre les courbes limites rouges et jaunes, l'erreur d'approximation peut être diminuée en réduisant au choix la taille du maillage ou le pas de temps. Cette double dépendance de l'erreur s'observe également sur la figure 4.3 représentant les lignes de niveaux de l'erreur d'approximation dans le plan $(h, \Delta t)$. Encore une fois, on peut observer les régions où l'erreur est due en majeure partie à Δt (lignes horizontales) et celles où elle est due en majeure partie à h (lignes verticales).

4.4 Calculs réalistes de problèmes physiques

Afin d'illustrer la méthode dans un cadre plus réaliste, on propose dans cette section la résolution numérique des deux problèmes physiques détaillés dans la section 2.2.3.

4.4.1 Cas de compaction

On s'intéresse dans cette partie au cas de compaction schématisé sur la figure 2.1 dont la solution exacte est connue. Les paramètres mécaniques sont ceux exposés sur le schéma, et on adopte un pas de temps de 10000 ans pour une durée totale de simulation de 5 millions d'années (soit 500 pas de temps). Le taux de sédimentation σ_a est fixé à $6.4 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}\cdot\text{s}^{-1}$ ce qui équivaut à un dépôt d'environ 100 mètres de sédiments par million d'années. Le domaine est maillé dans un premier temps par des carrés, ce qui produit un maillage de 6000 cellules, puis par des éléments de Voronoï, ce qui produit un maillage de 5000 cellules représenté sur la figure 4.4 et utilisé pour les illustrations dans la suite.

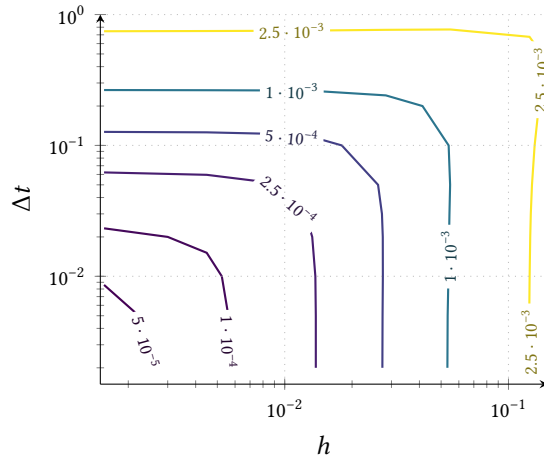


FIG. 4.3 : **Erreur d'approximation dans le plan** ($h, \Delta t$). Les deux paramètres de discrétisation peuvent être diminués pour améliorer l'erreur, jusqu'au point où l'un devient négligeable par rapport à l'autre.

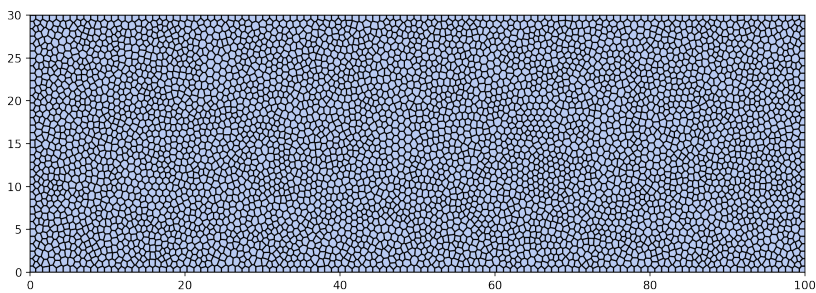


FIG. 4.4 : **Maillage de Voronoï** utilisé pour illustrer le schéma VEM-TPFA sur le cas de compaction. Ce maillage satisfait la condition d'orthogonalité.

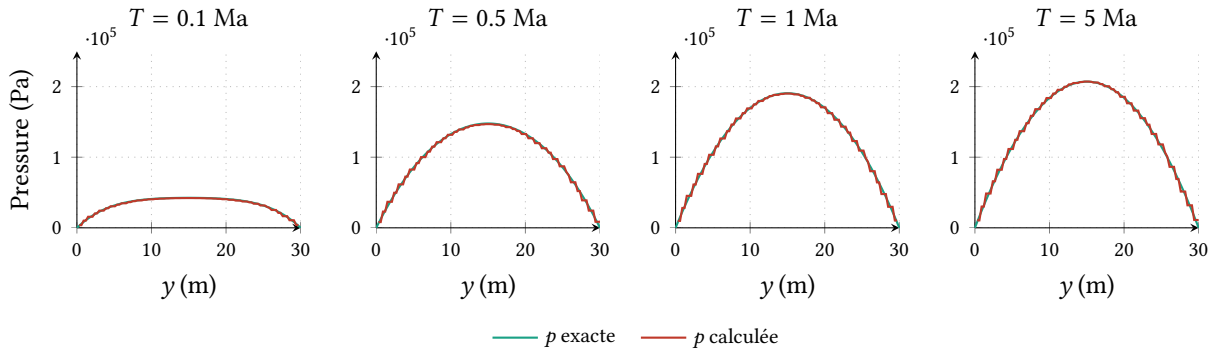


FIG. 4.5 : **Pression calculée et exacte** à différents instants sur le cas de compaction. En dehors d'un effet d'escalier dû à la représentation constante par maille de la solution, les deux pressions sont proches.

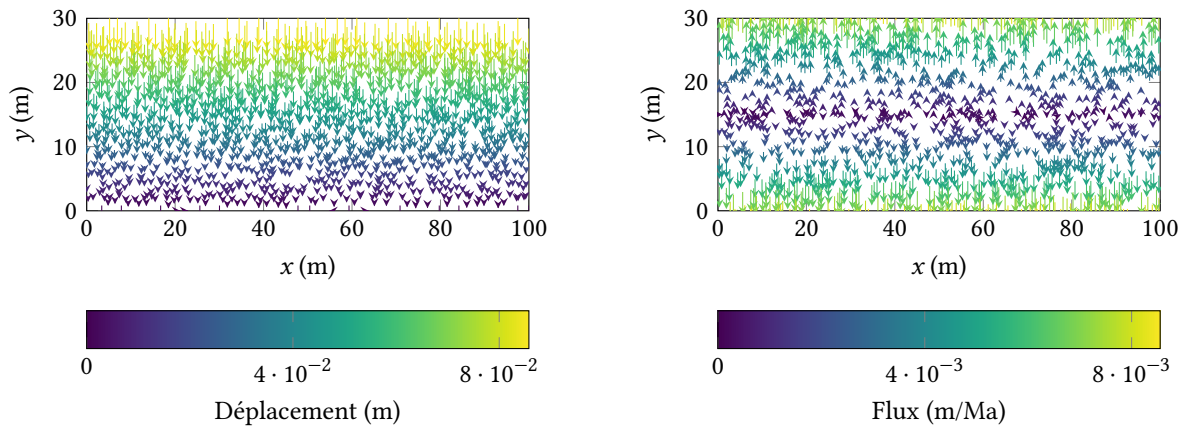


FIG. 4.6 : **Champ de déplacement (gauche) et flux (droite)** au temps final sur le cas de compaction. Les vecteurs sont colorés selon leur norme, et leur longueur est proportionnelle à leur norme.

Puisque la pression analytique donnée par l'équation (2.18) ne dépend pas de la composante spatiale x , elle peut être représentée le long de l'axe vertical médian $x = 50$ m. Pour différents instants, la figure 4.5 représente sur cet axe et en fonction de l'altitude y la pression analytique et la pression calculée. On observe que pour un temps suffisamment grand, la pression a une forme parabolique. Cette forme correspond à l'expression analytique dans laquelle le terme temporel est devenu négligeable en raison de l'exponentielle décroissante. Pour chaque pas de temps représenté, la pression calculée est fidèle à la pression analytique. Seul apparaît un effet d'escalier dû à la faible résolution du maillage, cet effet s'atténuant pour un maillage plus fin. D'autre part, la figure 4.6 représente, au temps final et sur l'ensemble du domaine, le champ de déplacement \mathbf{u}_h (à gauche) et le flux du fluide (à droite). Pour une meilleure visibilité, un nombre restreint de vecteurs sont affichés et leur taille est multipliée de manière homogène par un certain coefficient. Le champ de déplacement montre que comme attendu, le milieu ne se déplace que dans la direction \mathbf{e}_y , c'est-à-dire dans la même direction que la contrainte qu'il subit. Le flux montre que sous l'effet de ce déplacement, le fluide s'échappe du domaine par les deux seuls plans non imperméables $y = 0$ et $y = 30$ m. Le flux présente de plus les mêmes symétries que le champ de pression. Pour approfondir la comparaison entre les grandeurs calculées et les grandeurs exactes, des maillages plus raffinés sont créés. Cependant, pour

diminuer le temps de calcul, la longueur L est ramenée à 30 m au lieu de 100 m, ce qui ne modifie pas les résultats puisque la pression ne dépend que de y . Pour chaque famille de maillages et pour chaque niveau de raffinement, le tableau 4.2 indique le nombre de degrés de liberté du système couplé.

h_{max}	$8.4 E^{-1}$	$4.2 E^{-1}$	$2.1 E^{-1}$	$1.1 E^{-1}$	$7.1 E^{-2}$	h_{max}	1.0	$5.0 E^{-1}$	$2.6 E^{-1}$	$1.3 E^{-1}$	$8.9 E^{-2}$
#dofs	7.7K	30K	121K	482K	1.1M	#dofs	13K	49K	196K	798K	1.8M
(a) Maillages carrés						(b) Maillages Voronoï					

TAB. 4.2 : Diamètre maximal et nombre de degrés de liberté pour les deux familles de maillages

Pour ces deux familles de maillages, la figure 4.7 représente l'évolution des erreurs E_{rel}^u , E_{rel}^p , E_{rel}^σ et $E_{rel}^{\tau\gamma}$ en fonction du diamètre du maillage au temps final de la simulation. Ceci permet d'illustrer l'ordre de convergence du schéma sur un cas plus complexe que le problème académique du paragraphe 4.3.3. En norme L^2 , on observe un ordre de convergence égal à deux pour le déplacement et pour la pression sur les deux familles de maillages. Même si l'analyse d'erreur effectuée plus tôt dans ce chapitre pour le problème couplé ne donne un résultat que sur une norme équivalente à la norme H^1 , cette observation rejoint les ordres habituellement relevés pour les problèmes découplés : la méthode des éléments virtuels convergeait à l'ordre 2 dans le chapitre 3, tandis que les volumes finis deux points sont connus pour converger à l'ordre 2 en norme L^2 , même si ceci n'a pas été démontré de manière théorique [DN17]. Pour obtenir ces courbes, la pression analytique a été calculée aux centres de Voronoï. Si la pression analytique est calculée aux centres de masses, l'erreur E_{rel}^p est plus élevée, ce qui rejoint les observations du paragraphe 4.3.2, et l'ordre de convergence n'est plus que de 1 pour l'erreur L^2 en pression (voir la courbe bleue sur la figure). En norme H^1 , l'erreur en contrainte converge à l'ordre 1 sur les deux familles de maillages. Pour la variable de pression, on observe un phénomène de superconvergence avec les maillages carrés puisque la pente de la droite vaut 1,5. Cette pente est bien égale à un sur les maillages de Voronoï.

4.4.2 Cas Mandel

Le cas de consolidation de Mandel, décrit dans la section 2.2.3, permet également d'illustrer le comportement du code poroélastique. En particulier, cet exemple permet d'observer l'influence du choix des conditions initiales du problème. Les caractéristiques géométriques et mécaniques utilisées pour ce problème sont décrites sur la figure 2.2. L'intensité de la force F est choisie de manière à avoir une pression de l'ordre du bar : $F = 100$ MPa. Les simulations sont cette fois effectuées sur un maillage constitué de 100×30 carrés.

Dans un premier temps, le problème est initialisé selon la procédure suivie dans les cas précédents : la pression $p^0(\mathbf{x})$ est calculée à partir de la solution exacte (2.20) à l'instant $t = 0^+$ (celle-ci est donc non nulle), puis les déplacements initiaux $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ sont calculés en résolvant le problème d'équilibre mécanique. La simulation court jusqu'au temps final $T = 10^{14}$ s ≈ 3 Ma avec un pas de temps $\Delta t = 10^{12}$ s ≈ 30 000 ans. L'évolution de la pression et du déplacement u_x (qui ne dépendent que de x) le long de l'axe médian x ainsi que l'évolution du déplacement u_y (qui ne dépend que de y) le long de l'axe y médian sont représentées sur la figure 4.8 à différents instants. Avec cette approche, la solution approchée représentée par les symboles est très proche de la solution exacte représentée par les traits pleins. De plus, l'effet Mandel-Cryer est bien capturé par la pression approchée : ceci peut être observé sur la figure 4.9 qui représente l'évolution de la pression au point $(x = 0, y = 0)$ en fonction du temps. À l'extrémité gauche du domaine de simulation (et donc sur la verticale médiane du domaine), la pression augmente légèrement en début de simulation avant

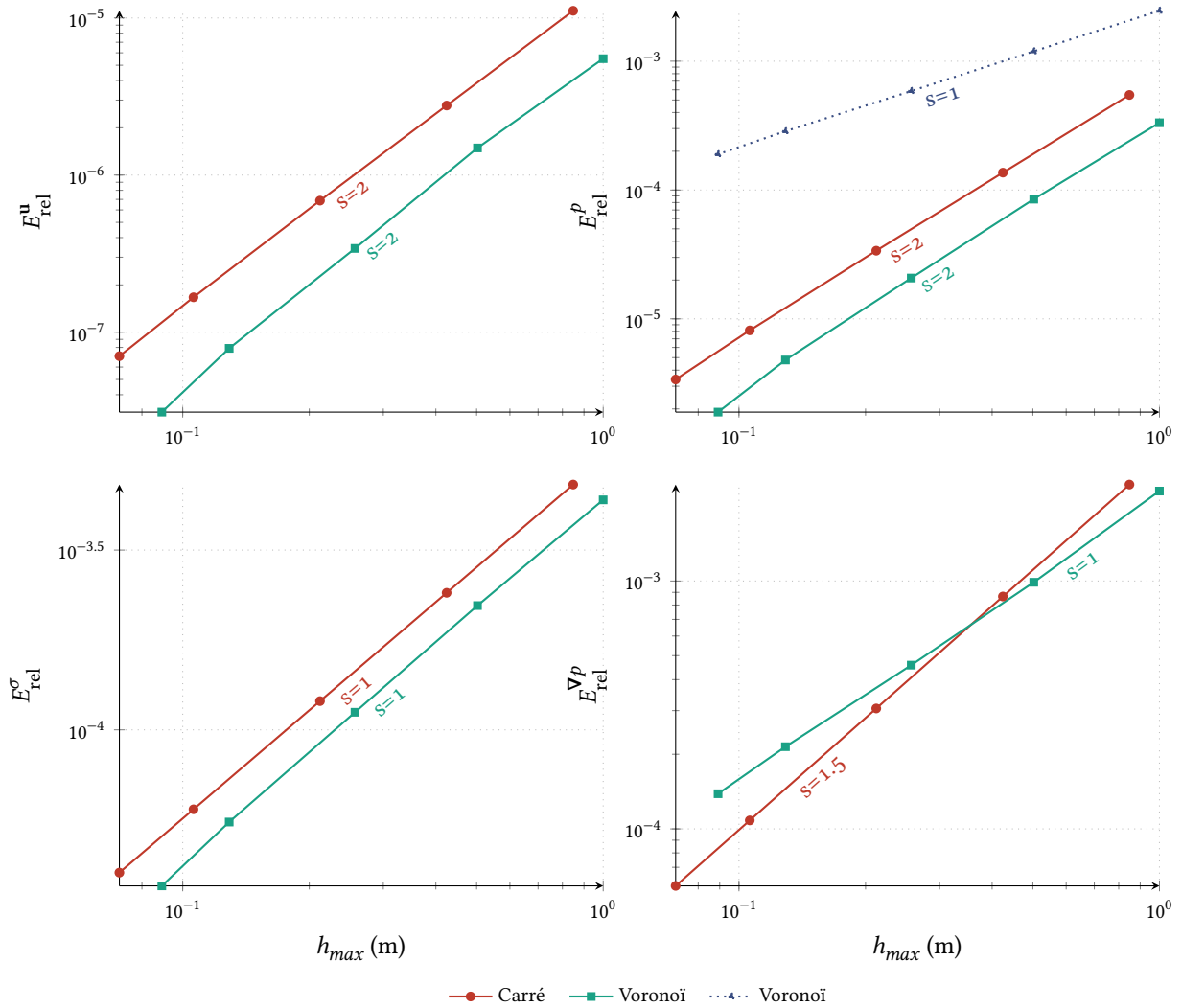


FIG. 4.7 : **Convergence en normes L^2 et H^1 des erreurs en déplacement et en pression.** Les ordres de convergence correspondent à ceux que l'on obtient classiquement sur les problèmes découplés, sauf celui de l'erreur $E_{rel}^{\nabla p}$ sur les maillages carrés qui est plus élevé qu'attendu. De plus, on observe (droite bleue) que l'ordre de convergence se dégrade pour E_{rel}^p sur le maillage de Voronoï si la pression analytique n'est pas évaluée en ces mêmes points.

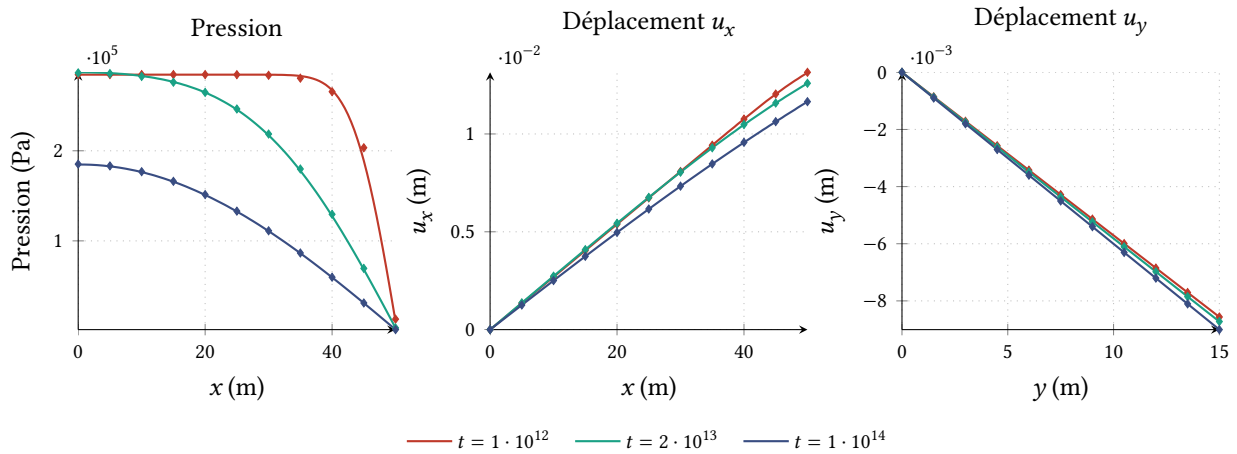


FIG. 4.8 : Comparaison de la solution calculée et analytique du cas Mandel pour la pression p et les déplacements u_x et u_y à différents instants. La solution exacte, en traits pleins, et la solution calculée, représentée par les symboles, sont cohérentes à chaque instant de la simulation.

de décroître vers 0.

Dans un second temps, en plus de la méthode utilisée ci-dessus pour initialiser les solutions, deux autres approches sont testées de manière à se rapprocher de la description physique du problème, qui indique que la pression et les déplacements sont nuls à l'instant initial. La deuxième approche consiste ainsi à fixer la pression initiale à 0 et à laisser la méthode calculer les déplacements au temps $t = 0$. Il s'agit en quelque sorte d'un compromis entre le fonctionnement de la méthode numérique et les conditions du problème. Enfin, dans une troisième approche, la pression initiale et les déplacements initiaux sont pris nuls. Notons que cette troisième approche ne correspond pas au comportement "naturel" de l'algorithme et que celui-ci est donc modifié pour pouvoir imposer un déplacement initial. Pour ces trois approches, la figure 4.10 représente à nouveau les valeurs de $p(x)$, $u_x(x)$ et $u_y(y)$ au temps $t = 5 \cdot 10^{12}$ s, c'est-à-dire en début de simulation. La courbe noire, qui fait office de référence, est calculée à partir des expressions analytiques. Comme observé précédemment, la première approche donne des résultats numériques proches des solutions analytiques, mais cette approche ne correspond pas aux paramètres du problème. Avec la deuxième approche, les quantités calculées pour p et u_x diffèrent des solutions exactes. Ce comportement est probablement dû à la condition imposée au déplacement sur le bord $y = h$. En effet, cette condition est non nulle quand $t = 0$, et perturbe donc le problème de mécanique qui calcule une solution non nulle sous cette condition. En d'autres termes, la condition au bord à l'instant initial n'est valable qu'à partir de l'instant $t = 0^+$ et est donc elle aussi incompatible avec la description physique du problème. Cette incompatibilité est levée par la troisième approche puisque celle-ci n'utilise plus la condition à l'instant initial pour calculer les déplacements. Avec cette méthode, on retrouve un résultat coïncidant avec la pression et les déplacements exacts. Cette configuration permet de valider le code de calcul, qui à partir de la description physique du problème ($p^0 = 0$, $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$) parvient à retrouver la solution analytique qui est pourtant asymptotiquement différente de 0.

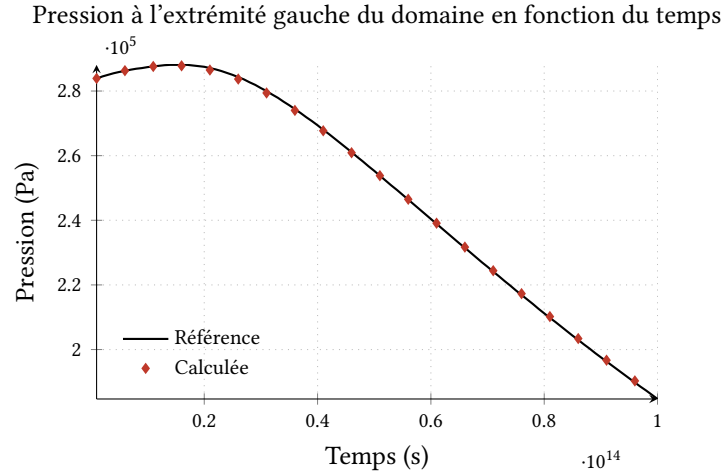


FIG. 4.9 : **Effet Mandel-Cryer** : en début de simulation, la pression à l'extrémité gauche du domaine augmente avant de décroître. L'effet est bien capturé par la pression calculée (symboles), qui reste très proche de la pression exacte (trait plein).

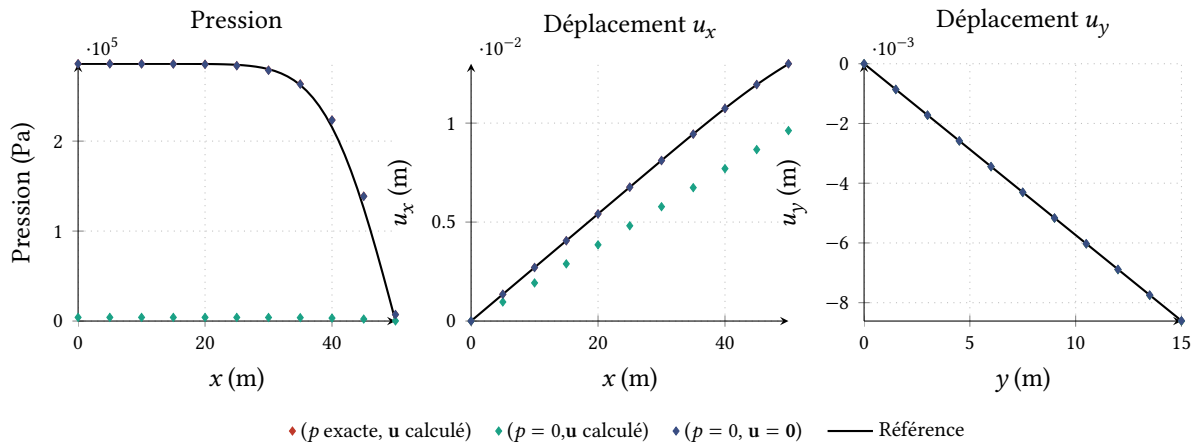


FIG. 4.10 : **Comparaison de différentes méthodes d'initialisation pour le cas Mandel**. Les trois approches (symboles) sont comparées à la pression et aux déplacements exacts (trait plein) au premier pas de temps $t = 5 \cdot 10^{12}$ s. La troisième approche, qui correspond à la description physique du problème, donne des résultats proches de la solution exacte malgré la discontinuité entre cette condition initiale et la valeur asymptotique des solutions.