

En fonction de l'échelle de longueur à laquelle les écoulements fluide-particules sont décrits, différentes approches sont utilisées pour décrire le comportement des deux phases. Premièrement, à l'échelle la plus fine considérée dans cette étude, que nous appelons échelle micro, les équations de Navier-Stokes (NS) sont résolues directement autour des particules, les trajectoires de ces dernières sont quant à elles calculées individuellement de façon lagrangienne. Deuxièmement, en se plaçant à une échelle de longueur bien plus grande, que nous appelons échelle macro, les particules sont considérées comme formant une phase continue (voir figure II.1-(c)). Le comportement des deux phases, fluide et solide, est alors décrit par des équations moyennées en espace faisant intervenir la fraction volumique de chacune des phases. Entre ces deux échelles de description, il existe une troisième approche se basant sur une formulation moyennée du fluide, mais pour laquelle les trajectoires des particules sont calculées individuellement. Cette approche est souvent appelée "méso", "micro-macro" ou "Euler-Lagrange" car elle constitue une combinaison des deux échelles de longueur présentées précédemment.

La figure II.1 illustre le changement d'échelle qui est opéré lors de l'utilisation des différents modèles. Nous présentons ci-après le principe général des échelles micro, macro et méso puis cette dernière est détaillée dans la section suivante (§II – 2).

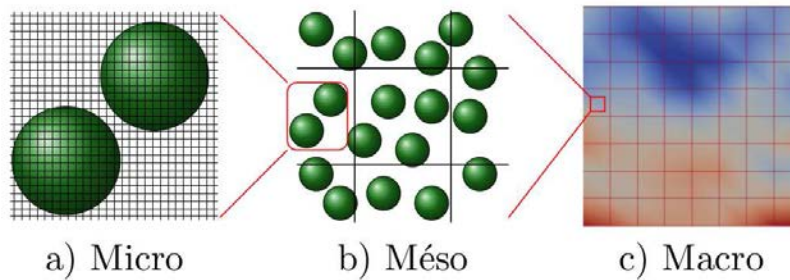


FIGURE II.1 – Exemple d'échelle de modélisation pour a) une approche DNS, b) une approche Euler-Lagrange et c) une approche Euler-Euler

II – 1.1 Echelle micro : résolution directe

Les systèmes fluide-particules peuvent être décrits en résolvant directement les équations de NS pour le fluide tandis que la trajectoire des particules est calculée individuellement. Pour mettre en place ce type de méthode où l'écoulement est résolu de façon précise autour de chaque particule, le maillage fluide doit être plus fin que la plus petite échelle spatiale caractéristique de l'écoulement. Il existe deux approches totalement différentes pour construire ce maillage, soit il occupe uniquement l'espace entre les particules, soit il est construit sur tout le domaine, y compris l'espace occupé par les particules.

Remarque 4 Dans le cas où les équations de NS ne sont résolues que dans l'espace occupé par le fluide, nous pouvons parler de résolution numérique directe (en anglais "Direct Numerical Simulation (DNS)"). L'acronyme "DNS" est également souvent employé pour les méthodes dans lesquelles les équations de NS sont résolues dans tout le domaine, fluide + particules, et où la vitesse du fluide est contrainte par différents moyens que nous présentons en partie II – 1.1.2.

II – 1.1.1 Maillage adaptatif

Dans le cas d'une inclusion d'objets dans le fluide, ici des particules, il est naturel de vouloir utiliser un maillage qui épouse la géométrie des objets¹ afin de résoudre directement les équations de NS dans le domaine occupé par le fluide. Comme l'illustre la figure II.2, pour de telles configurations, le maillage doit être non structuré afin de s'adapter au mieux aux surfaces des objets, que ceux-ci soit

1. en anglais "body fitted"

en mouvement ou non.

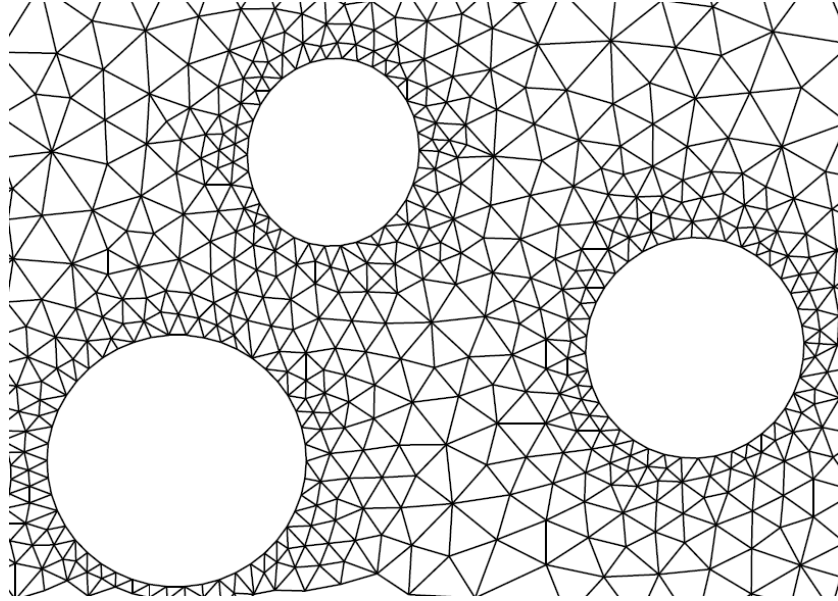


FIGURE II.2 – Exemple de maillage non structuré épousant la surface des particules (B. Maury [150])

Tout d’abord, si les objets sont fixes, le maillage est généré une seule fois avant de débiter la résolution des équations. Cette étape peut prendre du temps dans le cas de géométries complexes, comme par exemple pour un lit fixe de particules dont les zones occupées par le fluide sont parfois très étroites, rendant la construction du maillage laborieuse. En revanche, si les objets sont mobiles, le maillage construit avant la simulation nécessite d’être modifié pour prendre en compte le changement de géométrie du domaine occupé par le fluide. Si les particules se déplacent, le maillage peut être étiré, c’est à dire que les connections entre les nœuds du maillage restent les mêmes mais que les dimensions des mailles sont modifiées afin de suivre au mieux le déplacement des surfaces des objets. Mais lorsque le déplacement des objets est important, l’augmentation du rapport de forme des mailles engendre une détérioration de la solution obtenue, il est donc nécessaire de générer un nouveau maillage et de projeter la solution de l’ancien maillage sur le nouveau. Cette étape peut s’avérer très chronophage dans le cas de lit dense de particules, surtout en trois dimensions, et doit être renouvelée d’autant plus fréquemment que le déplacement des objets est important.

Ces méthodes, dans lesquelles le maillage suit le déplacement des objets de façon lagrangienne sont communément appelées Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE). Elles furent pour la première fois utilisées pour les écoulements fluide-particules par Hu [105, 106]. Pour plus de renseignements sur les méthode ALE et leur adaptation aux écoulements fluide-particules, voir par exemple les travaux de B. Maury [150, 132].

II – 1.1.2 Maillage fixe

Afin de s’affranchir des contraintes engendrées par l’utilisation de maillages adaptatifs, à savoir le temps passé à remailler l’espace occupé par le fluide lorsque les particules se sont déplacées, de nouvelles méthodes utilisant un maillage fixe ont été introduites. Les méthodes à maillage fixe sont également appelées méthodes de domaine fictif car elles sont basées sur l’utilisation d’un maillage occupant tout le domaine, y compris celui occupé par les particules. La vitesse du fluide calculée aux nœuds recouverts par les particules est alors totalement fictive ou égale à la vitesse des particules selon la méthode employée. Ce genre de méthode permet notamment d’utiliser des maillages cartésiens, ce qui simplifie grandement l’écriture et l’implémentation des schémas numériques.

Le cœur de ces méthodes est de faire en sorte que le fluide “voit” les particules, et que les quantités de mouvement s’échangent entre les phases fluide et solide. Parmi les différentes techniques utilisées

pour contraindre la vitesse du fluide aux nœuds concernés, citons par exemple :

- Les méthodes de frontières immergées (en anglais “Immersed Boundary Method (IBM)”), qui furent initialement proposées par Peskin [174, 175] pour modéliser les écoulements sanguins dans des cœurs humains. L’interaction entre les phases fluide et solide est modélisée en imposant des forces additionnelles dans la formulation du fluide au voisinage de l’interface à l’aide de l’opérateur de Dirac, la contrainte est donc imposée uniquement sur la surface de la particule de façon explicite. Cette méthode se base sur les hypothèses (i) d’une vitesse régulière du fluide à travers l’interface et (ii) d’objets infiniment minces (modèle initialement écrit pour des parois cardiaques). Aussi, son utilisation pour des écoulements diphasiques contenant des particules de taille finie entraîne des erreurs telles que des fuites numériques de fluide à travers les parois [229] malgré les améliorations apportées par LeVeque [133, 134] puis Li & Lai [137]. Pour plus d’information sur les méthodes IBM, se référer également aux travaux de Uhlmann [215, 216, 217].
- Les méthodes de multiplicateurs de Lagrange distribués (en anglais “Distributed Lagrange Multiplier/Fictitious Domain (DLM-FD)”). Cette approche fut introduite par Glowinski *et al.* [90, 88, 169, 89] pour des objets indéformables et fut ensuite étendue aux solides déformables par Yu [234]. Elle consiste à imposer la condition de corps rigide au sein de la particule en imposant la condition d’égalité des vitesses fluide et solide à l’aide de multiplicateurs de Lagrange. La contrainte est donc imposée sur plus de nœuds fluides qu’avec la méthode IBM et les problèmes à résoudre sont donc plus gros. Cependant, la méthode des multiplicateurs de Lagrange ne présente pas l’inconvénient des fuites de matière observées en IBM. Dans cette étude, les simulations à l’échelle micro sont réalisées à l’aide d’un modèle DLM-FD développé par l’équipe PeliGRIFF [222, 223].
- La méthode PHYSALIS développée par Prosperetti *et al.* [178, 244, 207], qui repose sur le principe de condition d’adhérence du fluide à la surface de la particule. Ainsi, en supposant que la vitesse du fluide est proche de celle de la particule dans le voisinage de l’objet, l’écoulement peut être décrit à l’aide d’une équation de Stokes dont la solution approximée est connue. La correspondance entre les solutions obtenues sur la face extérieure de la zone de Stokes et dans le reste du domaine est contrainte à l’aide d’une méthode itérative.
- La méthode de Boltzmann sur réseau (en anglais “Lattice Boltzmann Method (LBM)”). Cette approche est basée sur la dérivation des équations de Navier-Stokes à partir de l’équation de Boltzmann, qui décrit initialement la cinétique des gaz. Dans ce type de méthode, les variables du fluide sont considérées sous forme de fonctions de distribution et la manière la plus fréquemment employée pour prendre en compte la présence des particules est réalisée à l’aide d’une méthode de réflexion (en anglais “Bounce Back”) [126, 127, 128, 96, 97]. La fonction de distribution arrivant à un nœud appartenant à la phase solide est alors réfléchi vers le nœud d’origine. La simplicité d’implémentation et la précision des résultats que procure ce type de méthode en font à ce jour un outil très en vogue dans la communauté des écoulements fluide-particules.
- La méthode de force de couplage (en anglais “Force Coupling Method (FCM)”) proposée par Climent & Maxey [41, 34, 33]. Cette méthode, valable uniquement pour les écoulements en régime de Stokes, consiste à modéliser l’action des particules sur le fluide comme un terme source dans l’équation de Stokes. Le forçage est écrit sous la forme d’un développement multipolaire représentant la modification de l’écoulement engendrée par la présence de particules et l’ordre du multipole employé détermine la précision et le coût de calcul de la solution obtenue.
- La méthode de pénalisation, basée sur une reformulation du tenseur des contraintes permettant d’annuler le taux de déformation dans le volume occupé par la particule. Localement, la viscosité du fluide est augmentée fortement pour contraindre le mouvement du fluide à avoir un mouvement de corps rigide identique à celui d’une particule. Se référer par exemple aux travaux de Caltagirone & Vincent [26, 221, 220].

En résumé de cette présentation des méthodes de domaines fictifs, retenons que celle-ci offre un gain de temps considérable par rapport aux approches body fitted car le maillage reste le même durant toute

la simulation. De plus, cela rend possible l'utilisation de maillages cartésiens, ce qui facilite grandement l'écriture et l'implémentation des schémas numériques. Les détails mathématiques de la méthode DLM-FD employé dans cette étude sont présentés dans la partie relative aux simulations DNS en partie VI – 2.

II – 1.2 Echelle macro : Modèles Euler-Euler

La simulation numérique des écoulements fluide-particules, et plus généralement des écoulements multiphasiques, peut également être basée sur une approche purement eulérienne des phases. Elles sont alors considérées comme continues et s'interpénètrent entièrement [87, 61]. Ainsi, les équations de continuité et de quantité de mouvement pour chacune des phases sont respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\mathcal{E}_1 \rho_1 \mathbf{u}_1) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_1 \rho_1 \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (\mathcal{E}_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1) = -\mathcal{E}_1 \nabla P_T + \mathcal{E}_1 \rho_1 \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{T}_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.1a)} \\ \text{(II.1b)} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_2 \rho_2) + \nabla \cdot (\mathcal{E}_2 \rho_2 \mathbf{u}_2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_2 \rho_2 \mathbf{u}_2) + \nabla \cdot (\mathcal{E}_2 \rho_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2) = -\mathcal{E}_2 \nabla P_T + \mathcal{E}_2 \rho_2 \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_2 + \mathbf{T}_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.2a)} \\ \text{(II.2b)} \end{array}$$

où $\rho_k(t, \mathbf{x}) \geq 0$ est la densité de la phase k , avec $k \in \{1, 2\}$, dont le champ de vitesse est $\mathbf{u}_k(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^N$. D'autre part, $\boldsymbol{\tau}_k$ et $0 \leq \mathcal{E}_k(t, \mathbf{x}) \leq 1$ sont le tenseur des contraintes effectives et la fraction volumique de la phase k , respectivement. \mathbf{T}_k représente l'échange de quantité de mouvement entre les deux phases diminué de la contribution de la pression moyenne du fluide.

Cette approche permet de modéliser des systèmes aux dimensions bien plus étendues que l'approche DNS, c'est pourquoi ce type de modèle est souvent utilisé dans des codes de calcul industriels. En revanche, l'utilisation d'une grille fluide large ainsi que l'assimilation du solide à une phase continue impliquent une perte d'information sur le comportement des particules et du fluide. Pour y remédier, il est nécessaire de mettre en œuvre des modèles de fermeture dans le cas d'écoulements turbulents ainsi que des lois de comportement modélisant le comportement et l'action de la phase solide dans le cas d'écoulements fluide-particules. Comme le résume Batrak [10], deux approches sont communément employées pour modéliser les écoulements à phase dispersée de façon eulérienne. Dans un premier cas, les équations de la phase dispersée sont écrites de manière similaire aux équations de la phase continue comme dans la dérivation classique du modèle à deux fluides [46, 60, 176]. La seconde approche s'appuie sur le formalisme de la théorie cinétique des gaz en raison de la forte analogie entre le mouvement des particules dans un écoulement diphasique turbulent et celui des molécules de gaz à l'échelle microscopique. Dans sa version initiale, cette méthode permet ainsi de prendre en compte les collisions entre les particules mais pas l'interaction entre les particules et la turbulence [110, 156]. Puis différentes équipes incluent cette interaction entre les phases dans leur modèle [48, 239]. Parmi ces équipes, notons les travaux de Simonin *et al.* [199, 200, 202, 201, 17]. Cette approche fut par la suite largement testée, validée et reprise par la communauté des écoulements multiphasiques [16, 7, 171, 6]. Citons également les travaux de Marchisio & Fox qui utilisent un modèle de quadrature de moments (en anglais "Quadrature Method Of Moment (QMOM)") [146, 145, 71]. Mais également ceux de Février *et al.* [76] qui, partant du principe que dans un écoulement fortement inertiel, des particules pouvaient être proches mais néanmoins avoir des vitesses différentes, proposèrent de décomposer leur vitesses en un terme corrélé et un autre décorrélé (en anglais "Random Uncorelated Motion (RUM)") [155].

II – 1.3 Echelle méso : Modèles Euler-Lagrange

Le principe des modèles Euler-Lagrange, également appelés Discrete Element Method / Computational Fluid Dynamics (DEM-CFD) ou Combined Continuum and Discrete Model (CCDM), consiste à décrire la phase continue (liquide ou gazeuse) de façon eulérienne et à assurer un suivi lagrangien des

particules. Ainsi, l'écoulement du fluide est généralement modélisé par une équation de conservation de la masse et une équation de bilan de quantité de mouvement qui prennent toutes les deux en compte la fraction volumique du fluide, comme dans le Two Fluid Model (TFM) présenté par Gidaspow [87]. L'effet des particules sur le fluide est considéré comme un terme source dans l'équation de quantité de mouvement tandis que l'action du fluide sur les particules est modélisé par une force hydrodynamique. A l'inverse de l'approche DNS, le diamètre des particules est plus petit que la taille des cellules du maillage fluide (voir figure II.1-(b)). Les modèles couplant la méthode des éléments discrets (en anglais "Discrete Element Method (DEM)") [39] pour la modélisation des particules et une approche eulérienne de la phase fluide ont été introduits par Tsuji, Kawaguchi et Tanaka en 1993 [211]. Depuis, cette approche a été reprise et modifiée par de nombreuses équipes [115, 168, 102, 227, 56]. Les systèmes ainsi modélisés comptent de plus en plus de particules et leur implémentation numérique est de plus en plus poussée [111, 50].

Durant ces trois années de thèse, nous nous sommes intéressés en particulier à cette échelle de longueur pour étudier les écoulements fluide-particules denses. Aussi, les différents éléments du modèle sont détaillés dans la suite de ce chapitre.

II – 2 Modèle Euler-Lagrange

Il existe différentes variantes de l'approche Euler-Lagrange suivant le couplage utilisé comme l'illustre la figure II.3. Pour l'étude d'écoulements fluide-particules denses, il est recommandé d'utiliser un modèle de couplage fort, où l'action des particules sur le fluide est prise en compte, de même que les collisions inter-particulaires.

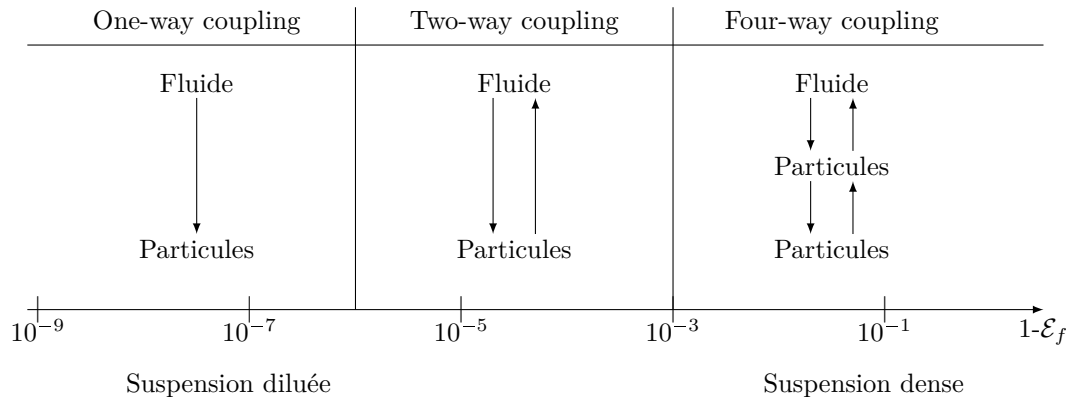


FIGURE II.3 – Différents types de couplage entre les phases solide et fluide en fonction de la concentration de particules (basé sur Elgobashi [59])

Dans la suite de cette section, nous détaillons les différentes parties du modèle, à savoir les équations régissant le fluide, puis le calcul des trajectoires des particules et des contacts inter-particulaires et enfin les éléments de couplage entre les deux phases. Dans cette étude, nous ne traitons que des particules de taille finie, les méthodes de type particules ponctuelles (en anglais "Point Particles Methods") ne sont donc pas abordées ici.

II – 2.1 Phase continue

Dans le modèle Euler-Lagrange, la description de l'écoulement fluide est basé sur le principe de variables localement moyennées proposé par Anderson et Jackson [5]. Cette étape de prise de moyenne spatiale implique que les variables du fluide soient définies sur une grille plus large que la taille des particules, avec un rapport volumique d'environ un ordre de grandeur :

$$\frac{\Delta\Omega}{V_p} \simeq \mathcal{O}(10) \quad (\text{II.3})$$

Où $\Delta\Omega$ est un volume de contrôle du domaine fluide. Dans cette étude, ce volume de contrôle correspond à une cellule du maillage.

Ainsi, le comportement du fluide est décrit par les équations de continuité et de quantité de mouvement (QDM) suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{E}_f \mathbf{u}_f) = 0, & \text{(II.4a)} \\ \frac{\partial(\rho_f \mathcal{E}_f \mathbf{u}_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathcal{E}_f \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f - \mathbf{F}_{pf} + \mathcal{E}_f \rho_f \mathbf{g} & \text{(II.4b)} \end{cases}$$

Où \mathbf{F}_{pf} est une force volumique représentant l'action des particules sur le fluide au sein de chaque cellule de fluide. Le tenseur des contraintes moyenné à l'échelle d'une maille fluide, $\boldsymbol{\sigma}_f$, peut être exprimé de deux façons différentes, de ces deux expressions découlent les deux modèles proposés par Gidaspow [87] dans son TFM pour décrire la phase fluide :

- Modèle A :

Dans ce modèle-ci, le gradient de pression est réparti entre la phase continue et la phase particulaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{E}_f \mathbf{u}_f) = 0 & \text{(II.5a)} \\ \frac{\partial(\rho_f \mathcal{E}_f \mathbf{u}_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathcal{E}_f \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f) = -\mathcal{E}_f \nabla P_T - \mathbf{F}_{pf}^A + \nabla \cdot (\mathcal{E}_f \boldsymbol{\tau}_f) + \mathcal{E}_f \rho_f \mathbf{g} & \text{(II.5b)} \end{cases}$$

- Modèle B :

Dans la seconde formulation, le gradient de pression est pris en compte uniquement du coté fluide :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{E}_f \mathbf{u}_f) = 0 & \text{(II.6a)} \\ \frac{\partial(\rho_f \mathcal{E}_f \mathbf{u}_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathcal{E}_f \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f) = -\nabla P_T - \mathbf{F}_{pf}^B + \nabla \cdot (\mathcal{E}_f \boldsymbol{\tau}_f) + \mathcal{E}_f \rho_f \mathbf{g} & \text{(II.6b)} \end{cases}$$

\mathbf{F}_{pf}^A et \mathbf{F}_{pf}^B sont les forces volumiques modélisant l'action des particules sur le fluide pour les modèles A et B, respectivement. Quel que soit le modèle utilisé, l'expression de cette force volumique est de la forme :

$$\mathbf{F}_{pf} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{f}_{fp,i} \quad \text{(II.7)}$$

Néanmoins, l'expression de la force du fluide sur chaque particule, \mathbf{f}_{fp} , est différente pour chaque modèle (voir §II – 2.3). La relation entre ces deux forces volumiques est donnée par Gidaspow [87] lors de l'écriture de son TFM :

$$\mathbf{F}_{pf}^A = \frac{\mathbf{F}_{pf}^B}{\mathcal{E}_f} - \rho_f \mathcal{E}_f \mathbf{g} \quad \text{(II.8)}$$

Ces deux modèles furent tout d'abord utilisés indifféremment l'un de l'autre [227, 102], même si le modèle A est considéré comme inconsistant [18, 87], mais des différences furent ensuite mises en évidence. En effet, lorsque la vitesse minimale de fluidisation est atteinte, le saut de pression totale à travers le lit doit être égal au poids des particules et du fluide. Or cela n'est pas le cas avec le modèle A comme le font remarquer Xu & Yu [228] à l'issue d'une discussion avec Homans *et al.* [227, 101]. Indépendamment du modèle, à l'état de fluidisation minimale, l'action du fluide sur une particule est égale à son poids :

$$f_{fp}^z = m_p g \quad \text{(II.9)}$$

et la composante verticale de l'équation de QDM du modèle A se réduit à :

$$0 = -\mathcal{E}_f \frac{\partial P_T}{\partial z} - \frac{\sum_{N_p} f_{fp}^z}{\Delta V} - \rho_f \mathcal{E}_f g \quad \text{(II.10)}$$

où f_{fp}^z est la force d'interaction du fluide sur une particule dans la direction verticale. En combinant les équations (II.9) et (II.10), l'expression obtenue pour le saut de pression à travers le lit dans le cas du modèle A est erronée en raison de la présence du terme \mathcal{E}_f devant le gradient de pression :

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_f \frac{\partial P_T}{\partial z} &= \frac{\sum_{N_p} m_p g}{\Delta V} + \rho_f \mathcal{E}_f g \\ &= \frac{\sum_{N_p} V_p \rho_p g}{\Delta V} + \rho_f \mathcal{E}_f g \\ &= (1 - \mathcal{E}_f) \rho_p g + \rho_f \mathcal{E}_f g \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

En effet, comme nous l'avons déjà évoqué dans le premier chapitre (voir §I – 3.1), le saut de pression doit être égal à la somme du poids des particules et du fluide :

$$-\frac{\partial P_T}{\partial z} = (1 - \mathcal{E}_f) \rho_p g + \rho_f \mathcal{E}_f g \quad (\text{II.12})$$

Où le gradient de pression total n'est pas multiplié par \mathcal{E}_f à l'inverse de l'équation (II.11). Cela illustre l'inconsistance du modèle A face au modèle B. La force modélisant l'action du fluide sur les particules est détaillée dans la sous-section II – 2.3.

II – 2.2 Phase dispersée

Une particule dans un lit fluidisé est libre de se mouvoir suivant un mouvement de translation et de rotation, son déplacement peut donc être décrit par la seconde loi de Newton. Ainsi, la trajectoire des particules est obtenue en résolvant le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) pour chaque particule :

$$\begin{cases} m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_{pp} + \mathbf{f}_{fp}, & (\text{II.13a}) \\ \mathbf{I}_p \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} = \mathbf{T}_{pp} + \mathbf{T}_{fp} & (\text{II.13b}) \end{cases}$$

Où \mathbf{f}_{pp} représente la somme des forces exercées par les particules voisines et \mathbf{f}_{fp} la résultante des actions du fluide sur la particule. \mathbf{T}_{pp} est le moment dû aux composantes tangentielles des forces de contact et \mathbf{T}_{fp} est le moment hydrodynamique. \mathbf{I}_p , $\boldsymbol{\omega}_p$ et \mathbf{v}_p sont quant à eux le moment d'inertie, la vitesse angulaire et la vitesse translationnelle de la particule, respectivement.

II – 2.2.1 Description des forces interparticulaires

Les forces exercées par les particules sur leurs voisines peuvent être regroupées en 2 catégories, les forces de contact \mathbf{f}_c et les forces à distance DLVO (électrostatiques et de Van Der Waals).

II – 2.2.1.a Forces de contact

Il existe deux grandes familles de modèles pour exprimer les forces de contact entre particules et entre particules et murs, les modèles à sphères rigides et les modèles à sphères molles

1. Modèle de sphères rigides :

Dans les modèles de sphères rigides (en anglais “hard sphere model”), les collisions sont instantanées, la dynamique de collision est donc binaire et les particules ne se chevauchent pas. Afin de bien capter l'instant auquel a lieu le contact, il est important d'avoir un pas de temps très fin. Ce type de modèle est proche de ceux utilisés en dynamique moléculaire.

2. Modèles de sphères molles

Les modèles de sphères molles (en anglais “soft sphere model”), sont beaucoup utilisés pour modéliser des contacts entre objets. Avec cette méthode, les objets sont autorisés à se recouvrir partiellement pendant le choc. Contrairement à la méthode précédemment présentée, ici le choc

n'est donc pas instantané et l'équation (II.13a) est résolue pour plusieurs pas de temps à chaque contact entre deux particules ou entre une particule et un obstacle. C'est ce modèle qui sera utilisé dans la suite de l'étude (voir section II – 2.2.2).

II – 2.2.1.b Forces DLVO

Les forces DLVO, en référence à la théorie de Derjaguin, Landau, Verwey et Overbeek [49, 219], regroupent les forces d'attraction de Van Der Waals et de répulsion électrostatique existant entre des particules, électriquement chargées ou non. Leur intensité est d'autant plus importante face aux forces hydrodynamiques et de contact que les particules sont petites. C'est pourquoi ces forces sont prédominantes pour les poudres du groupe C de la classification de Geldart et sont non négligeables pour les poudres du groupe A (voir §I – 3.3). Les forces de Van der Waals prennent naissance à l'échelle moléculaire et peuvent être identifiées comme les forces de London, de Debye et de Keesom.

$$\mathbf{f}_{\text{vdw}} = \mathbf{f}_{\text{London}} + \mathbf{f}_{\text{Debye}} + \mathbf{f}_{\text{Keesom}} \quad (\text{II.14})$$

Les forces DLVO ne sont pas prises en compte dans cette étude, néanmoins elle sont détaillées en annexe D.

II – 2.2.2 Modélisation

Dans cette étude, nous ne nous intéressons qu'aux particules non polarisées et dont la taille est supérieure à $100\mu\text{m}$. Les déplacements en translation et en rotation des particules sont calculés à l'aide d'un modèle aux éléments discrets (en anglais "Discrete Element Method (DEM)") introduit par Cundall & Strak [39], associé à un modèle de sphères molles permettant aux particules de se recouvrir légèrement pour calculer les forces de contact (voir figure II.4). Les trajectoires et contacts des particules sont résolus à l'aide du code GRAINS3D [224] développé par IFPEN. Ce logiciel permet de traiter des contacts entre des sphères et polyèdres convexes et non convexes, néanmoins, nous ne parlerons ci-après que de particules sphériques.

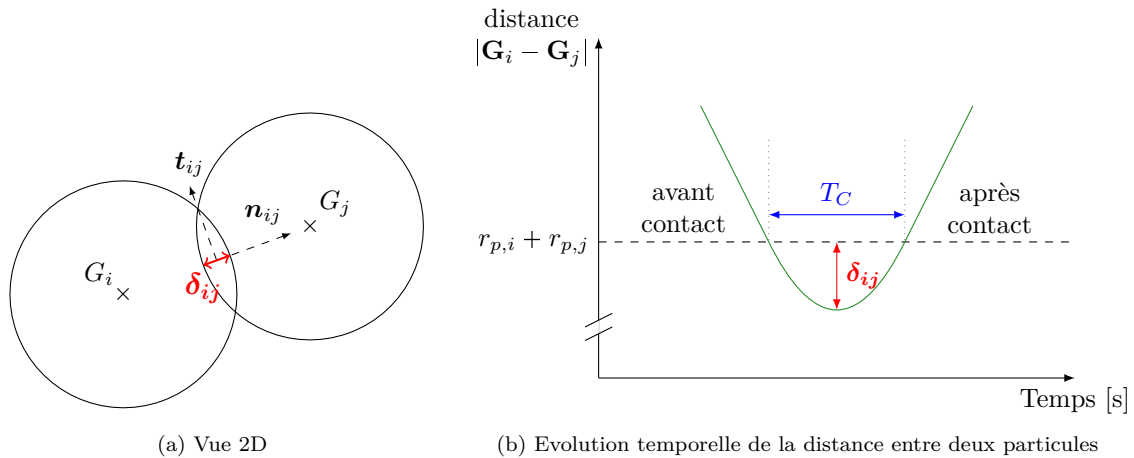


FIGURE II.4 – Contact entre deux particules : G_i et G_j sont les centres de gravité des particules i et j respectivement, \vec{t} et \vec{n} sont les vecteurs unitaires tangentiels et normaux, respectivement, et δ_{ij} est la distance de recouvrement

II – 2.2.2.a Modélisation de la force de contact

Dans le logiciel GRAINS3D, la force de contact entre deux particules i et j qui entrent en collision est modélisée par trois forces : une force de restitution élastique normale, une force de dissipation visqueuse normale et une force de friction tangentielle.

1. Force de restitution élastique :

$$\mathbf{f}_{el} = k_n \delta_{ij} \mathbf{n}_{ij} \quad (\text{II.15})$$

Où k_n est le coefficient de rigidité normal au contact, δ_{ij} la distance de recouvrement entre les particules et \mathbf{n}_{ij} le vecteur normal unitaire porté par la droite entre les centres de gravité des particules.

2. Force dynamique visqueuse :

$$\mathbf{f}_{dn} = -2\gamma_n M_{ij} \mathbf{v}_{rn} \quad (\text{II.16})$$

dans la direction normale, pour prendre en compte l'aspect dissipatif du contact, où γ_n est le coefficient de friction dynamique normal, $M_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ la masse réduite des particules et \mathbf{v}_{rn} la vitesse normale relative entre les particules.

3. Force de friction tangentielle :

$$\mathbf{f}_t = -\min\{\mu_c |\mathbf{f}_{el}|, |\mathbf{f}_{dt}|\} \mathbf{t}_{ij} \quad (\text{II.17})$$

Où \mathbf{f}_{dt} représente la force de friction dissipative :

$$\mathbf{f}_{dt} = -2\gamma_t M_{ij} \mathbf{v}_{rt} \quad (\text{II.18})$$

μ_c est le coefficient de friction dynamique de Coulomb, γ_t le coefficient de friction tangentiel dissipatif et \mathbf{v}_{rt} la vitesse relative tangentielle entre les particules.

La force de collision résultante agissant sur une particule i est la somme des contributions des contacts avec les particules voisines j :

$$\mathbf{f}_{c,i} = \sum_j \mathbf{f}_{c,ij} = \sum_j (\mathbf{f}_{el} + \mathbf{f}_{dn} + \mathbf{f}_t)_{ij} \quad (\text{II.19})$$

Comme mis en évidence par Džiugys [57], l'évolution temporelle de la distance de recouvrement δ peut être obtenue à partir du PFD (II.13). En considérant $t = 0$ l'instant initial du contact, nous avons donc :

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + 2\gamma_n \frac{d\delta}{dt} + \omega_0^2 \delta = 0, \quad \delta(t=0) = 0, \quad \frac{d\delta}{dt}(t=0) \quad (\text{II.20})$$

Avec $\omega_0^2 = 2k_n/m$. Remarquons que, dans cette étude, le coefficient k_n est fixé de telle sorte que le recouvrement maximal entre deux particules soit de 10% de leur rayon :

$$\delta_i^{\max} = \frac{r_{p,i}}{10} \quad (\text{II.21})$$

A partir de l'équation (II.20), nous obtenons la durée de contact :

$$T_C = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_n^2}}, \quad (\text{II.22})$$

ainsi que le coefficient de restitution élastique informant sur le rapport des vitesses pré- et post-collisionnelles :

$$E_n = e^{-\gamma_n T_C} \quad (\text{II.23})$$

Dans le cas de particules sphériques, un couple de résistance au roulement [2] peut être ajouté au couple total résultant des contacts avec les autres particules. Un tel couple est ajouté afin qu'une particule roulant sur une surface plane voit sa vitesse de rotation diminuer en raison du frottement, et ne continue donc pas à rouler éternellement. Ainsi, pour une particule i en contact avec une particule j , le couple résistant s'écrit :

$$\mathbf{M}_{\text{roll},ij} = -k_{ms} |\mathbf{F}_{ij}^n| R_{ij} \frac{\boldsymbol{\omega}_{ij}}{|\boldsymbol{\omega}_{ij}|} \quad (\text{II.24})$$

Néanmoins, ce terme n'est pas pris en compte, *ie.* $k_{ms} = 0$, dans ces travaux car les configurations d'écoulement étudiées ne mettent pas en œuvre de particule roulant sur des plans. Pour plus de détail concernant la résolution du milieu granulaire voir [224].

II – 2.2.2.b Schéma numérique

Différents schémas numériques peuvent être utilisés pour intégrer le système d'équations (II.13) décrivant le déplacement des particules (voir [57]). Les caractéristiques entrant en compte dans le choix du schéma numérique sont (i) la stabilité, (ii) la précision de la solution et (iii) le temps de calcul qui doit être aussi faible que possible. Dans cette étude, un schéma d'intégration d'ordre deux est utilisé car la solution obtenue est jugée suffisamment précise pour un temps de calcul raisonnable. Le schéma choisi, de type "saute-mouton"² de Verlet [57, 130, 165], est utilisé en raison de sa grande stabilité par rapport à un schéma de type Adams-Bashforth [57, 206] par exemple. Nous détaillons ci-après uniquement le déplacement en translation d'une particule, la résolution du mouvement de rotation s'effectue de la même façon. Ainsi, la vitesse de translation d'une particule s'écrit :

$$\mathbf{v}_p(t + \Delta t/2) = \mathbf{v}_p(t - \Delta t/2) + \frac{\sum \mathbf{f}(t)}{m_p} \Delta t \quad (\text{II.25})$$

et la position de la particule est obtenu en résolvant l'équation :

$$\mathbf{x}_p(t + \Delta t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{v}_p(t + \Delta t/2) \Delta t \quad (\text{II.26})$$

Remarquons qu'une forme de "CFL solide", intrinsèque aux modèles de sphères molles, doit être respectée afin de s'assurer qu'une particule ne se déplace pas de plus d'une épaisseur de recouvrement durant un pas de temps :

$$\Delta t_p < \frac{\delta_i^{\max}}{|\mathbf{v}_{p,i}|} \quad (\text{II.27})$$

De plus, pour des raisons de stabilité et de précision, le pas de temps employé pour la résolution du problème granulaire nécessite d'être bien plus petit que le temps de contact entre deux particules [187, 208] :

$$\Delta t_p \leq \frac{T_C}{20} \quad (\text{II.28})$$

II – 2.3 Action du fluide sur les particules

Dans les modèles Euler-Lagrange, l'échange de quantité de mouvement est calculé pour chaque particule en fonction des informations provenant du fluide environnant. Afin de caractériser les régimes d'écoulement dans le domaine, nous nous basons sur la notion de nombre de Reynolds particulaire $\mathcal{R}e_p$:

$$\mathcal{R}e_p = \frac{\rho_f d_p \mathcal{E}_f |\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p|}{\mu_f} \quad (\text{II.29})$$

II – 2.3.1 Origine des forces

Soit \mathbf{f}_{fp} la force modélisant l'action du fluide sur une particule. A l'aide d'un principe de variables localement moyennées, Anderson et Jackson [5] ont montré que cette force pouvait être écrite comme la somme d'une composante due aux variations macroscopiques du tenseur des contraintes dans le fluide $\boldsymbol{\sigma}_f$ et d'une composante \mathbf{f}'_{fp} due aux variations locales du tenseur des contraintes de l'écoulement autour d'une particule :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{fp} &= \int_{S_p} \boldsymbol{\sigma}'_f \mathbf{n} dS \\ &= \int_{S_p} (\boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{\sigma}''_f) \mathbf{n} dS \\ &= \int_{V_p} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f dV + \int_{S_p} \boldsymbol{\sigma}''_f \mathbf{n} dS \\ &= V_p \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + \mathbf{f}'_{fp} \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

2. plus connu sous le nom anglais de "Leapfrog scheme"

Où σ'_f est le tenseur des contraintes ponctuelles, σ_f sa moyenne spatiale et σ''_f leur différence. En rappelant que $\sigma_f = -P_T \mathbf{I}_n + \tau_f$, où \mathbf{I}_n est la matrice identité et τ_f le déviateur du tenseur des contraintes, l'équation (II.30) peut s'écrire :

$$\mathbf{f}_{fp} = -V_p \nabla P_T + V_p \nabla \cdot \tau_f + \mathbf{f}'_{fp} \quad (\text{II.31})$$

En lien avec les deux modèles permettant de décrire le comportement de la phase fluide (voir §II – 2.1, l'action du fluide sur une particule peut être exprimée de deux façons différentes suivant si l'on utilise le modèle A (syst. (II.5)) ou le modèle B (syst. (II.6)). Comme l'ont fait remarqué Feng & Yu [73], en fonction du modèle, la force d'interaction correspondant à chacun des modèles s'écrit :

$$\mathbf{f}_{fp}^A = -V_p \nabla P_T + \mathbf{f}^A \quad (\text{II.32})$$

$$\mathbf{f}_{fp}^B = -V_p \nabla P_0 + \mathbf{f}^B \quad (\text{II.33})$$

où \mathbf{f}^A est la force d'interaction hydrodynamique, souvent représentée par la seule force de traînée, multipliée par la fraction volumique de fluide et ∇P_T le gradient de pression total. Pour le modèle B en revanche, \mathbf{f}^B est la force d'interaction hydrodynamique et le premier terme du membre de droite de l'équation (II.33) correspond au gradient de pression hydrostatique ∇P_0 . Rappelons que le saut de pression total ΔP_T dans un lit de particules peut être décomposé en un terme de pression hydrostatique ΔP_0 , un terme de pression dynamique, également appelé pression piezométrique ou manométrique, Δp , dû au mouvement relatif des particules et du fluide, et un terme de pression dû à la friction du fluide sur les parois ΔP_w qui est souvent négligé face aux deux précédents.

Parallèlement à la relation (II.8) reliant les forces volumiques d'interaction entre les deux modèles, nous avons $\mathbf{f}^B = \mathbf{f}^A / \mathcal{E}_f$. Ainsi, les équations (II.32) et (II.33) peuvent être réécrites de la façon suivante :

$$\mathbf{f}_{fp}^A = -\rho_g V_p \mathbf{g} + V_p \nabla p + \mathcal{E}_f \mathbf{f}_{hd} \quad (\text{II.34})$$

$$\mathbf{f}_{fp}^B = -\rho_g V_p \mathbf{g} + \mathbf{f}_{hd} \quad (\text{II.35})$$

Les différentes composantes qui constituent la force d'interaction hydrodynamique \mathbf{f}_{hd} sont détaillées dans les paragraphes suivants.

II – 2.3.2 Force de traînée

L'expression de la force de traînée exercée par un fluide sur une particule n'est connue de façon analytique que pour une sphère isolée dans un fluide visqueux, *ie.* dont le régime d'écoulement permet de se placer sous l'hypothèse de Stokes [204] :

$$\mathbf{f}_d = 3\pi\mu_f d_p (\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p), \quad \mathcal{R}e_p \ll 1 \quad (\text{II.36})$$

Comme l'expression exacte de la force de traînée n'est connue que dans ces conditions, la force de Stokes peut être utilisée [12, 97] afin de normaliser la force de traînée pour d'autres régimes d'écoulement et/ou en présence de particules voisines : $\mathbf{f}_d(\mathcal{E}_f, \mathcal{R}e_p)$. Ainsi, en considérant la vitesse superficielle $\mathbf{U} = \mathcal{E}_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p)$ nous avons la force de traînée normalisée :

$$\mathbf{F}(\mathcal{E}_f, \mathcal{R}e_p) = \frac{\mathbf{f}_d(\mathcal{E}_f, \mathcal{R}e_p)}{3\pi\mu_f d_p \mathbf{U}} \quad (\text{II.37})$$

où \mathcal{E}_f est la fraction volumique de fluide entourant la particule dont la force de traînée est calculée. Ainsi, pour une particule isolée en régime de Stokes, nous avons bien :

$$\mathbf{F}(1, 0) = 1 \quad (\text{II.38})$$

Concernant une sphère isolée se déplaçant dans un fluide à des Reynolds plus élevés, la force de traînée est donnée par l'expression :

$$\mathbf{f}_d = \frac{1}{2} C_d \rho_f \frac{\pi d_p^2}{4} (\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p)^2 \quad (\text{II.39})$$

Où le coefficient de traînée C_d est connu de façon empirique pour des écoulements à haut Reynolds, parfois appelé régime de Newton :

$$C_d = 0.44, \quad \mathcal{Re}_p > 1000 \quad (\text{II.40})$$

Ainsi, en utilisant le formalisme de normalisation présenté dans l'équation (II.37), la force de traînée normalisée sur une particule isolée peut être ré-écrite en faisant apparaître ce coefficient de traînée :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(1, \mathcal{Re}_p) &= \frac{\mathbf{f}_d}{3\pi\mu_f d_p \mathbf{U}} \\ &= \frac{C_d \rho_f \mathbf{U} d_p}{24\mu_f} \\ &= \frac{C_d \mathcal{Re}_p}{24} \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Ci-après, nous donnons tout d'abord quelques précisions sur le coefficient de traînée, puis nous détaillons les deux catégories de formulation communément employées pour prendre en compte l'effet de la présence de particules voisines sur la force de traînée exercée sur une particule dans un fluide en mouvement : les formulations de type Wen & Yu et les formulations de type Ergun.

II – 2.3.2.a Coefficient de traînée

Pour un régime compris entre le régime de Stokes et le régime de Newton, parfois appelé régime de Allen ou régime de transition, la force de traînée exercée sur une particule isolée n'est pas une donnée facile d'accès. En effet, la couche limite autour d'une particule non-profilée se détachant périodiquement de chaque côté pour former des tourbillons dans le sillage (phénomène de lâché tourbillonnaire de Von Karman), le coefficient de traînée n'est pas évident à formuler. Comme le rappelle Di Felice [52], des propositions furent faites pour écrire le coefficient de traînée dans un régime de transition comme étant une fonction du C_D connue analytiquement dans un régime de Stokes, ($C_d = 24/\mathcal{Re}_p$) et empiriquement pour un régime inertiel ($C_D = 0.44$) :

$$C_D = \left(\left(\frac{24}{\mathcal{Re}_p} \right)^{1/\alpha} + 0.44^{1/\alpha} \right)^\alpha \quad (\text{II.42})$$

avec α approximativement égal à 2. Cette expression du coefficient de traînée est proche de celle proposée par Dallavalle [40] :

$$C_D = \left(0.63 + \frac{4.8}{\sqrt{\mathcal{Re}_p}} \right)^2 \quad (\text{II.43})$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$C_D = \left(\left(\frac{23.04}{\mathcal{Re}_p} \right)^{1/2} + 0.397^{1/2} \right)^2 \quad (\text{II.44})$$

En s'inspirant de Beetstra [12] et en utilisant le formalisme de l'équation (II.41), le tableau II.1 recense les autres expressions les plus communément rencontrées dans la littérature pour exprimer la force de traînée pour une particule isolée dans un régime de transition. à partir de $\mathbf{F}(1, \mathcal{Re}_p)$, le coefficient de traînée s'obtient bien sûr en réarrangeant l'équation (II.41). Ces différentes formulations de C_D sont tracées en fonction de \mathcal{Re}_p sur la figure II.5.

Remarque 5 Pour $\mathcal{Re}_p \approx \mathcal{O}(10^5)$, un saut est observé dans l'évolution de la force de traînée en fonction du Reynolds, cet intervalle de Reynolds est appelé *transition critique*. D'après les relevés expérimentaux, la force de traînée semble à nouveau augmenter linéairement en fonction du régime d'écoulement une fois cette zone de transition critique passée.

TABLE II.1 – Formulations de force de traînée rencontrées dans la littérature pour un régime de transition

Schiller & Nauman (1935) [197]	$F(1, \mathcal{R}e_p) = \begin{cases} 1 + 0.15\mathcal{R}e_p^{0.687} \\ \frac{0.44}{24}\mathcal{R}e_p \end{cases}$
Dalla & Joseph (1948) [40]	$F(1, \mathcal{R}e_p) = 1 + 0.2624\mathcal{R}e_p^{0.5} + \frac{0.413}{24}\mathcal{R}e_p$
White (1974) [226]	$F(1, \mathcal{R}e_p) = 1 + \frac{0.25\mathcal{R}e_p^{0.5}}{1 + \mathcal{R}e_p^{-0.5}} + \frac{0.4}{24}\mathcal{R}e_p$
Turton & Levenspiel (1986) [214]	$F(1, \mathcal{R}e_p) = 1 + 0.173\mathcal{R}e_p^{0.657} + \frac{0.413}{24} \left(\frac{\mathcal{R}e_p}{1 + 16300\mathcal{R}e_p^{-1.09}} \right)$

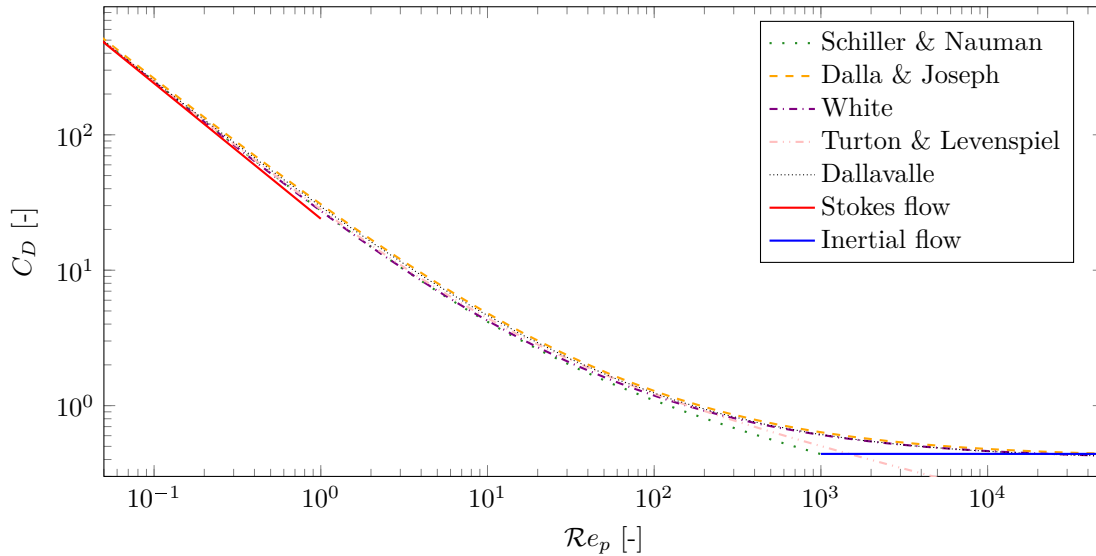


FIGURE II.5 – Evolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds pour une particule isolée dans un régime de transition

II – 2.3.2.b Formulation de type Wen & Yu

Pour les formulations de type “Wen & Yu”, la force de traînée s’exerçant sur une particule entourée d’autres particules est obtenue en multipliant la force de traînée sur un élément isolé par une puissance de la fraction volumique de fluide environnante afin de prendre en compte l’influence des particules voisines.

$$F(\mathcal{E}_f, \mathcal{R}e_p) = F(1, \mathcal{R}e_p)\mathcal{E}_f^{-\gamma} \quad (\text{II.45})$$

Pour des systèmes dilués, ce type d’approche offre une bonne approximation de la force de traînée pour tous les régimes d’écoulement car la force de traînée sur une particule isolée est connue pour différents Reynolds (voir paragraphe précédent). En revanche, ce genre de corrélation n’est généralement valable que pour des écoulements fluide-particules dilués et moyennement dilués ($\mathcal{E}_f > 0.8$).

Comme le résume Di Felice [52], le fait que γ soit presque constant pour des régimes de Stokes et inertiels a mené de nombreuses équipes travaillant sur le sujet à penser que ce coefficient était indépendant du nombre de Reynolds [225, 119, 120, 186]. Ainsi les valeurs proposées pour γ sont généralement comprises entre 3.6 et 3.8, comme par exemple la célèbre formulation de Wen & Yu [225] pour laquelle $\gamma = 3.7$. Puis les travaux de Khan & Richardson [118] mirent à mal cette hypothèse de γ constant, notamment dans des régimes d’écoulements intermédiaires. Cela fut ensuite confirmé par Di

Felice [51] qui proposa une expression de γ tenant compte du Reynolds particulaire :

$$\gamma = 3.7 - 0.65 \exp \left[\frac{-(1.5 - \log \mathcal{R}e_p)^2}{2} \right] \quad (\text{II.46})$$

Notons que la combinaison des équations (II.45) et (II.46) est fréquemment employée pour décrire la force de traînée sur une particule pour une plage de \mathcal{E}_f allant du packing maximal à la particule isolée [87]. Plus de détails concernant l'extraction de lois de traînée sont donnés dans le chapitre VI.

II – 2.3.2.c Formulation de type Ergun

Les formulations que nous appelons de “type Ergun” sont basées sur l'étude du saut de pression à travers un milieu poreux et la contribution des effets visqueux et inertiels (voir §I – 3.1). Ainsi, la force de traînée normalisée peut s'écrire comme la somme d'un terme indépendant et d'un terme linéairement dépendant du nombre de Reynolds :

$$\mathbf{F}(\mathcal{E}_f, \mathcal{R}e_p) = \mathbf{F}(\mathcal{E}_f, 0) + \alpha(\mathcal{E}_f) \mathcal{R}e_p \quad (\text{II.47})$$

Comme nous l'avons vu précédemment, (§I – 3.1), les premières expressions proposées [15, 123, 25] furent de la forme :

$$\mathbf{F}(\mathcal{E}_f, 0) = \frac{a(1 - \mathcal{E}_f)}{18\mathcal{E}_f^2}, \quad \alpha(\mathcal{E}_f) = \frac{b}{18\mathcal{E}_f^2} \quad (\text{II.48})$$

Après 640 différentes expériences, Ergun [67] obtient $a = 150$ et $b = 1,75$, la combinaison de ces valeurs aux équations (II.47)-(II.48) est connue dans la littérature comme la corrélation d'Ergun. Plus tard, la différence fut faite entre différents régimes d'écoulement [72], en particulier :

$$\bullet \mathcal{R}e_p < 2.3 : \quad a = 192, \quad b = 0 \quad (\text{II.49})$$

$$\bullet 5 < \mathcal{R}e_p < 80 : \quad a = 182, \quad b = 1.92 \quad (\text{II.50})$$

$$\bullet 180 < \mathcal{R}e_p : \quad a = 225, \quad b = 1.61 \quad (\text{II.51})$$

Plus récemment, trois équipes [96, 218, 144] ont trouvé que, pour des lits denses à faible nombre de Reynolds, les meilleurs résultats étaient obtenus avec $a = 180$, ce qui correspond à l'équation de Carman [28]. Ergun [67] a quant à lui trouvé que la modification suivante de l'équation de Carman permettait d'obtenir de meilleures correspondances avec les expériences pour une valeur arbitraire de fraction volumique :

$$\mathbf{F}(\mathcal{E}_f, 0) = \frac{180(1 - \mathcal{E}_f)}{18\mathcal{E}_f^2} + \mathcal{E}_f^2(1 + 1.5\sqrt{1 - \mathcal{E}_f}) \quad (\text{II.52})$$

Koch, Hill and Ladd [96] ont, pour une plage de $\mathcal{R}e_p$ allant de 40 à 120, suggéré une expression de $\alpha(\mathcal{E}_f)$ de la forme :

$$\alpha(\mathcal{E}_f) = 0.03365\mathcal{E}_f + 0.106(1 - \mathcal{E}_f)\mathcal{E}_f + \frac{0.0116}{\mathcal{E}_f^4} \quad (\text{II.53})$$

Ce qui a servi de base à Beetstra [12], qui trouva de meilleurs résultats pour $\mathcal{R}e_p < 200$ en ajoutant un terme à l'équation (II.53) :

$$\alpha(\mathcal{E}_f) = 0.03365\mathcal{E}_f + 0.106(1 - \mathcal{E}_f)\mathcal{E}_f + \frac{0.0116}{\mathcal{E}_f^4} + \frac{6(1 - \mathcal{E}_f) - 10(1 - \mathcal{E}_f)^2}{\mathcal{E}_f^2 \mathcal{R}e_p} \quad (\text{II.54})$$

Cette même équipe [12] proposa une autre formulation pour une plage de porosité de $0.4 < \mathcal{E}_f < 0,9$ et de Reynolds $20 < \mathcal{R}e_p < 1000$. Celle ci est basée sur l'équation (II.52) et sur des constantes introduites par Turton et Levenspiel [214] :

$$\mathbf{F}(\mathcal{E}_f, \mathcal{R}e_p) = \frac{10(1 - \mathcal{E}_f)}{\mathcal{E}_f^2} + \mathcal{E}_f^2 \left(1 + 1.5\sqrt{1 - \mathcal{E}_f} \right) + \frac{0.413\mathcal{R}e_p}{24\mathcal{E}_f^2} \left[\frac{\mathcal{E}_f^{-1} + 3\mathcal{E}_f(1 - \mathcal{E}_f) + 8.4\mathcal{R}e_p^{-0.343}}{1 + 10^{3(1 - \mathcal{E}_f)} \mathcal{R}e_p^{-(1 + 4(1 - \mathcal{E}_f))/2}} \right] \quad (\text{II.55})$$

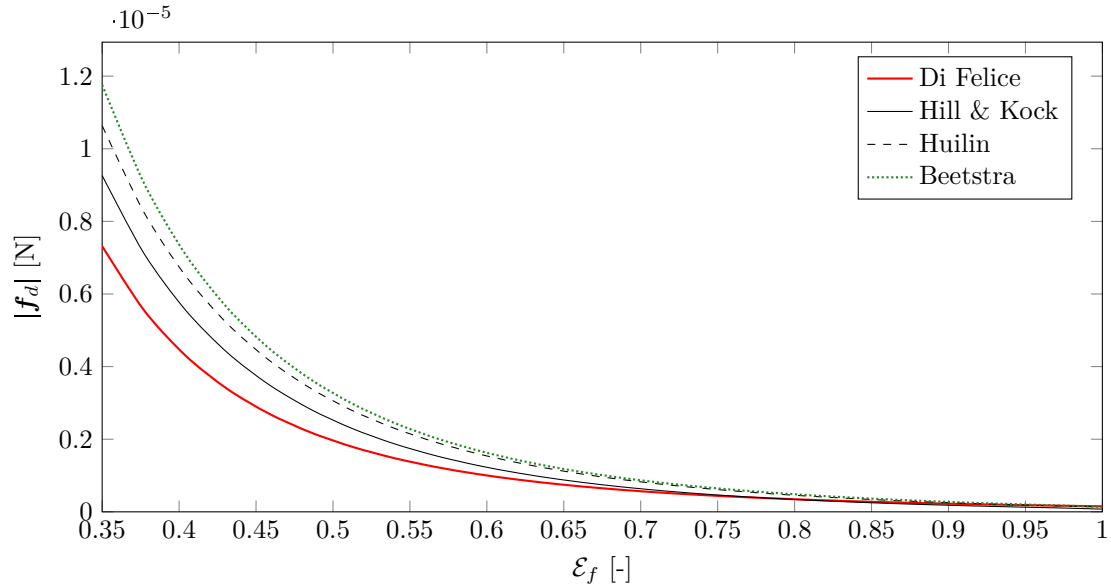


FIGURE II.6 – Evolution de la force de traînée en fonction de la fraction volumique de fluide \mathcal{E}_f

Ces différentes formulations de la force de traînée sont tracées sur la figure II.6 en fonction de \mathcal{E}_f afin de montrer les écarts non négligeables entre elles.

Ce tracé met également en évidence les fortes variations de la force de traînée en fonction de \mathcal{E}_f pour des compacités proches du packing maximal. En effet, la valeur de $|\mathbf{f}_d|$ varie du simple au double, voir même du simple au triple suivant les formulations, pour $0.35 < \mathcal{E}_f < 0.45$. Cela met en évidence la nécessité de calculer la fraction volumique du lit avec précision afin que la force de traînée appliquée aux particules soit la plus proche possible de la réalité. Or, comme nous le présentons en partie II – 2.4, les différentes méthodes de calcul de la fraction volumique de fluide dans le domaine peuvent mener à de larges écarts une fois la valeur \mathcal{E}_f interpolée au centre de gravité de la particule.

II – 2.3.2.d Commentaires sur les forces de traînée

Tout d’abord, en réutilisant la notion de coefficient d’échange de quantité de mouvement introduit dans le chapitre précédent (voir équation (I.23)) la force de traînée non normalisée peut s’écrire :

$$\mathbf{f}_d = V_p \frac{\beta}{1 - \mathcal{E}_f} (\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p) \quad (\text{II.56})$$

Rappelons que dans le cas de la corrélation d’Ergun, nous avons :

$$\beta_{Ergun} = 150 \frac{(1 - \mathcal{E}_f)^2 \mu_f}{\mathcal{E}_f d_p^2} + 1.75 \frac{(1 - \mathcal{E}_f) \rho_f |\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p|}{d_p} \quad (\text{II.57})$$

Dans le cas de la corrélation de Wen & Yu en revanche, le coefficient d’échange de quantité de mouvement s’écrit :

$$\beta_{Wen\&Yu} = \frac{3}{4} \frac{C_d \rho_f \mathcal{E}_f (1 - \mathcal{E}_f) |\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p|}{d_p} \mathcal{E}_f^{-2.7} \quad (\text{II.58})$$

Ensuite, Il est important de remarquer que ces deux types de corrélation ne permettent pas de simuler les mêmes systèmes. Les relations de type Wen & Yu (II.45) sont valides pour des systèmes dilués tandis que les relations de type Ergun (II.47) conviennent mieux aux systèmes denses. Ainsi, Gidaspow [87] proposa d’utiliser les relations de type Wen & Yu lorsque $\mathcal{E}_f > 0.8$ et les relations de type Ergun si la densité de particules est plus élevée. L’utilisation d’une telle loi de traînée entraîne quelques inconvénients, en effet cela implique une discontinuité en $\mathcal{E}_f = 0.8$, de plus la validité des corrélations de type Ergun n’est pas avérée pour des porosités aussi élevées que $\mathcal{E}_f = 0.8$. Pour améliorer

la transition entre les corrélations de type Ergun et Wen & Yu, Huillin & Gidaspow [107] ont introduit une fonction de lissage entre les deux corrélations :

$$\varphi_{gs} = \frac{\arctan[150 * 1.75(0.2 - (1 - \mathcal{E}_f))]}{\pi} + 0.5 \quad (\text{II.59})$$

Le coefficient d'échange de quantité de mouvement devient alors :

$$\beta_{\text{Huillin}} = (1 - \varphi_{gs})\beta_{\text{Ergun}} + \varphi_{gs}\beta_{\text{Wen\&Yu}} \quad (\text{II.60})$$

II – 2.3.2.e Effet de la polydispersité

L'approche la plus communément rencontrée pour modéliser de larges systèmes polydisperses consiste à considérer une particule d'une espèce i de diamètre d_i comme faisant partie d'un système monodisperse de porosité globale équivalente, sans se soucier des particules des autres espèces (voir par exemple [87, 103]). Ce type d'approximation peut mener à de grandes différences sur l'évaluation de la force de traînée. Par exemple, Beetstra *et al.* [14] ont obtenu un rapport de 5 entre les corrélations de force de traînée utilisant la compacité globale équivalente et les forces de traînée obtenues par DNS lattice-Boltzmann pour des rapports de diamètre de 1 : 4.

Des approches plus détaillées ont également été proposées, par exemple Patwardhan & Tien [170] se sont basés sur le rapport de la taille des pores sur le diamètre des particules afin d'introduire la notion de fraction volumique effective pour chacune des espèces de particule. L'idée émane du fait que, dans le cas d'une configuration bidisperse par exemple, les petites (grandes) particules sont comprises dans un milieu d'une plus grande (petite) porosité car les pores qui les entourent sont plus grandes (petites) que leur diamètre. Pour cela, chaque classe de particule est caractérisée par son diamètre et son nombre de particules. La polydispersité peut ainsi être exprimée à l'aide des nombres adimensionnels x_i et y_i qui contiennent la même information :

$$x_i = \frac{\phi_i}{\phi}, \quad y_i = \frac{d_i}{\langle d \rangle} \quad (\text{II.61})$$

Où $\phi_i = N_i \pi d_i^3 / 6V$ est la concentration de l'espèce i , et $\langle d \rangle$ est le diamètre moyen de Sauter, définit par :

$$\langle d \rangle = \frac{\sum_{i=1}^c N_i d_i^3}{\sum_{i=1}^c N_i d_i^2} \quad (\text{II.62})$$

Où c est le nombre d'espèces présentes dans le système et le nombre adimensionnel y_i est appelé indice de polydispersité.

En se basant sur l'approximation de Carman-Kozeny et sur des simulations LBM, Van Der Hoef *et al.* proposèrent une nouvelle expression pour de faibles nombres de Reynolds [218, 14] puis pour des Reynolds plus élevés [12, 13] avec des rapports de diamètres allant jusqu'à 1 : 4 :

$$\mathbf{f}_{\text{drag},i}^{\text{poly}} = ((1 - \phi)y_i + \phi y_i^2 + 0.064(1 - \phi)y_i^3) \mathbf{f}_{\text{drag},i}^{\text{mono}} \quad (\text{II.63})$$

Notons que l'introduction de puissances 2 et 3 de l'indice de polydispersité a également été proposée par Okayama *et al.* [164] sur la base de comparaison expérimentale avec un lit fluidisé bidisperse. Cello, Di Renzo & Di Maio [29] ont récemment proposé un modèle semi-empirique de force de traînée pour des systèmes polydisperses.

$$\mathbf{f}_{\text{drag},i}^{\text{poly}} = 3\pi\mu_f d_i (\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p) \alpha_i \bar{f} \quad (\text{II.64})$$

Avec :

$$\begin{aligned}\bar{f} &= K_1 + K_2 \mathcal{E}_f^4 + K_3 (1 - \mathcal{E}_f^4) \\ K_0 &= \frac{1 - \mathcal{E}_f}{1 + 3\mathcal{E}_f}, \quad K_1 = \frac{1 + 128K_0 + 715K_0^2}{\mathcal{E}_f^2(1 + 49.5K_0)}, \\ K_2 &= \frac{1 + 0.13\overline{\mathcal{R}e_p} + 6.66 \times 10^{-4} \overline{\mathcal{R}e_p}^2}{1 + 3.42 \times 10^{-2} \overline{\mathcal{R}e_p} + 6.92 \times 10^{-6} \overline{\mathcal{R}e_p}^2} - 1, \\ K_3 &= \left(\frac{2\overline{\mathcal{R}e_p}^2}{1 + \overline{\mathcal{R}e_p}} \right) \left(\frac{-410\mathcal{E}_f + 9.2 \times 10^7 \overline{\mathcal{R}e_p} K_0^{20} + 1900\mathcal{E}_f^2 - 6.6 \times 10^{-2} \overline{\mathcal{R}e_p}}{6600\mathcal{E}_f + 4.92 \times 10^{-4} \overline{\mathcal{R}e_p} - 43000\mathcal{E}_f^2 - 1.31 \times 10^{-4} \overline{\mathcal{R}e_p}^2 + 7.38 \times 10^4 \mathcal{E}_f^3} \right), \\ \alpha_i &= y_i + \frac{1 - \mathcal{E}_f}{\mathcal{E}_f} \left(\frac{1 - \mathcal{E}_f - 0.27}{1 - 0.27} \right) \frac{y_i^2 - y_i}{\sum_{j=1}^{N_c} x_j y_j}\end{aligned}$$

Où N_c est le nombre de classes de particule dans le système et $\overline{\mathcal{R}e_p}$ est le nombre de Reynolds particulaire calculé à l'aide du diamètre de Sauter :

$$\overline{\mathcal{R}e_p} = \frac{\rho_f \langle d \rangle \mathcal{E}_f (\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p)}{\mu_f} \quad (\text{II.65})$$

Cette formulation fut validée sur une large plage de nombre de Reynolds et de concentration de particules grâce à des résultats expérimentaux et des résultats de simulations LBM réalisées par Van Der Hoef *et al.* [218]. Di Renzo *et al.* [55] étudièrent les phénomènes d'inversion et de ségrégation de classe à l'aide de cette précédente formulation implémentée dans leur modèle DEM-CFD. Ils reproduirent numériquement les expériences de Epstein & LeClair [64], Moritomi *et al.* [157] et Matsuura & Akehata [149] afin de valider leur modèle. A partir de ces simulations, ils analysèrent de façon assez fine l'évolution du front de séparation entre les deux classes de particule en fonction de la vitesse d'injection dans le domaine, tout comme l'avaient précédemment fait Moritomi *et al.* [157] de façon expérimentale.

II – 2.3.3 Force de masse ajoutée

La force de masse ajoutée, également appelée force de masse virtuelle ou force de masse apparente, est une action liant l'accélération du fluide à la force résultante sur l'objet. Tout corps accélérant dans un fluide est soumis à une force de masse ajoutée, mais comme celle-ci dépend de la densité du fluide, son effet est souvent négligé lorsque la densité de l'objet est nettement plus grande que celle du fluide. En revanche, lorsque les densités sont proches, et encore plus lorsque la densité de l'objet est plus faible que celle du fluide, le terme de masse ajoutée peut être plus grand que la masse physique de l'objet.

Un objet et le fluide environnant ne pouvant pas occuper le même espace, lorsque le solide se déplace, il entraîne avec lui le fluide qui l'entoure. Soit $\sum \mathbf{F}$ la somme des forces exercées sur une particule exceptée la force de masse ajoutée, le déplacement d'une particule est alors décrit par :

$$m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \sum \mathbf{F} + C_{vm} \rho_f V_p \left(\frac{d\mathbf{u}_f}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \right) + \rho_f V_p \frac{d\mathbf{u}_f}{dt} \quad (\text{II.66})$$

Cette expression fait apparaître le terme de masse ajoutée que l'on peut passer devant le terme d'accélération de la particule. L'équation précédente peut ainsi se ré-écrire, en remplaçant la dérivée totale du fluide en description lagrangienne :

$$(m_p + C_{vm} \rho_f V_p) \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \sum \mathbf{F} + (1 + C_{vm}) \rho_f V_p \left(\frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \mathbf{u}_f \nabla \mathbf{u}_f \right) \quad (\text{II.67})$$

Où C_{vm} est le coefficient de masse ajoutée. Oldar & Hamilton [161, 160] proposèrent une expression de C_{vm} dépendant de l'accélération :

$$C_{vm} = \frac{1}{2} \left(2.1 - \frac{0.132}{0.12 + A_c^2} \right) \quad (\text{II.68})$$

avec A_c le nombre d'accélération :

$$A_c = \frac{(\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p)^2}{d_p \left| \frac{d\mathbf{u}_f}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \right|} \quad (\text{II.69})$$

Plus récemment, Michaelides et Roig [154] suggérèrent que le coefficient de masse ajoutée ne dépend pas de l'accélération relative de la particule mais uniquement de la géométrie de l'objet immergé. Pour une sphère, il proposèrent ainsi :

$$C_{vm} = \frac{1}{2} \quad (\text{II.70})$$

A l'heure actuelle, cette force n'est pas prise en compte dans le modèle DEM-CFD implémenté, ce qui contraint l'étude à des systèmes composés de particules dont la densité est au moins un ordre de grandeur plus importante que la densité du fluide.

II – 2.3.4 Force de Basset

La force de Basset décrit la résistance engendrée par la couche limite d'un corps immergé dans un fluide lorsqu'il ralentit ou accélère. Ce terme, qui modélise les effets visqueux, représente le retard dans l'établissement de la couche limite lorsque la vitesse de l'objet change dans le temps. Cette force, également appelée force d'histoire ou force de Boussinesq-Basset, se présente sous la forme suivante à petit \mathcal{Re}_p [182, 153, 245] :

$$\mathbf{F}_{\text{Basset}} = \frac{3}{2} d_p^2 \sqrt{\pi \rho_f \mu_f} \left[\int_0^t \frac{d\mathbf{u}_f}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} dt' + \frac{(\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p)_0}{\sqrt{t}} \right] \quad (\text{II.71})$$

Où $(\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p)_0$ est la différence des vitesses initiales.

Comme le mentionnent Hjelmfel & Mockros [98] la force de Basset devient négligeable pour de grands rapports de densité solide / fluide. Dans cette étude, la force de Basset n'est pas prise en compte dans le bilan de quantité de mouvement.

II – 2.3.5 Force de portance

La force de portance s'exerçant sur une particule est due aux contraintes exercées par le gradient de vitesse du fluide sur la surface de l'objet. Elle est couramment décomposée en deux forces, celle de Saffman, \mathbf{f}_{LS} , et celle de Magnus, \mathbf{f}_{LM} .

$$\mathbf{f}_{\text{Lift}} = \mathbf{f}_{LS} + \mathbf{f}_{LM} \quad (\text{II.72})$$

II – 2.3.5.a Force de Saffman

La force de Saffman est générée par la distribution de pression engendrée par le gradient de vitesse du fluide. Elle fut initialement mise en évidence et formulée par Saffman [191, 192] pour de faibles nombres de Reynolds et de faibles taux de cisaillement :

$$\mathbf{F}_{LS} = 1.615 \sqrt{\rho_f \mu_f} d_p^2 (\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p) \sqrt{\left| \frac{dU}{dy} \right|} \text{sign} \left(\frac{d\mathbf{u}_f}{dy} \right), \quad \mathcal{Re}_p \ll 1 \quad (\text{II.73})$$

avec les conditions restrictives sur le Reynolds de cisaillement pour un fluide s'écoulant dans un espace à deux dimensions et donc pour un cisaillement dans une seule direction :

$$\mathcal{Re}_S = \frac{\rho_f d_p^2 G}{\mu_f} \ll 1, \quad \text{Où} \quad G = \left| \frac{d\mathbf{u}_f}{dy} \right| \text{ est le taux de cisaillement} \quad (\text{II.74})$$

et

$$\mathcal{Re}_p \ll \sqrt{\mathcal{Re}_G} \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{\sqrt{\mathcal{Re}_G}}{\mathcal{Re}_p} \gg 1 \quad (\text{II.75})$$

Dandy & Dwyer [42] ont trouvé que l'expression proposée par Saffman était valide pour des Reynolds plus grands, jusqu'à $\mathcal{Re}_p = 0.1$, et des λ plus petits, jusqu'à $\lambda = 0.224$. McLaughlin [151] trouva quant à lui que la force de portance diminuait rapidement lorsque λ diminuait. En se basant sur ces études, Mei [152] proposa une corrélation valable pour des Reynolds allant jusqu'à $\mathcal{Re}_p = 100$ et une plus large plage de λ :

$$\mathbf{F}_{LS} = 1.615d_p^2 \sqrt{\frac{\rho_f \mu_f}{|\boldsymbol{\omega}_f|}} C_{LS} (\mathbf{u}_f - \mathbf{v}_p) \times \boldsymbol{\omega}_f \quad (\text{II.76})$$

Avec la rotation du fluide donnée par $\boldsymbol{\omega}_f = 0.5\nabla \times \mathbf{u}_f$ et C_{LS} le coefficient de portance de Saffman :

$$C_{LS} = (1 - 0.3314\sqrt{\alpha}) \exp\left(-\frac{\mathcal{Re}_p}{10}\right) + 0.3314\sqrt{\alpha}, \quad \mathcal{Re}_p \leq 40 \quad (\text{II.77})$$

$$= 0.0524\sqrt{\alpha \mathcal{Re}_p}, \quad \mathcal{Re}_p > 40 \quad (\text{II.78})$$

Où le coefficient α est donné par :

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{Re}_S}{\mathcal{Re}_p} \quad (\text{II.79})$$

Et où le Reynolds de cisaillement, cette fois-ci en trois dimensions, est :

$$\mathcal{Re}_S = \frac{\rho_f d_p^2 |\boldsymbol{\omega}_f|}{\mu_f} \quad (\text{II.80})$$

II – 2.3.5.b Force de Magnus

La force de Magnus [143] est engendrée par le différentiel de pression sur la surface de la particule résultant du différentiel de vitesse de rotation. Cette force est donc nulle si la rotation de la particule est égale à la rotation locale du fluide. Son expression est :

$$F_{LM} = \frac{1}{2} \frac{\pi d_p^2}{4} \rho_f C_{LM} |\mathbf{u}_{rel}| \frac{\mathbf{u}_{rel} \times \boldsymbol{\omega}_{rel}}{|\boldsymbol{\omega}_{rel}|} \quad (\text{II.81})$$

Où $\boldsymbol{\omega}_{rel}$ représente la rotation relative :

$$\boldsymbol{\omega}_{rel} = \boldsymbol{\omega}_f - \boldsymbol{\omega}_p \quad (\text{II.82})$$

$$= (0.5\nabla \times \mathbf{u}_f) - \boldsymbol{\omega}_p \quad (\text{II.83})$$

Et où le coefficient de portance de Magnus C_{LM} est connu analytiquement pour de faibles nombres de Reynolds suite aux travaux de Rubinow & Keller [190] pour une sphère en rotation dans un fluide au repos avec $\mathcal{Re}_p < 1$. Puis la relation de Rubinow & Keller fut améliorée par Crowe [38] pour inclure le déplacement relatif de la particule par rapport au fluide, toujours pour de petits Reynolds :

$$C_{LM} = \frac{\mathcal{Re}_R}{\mathcal{Re}_p} = \frac{d_p |\boldsymbol{\omega}_{rel}|}{|\mathbf{u}_{rel}|}, \quad \mathcal{Re}_p < 1 \quad (\text{II.84})$$

Avec le nombre de Reynolds de la particule en rotation :

$$\mathcal{Re}_R = \frac{\rho_f d_p^2 |\boldsymbol{\omega}_{rel}|}{\mu_f} \quad (\text{II.85})$$

La détermination d'un coefficient de portance pour des \mathcal{Re}_p plus grands nécessite des informations expérimentales. Par exemple, Oesterlé *et al.* [163] ont mesuré la portance de Magnus sur une sphère en rotation pour $10 < \mathcal{Re}_p < 60$ et ont proposé l'expression :

$$C_{LM} = (0.35 \pm 0.1) \frac{d_p |\boldsymbol{\omega}_p|}{|\mathbf{v}_p|} \quad (\text{II.86})$$

Puis ils ont introduit la corrélation suivante basée sur des données disponibles dans la littérature ainsi que des expériences additionnelles pour $\mathcal{Re}_p < 140$ et en prenant en compte le déplacement relatif de la particule par rapport au fluide [162] :

$$C_{LM} = 0.45 + \left(\frac{\mathcal{Re}_R}{\mathcal{Re}_p} - 0.45 \right) \exp(-0.05684 \mathcal{Re}_R^{0.4} \mathcal{Re}_p^{0.3}), \quad \mathcal{Re}_p < 140 \quad (\text{II.87})$$

Tsuji [212] proposèrent eux aussi une expression du coefficient de portance suite à leurs expériences pour $550 < \mathcal{R}e_p < 1600$

$$C_{LM} = (0.2 \pm 0.05) \frac{d_p |\boldsymbol{\omega}_p|}{|\mathbf{v}_p|} \quad (\text{II.88})$$

Notons également les travaux de Lun & liu [142] qui proposèrent une corrélation valable pour une plus large plage de Reynolds :

$$C_{LM} = \frac{d_p |\boldsymbol{\omega}_p|}{|\mathbf{v}_p|}, \quad \mathcal{R}e_p \leq 1 \quad (\text{II.89})$$

$$= \frac{d_p |\boldsymbol{\omega}_p|}{|\mathbf{v}_p|} (0.178 + 0.822 \mathcal{R}e_p^{-0.522}), \quad 1 < \mathcal{R}e_p < 1000 \quad (\text{II.90})$$

Remarque 6 *Les forces de Saffman et de Magnus ont été implémentées dans le modèle DEM-CFD et leur effet sur la dynamique globale semble peu significatif. De plus, étant donné que ces corrélations furent toutes deux initialement obtenues pour des particules isolées, et que leur validité n'a jamais été prouvée pour des systèmes denses, nous préférons ne pas utiliser ces termes.*

II – 2.3.6 Moment hydrodynamique

Une particule en rotation dans un fluide est soumise à un couple hydrodynamique provenant des interactions visqueuses entre la surface de la particule et le fluide qui l'entoure. Ce moment hydrodynamique fut d'abord dérivé par Lamb [129] puis Rubinow & Keller [190] dans le cas d'un fluide au repos et d'un faible nombre de Reynolds. Puis les travaux numériques de Dennis *et al.* [47], basés sur les relevés expérimentaux de Sawatski [193] ont permis d'étendre cette expression à de plus grands nombres de Reynolds. Ainsi, pour une sphère en rotation dans un fluide en mouvement, le moment hydrodynamique est :

$$\mathbf{T} = \frac{\rho_f d_p^5}{64} C_R |\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}| \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}} \quad (\text{II.91})$$

Avec C_R le coefficient de rotation :

$$C_R = \frac{64\pi}{\mathcal{R}e_R}, \quad \mathcal{R}e_R < 32 \quad (\text{II.92})$$

$$= \frac{12.9}{\sqrt{\mathcal{R}e_R}} + \frac{128.4}{\mathcal{R}e_R}, \quad 32 \leq \mathcal{R}e_R < 1000 \quad (\text{II.93})$$

$$(\text{II.94})$$

Où $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}$ est la vitesse de rotation relative, voir eq (II.82).

Remarque 7 *De la même manière que les forces de Saffman et de Magnus, le moment hydrodynamique a été implémenté dans le modèle mais la validité de l'équation (II.91) est discutable étant donné la configuration diluée dans laquelle a été dérivée la corrélation. De même, son effet sur la dynamique globale du système reste peu significatif.*

II – 2.3.7 Bilan de l'action du fluide sur les particules

Pour résumer, l'action du fluide prise en compte dans le modèle DEM-CFD se limite à la force de traînée et à la poussée d'Archimède. Ainsi, l'équation (II.35) s'écrit :

$$\mathbf{f}_{fp}^B = -V_p \rho_f \mathbf{g} + \mathbf{f}_d + \cancel{\mathbf{f}_{\text{Lift}}} + \cancel{\mathbf{f}_{\text{Basset}}} + \cancel{\mathbf{f}_{\text{VM}}} \quad (\text{II.95})$$

En effet, l'expression de la poussée d'Archimède est toujours la même, quelque soit la concentration de particules environnante. La force de traînée s'exerçant sur une particule est quant à elle bien décrite pour des concentrations allant de la particule isolée au packing maximum, et pour des écoulements allant du régime de Stokes au régime inertiel. De plus, dans les configurations étudiées, la force de traînée est majoritairement dans le sens contraire du poids des particules, elle constitue donc la principale force hydrodynamique engendrant la fluidisation du lit.

Les autres forces hydrodynamiques ne sont quant à elles pas prises en compte ou pas “activées” dans le modèle implémenté. En effet, il est communément admis [98] que les forces de Basset et de masse ajoutée sont négligeable par rapport à la force de traînée pour des rapports de densité solide / fluide importants. Or comme les systèmes étudiés ici sont composés de particules de densité $\rho_p \geq 1500 \text{ kg.m}^{-3}$ majoritairement fluidisées par de l’air, ces forces peuvent ainsi être négligées. Néanmoins, nous reconnaissons qu’il serait intéressant de prendre en compte le terme de masse ajoutée pour pouvoir simuler des systèmes avec de faibles rapports ρ_p/ρ_f .

Concernant les forces de portance de Saffman et de Magnus, la validité des expressions présentées précédemment n’est assurée que dans le cas de particules isolées. A notre connaissance, aucune corrélation n’a été proposée pour prendre en compte l’effet des particules voisines, de même qu’aucun résultat ne permet d’affirmer que les expressions décrivant \mathbf{f}_{Lift} pour des particules isolées sont valables pour des concentration plus élevées. C’est pourquoi, même si ces termes sont désormais implémentés dans la plateforme PeliGRIFF, nous préférons ne pas les prendre en compte dans le bilan des forces agissant sur les particules. Le terme représentant le moment hydrodynamique n’est lui non plus pas “activé” dans le modèle pour les mêmes raisons.

II – 2.4 Calcul de la fraction volumique

La fraction volumique de fluide \mathcal{E}_f , également appelé porosité, est le complément à 1 de la densité de particules ϕ . Elle s’obtient de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_f = 1 - \phi \quad (\text{II.96})$$

$$= 1 - \frac{1}{V_{c,j}} \sum_{i=0}^{N_p} \theta_{i,j} V_{p,i} \quad (\text{II.97})$$

Où $\theta_{i,j}$ est la portion du volume de la particule i présent dans le volume de contrôle j . Le calcul de cette grandeur est un point important dans le couplage entre les phases continue et dispersée car la fraction volumique de fluide environnant une particule influe beaucoup sur la valeur de la force de traînée comme le montre la figure II.6. De plus, le calcul de cette valeur impose des contraintes sur la taille des mailles du domaine fluide. En effet, afin de modéliser le plus précisément possible le comportement du fluide dans le domaine, il est intéressant d’avoir un maillage fluide précis. Mais la taille des mailles fluide ne peut pas être trop petite car si le calcul de la fraction volumique est exact une maille fluide ne peut pas être plus petite qu’une particule ($\Delta x \geq d_p$) car le cas contraire engendrerait des valeurs de \mathcal{E}_f trop faibles (allant jusqu’à zéro) pour lesquelles les formulations de force de traînée ne sont pas valables. Néanmoins, le troisième paragraphe ci-dessous décrira la prise de moyenne spatiale qui peut permettre l’utilisation d’une grille plus fine. Mais avant cela, nous présentons ci-dessous des méthodes de calcul de \mathcal{E}_f pour des configurations où les volumes de contrôle correspondent à la grille principale du fluide.

II – 2.4.1 Deux dimensions

Dans le cas d’un système en dimension 2 (2D), le calcul de la fraction volumique de fluide dans une cellule est relativement aisé. Néanmoins, les valeurs obtenues ne sont pas les mêmes que pour un système en dimension 3 (3D), que se soit expérimentalement ou numériquement. Or, les lois de traînée présentées précédemment (voir §II – 2.3.2) furent dérivées à partir de systèmes 3D, une correction nécessite donc d’être apportée pour obtenir par exemple les mêmes vitesses minimales de fluidisation.

II – 2.4.1.a Calcul

En deux dimensions, que la particule soit à cheval sur 2 ou sur 4 cellules, la valeur exacte de \mathcal{E}_f peut facilement être calculée à l’aide de principes géométriques élémentaires. Dans un cercle de rayon R , nous avons les angles suivants (voir figure II.7 pour la correspondance des notations) :

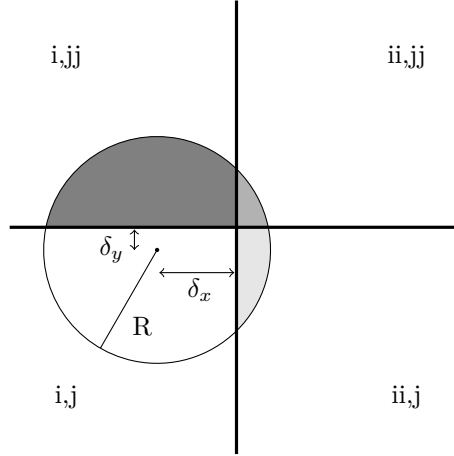


FIGURE II.7 – Calcul de la fraction volumique de fluide en 2D

$$\alpha = 2 \cos^{-1} \frac{\delta_x}{R} \quad (\text{II.98})$$

$$\beta = 2 \cos^{-1} \frac{\delta_y}{R} \quad (\text{II.99})$$

$$\gamma = 90 + \frac{180 - \alpha}{2} + \frac{180 - \beta}{2} \quad (\text{II.100})$$

A l'aide desquels nous pouvons calculer les surfaces suivantes :

$$A_{ii} = A_{ii,j} + A_{ii,jj} = \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha) \quad (\text{II.101})$$

$$A_{jj} = A_{i,jj} + A_{ii,jj} = \frac{R^2}{2} (\beta - \sin \beta) \quad (\text{II.102})$$

$$A_{i,j} = \delta_x \delta_y + \frac{y \sqrt{R^2 - \delta_y^2}}{2} + \frac{x \sqrt{R^2 - \delta_x^2}}{2} + \pi R^2 \frac{\gamma}{2\pi} \quad (\text{II.103})$$

$$A_{ii,jj} = A_{ii} + A_{jj} + A_{i,j} - \pi R^2 \quad (\text{II.104})$$

II – 2.4.1.b Correction

La fraction volumique calculée de la façon présentée précédemment repose sur une analyse en deux dimensions tandis que les différentes corrélations utilisées pour approcher la force de traînée sont établies pour des systèmes 3D. Pour corriger cette incohérence, il est nécessaire de transformer la fraction volumique 2D (\mathcal{E}_f^{2D}) en fraction volumique 3D (\mathcal{E}_f^{3D}). Certains auteurs [211, 227, 115] considèrent le système 2D comme ayant une épaisseur égale à un diamètre de particule et multiplient donc la valeur 2D par d_p , ce qui revient à étudier des cylindres de facteur de forme unitaire. Le volume des particules est ainsi sur-évalué et la fraction volumique de fluide sous-évaluée, ce qui entraîne une mauvaise valeur de la force de traînée. D'autres ont proposé des méthodes basées sur l'agencement des particules lorsque le système est au packing maximum en 2D et en 3D. Ainsi, en comparant l'agencement hexagonal 2D à l'agencement Cubique à Faces Centrées (CFC) 3D, Hoomans *et al.* [102] ont proposé :

$$\mathcal{E}_f^{3D} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi\sqrt{3}}} (1 - \mathcal{E}_f^{2D})^{3/2}, \quad (\text{II.105})$$

tandis que Ouyang et Li [166] se sont basés sur la différence entre la configuration hexagonale d'un empilement 2D et l'agencement hexagonal d'un empilement 3D. L'équation ainsi obtenue est proche de celle de Hoomans *et al.* :

$$\mathcal{E}_f^{3D} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\sqrt{3}}} (1 - \mathcal{E}_f^{2D})^{3/2}, \quad (\text{II.106})$$

II – 2.4.2 Trois dimensions

Le calcul de la fraction volumique en trois dimensions est bien plus compliqué qu'en deux dimensions. En effet, lorsque la particule est à cheval sur un nœud du maillage par exemple, la proportion de particule présente dans chacun des 8 volumes de contrôle ne peut pas être obtenue par les mêmes principes trigonométriques triviaux qu'en deux dimensions. Différentes méthodes sont alors utilisées pour établir une valeur approchée de la fraction volumique.

II – 2.4.2.a Méthode du centre de gravité

La méthode la plus simple et la moins coûteuse en temps de calcul consiste à considérer la particule comme intégralement présente dans le volume de contrôle dès lors que le centre de gravité de la particule est géométriquement présent dans le volume de contrôle (voir figure II.8).

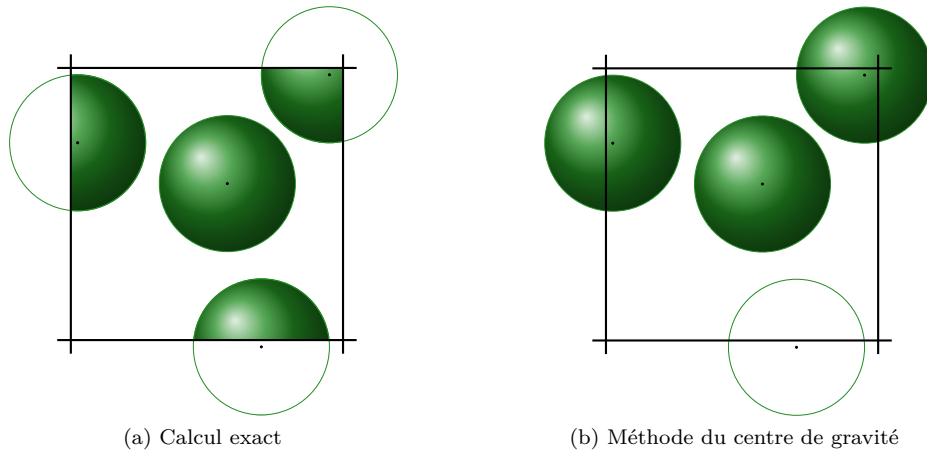


FIGURE II.8 – Différence entre (a) le calcul exact de \mathcal{E}_f et (b) la méthode du centre de gravité

L'emploi de cette méthode nécessite l'utilisation d'un grand rapport $\Delta x/d_p$ car l'erreur commise sur le calcul de \mathcal{E}_f est d'autant plus importante que ce rapport est proche de 1. En effet, la valeur \mathcal{E}_f peut être sur-estimée ou sous-estimée selon si le centre de gravité est proche de la surface du volume de contrôle, à l'intérieur ou à l'extérieur, respectivement (voir figure II.9). En pratique, les équipes

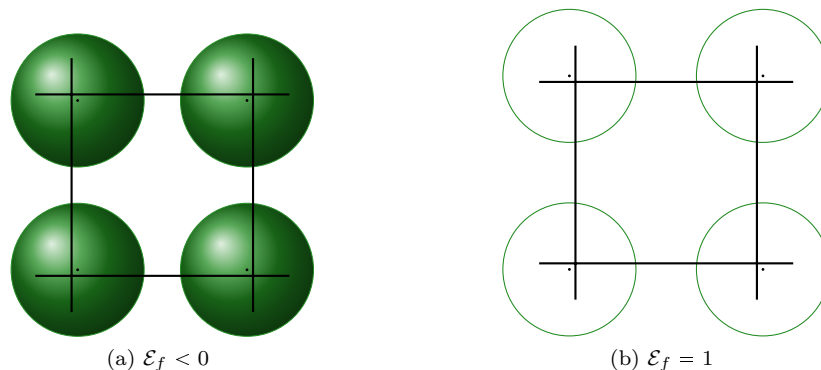


FIGURE II.9 – Exemples de configuration dans lesquelles la méthode du centre de gravité offre une mauvaise approximation de la fraction volumique de fluide

choisissent une taille de maille $\Delta x = 3d_p$ pour Tsuji *et al.* [211, 210, 209] par exemple, ou jusqu'à $\Delta x = 5d_p$ pour Hoomans *et al.* [102]. Cette méthode, qui fut la première implémentée dans cette étude, a permis de calculer \mathcal{E}_f de façon satisfaisante avec une taille de maille supérieure ou égale à $2.8d_p$. En

deçà de cette taille de maille, premièrement l'erreur commise devient importante et deuxièmement, la discontinuité en temps de \mathcal{E}_f dans une cellule lorsque des particules entrent ou sortent du volume de contrôle génère des instabilités numériques qui peuvent mener à l'arrêt de la simulation comme nous le présentons en partie III – 4.2. Or, l'emploi d'une grille fluide large entraîne, dans certains cas, une sous-résolution spatiale de la modélisation de l'écoulement fluide. D'autres méthodes furent alors proposées afin de tâcher de réduire la taille des mailles et ainsi de mieux modéliser la dynamique de l'écoulement.

II – 2.4.2.b Méthode de décalage de grille

Afin de réduire l'erreur commise lors de la prise en compte ou non d'une particule qui se trouve sur la limite intérieure ou extérieure d'un volume de contrôle, une méthode de décalage de grille (en anglais "offset method") fut introduite. A notre connaissance, cette technique fut initialement proposée par Alobaid *et al.* [4]. Cette méthode consiste à réaliser plusieurs tests successifs sur l'appartenance ou non du centre de gravité d'une particule à un volume de contrôle, tout en décalant la grille dans chaque direction d'une distance de plus ou moins un rayon de particule (voir figure II.10). De la sorte, lorsqu'une particule est proche de la frontière d'un volume de contrôle, la contribution de son volume ne sera que partielle si elle n'est pas comprise dans chaque volume de contrôle décalé. Cette méthode n'a

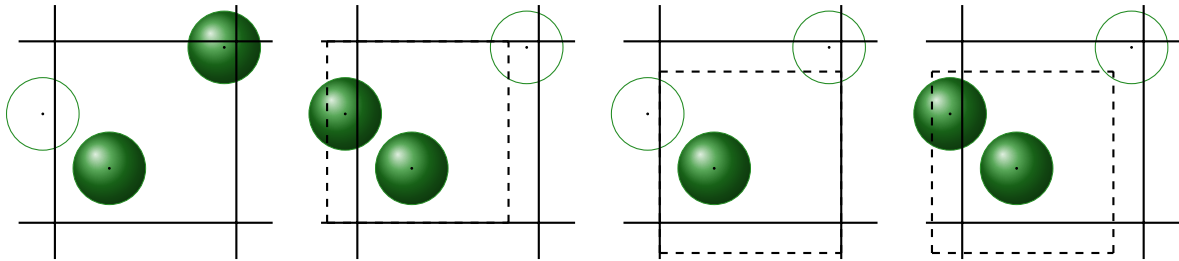


FIGURE II.10 – Illustration de la méthode de décalage de grille proposée par Alobaid *et al.* [4]

pas été implémentée car elle ne fait que réduire les discontinuités de \mathcal{E}_f en temps lorsqu'une particule entre ou sort d'un volume de contrôle. De plus, la multiplication des tests d'appartenance pour chacun des volumes de contrôle décalés augmente mécaniquement le temps de calcul du champ \mathcal{E}_f de façon significative.

II – 2.4.2.c Méthode des cubes englobants

La méthode de centre de gravité initialement implémentée (voir §II – 2.4.2.a) possède trois inconvénients non-négligeables. Tout d'abord, la nécessité d'avoir un rapport $\Delta x/d_p$ au moins égal à 2,8 implique que l'interpolation des variables du fluide au centre de gravité des particules ne sera pas très précise du fait de la taille des mailles par rapport à la taille des particules. Ensuite, ce fort rapport $\Delta x/d_p$ engendre une sous-résolution de l'écoulement fluide en raison du faible nombre de cellules présentes dans la grille fluide. Enfin, le fait que le volume d'une particule soit entièrement associé à une et une seule cellule fluide engendre des discontinuités en temps dès qu'une particule entre ou sort du volume de contrôle, ce qui provoque des oscillations numériques. Cet effet est en particulier dû à la résolution du terme instationnaire de l'équation de conservation (II.6a) et est détaillé en partie III – 4.2.

Une seconde approche fut implémentée au cours de cette thèse afin de contourner les problèmes de la méthode de centre de gravité présentés précédemment. Celle-ci consiste à considérer les particules comme étant des cubes (resp. carrés) au lieu de sphères (resp. disques) en 3D (resp. 2D) dont les dimensions sont les mêmes que le diamètre mais dont les volumes sont également rendus égaux à l'aide d'un coefficient $\pi/6$ (resp. $\pi/4$). Ainsi, lorsqu'une particule recouvre plusieurs cellules du maillage fluide, le volume de celle-ci est plus facilement attribuable aux cellules qui la détiennent (notamment dans le cas du recouvrement de 8 cellules en 3D).

Soit $\theta_{i,j}$ l'approximation de la fraction de la particule i appartenant au volume de contrôle j . Ce

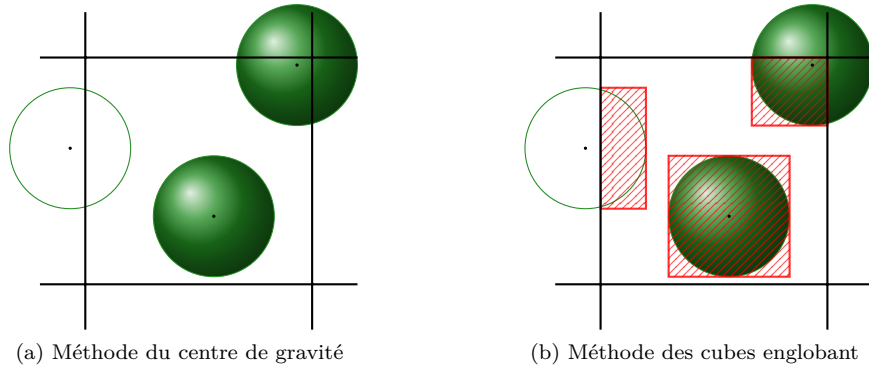


FIGURE II.11 – Illustration de la méthode des cubes englobants

coefficient est égale au rapport du volume du cube présent dans la cellule sur le volume total du cube :

$$\theta_{i,j} = \frac{V_{\text{intérieur}}}{V_{\text{total}}} \quad (\text{II.107})$$

La fraction volumique de fluide ainsi calculée est de la forme :

$$\mathcal{E}_{f,j} = 1 - \frac{1}{V_{c,j}} \sum_{i=0}^{N_p} \theta_{i,j} V_{p,i} \quad (\text{II.108})$$

De cette manière, la variation de la fraction volumique de fluide est lissée puisque le volume d'une particule entrant ou sortant dans un volume de contrôle est linéaire et proche de la variation réelle comme l'illustre la figure II.12.

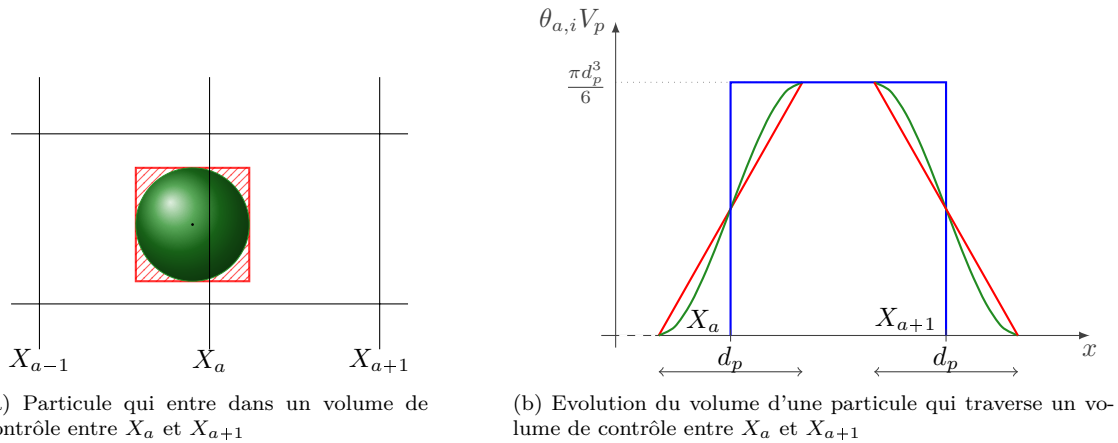


FIGURE II.12 – Variation de la prise en compte du volume d'une particule dans un volume de contrôle. En bleu, méthode du centre de gravité, en vert variation exacte, en rouge la méthode du cube englobant

D'une part, l'utilisation de cette nouvelle méthode par rapport à celle du centre de gravité fait disparaître les oscillations numériques lors de la résolution du problème de Stokes dégénéré car les variations temporelles du champ \mathcal{E}_f sont continues et non plus continues par morceaux (voir §III – 4.2). D'autre part, la méthode du cube englobant offre la possibilité d'utiliser des maillages plus fins, ce qui permet de modéliser plus finement l'écoulement fluide. Des simulations ont été réalisées avec des maillages dont le rapport $\Delta x/d_p$ est proche de l'unité sans souci numérique. En revanche, la prise de moyenne spatiale n'est alors pas satisfaite, il est donc nécessaire de réaliser un filtrage spatial des données, notamment lors du calcul du champ \mathcal{E}_f , ce qui est présenté dans la sous-partie suivante.

Remarque 8 *Il est important de mettre en évidence qu'avec les méthodes présentées précédemment, dans le cas d'une particule isolée par exemple, le calcul de la fraction volumique dans la cellule ou se trouve la particule renvoie une valeur différente en fonction de la taille des mailles.*

II – 2.4.3 Filtrage spatial

Afin de résoudre les équations de NS sur un maillage le plus fin possible pour capter au mieux la dynamique du fluide tout en ayant des volumes de contrôle suffisamment larges pour permettre une moyennisation spatiale satisfaisante, il est nécessaire de découpler ces deux grilles.

Nous recensons ci-après des exemples de distinction de grilles et détaillons ensuite l'approche employée par Link *et al.* [138] car cette méthode représente la dernière amélioration majeure à apporter au modèle DEM-CFD développé au cours de cette thèse.

II – 2.4.3.a Exemples de filtrage spatial

Un tel filtrage peut par exemple être réalisé en superposant deux grilles l'une sur l'autre (voir *eg.* [75] ou [4] pour une mise en pratique) afin de calculer la fraction volumique de fluide sur une grille puis l'interpoler sur une grille plus fine qui sert au calcul des variables du fluide. Mais la méthode la plus en accord avec le principe de variables localement moyennées introduit par Anderson & Jackson [5] ou sa variante proposée plus tard par Zhang & Prosperetti [242, 241, 243] consiste à filtrer spatialement les variables. Pour cela, il est nécessaire de répartir les contributions ponctuelles aux cellules voisines. Une telle approche fut par exemple mise en œuvre par l'équipe de Kuipers de l'Université de Twente, notamment au cours de la thèse de Link [138], nous en détaillons le principe dans le paragraphe suivant. Notons également les travaux de Desjardins *et al.* de l'Université de Cornell [172, 27] qui utilisent une fonction noyau permettant de répartir les variables sur les cellules environnantes et donc de lisser les discontinuités.

II – 2.4.3.b Méthode du cube poreux

Afin de s'affranchir des restrictions de taille minimale de maille fluide engendré par le calcul de \mathcal{E}_f , et donc de pouvoir raffiner librement le maillage pour modéliser la dynamique de l'écoulement avec précision, Link *et al.* [138] ont proposé une méthode de cube poreux.

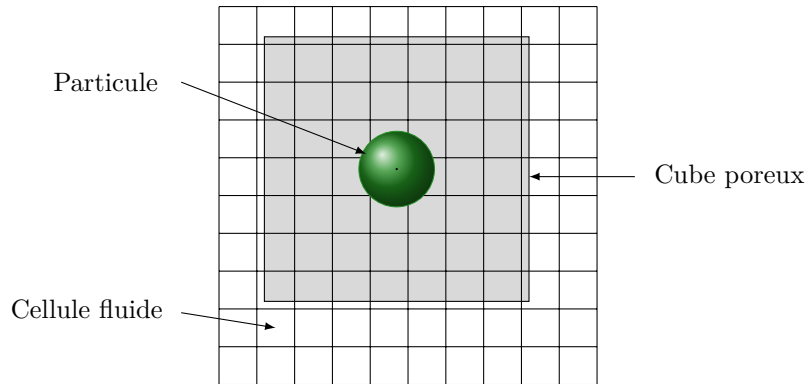


FIGURE II.13 – Méthode du cube poreux proposée par Link [138]

Comme le montre la figure II.13, cette méthode consiste à considérer chaque particule comme un cube poreux dont la largeur est proportionnelle au diamètre de la particule à une constante près :

$$d_{cube} = a d_p \quad (\text{II.109})$$

Le volume de ce cube doit au moins être égal au volume de la particule, ce qui implique :

$$a \geq \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} \quad (\text{II.110})$$

Dans leurs travaux, Link *et al.* prennent $2 < a < 5$. La porosité d'un cube poreux représentant une particule est le rapport du volume occupé par une particule par le volume du cube :

$$\mathcal{E}_f^{\text{cube}} = \frac{V_p}{V_{\text{cube}}} = \frac{\pi}{6a^3} \quad (\text{II.111})$$

La contribution du volume d'une particule est alors ajouté à chaque cellule du maillage fluide au prorata de la porosité du cube et du volume de la cellule fluide recouvert par le cube poreux. La fraction volumique de fluide dans une maille fluide j est donc calculée à l'aide des cubes poreux qui recouvrent la maille :

$$\mathcal{E}_{f,j} = 1 - \mathcal{E}_f^{\text{cube}} \sum_{i \in N_c} \theta_{i,j} \quad (\text{II.112})$$

Où $\theta_{i,j}$ est la fraction volumique de la maille j occupée par le cube i , et N_c est le nombre de cubes poreux recouvrant la maille j .

II – 2.5 Action des particules sur le fluide

Afin de respecter la troisième loi de Newton, la force résultant de l'action des particules sur le fluide doit être égale à la somme des forces exercées par le fluide sur les particules mais orientée en sens contraire. Nous présentons ici les différents types de couplage rencontrés dans la littérature puis détaillons celui implémenté dans cette étude.

II – 2.5.1 Types de couplage recensés

Etant donné que les écoulements fluide-particules denses sont le théâtre de fortes interactions entre les deux phases présentes dans le domaine, chacun s'entend sur le fait qu'il est indispensable de capturer au mieux les échanges de quantité de mouvement. Comme le résumant Feng & Yu [73], trois différents types de couplage entre les phases solide et fluide furent proposés par les équipes travaillant sur les modèles Euler-Lagrange, indifféremment de l'utilisation des modèles A et B.

1. Dans le premier cas, la force volumique modélisant l'action des particules sur le fluide est calculée sur la grille fluide de façon localement moyennée, comme dans le TFM de Gidaspow [87]. Les forces du fluide sur les particules sont quant à elles calculées individuellement, en fonction de la vitesse relative entre le fluide et chaque particule. Il est important de souligner que ce type de couplage ne garantit pas l'équilibre des forces dans chaque cellule, il est donc à proscrire.
2. Pour le deuxième type de couplage, l'action des particules sur le fluide est à nouveau calculée à l'échelle localement moyennée, comme dans le cas précédent. Mais la force du fluide sur les particules est cette fois ci calculée à partir de cette force volumique afin de respecter l'équilibre des forces dans chaque cellule et donc dans tout le domaine :

$$\mathbf{f}_{hd} = \frac{\mathbf{F}_{pf} \Delta V}{N_p} \quad (\text{II.113})$$

Où N_p est le nombre de particules dans un volume de contrôle dont le volume est ΔV . Néanmoins, ce type de couplage ne permet pas de décrire de façon précise le comportement des particules au sein d'une cellule. En effet, tous les éléments solides au sein d'un volume de contrôle n'ont pas la même vitesse de translation ; à ce titre, la force qu'exerce le fluide sur les particules doit être différente pour chaque élément.

3. Enfin, le troisième type de couplage peut être vu comme l'opposé du deuxième modèle présenté précédemment. En effet, le principe consiste à calculer la force du fluide sur chaque particule individuellement puis à considérer l'action des particules sur le fluide dans chaque cellule comme étant la somme des forces du fluide sur les particules pour tous les éléments présents dans le volume de contrôle :

$$\mathbf{F}_{pf} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{N_p} \mathbf{f}_{hd} \quad (\text{II.114})$$

Cette approche est largement adoptée par la communauté depuis qu'elle fut proposée par Xu & Yu [227]. Elle permet en effet de calculer individuellement l'action du fluide sur les particules tout en respectant la troisième loi de Newton. C'est ce type de couplage que nous avons implémenté dans ces travaux et qui est détaillé ci-après.

II – 2.5.2 Couplage implémenté

Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe précédent, il est important de respecter l'équilibre des forces dans chaque cellule. De plus, afin d'éviter les oscillations numériques, il est intéressant de lisser la force volumique \mathbf{F}_{pf} dans le temps. En effet, lorsqu'une particule entre ou sort d'un volume de contrôle, son action sur le fluide est prise en compte en un point différent du maillage. Ainsi, nous appliquons la méthode présentée précédemment pour le calcul de la fraction volumique de fluide, à savoir la méthode des cubes englobants (voir §II – 2.4.2.c).

$$\mathbf{F}_{pf} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{N_p} \theta \mathbf{f}_{hd} \quad (\text{II.115})$$

De la sorte, l'action d'une particule sur le fluide peut être répartie sur différents volumes de contrôle si elle en recouvre plusieurs, au prorata du volume de particule présent dans le volume de contrôle. Cette force volumique est considérée comme un terme source et est ajoutée au second membre de l'équation de quantité de mouvement (II.6b) et la figure II.14 illustre la répartition des contributions des forces en fonction des différents volumes de contrôle de la grille décalée.

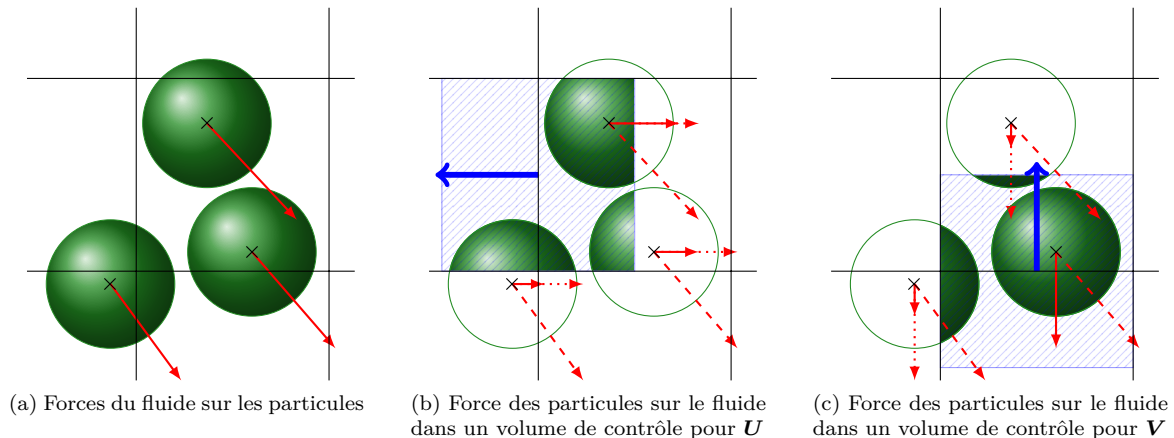


FIGURE II.14 – Illustration du calcul de la force des particules sur le fluide au prorata du volume de particule compris dans le volume de contrôle, dans le respect de la troisième loi de Newton

II – 3 Conclusion

Au cours de ce chapitre portant sur la modélisation des écoulements fluide-particules, nous avons tout d'abord présenté différentes échelles de longueur pour la modélisation, regroupée en trois groupes, micro, méso et macro. Nous avons ensuite présenté plus en détails l'échelle de longueur méso, parfois appelée micro-macro ou modèle Euler-Lagrange, qui a fait l'objet d'une implémentation informatique au cours de cette thèse et qui a servi d'outil pour étudier les écoulements fluide-particules denses de type lit fluidisé.

Une attention particulière est donnée à la justesse du modèle utilisé, c'est à dire à la concordance des termes de couplage employés pour chacune des phases afin de ne pas confondre les modèles A et B du modèle à deux fluides de Gidaspow. De plus, nous nous sommes attachés à respecter l'équilibre de quantité de mouvement dans chaque volume de contrôle ainsi qu'à calculer de façon aussi précise

que possible la fraction volumique de fluide dans chaque cellule du maillage, ce qui a par la même occasion permis de lisser les variations temporelles des champs \mathcal{E}_f et \mathbf{F}_{pf} . Néanmoins, nous rappelons qu'une amélioration non négligeable pourrait être apportée quant à la prise de moyenne spatiale du terme \mathcal{E}_f dans le domaine. Cela permettrait par la même occasion de découpler la grille fluide du filtre spatial permettant de calculer la fraction volumique de fluide, et ainsi de générer des maillages aussi fins que nécessaire pour s'adapter à la dynamique de l'écoulement. Enfin, les différentes forces modélisant l'action du fluide sur les particules ont été étudiées, et plus particulièrement la force de traînée qui constitue la contribution principale de l'échange de quantité de mouvement.

L'implémentation du modèle présenté dans ce chapitre offre la possibilité d'étudier un large champ d'applications, en particulier les lits fluidisés denses en raison de la prise en compte des contacts interparticulaires. Les détails de l'implémentation informatique des termes du modèle sont donnés au chapitre III et une série de tests de validation est présentée au chapitre IV.