Introduction à l'inférence bayésienne

Cours 3 : le problème de Monty Hall

Valentin ROUSSEL

Laboratoire S2HEP, Université de Lyon, France

Mars 2020

Résumé du cours - Le bayésianisme est une forme d'épistémologie qui connaît un succès croissant dans de nombreux domaines du savoir. En confrontation direct avec le fréquentisme, le bayésianisme suggère de faire usage de l'inférence bayésienne dans le raisonnement scientifique comme d'un critère de démarcation entre la rationalité et l'irrationalité. Tantôt modèle mathématique, tantôt modèle de pensée, le bayésianisme tente de modéliser les formes de croyances en leur attribuant des degrés de crédibilité pouvant prendre des valeurs de 0 (« Je ne crois absolument pas en ... ») à 1 (« J'ai la certitude absolue que ... »). La force du modèle de pensée bayésien est en ceci paradoxale qu'elle est peut-être également sa plus grande faiblesse : son originalité, son anticonformisme à l'inférence fréquentiste – pourtant majoritaire dans les études scientifiques –, et la place prépondérante qu'elle accorde à la subjectivité de l'agent qui s'en réfère. Ce cours en plusieurs parties n'a pas la prétention d'être parfaitement exhaustif; il propose en revanche une exploration mathématique et épistémologique du concept et des principaux mécanismes à l'œuvre dans la pensée bayésienne.

Mots-clefs - bayésianisme, inférence bayésienne, inférence fréquentiste, probabilités, épistémologie

Introduction

Les cours 3 et 4 porteront respectivement sur le problème de Monty Hall **(Savant, 1990)**[1] et le paradoxe des deux enfants **(Gardner, 1959)**. Ces deux expériences de pensée sont particulièrement efficaces pour exercer l'intuition : en effet, si leurs énoncés semblent *a priori* très accessibles, nous verrons qu'ils peuvent toutefois conduire à des raisonnements profonds et contre-intuitifs. L'objectif de ces deux cours est de proposer une application de la méthode bayésienne exposée dans les cours précédents et d'en analyser les apports en réponse à ces deux expériences de pensée. Le problème de Monty Hall – initialement, *The Three Prisoners problem* – publié dans *Parade Magazine* en 1990 a suscité d'innombrables débats au sein de la communauté mathématique et de celle des lecteurs anonymes : cet impact sur le lectorat témoigne de la complexité apparente à répondre au problème. Toutefois, il existe bien une réponse claire au problème de Monty Hall, une réponse dont la validité peut être éprouvée mathématiquement et numériquement. Ce cours propose 3 méthodes de résolution au problème de Monty Hall, en particulier nous verrons comment la pensée bayésienne s'inscrit dans sa démarche de résolution.

Le problème de Monty Hall

Un candidat participe à un jeu télévisé. Le joueur fait face à trois rideaux fermés. Derrière l'un des rideaux, se trouve une voiture, derrière chacun des deux autres se trouve une chèvre. Le présentateur, qui fait face au joueur, sait derrière quel rideau se trouve la voiture.

Le joueur doit choisir un rideau, qui demeure fermé. Puis, le présentateur doit choisir l'un des rideaux et l'ouvrir : ce rideau ne doit pas être celui désigné par le joueur, ni celui derrière lequel se trouve la voiture. Le présentateur va donc ouvrir

1. Le problème de Monty Hall semblerait en fait être une variation du *Three Prisoners problem* posé par Martin Gardner en 1959 dans son article *Mathematical Games* publié dans Scientific American.

un rideau derrière lequel se trouve une chèvre.

Le candidat a alors le droit d'ouvrir le rideau qu'il a choisi initialement, ou bien de changer son choix et d'ouvrir le rideau restant.

Que devrait alors faire le joueur ?

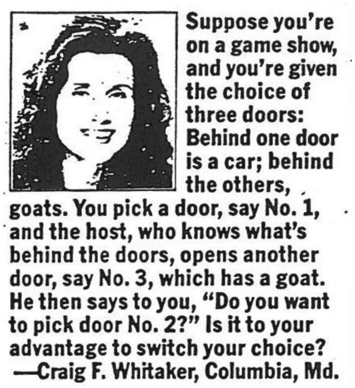
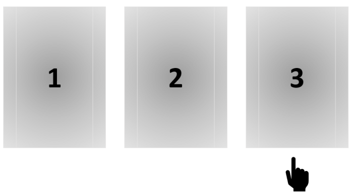

Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors: Behind one door is a car; behind the others, goats. You pick a door, say No. 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say No. 3, which has a goat. He then says to you, "Do you want to pick door No. 2?" Is it to your advantage to switch your choice?
—Craig F. Whitaker, Columbia, Md.

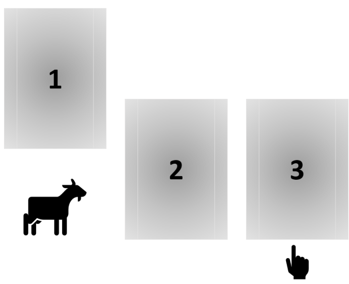
FIGURE 1 – Extrait original du problème

Résolution *intuitive* du problème

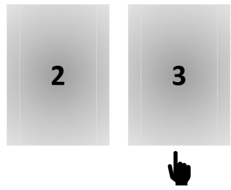
Temps 1 - Imaginons que, par exemple, initialement le joueur désigne le rideau numéro 3 :



Temps 2 - En réponse, le présentateur choisit d'ouvrir le rideau 1 et dévoile une chèvre :



Temps 3 - Désormais, le joueur peut choisir de conserver son choix initial – le rideau 1 – ou bien de changer pour le rideau 2 :



Probabilités *intuitives* attribuées à chaque temps de jeu.

Une méthode de résolution couramment proposée est la suivante :

Au moment de choisir – **Temps 1** – le joueur a $\mathbb{P}(voiture) = \frac{1}{3}$ de choisir le rideau derrière lequel se trouve la voiture. Comme il n'a aucune information lui permettant de préciser son choix, il peut désigner un rideau aléatoirement.

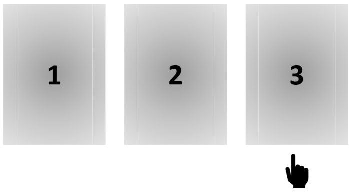
Lorsque le présentateur révèle l'un des rideaux – **Temps 2** – le problème est *simplifié* et ramené au choix entre 2 rideaux. L'information « derrière le rideau 1, il y avait une chèvre », nous permet de conclure que la voiture se trouve soit derrière le rideau 2, soit derrière le rideau 3.

Au moment de préciser son choix – **Temps 3** – le joueur a $\mathbb{P}(voiture) = \frac{1}{2}$ de choisir le rideau derrière lequel se trouve la voiture. Le problème est *simplifié*, comme il ne reste plus que deux rideaux. Le joueur peut donc, sans discernement, rester sur son choix initial ou changer pour le rideau restant. Cette méthode repose ainsi sur la *simplification* du problème en **négligeant les données initiales** : le joueur simplifie abusivement le problème de départ, à trois rideaux, en un nouveau problème, à deux rideaux :

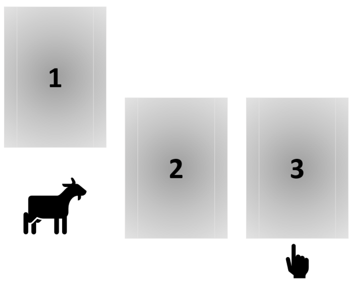
Si la démarche de simplification est louable, c'est pourtant ici une source d'erreur qui conduit le joueur à penser qu'il a autant de chance de choisir le rideau qui cache une voiture que celui cachant une chèvre. **Cette déduction est fausse** comme nous allons le montrer, car s'il a le choix, alors il doit changer son choix initial pour le rideau restant.

Résolution classique : énumérer les différents cas de figure

Temps 1 - Initialement, comme il n'a pas suffisamment d'informations, le joueur peut sans discernement choisir n'importe lequel des trois rideaux. A ce stade, on a donc *a priori* $\mathbb{P}(voiture) = \frac{1}{3}$. Il choisit, par exemple, le rideau 3 :

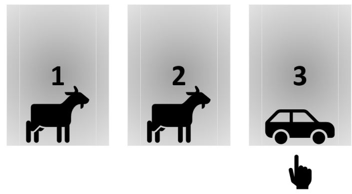


Temps 2 - En réponse, le présentateur choisit d'ouvrir le rideau 1 et dévoile une chèvre :

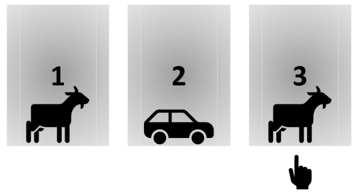


Cette action conduit à une nouvelle information. Le joueur conclut qu'il doit donc *réviser* ses *connaissances a priori*. A la différence du joueur qui choisit la méthode de résolution purement *intuitive*, le joueur décide ici non pas de *simplifier* le problème, mais de *réviser* ses connaissances initiales pour répondre au problème. L'information supplémentaire ne conduit pas à une *simplification*, mais à une *révision*. Le joueur sait qu'avant que le présentateur ne dévoile le rideau 1, trois scénarios étaient possibles :

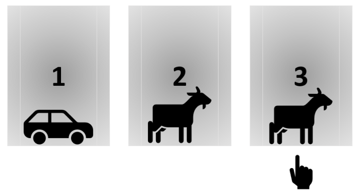
Scénario 1 - le joueur a initialement désigné le bon rideau, dans ce cas, le choix initial conduit au gain.



Scénario 2 - le joueur a initialement désigné le mauvais rideau, dans ce cas, le choix initial conduit à l'échec.



Scénario 3 - le joueur a initialement, comme dans le scénario 2, désigné le mauvais rideau, dans ce cas le choix initial conduit également à l'échec.

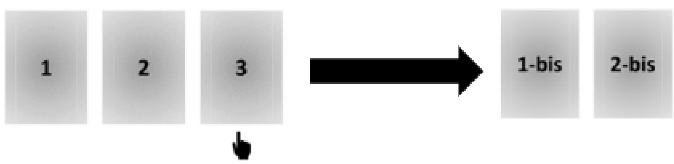


De fait, deux des trois scénarios possibles conduisent à l'échec si le joueur décide de conserver son choix initial.

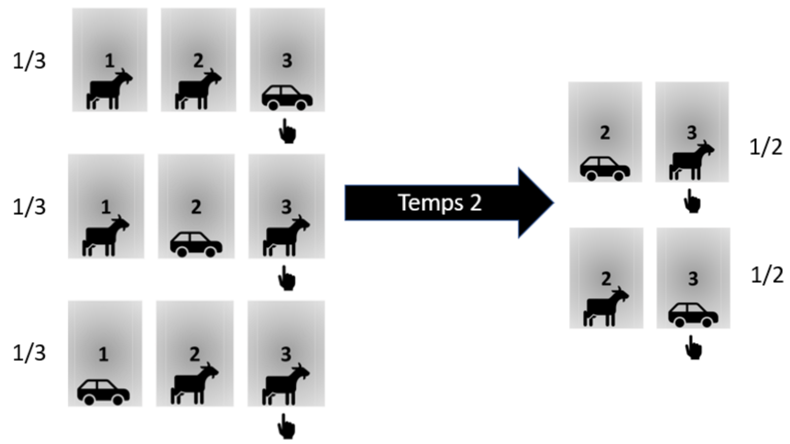
Mais alors : quelle information supplémentaire apporte le temps 2 ?

***

Car c'est en effet sur le temps 2 que tout se joue. Nous avons vu que le joueur favorisant une méthode « intuitive » considère l'information « une chèvre se trouvait derrière le rideau 1 » comme une information permettant de simplifier le problème initial en se ramenant à 2 rideaux :

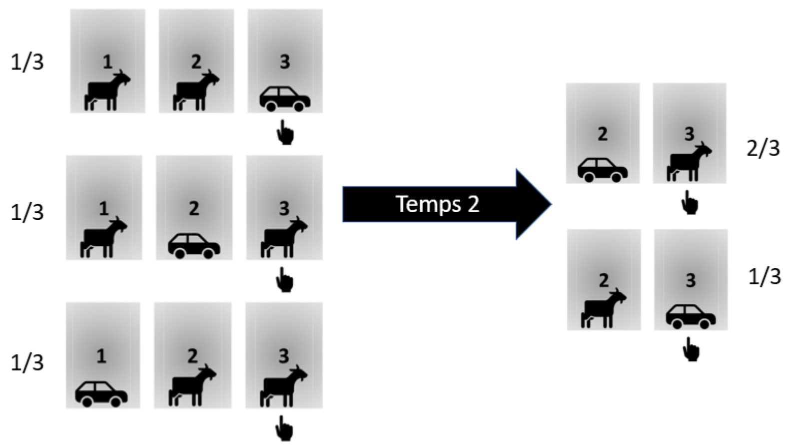


Ou, traduit en termes de probabilités :



Toutefois, il s'agit là d'une mésinterprétation de l'information. En fait, le temps 2 nous apprend non pas que nous pouvons *simplifier* le problème en un nouveau problème à 2 scénarios, mais que le joueur se trouve dans l'un des deux scénarios où il peut avoir désigné l'un des rideaux derrière lequel se trouve une chèvre. Ici le joueur apprend simplement qu'il ne peut pas se trouver dans le scénario 3 – la voiture se trouve derrière le rideau 1 – mais ceci n'invalide par les probabilités initiales : $\mathbb{P}(voiture) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(\overline{voiture}) = \frac{2}{3}$

Une bonne interprétation du problème serait alors :



Autrement dit, ce que révèle l'information « une chèvre se trouvait derrière le rideau 1 », c'est que le joueur a **toujours** $\mathbb{P}(\overline{voiture}) = \frac{2}{3}$ de s'être trompé et **toujours** $\mathbb{P}(voiture) = \frac{1}{3}$ d'avoir initialement fait le bon choix.

Scénario 3 - Comme il ne reste plus que 2 rideaux possibles à choisir, ceci conduit le joueur à une nouvelle question :

Dois-je changer mon choix, sachant que :

1. Si je conserve mon choix initial, j'ai $\mathbb{P}(voiture) = \frac{1}{3}$ de remporter la voiture, car toujours $\mathbb{P}(\overline{voiture}) = \frac{2}{3}$ d'avoir choisi un rideau cachant une chèvre.
2. Si je change mon choix, j'ai $\mathbb{P}(\overline{voiture}) = \frac{2}{3}$ de remporter la voiture, car toujours $\mathbb{P}(voiture) = \frac{1}{3}$ d'avoir choisi le rideau cachant la voiture.
3. Je n'ai plus que ces deux choix possibles, comme l'un des rideaux a été supprimé.

En conclusion, alors quand dans le cas de la résolution purement *intuitive*, c'est la *simplification* du problème qui conduit à sa *révision*, on constate que dans ce système de résolution, c'est la *révision* des données du problème qui permet sa *simplification* et au joueur d'émettre un choix plus rationnel. Dans le premier cas, le joueur *simplifie* le problème en occultant les données initiales, dans le second, le joueur *révise* le problème, en tenant compte des données initiales, ce qui conduit à une *simplification* de son choix.

***

Résolution bayésienne

Avec l'application de la formule de Bayes généralisée, l'importance de ne pas négliger les données initiales du problème apparait encore plus évidente. Rappelons une nouvelle fois la formule de bayes généralisée (cours 2) :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_j \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)} = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

On considère le cas où le rideau 3 est choisi, et aucun rideau n'est ouvert. On note alors : H_1 l'événement « la voiture est derrière le rideau 1 », H_2 l'événement « la voiture est derrière le rideau 2 » et H_3 « la voiture est derrière le rideau 3 ». H_i correspond ici à notre hypothèse théorique. Cette hypothèse ne peut prendre que trois états : H_1, H_2, H_3.

Avec les données initiales du problème, les crédences respectives des événements H_1, H_2 et H_3 sont : $\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2) = \mathbb{P}(H_3) = \frac{1}{3}$

Le présentateur, qui fait face au joueur, sait derrière quel rideau se trouve la voiture. Il doit choisir l'un des rideaux et l'ouvre : ce rideau ne doit pas être celui désigné par le joueur, ni celui derrière lequel se trouve la voiture.

On note : Θ_1 l'événement « le présentateur ouvre le rideau 1 », Θ_2 l'événement « le présentateur ouvre le rideau 2 », Θ_3 l'événement « le présentateur ouvre le rideau 3 ». Θ_i correspond ici à l'observation faite, qui doit nous permettre la réévaluation de l'hypothèse H_i. Sachant que le présentateur ne peut ouvrir le rideau choisit par le joueur – rideau 3 – on a donc : $\mathbb{P}(\Theta_1) = \mathbb{P}(\Theta_2) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\Theta_3) = 0$

Supposons alors que le présentateur décide d'ouvrir le rideau 1 – raisonnement similaire avec le rideau 2 – si la voiture est derrière le rideau 2 et que le joueur a choisi le rideau 3 initialement, le seul rideau que peut ouvrir l'animateur est donc le rideau 1, d'où $\mathbb{P}(\Theta_1|H_2) = 1$.

La probabilité que la voiture soit derrière la porte 2 sachant que le présentateur ouvre la porte 1 est donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_2|\Theta_1) =& \frac{\mathbb{P}(\Theta_1|H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(\Theta_1|H_i)\mathbb{P}(H_i)} \\ =& \frac{1 \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Le joueur a donc bien intérêt à changer son choix initial s'il souhaite augmenter ses chances de remporter la voiture.

***

Résolution numérique

La stratégie gagnante, au jeu de Monty Hall, serait donc de changer son choix initial, quelque soit le scénario. En faisant ainsi, un joueur s'assure de gagner 2 fois sur 3. Une expérience intéressante serait de pouvoir tester cette stratégie en la reproduisant sur un très grand nombre de parties, récenser les parties gagnantes, et constater si, pour un très grand nombres de parties, on retrouve un taux de victoire proche de 66,6% et donc un taux d'échec proche de 33,3%.

Heureusement, il est possible de réaliser ce genre de simulation numériquement. Le script ci-dessous, exécutable dans le logiciel libre R, permet de générer N simulations du jeu de Monty Hall en y appliquant 3 stratégies différentes :

— Stratégie 1 : le joueur prend la décision au hasard
— Stratégie 2 : le joueur décide de changer son choix initial
— Stratégie 3 : le joueur ne change pas son choix initial

Script de la simulation numérique

```
##########################################################################
# Simulation numerique (avec utilisation du logiciel libre R) du probleme de
# Monty Hall avec application de trois strategies au choix.
#
# Strategie (1) : le joueur joue au hasard
# Strategie (2) : le joueur change systematiquement son choix initial
# Strategie (3) : le joueur maintient systematiquement son choix initial
#
##########################################################################
## Si l'utilisateur ne le specifie pas, la fonction simulera par defaut 10k parties
##monty_simulation(strategie="S", N) : simuler N partie avec la strategie S

monty_simulation<-function(strategie='rester',N=10000,resultats=TRUE)
{
 rideaux<-1:3 #initialisation des rideaux
 victoire<-0 #compteur du nombre de victoires

for(i in 1:N)
 {
  rideau_voiture<-floor(runif(1,1,4)) #selection aleatoire du rideau cachant    la voiture
  rideau_au_hasard<-floor(runif(1,1,4)) #selection aleatoire du rideau par le joueur

## selection du rideau choisi par le presentateur
 if(rideau_voiture!=rideau_au_hasard)
  rideau_presentateur<-rideaux[-c(rideau_voiture,rideau_au_hasard)]
 else
  rideau_presentateur<-sample(rideaux[-c(rideau_voiture,rideau_au_hasard)],1)

 ## choix de la strategie a appliquer
 if(strategie=='changer')
  choix<-rideaux[-c( rideau_presentateur,rideau_au_hasard)]
 if(strategie=='rester')
  choix<-rideau_au_hasard
 if(strategie=='hasard')
  choix<-sample(rideaux[- rideau_presentateur],1)

## incrementation du nombre de victoires
 if(choix==rideau_voiture)
  {
    victoire<-victoire+1
    resultat_partie<-'Gain'
   }
 else
  resultat_partie<-'Perte'

if(resultats)
 cat(paste('Choix initial du joueur: ',rideau_au_hasard,
 '\nChoix du presentateur :',rideau_presentateur,
 '\nSecond choix du joueur : ',choix,
 '\nRideau cachant la voiture : ',rideau_voiture,
 '\n',resultat_partie,'\n\n',sep=''))
 }
 cat(paste('En choisissant la strategie " ',strategie,' " votre pourcentage de victoire est ',victoire/N*100,'%\n',sep='')) #Print the win percentage of your strategy
}
## simulation de 10k parties en applicant la strategie : le joueur joue au hasard
monty_simulation(strategie="hasard")
## simulation de 10k parties en applicant la strategie : le joueur change systematiquement son choix
monty_simulation(strategie="changer")
## simulation de 10k parties en applicant la strategie : le joueur maintient systematiquement son choix
monty_simulation(strategie="rester")
```

Résultats de la simulation numérique

Nous allons lancer la simulation avec chacune des trois stratégies, en faisant varier le nombre N de parties. On pourrait donc s'attendre à ce que, théoriquement :

- Pour la stratégie 1, le taux de victoires se rapproche progressivement de 33%
- Pour la stratégie 2, le taux de victoires se rapproche progressivement de 66%
- Pour la stratégie 1, le taux de victoires se rapproche progressivement de 50%

Stratégie \ Nombre de parties	10	100	500	1000	5000
Conserver son choix	30%	36%	34%	33.5%	32.58%
Changer son choix	60%	67%	69.2%	66.2%	66.08%
Jouer au hasard	80%	43%	49.2%	50.2%	49.96%

Stratégie \ Nombre de parties	10000	50000	∞
Conserver son choix	33.74%	33.32%	33.33...%
Changer son choix	66.65%	66.452%	66.66...%
Jouer au hasard	50.07%	49.85%	50%

TABLE 1 – Résultats des simulations numériques

On constate bien que plus le nombre de parties simulées est grand, plus les taux de victoires se rapprochent des taux théoriques attendus, ce qui confirme, sans trop de surprise, la validité des précédentes méthodes de résolution.

***

Implication de la méthode bayésienne

Quelles conclusions tirer des précédentes méthodes de résolution exposées ?

L'importance des données théoriques initiales

Les *hypothèses a priori* sont importantes et ne doivent jamais être négligées. C'est la marque de distinction la plus évidente entre la méthode purement *intuitive* et les autres. Dans la méthode *intuitive* le joueur occulte les hypothèses initiales du problème pour passer à un autre problème qu'il juge similaire, comme si le second problème était un modèle simplifié du premier. Se faisant, les hypothèses initiales – $H1$, $H2$, $H3$ – sont remplacées sans ménagement par deux nouvelles hypothèses – $H1$-bis, $H2$-bis – auxquelles le joueur va également associer des probabilités différentes. Si intuitivement le problème parait plus simple lorsque le présentateur ouvre l'un des rideaux, en réalité, les hypothèses initiales demeurent valides : seule la prise en compte conjointe des hypothèses initiales et de l'information « le rideau X cachait une chèvre » permet une prise de décision rationnelle.

Révision et simplification du problème

Révision du problème n'est pas *simplification*, et réciproquement. L'axiome 5 de Cox **(Cox, 1946)** (voir cours 1) précise que, dans la démarche bayésienne : « Aucune donnée pertinente ne doit être omise » (principe de non-rétention d'information). Or, lorsque le présentateur révèle le contenu du rideau 1, l'information est nécessairement pertinente. Toutefois, c'est le traitement de cette information dont il faut se méfier. La méthode *intuitive* conduit à une *simplification* trop brusque du problème – de 3 à 2 hypothèses – puis à sa révision – $\mathbb{P}(H1-bis) = \mathbb{P}(H2-bis) = \frac{1}{2}$. Or, il apparait que c'est la démarche inverse qu'il faudrait appliquer : *révision* du problème – le scénario 3 n'est plus possible, en revanche les hypothèses initiales restent consistantes – puis *simplification* : il reste 2 choix possibles, le premier pourrait conduire à tel résultat, avec une plausibilité de N1%, le second pourrait conduire à tel résultat, avec une plausibilité de N2%. Un agent bayésien prenant connaissance d'une nouvelle information doit donc se demander :

1. Cette information est-elle pertinente pour la résolution du problème ?
2. Si oui, quelles sont les implications réelles de cette information, au regard des données initiales ?

La loi des grands nombres

L'axiome 5 de Cox **(Cox, 1946)**(voir cours 1) précise que « s'il existe plusieurs façons de trouver un résultat, elles doivent aboutir au même résultat » (principe de consistance). Une approche efficace, pour s'assurer de la pertinence d'une méthode de résolution ou de la validité d'une expérience, est de reproduire cette expérience un grand nombre de fois et établir, par une étude quantitative, si les résultats observés sont statistiquement en adéquation avec ce qui pourrait être attendu dans un cas « idéal ». C'est ce que nous a permis de mettre en évidence la méthode de résolution numérique. Les résultats des simulations ne sont bien évidemment pas surprenants dans le cas de cette expérience du fait que l'on ait montré, d'une part par une résolution logico-déductive et d'autre part par inférence bayésienne, que le joueur **devait** appliquer la stratégie du changement de choix pour agrandir ses chances de gain. Toutefois, cette méthode nous permet de prolonger une idée qui a déjà été introduite auparavant (cours 2, page 5 :*exemple d'application*) : la multiplicité des expériences est un moyen fiable pour se faire une idée d'une réalité. Dans le cours 2, la répétition de l'expérience du lancé de dés nous permet de donner de la consistance à une hypothèse : pour rappel, au 200ème lancé de dés, l'agent est en mesure d'attribuer un indice de confiance à plus de 99% en faveur de l'hypothèse $H2$. De même, en appliquant machinalement une stratégie spécifique au jeu de Monty Hall – et à condition de répéter un nombre suffisamment important de fois l'expérience – un joueur est en mesure d'approcher précisément le taux de réussite ou d'échec de sa stratégie. Ce dernier point montre que la multiplicité des expériences et des observations est fondamentale pour affiner la plausibilité d'une hypothèse : c'est un critère de fiabilité essentiel dans la méthode d'inférence bayésienne.

Références

Cox, R. T. (1946). Probability, frequency, and reasonable expectation. *American journal of physics*, 14(1) :1–13.

Gardner, M. (1959). Mathematical games : Problems involving questions of probability and ambiguity. *Scientific American*, 4 :174–182.

Savant, M. V. (1990). Ask marilyn - monty hall problem. *Parade magazine*.