Observateur d'état courant d'ordre réduit

Najib Bennis

ENSET de Rabat, Université M[ed] V de Rabat, Maroc

Lors de la reconstruction d'un observateur d'état courant, certaines variables d'état n'ont pas besoin d'être reconstruites puisqu'elles sont disponibles par mesure. Il est souvent intéressant de ne reconstruire que celles qui ne sont pas accessibles. On parle par la suite d'un observateur d'ordre réduit.

On considère un système linéaire continu décrit par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad (1)$$

– A matrice d'état de dimension (n,n)

– B matrice de commande de dimension (n,m)

– C matrice d'observation de dimension (p,m)

– x vecteur d'état de dimension n : n variables d'état

– u vecteur de commande de dimension m : m entrées de commande

– y vecteur de sortie de dimension p : p sorties.

On suppose que l'état est partitionné en deux sous-ensemble $x_1(t) = y(t)$ -accessibles-, $x_2(t)$–non accessibles-, avec x_1 de dimension n_1 et x_2 de dimension $n_2 = n - n_1$.

Le système dynamique original peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right] u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) \qquad (2)$$

Afin de mettre en valeur les dynamiques de l'état inconnu, on effectue provisoirement le changement de variables suivant :

$$\dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + \underbrace{A_{21}x_1(t) + B_2u(t)}_{\tilde{u}(t)},$$

et on pose : $w(t) = \dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) - B_1u(t) = A_{12}x_2(t)$
D'où :

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + \tilde{u}(t) \\ w(t) = A_{12}x_2(t) \end{cases} \qquad (3)$$

Cette représentation fait apparaitre un système d'ordre réduit dont la matrice d'état est A_{22}, et la matrice de sortie est A_{12}.

On propose alors de construire un observateur pour le système d'ordre réduit (3) en s'inspirant de la structure de l'observateur d'ordre complet (Observateur de Luenberger), soit :

$$S_{\substack{Observateur\\ réduit}} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = (A_{22} - GA_{12})z(t) + Gw(t) + \tilde{u}(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad (4)$$

Afin d'écrire le système en fonction des signaux disponibles *y(t)* et *u(t)* du système original, on transforme l'observateur minimal ainsi :

$$S_{\substack{Observateur\\ réduit}} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = (A_{22} - GA_{12})z(t) + G(\dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) - B_1u(t)) + A_{21}x_1(t) + B_2u(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Pour éviter la dérivée $\dot{x}_1(t)$dans le second membre de la première équation, on introduit une nouvelle variable notée $s(t)$ telle que:

$$s(t) = z(t) - Gx_1(t) = z(t) - Gy(t)$$

D'où en développant : $\dot{s}(t) = \dot{z}(t) - G\dot{x}_1(t)$, on a :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (A_{22} - GA_{12})s(t) + \left[(A_{22} - GA_{12})G - GA_{11} + A_{21}\right]y(t) + (B_2 - GB_1)u(t) \\ z(t) = s(t) + Gy(t) \\ s(0) = s_0 \quad arbitraire \end{cases} \qquad (5)$$

Ces dernières équations représentent bien la structure d'un observateur excités par les signaux disponibles, à savoir, d'entrée *u(t)* et la sortie *y(t)*. La sortie *z(t)* est de dimension réduite par rapport à l'observateur classique.

On montre par ailleurs que si la paire (C, A) est observable alors il en est de même pour la paire (A_{12}, A_{22}), ce qui permet d'assurer l'existence de la matrice G. Celle-ci sera calculée en fixant une dynamique appropriée à l'observateur d'ordre réduit.

On note que l'erreur d'observation : $e(t) = x_2(t) - s(t)$ obéît à l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} &\dot{e}(t) = (A_{22} - GA_{12})e(t) \\ &e(0) = e_0 \quad arbitraire \end{aligned} \qquad (6)$$

Cette erreur transitoire tend asymptotiquement vers zéro quelle que l'erreur initiale eo et ce, selon une dynamique fixée par les valeurs propres attribuées à la matrice $(A_{22} - GA_{12})$

Exemple :

On considère le système suivant qui est naturellement partitionné :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left[\begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \end{array}\right] x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \qquad (7)$$

Ici $x_1(t) = y(t)$ est accessible et donc seule $x_2(t)$ est à reconstruire. Selon la notation adoptée, on a :

$$\begin{cases} A_{11} = -1, \quad A_{12} = 1, \quad A_{21} = 2, \quad A_{22} = 2 \\ B_1 = B_2 = 1 \end{cases}$$

On choisit de prendre $A_{22} - GA_{12}$ =-5➔G=7.

Il s'en suit :

- $(A_{22} - GA_{12})G - GA_{11} + A_{21}$ =-26
- $B_2 - GB_1$ = - 6

D'où les équations de l'observateur d'ordre 1 :

$$S_{\substack{Observateur\\ réduit}} \begin{cases} \dot{s}(t) = -5s(t) - 26y(t) - 6u(t) \\ z(t) = s(t) + 7y(t) \\ s(0) = s_0 \quad arbitraire \end{cases} \tag{8}$$

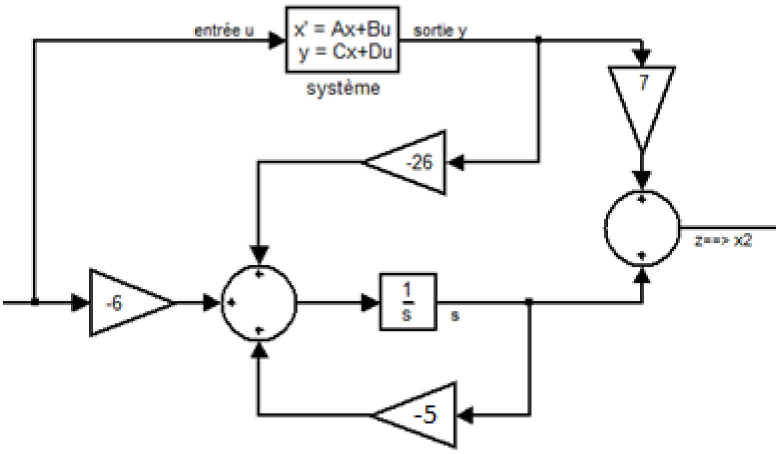

Schéma de principe pour la réalisation de l'observateur d'ordre réduit

Généralisation

Lors de la construction de l'observateur réduit, on avait supposé que les équations d'état sont structurées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \tag{9}$$

Si ce n'est pas le cas, il est possible de s'y ramener moyennant une transformation. En effet, après une permutation des variables d'état, les matrices A, B, C, et le vecteur x sont de la forme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

,

où rang $C_1 = l$, A_{11} et $C_1 \in \mathbf{R}^{l\times l}$, $x_1 \in \mathbf{R}^{l}$, et $B1 \in \mathbf{R}^{l\times m}$.

On effectue le changement de variable :

$$\overline{x}(t) = Mx(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 0_{n-l,l} & I_{n-l} \end{bmatrix} x(t) \leftrightarrow x(t) = M^{-1}\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} -C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ 0_{n-l,l} & I_{n-l} \end{bmatrix} \overline{x}(t)$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\overline{x}}_1(t) \\ \dot{\overline{x}}_2(t) \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \hline \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} \overline{B}_1 \\ \hline \overline{B}_2 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \overline{x}(t) = \overline{x}_1(t) \end{aligned}$$

Avec :

$$\bar{A}_{11} = (C_1 A_{11} + C_2 A_{21}) C_1^{-1}$$

$$\bar{A}_{12} = -A_{11} C_2 + C_1 A_{12} + C_2 A_{22}$$

$$\bar{A}_{21} = A_{21} C_1^{-1}$$

$$\bar{A}_{22} = A_{22} - A_{21} C_1^{-1} C_2$$

$$\bar{B}_1 = C_1 B_1 + C_2 B_2$$

$$\bar{B}_2 = B_2$$

Bibliographie

[1] : Katsuhiko Ogata , “Modern Control Engineering “, Fifth Edition Prentice Hall,2010.

[2] : Luenberger D. “Observers for multivariable systems”. *IEEE Trans. Automatic, Control*, 11:190–197, *1966.*

[3] : B. Friedland, “Reduced-Order State Observers “, Control Systems, Robotics and Automation – Vol. viii