Eléments de logique

Bahloul Rachid

Éléments de logique

Dr : Bahloul Rachid

Professeur de l'enseignement Secondaire Qualifiant
bahloul33r@gmail.com

Une théorie mathématiques n'est pas le rassemblement de résultats sans liens les uns avec les autres. A partir de résultats considérés comme acquis le raisonnement mathématique permet d'en démontrer d'autres. Ce raisonnement s'effectuer à l'aide de certaines régles que vous utilisez consciemment ou non depuis plusieur années et qui sont les régles de la **logique**. Il nous faut donc commencer, en utilisant des exemples mathématiques que vous connaissez, par mettre en évidence certaines de ces régles : c'est le contenu de la section I. Nous indiquerons ensuite les principaux types d'énoncés et les divers modes usuels de **raisonnement mathématique**, à la section II.

Contents

1 Propositions et opérateurs logiques

1.1 Proposition

Définition 1.1. : Une **proposition** (une assertion) est un énoncé qui peut être vrai ou faux. (V ou F en abrégé).

Exemples 1.2. *:*

1. $''1+6=17''$ *est une proposition fausse.*
2. $''\sqrt{2} \in \mathbb{Q}''$ *est une proposition fausse.*
3. *L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur, est une proposition vraie.*

Tables de vérité

Lorsque l'on considère une seule proposition quelconque **p** deux cas sont possibles, ce que nous pouvons schématiser (fig . 1) de l'une des manières suivantes (la lettre V signifiant vrai, la lettre F signifiant faux)

(fig . 1)

p
V
F

Le tableau ci-dessus à une colonne est appelé **table de vérité** d'une proposition.
Si nous considérons simultanément deux propositions quelconques p et q, le schéma et le tableau suivant (fig .2)

(fig . 2)

p	**q**
V	V
V	F
F	V
F	F

1.2 Négation d'une proposition

Définition 1.3. A toute proposition p nous pouvons associer une nouvelle proposition appelée **négation** de p qui s'écrit $\bar{p}$ et qui est fausse si p est vraie et vraie si p est fausse. La table de vérité de la négation de p est donnée à la figure 3

(fig . 3)

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Exemple 1.4. *:*

1. *La négation de la proposition vraie " $6 = 4 + 2$ " est la proposition fausse " $6 \neq 4+2$".*

2. *La négation de la proposition fausse "$5 > 9$ " est la propositin vraie " $5 \leq 9$ ".*

Exercice 1.5. *Dresser la table de vérité de : $\bar{\bar{p}}$. Que remarquez-vous ?*

1.3 Conjonction

La **conjonction des propositions** p et q est la proposition notée (p et q) qui est vraie uniquement si p et q sont vraies toutes deux. On la note aussi : $p \wedge q$. Sa table de vérité est donnée par :

p	q	p et q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.6. *Les propositions :*
1. $[(3 \in \mathbb{N})$ *et* $(3 > 8)]$
2. $[(\sqrt{2} \in \mathbb{N})$ *et (tout carré est rectangle)]*
sont fausse.

Il est évident que la proposition (p et q) d'une part et la proposition (q et p) ont même valeur de vérité.

1.4 Disjonction

La **disjonction des propositions** p et q est la proposition notée (p ou q) qui est fausse uniquement si p et q sont fausses toutes deux.
On la note aussi : $p \vee q$. Dressons sa table de vérité.

p	q	p ou q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

On peut dire aussi que la disjonction de p, q est vraie uniquement si au moins une des propositions p, q est vraie.

Exemple 1.7. *Les propositions :*
1. (7 est premier) ou (6 est pair)
2. (7 est premier) ou (3 est pair)
sont vraies.

Exercice 1.8. *Dresser la table de vérité de* $[(p \text{ ou } q) \text{ ou } r]$ *et de* $[(p \text{ ou } q) \text{ et } r]$.

1.5 Implication

On appelle **implication** de la proposition p et de la proposition q, la proposition ($\bar{p}$ ou q) qui est fausse uniquement si p est vraie et si q est fausse.
On la note : $(p \Rightarrow q)$ qu'on lit indifféremment "si p alors q ", "p implique q"

p	q	p $\Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 1.9. *Les propositions :*
1. $(2 < 5) \Rightarrow (8 \ \ est \ \ pair)$
2. $(6 \ \ est \ \ premier) \Rightarrow (7 est \ \ pair)$
sont des propositions vraies.

1.6 Équivalence logique

L'équivalence logique des propositions p, q est la proposition :

$$(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow p)$$

On la note : $p \Leftrightarrow q$ qu'on lit indifféremment "si p équivalente à q ", "p si et seulement si q"

p	q	p $\Leftrightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nous voyons que $(p \Leftrightarrow q)$ est vraie uniquement dans les deux cas : p et q sont toutes deux vraies, p et q sont toutes deux fausses.

Exemple 1.10. *Les équivalences :*
1. (7 est premier) $\Leftrightarrow$ *(8 est pair)*
2. (8 est premier) $\Leftrightarrow$ *(7 est pair)*
sont vraies.

Exercice 1.11. *Démontrer, à l'aide d'une table de vérité, que l'implication :*

$$[(p \Leftrightarrow q) \ \ et \ (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$$

est toujours vraie.

1.7 Lois Logiques

a) Les lois logiques sont des propositions composées de plusieurs propositions p, q, r ... à l'aide des connecteurs ou, et, $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ et qui sont vraies quelles que soient les propositions p, q, r ... par exemple $(p \text{ et } q) \Leftrightarrow (q \text{ et } p)$.
b) Lois de Morgan : Quelles que soient les propositions p et q les propositions

$$\overline{p \text{ et } q} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ ou } \bar{q})$$

$$\overline{p \text{ ou } q} \Leftrightarrow (\bar{p} \text{ et } \bar{q})$$

sont vraies.
Vous le vérifierz en cherchons les tables de vérité des propositions des deux membres.
c) Distributivité : Quelles que soient les propositions p et q les propositions

$$[p \text{ et } (q \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)]$$

$$[p \text{ ou } (q \text{ et } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } r)]$$

sont vraies.

1.8 Fonction propositionnelle

On appelle **fonction propositionnelle** définie sur E, tout énoncé qui est vrai pour certains éléments de E et faux pour tous les autres.
Il nous arrivera de dire proposition à la place de fonction propositionnelle.

Exemple 1.12. *La variable x étant un élément de $\mathbb{N}$, $''x + 2 = 5''$ est un énoncé vrai pour $x = 3$ et faux pour tous les autres nombres. C'est une fonction propositionnelle définie sur $\mathbb{N}$.*

1.9 Quantificateurs

vous savez que, quel que soit le nombre réel x, on peut écrire :

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

On utilise le symbole $\forall$ qui est un **quantificateur**, le quantificateur universel, il signifie "quel que soit", "pour tout" et la phrase précédente s'écrit sous forme symbolique :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

qu'on lit :

$$\text{quel que soit } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ on a } (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

ou encoure

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ on a } (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

c'est une proposition vraie.
Vous savez qu'il existe au moins un élément x de $\mathbb{Z}$ tel que $x^2 - 9 = 0$; ces éléments sont -3 et 3. On emploie le symbole $\exists$ qui est aussi un quantificateur, le quantificateur existentiel. La phrase s'écrit :

$$(\exists x \in \mathbb{Z})\ x^2 - 9 = 0$$

qu'on lit :

$$\text{il existe au moins un élément } x \text{ de } \mathbb{Z} \text{ tel que } x^2 - 9 = 0$$

c'est une proposition vraie.
D'une manière générale, soit $P(x)$ une fonction propositionnelle (c'est-à-dire une propriété) définie sur un ensemble E. La proposition

$$(\forall x \in E)\ P(x)$$

se lit:

"pour tout x de E on a $P(x)$"

De même la proposition :

$$(\exists x \in E)\ P(x)$$

se lit :

"il existe au moins un élément x de E tel que l'on ait $P(x)$"

1.10 Quantificateurs et connecteurs logiques

Soit $P(x)$ une propriété définie sur un ensemble E. On a

$$\overline{(\forall x \in E)\ P(x)} \Leftrightarrow (\exists x \in E)\ \overline{P(x)}$$

$$\overline{(\exists x \in E)\ P(x)} \Leftrightarrow (\forall x \in E)\ \overline{P(x)}$$

Exercice 1.13. *Trouvez les négations des propositions suivantes et écrivez les équivalences correspondantes :*

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\ 4x + 5 = 0$$

$$(\exists x \in \mathbb{R})\ x > 3$$

1.11 Exercices

1.11.1 A) Avec solutions

Exercice 1.14. *Construire la table de vérité de la proposition suivante :*

$$R = \overline{(p \vee q)} \vee (\bar{p} \vee \bar{q}).$$

Solution :
On dresse immédiatement la table suivante, dans laquelle on a inscrit successivement les valeurs de vérité des propositions p, q, $p \vee q, \overline{p \vee q}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{p} \vee \bar{q}$ et enfin R.

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	R
V	V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Exercice 1.15. *Démontrer que les deux propositions $p \Rightarrow q$ et $\bar{p} \vee q$ sont logiquement équivalentes :*

Solution :
Formons d'abord la table de vérité de chacune des propositions considérées. On obtient les tables ci-dessous :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Ces tables montrent immédiatement que l'on a

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q).$$

Exercice 1.16. *Trois nombres, a, b, et c, parmi lesquels il y en a un positif, un négatif et un égal à zéro, sont tels que les trois implications suivantes sont vraies :*

$$a = 0 \Rightarrow b > 0,$$
$$a > 0 \Rightarrow b < 0,$$
$$b \neq 0 \Rightarrow c > 0.$$

Quelle est la qualité de chacun de ces nombres.

Solution :
Supposons que $a = 0$. On a alors les implications vraies suivantes:

$$a = 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow c > 0.$$

L'hypothèse $a = 0$ est donc à rejeter, puisqu'elle entraîne $b > 0$ et $c > 0$, ce qui est contraire au fait que un seul des trois nombres est positif. On a donc, soit $a > 0$, soit $a < 0$.
Supposons $a > 0$. On a alors les implications vraies suivantes:

$$a > 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow c > 0.$$

L'hypothèse $a > 0$ est donc à rejeter, puisqu'elle entraîne $c > 0$.
On a donc finalement $a < 0$.
Examinons le nombres b. Si $b > 0$, on a les implications vraies suivantes :

$$b > 0 \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow c > 0.$$

L'hypothèse $b > 0$ est donc à rejeter, puisqu'elle entraîne $c > 0$.
On a donc $b = 0$ et, par conséquent, $c > 0$.
En définitive, on a

$$a < 0, \quad b = 0, \quad \text{et} \quad c > 0.$$

Exercice 1.17. *Soit p et q deux propositions quelconques. Démontrer que, si les implications*

$$(p \text{ et } q) \Rightarrow \bar{q} \tag{1}$$

et

$$(p \text{ et } \bar{q}) \Rightarrow q \tag{2}$$

sont vraies toutes les deux, alors la proportion p est fausse.

Solution : On raisonnera d'abord directement.
Remarquons d'abord que, si p est fausse, les implications (1) et (2) sont vraies, puisque, dans ce cas, les propositions (p et q) et (p et $\bar{q}$) sont fausses toutes les deux, quelle que soit la valeur de vérité de q.
Il suffit donc de monter que, si p est vrai, l'une au moins des implications (1) et (2) est fausse. Supposons donc p vraie. Alors,
si q vraie, l'implication (1) est fausse, puisque, dans ce cas, on a (p et q) vraie et $\bar{q}$ fausse.
si q est fausse (donc $\bar{q}$ vraie), c'est l'implication (**??**) qui est fausse, puisque, dans ce cas, on a (p et $\bar{q}$) vraie et q fausse.
Finalement, les implications (1) et (2) sont vraies simultanément si, et seulement si, la proposition p est fausse.
....

1.11.2 B) Sans solutions

Exercice 1.18. *Donner la négation des propositions suivantes:*
1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x > y,$
2. $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x = y + 1$

Exercice 1.19. *Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :*
1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z}) : x^2 \geq n,$
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x - y = 1$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2x + 3 > 0$

Exercice 1.20. *Construire la table de vérité des propositions suivantes:*
1. $(p \Rightarrow q)$ *et* $\bar{q}$
2. $(p$ *ou* $q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

Exercice 1.21. *1. Soit A la proposition suivante:*
"Tout nombre réel est, la somme de deux nombres premiers "
Mettre cette proposition sous forme symbolique.
2. Soit B la proposition suivante:

$$"\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x > n"$$

traduire cette proposition en langage courant.

Exercice 1.22. *Parmi les énoncés suivants distinguer ceux qui sont vrais de ceux qui sont faux; dans certains cas il faudra discuter suivant les valeurs attribuées aux variables.*
1. Les droites D et D' non parallèles sont sécantes.
2. Tout nombre entierstrictement positif pair x n'est pas un nombre premier.
3. L'équation $5x - 7 = 0$ a une solution unique.
4. $x + y$ et $x - y$ sont tous deux pairs (x et y sont des entiers).
5. $x + y$ et $x - y$ sont de même parité (x et y sont des entiers).

Exercice 1.23. *Soient P et Q deux propositions. Montrer*

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P}$ *ou* $Q)$

2. $(P \bar{\Rightarrow} Q) \Leftrightarrow P$ *et* $\bar{Q}$.

Exercice 1.24. *On considère les énoncé suivants :*
p : tous les chats comprennent le français.
q : certains oiseaux sont des chats.
r : certains oiseaux comprennent le français.
L'énoncé

$$(p \text{ et } q) \Rightarrow r$$

est-il vrai ? (D'après Lewis Caroll.)

Exercice 1.25. *trois jeunes filles, Manal, Aicha et Nada, ont prononcé les phrases suivantes :*
Manal :" j'ai 22 ans, j'ai 2 ans de moins que Aicha, j'ai 1 an de plus que Nada",
Aicha :" Je ne suis pas la plus jeune, Nada et moi avons 3 ans d'écart, Nada a 25 ans",
Nada :" Je suis plus jeune que Manal, Manal a 23 ans, Nada a 3 ans de plus que Manal".
Peut-on déterminer l'âge de chacune d'elles, sachant qu'une, et une seule, des assertions de chaque jeune fille est fausse ?

2 Raisonnements

2.1 Raisonnement direct

Exemple 2.1. *Montrer que si* $a, b \in \mathbb{Q}$ *alors* $a + b \in \mathbb{Q}$.

Solution. Prenons $a, b \in \mathbb{Q}$. Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ pour un certain $p' \in \mathbb{Z}$ et un certain $q' \in \mathbb{N}^*$. Maintenant

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}, q'' \in \mathbb{N}$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

2.2 Cas par cas

Exemple 2.2. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - 2| \leq x^2 - x + 2$$

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas:
Premier cas : $x \geq 2$. Alors $|x-2| = x-2$. Calculons alors $x^2 - x + 2 - |x-2|$.

$$\begin{aligned} x^2 - x + 2 - |x - 2| &= x^2 - x + 2 - (x - 2) \\ &= x^2 - x + 2 - x + 2 \\ &= x^2 - 2x + 4 \\ &= (x - 1)^2 + 3 \geq 0 \end{aligned}$$

Deuxième cas : $x < 2$. Alors $|x - 2| = -x + 2$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} x^2 - x + 2 - |x - 2| &= x^2 - x + 2 - (-x + 2) \\ &= x^2 - x + 2 + x - 2 \\ &= x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion. Dans tous les cas $|x - 2| \leq x^2 - x + 2$.

2.3 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [\bar{q} \Rightarrow \bar{p}]$$

Exemple 2.3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que si* n^2 *est pair alors* n *est pair.*

Solution. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2l+1$ avec $l = 2k^2+2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.
Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

2.4 Raisonnement par l'absurde

Nous voulons démontrer qu'une proposition q est vraie. Si $[\bar{q} \Rightarrow p]$ est vraie et si p est fausse, alors $\bar{q}$ est fausse donc q est vraie.

Exemple 2.4. *Démontrons que, dans un plan, si deux droites D et D' sont parallèles et distinctes et si une troisième droite D'' coupe l'une, par exemple D en A, alors D'' coupe D'.*

Solution : Soit les propositions

q :"D'' coupe D' ", p : "$D''//D'$ ", et r : "$D'' = D$"

dont on veut démontrer la vérité.
L'implication : $\bar{q} \Rightarrow p$ est vraie.
L'implication : $p \Rightarrow r$ est vraie, car si deux droites D et D'' passent par A et son parallèles à D', elles sont confondues.
La proposition r est fausse puisque D'' coupe D en A. On a donc :
$(p \Rightarrow r)$ vraie et r fausse, donc p est fause,
$(\bar{q} \Rightarrow p)$ vraie et p fausse, donc $\bar{q}$ est fausse. Par suite q est vraie.

Exercice 2.5. *Montrer que* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2.5 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type "$\forall x \in E : P(x)$" est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de "$\forall x \in E : P(x)$" est "$\exists x \in E : \overline{P(x)}$"). Trouver un tel x c'est trouver un **contre-exemple** à l'assertion "$\forall x \in E : P(x)$".

Exemple 2.6. *Montrer que l'assertion suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés". Par exemple* $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$

Solution. Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais $0 + 1 + 4 \neq 7$.

Exercice 2.7. *Soit E l'ensemble des entiers naturels divisibles par 6 et par 4. Démontrer que la proposition*

$$p : (\forall x \in E)\ (x \text{ est divisible par } 24)$$

est fausse.

2.6 Raisonnement par équivalences successives

Si les équivalences suivantes sont vraies :

$$p \Leftrightarrow q,\ q \Leftrightarrow r,\ r \Leftrightarrow s$$

on a aussi l'équivalence vraie : $p \Leftrightarrow s$.
Nous écrivons alors pour simplifier l'écriture : $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow s$

Exemple 2.8. *Cherchons l'ensemble des solutions de :*

$$(E) :\ x^2 = 9$$

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, an a :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0\\ &\Leftrightarrow [(x-3=0) \text{ ou } (x+3=0)]\\ &\Leftrightarrow [x = 3 \text{ ou } x = -3]\end{aligned}$$

L'nsemble cherché est $S = \{-3, 3\}$.

2.7 Raisonnement par récurrence

Soit $R(n)$ une propriété dépendant d'un entier n. On suppose que

1. **la relation R(0) est vraie,**
2. **la relation R(n) $\Rightarrow$ R(n + 1) est vraie,**

alors R(n) est vraie pour tout n.

Exemple 2.9. *Démontrons que : pour tout entier naturel n non nul :*

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

En effet soit

$$P_n : \text{"}1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}\text{"}$$

Vérifions que p_1 est vraie
Si $n = 1$, le membre de gauche vaut 1. Le membre de droite vaut , $\frac{1(1+1)}{2}$ soit 1 aussi,
on a bien $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ autrement dit : p_1 est vraie.
Soit n un entier naturel non nul,
Si p_n est vraie, alors $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, il s'agit d'en déduire que p_{n+1} est vraie
alors, en ajoutant $n + 1$ à chaque membre,

$$1 + 2 + ... + n + (n + 1) = \tfrac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$$

alors, en factorisant le membre de droite:

$$1 + 2 + ... + n + (n + 1) = \tfrac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc

$$1 + 2 + ... + n + (n + 1) = \tfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

alors p_{n+1} est vraie.
D'où d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n suprieur ou égal à 1 : p_n est vraie.

2.8 Exercices

2.8.1 A) Avec solutions

Exercice 2.10. *Montrer par récurrence que : Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution : L'égalité est vraie au rang 1: $1^2 = \frac{1\times 2\times 3}{6}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la vraie au rang n et montrons la au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2, \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= (\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1))(n+1) \\
&= \frac{2n^2+7n+6}{6}(n+1) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

et la formule est encore vraie au rang $n+1$. On termine en appliquant le théorème de récurrence.

Exercice 2.11. *(Inégalité de Bernoulli)*
Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli : $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$*,*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Solution : Soit $x \geq 0$. Si $n = 0$ l'inégalité est clairement vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie au rang n et prouvons la au rang $n+1$. Par application de l'hypothèse de récurrence :

$$1 + (n+1)x = 1 + nx + x \leq (1+x)^n + x \leq (1+x)^n + x(1+x)^n = (1+x)^{n+1}$$

car $1 + x > 0$. La formule est alors prouvée par application du théorème de récurrence. Remarquons que cette démonstration est encore valable si $x > -1$.

Exercice 2.12. *:*
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$*,*

$$n(n^2+5) \quad \textit{est divisible par} \quad 6.$$

Solution : La propriété est clairement vraie au rang 0 ce qui nous permet d'initialiser la récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que 6 divise $n(n^2+5)$. Montrons que 6 divise $(n+1)((n+1)^2+5)$. Mais

$$(n+1)((n+1)^2+5) = n(n^2+5) + 3n^2 + 3n + 6 = n(n^2+5) + 3n(n+1) + 6$$

et :
•) $n(n^2+5)$ est divisible par 6 d'après l'hypothèse de récurrence.
•) 3n(n +1) est divisible par 6 car l'un des deux n ou n +1 est pair donc divisible par 2.
•) Donc $(n+1)((n+1)^2+5)$ est divisible par 6 et la propriété est prouvée par récurrence.

Exercice 2.13. *:*
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Solution : On vérifie facilement la propriété au rang 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n et prouvons la au rang $n+1$. Il s'agit de montrer que $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ est divisible par 7. Mais :

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 3^{2n+1} \times 9 + 2^{n+2} \times 2 = 3^{2n+1} \times 7 + (3^{2n+1} + 2^{n+2}) \times 2.$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, il est clair que 7 divise ce nombre. La propriété est alors prouvée par récurrence.

....

2.8.2 B) Sans solutions

Exercice 2.14. *Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la somme de n termes*

$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + ... + \frac{1}{n\times(n+1)}$$

1. *Calculer S_1, S_2, S_3, S_4.*
2. *Proposer une formule en n pour S_n.*
3. *Démontrer cette formule par récurrence.*

Exercice 2.15. *Démontrer par récurrence que :*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n+1$*

Exercice 2.16. *Démontrer que :*

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$

2. $\forall a \in \mathbb{N},\ \sqrt{a^2 + \sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + 8a + 3}}} \notin \mathbb{N}$

Exercice 2.17. *Pour quelles valeurs du nombre réel x la proposition*

$$(2x^2 + 5x - 12 < 0 \text{ ou } x^2 + 3x + 2 > 0)$$

est-elle vraie.

Exercice 2.18. *Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse en faisant une démonstration.*

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (|x| = x \text{ ou } |x| = -x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z} : x^2 - y = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z} : x^2 - y = 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z} : x^2 - y = 0.$