

Chapitre III :

Modélisation du
comportement plastique

III. Modélisation du comportement plastique

La plupart des modèles de loi de comportement expriment la contrainte d'écoulement comme une fonction mathématique de la déformation, de la température et de la vitesse de déformation [Meyer 1992]. Dans le domaine de vitesse de déformation, de température et de déformation pour lesquels ils sont valides, l'adéquation qu'ils présentent avec les résultats expérimentaux est excellente lorsque les paramètres de chargement restent constants. Cependant, lorsqu'ils varient au cours de la déformation (par changement de direction ou de vitesse de sollicitation, par modification de la température d'essai par exemple), les simulations que proposent ces modèles ne s'accordent que de manière imparfaite avec les courbes expérimentales. Le trajet de chargement joue donc un rôle capital sur la réponse mécanique d'un matériau.

Pour parvenir à retraduire cette influence du chargement, de nouveaux modèles viscoplastiques se sont développés depuis deux décennies. Ces derniers dissocient de manière plus ou moins explicite la sensibilité à la température et à la vitesse de déformation en deux composantes : une sensibilité instantanée et une sensibilité à "l'histoire". La première traduit l'adaptation immédiate de l'état microstructural aux conditions de chargement, la seconde, l'influence de ces conditions sur l'évolution de l'état microstructural.

Au cours de ce chapitre nous présentons différents modèles et principalement ceux qui parviennent à restituer les effets "d'histoire" du chargement.

III.1. Modèles "classiques"

Les modèles qui considèrent la déformation comme variable d'état retraduisent de façon très satisfaisante le comportement des métaux si les conditions de chargement ne sont pas modifiées au cours de l'essai.

Les premières équations empiriques prennent en compte uniquement l'écrouissage :

$$\text{Hollomon : } \sigma = K \varepsilon^n \quad \text{ou} \quad \tau = K' \gamma^n$$

$$\text{Ludwik [1909] : } \sigma = \sigma_y + K \varepsilon^n \quad \text{ou} \quad \tau = \tau_y + K' \gamma^n$$

En se basant sur ce formalisme, plusieurs modèles ont introduit l'influence de la vitesse de déformation et de la température. A titre d'exemple, nous pouvons citer les modèles de :

Klopp, Klifton et Shawki [1985] : $\tau = \tau_0 \gamma^n T^\nu \dot{\gamma}^m$

Litonski [1977] : $\tau = C \gamma^n (1-A T) (1+B \dot{\gamma})^m$

Johnson et Cook [1983] : $\tau = (A + B \gamma^n) [1 + C \ln(\dot{\gamma})] \left[1 - \left(\frac{T - 293}{T_m - 293} \right)^m \right]$

Au cours des années 70, le modèle de Hart [1967] a connu un certain essor. Il fournit des critères d'apparition d'instabilité lors d'un essai de traction.

Zerilli et Armstrong [1987] proposent une équation qui se base sur des mécanismes plus microstructuraux en prenant en compte l'influence de la taille moyenne des grains D , et en tentant de restituer des phénomènes d'activation thermique :

C.C. $\sigma = \sigma_0 + B_0 \exp[(-\beta_0 + \beta_1 \ln \dot{\gamma}) T] + K_0 \epsilon^n + K_\epsilon D^{-1/2}$

C.F.C. $\sigma = \sigma_0 + B_1 \epsilon^{1/2} \exp[(-\beta_0 + \beta_1 \ln \dot{\gamma}) T] + K_\epsilon D^{-1/2}$

Un des intérêts principaux du modèles de Zerilli et Armstrong est de distinguer le comportement des C.C. de celui des C.F.C.

Plus proches des mécanismes que nous avons décrit, Steinberg et Lund, en se basant sur les travaux de Hoge et Mukherjee, proposent l'équation suivante :

$$\sigma = \sigma_a (1 + \beta \epsilon)^n + \sigma^*(T, \dot{\epsilon})$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} \exp\left[\frac{2U_k}{kT} \left(1 - \frac{\sigma^*}{\sigma_p}\right)^2\right] + \frac{C_2}{\sigma^*}}$$

On reconnaît dans la première équation que la contrainte est la somme d'une composante athermique et d'une composante effective qui dépend de la vitesse de déformation suivant des mécanismes activés thermiquement $\left(\frac{1}{C_1} \exp \left[\frac{2U_k}{kT} \left(1 - \frac{\sigma^*}{\sigma_p} \right)^2 \right] \right)$ et de "traînage visqueux" $\left(\frac{C_2}{\sigma^*} \right)$.

Le nombre d'essais pour la détermination des paramètres est très variable suivant la complexité des équations. Si une seule courbe est nécessaire dans le cas des modèles de Hollomon et Ludwik, cela est loin d'être suffisant pour les autres. Cependant, on peut remarquer que tous séparent la limite d'élasticité de l'écrouissage et que ce dernier (à l'exception de Zerilli-Armstrong C.F.C.) est indépendant de la température et de la vitesse de déformation. Des essais à trois vitesses de déformation et trois températures suffisent le plus souvent pour une optimisation complète des constantes. Dans le cas du modèle de Zerilli et Armstrong, il est nécessaire de disposer de matériaux élaborés par différents procédés pour obtenir plusieurs tailles de grains. Le modèle de Steinberg-Lund requiert des essais à très grande vitesse de déformation pour que le terme lié au "traînage visqueux" soit observable.

La structure de tous ces modèles leur interdit de restituer l'influence du chargement thermomécanique. Une fois que l'on fixe une vitesse de déformation et une température, la contrainte d'écoulement prend une valeur unique pour un taux de déformation donné.

Les trois modèles que nous allons à présent exposer permettent, quant à eux, de retraduire ces phénomènes d'histoire du chargement.

III.2. Modèle de Bodner-Partom

Des trois démarches présentées, celle de Bodner et Partom apparaît comme la moins proche des phénomènes microstructuraux. Mis au point en 1972 [Bodner 1972], ce modèle est prévu pour restituer le comportement des métaux et alliages dans un domaine de vitesses de déformation comprises entre 10^{-4} et 10^3 s^{-1} . Pour Bodner et Partom, des processus élastiques (réversibles) et plastiques (irréversibles) interviennent lorsqu'une structure est sollicitée mécaniquement. Ils considèrent que le volume ne varie pas lors de la déformation inélastique

(hypothèse de Prandtl-Reuss) et que la déformation élastique suit les lois de Hooke (valables pour de petites déformations).

A partir de ces hypothèses, ils formulent deux lois empiriques :

- * la première relie la contrainte d'écoulement à l'état du matériau étudié, caractérisé par la vitesse de déformation, la température et un ou plusieurs paramètres représentant la microstructure,
- * la seconde décrit l'évolution de ces paramètres "microstructuraux" au cours de la déformation.

III.2.1. Hypothèses de base

Dans le domaine des petites déformations, le tenseur des vitesses de déformation est la somme de deux composantes, la première élastique, la seconde plastique :

$$/Eq III-1/ \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}^e_{ij} + \dot{\epsilon}^p_{ij}$$

Nous négligeons par la suite la composante élastique par rapport à la composant plastique ($\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}^p_{ij}$)

Le tenseur "inélastique" s'exprime sous sa forme générale comme une fonction du tenseur des contraintes σ_{ij} , de la température T et de l'état microstructural du matériau caractérisé par un ou plusieurs paramètres macroscopiques Z_k :

$$/Eq III-2/ \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} (\sigma_{ij}, T, Z_k)$$

Dans le cadre du modèle, les matériaux suivent une loi d'écoulement de Prandtl-Reuss qui suppose leur incompressibilité :

$$/Eq III-3/ \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda s_{ij}$$

où $\dot{\epsilon}_{ij}$ et s_{ij} sont les déviateurs des tenseurs des vitesses de déformation et des contraintes.
 λ est un facteur de proportionnalité dépendant a priori de σ_{ij} , T et Z_k .

L'équation /Eq III-3/ permet d'écrire la proportionnalité entre le deuxième invariant du tenseur des vitesses de déformations D_2 et le deuxième invariant du déviateur des contraintes J_2 :

$$\text{/Eq III-4/} \quad D_2 = \lambda^2 J_2$$

Le modèle se base sur l'hypothèse que toutes les déformations inélastiques sont gouvernées par une relation continue entre D_2 et J_2 :

$$\text{/Eq III-5/} \quad D_2 = D_2(J_2, T, Z_k)$$

λ dépend alors uniquement de J_2 , T et Z_k .

$$\text{/Eq III-6/} \quad \lambda = \sqrt{\frac{D_2(J_2, T, Z_k)}{J_2}}$$

On arrive ainsi à la formulation de l'équation /Eq III-2/ en réintroduisant l'expression de λ dans /Eq III-3/.

III.2.2. Choix des variables d'état

La forme générale de "l'équation d'évolution", c'est-à-dire de la variation des k variables internes caractérisant l'état du matériau en fonction de l'histoire de la déformation, s'écrit :

$$\text{/Eq III-7/} \quad \dot{Z} = F_k(J_2, T, Z_k)$$

Dans le cas d'un chargement uniaxial de signe constant, Bodner et Partom considèrent qu'un unique paramètre Z caractérise l'état écroui. Les premières versions du modèle ne prennent pas en compte l'écrouissage du matériau [Bodner 1968 & 1972] et ce paramètre reste constant. Par la suite [Bodner 1975 & 1978], Z est une fonction du travail plastique de déformation par le matériau.

Dans le cas d'une sollicitation uniaxiale cyclique, deux variables sont nécessaires pour représenter l'écrouissage dans les deux sens de sollicitation [Stouffer 1979]. La procédure a été

généralisée pour une sollicitation multiaxiale [Stouffer 1979] sans pour cela augmenter le nombre de constantes dépendant du matériau.

Dans tout ce qui suit, nous nous limitons à un chargement uniaxial de signe constant caractérisé par un unique paramètre Z .

III.2.3. Modélisation du 2^o invariant du tenseur des vitesses

Il s'agit dans ce paragraphe d'établir la relation entre D_2 et J_2 .

Bodner et Partom ont choisi une expression de la forme [Bodner 1975 & 78] :

$$\text{/Eq III-8/} \quad D_2 = D_0^2 \exp \left[- \frac{i+1}{i} \left(\frac{Z^2}{3J_2} \right)^i \right]$$

D_0	(s^{-1})	valeur limite de la vitesse de déformation en cisaillement
Z	(MPa)	variable d'état reliée au travail plastique fourni
i	(-)	contrôle la sensibilité à la vitesse.

(Dans un premier temps, i est une constante du matériau qui ne dépend pas de l'histoire du chargement. Dans une formulation plus récente [Bodner 1978] du modèle, Bodner et Merzer stipulent que i dépend linéairement de l'inverse de la température.)

III.2.4. Equation d'évolution

Le paramètre Z est fonction du travail plastique W_p fourni. Bodner et Partom proposent une relation du type [Bodner 1979] :

$$\text{/Eq III-9/} \quad \dot{Z}(W_p) = y (Z_1 - Z_0) [\exp(-y W_p)] \dot{W}_p$$

Cette équation, une fois intégrée conduit à :

$$Z = Z_1 - (Z_1 - Z_0) \exp(-y W_p)$$

- Z_0 (MPa) valeur initiale de Z correspondant à la limite d'élasticité si $i \rightarrow \infty$.
- Z_1 (MPa) valeur de saturation de Z dépendant de l'histoire du chargement (généralement constante)
- y (-) caractérise le comportement du matériau à l'écrouissage.

III.2.5. Détermination des variables

5 paramètres régissent le comportement d'un matériau :

- D_0 valeur limite de la vitesse de déformation en cisaillement. Cette valeur est choisie de manière empirique selon le type de sollicitation imposé au matériau ($D_0 = 10^4 \text{ s}^{-1}$ pour le fluage, 10^6 à 10^8 s^{-1} pour des essais dynamiques).
- Z_0 valeur initiale de la variable d'état Z ,
- Z_1 valeur de saturation de la variable d'état Z ,
- i pseudo-sensibilité à la vitesse,
- y constante du matériau caractérisant sa sensibilité à l'écrouissage,

Un fois le paramètre D_0 fixé, plusieurs essais à différentes vitesses sont nécessaires. Il faut qu'ils soient conduits jusqu'à saturation de la contrainte d'écoulement σ_{max} pour laquelle le paramètre Z vaut Z_1 . A partir de différents couples $(\dot{\epsilon}, \sigma_{max})$, il est possible de déterminer i et Z_1 . Une optimisation par la méthode des moindres carrés sur les différentes courbes de consolidation permet d'accéder aux valeurs de y et Z_0 .

III.2.6. Conclusion

Le modèle de Bodner-Partom nécessite beaucoup moins de coefficients que les deux autres modèles présentés ci-après. Il offre l'avantage d'être applicable dans une large gamme de vitesses de déformation (de 10^{-6} à 10^3 s^{-1}). Cependant, pour une bonne adéquation avec les

expériences, il est parfois nécessaire de modifier la valeur de la vitesse maximale en cisaillement D_0 en fonction de la vitesse de déformation que l'on impose au matériau au détriment de l'universalité de la méthode.

Rajendran, Bless et Dawicke [1986] ont montré que ce modèle est capable de retraduire des comportements de matériaux sensibles ou non à la vitesse de déformation et à l'écroutissage sur une grande gamme de vitesse de déformation.

Un autre avantage est la facilité de détermination des constantes du matériau.

Des tentatives d'extensions [Bodner 1988] pour restituer un comportement anisotrope, un chargement multiaxial et l'endommagement de la structure au cours de la déformation et l'adoucissement thermique existent. Elles se font au détriment de la facilité de détermination des constantes car elles introduisent d'autres paramètres.

Pour de très grandes vitesses de déformation (de l'ordre de 10^6 s^{-1}), Bodner propose [1988] une expression du second invariant des vitesses du type

$$D_2^p = \bar{D}^2 \exp \left[- \left(\frac{Z^2}{3J_2} \right)^n \right] \left(\frac{J_2}{4G^2} \right)$$

ceci afin de rendre compte d'un comportement viscoélastique dû au "traînage visqueux" des dislocations.

Ce modèle parvient à restituer les expériences de saut de vitesse car le paramètre d'état est fonction du travail plastique fourni et non de la déformation : pour une même déformation plastique, le travail plastique emmagasiné n'est pas égal pour deux vitesses de déformation différentes (cf. figure III-1). Si on considère l'équation /Eq III-8/ , pour $\dot{\epsilon}$ donné, deux valeurs différentes de Z conduisent à deux contraintes d'écoulement σ différentes.

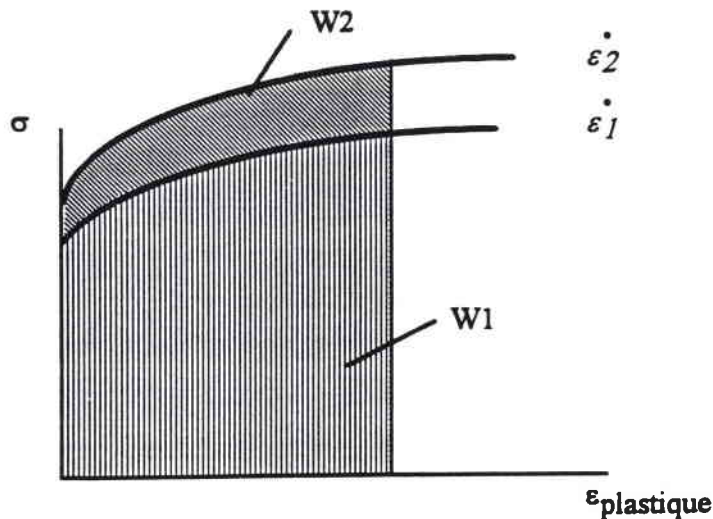


figure III-1 : travail plastique fourni pour deux vitesses de déformation.

Cependant ce modèle repose principalement sur des relations empiriques ne prenant que peu en compte la microstructure. Toutes les grandeurs caractérisant l'état physique du matériau sont macroscopiques et donc difficilement compatibles avec les divers mécanismes de déformation (mouvements de dislocations, maclage). De plus, les différences de comportement entre les types de structures cristallographiques ne peuvent pas être expliquées.

Une autre faiblesse réside dans la détermination du paramètre D_0 . Essentiel pour l'évaluation des autres constantes, il est fixé de manière intuitive selon le type d'essai effectué ($10^4 s^{-1}$ pour des essais de fluage, de $10^6 s^{-1}$ à $10^8 s^{-1}$ pour des essais dynamiques).

III.3. Modèle MTS

Le modèle MTS (Mechanical Threshold Stress) développé depuis 1975 recouvre le même champ d'applications que celui de Bodner et Partom. Originellement développé par Kocks et Mecking [Kocks et al 1975b], il doit son évolution à de nombreux auteurs, parmi lesquels Estrin [Estrin et al 1981] et Follansbee [Kocks et al 1984]. L'approche, très différente de celle de Bodner et Partom, est voisine de celle de Klepaczko (cf. § III.4). Selon ce modèle, les propriétés mécaniques dépendent uniquement de la structure métallurgique : le changement des propriétés

d'un matériau est lié à l'évolution de sa microstructure. Les dislocations jouent ici un rôle primordial : d'une part leur déplacement régit la déformation plastique, d'autre part, leur densité caractérise à l'état d'écroutissage du matériau. La première partie de ce paragraphe présente la version initiale du modèle, posant les bases de la celle présentée dans un deuxième temps.

III.3.1.Principe du modèle.

Selon ce modèle, la cinétique de l'écoulement plastique lors d'une sollicitation uniaxiale est contrôlée par un unique paramètre de structure S représentant l'état de la microstructure à l'instant considéré. La contrainte d'écoulement est alors déterminée par l'équation cinétique [Kocks 1975b, 1976, 1988], [Mecking 1981], [Estrin 1984] :

$$\text{/Eq III-10/} \quad \sigma = \sigma(S, \dot{\varepsilon}, T)$$

Pour une description complète du comportement en plasticité, l'équation cinétique est reliée à une équation d'évolution qui donne les variations du paramètre de structure en fonction de la déformation :

$$\text{/Eq III-11/} \quad \frac{dS}{d\varepsilon} = E(S, \dot{\varepsilon}, T)$$

Kocks et Mecking affirment que lorsque la déformation plastique augmente, le paramètre S tend vers une valeur de saturation S_s , dépendant de la vitesse de déformation et de la température, et ainsi, la contrainte d'écoulement σ se rapproche d'une valeur limite σ_s , caractérisant un état stable de la contrainte.

Dans cet esprit, toute courbe contrainte/déformation peut être considérée comme une transition de la contrainte d'écoulement d'une valeur initiale vers une structure d'équilibre dépendant de $\dot{\varepsilon}$ et de T .

III.3.2.Equation cinétique initiale

Le paramètre S est assimilé à la densité de dislocations moyenne ρ .

La contrainte d'écoulement $\hat{\sigma}$ à la température $0 K$, appelée contrainte de seuil, vaut [Kocks 1975b] :

$$\text{/Eq III-12/} \quad \hat{\sigma} = \hat{\alpha} G b \sqrt{\rho}$$

$\hat{\alpha}$ constante de l'ordre de l'unité dépendant de la force des interactions entre dislocations,
 G module de cisaillement,
 b vecteur de Burgers.

$\hat{\sigma}$ représente la contrainte mécanique maximale à appliquer pour franchir les obstacles au mouvement des dislocations. Cette contrainte peut être considérée comme paramètre représentant la microstructure de manière équivalente à ρ .

L'activation thermique peut abaisser ce niveau de contrainte nécessaire pour engendrer un écoulement plastique (*figure II-9*). L'expression proposée par Kocks et Mecking pour l'équation cinétique devient alors [Mecking 1981] :

$$\text{/Eq III-13/} \quad \sigma = s(\dot{\epsilon}, T) \hat{\alpha} G b \sqrt{\rho} = s(\dot{\epsilon}, T) \hat{\sigma}$$

avec $s(\dot{\epsilon}, T) \rightarrow 1$ quand $T \rightarrow 0$

La contrainte d'écoulement est le produit d'un terme s , sensible à la vitesse de déformation et à la température, et d'un terme $\hat{\sigma}$ sensible à l'évolution de la microstructure.

Bien que pour les métaux le module de cisaillement G soit une fonction de la température (supposée connue), Kocks et Mecking pensent qu'il intervient dans l'évolution de la microstructure en tant que phénomène athermique car il est insensible à la vitesse de déformation.

Kocks et Mecking postulent que le terme s vaut :

$$\text{/Eq III-14/} \quad s = \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{1/m}$$

Cette équation provient de l'inversion de l'équation d'Arrhénius lorsque la sensibilité à la vitesse $\frac{1}{m} = \left. \frac{\partial(\ln \sigma)}{\partial(\ln \dot{\epsilon})} \right|_{T, \epsilon}$ est indépendante de la contrainte appliquée. (généralement, pour les matériaux C.F.C., m prend des valeurs entre 200 et 500).

Il faut noter que m et $\dot{\epsilon}_0$ dépendent de la température.

De plus lorsque $m \rightarrow \infty$, σ et $\hat{\sigma}$ sont toujours égaux ($s=1$).

Pour commencer, l'influence de l'évolution de la microstructure sur la sensibilité à la vitesse n'est pas prise en compte.

III.3.3. Equation d'évolution initiale

Les évolutions de $\hat{\sigma}$ et celle de ρ sont équivalentes, ces deux grandeurs étant reliées par l'équation /Eq III-12/. Kocks et Mecking proposent une équation d'évolution de la forme :

$$\text{/Eq III-15/} \quad \frac{d\rho}{d\varepsilon} = k_1 \sqrt{\rho} - k_2 \rho$$

Le premier terme $k_1 \sqrt{\rho}$ correspond au stockage athermique ($k_1 = \text{cte}$) des dislocations mobiles quand elles s'immobilisent après avoir parcouru une distance proportionnelle à l'espacement moyen entre deux dislocations ($\sqrt{\rho}$). Ce processus fournit une explication à l'écroissage athermique (stade II de la courbe τ/γ de la figure II-2). Ainsi, il est possible d'évaluer k_1 .

$$k_1 \approx \frac{2 \theta_{II}}{G} \frac{1}{\hat{\alpha} b} \quad \text{où } \theta_{II} \text{ est la pente de la courbe au stade II } (\theta_{II} \approx \frac{G}{200}).$$

Le second terme $k_2 \rho$ est associé à l'annihilation des dislocations par restauration dynamique (stade III de la courbe τ/γ). Ce mécanisme est activé thermiquement ($k_2 = k_2(\dot{\varepsilon}, T)$) et suit une cinétique du 1^o ordre (linéaire en ρ).

La formule /Eq III-15/ laisse entendre que les processus de réarrangement et de stockage des dislocations se superposent de manière linéaire.

En combinant /Eq III-12/ et /Eq III-15/, on obtient l'équation d'évolution relative à la contrainte $\hat{\sigma}$:

$$\text{/Eq III-16/} \quad \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \theta_0 \left(1 - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_s} \right)$$

avec

$$\text{/Eq III-17/} \quad \theta_0 = \frac{\hat{\alpha} G b k_1}{2}$$

$$\text{/Eq III-18/} \quad \hat{\sigma}_s = \frac{\hat{\alpha} G b k_1}{k_2}$$

D'après /Eq III-16/ , le paramètre $\hat{\sigma}$ évolue au cours de la déformation vers la valeur de saturation $\hat{\sigma}_s$.

L'expérience montre que θ_0 est insensible à la vitesse de déformation (pour $\dot{\epsilon} < 10^3 \text{ s}^{-1}$) et ne dépend de la température qu'au travers du module de cisaillement G . En revanche, $\hat{\sigma}_s$ (dépendant de k_2) est un paramètre activé thermiquement.

Kocks et Mecking proposent une relation empirique de k_2 :

$$\text{/Eq III-19a/} \quad k_2 = k_0 \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{1/n}$$

équivalent à :

$$\text{/Eq III-19b/} \quad \frac{\hat{\sigma}_s}{\hat{\sigma}_{s_0}} = \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{1/n}$$

Dans le domaine des basses températures, $\hat{\sigma}_{s_0}$ et $\dot{\epsilon}_0$ sont constants mais n dépend de la température.

Dans le domaine des hautes températures, n est constant (typiquement, $n = 4$) mais $\dot{\epsilon}_0$ dépend de la température suivant une loi d'Arrhénius :

$$\dot{\epsilon}_0 \propto \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right) \quad \text{où } Q \text{ est l'énergie d'activation d'autodiffusion.}$$

III.3.4. Détermination des paramètres du modèle

L'érouissage initial θ_0 et la contrainte de saturation σ_s sont extraits d'une courbe de consolidation expérimentale, L déterminés pour une température et une vitesse de déformation données.

Les paramètres m et n peuvent être obtenus par des expériences de saut de vitesse statique/dynamique ou par changement de contrainte au cours d'une expérience de fluage. m correspond à la réponse instantanée, n à la variation des valeurs de saturation.

Après le calcul des sensibilités m et n , on a accès aux constantes $\hat{\sigma}_{s_0}$ et $\dot{\epsilon}_0$ donc à la contrainte de saturation $\hat{\sigma}_s$ associée à cette température (équation /Eq III-19b/).

Il est alors possible d'intégrer l'équation d'évolution (Eq III-16) de $\hat{\sigma}$ pour différentes histoires de sollicitation.

L'équation (Eq III-13) donne alors la contrainte d'écoulement au cours de la déformation.

III.3.5. Seconde formulation de l'équation cinétique

Dans une formulation plus récente de ce modèle, Follansbee et Kocks [Kocks et al 1988] séparent la contrainte de seuil en deux composantes :

$$\text{/Eq III-20/} \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_a + \hat{\sigma}_t$$

$\hat{\sigma}_a$ contrainte athermique représentant les interactions des dislocations avec les obstacles à longue distance (joints de grains ...) ; c' est une constante qui est petite devant $\hat{\sigma}$.

$\hat{\sigma}_t$ contrainte thermiquement activée représentant les interactions entre dislocations.

L'expression de la contrainte d'écoulement devient :

$$\text{/Eq III-21/} \quad \sigma = \hat{\sigma}_a + s(\dot{\epsilon}; T) \hat{\sigma}_t$$

D'après les travaux de Regazzoni, Kocks et Follansbee [1987], s est inférieur à 1 pour des vitesses de déformations inférieures à 10^4 s^{-1} car le glissement plastique est contrôlé par l'activation thermique et les effets de la viscosité dynamique sur les dislocations sont négligeables.

Dans le domaine d'activation thermique :

$$\text{/Eq III-22/} \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \exp \left[- \frac{\Delta G(\sigma_t / \hat{\sigma}_t)}{kT} \right]$$

ΔG étant donné par l'équation phénoménologique :

$$\text{/Eq III-23/} \quad \Delta G = g_0 G b^3 \left[1 - \left(\frac{\sigma_t}{\hat{\sigma}_t} \right)^p \right]^q$$

g_0 énergie d'activation normalisée

b vecteur de Burgers

p et q représentant la forme des obstacles au mouvement des dislocations.

Kocks et Follansbee arrivent donc à une expression de la contrainte d'écoulement comme fonction simple du paramètre de structure $\hat{\sigma}$, de $\dot{\varepsilon}$ et de T [Kocks et al 1988] :

$$\text{/Eq III-24/} \quad \sigma = \hat{\sigma}_a + (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_a) \left[1 - \left[\frac{kT \ln(\dot{\varepsilon} / \dot{\varepsilon}_0)}{g_0 \mu b^3} \right]^{1/q} \right]^{1/p}$$

III.3.6. Seconde formulation de l'équation d'évolution

L'évolution de la microstructure est toujours considérée comme l'équilibre entre l'accumulation de dislocations et la restauration dynamique. Le taux d'écrouissage paramètre $\theta = \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon}$ caractérise l'évolution de la microstructure au cours de la déformation.

$$\text{/Eq III-25/} \quad \theta = \theta_0 - \theta_r(\hat{\sigma}, \dot{\varepsilon}, T)$$

Dans la version du modèle présentée précédemment, on aboutit à l'équation connue sous le nom d'équation de Voce :

$$\theta = \theta_0 \left[1 - \frac{\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_a}{\hat{\sigma}_s(\dot{\varepsilon}, T) - \hat{\sigma}_a} \right]$$

Kocks et Follansbee [Kocks et al 1988] choisissent une équation plus générale

$$\text{/Eq III-26/} \quad \theta = \theta_0 \left[1 - F \left(\frac{\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_a}{\hat{\sigma}_s(\dot{\varepsilon}, T) - \hat{\sigma}_a} \right) \right]$$

F fonction empirique.

(Dans le cas du cuivre pur à 99,99%; ils proposent $F(X) = \frac{\tanh(2X)}{\tanh(2)}$).

Le point important de leur étude est que l'écrouissage initial θ_0 est constant jusqu'à des vitesses de déformation inférieures à 10^3 s^{-1} mais augmente de manière abrupte au-delà. Ils envisagent une loi du type :

$$\text{/Eq III-27/} \quad \theta_0(\dot{\varepsilon}) = A_1 + A_2 \ln(\dot{\varepsilon}) + A_3 \dot{\varepsilon}$$

L'équation /Eq III-26/ suggère que la contrainte de seuil tend vers une valeur de saturation dépendant des conditions de sollicitation. Kocks et Mecking proposent la relation suivante

$$\text{/Eq III-28/} \quad \frac{\hat{\sigma}_s}{\hat{\sigma}_{s_0}} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{kT / AGb^3}$$

III.3.7. Conclusion

Le modèle MTS a été testé avec succès pour des vitesses de déformation variant de 10^{-4} s^{-1} à 10^4 s^{-1} pour des déformations allant jusqu'à 100%. Il ne prend en compte qu'un paramètre d'état censé représenter la microstructure. Il comporte deux étapes essentielles :

- 1° la détermination de la contrainte d'écoulement en fonction des conditions de chargement ($\dot{\varepsilon}$ et T) pour un état microstructural $\hat{\sigma}$ donné,
- 2° l'évolution de la microstructure au cours de la déformation.

Kocks et Mecking [Mecking et al 1981] soulignent que les matériaux pour lesquels le modèle est applicable ont un comportement de "Cottrell-Stokes" (les courbes $\sigma(\varepsilon)$ se déduisent les unes des autres par une homothétie de rapport $s(\dot{\varepsilon}, T)$). Ceci est très rarement le cas pour de grandes vitesses de déformation et simultanément pour toute température mais se vérifie dans le domaine des faibles températures jusqu'à des déformations assez importantes, tandis que dans le domaine des températures élevées, cette loi est applicable pour de très petites déformations. Ils proposent de considérer la restauration dynamique,

$$\theta_r(\hat{\sigma}, \dot{\varepsilon}, T) = \theta - \theta_0 ,$$

comme un second paramètre de structure pour expliquer les déviations observées entre la réalité et le comportement de "Cottrell-Stokes".

Une autre possibilité proposée par Kocks et Follansbee [Kocks et al 1988] pour expliquer cette déviation est la variation de l'énergie d'activation normalisée g_0 en fonction de $\hat{\sigma}$.

Ce modèle est "gourmand en paramètres" mais présente l'avantage de donner un sens à chacune de ses équations, qu'elles soient fondées sur des phénomènes physiques ou phénoménologiques.

III.4. Modèle de Klepaczko

Klepaczko propose de modéliser le comportement dans un domaine de vitesses de déformation et de températures pour lequel les phénomènes prépondérants sont des mécanismes athermiques et thermiquement activés. Ce domaine correspond à des températures comprises entre 0 K et $T_m/3$, et à des vitesses de déformation comprises entre 10^{-4} s^{-1} et 10^3 s^{-1} .

L'approche adoptée pour rendre compte de l'évolution d'un matériau au cours de l'écoulement plastique, est de relier les variables internes aux paramètres de structure (tels la densité moyenne de dislocations, la taille des grains, des sous-grains...) puis de considérer leur variation pendant la déformation. Le modèle repose sur trois hypothèses de base.

1/ Le cisaillement est le mode fondamental de déformation en plasticité.

2/ La cission résolue τ_{RS} est la somme d'une composante effective τ_{RS}^* et d'une composante interne τ_{ARS} : (Eq II-2)

$$\tau_{RS} = \tau_{ARS} + \tau_{RS}^*$$

τ_{RS}^* dépend fortement de la vitesse de déformation et de la température. Cette dernière a peu d'influence sur la contrainte interne τ_{ARS} . Elle agit sur la valeur du module de cisaillement $G(T)$ et faiblement sur le coefficient d'interaction α (phénomènes de restauration). C'est pourquoi, dans la littérature, τ_a est fréquemment appelée contrainte athermique. La relation entre la cission résolue et la contrainte d'écoulement pour un polycristal est donnée par les formules d'homogénéisation de Taylor :

$$\sigma = \bar{M}_\sigma \tau_{RS} \quad \text{en traction ou compression}$$

$$\tau = \bar{M}_\tau \tau_{RS} \quad \text{en cisaillement.} \quad (\bar{M}_\sigma = 3,06 \text{ pour les C.F.C.})$$

3/ Deux facteurs contribuent aux effets de l'histoire du chargement. Le premier lié à τ_{RS}^* correspond à la réponse instantanée d'une microstructure soumise à une sollicitation ; le second associé à τ_{ARS} se rapporte à l'histoire de la création de cette microstructure (figure III-2).

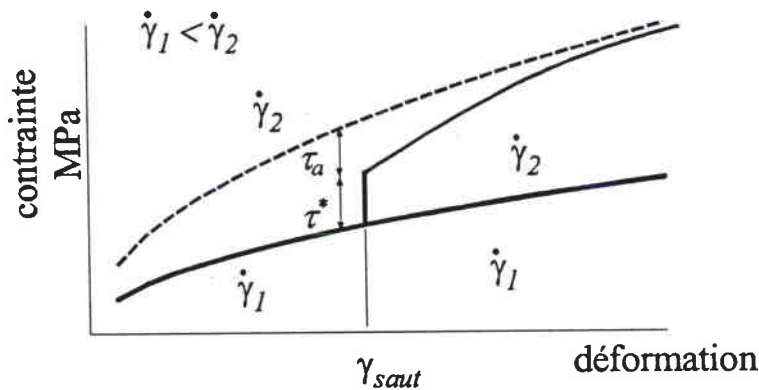


figure III-2: réponse instantanée et phénomènes d'histoire lors d'un test de saut de vitesse (cas C.F.C.).

Pour l'instant, la densité de dislocations est l'unique paramètre représentant l'état microstructural du matériau. Elle évolue différemment selon les paramètres de chargement. Cela permet donc de restituer les phénomènes d'histoire.

Le modèle repose donc sur deux types de lois :

- une loi cinétique reliant la contrainte d'écoulement à la microstructure;
- une loi d'évolution décrivant les changements de la microstructure.

III.4.1. Loi cinétique

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, la cission interne peut s'écrire sous la forme :

$$\tau_a = \alpha_1 G b \sqrt{\rho} + \alpha_2 G \sqrt{\frac{b}{d(\rho)}} + \alpha_3 G \sqrt{\frac{b}{D}} + \alpha_4 G \sqrt{\frac{b}{\Delta}}$$

Dans cette équation, G représente le module de cisaillement, b le vecteur de Burgers et les termes α_i des facteurs qui caractérisent la force entre les obstacles et les dislocations. α_1 est de l'ordre de l'unité alors que α_2 , α_3 et α_4 sont petits devant 1. On reconnaît dans cette formule la loi de Hall-Petch reliant la contrainte d'écoulement à l'inverse de la racine carrée de la taille de grain.

Ici, la cission interne est mise sous la forme générale :

/Eq III-29/
$$\tau_a = \alpha(\rho, d, D, \Delta) G(T) b \sqrt{\rho}$$

La contrainte interne est proportionnelle au module de cisaillement car le mouvement des dislocations est directement régi par la rigidité du réseau. Klepaczko suppose que ce module dépend de la température de la façon suivante :

/Eq III-30/
$$G(T) = G_0 \left[1 - \frac{T}{T_m} \exp\left(\theta^* \left(1 - \frac{T}{T_m}\right)\right) \right]$$

T_m est la température de fusion,

θ^* est une constante du matériau étudié,

G_0 est le module de cisaillement à 0 K.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, dans le cadre de mécanismes activés thermiquement (*Eq II-5*), la vitesse est reliée à la contrainte effective. Klepaczko modifie cette équation en indiquant que le facteur pré-exponentiel est fonction de la densité de dislocations mobiles :

$$\text{/Eq III-31/} \quad \dot{\gamma} = \nu(\rho_m) \exp\left[-\frac{\Delta G(\tau^*)}{kT}\right]$$

Il reprend l'expression de l'énergie d'activation ΔG proposée par Kocks, Argon et Ashby [1975] : (*Eq II-7*)

$$\Delta G(\tau^*) = \Delta G_0 \left[1 - \left(\frac{\tau^*}{\tau_0}\right)^p\right]^q$$

En supposant que le facteur de fréquence ν ne dépend pas de la contrainte (hypothèse communément acceptée pour les métaux C.F.C.), il est possible d'inverser l'équation *Eq II-7* :

$$\text{/Eq III-32/} \quad \tau^* = \tau_0 \left[1 - \left(\frac{kT}{\Delta G_0} \ln \frac{\nu(\rho_m)}{\dot{\gamma}}\right)^{1/p}\right]^{1/q}$$

τ_0^* , contrainte effective maximale (à 0 K) est évaluée à partir de la modélisation du franchissement par une dislocation de l'obstacle thermiquement activé de plus grande énergie.

Dans le cas des matériaux à structure C.F.C., le mécanisme qui contrôle l'écoulement plastique est le franchissement des forêts de dislocations immobiles [Klepaczko et al 1993], [Kocks et al 1975a]. La contrainte effective maximale dépend de densité de la forêt :

$$\text{/Eq III-33/} \quad \tau_0^* = \frac{\Delta G_0 \sqrt{\rho}}{b a^*}$$

a^* , distance d'activation vaut b dans le cas d'un obstacle de forme rectangulaire. .

Le facteur de fréquence ν dépend de la densité de dislocations mobiles ρ_m (*Eq III-31*). Pour les matériaux C.F.C., Klepaczko suppose que les dislocations mobiles représentent une faible fraction f de la densité totale de dislocations.

$$\text{/Eq III-34/} \quad \nu = \rho_m \nu_D b^2 \quad \text{avec} \quad \rho_m = f \rho \quad (f \ll 1).$$

$\nu_D \approx 10^{13} \text{ s}^{-1}$ est la fréquence de Debye du matériau considéré.

Pour les matériaux C.C. et H.C., cette expression de ρ_m ne convient plus et il faut déterminer sa loi d'évolution en fonction de la vitesse de déformation.

III.4.2. Loi d'évolution

Le point essentiel est de modéliser l'évolution de la microstructure. La densité totale de dislocations est le seul paramètre considéré ici. Klepaczko postule que cette densité varie au cours de la déformation de la manière suivante :

$$\text{/Eq III-35/} \quad \frac{d\rho}{d\gamma} = M_{II}(\dot{\gamma}) - k_a(\dot{\gamma}, T)(\rho - \rho_0)$$

où ρ_0 est la densité initiale de dislocations,

$k_a(\dot{\gamma}, T)$ est le facteur de réarrangement des défauts (annihilation),

$M_{II}(\dot{\gamma})$ est le taux de création de défauts. Klepaczko a montré, en se basant sur les travaux de Morrone et Duffy [1986], que ce coefficient ne dépend pas de la température. Il rejoint en cela Klahn, Dorn et Mukherjee [1970] qui estiment que les sources de Frank et Read ont des énergies d'activation trop importantes pour que l'influence de la température soit significative. $M_{II}(\dot{\gamma})$ est directement relié au libre parcours moyen des dislocations $\lambda(\dot{\gamma})$ par la formule :

$$M_{II}(\dot{\gamma}) = \frac{l}{b\lambda(\dot{\gamma})}$$

Ce libre parcours moyen diminue lorsque $\dot{\gamma}$ augmente. Il est contrôlé par plusieurs types d'obstacles (comme les distances moyennes entre les forêts de dislocations, entre les précipités, le diamètre moyen des sous-grains...), ce qui rend son expression très compliquée. Klepaczko propose une formule empirique du taux de multiplication :

$$\text{/Eq III-36/} \quad M_{II}(\dot{\gamma}) = M_{II} \left[B + C \tanh \left(A \log \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_m} \right) \right]$$

A, B, C sont des constantes intrinsèques au matériau étudié,

$\dot{\gamma}_m$ est fixé à 10^6 s^{-1} représente la valeur de saturation de la vitesse de déformation.

L'annihilation des dislocations est proportionnelle à leur densité. Mecking montre que le facteur multiplicatif dépend de la température et de la vitesse de déformation :

$$\text{/Eq III-37/} \quad k_a(\dot{\gamma}, T) = k_0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right)^{-2m_0 T}$$

k_0 est le facteur d'annihilation à 0 K,

m_0 est la sensibilité de l'écroissage à la vitesse,

$\dot{\gamma}_0$ est la vitesse de seuil.

Nous disposons désormais de tous les éléments pour déterminer la contrainte d'écoulement au cours de la déformation pour une histoire des vitesses donnée.

III.4.3. Interprétation et détermination des paramètres

Le nombre de paramètres nécessaires dans ce modèle est très élevé. Un récapitulatif est donné ci-dessous :

- | | | |
|--------------------------|----------------------|--|
| 1. α | [-] | constante d'interaction sur les dislocations |
| 2. b | [m] | vecteur de Burgers |
| 3. $k = 1,38 * 10^{-23}$ | [J.K ⁻¹] | constante de Boltzmann |
| 4. n | [m] | géométrie du double décrochement |
| 5. ν_D | [s ⁻¹] | fréquence de Debye |
| 6. f | [-] | fraction de dislocations mobiles |
| 7. ΔG_0 | [J] | énergie d'activation |
| 8. p et q | [-] | géométrie de la force de l'obstacle thermiquement activé |
| 9. G_0 | [Pa] | module de cisaillement à 0 K |
| 10. T_m | [K] | température de fusion |
| 11. θ^* | [-] | dépendance du module de cisaillement à la température |
| 12. ρ_0 | [m ⁻²] | densité initiale de dislocations |
| 13. M_0 | [m ⁻²] | constante de multiplication de dislocations |

14. A	[-]	constante du matériau (multiplication des dislocations)
15. B	[-]	constante du matériau (multiplication des dislocations)
16. C	[-]	constante du matériau (multiplication des dislocations)
17. $\dot{\gamma}_m$	[s ⁻¹]	vitesse de saturation (multiplication des dislocations)
18. k_0	[-]	constante d'annihilation des dislocations à 0 K
19. m_0	[K ⁻¹]	dépendance de l'annihilation des dislocations à la température
20. $\dot{\gamma}_0$	[s ⁻¹]	vitesse de seuil (annihilation des dislocations)

Ces constantes sont de deux types :

les constantes physiques fondamentales ($k, v_D, b, G_0, \theta^*, T_m$)

les constantes liées au formalisme adopté ($\alpha, \Delta G_0, \dots$)

Dans la version la plus simple, tous les obstacles thermiquement activés ont une forme rectangulaire et le facteur de multiplication de dislocations ne dépend pas de la vitesse de déformation. ($p = q = 1$, $a^* = b$, $M_{II} = M_0$). Elle nécessite la connaissance des huit constantes suivantes : $\alpha, \Delta G_0, f, \rho_0, M_0, k_0, m_0$ et $\dot{\gamma}_m$. Nous allons étudier cette version plus en détail.

III.4.3.1. Expression de la contrainte d'écoulement

En recombinaison des équations /Eq III-29/, /Eq III-32/ et /Eq III-33/, on arrive à une expression de la contrainte d'écoulement de la forme [Klepaczko 1993] :

$$\text{/Eq III-38/} \quad \tau = G b \sqrt{\rho} \left[\alpha + \frac{\Delta G_0}{G b^3} \left(1 - \frac{kT}{\Delta G_0} \ln \frac{f v_D b^2 \rho}{\dot{\gamma}} \right) \right]$$

La contrainte d'écoulement est une fonction simple de la densité de dislocations. Cette dernière peut être déterminée par des expériences de saut de vitesse.

III.4.3.2. Détermination de la densité de dislocation

Lors d'un saut d'une vitesse $\dot{\gamma}_1$ à une vitesse $\dot{\gamma}_2$ la microstructure ne change pas de manière instantanée. En faisant la différence des contraintes d'écoulement obtenues après et avant le saut, on obtient :

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \sqrt{\rho} \frac{kT}{b^2} \ln \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1}$$

On en déduit la valeur de ρ :

$$\rho = \left[\frac{b^2 \Delta\tau}{kT \ln \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1}} \right]^2$$

Connaissant ρ , il est possible de remonter aux coefficients α , G_0 et f de l'équation /Eq III-38/

III.4.3.3. Détermination des paramètres de l'équation d'évolution

A vitesse de déformation et température constantes, les paramètres de multiplication $M_{II}(\dot{\gamma})$ et d'annihilation $k_a(\dot{\gamma}, T)$ des dislocations sont constants. Il est donc possible d'intégrer l'équation différentielle /Eq III-35/ de manière analytique.

$$\rho = \rho_0 + \frac{M_{II}}{k_a} [1 - \exp(-k_a \gamma)]$$

A partir des densités de dislocations à différents stades de la déformation (déterminées comme indiqué précédemment) pour une vitesse de déformation et une température données, il est possible de déterminer par interpolation les valeurs de $M_{II}(\dot{\gamma})$ et $k_a(\dot{\gamma}, T)$.

III.4.4. Synthèse

A partir de l'histoire des vitesses de déformation au cours du temps, les valeurs instantanées des facteurs de multiplications et d'annihilation sont connues. Il est possible d'intégrer

numériquement l'équation d'évolution /Eq III-35/ et donc de remonter aux expressions de la contrainte effective et de la contrainte interne.

Les prédictions de ce modèle se conforment avec une bonne précision aux résultats expérimentaux sur des matériaux C.F.C. tels l'aluminium [Klepaczko 1987b] (figures III-3 & III-4) ou le cuivre [Zenasni 1992] dans un domaine de vitesses de déformation comprises entre $10^{-4} s^{-1}$ à $10^3 s^{-1}$. Pour des vitesses de déformation encore plus élevées, Klepaczko introduit une contrainte supplémentaire liée à la traînée visqueuse sur les dislocations [Klepaczko 1993 et 1994]. Nous ne nous appesantissons pas ici sur ces phénomènes car ils sont négligeables dans le domaine de vitesse de températures et de déformation que nous avons exploré.

Cependant, deux points du modèle de Klepaczko restent à améliorer.

1/ L'expression de la densité de dislocations mobiles et donc du facteur de fréquence ν ne conviennent plus pour les matériaux C.C. et H.C. Une version plus élaborée du modèle tente de restituer les évolutions des densités de dislocations immobiles d'une part et mobiles d'autre part au cours de la déformation [Klepaczko 1990].

2/ Le taux de création de défauts $M_{II}(\dot{\gamma})$ ne suit pas un modèle physique.

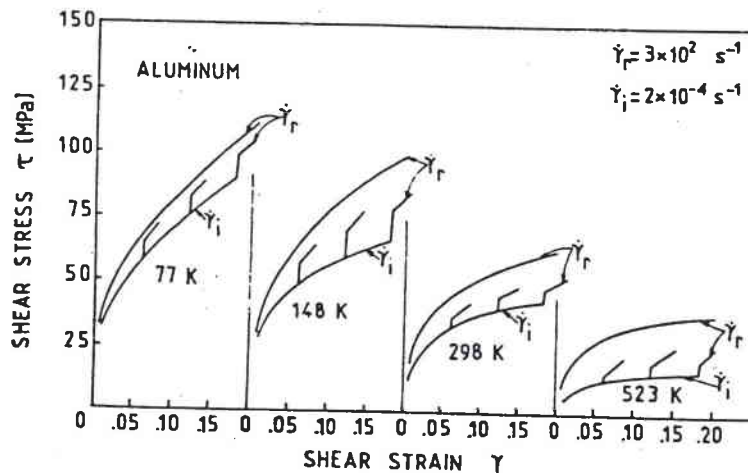
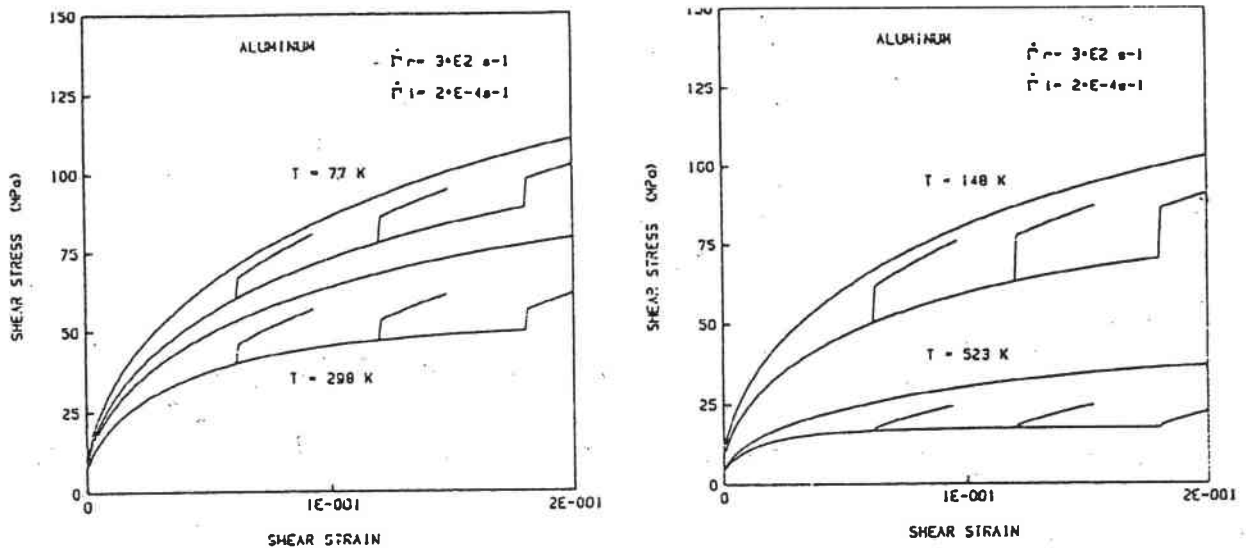


figure III-3 : résultats d'expériences de sauts de vitesse sur l'aluminium [Senseny et al 1978]



*figure III-4 : simulations numériques de sauts de vitesse
[Klepaczko 1988a].*

III.5. Bilan

Les trois modèles présentés fournissent des résultats très satisfaisants lors d'essais uniaxiaux pour une large gamme de déformation et de vitesses de déformations. La déformation n'est, dans aucun des trois, un paramètre d'état mais la conséquence de l'évolution de paramètres microstructuraux. Ils se distinguent en cela des autres modèles. Cette originalité leur permet de restituer certains phénomènes liés à l'histoire thermomécanique du matériau étudié.

La démarche adoptée est identique dans les trois cas :

- 1° relier la contrainte d'écoulement à des paramètres censés caractériser l'état de la microstructure,
- 2° donner une loi d'évolution du ou des paramètres microstructuraux. Ces lois d'évolution ont en commun un comportement asymptotique entraînant une saturation de la contrainte d'écoulement.

Le paramètre microstructural est unique dans les versions "standard" des trois modèles, mais les formulations plus récentes introduisent un second paramètre pour une modélisation plus adaptée.

Bodner et Partom adoptent une démarche empirique où le paramètre principal est le travail plastique. Avec leur modèle, il est possible de simuler des expériences de saut de vitesse. Il présente l'avantage de se contenter de peu de paramètres qui de plus sont relativement aisés à déterminer. Cependant, il est à craindre qu'un modèle basé sur l'expérience conduise à une

multitude de formules suivant le domaine de vitesse considéré (le paramètre D_0 est estimé a priori) et donc à une gestion très lourde pour et par les codes de calcul.

C'est pourquoi des modèles comme ceux de Kocks-Mecking et plus encore de Klepaczko basés sur des phénomènes physiques et n'introduisent des formules empiriques qu'en dernier recours offrent un formalisme apparaissant plus stable, même si cela se fait au détriment de la facilité de détermination des paramètres. Ils se distinguent en cela de la plupart des modèles où l'étape de détermination se fait par une optimisation globale de "boutons de réglages" ajustant le mieux possible une expression mathématique à des points expérimentaux.

Nous avons donc choisi d'adopter par la suite un formalisme voisin de celui proposé par Klepaczko car il nous semble plus proche des phénomènes qui ont lieu au sein du matériau. La détermination des paramètres passe par des essais mécaniques spécifiques tels les sauts de vitesse. C'est pourquoi nous allons introduire dans le prochain chapitre le dispositif expérimental que nous avons mis en œuvre pour nos essais.

Chapitre IV :

Dispositif expérimental :

les barres de Hopkinson