

Chapitre VIII :

Influence du type

de chargement

VIII. Influence du type de chargement

VIII.1. Résultats expérimentaux.

Parallèlement, nous avons mené une étude du comportement du tantale en compression et en traction pour tenter de valider le modèle sur d'autres types de sollicitation.

- les éprouvettes de compression sont des pions cylindriques de diamètre $\phi = 6 \text{ mm}$ et de hauteur $h = 6 \text{ mm}$;
- les éprouvettes de traction sont des cylindres de diamètre $\phi = 2,5 \text{ mm}$ et de hauteur $h = 15 \text{ mm}$ terminés à chaque extrémité par un pas de vis.

VIII.1.1. Essais quasi statiques

Les essais de traction ont été réalisés sur une machine mécanique de type Zwick et de capacité maximale 100 kN , ceux de compression sur une machine hydraulique de type MTS et de capacité maximale 50 kN , toutes deux asservies en déplacement. Les vitesses de déformation uniaxiale $\dot{\epsilon}$ prennent les valeurs suivantes : $2,2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $2,2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $2,2 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$.

Après rationalisation des courbes force/allongement, nous obtenons les faisceaux de courbes de contrainte vraie en fonction de la déformation plastique (fig. VIII-1 et VIII-2):

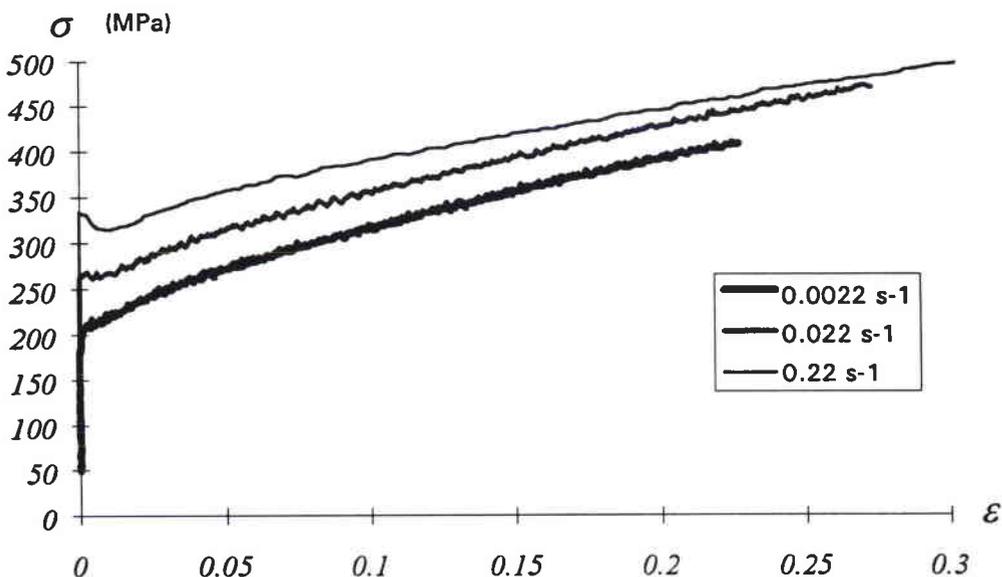


figure VIII-1 : courbes de consolidation du tantale en compression à différentes vitesses de déformation.

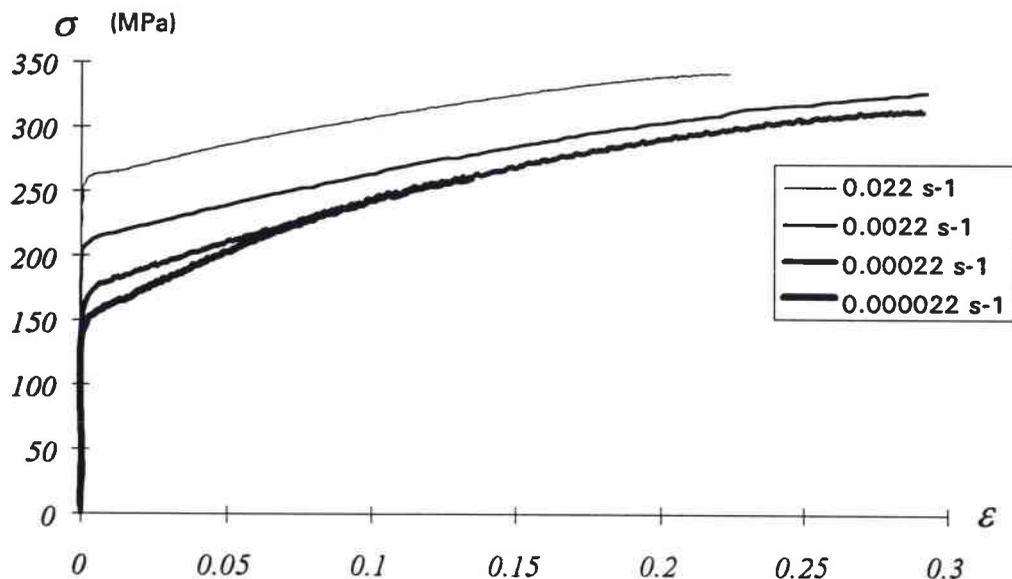


figure VIII-2 : courbes de consolidation du tantale en traction à différentes vitesses de déformation.

VIII.1.2. Essais dynamiques

Les essais de compression dynamique ont été réalisés sur les barres de compression décrites au chapitre IV. Ces essais adiabatiques effectués à 1000 s^{-1} ont pour but de vérifier que ces phénomènes d'histoire ne sont pas dus au type de chargement. Comme les effets d'histoire sont peu visibles lors d'un saut "statique/dynamique", nous nous sommes contentés de réaliser des essais de saut "dynamique/statique".

En compression dynamique, des phénomènes dispersifs d'inertie radiale dans les barres dus à la propagation des ondes de contrainte uniaxiale entraînent des oscillations sur les signaux. Ces oscillations expliquées par la théorie de Pochhammer et Chree dépendent du diamètre des barres. Ils peuvent être en partie supprimés par le logiciel de traitement des signaux DAVID. Cependant, contrairement à la torsion, il est impossible de déterminer la limite d'élasticité dynamique.

Ces essais dynamiques ont été suivis d'essais à vitesse quasi statique (10^{-4} s^{-1}) après avoir bloqué la déformation dynamique à 0,11 ; 0,16 ; 0,22 et 0,28. Après lissage des signaux et transformation "adiabatique/isotherme", on obtient des courbes isothermes suivantes (figure VIII-3) :

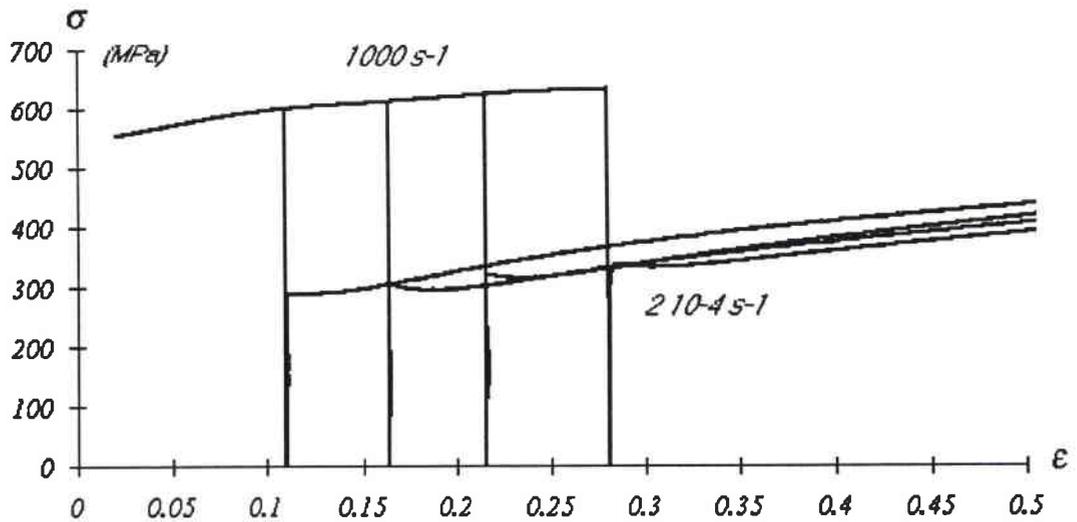


figure VIII-3 : sauts de vitesse en compression

VIII.2. Comparaison avec la torsion.

Pour comparer les résultats de torsion, de compression et de traction obtenus avec ceux publiés dans la littérature (cf. chapitre V) nous avons utilisé le critère d'équivalence de Von Mises :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}} \quad \text{où } (s_{ij}) \text{ est le déviateur du tenseur des contraintes,}$$

$$\epsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon_{ij} : \epsilon_{ij}} \quad \text{où } (\epsilon_{ij}) \text{ est le tenseur des déformations.}$$

$$\text{D'où } \sigma = \sqrt{3} \tau \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma$$

Cela nous amène à formuler les remarques suivantes.

- Les limites d'élasticité coïncident entre la traction et la compression à même vitesse de déformation.
- Les limites d'élasticité en torsion sont supérieures à même vitesse de à celles en compression dans le domaine des vitesses quasi statiques. En revanche, dans le domaine des vitesses dynamiques, les limites d'élasticité sont proches.
- L'écroutissement est plus fort en compression qu'en traction et torsion.
- Les courbes de traction à 10^4 et 10^3 s^{-1} sont superposées. Nous sommes bien sur le palier athermique à ces vitesses de déformation.

Du fait que les courbes expérimentales se superposent mal en fonction du type de sollicitation, le résultat de modélisations avec les données déterminées au chapitre précédent est voué à l'échec. Nous avons choisi de procéder de la même manière que pour la torsion pour déterminer les coefficients du modèle en compression et tenter de déterminer quels paramètres demeurent inchangés.

VIII.3. Détermination des paramètres

Lors du passage de la torsion à la compression, on suppose que la contrainte athermique et la contrainte thermiquement activée suivent le même critère d'équivalence que la contrainte d'écoulement. Cela revient donc à multiplier $M_{\tau\alpha}$ et τ_0^* par $\sqrt{3}$.

VIII.3.1. Densités de dislocations à 10^{-4} s^{-1}

L'optimisation réalisée sur la courbe obtenue en quasi statique donne

$$k_a = 1$$

$$M_{II} = 9.10^{14} \text{ m}^{-2}$$

$$\rho_0 = 7,2.10^{13} \text{ m}^{-2}$$

La figure VIII-4. compare le modèle et la courbe expérimentale.

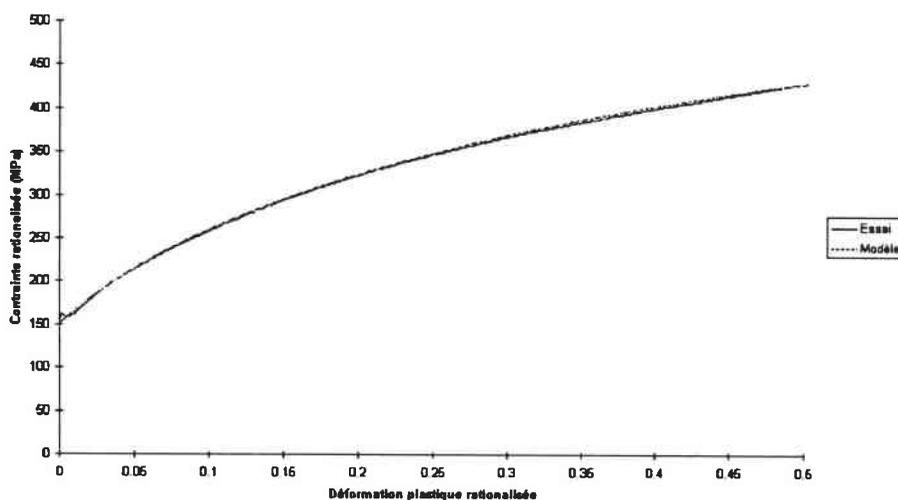


figure VIII-4 : comparaison du modèle et de la courbe expérimentale sur le palier athermique

Précisons que la densité de dislocations tend vers une valeur de saturation $\rho_s = 9,3 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-2}$, soit une contrainte de saturation de 540 MPa.

VIII.3.2. Densités de dislocations à 10^3 s^{-1}

La présence du pic après les différents sauts de vitesse semblait pouvoir s'expliquer par un désancrage de dislocations. Après le saut ρ_m est suffisamment faible (avant désancrage) pour sortir du palier. Lorsque le désancrage commence cette densité augmente vite et le matériau repasse sur le palier.

Nous préconisons donc de prendre comme valeur de σ_a , après le saut, la valeur obtenue par interpolation au niveau du pic.

Les résultats sont les suivants :

ϵ	σ_a (MPa)
0.111	270
0.164	280
0.216	300
0.281	310

tableau VIII-1. - Valeur de σ_a pour différents taux de déformation (1000 s^{-1})

L'optimisation réalisée sur ces quatre points donnent :

$$M_{II} = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$$

$$k_a = 4,7$$

En outre la valeur de saturation est $\rho_{\text{sat}} = 3,28 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-2}$ (soit $\sigma_{a \text{ sat}} = 320 \text{ MPa}$)

La figure VIII-5. compare les contraintes "internes" modélisées pour les deux vitesses de déformation de 10^4 s^{-1} et 10^3 s^{-1} .

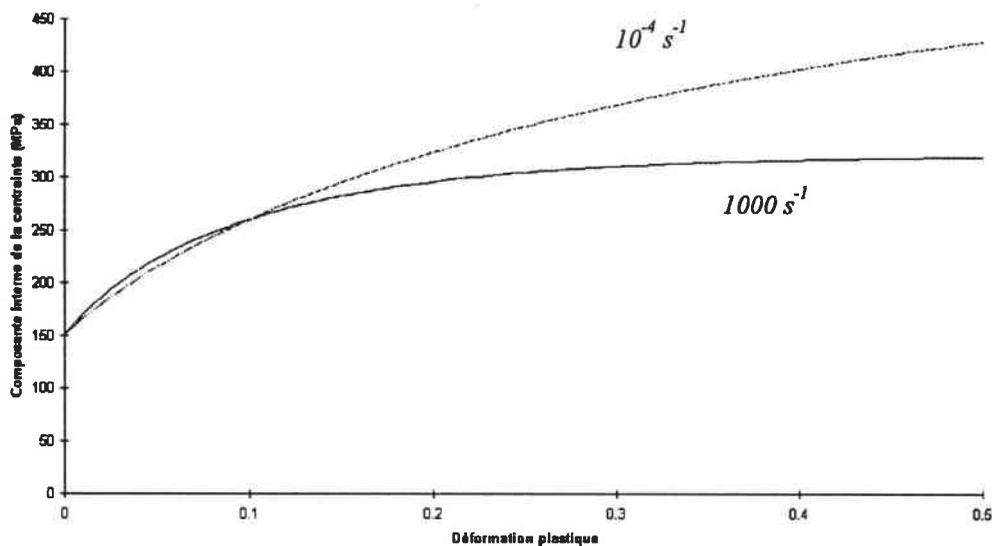


figure VIII-5 : comparaison des contraintes internes modélisées pour deux vitesses de déformation : 10^{-4} s^{-1} et 10^3 s^{-1} .

VIII.3.3.Composante “effective” à 10^3 s^{-1}

En reprenant l’expression :

$$\sigma^* = \sigma_o^* \left\{ 1 - \left[\frac{kT}{\Delta Go} \ln \left(\frac{n_k v_D b^2 \rho_m}{\sqrt{3} \dot{\epsilon}} \right) \right]^{1/q} \right\}^{1/p}$$

Nous avons repris la valeur de la contrainte effective obtenue en torsion ($\tau_o^* = 490 \text{ MPa}$ ce qui revient à $\sigma_o^* = 850 \text{ MPa}$). La valeur de σ_o^* donnée par l’optimisation “numérique” est de 840 MPa pour les deux couples (1, 2) et (3/4, 4/3).

$$\sigma_o^* = 850 \text{ MPa}$$

$$\Delta Go = 0.62 \text{ eV} = 1.10^{-19} \text{ J}$$

Nous avons tenté d’optimiser la loi d’évolution de ρ_m sur la courbe dynamique

$$\rho_m = \rho_{m0} + \beta \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

Nous obtenons :

pour $p = 1$ et $q = 2$

$$\rho_{m0} \ll \beta$$

$$n_k \beta = 1,8 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2}$$

pour $p = 3/4$ et $q = 4/3$:

$$\rho_{m0} \ll \beta$$

$$n_k \beta = 3,8 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2}$$

La valeur de ρ_{m0} n'est pas bien déterminée car nous n'avons pas accès de manière précise, pour cette vitesse de déformation, à la contrainte en début de déformation plastique. Cependant dès les premiers pourmille cette valeur sera négligeable après en comparaison du terme d'évolution. Nous retombons sur le problème du désancrage en début de déformation.

Les valeurs de seuil $n \rho_{ms}$ est respectivement $2 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2}$ et $4,4 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2}$.

La figure VIII-6. compare la modélisation de la contrainte "effective" suivant les deux modèles.

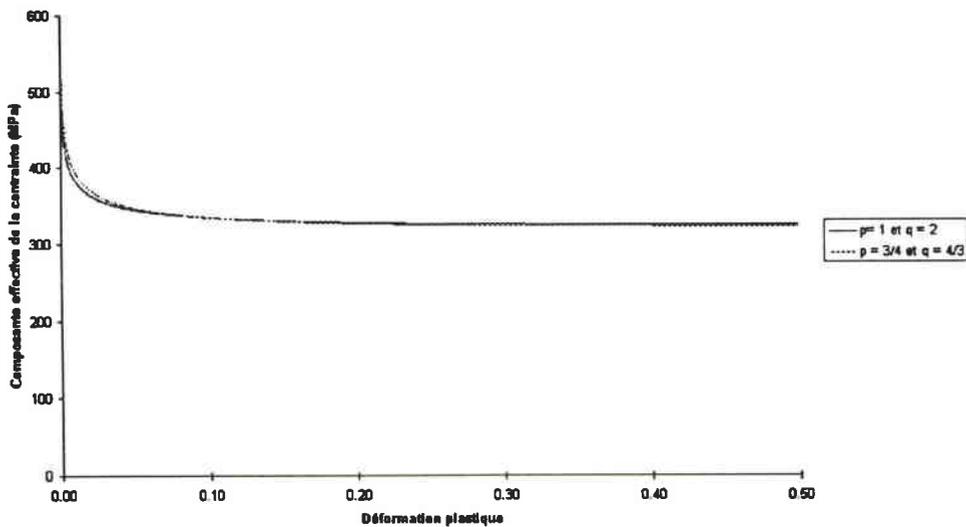
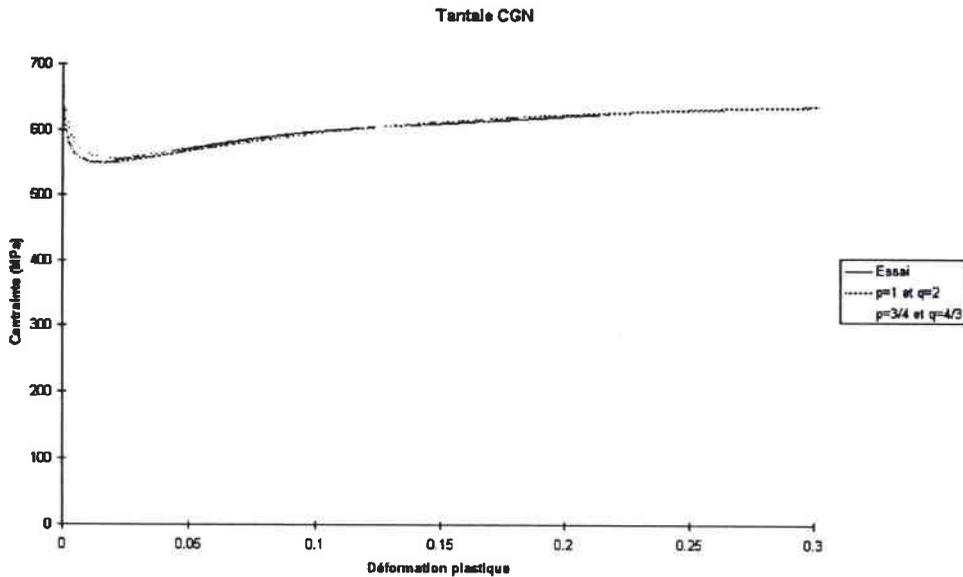


figure VIII-6 : contrainte "effective". Comparaison des deux modèles

La figure VIII-7. compare les résultats des essais en dynamique et les deux variantes du modèle.



*figure VIII-7 : courbes contrainte/déformation
comparaison des deux modèles et de l'essai*

VIII.4. Simulation sans prendre en compte le désancrage à 10^4 s^{-1}

Après le saut de vitesse $\dot{\epsilon}_a$ est la déformation plastique résiduelle, ρ_a la densité de dislocations actuelle. En intégrant en ce point :

$$\frac{\partial \rho}{\sqrt{3} \partial \epsilon} = M_{II}(\dot{\epsilon}) - k_a(\dot{\epsilon}, T)[\rho - \rho_o]$$

On obtient :

$$\rho = \rho_o + \frac{M_{II}(\dot{\epsilon})}{k_a(\dot{\epsilon}, T)} \left[1 - \exp\left(-k_a(\dot{\epsilon}, T) \sqrt{3}(\epsilon - \epsilon_a)\right) \right] + (\rho_a - \rho_o) \cdot \exp\left(-k_a \sqrt{3}(\epsilon - \epsilon_a)\right)$$

Comme la modélisation de l'essai dynamique est aussi bien retranscrite quel que soit le couple (p,q) utilisé nous présentons sur les figures VIII-8. à V-11. la simulation des quatre sauts de vitesse avec le couple (1,2). Nous fixons arbitrairement ρ_{m0} à 10^9 m^{-2} .

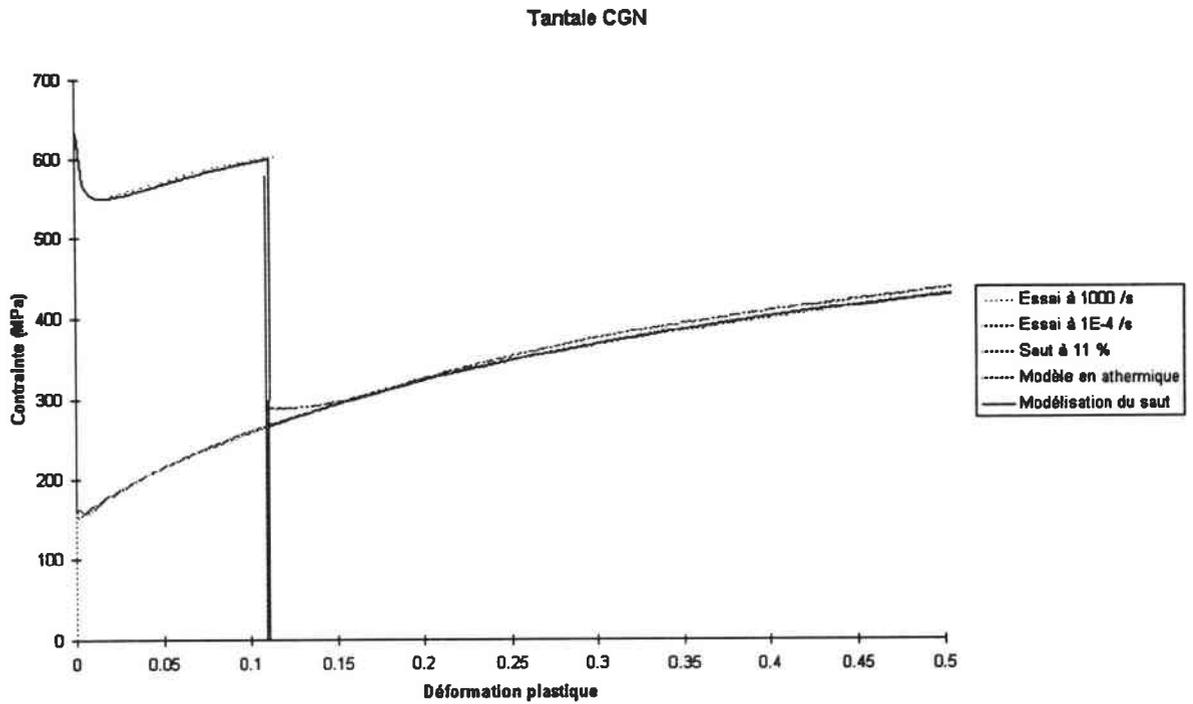


figure VIII.8 : sauts de vitesse en compression. Comparaison des essais et du modèle

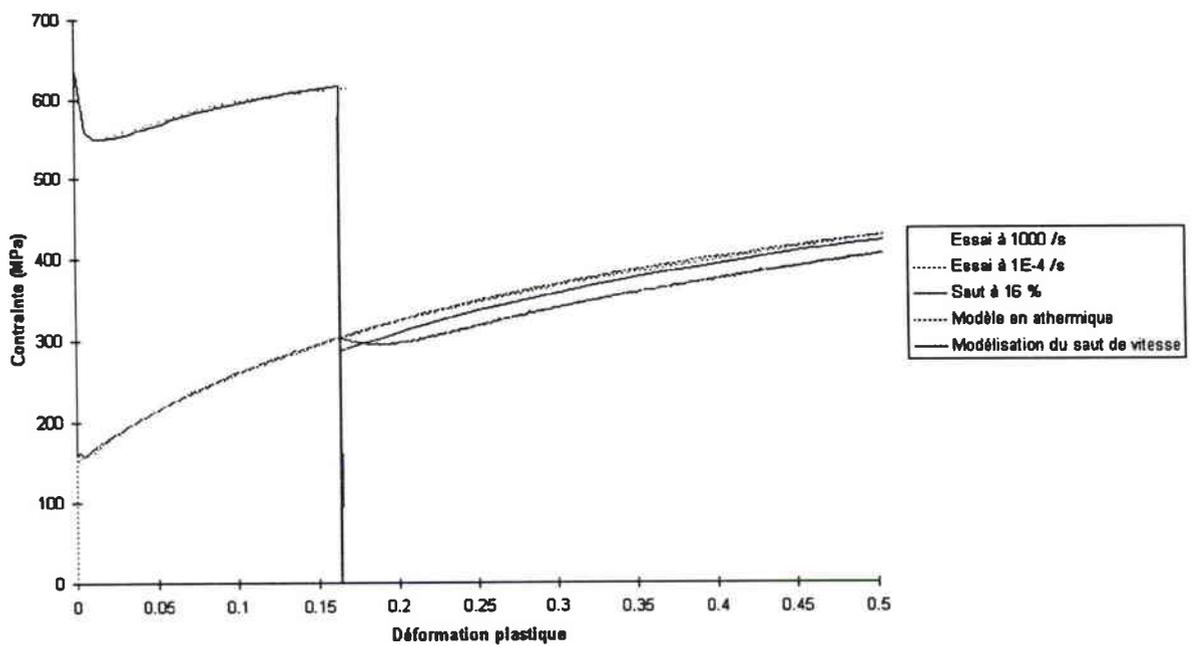


figure VIII-9 : sauts de vitesse en compression. Comparaison des essais et du modèle

Taille: 60x

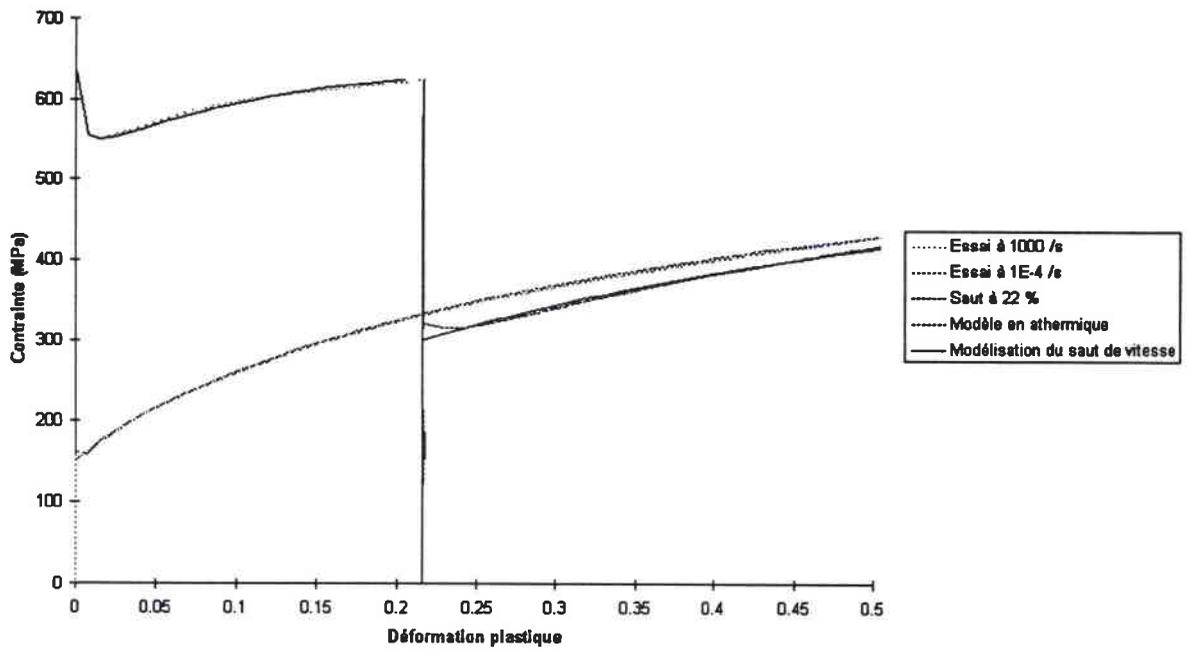


figure VIII-10 : sauts de vitesse en compression. Comparaison des essais et du modèle

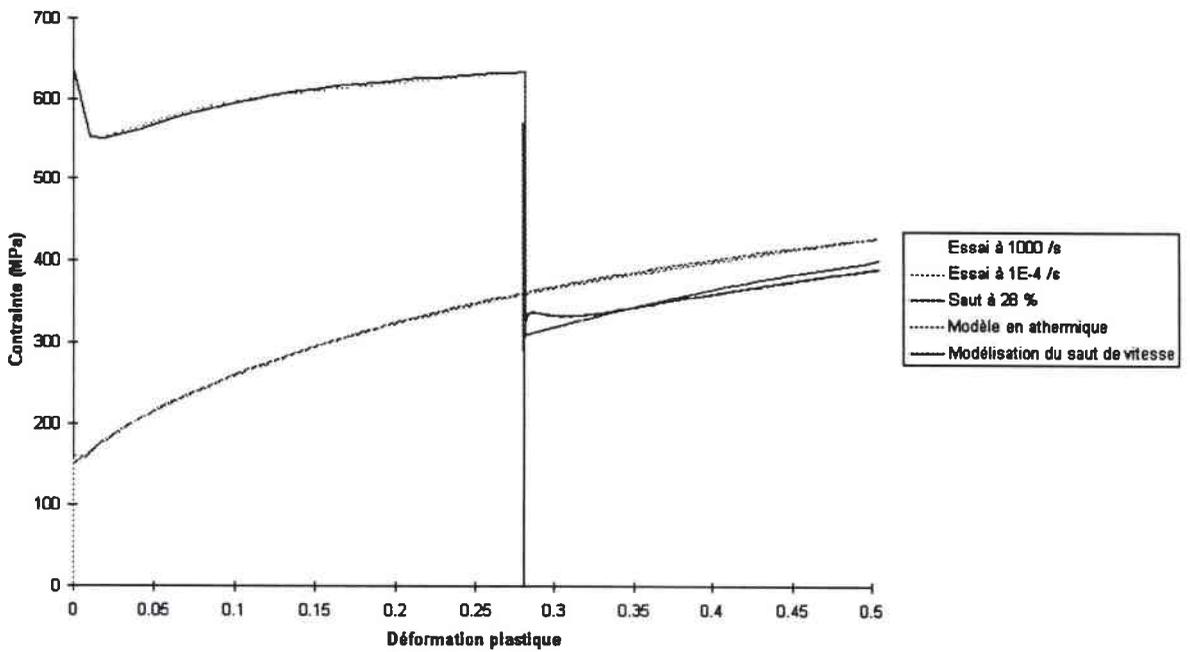


figure VIII-11. - Sauts de vitesse en compression. Comparaison des essais et du modèle

Pour les sauts à 0,11 , 0,22 et 0,28 , le modèle est en bon accord avec les essais. A 0,16 la tendance est bonne mais la courbe se situe légèrement en dessous. C'est l'écart obtenu entre la contrainte mesurée et la contrainte modélisée au cours de la modélisation de la loi d'évolution de la densité de dislocations à 10^3 s^{-1} qui est responsable de cette différence.

En outre, il est important à signaler est le fait qu'aucune optimisation n'a été effectuée sur les courbes après saut de vitesse, et cependant, le modèle retranscrit fort bien le comportement lors des essais.

VIII.5. Comparaison avec d'autres essais et critique

VIII.5.1. Extension à d'autres essais

A partir d'essais de compression réalisés à 2.10^{-3} , 2.10^{-2} et 2.10^{-1} s^{-1} , nous allons optimiser les valeurs de M_{II} et k_a (nous gardons β constant quelle que soit la vitesse de déformation) pour chacune de ces vitesses de déformation à partir de la formule donnant directement la contrainte en fonction de la déformation pour un essai à vitesse de déformation constante. Nous restreindrons les valeurs de M_{II} à $[9.10^{14}; 1,2.10^{15}]$ et k_a à $[1; 4,7]$ leurs évolutions à des évolutions croissantes.

Le tableau suivant résume les résultats des optimisations :

Vitesse (/s)	0.002	0.02	0.2
$M_{II} (\text{m}^{-2}) \times 10^{15}$	1.2	1.2	1.2
k_a	1	1	1.51

Tableau VIII-2. - couple (M_{II} , k_a) pour différentes vitesses de déformations

La figure VIII-12. compare les résultats de la simulation et les essais de compression. ρ_{m0} est fixée arbitrairement à $7,5.10^{12} \text{ m}^{-2}$ car il est difficile d'optimiser cette valeur sur les essais utilisés. L'adéquation du modèle et des essais n'est pas parfaite pour les vitesses de 0.002 et 0.02 s^{-1} à cause de l'optimisation des valeurs de M_{II} et k_a . Les évolutions de ces deux paramètres ne

nous sont pas connues. Il aurait fallu réaliser sur le même lot de tantale des sauts de vitesse entre ces vitesses de déformation et 10^{-4} s^{-1} (palier athermique) pour pouvoir optimiser M_{II} et k_a , puis établir les lois d'évolution en fonction de la vitesse de déformation.

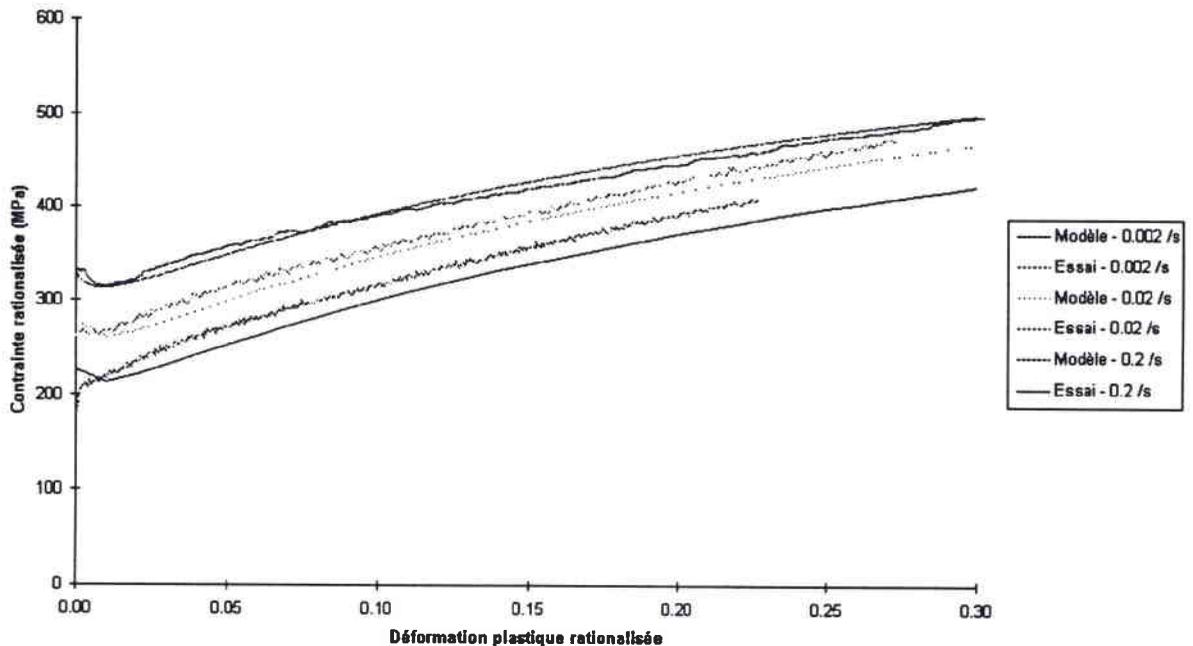


figure VIII-12: comparaison des résultats de simulation et des essais de compression

VIII.5.2.Critique

On pourrait penser qu'en optimisant directement $\sigma = f(\epsilon)$ à vitesse de déformation constante on obtiendrait β , M_{II} , k_a et ρ_{m0} ... Cependant les résultats d'une telle optimisation, pouvant donner mathématiquement de meilleurs résultats que la technique employée, ne retranscriraient pas la réalité et ne pourraient pas bien simuler les sauts de vitesse, la séparation des contraintes effective et interne n'étant pas réalisée physiquement. En outre il faudrait connaître une bonne approximation du quadruplé résultat pour faire converger l'optimisation vers sa valeur minimale.

La figure VIII-13. retrace la simulation d'essais de compression de 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100 et 1000 s⁻¹. Les couples (M_{II},k_a) utilisés sont consignés dans le tableau VII.2.

Vitesse (/s)	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
M _{II} (m ⁻²) x10	0.9	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
k _a	1	1	1	1.5	2.25	3	3.75	4.7

tableau VIII-3. - Couples (M_{II},k_a) utilisés pour la simulation d'essais de compression

La valeur de ρ_{m0} est prise égale à 7,5.10¹² m⁻², le modèle utilisé étant celui où p=1 et q=2.

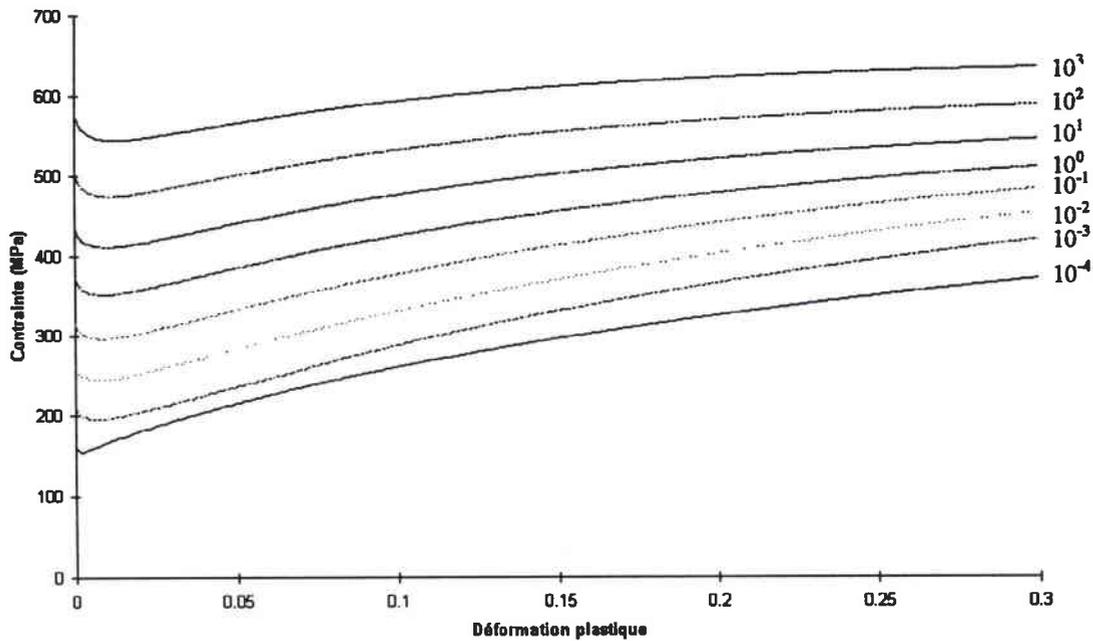


figure VIII.13. - Simulation d'essais de compression uniaxiale

Chapitre IX :

Synthèse

IX. Synthèse

Bien que les courbes de compression et de torsion soient relativement différentes, les données optimisées diffèrent peu. Dans la suite de ce chapitre, nous allons reprendre point par point les analogies et les différences entre la compression et la torsion pour pouvoir tirer des conclusions sur la validité des paramètres déterminés.

IX.1. Contrainte athermique

La contrainte athermique τ_a est la composante de la contrainte d'écoulement la plus sensible à l'évolution de la microstructure. Nous avons choisi de caractériser l'état microstructural par la densité totale de dislocations en négligeant les contributions d'autres phénomènes tels la recristallisation dynamique que nous avons observés à des taux de déformation élevés (70% en cisaillement). L'expression de la contrainte athermique que nous avons adoptée est :

$$\tau_a = M_\tau \alpha G b \sqrt{\rho}$$

où G est le module de cisaillement (72 GPa pour le tantale d'étude à l'ambiante)
 b est le vecteur de Burgers (0,286 nm),
 $M_\tau \alpha$ est une constante d'interaction entre les dislocations. (0,5 en torsion).

Nous avons adopté cette dernière valeur voisine des données trouvées dans la bibliographie. Celle-ci conduit à une densité de dislocation initiale importante mais du même ordre de grandeur que celle mesurée sur un acier doux après recuit [Klepaczko 1996].

L'évolution de la densité des dislocations est une compétition entre une création à partir de sources et une annihilation.

IX.2. Densité de dislocations initiale

Une différence majeure entre la compression et la torsion concerne la valeur initiale de la densité de dislocations. On peut penser que l'usinage des éprouvettes a pu induire un pré-écrouissage sur les éprouvettes de torsion. En effet, la partie déformée des éprouvettes de torsion est de très faible épaisseur (0,5 mm) tandis que les éprouvettes de compression ont un diamètre de 6 mm.

Cet écart de densité initiale de dislocations peut être à l'origine des différences observées entre la torsion et la compression dans le domaine des vitesses quasi statiques. Dès que l'on passe en régime dynamique, la densité de dislocations atteint très rapidement une valeur de saturation ce qui explique que les courbes sont beaucoup plus proches.

Nous avons tenté de prendre en compte un pré-écrouissage du matériau. Les paramètres optimisés dans ce cas n'ont pas donné d'amélioration notable.

IX.3. Multiplication des dislocations

Il apparaît que les essais de compression conduisent à des valeurs de coefficients de multiplication de dislocations M_{II} à peu près constant et voisin de 10^{15}m^{-2} . Cette valeur, déterminée "analytiquement" en torsion, correspond à peu près à celle obtenue en compression.

Pour les matériaux C.F.C., une variation du coefficient de multiplication en fonction de la vitesse peut se comprendre car les volumes d'activation en jeu ont tendance à se réduire avec la vitesse de déformation. Cette variation étudiée par Klepaczko [1987c] sur l'aluminium et par Mecking [Mecking 1981] sur le cuivre est très faible.

Pour les matériaux C.C., le volume d'activation des sources est constant au cours de la déformation. Ce volume est relié au à la sensibilité instantanée du matériau à la vitesse de déformation (cf § VII.6). La vitesse a donc peu d'influence sur la création de dislocations à partir de sources de Frank-Read. Les résultats de l'optimisation "analytique" sont conformes à cette analyse mais une "optimisation numérique" conduit à des valeurs n'ayant pas de signification physique.

Nous choisissons donc un coefficient de multiplication constant :

$$M_{II} = 10^{15} \text{ m}^{-2}$$

IX.4. Annihilation des dislocations

Le coefficient d'annihilation des dislocations est la principale source de différence entre la compression et la torsion. Il est beaucoup plus important dans le cas de la torsion ce qui explique que l'écrouissage est beaucoup plus fort en compression qu'en torsion.

	torsion			compression		
$\dot{\gamma}$	300 s^{-1}	$0,015 \text{ s}^{-1}$	$3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	1700 s^{-1}	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$
k_a	9,1	3,1	2,1	4,7	1	1

Les mécanismes de recombinaison des dislocations semblent être sensibles à l'orientation du chargement. Le coefficient d'annihilation des dislocations croît fortement avec la vitesse de déformation. Cette tendance est analogue en compression et en torsion. Une loi de k_a du type :

$$k_a = k_0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right)^{-2mT}$$

(où l'équivalence $\ln(\dot{\gamma})$ et T est caractéristique des mécanismes thermiquement activés), retranscrit correctement l'évolution de ce coefficient.

Nous retenons dans le cas de la torsion :

$k_0 = 21,5$ $m = -0,000182 \text{ K}^{-1}$
--

IX.5. Contrainte effective

La contrainte effective est à l'origine de la grande sensibilité du tantale à la vitesse de déformation. Négligeable à des vitesses de l'ordre de 10^{-4} s^{-1} , elle croît rapidement à 160 MPa pour des vitesses de 300 s^{-1} . Nous avons repris une modélisation du type :

$$\tau^* = \tau_0^* \left[1 - \left(\frac{kT}{\Delta G_0} \ln \frac{\nu(\rho_m)}{\dot{\gamma}} \right)^{1/q} \right]^{1/p}$$

Il est très difficile à partir des essais que nous avons effectués de trancher entre les deux valeurs des couples (p,q) étudiées ici. Pour cela, une étude du comportement du tantale dans le domaine des très faibles températures est nécessaire afin d'établir une courbe de l'énergie d'activation en fonction de la contrainte effective.

Cependant, dans les deux cas (1,2) et (3/4,4/3), nous trouvons une énergie d'activation identique :

$$\Delta G = 0,28 \text{ eV pour } \tau^* = 167 \text{ MPa (valeur de saturation de la contrainte effective à } 300 \text{ s}^{-1})$$

Le couple (p,q) affecte peu la valeur de τ_0^* mais énormément la valeur du facteur pré-exponentiel $\nu = n \rho_m \nu_D b^2$.

Nous retenons donc :

$$\Delta G_0 = 0,62 \text{ eV}$$

$$(p, q) = (1, 2)$$

$$\tau_0^* = 490 \text{ MPa}$$

IX.6. Multiplication des dislocations mobiles

La multiplication des dislocations mobiles n'est réellement visible que sur les courbes ou parties de courbes dynamiques. En effet, les courbes obtenues à faible vitesse de déformation présentent un écrouissage monotone.

Lors des sauts de vitesse, nous constatons que la sensibilité instantanée change peu. De plus, l'écrouissage initial des courbes dynamiques lors des sauts "statique/dynamique" tend à devenir de plus en plus important. Cela nous laisse penser que cette partie d'écrouissage correspond à une augmentation de la contrainte effective par diminution du nombre de dislocations mobiles. Cela est à mettre en parallèle avec les pics de Lüders observés lors du début du chargement. Dans ce cas, la relaxation du matériau est due à une création très importante de dislocations mobiles, ce qui conduit à une diminution notable de la contrainte effective.

Nous pensons donc que la densité de dislocations mobiles évolue très rapidement vers une valeur de saturation et que cette valeur de saturation diminue avec la vitesse de déformation.

Nous avons tenté de modéliser l'évolution des dislocations mobiles par la loi :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial \rho} = \frac{\beta}{\rho}$$

Cependant, la dispersion des différentes courbes expérimentales n'a pas permis d'obtenir des coefficients très probants sur les sauts de vitesse "dynamique/statique". Une dépendance de β en fonction de la vitesse de déformation n'a pas amélioré les simulations. Cela est dû à la structure de la loi choisie qui évolue fortement dans le cas où ρ est faible (ce qui est le cas au début du chargement dynamique simple) mais peu lorsque ρ est fort. Les valeurs retenues sont :

$$n\beta = 2 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2}$$

$$n\rho_{m0} = 5 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-2}$$

valeurs cohérentes avec les résultats obtenue en compression.

Une analyse plus poussée de la loi $\frac{\partial \rho_m}{\partial \rho} = \frac{\beta(\dot{\gamma})}{\rho}$ montre que cette convient mal pour les

sauts de vitesse "statique/dynamique". Cependant, elle offre une première approche pour prendre en compte l'évolution rapide de la contrainte effective lors du début d'un essai dynamique à vitesse constante et retranscrire le pic d'élasticité.

Chapitre X:

Conclusion

X. Conclusion

La demande de plus en plus importante de calculs restituant la réponse de structures à des sollicitations dynamiques nécessite le développement de modèles de loi de comportement très élaborés. En effet, la résolution de ce type de problèmes fait appel aux équations d'état d'une part, et, d'autre part, aux lois de comportement mécanique du matériau en cause. La formulation des lois de comportement doit répondre à deux impératifs :

- retranscrire un ensemble de faits expérimentaux et
- prédire le comportement du matériau sous certaines conditions de chargement.

Le présent travail s'inscrit dans ce cadre général. A partir du comportement mécanique du tantale, nous avons tenté de comprendre et de retranscrire les phénomènes qui régissent le comportement des matériaux à structure cubique centrée.

Les essais de torsion effectués à température ambiante à des vitesses de déformation comprises entre $3 \cdot 10^{-4}$ et $3 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$ font apparaître les points suivants sur le comportement du tantale :

- une grande ductilité pour toute vitesses de déformation
- une forte augmentation de la limite d'élasticité avec la vitesse de déformation
- une diminution importante de l'écroutissage avec la vitesse de déformation
- une grande sensibilité instantanée à la vitesse de déformation ; cette sensibilité demeure à peu près constante au cours de la déformation.
- une sensibilité à l'histoire du chargement ; ces effets d'histoire sont d'autant plus importants que la déformation avant le saut de vitesse est grande.

Nous nous sommes limités à une vitesse de déformation de $3 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$: au delà de cette vitesse, l'échauffement dû à la dissipation de l'énergie fournie conduit à un adoucissement du matériau et donc à une hétérogénéité de déformation. Il serait donc très délicat d'interpréter de tels essais.

Nous nous sommes attachés à relier l'écoulement plastique aux micromécanismes de déformation. Afin de bien comprendre les contributions des différents mécanismes, nous avons tenté de développer un modèle de lois de comportement basé sur des phénomènes physique en

reprenant un formalisme proche de celui proposé par Klepaczko. Ce modèle a déjà fourni des résultats remarquables pour le comportement de matériaux à structure C.F.C..

L'écoulement plastique est un processus cinétique. La résistance d'un matériau dépend des phénomènes qui apparaissent à l'échelle atomique. L'étude des micromécanismes de déformation met en évidence l'influence de la température et de la vitesse de déformation. Aux faibles températures et aux vitesses de déformation élevées, le franchissement d'obstacles "faibles" activés thermiquement régit le comportement du matériau. En revanche, aux températures plus importantes ou aux vitesses de déformation plus petites, l'écoulement plastique est contrôlé par des obstacles "forts" sur lesquels une variation de température ou de vitesse de déformation n'a pas d'effet. La contrainte d'écoulement est donc une fonction des conditions de chargement (température et vitesse de déformation) et de la microstructure. Nous nous orientons donc vers deux types de lois :

- des lois cinétiques reliant la contrainte d'écoulement à l'état microstructural et aux conditions de chargement :
- des lois d'évolution permettant de décrire l'évolution de la microstructure en fonction des conditions de chargement.

L'écrouissage est dû à une augmentation de la densité de dislocations totale au sein du matériau. La contrainte d'écoulement est considérée comme la somme de deux composantes. La première, athermique, est proportionnelle à la racine carrée de la densité de dislocations totale. La seconde, appelée contrainte effective, décroît avec de la température, croît avec la vitesse de déformation et décroît avec la densité de dislocations mobiles.

Le mécanisme élémentaire thermiquement activé est le franchissement des vallées de Peierls par la formation de double décrochements. Le volume d'activation est très faible (de l'ordre de $20 b^3$) et il ne varie pas au cours de la déformation. Cela justifie la grande sensibilité instantanée du tantale à la vitesse de déformation et le fait que cette sensibilité ne varie pas au cours de la déformation.

L'analyse des essais de torsion et de compression effectués conduit aux observations suivantes.

- Au cours de la déformation, le tantale tend vers une microstructure "de saturation" dépendant des conditions de chargement thermo-mécanique. Il apparaît que la densité de dislocations à saturation diminue avec la vitesse de déformation.

- La multiplication des dislocations semble être un processus athermique car la vitesse de déformation n'influe pas sur le coefficient de création de dislocations. Les résultats de torsion et de compression semblent être en accord sur cette valeur.
- L'annihilation des dislocations est fortement influencée par la vitesse de déformation. Cela peut s'expliquer par le fait que les dislocations se situent à des niveaux d'énergie plus élevés lorsque la vitesse de déformation augmente. Elles peuvent ainsi parcourir des distances plus grandes et ainsi leur probabilité d'annihilation dans les joints de grains ou avec d'autres dislocations augmente.
- La densité de dislocations mobile évolue rapidement vers une fraction de la densité de dislocations totale. Cette évolution peut débuter par une "avalanche de dislocations" dans le cas d'un chargement à vitesse constante, avalanche d'autant plus notable que la vitesse de déformation est élevée. Cependant, les courbes de saut de vitesse statique/dynamique laissent penser que la densité de dislocations mobiles diminue très notablement juste après le saut.

D'une manière générale, le modèle proposé retranscrit correctement les résultats expérimentaux. Contrairement à beaucoup de modèles de lois de comportement, il offre l'avantage de retraduire les effets d'histoire du chargement et l'influence de la vitesse de déformation et de la température à la fois sur la limite d'élasticité et sur l'écrouissage. De plus son formalisme basé sur des considérations physiques permet une évolution des lois. La loi de multiplication des dislocations mobiles n'est qu'une première étape mais elle permet déjà une approche intéressante des phénomènes transitoires qui surviennent lors d'un changement brusque des conditions de sollicitation.

Au cours de ce travail, différents problèmes ont été soulevés et des observations ont été faites qui méritent d'être approfondies par la suite.

La détermination des paramètres d'un matériau demande une attention toute particulière. Comme nous l'avons montré au cours de ces travaux, une détermination "globale" des paramètres peut conduire à des résultats retranscrivant relativement correctement les essais expérimentaux mais très éloignés des valeurs physiques. Une bonne détermination des paramètres du modèle passe par un nombre d'essais important.

Il apparaît que le type de chargement influe notablement les courbes d'écrouissage du tantale. Nous observons de grandes différences entre le comportement du tantale en torsion, en traction et en compression principalement dans le domaine des vitesses de déformation quasi statiques. L'hypothèse que nous formulons est le fait que les dislocations sessiles n'ont pas la même énergie de recombinaison pour devenir glissiles suivant le champ de contraintes appliquées. Cela créerait une anisotropie de consolidation d'autant plus importante que les énergies de recombinaison sont fortes c'est-à-dire que la contrainte effective est faible donc que la vitesse de

déformation est faible. Ceci explique que ces hétérogénéités de consolidation sont beaucoup plus sensibles en régime quasi statique que dans le domaine des vitesses dynamiques.

Ensuite, il nous paraît important d'explorer un domaine de températures plus étendu afin de pouvoir évaluer correctement l'énergie d'activation et de bien vérifier la corrélation "vitesse de déformation-température" dans le domaine de validité du modèle.

Enfin, les lois proposées ne prennent pas en compte des phénomènes liés à la pression comme il est possible de l'observer lors d'expériences de chocs (influence de la pression hydrostatique, changements de phases...). L'énergie stockée n'est plus alors dissipée dans sa quasi-totalité en chaleur mais sert à la création de nouveaux défauts microstructuraux (macles, grains recristallisés...). La prise en compte de phénomènes liés à ces conditions de chargement (traînage visqueux...) constitue un axe de développement du modèle.

Un deuxième axe d'évolution est la prise en compte de l'anisotropie qui survient dès qu'un matériau se déforme de manière plastique. Cela laisse présager de lois d'évolution des paramètres microstructuraux (et donc de comportement thermo-mécanique) sous forme tensorielle.

Bibliographie

-
- [Affouard 1981] Affouard J.L., Recherche du cisaillement adiabatique dans le tantale, *Mémoire de DEA*, (1981).
- [Ansart et al 1986] Ansart J.P., Dormeival R., Rapport interne CEA, (1986).
- [Arsenault 1966] Arsenault R.J., An investigation of the mechanism of thermally activated deformation in tantalum and tantalum based alloys, *Acta Metallurgica vol 14*, (1966), p 831.
- [Bacon 1993] Bacon C., Mesure de la ténacité dynamique de matériaux fragiles en flexion trois points à haute température. Utilisation des barres de Hopkinson, *Thèse de l'Université de Bordeaux I*, (1993).
- [Baker et al 1966] Baker W.E., Yew C.H., Strain rate effects in the propagation of torsional plastic waves, *Journal of Applied Mechanics*, (1966), p 917.
- [Barbee et al 1965] Barbee T.W. Jr, Huggins R.A., Dislocation structures in deformed and recovered tantalum, *Journal of the Less Common Metals vol 8*, (1965), p 306.
- [Barrett et al 1958] Barrett C.S., Bakish R., Twinning and cleavage in tantalum, *Transactions of the metallurgical society of AIME vol 212*, (1958), p 122.
- [Bechtold 1955] Bechtold J.H., Tensile properties of annealed tantalum at low temperatures, *Acta Metallurgica vol 3*, (1955), p 249.
- [Becker 1925] Becker R., *Zeitung der Physik*, 26, (1925), p 919.,
- [Bédère et al 1988] Bédère D., Ansart J.P., Dormeival R., Rapport interne CEA, (1988).
- [Bénard et al 1984] Bénard J., Michel A., Philibert J., Talbot J., *Metallurgie générale*, (1984).
- [Bodner 1968] Bodner S.R., Constitutive equations for dynamic material behaviour, *Mechanical behaviour of materials under dynamic loads*, ed. Lindholm, U.S., Springer-Verlag, New York, (1968), p 176.

-
- [Bodner et al 1972] **Bodner S.R., Partom Y.**, A large deformation elastic-viscoplastic analysis of a thick-walled spherical shell, *Journal of Applied Mechanics*, **39**, (1972), p 751.
- [Bodner et al 1975] **Bodner S.R., Partom Y.**, Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials, *Journal of Applied Mechanics*, **42**, (1975), p 385.
- [Bodner et al 1978] **Bodner S.R., Merzer A.**, Viscoplastic constitutive equations for copper with strain rate history and temperature effects, *Journal of Engineering Materials and Technology*, **100**, (1978), p 388.
- [Bodner 1979] **Bodner S.R.**, Representation of time dependant mechanical behaviour of René 95 by constitutive equations, *The 1979 International Joint Gas Turbine Congress and Exhibition*, (1979).
- [Bodner 1988] **Bodner S.R.**, Material modelling at high rates of strain, *Proceeding Impact '87, Impact Loading and Dynamic Behaviour of Materials*, vol 1, (1988), p 77.
- [Byron 1968] **Byron J.F.**, Plastic deformation of tantalum single crystals (part II), *Journal of the Less Common Metals* vol 14, (1968), p 201.
- [Byron et al 1967] **Byron J.F., Hull D.**, Plastic deformation of tantalum single crystals (part I), *Journal of the Less Common Metals* vol 13, (1967), p 71.
- [Chen et al 1994] **Chen S.R., Gray G.T. III**, Constitutive behavior of tungsten and tantalum : experiments and modeling, *Proceeding Tungsten and Refractory Metals* ed Bose and Dowding, (1994), p 489.
- [Chree 1889] **Chree C**, *Transaction Cambridge Philosophical Society*, **14**, (1889), p250.

- [Clark et al 1991a] **Clark J.B, Garrett R.K.Jr, Jungling T.L., Asfahani R.I.**, Influence of initial ingot breakdown on the microstructural and textural development of high-purity tantalum, *Metalurgical Transactions vol 22A*, (1991), p 2959
- [Clark et al 1991b] **Clark J.B, Garrett R.K.Jr, Jungling T.L., Vandermeer R.A., Vold C.L.**, Effect of processing variables on texture gradients in tantalum, *Metalurgical Transactions vol 22A*, (1991), p 2039.
- [Clark et al 1992] **Clark J.B, Garrett R.K.Jr, Jungling T.L., Asfahani R.I.**, Influence of transverse rolling on the microstructural and the texture development in pure tantalum, *Metalurgical Transactions vol 22A*, (1992), p 2183.
- [Conrad 1964] **Conrad H.**, Thermally activated deformation of metals, *Journal of Metals*, 16, n°7, (1964), p 582.
- [Considère 1885] **Considère A.**, *Annales des Ponts et Chaussées*, 9, (1885), p 579.
- [Coscelluela 1994] **Coscelluela A., Goubot N., Naulin G.**, Comportement mécanique des matériaux sous grandes vitesses de sollicitations, *Chocs Revue Scientifique et technique de la DAM*, n°11, (1994), p 53.
- [Daumas et al 1985] **Daumas M.T., Legrand J., Ansart J.P.**, Rapport interne CEA, (1985).
- [Davies 1948] **Davies R.M.**, A critical study of the Hopkinson Pressure Bar, *Philosophical Transaction A*, 240, (1948), p 375
- [de Fouquet 1976] **de Fouquet J.**, Mécanismes fondamentaux de la déformation à froid des métaux, *Mise en forme des métaux et alliages*, ed CNRS, (1976), p 61.
- [Dormeval et al 1979] **Dormeval, Chevallier, Matagne, Derlon, Delannoy**, Comportement en traction du tantale et du tantale soudé dans la gamme de vitesses de déformation, $10^{-4} - 10^3 \text{ s}^{-1}$, Rapport interne CEA, (1979).
- [Dormeval et al 1980] **Dormeval R., Stelly R.**, Caractérisation mécanique des matériaux aux grandes vitesses de déformation Rapport interne CEA, (1980).

-
- [Dorn et al 1964] **Dorn J.E., Rajnak S.,** Nucleation of kink pairs and the Peierls' mechanism of plastic deformation, *Transactions of the Metallurgical Society of AIME*, 230, (1964), p 1052.
- [Dorn et al 1969] **Dorn J.E., Mukherjee A.K.,** Application of rate theory to dislocation dynamics, *Rapport University of California, Lawrence Radiation Laboratory*, (1969).
- [Eleiche et al 1982] **Eleiche A.M., El-Kady M.M., El-Kabbany M.H.,** A modified torsional split Hopkinson bar for the cyclic loading of materials at dynamic strain rates, *Novel Techniques in Metal Deformation Testing, AIME*, (1982) p 323.
- [Estrin et al 1984] **Estrin Y., Mecking H.,** A unified phenomenological description of work hardening and creep based on one-parameter models, *Acta Metallurgica*, 32, (1984), p 57.
- [Falanga 1979] **Falanga A.,** Influence des interstitiels dans le tantale, Rapport interne CEA, (1979).
- [Falanga et al 1982] **Falanga A., Lozes G.,** Rapport interne CEA, (1982).
- [Falanga 1986] **Falanga A.,** Le tantale : synthèse des résultats de caractérisation acquis ces dernières années (1978-1985), Rapport interne CEA, (1986).
- [Featherston et al 1963] **Featherston F.H., Neighbours J.R.,** Elastic constants of tantalum, tungsten and molybdenum, *Physical Review* vol 130 n°4, (1963).
- [Filyand et al 1969] **Filyand M.A., Semenova E.I.,** *Handbook of the rare elements ed Alferieff*, (1969), p 277.
- [Fisher 1977] **Fisher E.S.,** Effects of hydrogen and UHV annealing on the elastic moduli of tantalum, *Scripta Metallurgica* vol 11, (1977), p 685.
- [Formby et al 1965] **Formby C.L., Owen W.S.,** Strain-ageing and quench-ageing of tantalum, *Journal of the Less Common Metals* vol 9, (1965), p 25.

-
- [François et al 1991] François D., Pineau A., Zaoui A., Elasticité et plasticité, *Hermes*, (1991).
- [François et al 1993] François D., Pineau A., Zaoui A., Viscosité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact, *Hermes*, (1993).
- [Frantz et al 1972] Frantz J.R., Duffy J., The dynamic stress-strain behaviour in torsion of 1100-0 aluminium subjected to a sharp increase in strain rate, *Journal of Applied Mechanics*, (1972), p 939.
- [Friedel 1964] Friedel, Dislocations, *Pergamon Press*, (1964).
- [Frost et al 1982] Frost H.J., Ashby M.F., Deformation-mechanism maps : the plasticity and creep of metals and ceramics, *Pergamon Press*, (1982), p 30.
- [Furnish et al 1994] Furnish M.D., Chhabildas L.C., Steinberg D.J., Dynamical behavior of tantalum, *High Pressure Science and Technology 1993*, ed Schmidt, Shaner, Samara and Ross, (1994), p 1099.
- [Gary et al 1989] Gary G., Klepaczko J.R., Présentation d'un logiciel de dépouillement de l'essai de compression par barres de Hopkinson, *DYMAT 5^e journée nationale*, Bordeaux, (1989).
- [Gilbert et al 1962] Gilbert A., Hull D., Owen W.S., Reid C.N., The yield of polycrystalline tantalum, *Journal of the Less Common Metals vol 4*, (1962), p 399.
- [Gilman 1969] Gilman, Micromechanics of flow in solids, *Mc Graw-Hill*, (1969).
- [Goldsmith et al 1961] Goldsmith A., Waterman T.E., Hirschhorn H.J., Handbook of thermophysical properties of solid materials vol I, (1961), p 610.
- [Gourdin 1989] Gourdin W.H., Constitutive properties of copper and tantalum at high rates of tensile strain : expanding ring results, *Mechanical Properties at High Rate of Strain 1989*, ed Harding, (1989), p 221.
-

-
- [Gourdin et al 1994] **Gourdin W.H., Lassila D.H., Leblanc M.M., Shields A.L.** , The influence of tungsten alloying on the mechanical properties of tantalum, *Journal de Physique IV C8 (EuroDymat 94)*, (1994), p 207.
- [Gray et al 1992] **Gray G.T.III, Rollett A.D.**, The high strain rate and spallation response of tantalum, Ta-10W, and T-111, *High Strain Rate Behavior of Refractory Metals and Alloy*, ed *Asfahani, Chen and Crowson*, (1992), p 303.
- [Gray 1994] **Gray G.T.III**, Influence of peak pressure and temperature on the shock-loading response of tantalum, *High Pressure Science and Technology 1993*, ed *Schmidt, Shaner, Samara and Ross*, (1994), p 1103.
- [Guillaume] **Guillaume C.**, Réflexions métallurgiques sur le tantale, *Rapport interne CEA*.
- [Gypen et al 1982] **Gypen L.A., Deruyttere A.**, Thermally activated deformation in tantalum-base solid solution, *Journal of the Less Common Metals vol 86*, (1982), p 219.
- [Hart 1967] **Hart E.W.**, Theory of the tensile test, *Acta Metallurgica*, 15, (1967), p351.
- [Hayden et al 1965] **Hayden H.W., Moffatt W.G., Wulf J.**, The structure and properties of materials, vol III : mechanical behavior, *Wiley & Sons*, (1965).
- [Hirth et al 1968] **Hirth J.P., Lothe J.**, Theory of dislocations, *McGraw-Hill*, (1968).
- [Hoge et al 1977] **Hoge K.G., Mukherjee A.K.**, The temperature and strain rate dependence of the flow stress of tantalum, *Journal of Materials Science vol 12*, (1977), p 1666.
- [Holden et al 1960] **Holden F.C., Schwartzberg F.R., Jaffee R.I.**, High temperature mechanical properties of tantalum, *ASTM-STP*, (1960), p 36.

-
- [Hopkinson 1914] **Hopkinson B.**, A method of measuring the pressure in the deformation of high explosives by the impact of bullets, *Philosophical Transaction Royal Society of London A*, 213, (1914), p 437.
- [Hull et al 1962] **Hull D., McIvor I.D., Owen W.S.**, The distribution dislocation in annealed tantalum, *Journal of the Less Common Metals vol 4*, (1962), p 409.
- [Isbell et al 1972] **Isbell W.M., Christman D.R., Babcock S.G.**, Measurements of dynamic properties of materials vol VI Tantalum, *MSL 70-23 vol VI*, (1972).
- [Jaoul 1965] **Jaoul B.**, Etude de la plasticité et application aux métaux, *Dunod*, (1965).
- [Johnson 1972] **Johnson W.**, Impact strength of materials, *Edward Arnold Publishers*, (1972).
- [Johnson 1994] **Johnson J.N.**, Micromechanical strength effects in shock compression of solids, *High Pressure Science and Technology 1993*, ed Schmidt, Shaner, Samara and Ross, (1994), p 1145.
- [Johnson et al 1983] **Johnson G.R., Cook W.H.**, A constitutive model and data for metals subjected to high strains, high strain rates and high temperatures, *Proceedings of the 7th Symposium on Ballistics, The Hague(NL)*, (1983), p 541.
- [Keh 1968] **Keh A.S., Nakada Y., Leslie W.C.**, Dislocation Dynamics, eds Rosenfield, Hahn, Bement et Jaffee, (1968).
- [Kittel 1989] **Kittel C.**, Physique de l'état solide, *Dunod université* (1989).
- [Klahn et al 1970] **Klahn D, Mukherjee A.K., Dorn J.E.**, Strain rate effects, 2nd international conference on the Strength of Metals and Alloys, *Asilomar, vol3*, (1970), p 951.
-

-
- [Klepaczko 1968] Klepaczko J.R., Strain rate history effects for polycrystalline aluminium and theory of intersections, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 16, (1968), p 255.
- [Klepaczko 1975] Klepaczko J.R., Thermally activated flow and strain rate history effects for some polycrystalline f.c.c. metals, *Material Science and Engineering*, 18, (1975), p 121.
- [Klepaczko et al 1986] Klepaczko J.R., Chiem, Y.C., On rate sensitivity of f.c.c. metals of strain hardening, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 34. n°1. (1986), p 29.
- [Klepaczko 1987a] Klepaczko J.R., A practical stress - strain - strain rate - temperature constitutive relation of the power form, *Journal of Mechanical Working Technology*, 15, (1987), p 143.
- [Klepaczko 1987b] Klepaczko J.R., An advanced constitutive modelling of rate sensitivity, temperature and strain-hardening in f.c.c. metals, *Impact Loading and Dynamic Behaviour of Materials*, 2, (1987), p 823.
- [Klepaczko 1987c] Klepaczko J.R., Modeling of structural evolution at medium and high strain-rates, f.c.c. and b.c.c metals, *Proceeding 8th Risö symposium, Constitutive relations and their physical basis*, (1987), p 387.
- [Klepaczko 1988a] Klepaczko J.R., A general approach to rate sensitivity and constitutive modelling of F.C.C. and B.C.C metals, *Impact :Effects of Fast Transient Loadings*, Balkema, Rotterdam, (1988), p 3.
- [Klepaczko 1988b] Klepaczko J.R., Constitutive modeling in dynamic plasticity based on physical state variables, *Journal de Physique*, 49, Supplément au n°9, (1988), p C3-553.
- [Klepaczko 1990] Klepaczko J.R., Short and long transients in dynamic plasticity of metals, *Shock Waves and High Strain-Rate Phenomena in Materials*, ed Meyer, Murr and Staudhammer, (1990), p 174.
-

-
- [Klepaczko et al 1993] Klepaczko J.R., Sasaki T., Kurokawa T., On rate sensitivity of polycrystalline aluminium at high strain rates, *Transaction of the Japanese Society of Aerospace Science*, **36**, n°113, (1993), p 170.
- [Klepaczko 1994] Klepaczko J.R., An experimental technique for shear testing at high and very high strain-rates. The case of mild steel, *International Journal of Impact Engineering*, **15**, n°1, (1994), p 25
- [Klepaczko 1996] Klepaczko J.R., Communication privée
- [Klopp et al 1985] Klopp R.W., Clifton R.J., Shawki T.G., *Mechanics of Materials*, **4**, (1985), p 375.
- [Kocks et al 1975a] Kocks U.F., Argon. A.S., Ashby M.F., Thermodynamics and kinetics of slip, *Pergamon Press*, (1975).
- [Kocks 1975b] Kocks U.F., Constitutive relations for slip, *Constitutive Equations in Plasticity*, M.I.T. Press, (1975), p 81.
- [Kocks 1976] Kocks U.F., Laws for work-hardening and low-temperature creep, *Journal of Engineering Materials and Technology*, **98**, (1976), p 76.
- [Kocks et al 1988] Kocks U.F., Follansbee P.S., A constitutive description of the deformation of copper based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable, *Acta Metallurgica*, **36**, (1988), p 81.
- [Kolsky 1963] Kolsky H., Stress waves in solids, *Dover Publication*, (1963).
- [Koo 1962] Koo R.C., Grain size effects on the deformation of tantalum at low temperatures, *Journal of the Less Common Metals vol 4*, (1962), p 138.
- [Kroupa 1967] Kroupa F., Plastic deformation of b.c.c. metals with special reference to slip geometry, *Déformation plastique des alliages. Ecole d'été de métallurgie physique*, (1967).
-

-
- [Lanchenmann et al 1970] **Lanchenmann R., Schultz H.**, Inherent lattice hardening and interstitial solution hardening in tantalum, *Scripta Metallurgica vol 4, (1970), p 709.*
- [Lau et al 1967] **Lau S.S., Ranji S., Mukherjee A.K., Thomas G, Dorn J.E.**, Dislocation mechanisms in single crystals of tantalum and molybdenum at low temperatures, *Acta Metallurgica vol 15, (1967), p 237.*
- [Le Poac et al 1981] **Le Poac P., Miannay D.**, Rapport interne CEA, (1981).
- [Lewis et al 1972] **Lewis J.L., Campbell J.D.**, The developpement and use of a torsional Hopkinson-bar apparatus, *Experimental Mechanics, (1972), p 520.*
- [Lindholm 1964] **Lindholm U.S.**, Some experiments with the split Hopkinson Pressure Bar, *Journal of Mechanics and and Physics of Solids, vol 12 (1964), p317.*
- [Litonski. 1977] **Litonski.**, Plasyic flow of a tube under adiabatic torsion, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, XXV, (1977), p 7.,*
- [Ludwik 1909] **Ludwik P.**, Über den Einfluß der Deformationsgeschwindigkeit bei bleibenden Deformationen mit besonderer Berücksichtigung der Nachwirkungserscheinungen, *Physikalische Zeitschrift, 12, (1909), p 411.*
- [Mecking et al 1981] **Mecking H., Kocks U.F.**, Kinetics of flow and strain hardening, *Acta Metallurgica, 29, (1981), p 1865.*
- [Meyer 1992] **Meyer L.W.**, Constitutive equations at high strain rates, *Shock Wave and High-Strain-Rate Phenomena in Materials, ed Meyers Murr & Staudhammer (1992), p 49.*
- [Michaluk et al 1993] **Michaluk C.A., Gray G.T., Chatterjee T.**, The effect of oxygen, grain size and strain rate on the mechanical behavior of forged P/M tantalum, *LA-UR 93-712, (1993).*

- [Michaluk 1994] Michaluk C.A., Influence of grain size on the flow stress of P/M tantalum and ingot derived Ta and Ta-W alloys, *Proceeding Tungsten and Refractory Metals ed Bose and Dowding, (1994), p 509.*
- [Mitchell et al 1965] Mitchell T.E., Spitzig W.A., Three-stage hardening in tantalum single crystals, *Acta Metallurgica vol 13, (1965), p 1169.*
- [Mitchell et al 1970] Mitchell T.E., Smialek R.L., Interstitial hardening and the peierls stress in tantalum, *Strength of Metals and Alloys (2nd Conference) vol 1, (1970), p 73.*
- [Mordike et al 1967] Mordike B.L., Rudolf G., Three-stage hardening in tantalum deformed in compression, *Journal of Materials Science vol 2, (1967), p 332.*
- [Mordike et al 1970] Mordike B.L., Rogaush K.D., Solid solution of tantalum-base alloys, *Strength of Metals and Alloys (2nd Conference) vol 1, (1970), p 258.*
- [Morrone et al 1986] Morrone A.A., Duffy J., Strain rate and temperature effects during dynamic deformation of polycrystalline and monocrystalline high purity aluminium including TEM studies, *MRL Brown University technical report (1986).*
- [Mughrabi 1975] Mughrabi H., Description of the dislocation structure after deformation at low temperatures, *MIT Press, (1975).*
- [Murr et al 1994] Murr L.E., Niou C.S., Feng C., Residual microstructure in explosively formed tantalum penetrators, *Scripta Metallurgica et Materialia vol 31, (1994), p 297.*
- [Nadal et al 1995] Nadal M.H., Hermerel C., Caractérisation ultrasonore du tantale Cabot de 20 à 100°C, Rapport interne CEA, (1995).
- [Naulin 1996] Naulin G., Communication privée
- [Nominé et al 1994] Nominé, Capelle, Laguionie, Le Creurer-Herail, Caractérisation du deuxième lot de tantale Mapren-Cabot, Rapport interne CEA, (1994).

-
- [Nominé et al 1995a] **Nominé, Beghe, Capelle, Cabirol, Drouin, Le Creurer-Herail, Mancheron**, Caractérisation du deuxième lot de tantale Mapren-Cabot (complément), Rapport interne CEA, (1995).
- [Nominé et al 1995b] **Nominé, Beghe, Capelle, Mancheron, Meinsel, Salmon**, Expertise d'une pièce hydroformée en tantale Cabot, Rapport interne CEA, (1995).
- [Nominé et al 1995c] **Nominé, Mancheron, Cabirol, Capelle, Drouin, Meinsel**, Caractérisation de tantale NRC, Rapport interne CEA, (1995).
- [Norlain et al 1995] **Norlain M.N.**, Ecrouissage critique du tantale, *Mémoire de DEA de Métallurgie Spéciale et Matériaux (Paris XI)*, (1995).
- [Pascal 1958] **Pascal P.**, Nouveau traité de chimie minérale vol XII, , *Masson* (1958).
- [Pochhammer 1876] **Pochhammer L.**, *J reine augen Math*, **81**, (1876), p324.
- [Press et al 1992] **Press et al**, Numerical Recipies in C. The art of scientific computing, *Cambrige 2nd edition*, p656
- [Pugh 1956] **Pugh J.W.**, Temperature dependance of the tensile properties of tantalum, *Transactions of the ASM vol 48*, (1956), p 677.
- [Pugh et al 1956] **Pugh J.W., Hibbard R. Jr**, Rolling textures in tantalum, *Transactions of the ASM vol 48*, (1956), p 526.
- [Puhr et al 1970] **Puhr J., Westerheide, Elssner G.**, On the solid solution hardening of tantalum by nitrogen and oxygen, *Journal of the Less Common Metals vol 20*, (1970), p 371.
- [Raabe et al 1994] **Raabe D., Mülders B., Gottstein G., Lücke K.**, Textures of cold rolled and annealed tantalum, *Materials Science Forum*, (1994), p 841.
- [Rajendran et al 1986] **Rajendran A.M., Bless S.J., Dawicke D.S.**, Evaluation of Bodner-Partom model parameters at high strain rate, *Journal of Engineering Materials and Technology*, **108**, (1986), p 75.

- [Rajendran et al 1991] **Rajendran A.M., Garrett R.K.Jr, Clark J.B., Jungling T.L.**, Effects of strain rate on plastic flow and fracture in pure tantalum, *Journal of Materials Shaping Technology* vol 9 n°1, (1991), p 8.
- [Rajendran et al 1992] **Rajendran A.M., Garrett R.K.Jr, Clark J.B., Jungling T.L.**, Effects of texture and strain rate on flow and fracture in pure tantalum, *High Strain Rate Behavior of Refractory Metals and Alloy*, ed Asfahani, Chen and Crowson, (1992), p 289.
- [Regazzoni 1983] **Regazzoni G.**, Comportement et ductilité du cuivre et du tantale purs dans le domaine de vitesse de déformation, 10^{-4} - $3 \cdot 10^3$ s⁻¹, *Thèse Institut National Polytechnique de Grenoble*, (1983).
- [Regazzoni et al 1984] **Regazzoni G., Montheillet F.**, Influence of strain rate on the flow stress and ductility of copper and tantalum at room temperature, *Mechanical Properties at High Rate of Strain 1984*, ed Harding, (1984).
- [Regazzoni et al 1987] **Regazzoni G., Kocks U.F., Follansbee P.S.**, Dislocation Kinetics at high strain rates, *Acta Metallurgica* vol 35, (1987), p 2865.
- [Rogaush et al 1970] **Rogaush K.D., Mordike B.L.**, Asymmetry of slip in tantalum and tantalum alloys, *Strength of Metals and Alloys (2nd Conference)* vol 1, (1970), p 168.
- [Saada 1960] **Saada G.**, Sur le durcissement dû à la recombinaison des dislocations., *Acta Metallurgica*, 8, (1960), p 841.
- [Sato et al 1971] **Sato R.T., Mukherjee A.K.**, The asymmetric temperature dependence of yield stress in tantalum single crystals at low temperature, *Materials Science and Engineering* vol 8, (1971), p 74.
- [Seeger 1957] **Seeger A.**, The mechanism of glide and work hardening in face-centered cubic and hexagonal close-packed metals, *Dislocations and Mechanical Properties of Crystals*, Wiley & Sons, (1957), p 243.

-
- [Senseny et al 1978] Senseny P.E., Duffy J., Hawley R.H., Experiments on strain rate history and temperature effects during the plastic deformation of close-packed metals, *Journal of Applied Mechanics*, **45**, (1978), p60.
- [Shih et al 1993] Shih H.K., Murr L.E., Niou C.S., Zernow L., Dynamic recrystallisation in a tantalum shaped charge, *Scripta Metallurgica et Materialia* vol 29, (1993), p 1291.
- [Steinberg et al 1980] Steinberg D.J., Cochran S.G., Guinan M.W., A constitutive model for metals applicable at high strain rates, *Journal of Applied Physics* vol 51, (1980), p 1498.
- [Steinberg et al 1989] Steinberg D.J., Lund C.M., A constitutive model for strain rates from 10^{-4} - 10^6 s⁻¹, *Journal of Applied Physics* vol 65, (1989), p 1528.
- [Steinberg 1996] Steinberg D.J., Equation of state and strength properties of selected materials, *Lawrence Livermore National Laboratory, UCRL-MA-106439*, (1996).
- [Stouffer et al 1979] Stouffer D.C., Bodner S.R., A constitutive model for the deformation induced anisotropic plastic flow of metals, *International Journal of Engineering Science*, **17**, (1979), p 757.
- [Studt 1979] Studt P.L., Tantalum Fabrication, *Lawrence Livermore Laboratory, UCID-18152*.
- [Teodosiu et al 1976] Teodosiu C., Sidoroff F., A finite theory of the elastoviscoplasticity of single crystals, *International Journal of Engineering Science*, **31**, (1976), p 713.
- [Ting 1992] Ting C.S., Constitutive modeling of tantalum dynamic plasticity based on the theory of thermal activation and the evolution of strain hardening, *High Strain Rate Behavior of Refractory Metals and Alloy*, ed Asfahani, Chen and Crowson, (1992), p 249.

-
- [Vitek 1970] Vitek V., Atomic structure of stacking faults, twins and screw dislocations in b.c.c metals, *Strength of Metals and Alloys (2nd Conference) vol 2, (1970), p 389*
- [Wasserbäch 1987] Wasserbäch W., Long range internal stresses and low temperature phonon scattering in plastically deformed niobium and tantalum single crystals, *Materials Science and Technology, (1987), p 167.*
- [Worswick et al 1992] Worswick M.J., Qiang N., Niessen P., Pick R.J., Microstructure and fracture during high-rate forming of iron and tantalum, *Shock wave and high strain rate phenomena in materials ed Meyers, Murr and Staudhammer, (1992), p 87.*
- [Wright et al 1994a] Wright S.I., Bingert S.R., Johnson M.D., Effect of annealing temperature on the texture of rolled tantalum and tantalum-10wt% tungsten, *Proceeding Tungsten and Refractory Metals ed Bose and Dowding, (1994), p 501.*
- [Wright et al 1994b] Wright S.I., Gray G.T.III, Rollett A.D., Textural and microstructural gradient effects on the mechanical behavior of a tantalum plate, *Metalurgical and Materials Transactions vol 25A, (1994), p 1025.*
- [Zeghib 1990] Zeghib N.E., Etude expérimentale et modélisation de la déformation plastique tenant compte du vieillissement dynamique. Cas des aciers doux, *Thèse de l'Université de Metz, (1990)*
- [Zenasni 1992] Zenasni M., Caractérisation expérimentale et modélisation du comportement du cuivre en grandes vitesses de déformation : sensibilité à la vitesse, *Thèse de l'Université de Metz, (1992).*
- [Zerilli et al 1987] Zerilli F.J., Armstrong R.W., Dislocation-mechanic-based constitutive relations for material dynamics calculations, *Journal of Applied Physics, 631, (1987), p 1816.*
-

[Zhao 1992]

Zhao H., Analyse de l'essai aux barres de Hopkinson. Application à la mesure du comportement dynamique des matériaux, *Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*, (1992)

Annexes

Annexe 1

Elasticité des cristaux cubiques

A1 - 1.Rappels

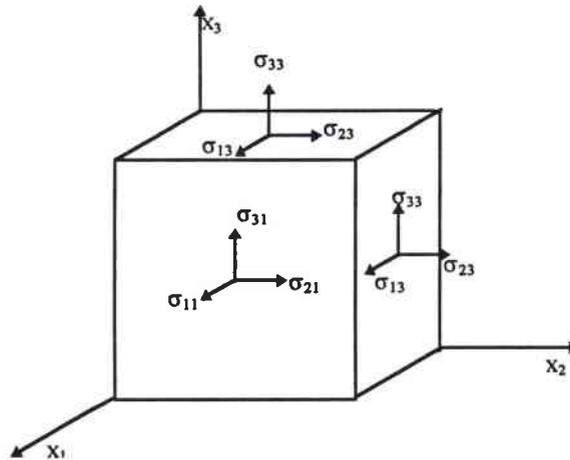


Figure 1 : tenseur des contraintes

Lors d'une sollicitation uniaxiale (traction-compression), il existe un référentiel dans lequel le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le module de Young $E_{\langle h,k,l \rangle}$ est défini comme le rapport entre la contrainte σ , appliquée dans la direction $\langle h,k,l \rangle$, et la déformation élastique mesurée dans cette direction.

Dans le cas du cisaillement pur, il existe un repère \mathcal{R}_{obs} dans lequel le tenseur de contraintes s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le module de cisaillement $G_{\langle h,k,l \rangle \langle h',k',l' \rangle}$ est défini comme le rapport entre la contrainte de cisaillement τ ($=\sigma_{12}$ dans \mathcal{R}_{obs}) appliquée sur le plan $\{h,k,l\}$ dans la direction $\langle h',k',l' \rangle$ (contenue dans ce plan) et la déformation mesurée dans ce système ($2\varepsilon_{12}$ dans \mathcal{R}_{obs}). (figure 1)

A1 - 2. Référentiel lié au cristal

La matrice de rigidité C d'un cristal à symétrie cubique est constituée de trois coefficients indépendants C_{11} , C_{12} , C_{44} [François et al 1991]. Dans le repère lié au cristal (figure 1), cette matrice s'écrit :

$$C_{\text{cristal}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{44} \end{bmatrix} \quad (\bar{\sigma} = C_{\text{cristal}} \cdot \bar{\varepsilon})$$

$$\text{avec } \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

La matrice de souplesse du cristal considéré peut alors s'écrire :

$$S_{\text{cristal}} = C_{\text{cristal}}^{-1} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un tenseur de contrainte correspondant à une traction uniaxiale dans le suivant l'axe x_1 , on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_{\langle 100 \rangle}} &= \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})} = S_{11} \\
\frac{-\nu_{\langle 100 \rangle}}{E_{\langle 100 \rangle}} &= \frac{-C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})} = S_{12} \\
\frac{1 + \nu_{\langle 100 \rangle}}{E_{\langle 100 \rangle}} &= \frac{1}{(C_{11} - C_{12})} = S_{11} - S_{12} \\
\frac{1}{2G_{\{100\}\langle 001 \rangle}} &= \frac{1}{2C_{44}} = S_{44}
\end{aligned}$$

On définit le facteur d'anisotropie par

$$A = \frac{S_{11} - S_{12}}{S_{44}} = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}}$$

Plaçons nous maintenant dans un référentiel d'observation différent de celui du cristal et relié par la matrice de rotation P . ($\mathfrak{R}_{cristal} \xrightarrow{P} \mathfrak{R}_{obs}$)

$$P = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_{obs}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{cristal} = {}^t P \cdot \bar{\bar{\sigma}} \cdot P = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Le tenseur de déformation vaut alors dans le référentiel lié au cristal :

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\varepsilon}}_{cristal} &= \mathbf{S} \bar{\bar{\sigma}}_{cristal} \equiv (S_{11} - S_{12}) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + S_{12} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + S_{44} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \\
&= (S_{11} - S_{12} - S_{44}) \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} + S_{12} * \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}_{cristal}) \cdot \mathbf{I}_3 + S_{44} \cdot \bar{\bar{\sigma}}_{cristal}
\end{aligned}$$

Dans le référentiel d'observation, on obtient donc le tenseur de déformation suivant :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\epsilon}}_{obs} = P \cdot \bar{\bar{\epsilon}}_{cristal} \cdot {}^t P$$

$$\bar{\bar{\epsilon}} = (S_{11} - S_{12} - S_{44}) P \cdot \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) \cdot {}^t P + S_{12} * \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \cdot I_3 + S_{44} \cdot \bar{\bar{\sigma}}$$

A1 - 3. Traction et compression simples :

Dans le cas d'une sollicitation uniaxiale (traction ou compression) le tenseur de contrainte s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur \bar{e}_1 dont les coordonnées dans le référentiel du cristal correspondent à la première ligne de la matrice de passage P , représente le vecteur unitaire de l'axe de traction (ou de compression). En reprenant la démarche du paragraphe précédent, on obtient :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{cristal} = \sigma \cdot \begin{bmatrix} e_{11}^2 & e_{11} \cdot e_{12} & e_{11} \cdot e_{13} \\ e_{11} \cdot e_{12} & e_{12}^2 & e_{12} \cdot e_{13} \\ e_{11} \cdot e_{13} & e_{12} \cdot e_{13} & e_{13}^2 \end{bmatrix} \quad \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) = \sigma$$

$$\bar{\bar{\epsilon}} = (S_{11} - S_{12} - S_{44}) \sigma P \cdot \text{diag}(e_{11}^2, e_{12}^2, e_{13}^2) \cdot {}^t P + S_{12} \sigma \cdot I_3 + S_{44} \cdot \bar{\bar{\sigma}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\bar{\epsilon}}_{11}}{\sigma} &= (S_{11} - S_{12} - S_{44})(e_{11}^4 + e_{12}^4 + e_{13}^4) + S_{12} + S_{44} \\ &= S_{11} + (S_{44} - S_{11} - S_{12})(1 - e_{11}^4 - e_{12}^4 - e_{13}^4) = \frac{1}{E} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_{\langle 100 \rangle}} + \left(\frac{1}{2C_{44}} - \frac{1}{C_{11} - C_{12}} \right) f(\vec{e}_1)$$

$$f(\vec{e}_1) = (1 - e_{11}^4 - e_{12}^4 - e_{13}^4) \text{ et } \|\vec{e}_1\| = 1$$

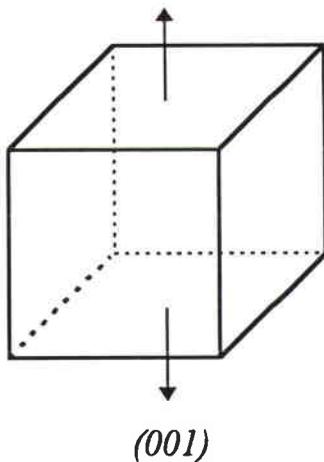
Par la méthode du multiplicateur de Lagrange et en intégrant f sur la sphère unité, on trouve que :

$$\min_{\|\vec{e}_1\|=1} f(\vec{e}_1) = f(\langle 100 \rangle) = 0$$

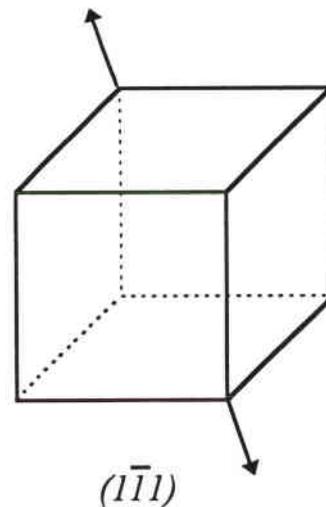
$$\max_{\|\vec{e}_1\|=1} f(\vec{e}_1) = f(\langle 111 \rangle) = \frac{2}{3}$$

$$\text{moyenne}_{\|\vec{e}_1\|=1} f(\vec{e}_1) = \frac{2}{5}$$

D'où les extrema :



$$\frac{1}{E_{\langle 100 \rangle}} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}$$



$$\frac{1}{E_{\langle 111 \rangle}} = \frac{1}{E_{\langle 100 \rangle}} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{C_{44}} - \frac{2}{C_{11} - C_{12}} \right)$$

et la moyenne pour un polycristal "isotrope" :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{E}} &= \frac{1}{E_{\langle 100 \rangle}} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{C_{44}} - \frac{2}{C_{11} - C_{12}} \right) \\ &= \frac{2}{5} \frac{1}{E_{\langle 100 \rangle}} + \frac{3}{5} \frac{1}{E_{\langle 111 \rangle}}\end{aligned}$$

A1 - 4. Cisaillement pur

Dans le cas du cisaillement pur, il existe un repère dans lequel le tenseur de contraintes s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs \bar{e}_1 et \bar{e}_2 dont les coordonnées dans le référentiel du cristal correspondent respectivement à la première et à la deuxième ligne de la matrice de passage P , représentent le vecteur unitaire normal au plan de cisaillement et la direction de sollicitation dans ce plan. De manière analogue, on obtient :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\text{cristal},i,j} = \sigma \cdot (e_{1i} \cdot e_{2j} + e_{2i} \cdot e_{1j})$$

$$\frac{\bar{e}_{12}}{\tau} = S_{44} + (S_{11} - S_{12} - S_{44}) * 2(e_{11}^2 e_{21}^2 + e_{12}^2 e_{22}^2 + e_{13}^2 e_{23}^2)$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{G} &= \frac{1}{C_{44}} + \left(\frac{2}{C_{11} - C_{12}} - \frac{1}{C_{44}} \right) g(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \\ g(\bar{e}_1, \bar{e}_2) &= 2(e_{11}^2 e_{21}^2 + e_{12}^2 e_{22}^2 + e_{13}^2 e_{23}^2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \|\bar{e}_1\| = \|\bar{e}_2\| = 1 \\ \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}}$$

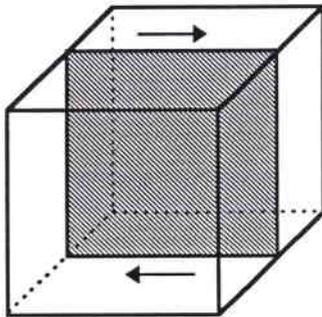
Par un calcul à peu près similaire que pour le module de Young, on démontre que :

$$\min g(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = g([100], (010)) = 0$$

$$\max g(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = g([110], (\bar{1}10)) = 1$$

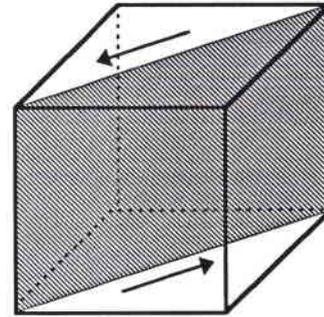
$$\text{moyenne } g(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \frac{2}{5}$$

donc des extrema :



$$\begin{matrix} [100] \\ (010) \end{matrix}$$

$$G_{\{100\}\langle 100 \rangle} = C_{44}$$



$$\begin{matrix} [110] \\ (1\bar{1}0) \end{matrix}$$

$$G_{\{110\}\langle 110 \rangle} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$$

et une moyenne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{G}} &= \frac{1}{G_{\{100\}\langle 001 \rangle}} + \frac{2}{5} \left(\frac{2}{C_{11} - C_{12}} - \frac{1}{C_{44}} \right) \\ &= \frac{3}{5} \frac{1}{G_{\{100\}\langle 001 \rangle}} + \frac{2}{5} \frac{1}{G_{\{110\}\langle 001 \rangle}} \end{aligned}$$

A1 - 5. Torsion

Le cas de la torsion correspond à la moyenne des cisaillements dans toutes les directions d'un plan donné. La torsion est caractérisée par un axe de vecteur directeur \bar{e}_1 perpendiculaire au plan de cisaillement. On obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{G} &= \frac{1}{C_{44}} + \left(\frac{2}{C_{11} - C_{12}} - \frac{1}{C_{44}} \right) f(\bar{e}_1) \\ f(\bar{e}_1) &= (1 - e_{11}^4 - e_{12}^4 - e_{13}^4) \text{ et } \|\bar{e}_1\| = 1 \end{aligned}}$$

La fonction de direction f est identique à celle déterminée pour la traction.

Les extrema sont donc :

$$G_{\langle 100 \rangle} = C_{44} \quad \text{et} \quad G_{\langle 111 \rangle} = \left[\frac{2}{3} \frac{C_{11} - C_{12}}{C_{11} - C_{12}} + \frac{1}{3} \frac{C_{11}}{C_{44}} \right]^{-1}$$

On remarque que le module de cisaillement en torsion est minimal lorsque le module de Young est maximal et vice-versa.

A1 - 6.Cas du tantale

En reprenant les valeurs de Fisher [1969]

$$C_{11} = 265,91 \text{ GPa}$$

$$C_{12} = 161,12 \text{ GPa}$$

$$C_{44} = 82,39 \text{ GPa}$$

à température ambiante, on trouve que le tantale présente un coefficient de Zener de $A = 1,6$. Cette valeur est assez faible quand on la compare à celle du sodium (7,5) ou du laiton β (8,8). Elle est inférieure à celle du fer α mais supérieure à celle de l'aluminium (1,23) ou du tungstène (1,00), totalement isotrope d'un point de vue élastique.

Nous trouvons donc :

Traction-compression

$$E_{max} = E_{\langle 111 \rangle} = 216,8 \text{ GPa}$$

$$E_{min} = E_{\langle 100 \rangle} = 144,3 \text{ GPa}$$

$$E_{moyen} = 180,5 \text{ GPa}$$

Torsion

$$G_{max} = G_{\langle 100 \rangle} = 82,8 \text{ GPa}$$

$$G_{min} = G_{\langle 111 \rangle} = 59,6 \text{ GPa}$$

$$G_{moyen} = 67 \text{ GPa}$$

Annexe 2

Propagation des ondes élastiques

Barres de Hopkinson en compression

A2 - 1. Propagation des ondes élastiques

Différents types d'ondes élastiques peuvent se propager dans les solides. Leur nature dépend de la façon dont le mouvement des particules est relié à la propagation des ondes et des conditions au limite du matériau. Parmi les principales classes d'ondes élastiques nous nous contentons de citer les ondes :

- longitudinales ou irrotationnelles ; dans un milieu infini, elles sont connues en tant qu'ondes de dilatation ;
- de cisaillement (encore appelées de distorsion) ; elles n'engendrent pas de variation de volume ;
- de surface (ou de Rayleigh).

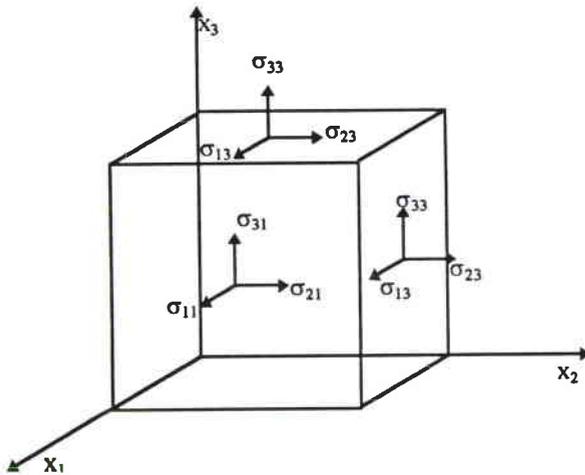


Figure 1

Nous ne décrivons ici que les deux premiers types d'onde.

Pour considérer la propagation des ondes dans un matériau, nous écrivons le principe fondamental de la dynamique sur un parallélépipède rectangle élémentaire du matériau considéré en supposant que la masse volumique ρ demeure constante.

$$/1/ \quad \sum F_{x_i} = (\rho \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

u_i étant le déplacement du centre de gravité dans la direction x_i .

La contrainte dans la direction x_i sur la sur une face orthogonale à la direction x_j est

$$\sigma_{ij} \pm \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \cdot \frac{1}{2} \delta x_j$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 - \sigma_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \cdot \delta x_1) \delta x_2 \delta x_3 \\
 /2/ & + (\sigma_{12} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \cdot \delta x_2 - \sigma_{12} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \cdot \delta x_2) \delta x_1 \delta x_3 \\
 & + (\sigma_{13} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \cdot \delta x_3 - \sigma_{13} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \cdot \delta x_3) \delta x_1 \delta x_2 = \sum F_{x_1}
 \end{aligned}$$

En combinant /1/ et /2/, on arrive à l'expression dans la direction x_1

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

De manière similaire, dans les trois directions x_i ,

$$/3/ \quad \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Pour un matériau isotrope, les lois de Hooke permettent d'écrire :

$$/4/ \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \Delta \delta_{ij}$$

où

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ et}$$

$$\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \text{ est la dilatation de}$$

l'élément.

λ et μ sont les coefficients de Lamé.

En remplaçant dans /3/, on obtient :

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \Delta \delta_{ij} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\mu \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\mu \nabla^2 u_i + \mu \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$/5/ \quad \boxed{\mu \nabla^2 u_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}}$$

A2 - 1.1. Onde sphérique

En différenciant /5/ par rapport à x_i , on arrive à

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \nabla^2 u_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)$$

c'est-à-dire

$$/6/ \quad \boxed{\mu \nabla^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i^2} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)}$$

En sommant les trois expressions /6/, et en remarquant que $\Delta = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ on obtient

finalement :

$$/7/ \quad \boxed{(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta = \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}}$$

Dans le cas d'un milieu semi-infini, la célérité des ondes de dilatation est :

$$/8/ \quad \boxed{c_l = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1-\nu) E}{(1+\nu)(1-2\nu) \rho}}}$$

A2 - 1.2. Ondes de cisaillement

Repartons de l'équation /5/.

$$\mu \nabla^2 u_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

En différenciant /5/ par rapport à x_j , on arrive à

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \nabla^2 u_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \text{ ou encore :}$$

$$/9a/ \quad \mu \nabla^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i \partial x_j} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

De manière analogue,

$$/9b/ \quad \mu \nabla^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i \partial x_j} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

soit, en soustrayant les deux dernières équations,

$$\mu \nabla^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

En posant la rotation $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, on arrive à l'équation d'onde :

$$/10/ \quad \mu \nabla^2 \omega_{ij} = \rho \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial t^2}$$

se propageant à la célérité :

$$/11/ \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Cette célérité est indépendante de la longueur d'onde.

A2 - 1.3. Onde de compression dans un barreau cylindrique

Le cas d'une onde de compression se propageant le long d'un barreau cylindrique est différent de celui d'une onde de dilatation dans un milieu semi-infini. Les effets de bord font que l'onde est dirigée et se déplace moins vite que dans un milieu infini (*figure 2*).

Dans l'approche courante, nous sommes amenés à faire les hypothèses suivantes :

le front d'onde reste plan,

l'inertie radiale est négligée (pas de variation de section).

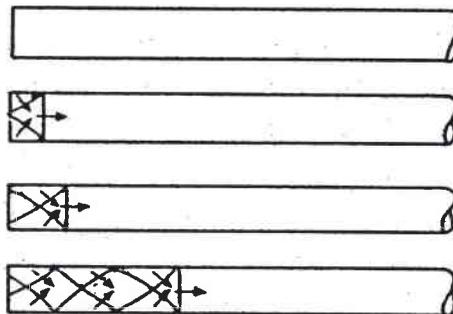


Figure 2 : propagation d'une onde dans un barreau cylindrique

En appliquant le principe de Newton à un élément de la barre de section A et de longueur δx , (*figure 3*) on obtient :

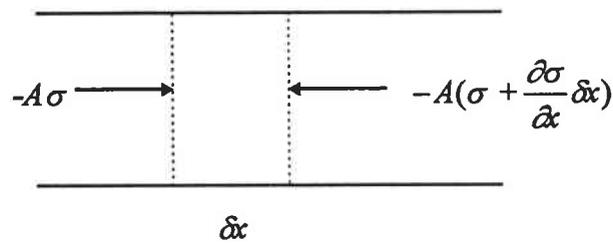


Figure 3

$$-A\sigma + A\left(\sigma + \frac{\partial\sigma}{\partial x}\delta x\right) = A\rho\delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

c'est-à-dire

$$/12/ \quad \frac{\partial\sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Sachant que la déformation est élastique, on a $\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}$. En remplaçant dans /12/,

on obtient :

$$/13/ \quad E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

équation d'une onde de célérité :

$$/14/ \quad c_b = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

On constate que la célérité d'une onde de compression dans une barre est inférieure à celle dans un milieu infini. Pour un métal dont le coefficient de Poisson est de 0,3, le rapport des deux célérités est :

$$\frac{c_l}{c_b} = \sqrt{1,346} = 1,16$$

La solution de l'équation /13/ s'écrit :

$$/15/ \quad u = f(x-c_b t) + g(x+c_b t)$$

$$/16/ \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-c_b t) + g'(x+c_b t)$$

$$/17/ \quad \sigma = E \varepsilon = E [f'(x-c_b t) + g'(x+c_b t)]$$

$$/18/ \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} = c_b [-f'(x-c_b t) + g'(x+c_b t)]$$

Si on considère le cas où l'onde ne se déplace que dans une seule direction, ces équations montrent une relation linéaire entre la contrainte en un point et la vitesse particulière :

$$/19/ \quad \sigma = \frac{E}{c_b} v = \sqrt{E\rho} v = \rho c_b v$$

ρc_b est l'impédance spécifique du matériau.

A2 - 1.3.1. Effets d'inertie radiale

Pochhammer [1876] et Chree [1889] ont étudié la propagation de trains d'ondes sinusoïdales dans un barreau cylindrique semi-infini. Dans le cas d'ondes longitudinales où chaque élément se déforme dans la direction de propagation de l'onde, les solutions font apparaître des fonctions de Bessel de première espèce d'ordre zéro et d'ordre un. Le développement en série de ces fonctions permet d'aboutir à l'équation approchée de la forme :

$$/20/ \quad \frac{C_\phi}{C_b} = 1 - v^2 \pi^2 \left(\frac{r}{\Lambda}\right)^2$$

C_ϕ = vitesse de groupe

$$C_b = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

r = rayon du barreau

Λ longueur du train d'onde.

$$v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{coefficient de Poisson})$$

Si $r \ll \Lambda$ alors $c_\phi = c_b$, et on obtient une onde non dispersive de vitesse c_b .

Davies [1956] a pris en compte les effets d'inertie radiale parvenant ainsi à une équation de propagation de la forme :

$$/21/ \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{I}{A} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial x^2} - c_b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$I = \pi r^4 / 2$ désigne le moment d'inertie d'ordre 2 par rapport à l'axe du cylindre

$A = \pi r^2$ est la section de la barre.

Le terme traduisant la dispersion est traduit par le second terme de l'équation /21/.

Plusieurs solutions sont proposées pour diminuer ces ondes radiales :

- la 1^{ère} solution consiste à diminuer le diamètre des barres de façon à ce qu'il soit nettement inférieur à la longueur d'onde. Cette solution présente cependant l'inconvénient de diminuer la force maximale admissible car les barres doivent demeurer dans le domaine élastique.

- la 2^{ème} solution est de choisir des matériaux dont le coefficient de Poisson est faible. Là encore il faut que leur limite d'élasticité soit suffisamment élevée pour avoir une gamme de vitesses d'impact la plus étendue possible.

A2 - 1.3.2. Réflexion d'une onde de compression

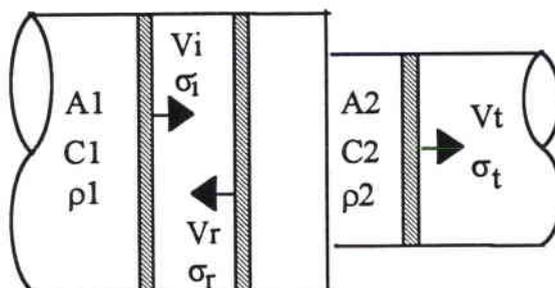


Figure 4: Réflexion d'une onde de compression

Lorsqu'une telle onde rencontre une discontinuité de section ou de matériau (figure 4), elle est en partie transmise et en partie réfléchi. Les conditions à satisfaire à l'interface sont l'équilibre des forces et de vitesses particulières :

$$A_1 (\sigma_i + \sigma_r) = A_2 \sigma_t$$

$$v_i - v_r = v_t$$

Les indices i , r et t se réfèrent aux ondes incidente, réfléchi et transmise.

En combinant ces équations avec l'équation /19/, on aboutit à :

$$\sigma_t = \frac{2A_1\rho_2C_{b2}}{A_1\rho_1C_{b1} + A_2\rho_2C_{b2}} \sigma_i$$

$$\sigma_r = \frac{A_2\rho_2C_{b2} - A_1\rho_1C_{b1}}{A_1\rho_1C_{b1} + A_2\rho_2C_{b2}} \sigma_i$$

A2 - 2.Méthode des barres de Hopkinson

A2 - 2.1.Principe

La théorie des barres de Hopkinson en compression est identique à celle des barres de torsion :

On peut résumer les équivalences dans le tableau suivant :

Torsion	Compression
couple C	force F
moment d'inertie $J = \frac{\pi D^4}{32}$	aire de la section $A = \frac{\pi D^2}{4}$
contrainte de cisaillement τ	contrainte uniaxiale σ
taux de cisaillement γ	taux de déformation ε
module de cisaillement G	module de Young E
célérité des ondes $c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho_0}}$	célérité des ondes $c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$
impédance acoustique $Z = J\rho_0 c_t$	impédance acoustique $Z = A\rho_0 c_l$

Le dispositif expérimental est constitué d'un projectile, d'une barre d'entrée, de l'éprouvette et d'une barre de sortie. Les barres sont placées dans un tube de guidage afin d'assurer leur alignement. Lors de l'essai, le projectile vient heurter l'extrémité de la barre d'entrée engendrant ainsi une onde élastique de compression se propageant vers l'éprouvette (onde incidente). En raison de la différence d'impédance entre la barre d'entrée et l'échantillon, seule une partie du signal est transmise dans la barre de sortie. L'autre partie du signal est réfléchi en une onde de tension. A partir de la mesure des déformations des barres d'entrée et de sortie au moyen de jauges de déformation il est possible de déterminer à tout instant la vitesse de déformation et la contrainte au sein de l'échantillon.

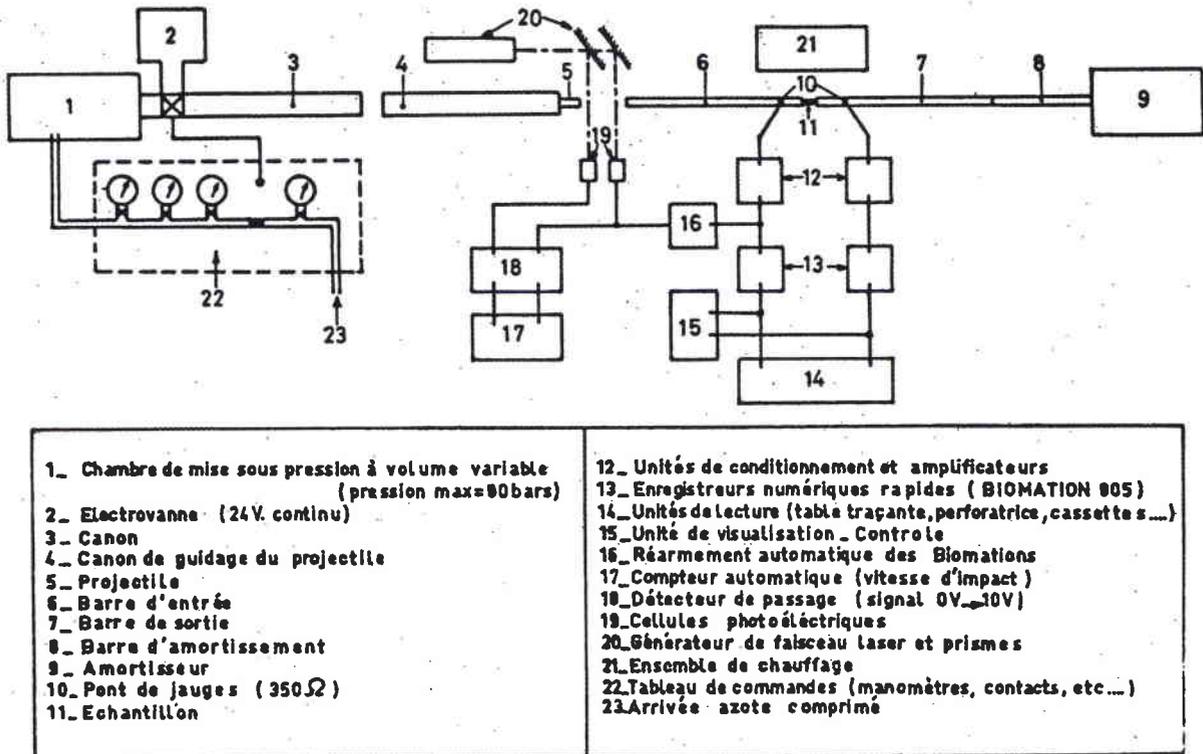


Figure 5 : Barres de Hopkinson

L'amplitude de l'onde incidente dépend de la vitesse d'impact du projectile tandis que sa durée varie suivant la longueur de celui-ci ($T = \frac{2L}{c_b}$, où L est la longueur du projectile et c_b la célérité des ondes de longitudinales dans le projectile). [Kolsky 63]

A2 - 2.2. Conditions expérimentales et hypothèses retenues

Les hypothèses nécessaires pour le dépouillement d'un essai de compression réalisé avec des barres de Hopkinson sont les suivantes :

- conservation du comportement élastique du matériau des barres d'entrée et de sortie ;
- hypothèse d'un état de déformation homogène au sein de l'éprouvette ;
- faible longueur de l'éprouvette afin que les ondes effectuent un nombre d'allers et retours suffisant dans l'échantillon et obtenir ainsi un état de contrainte uniforme ;
- les contraintes tangentielles doivent être faibles ; ceci peut être réalisé en polissant soigneusement les faces de l'éprouvette ou en les lubrifiant légèrement, ce qui a pour effet d'abaisser le coefficient de frottement.

Le dispositif doit permettre un alignement parfait des barres et leur liberté totale de déplacement axial. [Dormeval 1980] [Bacon 1993]

A2 - 2.3. Expression de la force appliquée et de la déformation dans l'échantillon

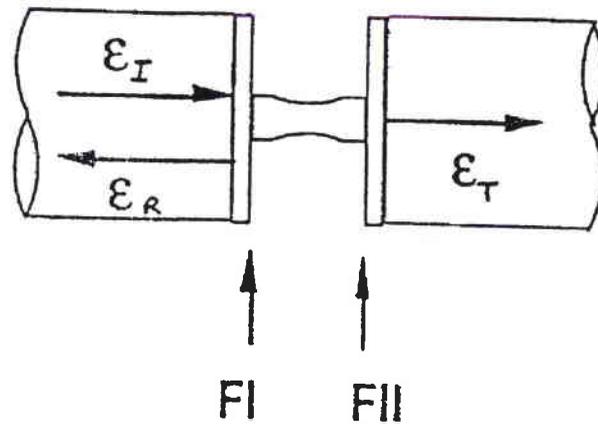


Figure 6

A : section de la barre

E : module de Young

c_b : vitesse de l'onde dans la barre

ϵ_r : déformation due au signal réfléchi,

ϵ_i : déformation due au signal incident

ϵ_t : déformation due au signal transmis;

Les forces de contact aux interfaces I et II (figure 6) ont les expressions suivantes :

$$F_I = AE(\epsilon_r + \epsilon_i)$$

$$F_{II} = AE\epsilon_t$$

Au bout de quelques allers et retours de l'onde dans l'échantillon, on observe généralement que les deux forces sont égales. $\epsilon_r + \epsilon_i = \epsilon_t$

Les vitesses particulières des sections I et II sont :

$$v_I = c_b(\epsilon_r - \epsilon_i)$$

$$v_{II} = -c_b\epsilon_t$$

La vitesse de déformation dans l'échantillon est : $\dot{\epsilon} = \frac{v_I - v_{II}}{e} = \frac{2c_b\epsilon_r}{e}$, où e est la longueur de l'éprouvette.

La mesure de la déformation des barres au moyen de ponts de jauges permet de remonter aux niveaux de contrainte et de déformation aux interfaces I et II.

L'évaluation de la force résultante à l'interface I n'est pas précise parce qu'elle est déduite de la somme en valeur algébrique des signaux incident et réfléchi (ils sont quasiment égaux en valeur absolue à cause d'une forte désadaptation d'impédance), ce qui introduit une incertitude assez importante. En revanche, la détermination de la force est plus précise à partir du signal enregistré sur la barre de sortie. Nous choisissons alors la force F_{II} pour le calcul de la force résultante de l'éprouvette en supposant un état quasi équilibré de celle-ci (égalité des forces F_I et F_{II}). [Lindholm, 64]

Les hypothèses de Hopkinson citées précédemment peuvent être difficilement vérifiées en présence d'inertie radiale et de frottement entre l'échantillon et les barres élastiques. Cependant, les oscillations radiales sont négligeables très rapidement.

En connaissant la vitesse de déformation à tout instant, nous avons accès à la déformation en intégrant celle-ci par rapport au temps.

Annexe 3

Diverses modélisations du comportement plastique du tantale

La résolution de problèmes mécaniques avec l'aide de moyens numériques est l'aboutissement de la connaissance du comportement des matériaux. La qualité des simulations dépend fortement de la description et de l'analyse des résultats expérimentaux obtenus.

De nombreux modèles de lois de comportement mécaniques tentent de restituer de manière plus ou moins complète le comportement mécanique des matériaux. L'objet de ce chapitre est de comparer les résultats des différents modèles sur le tantale dans le domaine de vitesses, de déformations et de températures détaillé dans le chapitre précédent.

A3 - 1. Hollomon $\sigma = K \varepsilon^n$

Cette loi est la première approche du comportement mécanique d'un métal. Elle indique la consolidation du matériau mais n'apporte aucun renseignement sur sa limite d'élasticité. Elle n'est pas représentative des très faibles déformation car σ tend vers 0 lorsque ε est très faible. De plus elle ne prend pas en compte l'effet de la température et de la vitesse de déformation.

Les paramètres déterminés par D. Bédère, Ansart et Dormeval [*~ 1988*] ont été obtenus par méthode des moindres carrés à différentes températures et vitesses de déformation et ne correspondent pas nécessairement aux valeurs ponctuelles du coefficient d'érouissage. Ils publient (σ en MPa):

$T = 20^\circ\text{C}$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 507 \varepsilon^{0,2} \\ \dot{\varepsilon} = 570 \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 533 \varepsilon^{0,015} \\ \dot{\varepsilon} = 1910 \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 604 \varepsilon^{0,03} \end{aligned}$$

$T = 200^\circ\text{C}$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 468 \varepsilon^{0,281} \\ \dot{\varepsilon} = 850 \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 411 \varepsilon^{0,044} \\ \dot{\varepsilon} = 2250 \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 461 \varepsilon^{0,065} \end{aligned}$$

$T = 400^\circ\text{C}$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 455 \varepsilon^{0,251} \\ \dot{\varepsilon} = 1020 \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 365 \varepsilon^{0,112} \\ \dot{\varepsilon} = 1690 \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 393 \varepsilon^{0,128} \end{aligned}$$

$T = 600^\circ\text{C}$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 322 \varepsilon^{0,253} \\ \dot{\varepsilon} = 1090 \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 326 \varepsilon^{0,12} \\ \dot{\varepsilon} = 1750 \text{ s}^{-1} & \quad \sigma = 347 \varepsilon^{0,119} \end{aligned}$$

A3 - 2.Ludwik $\sigma = \sigma_0 + K \varepsilon^n$

Ce modèle contrairement à celui d'Hollomon donne la limite d'élasticité. D'après Bédère, Ansart et Dormeval, les résultats de simulation sur le tantale sont très satisfaisants avec cette loi simple pourvu que l'on travaille température et vitesse de déformation connue. Ils trouvent les formules suivantes (σ en MPa):

$$T = 20^\circ\text{C}$$

$$\dot{\varepsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 150 + 461 \varepsilon^{0,505}$$

$$\dot{\varepsilon} = 1910 \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 509 + 211 \varepsilon^{0,541}$$

$$T = 200^\circ\text{C}$$

$$\dot{\varepsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 87 + 426 \varepsilon^{0,459}$$

$$\dot{\varepsilon} = 850 \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 313 + 162 \varepsilon^{0,43}$$

$$\dot{\varepsilon} = 2250 \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 324 + 185 \varepsilon^{0,476}$$

$$T = 400^\circ\text{C}$$

$$\dot{\varepsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 84 + 394 \varepsilon^{0,381}$$

$$\dot{\varepsilon} = 1020 \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 192 + 304 \varepsilon^{0,543}$$

$$\dot{\varepsilon} = 1690 \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 195 + 286 \varepsilon^{0,519}$$

$$T = 600^\circ\text{C}$$

$$\dot{\varepsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 79 + 284 \varepsilon^{0,484}$$

$$\dot{\varepsilon} = 1090 \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 165 + 307 \varepsilon^{0,585}$$

$$\dot{\varepsilon} = 1750 \text{ s}^{-1} \quad \sigma = 188 + 325 \varepsilon^{0,671}$$

A3 - 3.Steinberg Cochran Guinan $\sigma = \sigma_0 (1 + \beta \varepsilon)^n$

Cette loi fournit à la fois la limite d'élasticité et le coefficient d'écrouissage dès que $\beta \varepsilon$ est très grand devant 1. Sa formulation complète tient compte de la pression et de la température mais pas de la vitesse de déformation [Steinberg et al 1980]:

$$\sigma = \sigma_0 [1 + \beta \varepsilon]^n \left[1 + \frac{P}{\sigma_0 \eta^{1/3}} \frac{\partial \sigma}{\partial P} + \frac{(T - 300)}{G_0} \frac{\partial G}{\partial T} \right]$$

Ce modèle est conçu principalement pour les chocs pour lesquels la vitesse de déformation excède $\dot{\varepsilon} = 10^5 \text{ s}^{-1}$ mais a été étendu au domaine de vitesses $10^4 - 10^5 \text{ s}^{-1}$ comme nous le verrons dans le prochain paragraphe. Les constantes fournies par Steinberg, Cochran et Guinan ne sont pas exploitables dans le domaine de vitesses de déformation que nous avons considéré jusqu'ici ($\sigma > \sigma_0 = 770 \text{ MPa}$).

En adoptant un modèle simplifié $\sigma = \sigma_0 (1 + \beta \varepsilon)^n$, Bédère et al déterminent avec une très bonne corrélation avec leurs essais expérimentaux à température et vitesse de déformation constante :

T = 20°C

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= 10^{-3} \text{ s}^{-1} & \sigma &= 149 (1 + 105 \varepsilon)^{0,282} \\ \dot{\varepsilon} &= 570 \text{ s}^{-1} & \sigma &= 470 (1 + 2660 \varepsilon)^{0,016} \\ \dot{\varepsilon} &= 1910 \text{ s}^{-1} & \sigma &= 508 (1 + 219 \varepsilon)^{0,033}\end{aligned}$$

T = 200°C

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= 10^{-3} \text{ s}^{-1} & \sigma &= 91 (1 + 278 \varepsilon)^{0,288} \\ \dot{\varepsilon} &= 850 \text{ s}^{-1} & \sigma &= 315 (1 + 169 \varepsilon)^{0,058} \\ \dot{\varepsilon} &= 2250 \text{ s}^{-1} & \sigma &= 328 (1 + 47 \varepsilon)^{0,098}\end{aligned}$$

T = 400°C

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= 10^{-3} \text{ s}^{-1} & \sigma &= 108 (1 + 178 \varepsilon)^{0,275} \\ \dot{\varepsilon} &= 1020 \text{ s}^{-1} & \sigma &= 197 (1 + 54 \varepsilon)^{0,193} \\ \dot{\varepsilon} &= 1690 \text{ s}^{-1} & \sigma &= 202 (1 + 47 \varepsilon)^{0,201}\end{aligned}$$

T = 600°C

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= 10^{-3} \text{ s}^{-1} & \sigma &= 82 (1 + 118 \varepsilon)^{0,297} \\ \dot{\varepsilon} &= 1090 \text{ s}^{-1} & \sigma &= 170 (1 + 41 \varepsilon)^{0,232} \\ \dot{\varepsilon} &= 1750 \text{ s}^{-1} & \sigma &= 191 (1 + 21 \varepsilon)^{0,273}\end{aligned}$$

La valeur du paramètre β n'a pas de signification physique intrinsèque. Sa variation a extrêmement peu d'influence sur la loi. Il est possible d'obtenir une modélisation tout aussi satisfaisante avec une légère modification de n et σ_0 et une valeur de β radicalement différente de celle trouvée par Bédère et al (on peut trouver un facteur supérieur à 10).

L'inconvénient majeur des trois modèles sus-cités est la multiplicité des jeux de coefficients, chacun étant dépendant de la température et de la vitesse de déformation. Les modèles qui suivent ont cherché des relations restituant l'influence de la vitesse de déformation et de la température sur les courbes de consolidation du tantale.

A3 - 4. Steinberg Lund

En se basant sur la modélisation de Dorn et les résultats expérimentaux de Hoge et Mukherjee, Steinberg et Lund [~ 1989] ont découpé l'effet de l'écroutissage et de l'activation thermique :

$Y = Y_T (\dot{\varepsilon}, T) + Y_A f(\varepsilon)$ avec les formulations suivantes de la composante des contraintes d'activation thermique et d'écroutissage :

$$Y_T \text{ solution analytique de } \dot{\varepsilon} = \left\{ \frac{1}{C_1} \exp \left[\frac{2U_k}{kT} \left(1 - \frac{Y_T}{Y_P} \right)^2 \right] + \frac{C_2}{Y_T} \right\}^{-1}$$

$$Y_A f(\varepsilon) = Y_A (1 + \beta \varepsilon)^n$$

Y_A correspond à la contrainte athermique de la limite d'élasticité,

Y_P à la contrainte de Peierls,

U_k à l'énergie d'activation pour créer un décrochement de dislocation,

$1/C_1$ à un facteur de fréquence de saut d'une dislocation

C_2 à l'effet du frottement sur les dislocations.

k est la constante de Boltzmann, β et n ont la même signification que dans le modèle précédent.

Après correction des erreurs typographiques de l'article de Hoge et Mukherjee, ils obtiennent :

$$C_1 = 0,71 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$$

$$Y_A = 124 \text{ MPa}$$

$$C_2 = 0,012 \text{ MPa}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\beta = 10$$

$$U_k = 0,31 \text{ eV/atome}$$

$$n = 0,1$$

$$Y_P = 1000 \text{ MPa}$$

Apparemment, ces paramètres n'ont pas été optimisés de manière très poussée. Dans le même article Steinberg et Lund donnent un autre jeu de paramètres en se basant sur les travaux de Isbell, Babcock et Christman ($Y_A = 325 \text{ MPa}$). Ils affirment de surcroît que le paramètre $Y_P = 880 \text{ MPa}$ donne une meilleure corrélation avec les points expérimentaux. Ces paramètres sont relativement décevants comme le montrent le graphe suivant donnant la limite d'élasticité prévue par le modèle comparé aux points expérimentaux.

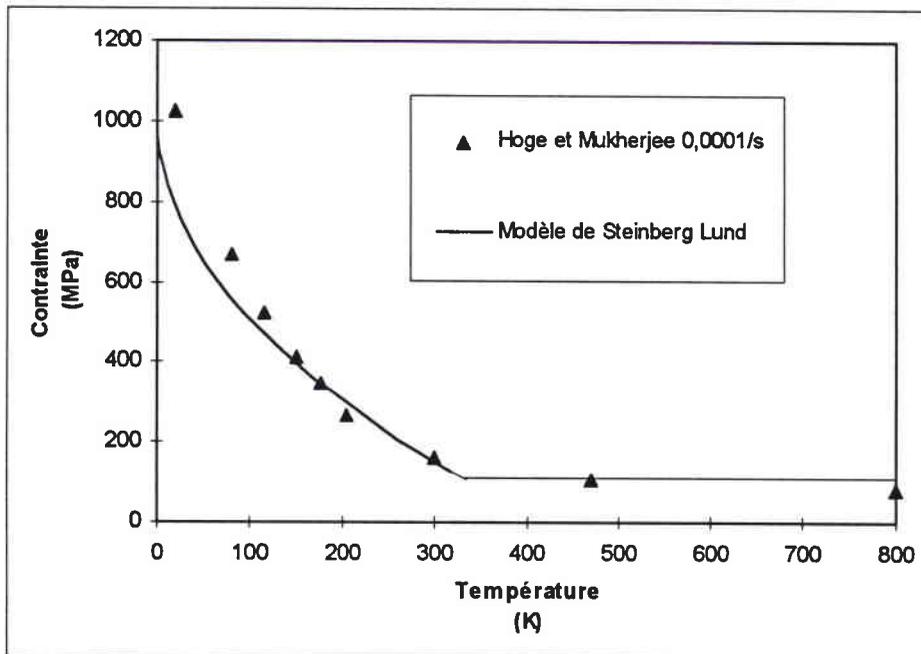


Figure 1 : modélisation de la limite d'élasticité par Steinberg et Lund

A3 - 5. Johnson Cook

Le modèle de Johnson-Cook est une extension directe de celui de Ludwik :

$$\sigma = (\sigma_0 + K \varepsilon^n) (1 + C \ln(\dot{\varepsilon})) (1 - T^{*m})$$

$$T^* = \frac{T - T_{\text{ambiant}}}{T_f - T_{\text{ambiant}}}$$

Chen et Gray [~ 1994] ont évalué les paramètres de cette équation .

$$\sigma_0 = 185 \text{ MPa}, \quad K = 675 \text{ MPa}, \quad n = 0,3$$

$$C = 0,047 \quad m = 0,425 \quad T_f = 3250 \text{ K}$$

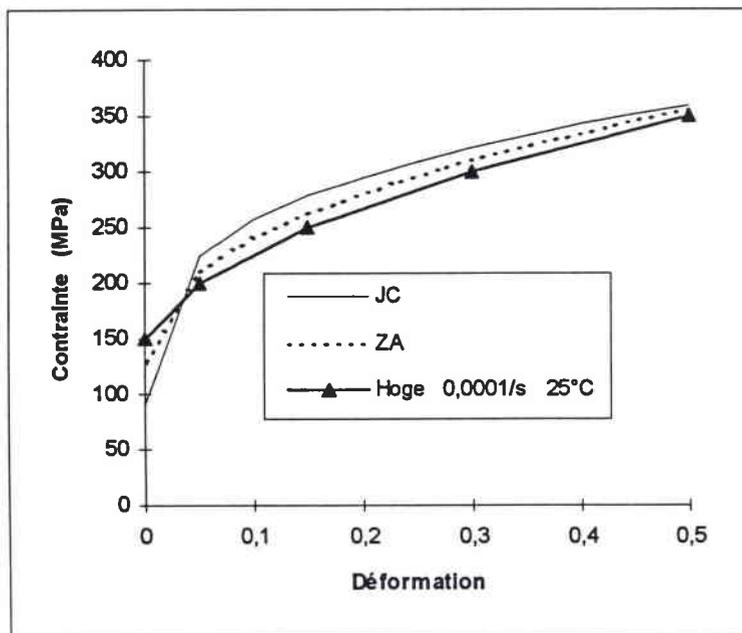


Figure 2 : comparaison de courbes expérimentales de consolidation du tantale à 10^{-4} s^{-1} et 25°C avec les modèles de Johnson-Cook et de Zerilli-Armstrong

A3 - 6. Zerilli Armstrong

Pour les matériaux à structure cubique centrée, Zerilli et Armstrong proposent que la vitesse de déformation et de la température agissent selon la loi :

$$\sigma = \sigma_G + k \Gamma^{1/2} + B_0 e^{-\beta T} + K \varepsilon^n$$

$$\beta = \beta_0 - \beta_1 \ln \dot{\varepsilon}$$

$\sigma_G + k \Gamma^{1/2}$ représente la composante athermique de la contrainte d'écoulement,
 $k \Gamma^{1/2}$ la contribution de la taille des grains,

$B_0 e^{-\beta T}$ la contrainte activée thermiquement
 $K \varepsilon^n$ l'effet de l'écroutissage.

Les sept constantes B_0 , β_0 , β_1 , k , K , n et σ_G sont des constantes caractéristiques du matériau. Zerilli et Armstrong se sont intéressés à plusieurs résultats expérimentaux pour la détermination des constantes du tantale : ceux de Hoge et Mukherjee [~ 1977], de Bechtold [~ 1955], de Regazzoni et Montheillet [~ 1984], de Gilbert, Hull, Owen et Reid [~ 1962] pour le tantale polycristallin, de Mitchell et Spitzig [~ 1965] et de Mordike et Rudolph [~ 1967] pour le tantale monocristallin.

Ils publient le tableau suivant :

	$\sigma_G + k \Gamma^{1/2}$ (MPa)	B_0 (MPa)	β_0 (K ⁻¹)	β_1 (K ⁻¹)	K (MPa)	n (-)
Hoge et <i>al</i>	30	1125	0,00535	0,000327	310	0,44
Bechtold	113	1125	0,00535	0,000327	310	0,44
Mordike et <i>al</i>	0	1275	0,00387	0,000393	310	0,44
Gilbert et <i>al</i>	150	1275	0,00387	0,000393	310	0,44
Mitchell et <i>al</i>	0	2120	0,00650	0,000320	310	0,44

Les valeurs de Gilbert et *al* et de Mitchell et *al* diffèrent très sensiblement des autres car les tantales qu'ils étudient sont riches en éléments interstitiels.

Ils parviennent à comparer les résultats expérimentaux des monocristaux et des polycristaux en multipliant les contraintes résolues par un facteur de Taylor de 2,9. La corrélation entre les courbes qu'ils proposent et les points expérimentaux est excellente. Nous ne montrons à titre d'exemple que les courbes déterminées à 1,4% de déformation sur les points de Hoge et de Bechtold.

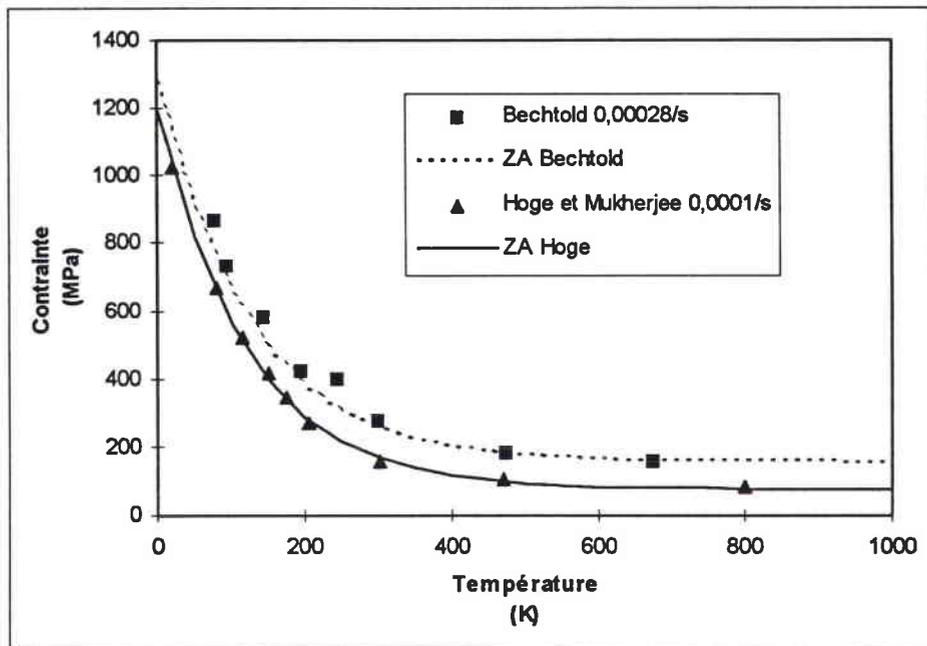


Figure 3 : modèle de Zerilli-Armstrong

Chen et Gray [~ 1994] proposent un jeu de constantes très voisin de celui de Zerilli et Armstrong et a priori meilleur à partir des courbes expérimentales de Hoge et Mukherjee :

	$\sigma_G + k \Gamma$ (MPa)	B_0 (MPa)	β_0 (K ⁻¹)	β_1 (K ⁻¹)	K (MPa)	n (-)
Zerilli-Armstrong	30	1125	0 00535	0 0003270	310	0 44
Chen-Gray	25	1200	0 00600	0 0003875	310	0 44

A3 - 7.Ting

Ting [~ 1992] adopte une approche analogue à celle de Steinberg et Lund et de Zerilli et Armstrong en dissociant les influences de la vitesse et de la déformation. Il propose les équations suivantes :

$$h(\varepsilon, T) = \sigma_s(T) \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^*(T)}\right) \right] + E_T$$

$$\sigma = Y_0(\dot{\varepsilon}, T) + h(\varepsilon, T)$$

$$Y_0(\dot{\varepsilon}, T) = \sigma_G + \frac{H_0}{V_0} \exp\left[-\frac{kT}{H_0} \ln\left(\frac{\eta}{\dot{\varepsilon}}\right)\right]$$

$$\text{avec } \sigma_s(T) = \sigma_{s_0} \left[1 - \left(\frac{T}{T_f} \right)^{n_1} \right] \quad E_t(T) = E_{t_0} \left[1 - \left(\frac{T}{T_f} \right)^{n_3} \right]$$

$$\varepsilon^*(T) = \varepsilon_0^* \left[1 - \left(\exp\left(-\frac{T}{T^*}\right) \right)^{n_2} \right]$$

L'intérêt de cette loi d'érouissage complexe est sa tentative d'atteindre les grandes déformation. Cet érouissage tend vers un érouissage linéaire à cause du terme $E_T(T) \varepsilon$ qui démarque ce modèle des autres modèles qui ont une allure plus parabolique. Ting semble satisfait de ces équations après les avoir éprouvées sur des simulations d'essais de Taylor et de jets de charges génératrices de noyau. Cependant, les résultats de ses simulations sont assez éloignées de ce qu'ont observé les différents expérimentateurs.

Avec le jeu de constantes qu'il propose :

$$\sigma_G = 50 \text{ MPa}$$

$$H_0 = 0,63 \text{ eV/atome}$$

$$V_0 = 9,26 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3/\text{atome}$$

$$\eta = 7,3 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$$

$$\sigma_{s_0} = 1200 \text{ MPa} ; n_1 = 0,2$$

$$\varepsilon_0^* = 0,25 ; T^* = 400 \text{ K} ; n_2 = 5$$

$$E_{t_0} = 150 \text{ MPa} ; n_3 = 0,5$$

$$T_f = 3253 \text{ K}$$

il obtient les courbes suivantes :

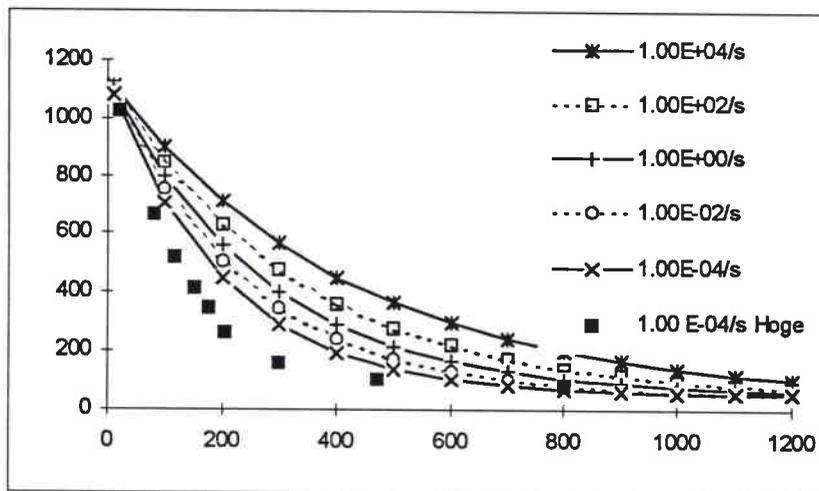


Figure 4 : modélisation de la limite d'élasticité en fonction de la température par Ting à différentes vitesses de déformation

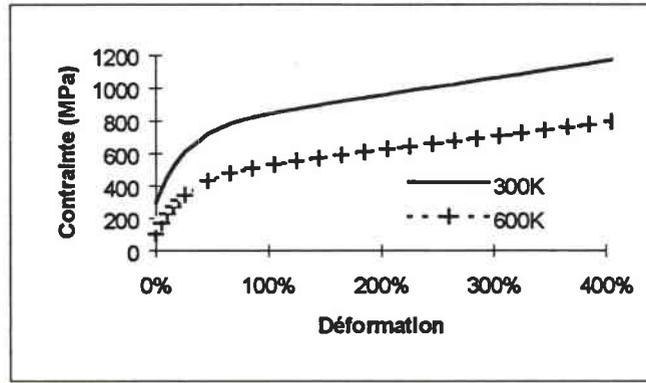


Figure 5 : courbes de consolidation à $10^{-4} s^{-1}$ à deux températures par Ting.

A3 - 8. Bodner Partom

Le modèle de Bodner Partom se base sur la relation de Prandtl-Reuss traduisant la conservation du volume au cours de la déformation plastique. L'originalité de ce modèle réside dans le fait qu'il ne considère pas la déformation comme un paramètre d'état décrivant macroscopiquement la microstructure. Il exprime le tenseur de vitesse de déformation $\dot{\epsilon}_{ij}$ en fonction du tenseur S_{ij} déviateur des contraintes et d'une variable d'état Z caractérisant la microstructure. D_0 est la vitesse limite de déformation, J_2 , le second invariant du tenseur déviateur des contraintes et n la sensibilité à la vitesse. Les effets de la température ne sont pas pris en compte. (Il faudrait déterminer une fonction reliant n à la température).

$$\dot{\epsilon}_{ij} = D_0 \exp \left[- \frac{n+1}{2n} \left(\frac{Z^2}{3J_2} \right)^n \right] \frac{S_{ij}}{\sqrt{J_2}}$$

Une seconde loi décrit l'évolution de Z en fonction du travail dissipé au cours de la déformation plastique :

$$\dot{Z}(W_p) = m(Z_1 - Z) \dot{W}_p$$

Par raison de facilité de détermination des paramètres, Rajendran et al [~ 1991] modifient cette seconde loi en :

$$Z = Z_1 - (Z_1 - Z_0) e^{-m W_p} \quad (W_p \text{ travail plastique}).$$

Z_1 est une valeur de saturation de Z , Z_0 est la valeur initiale de Z et m caractérise l'écroutissage. Le jeu de constantes qu'ils publient est le suivant :

$$D_0 = 10^8 s^{-1}, Z_1 = 2,4 \text{ GPa}, Z_0 = 6,5 \text{ GPa}, n = 0,6 \text{ et } m = 14 \text{ GPa}^{-1}.$$

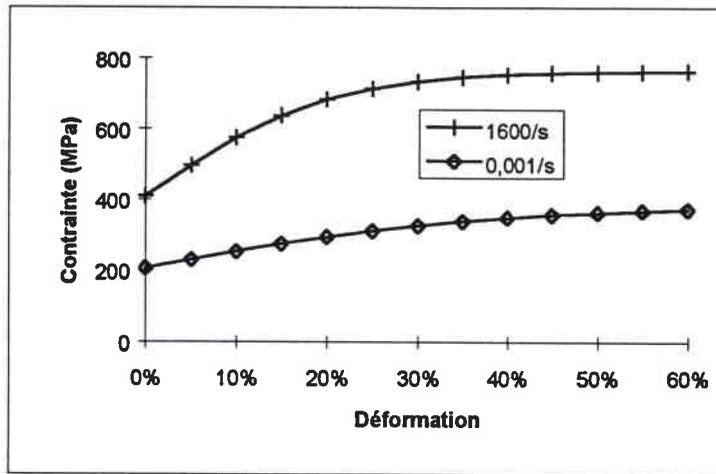


Figure 6 : simulation d'après Bodner et Partom

Annexe 4

Analyse des résultats

A4 - 1. Modélisation des données

A4 - 1.1. Généralités

Le problème posé est le suivant : soit un couple (x, y) , x pouvant être vectoriel, on cherche une formulation qui, pour toute valeur de x de X fournirait la meilleure prévision de la valeur correspondante \hat{y} de Y , $\hat{y} = f(x)$, f étant une fonction prédéfinie dépendant de n paramètres.

L'approche basique est classique. Il faut choisir une « fonction de mérite », un estimateur qui mesure l'accord entre les données et le modèle obtenu à partir d'un certain nombre de paramètres particuliers. Il est de coutume d'utiliser les fonctions de mérite dont les valeurs les plus basses représentent les meilleurs accords. Les paramètres du modèles sont alors ajustés par minimisation de cet estimateur.

L'erreur commise en adoptant \hat{y} au lieu de y sera $e = \hat{y} - y$. Classiquement on cherche à minimiser cette erreur en moyenne quadratique, soit $\min \{E [(\hat{y} - y)^2]\}$, E étant l'espérance. Le principe de cette minimisation est la recherche bien connue de l'estimateur de vraisemblance maximum.

A4 - 1.2. Définition de l'estimateur employé

Si nous considérons la statistique du chi-deux, découlant de la méthode de détermination du maximum de vraisemblance, chaque couple (x_i, y_i) possède une déviation standard σ_i [Press et al 1992]. L'estimateur de maximum de vraisemblance est alors :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - y_{i_{\text{mod}}}}{\sigma_i} \right)^2$$

Pour faciliter les calculs, σ_i nous étant inconnue, on prend souvent $\sigma_i = 1 \forall i$, d'où $\chi^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - y_{i_{\text{mod}}})^2$. Or, si l'on considère l'espérance $E [(\hat{y} - y)^2] = \sum_{i=1}^N [(y_i - y_{i_{\text{mod}}})^2 \cdot p_i]$ avec $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ et s'il y a équiprobabilité, p_i est égal à $1/N$. L'estimateur que nous serions tenter de

prendre lorsque $\sigma_i = 1 \forall i$ est $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - y_{i_{\text{mod}}})^2}{N}$. Cet estimateur a l'avantage de représenter la

moyenne quadratique de l'erreur, et ne dépend pas directement du nombre de données. Plus généralement nous définirons notre estimateur à minimiser comme :

$$\text{Estimateur} = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - y_{i_{\text{mod}}}}{\sigma_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_i} \right)^2}$$

A4 - 1.3. Présentation de l'algorithme de Marquart

Si nous considérons l'optimisation d'un modèle dépendant de manière non linéaire de m paramètres, nous utilisons l'approche de la minimisation du χ^2 .

Le problème principal est l'expression du chi-deux. Proche du minimum, χ^2 est bien approché par une forme quadratique que l'on peut écrire :

$$\chi^2(\underline{a}) = \gamma - \underline{d} \cdot \underline{a} + 1/2 \underline{a} \cdot \underline{D} \cdot \underline{a} \quad (\text{Développement de Taylor})$$

Si l'approximation est bonne, nous savons comment passer d'un jeu de paramètres $\underline{a}_{\text{cur}}$ au minimum $\underline{a}_{\text{min}}$:

$$\underline{a}_{\text{min}} = \underline{a}_{\text{cur}} + \underline{D}^{-1} \cdot (-\vec{\nabla} \cdot \chi^2(\underline{a}_{\text{cur}})) \quad [\text{Press et al 1992}]$$

Lorsque le jeu de paramètres courant $\underline{a}_{\text{cur}}$ est éloigné du minimum, nous passons à un nouveau jeu de paramètres $\underline{a}_{\text{next}}$ meilleur en utilisant la méthode du gradient :

$$\underline{a}_{\text{next}} = \underline{a}_{\text{cur}} - C \cdot \vec{\nabla} \cdot \chi^2(\underline{a}_{\text{cur}}) \quad C \text{ étant une constante suffisamment faible.}$$

L'algorithme utilisé est l'algorithme de Marquart. Celui a montré que la direction optimale de recherche du minimum se trouve située quelque part entre les deux vecteurs formés par la méthode bien connue du gradient et par la méthode non moins bien connue de linéarisation de la fonction théorique (cf. paragraphe précédent).

Pour obtenir une combinaison de ces deux procédés Marquart propose d'accroître artificiellement les termes diagonaux de la matrice de courbure $\underline{\alpha}$ ($=1/2 \cdot \underline{D}$) par un facteur λ . Si λ est très grand c'est la méthode du gradient qui est utilisée, si λ est très petit c'est le développement de Taylor qui est employé. Nous utiliserons cette méthode en multipliant λ par 0,9 lorsque χ^2 diminue et par 1,05 lorsqu'il augmente. Il est de coutume d'utiliser les facteurs multiplicatifs de 0,1 et 10. Cependant pour des lois ayant de nombreux paramètres il est préférable de réduire le pas pour pouvoir capturer une « direction de minimisation », l'inconvénient étant d'augmenter le temps de calcul.

En outre il est impossible de vérifier si la convergence s'est effectuée vers un minimum local ou un minimum global. La non convergence ou la convergence vers un minimum local

intervient lorsqu'il existe une trop grande divergence entre le modèle théorique et les données modélisées.

Procédure d'arrêt

La convergence est définie par deux critères qui doivent être simultanément vérifiés :

- Décroissance de l'estimateur d'un pas inférieur à une valeur prédéfinie.
- Estimateur inférieur à une valeur définie manuellement au début du programme.

En cas de convergence le programme s'arrête. Dans le cas contraire λ croît. Lorsqu'il dépasse la valeur de 100 il redevient égal à sa valeur initial de 0,001 et ceci dans le but de savoir si la méthode de linéarisation n'est pas meilleure sur le jeu courant de paramètres. Ceci est effectué jusqu'à ce que la valeur de χ^2 ne varie plus.