

L'équation de Boltzmann et son approximation diffusion

Application à la diffusion à 1 groupe.

B. Mercier 20/10/15

Plan

1. La sphère S_2 et son paramétrage
2. Les notations utilisées pour établir l'équation de Boltzmann.
3. Définitions et propriétés de l'opérateur divergence
4. L'équation de Boltzmann instationnaire. Cas stationnaire
5. Cas de collisions isotropes dans le repère du laboratoire.
6. Conditions aux limites pour l'équation de Boltzmann
7. Cas particulier : symétrie plane.
8. Approximation diffusion de l'équation de Boltzmann monocinétique
9. Méthode pour obtenir l'équation de diffusion (8)
10. Méthode pour obtenir la condition aux limites (9)
11. Interprétation de la condition aux limites (9).
12. Le modèle diffusion à 1 groupe.
13. Interprétation de l'équation critique (23).
14. Exemple en 1D
15. Modèle de diffusion à 2 groupes.

1. La sphère S_2 et son paramétrage

Dans ce qui suit nous allons travailler avec des vecteurs unitaires de \mathbf{R}^3 , donc des vecteurs $\vec{\Omega}$ vérifiant $|\vec{\Omega}| = 1$.

Il est bien connu que dans un système d'axes donné on peut représenter $\vec{\Omega}$ par un angle polaire $\theta \in [0, \pi]$ et par un angle azimutal $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Si l'axe polaire est l'axe Oz , alors on a

$$\vec{\Omega} = \{\cos \varphi \cdot \sin \theta, \sin \varphi \cdot \sin \theta, \cos \theta\}$$

Il est bien connu que, avec un tel paramétrage, l'élément de surface est $d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$ de sorte que l'intégrale d'une fonction $f : S_2 \rightarrow \mathbf{R}$ vérifie :

$$\int_{S_2} f(\Omega) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi f(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta$$

Incidentement, en prenant $f = 1$, on retrouve ainsi que la surface de la sphère est égale à 4π .

2. Les notations utilisées pour établir l'équation de Boltzmann.

Nous nous plaçons dans le cas monocinétique : soit $N = N(x, \vec{\Omega}, t)$ la densité de neutrons au point x allant dans la direction $\vec{\Omega}$ à l'instant t .

N est donc exprimé en neutrons par cm^3 par stéradian.

Pour des raisons historiques les neutroniciens ne travaillent pas avec la densité de neutrons N mais avec une quantité qu'ils appellent « flux » :

$$\Phi(x, \vec{\Omega}, t) = v N(x, \vec{\Omega}, t)$$

où v est la vitesse des neutrons.

Φ est donc exprimé en neutrons par cm^2 par stéradian et par seconde.

Soit maintenant V un volume quelconque de \mathbf{R}^3 de frontière Γ supposée régulière, de telle sorte qu'il est possible de lui définir un élément de surface dS .

On désigne par $\vec{n} = \vec{n}(x)$ le vecteur unitaire de la normale en $x \in \Gamma$ orienté vers l'extérieur de V .

3. Définitions et propriétés de l'opérateur divergence

Si l'on désigne par $\{q_1, q_2, q_3\}$ les 3 composantes du vecteur \vec{q} , l'opérateur divergence est défini par :

$$(1) \quad \text{div } \vec{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3}$$

c'est donc un opérateur différentiel faisant intervenir des dérivées partielles.

Dans Wikipedia,

http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem

on trouve (avec d'autres notations) l'énoncé suivant :

Théorème de la divergence

Soit V un domaine borné de \mathbb{R}^3 de frontière Γ , et $\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ alors on a (sous réserve que les fonctions qui apparaissent dans les intégrales soient intégrables) :

$$(2) \quad \int_V \text{div } \vec{q} \, dx = \int_\Gamma \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS \quad \blacksquare$$

4. L'équation de Boltzmann instationnaire

On va se servir de ce résultat pour établir l'équation de Boltzmann.

On se donne une source volumique de neutrons $S = S(x, \vec{\Omega}, t)$ exprimée en neutrons par stéradian et par seconde. On suppose que le milieu est absorbant et on désigne par $\Sigma = \Sigma(x)$ la section efficace macroscopique d'absorption (voir annexe), supposée isotrope.

Nous allons faire un bilan des neutrons dans un volume V quelconque.

Le nombre de neutrons ayant à l'instant t une direction située dans le petit angle solide $d\Omega$ autour de $\vec{\Omega}$ est égal à

$$d\Omega \int_V N(x, \vec{\Omega}, t) \, dx = \frac{1}{v} d\Omega \int_V \Phi(x, \vec{\Omega}, t) \, dx.$$

(Avec nos notations, le nombre de neutrons situés dans V à l'instant t est égal à

$$\frac{1}{v} \int_{S_2} d\vec{\Omega} \int_V \Phi(x, \vec{\Omega}, t) \, dx)$$

A chaque instant le nombre de neutrons allant à l'instant t dans la direction $\vec{\Omega}$ (en toute rigueur on devrait dire ayant une direction située dans le petit angle solide $d\Omega$ autour de $\vec{\Omega}$) peut augmenter ou diminuer :

- du fait que la source S a produit des neutrons
- du fait qu'il y a des neutrons qui ont été absorbés.

L'annexe ci-dessous montre que le nombre de neutrons (sous-entendu, ayant une direction située dans le petit angle solide $d\Omega$ autour de $\vec{\Omega}$) qui sont absorbés chaque seconde dans V est :

$$d\Omega \int_V \Sigma \Phi(x, \vec{\Omega}, t) \, dx \quad (\text{noter que l'on a multiplié par } d\Omega \text{ pour avoir un nb. de neutrons})$$

- du fait qu'il y a des neutrons qui rentrent ou qui sortent de V

En effet, soit $\Gamma_+ = \Gamma_+(\Omega) = \{x \in \Gamma : \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \geq 0\}$ et $\Gamma_- = \Gamma_-(\Omega) = \{x \in \Gamma : \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0\}$ on peut poser

$$J_+ = \int_{\Gamma_+} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \, \Phi \, dS \quad \text{et} \quad J_- = - \int_{\Gamma_-} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \, \Phi \, dS$$

de sorte que J_+ s'interprète comme le courant neutronique *sortant* de V et J_- comme le courant neutronique *entrant* dans V .

Bien évidemment : $J = \int_\Gamma \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \, \Phi \, dS = J_+ - J_-$ est le courant net sortant de V .

Au global, on a donc

$$\frac{1}{v} \frac{d}{dt} \int_V \Phi(x, \vec{\Omega}, t) dx + \int_{\Gamma} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \Phi dS + \int_V \Sigma \Phi(x, \vec{\Omega}, t) dx = \int_V S(x, \vec{\Omega}, t) dx$$

En appliquant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_V \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, \vec{\Omega}, t) + \text{div} (\vec{\Omega} \Phi) + \Sigma \Phi(x, \vec{\Omega}, t) \right] dx = \int_V S(x, \vec{\Omega}, t) dx$$

et, comme ceci est vrai pour tout V , on en déduit l'équation de Boltzmann :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \text{div} (\vec{\Omega} \Phi) + \Sigma \Phi = S$$

laquelle est vraie en tout point x , dans toute direction $\vec{\Omega}$ et à tout instant t .

En utilisant la convention de sommation pour l'indice répété, on peut aussi écrire

$$(1) \quad \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi + \Sigma \Phi = S$$

Cas stationnaire

Lorsque la source S est indépendante du temps, et que l'on part de $\Phi = 0$ à l'instant $t = 0$, ou de n'importe quelle autre valeur du flux, on peut imaginer qu'à l'issue d'une période transitoire, et en pratique en faisant $t \rightarrow \infty$ dans (1), on finit par se stabiliser vers un état stationnaire, encore noté Φ mais qui ne dépend plus du temps.

Autrement dit $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ et Φ vérifie l'équation :

$$(2) \quad \Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi + \Sigma \Phi = S \quad x \in V, \Omega \in \mathcal{S}_2,$$

qui est appelée équation de Boltzmann *stationnaire*.

5. Cas de collisions isotropes dans le repère du laboratoire.

En principe, le terme de collision est isotrope dans le repère du Centre de Masse. Pour aboutir plus facilement à l'approximation diffusion de l'équation de Boltzmann, nous ferons l'hypothèse simplificatrice d'un terme de collision isotrope dans le repère du laboratoire.

La section efficace Σ qui apparaît dans (2) est donc de la forme $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1$ où Σ_0 est la section efficace d'absorption et Σ_1 la section efficace de scattering.

Les collisions qui sont subies par les neutrons qui vont dans la direction $\vec{\Omega}$ peuvent correspondre (avec la probabilité Σ_0/Σ) à une absorption ou bien (avec la probabilité Σ_1/Σ) à une collision élastique qui fait que les neutrons réapparaissent dans une autre direction $\vec{\Omega}'$ uniformément distribuée sur la sphère \mathcal{S}_2 .

La source S qui apparaît dans l'équation (2) est maintenant de la forme

$$S = S_0 + \frac{1}{4\pi} \Sigma_1 \int_{\mathcal{S}_2} \Phi(x, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}'$$

où $S_0 = S_0(x)$ est la vraie source de neutrons (supposée isotrope pour simplifier) et où le deuxième terme prend en compte le fait que des neutrons qui allaient précédemment dans la direction $\vec{\Omega}'$ réapparaissent (avec une densité de probabilité égale à $\frac{1}{4\pi}$) dans la direction $\vec{\Omega}$.

On peut donc écrire :

$$(3) \quad \Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi + \Sigma \Phi = S_0 + \frac{1}{4\pi} \Sigma_1 \int_{\mathcal{S}_2} \Phi(x, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}'$$

En intégrant pour $x \in V$ et $\Omega \in \mathcal{S}_2$, on en déduit :

$$\int_{\mathcal{S}_2} d\Omega \int_{\Gamma} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \Phi dS + \int_{\mathcal{S}_2} d\Omega \int_V \Sigma \cdot \Phi dx = 4\pi \int_V S_0 dx + \int_V \Sigma_1 dx \int_{\mathcal{S}_2} \Phi(x, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}'$$

c'est à dire :

$$(4) \quad \int_{\mathcal{S}_2} d\Omega \int_{\Gamma} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \Phi dS + \int_{\mathcal{S}_2} d\Omega \int_V \Sigma_0 \cdot \Phi dx = 4\pi \int_V S_0 dx$$

qui montre que la source est égale à l'absorption augmentée du courant net, autrement dit, s'il n'y a pas de neutrons qui rentrent : source = absorption + fuites.

6. Conditions aux limites pour l'équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann (2) ne suffit pas à elle seule à définir une solution Φ unique. Il faut en plus définir des conditions aux limites par exemple en se donnant le flux entrant ou le courant entrant.

Plus précisément on peut se donner

$$(5) \quad \Phi(x, \Omega) = \Phi_d(x, \Omega) \quad \text{si } x \in \Gamma \text{ et } \Omega \cdot n(x) < 0$$

On peut aussi se donner des conditions de réflexion spéculaire

$$\Phi(x, \Omega) = \alpha \Phi(x, \Omega') \quad \text{si } x \in \Gamma \text{ et } \Omega \cdot n(x) < 0 \text{ où } \Omega' = \Omega - 2(\Omega \cdot n)n.$$

où α est un coefficient d'atténuation vérifiant $0 < \alpha \leq 1$.

7. Cas particulier : symétrie plane.

Dans ce qui précède, Σ_0 et Σ_1 peuvent dépendre de $x = \{x, y, z\}$. Si nous supposons que :

- le domaine V est situé entre deux plans d'équation $z = a$ et $z = b$, avec $a < b$
- $\Sigma_0 = \Sigma_0(z)$; $\Sigma_1 = \Sigma_1(z)$; $S_0 = S_0(z)$
- La donnée au bord $\Phi_d(x, \Omega)$ est de la forme $\Phi_d(a, \mu)$ pour $\mu > 0$ et $\Phi_d(b, \mu)$ pour $\mu < 0$ où $\mu = \cos \theta$ et θ est l'angle polaire fait par Ω avec l'axe Oz , alors, par argument de symétrie, le flux Φ est partout de la forme $\Phi = \Phi(z, \mu)$.

Et l'équation (3) s'écrit :

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Sigma \Phi = S_0 + \frac{1}{4\pi} \Sigma_1 \int_{S_2} \Phi(x, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' = S_0 + \frac{1}{4\pi} \Sigma_1 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 \Phi(z, \mu') d\mu'$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Sigma \Phi = S_0 + \frac{1}{2} \Sigma_1 \int_{-1}^1 \Phi(z, \mu') d\mu' \quad \text{pour } a \leq x \leq b \text{ et } -1 \leq \mu \leq 1$$

Lors du "cours code" n°1, nous avons résolu cette équation par la méthode de Monte-Carlo, dans le cas particulier $S_0 = 0$ et $\Sigma_1 = 0$ et avec les conditions aux limites :

$$(7) \quad \Phi(a, \mu) = 0 \text{ pour } \mu > 0 \text{ et } \Phi(b, \mu) = A \text{ pour } \mu < 0.$$

Le système constitué par l'équation de Boltzmann (6) et les conditions aux limites (7) est un problème bien posé en ce sens qu'il admet une solution unique si $\Sigma_0 \geq 0$ et $\Sigma_1 \geq 0$.

La solution Φ du problème est une fonction de deux variables : la variable spatiale z et la variable angulaire μ .

Dans le cas général (système constitué par l'équation (3) et les conditions aux limites (5)) le problème est également bien posé. On note que la solution Φ du problème (3) (5) est une fonction de 5 variables (3 variables spatiales x, y, z et 2 variables angulaires θ, φ).

Un tel problème peut être résolu par la méthode de Monte-Carlo. Plus difficilement par une méthode déterministe. C'est pourquoi on utilise souvent l'approximation diffusion de l'équation de Boltzmann.

8. Approximation diffusion de l'équation de Boltzmann monocinétique

Pour que l'approximation diffusion soit valable, il est nécessaire que le libre parcours moyen $1/\Sigma$ soit petit, mais cela ne suffit pas : il faut que la section efficace de scattering soit dominante devant celle d'absorption, c'est-à-dire $\Sigma_1 \gg \Sigma_0$. Dans l'eau où l'on a $\Sigma_1 = 1,34 \text{ cm}^{-1}$ et $\Sigma_0 = 0,02 \text{ cm}^{-1}$, c'est le cas si la dimension du domaine est supérieure à une dizaine de centimètres. Dans le cœur d'un REP où le rapport de modération est en général de l'ordre de 2, c'est un peu moins vrai, car dans le

domaine des neutrons thermiques, on a typiquement $\Sigma_0 = 0,5 \text{ cm}^{-1}$ pour le combustible mais on utilise quand même souvent l'approximation diffusion qui donne des résultats acceptables.

Dans ce qui suit, nous ne chercherons pas à démontrer que la diffusion est une bonne approximation de l'équation de Boltzmann, mais seulement à montrer comment on obtient l'équation de diffusion :

$$(8) \quad -\text{div}(D \cdot \nabla \Phi_0) + \Sigma_0 \Phi_0 = S_0 \quad \text{pour } x \in V$$

et nous montrerons également comment on obtient la condition aux limites

$$(9) \quad \frac{1}{4} \Phi_0 + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial n} \Phi_0 = 0 \quad \text{sur la frontière } \Gamma.$$

Dans (8) et (9) apparaît le coefficient D , appelé coefficient de diffusion et, avec des hypothèses un peu simplificatrices nous établirons que

$$(10) \quad D = \frac{1}{3 \cdot \Sigma}$$

de sorte que coefficient de diffusion est petit si le libre parcours moyen est petit. Noter qu'on peut avoir $D = D(x)$ mais il est bien connu que le système constitué par (8) et (9) admet une solution unique si $D(x) \geq D_0 > 0$ et si $\Sigma_0 \geq 0$.

On voit que la solution Φ_0 de ce problème (8)(9) ne dépend que de x , et donc des 3 variables spatiales x, y, z . Il est donc facile de la calculer avec des méthodes déterministes comme la méthode des éléments finis.

Pour autant, il faut bien avoir en tête que si l'on introduit le courant

$$(11) \quad \vec{J} = -D \cdot \nabla \Phi_0$$

c'est $\Phi_0(x) + 3 \vec{\Omega} \cdot \vec{J}(x)$ qui est une bonne approximation de $\Phi(x, \Omega)$ et non pas $\Phi_0(x)$.

La loi (11) est bien connue des physiciens sous le nom de "Loi de Fick".

9. Méthode pour obtenir l'équation de diffusion (8)

On va remplacer $\Phi(x, \Omega)$ par $\Phi_0(x) + 3 \vec{\Omega} \cdot \vec{J}(x)$ dans l'équation (3). Cependant comme $\Phi_0 + 3 \vec{\Omega} \cdot \vec{J}$ n'est pas rigoureusement égal à Φ , nous allons obtenir un résidu

$$F = \Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\Phi_0 + 3 \vec{\Omega} \cdot \vec{J}) + \Sigma (\Phi_0 + 3 \vec{\Omega} \cdot \vec{J}) - S_0 - \frac{1}{4\pi} \Sigma_1 \int_{S_2} (\Phi_0 + 3 \vec{\Omega}' \cdot \vec{J}) d\vec{\Omega}'$$

qui ne pourra pas être rigoureusement nul.

Nous allons demander que pour tout $x \in V$

$$(12) \quad \int_{S_2} F(x, \Omega) d\Omega = 0$$

$$(13) \quad \int_{S_2} F(x, \Omega) \Omega_i d\Omega = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

Comme, à ce stade, nous avons 4 fonctions inconnues $\Phi_0(x), J_1(x), J_2(x)$ et $J_3(x)$, il est logique d'introduire 4 équations.

Pour aller plus loin, nous utiliserons les relations suivantes dont le lecteur trouvera une démonstration dans l'annexe 2.

$$(14) \quad \int_{S_2} \Omega_i d\Omega = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

$$(15) \quad \int_{S_2} \Omega_i \Omega_k d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{ik} \quad \text{pour } i, k = 1, 2, 3$$

où δ_{ik} vaut 1 si $i = k$ et 0 sinon.

On a aussi

$$(16) \quad \int_{S_2} \Omega_i \Omega_k \Omega_l d\Omega = 0 \quad \text{pour } i, k, l = 1, 2, 3.$$

Remarquons que la relation (14) permet immédiatement d'obtenir

$$F = \Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\Phi_0 + 3 \vec{\Omega} \cdot \vec{J}) + \Sigma (\Phi_0 + 3 \vec{\Omega} \cdot \vec{J}) - S_0 - \Sigma_1 \Phi_0$$

En injectant l'expression ainsi obtenue pour F dans (12), on obtient

$$\int_{S_2} \left(\Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\Phi_0 + 3 \vec{\Omega} \cdot \vec{J}) + \Sigma (\Phi_0 + 3 \vec{\Omega} \cdot \vec{J}) - S_0 - \Sigma_1 \Phi_0 \right) d\Omega = 0$$

c'est à dire, en utilisant (14) :

$$\int_{S_2} \left(3 \Omega_i \Omega_k \frac{\partial}{\partial x_i} J_k + \Sigma \Phi_0 - S_0 - \Sigma_1 \Phi_0 \right) d\Omega = 0$$

On en déduit, en utilisant (15) que :

$$4\pi \left(\frac{\partial}{\partial x_k} J_k + \Sigma_0 \Phi_0 - S_0 \right) = 0$$

ou autrement dit que

$$\text{div } \vec{J} + \Sigma_0 \Phi_0 = S_0.$$

En injectant maintenant l'expression obtenue pour F dans (13), on obtient

$$\int_{S_2} \left(\Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\Phi_0 + 3 \vec{\Omega} \cdot \vec{J}) + \Sigma (\Phi_0 + 3 \vec{\Omega} \cdot \vec{J}) - S_0 - \Sigma_1 \Phi_0 \right) \Omega_l d\Omega = 0$$

En utilisant les relations (14) et (16), il vient immédiatement :

$$\int_{S_2} \left(\Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_0 + 3 \Sigma \Omega_k J_k \right) \Omega_l d\Omega = 0$$

c'est-à-dire en utilisant (15)

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \Phi_0 + 3 \Sigma J_l \right) = 0$$

On obtient donc bien la loi de Fick (11) avec $D = \frac{1}{3\Sigma}$ ■

Remarque 9.1 : Prise en compte de l'anisotropie.

Dans le cas où l'on prendrait en compte l'anisotropie des collisions dans le repère du laboratoire (sans remettre en cause l'isotropie dans le centre de masse) on obtiendrait :

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$$

où $\Sigma_{tr} = \Sigma - \bar{\mu} \Sigma_s$ où $\bar{\mu}$ est la valeur moyenne du cosinus de l'angle de déviation (2/3 pour l'hydrogène).

Nous admettrons cette formule.

Dans le cas où la masse atomique des noyaux du modérateur est $A > 1$ on trouve dans la littérature la formule $\bar{\mu} \cong \frac{2}{3A}$ elle aussi admise. ■

10. Méthode pour obtenir la condition aux limites (9)

On a vu pour l'équation de Boltzmann que le courant neutronique traversant en $x \in \Gamma$ le petit élément de surface dS orthogonal au vecteur $\vec{n}(x)$ était $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} \Phi dS$.

Donc en intégrant pour toutes les directions $\Omega \in S_2$ on obtient

$$dS \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \Phi d\Omega = dS \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} (\Phi_0 + 3 \Omega_k J_k) d\Omega = 4\pi \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

ce qui montre que \vec{J} s'interprète bien comme le courant neutronique.

Comme nous l'avons fait plus haut dans le cadre de l'équation de Boltzmann, il est logique d'évaluer séparément J_+ et J_- définis par

$$J_+ = \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \Phi d\Omega$$

$$J_- = -\frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \Phi d\Omega.$$

En introduisant un système d'axe lié à \vec{n} , θ désignant l'angle polaire et φ l'angle azimutal, on aura encore dans ce système d'axes

$$\vec{\Omega} = \{\cos \varphi \cdot \sin \theta, \sin \varphi \cdot \sin \theta, \cos \theta\}$$

le demi espace $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0$ correspondra à $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ et on aura

$$J_+ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (\Phi_0 + 3 (\cos \varphi \cdot \sin \theta J_1 + \sin \varphi \cdot \sin \theta J_2 + \cos \theta J_3)) \sin \theta d\theta$$

en faisant attention que $J_k, k = 1, 2, 3$ sont maintenant liés au système d'axe local et donc que

$J_3 = \vec{j} \cdot \vec{n}$. Par intégration en φ on voit que les termes en J_1 et J_2 disparaissent. Il reste

$$J_+ = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (\Phi_0 + 3 \cos \theta J_3) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 \mu (\Phi_0 + 3\mu J_3) d\mu = \frac{1}{4} \Phi_0 + \frac{1}{2} J_3$$

c'est à dire

$$J_+ = \frac{1}{4} \Phi_0 - \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial n} \Phi_0$$

de même on obtiendrait :

$$J_- = \frac{1}{4} \Phi_0 - \frac{1}{2} J_3 = \frac{1}{4} \Phi_0 + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial n} \Phi_0$$

si aucun neutron ne rentre dans le domaine V, il est logique de prendre la condition aux limites (9) qui s'interprète comme $J_- = 0$.

11. Interprétation de la condition aux limites (9).

Si, comme il se doit, D est petit par rapport à la taille du domaine V considéré, pour $x \in \Gamma$, le point $x + 2D\vec{n}$ n'est pas très loin de Γ . Soit

$$f(s) = \Phi_0(x + s\vec{n}),$$

$$\text{on a } f(s) \cong f(0) + s \cdot f'(0)$$

$$\text{Or } f'(0) = \frac{\partial}{\partial n} \Phi_0.$$

Donc, demander que $\Phi_0 + 2D \frac{\partial}{\partial n} \Phi_0 = 0$ revient à demander que $f(2D) \cong 0$

c'est pourquoi on appelle $2D$ la distance d'extrapolation.

Tout se passe comme si Φ_0 n'était pas nul au bord, mais à une distance $2D$ du bord.

En prenant Φ_0 nul au bord, comme on le fait parfois par facilité, revient à commettre une petite erreur, dont on connaît l'ordre de grandeur. ■

Exercice (posé le 20/10/15)

On se donne une tranche d'eau légère $0 < z < L$ infinie dans les directions x et y .

On suppose que le problème peut être traité en symétrie plane (voir §7) c'est-à-dire que le flux neutronique $\Phi = \Phi(z, \Omega)$ ne dépend que de l'angle polaire θ entre la direction Ω et l'axe Oz. On cherche donc une fonction de deux variables $\Phi(z, \mu)$ où $\mu = \cos \theta$.

Dans le cadre de l'approximation diffusion, on cherche Φ sous la forme $\Phi(z, \mu) = \Phi_0(z) + 3\mu J(z)$ où le courant net $J = J(z)$ et le flux neutronique moyen $\Phi_0 = \Phi_0(z)$ vérifient les équations

$$\frac{dJ}{dz} + \Sigma_a \Phi_0(z) = 0$$

$$J(z) = -D \Phi_0'(z)$$

Etant donné que $J(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(z, \mu) \mu d\mu$, il est naturel de poser

$$J_+(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \Phi(z, \mu) \mu d\mu$$

$$J_-(z) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \Phi(z, \mu) \mu d\mu$$

de telle façon que le courant net J est la différence entre le courant J_+ qui va de gauche à droite et le courant J_- qui va de droite à gauche ($J = J_+ - J_-$).

On se donne le courant entrant $J_+(0) = A$, le coefficient de diffusion D de l'eau et sa section efficace macroscopique d'absorption Σ_a .

2°/ Soit $\beta = \sqrt{\frac{\Sigma_a}{D}}$, démontrer que

$$\Phi_0(z) = a \operatorname{ch}(\beta z) + b \operatorname{sh}(\beta z)$$

3°/ Calculer $J_+(z)$ et $J_-(z)$. En déduire deux relations vérifiées par les paramètres a et b .

4°/ Application numérique : on se donne $L = 10 \text{ cm}$, $D = 0,22 \text{ cm}$ et $\Sigma_a = 0,02 \text{ cm}^{-1}$, ce qui correspond à peu près à de l'eau légère à la température du laboratoire.

Vérifier que $a \cong 3,53 \text{ A}$ et $b \cong -3,54 \text{ A}$.

En déduire qu'une couche de 10cm d'eau réfléchit 76,5% du courant incident, en absorbe 22,5% et en transmet seulement 1%.

Exercice 2

On se place maintenant dans le cas où le réflecteur en eau lourde, pour laquelle on peut supposer que $\Sigma_a = 0$. Comme dans l'exercice précédent, on se donne le courant entrant $J_+(0) = A$ et le coefficient de diffusion D .

1°/ Démontrer que

$$J_-(0) = \frac{1}{4} \frac{J}{D} L$$

$$J_+(0) = J + \frac{1}{4} \frac{J}{D} L = J \left(1 + \frac{L}{4D}\right)$$

où J est une constante que l'on explicitera.

2°/ On se donne $\sigma \cong 10 \text{ b}$ et $N_{D20} = 0,0332 \cdot 10^{24} \text{ molécules/cm}^3$. Calculer Σ et D puis $J_-(0)$ en fonction de A . En déduire qu'une couche d'eau lourde de 10 cm réfléchit environ 71% du courant entrant et en transmet environ 29%.

12. Le modèle diffusion à 1 groupe.

En partant de l'équation de Boltzmann monocinétique, nous avons abouti au problème :

$$-\operatorname{div}(D \cdot \nabla \Phi_0) + \Sigma_0 \Phi_0 = S_0 \quad \text{pour } x \in V$$

$$\frac{1}{4} \Phi_0 + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial n} \Phi_0 = 0 \quad \text{sur la frontière } \Gamma.$$

lequel admet une solution unique $\Phi_0 \geq 0$ lorsque $\Sigma_0 > 0$ (ou bien, si $\Sigma_0 = \Sigma_0(x)$, lorsque $\Sigma_0(x) \geq \Sigma_{\min} > 0$).

Lorsqu'on va vouloir appliquer ce modèle aux REP, on va s'intéresser plus particulièrement au groupe des neutrons thermiques, dont l'énergie est aux alentours de 0,025 eV.

Certes il y a des neutrons rapides dans le cœur d'un REP, mais du fait de la présence d'un modérateur ceux-ci sont assez vite ralentis puis thermalisés. Par ailleurs, la section efficace de l' U^{235} étant beaucoup plus forte dans le domaine thermique, c'est là que se produisent les fissions en grande majorité.

Σ_0 étant la section efficace (macroscopique) d'absorption, elle est de la forme $\Sigma_0 = \Sigma_c + \Sigma_f$.

En effet absorption = capture + fission.

On voit donc qu'une partie des neutrons thermiques absorbés vont donner lieu à des fissions ce qui va donc produire un terme source proportionnel à Φ_0 . En l'absence de sources externes, on a donc envie d'écrire $S_0 = \nu \Sigma_f \Phi_0$ mais ceci est un terme source dans le domaine rapide et il ne faut pas oublier que, lors de la phase de ralentissement, une proportion $(1 - p)$ de ces neutrons rapides vont

être capturés par $l'U^{238}$, où p est le facteur anti-trappe et donc que le terme source à mettre dans l'équation de diffusion du domaine thermique n'est que $S_0 = p \cdot \nu \Sigma_f \Phi_0$; ou même $S_0 = \varepsilon \cdot p \cdot \nu \Sigma_f \Phi_0$ pour tenir compte du facteur de fission rapide ε (apparaissant dans la formule des 4 facteurs d'Enrico Fermi) c'est-à-dire $S_0 = \nu_e \Sigma_f \Phi_0$, où l'on a posé $\nu_e = \varepsilon \cdot p \cdot \nu$

on est donc conduit à résoudre le problème :

$$(17) \quad -\text{div}(D \cdot \nabla \Phi_0) + \Sigma_0 \Phi_0 = \nu_e \Sigma_f \Phi_0 \quad \text{pour } x \in V$$

$$(18) \quad \frac{1}{4} \Phi_0 + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial n} \Phi_0 = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

lequel est un problème de nature assez différente de (8)(9).

En effet, en dimension finie, au lieu de chercher une fonction inconnue $\Phi_0 = \Phi_0(x)$ définie en tout point du domaine V , on chercherait un vecteur $\Phi_0 \in \mathbf{R}^N$ défini par N composantes qui vérifierait

$$(19) \quad A \Phi_0 = S_0$$

où A serait une matrice $N \times N$. Pour avoir l'existence et l'unicité d'une solution au problème (19) on sait qu'une condition nécessaire et suffisante est que la matrice A soit inversible.

L'analogue en dimension finie de (17)(18) est plutôt :

$$(20) \quad A \Phi_0 = \mu_0 \Phi_0$$

où $\mu_0 \in \mathbf{R}$ est donné. On sait que la solution du problème (20) est $\Phi_0 = 0$ sauf si μ_0 est valeur propre de la matrice A , auquel cas Φ_0 est le vecteur propre associé à la valeur propre μ_0 ; Φ_0 est d'ailleurs défini à une constante multiplicative près (dans cette fiche nous nous placerons dans le cas où μ_0 est une valeur propre simple, ce qui peut être justifié mathématiquement).

Si maintenant, nous réécrivons (17)(18) sous la forme

$$(21) \quad -\text{div}(D \cdot \nabla \Phi_0) = \mu_0 \Phi_0 \quad \text{pour } x \in V$$

$$(22) \quad \frac{1}{4} \Phi_0 + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial n} \Phi_0 = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

associé à l'équation

$$(23) \quad \mu_0 = \nu_e \Sigma_f - \Sigma_0$$

on voit que pour résoudre le modèle de diffusion à 1 groupe, il faut simultanément :

- que μ_0 soit valeur propre d'un problème de valeur propre posé en dimension infinie
- que la fonction propre associée Φ_0 soit positive (ceci sera justifié ultérieurement)
- que l'équation "critique"(23) soit vérifiée.

Remarque : analogue de (21)(22) en dimension finie.

L'analogue en dimension finie de l'approximation diffusion de l'équation de Boltzmann instationnaire (que nous verrons au §13) est un système différentiel du type :

$$\frac{d}{dt} \Phi + A \Phi = S \text{ où}$$

A est une matrice symétrique $N \times N$ et définie positive $S = S(t) \in \mathbf{R}^N$ et $\Phi = \Phi(t) \in \mathbf{R}^N$.

Il s'agit d'un système différentiel linéaire, qui doit, pour avoir une solution unique, être complété par une condition initiale :

$$\Phi(0) = \psi$$

où $\psi \in \mathbf{R}^N$.

Supposons que le second membre $S(t)$ soit proportionnel à $\Phi(t)$: par exemple $S(t) = \mu \Phi(t)$.

On dira que μ est un coefficient de "rebouclage" (terme issu de l'Automatique).

Comment va se comporter la solution de ce système différentiel.

En passant sur la base propre $\{\Phi_i\}, 0 \leq i \leq N - 1$ de la matrice A définie par

$$A \Phi_i = \mu_i \Phi_i$$

où $0 < \mu_0 < \mu_1 \leq \dots \leq \mu_i$ sont les valeurs propres, on peut écrire

$$\Phi(t) = \sum_0^{N-1} \xi_i(t) \Phi_i.$$

On en déduit

$$\frac{d}{dt} \xi_i = (\mu - \mu_i) \xi_i$$

et

$$\xi_i(t) = \xi_i(0) \exp((\mu - \mu_i)t)$$

Lorsque le coefficient de rebouclage μ croît en partant de zéro, on voit que, tant que $0 \leq \mu < \mu_0$ tous les coefficients $\xi_i(t)$ décroissent exponentiellement avec t et que lorsque μ atteint la valeur critique $\mu = \mu_0$ tous les coefficients $\xi_i(t)$ continuent à décroître exponentiellement *sauf* $\xi_0(t)$ qui va rester constant, voire même croître exponentiellement si μ est légèrement supérieur à μ_0 . C'est pourquoi on dit que le mode Φ_0 associé à la plus petite valeur propre μ_0 est le mode dominant.

13. Interprétation de l'équation critique (23).

On a vu que la solution de l'équation de Boltzmann stationnaire pouvait être obtenue comme la limite lorsque $t \rightarrow \infty$ de la solution de l'équation de Boltzmann instationnaire.

Il en est de même pour l'approximation de la diffusion : la solution $\Phi = \Phi(x, t)$ du problème instationnaire

$$(24) \quad \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \text{div}(D \cdot \nabla \Phi) + \Sigma_0 \Phi = \nu_e \Sigma_f \Phi, \quad x \in V, t > 0$$

$$(25) \quad \frac{1}{4} \Phi + \frac{D}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma, t > 0$$

devrait en toute logique converger lorsque $t \rightarrow \infty$ vers la solution du problème stationnaire (17)(18).

Comme nous le verrons dans des exercices qui traitent de cas particuliers, il y a en réalité un ensemble dénombrable de valeurs propres $\mu_i, i = 0, 1, 2, \dots$ pour (21)(22), avec à chaque fois un mode propre Φ_i vérifiant

$$(26) \quad -\text{div}(D \cdot \nabla \Phi_i) = \mu_i \Phi_i \quad \text{pour } x \in V$$

et la condition aux limites

$$(27) \quad \frac{1}{4} \Phi_i + \frac{D}{2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

On peut trier ces valeurs propres par ordre croissant : $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \dots$ mais la plus petite est celle qui correspond au mode propre Φ_0 tel que $\Phi_0(x) \geq 0$, celui dont nous avons dit qu'il avait un sens physique et qui est en réalité le mode propre fondamental et nous allons voir pourquoi.

La solution Φ du problème pouvant être recherchée sous la forme d'une combinaison des modes propres Φ_i , nous allons voir en premier lieu ce qui se passe quand $\Phi(x, t) = c(t) \Phi_i(x)$.

On notera qu'avec un tel choix, $\Phi(x, t)$ vérifie la condition aux limites (25).

L'équation (24) nous donne, en utilisant (26) :

$$\alpha \frac{\partial c}{\partial t} \Phi_i + \mu_i \Phi_i c(t) = c(t) (\nu_e \Sigma_f - \Sigma_0) \Phi_i$$

de sorte que l'on peut simplifier par Φ_i pour obtenir une équation différentielle vérifiée par $c(t)$:

$$\alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mu_i c(t) = c(t) (\nu_e \Sigma_f - \Sigma_0)$$

$c(t)$ est donc égal à une constante fois $e^{\beta t}$ avec $\beta = \nu_e \Sigma_f - \Sigma_0 - \mu_i$.

Plus μ_i est grand, plus β a des chances d'être négatif. C'est le cas $i = 0$ qu'il faut surveiller avec le plus d'attention. Trois cas sont possibles :

- $\nu_e \Sigma_f - \Sigma_0 < \mu_0$ et dans ce cas, la solution $\Phi(x, t)$ du problème (24) (25) tend (exponentiellement) vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. On dit que le réacteur est **sous-critique**.

- $\nu_e \Sigma_f - \Sigma_0 = \mu_0$ et dans ce cas $c(t)$ reste constant $\forall t$. On dit que le réacteur est **critique**. Et $\Phi(x, t)$ reste proportionnel au mode fondamental $\Phi_0(x)$. On observe que tous les autres modes sont décroissants (exponentiellement) avec t .
- $\nu_e \Sigma_f - \Sigma_0 > \mu_0$ et dans ce cas la solution $\Phi(x, t)$ du problème (24) (25) tend (exponentiellement) vers l'infini lorsque $t \rightarrow \infty$. On dit que le réacteur est **sur-critique**.

On comprend donc bien l'importance cruciale de l'équation critique (23).

Remarque 13.1 : on va poser $k_\infty = \nu_e \Sigma_f / \Sigma_0$. Comme $\nu_e = \varepsilon \cdot p \cdot \nu$, on a

$$k_\infty = \varepsilon \cdot p \cdot \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_0} = \varepsilon \cdot p \cdot \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_U} \frac{\Sigma_U}{\Sigma_0} = \varepsilon \cdot p \cdot f \cdot \eta$$

où $f = \frac{\Sigma_U}{\Sigma_0}$ est le facteur d'utilisation thermique. En effet, dans la formule qui précède Σ_U désigne la section efficace macroscopique d'absorption de l'Uranium dans le cœur, lequel est supposé constitué d'un milieu homogène. On a alors $\Sigma_0 = \Sigma_U + \Sigma_H$ où Σ_H est la section efficace de capture de l'hydrogène, laquelle n'est pas négligeable dans le domaine thermique (celle de l'oxygène oui).

Pour le mode fondamental on a donc

$$\alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mu_0 c(t) = c(t) \Sigma_0 (k_\infty - 1)$$

$$\frac{\alpha}{\Sigma_0} \frac{\partial c}{\partial t} = c(t) \left(k_\infty - \left(1 + \frac{\mu_0}{\Sigma_0} \right) \right) = c(t) (k_\infty - k_\infty / k)$$

où l'on a posé

$$k = k_\infty / \left(1 + \frac{\mu_0}{\Sigma_0} \right)$$

$$\frac{\alpha}{k_\infty \Sigma_0} \frac{\partial c}{\partial t} = c(t) \left(\frac{k-1}{k} \right)$$

On voit apparaître la *réactivité* ρ définie par

$$\rho = \frac{k-1}{k};$$

en négligeant l'effet des neutrons retardés on trouve que, si $\rho > 0$ le coefficient du mode fondamental Φ_0 est exponentiellement croissant. Au contraire, si $\rho < 0$, il est exponentiellement décroissant. L'équation critique (23) caractérise donc une réactivité nulle.

On sait depuis Enrico Fermi que k_∞ est le produit de 4 facteurs. Nous voyons ici que k est le produit de k_∞ par un cinquième facteur $1 / \left(1 + \frac{\mu_0}{\Sigma_0} \right)$, toujours plus petit que 1 et qui s'interprète comme une *probabilité de non fuite*.

Si l'on néglige la distance d'extrapolation en remplaçant la condition aux limites (22) par la condition $\Phi_0 = 0$ sur Γ , et si le coefficient de diffusion D est constant dans V , on peut écrire que $\mu_0 = D \lambda_0$ où λ_0 vérifie :

$$-\Delta \Phi_0 = \lambda_0 \Phi_0 \quad \text{pour } x \in V$$

$$\Phi_0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

et ne dépend donc que de la géométrie du cœur. Certains auteurs appellent λ_0 le "Laplacien Géométrique". Quoi qu'il en soit le facteur de non fuite peut s'écrire

$$\frac{1}{1 + \lambda_0 M^2} \quad \text{où } M^2 = \frac{D}{\Sigma_0} \text{ est l'aire de migration. Elle a en effet la dimension d'une surface.}$$

Le modèle de diffusion décrit le mouvement "Brownien" suivi par une particule qui change perpétuellement de direction du fait des collisions. On démontre que M^2 peut s'interpréter comme l'espérance du carré de la distance qu'elle parcourt entre sa naissance et sa disparition. ■

Remarque 13.2 : le coefficient α qui apparaît dans l'équation (24) est nécessairement égal à $\frac{1}{v}$ où v est la vitesse moyenne des neutrons thermiques (à savoir $v = 2200 \text{ m/s}$). En effet, en utilisant la loi de Fick $\vec{j} = -D \vec{\nabla} \Phi$, (24) devient :

$$\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div } \vec{j} + \Sigma_0 \Phi = \nu_e \Sigma_f \Phi \text{ et par intégration sur un volume } V \text{ quelconque de frontière } \Gamma$$

$$\alpha \frac{d}{dt} \int_V \Phi dx + \int_{\Gamma} \vec{j} \cdot \vec{n} dS + \int_V \Sigma_0 \Phi dx = \int_V \nu_e \Sigma_f \Phi dx$$

comme le deuxième terme est le courant net sortant de V le troisième l'absorption par unité de temps et le 4^{ème} l'apport de neutrons issu de la combinaison fission/ralentissement, le premier est nécessairement la variation du nombre de neutrons thermiques situés dans V d'où $\alpha = \frac{1}{v}$. ■

14. Exemple en 1D

On suppose que le cœur d'un réacteur est infini dans les directions x et y et qu'il est délimité par les plans $z = 0$ et $z = a$. Les caractéristiques du milieu sont supposées homogènes, de sorte que le coefficient de diffusion D est constant de même que les sections efficaces Σ_0 , Σ_f et le paramètre de multiplication effectif ν_e ; le flux neutronique Φ vérifie donc

$$-D \Phi'' + \Sigma_0 \Phi = \nu_e \Sigma_f \Phi \quad \text{pour } 0 \leq z \leq a$$

nous imposerons en plus les conditions aux limites

$$\Phi'(0) = 0 \quad (\text{condition de symétrie})$$

et (pour modéliser un milieu absorbant caractérisé par un paramètre δ réglable à volonté) :

$$\delta \Phi'(a) + \Phi(a) = 0$$

On suppose que $k_\infty = \nu_e \frac{\Sigma_f}{\Sigma_0} > 1$ pour que le cœur puisse être critique.

On va poser $\beta = \sqrt{(\nu_e \Sigma_f - \Sigma_0)/D}$ de sorte que l'on a :

$$-\Phi'' = \beta^2 \Phi \quad \text{pour } 0 \leq z \leq a$$

et

$$\Phi(z) = A \cos \beta z + B \sin \beta z$$

La condition aux limites choisie en $z = 0$ permet de conclure que $B = 0$.

La condition aux limites choisie en $z = a$ nous donne

$$-\delta \beta \sin \beta a + \cos \beta a = 0$$

$$\cotg \beta a = \delta \beta$$

On cherche donc les intersections possibles entre la courbe $\beta \rightarrow \cotg \beta a$ et la droite $\beta \rightarrow y = \delta \beta$.

Le graphique ci-dessous représente la situation lorsque $a = \pi$ et $\delta = 2$.

Pour obtenir le cas général il suffirait de remplacer 1 par $\frac{\pi}{a}$, 2 par $\frac{2\pi}{a}$, 3 par $\frac{3\pi}{a}$ sur l'axe des abscisses et de faire varier la pente de la droite $\beta \rightarrow y = \delta \beta$.

Il y a donc toujours un ensemble dénombrable de solutions $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$ avec une seule solution β_0 dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2a}\right]$. On en déduit qu'il y a un ensemble dénombrable de modes propres $\Phi_i(z) = \cos(\beta_i z)$ mais que seul le mode propre $\Phi_0(z) = \cos(\beta_0 z)$ est positif dans l'intervalle $0 \leq z \leq a$. C'est donc lui le mode propre fondamental.

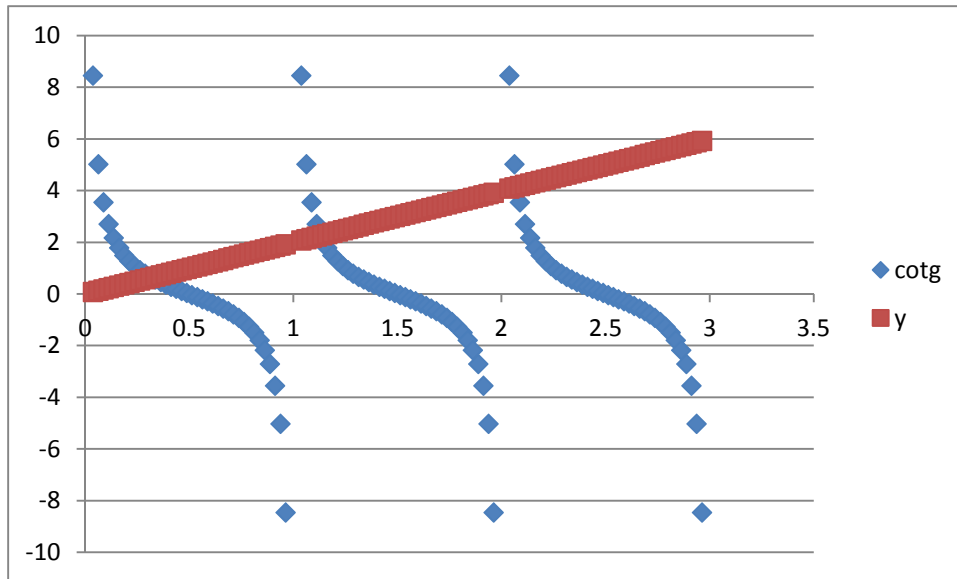


Fig.1 Représentation des courbes $\beta \rightarrow \cotg \beta a$ et $\beta \rightarrow y = \delta \beta$ avec $\beta a / \pi$ en abscisse

En particulier, on voit que, dans le cas particulier $\delta = 0$, on obtient explicitement $\beta_i = (2i + 1) \frac{\pi}{2a}$ de sorte que $\cos(\beta a) = 0$ comme il se doit lorsque $\delta = 0$.

Supposons maintenant que $\beta^2 = (\nu_e \Sigma_f - \Sigma_0) / D < \frac{\pi^2}{4a^2}$ ce qui veut dire que le cœur est sous-critique avec $\delta = 0$ (condition absorbante en a), mais que $(\nu_e \Sigma_f - \Sigma_0) / D > 0$ ou autrement dit que $k_\infty > 1$, nous avons donc démontré qu'en réglant le paramètre δ à une valeur $\delta > 0$ mais finie, on arrive à rendre le réacteur critique.

C'est un peu comme si, en ajustant l'absorption des deux plaques absorbantes situées en $z = \pm a$, on pouvait rendre le réacteur juste critique. ■

15. Modèle de diffusion à 2 groupes.

Nous allons maintenant étudier, pour un cœur homogène, le modèle suivant :

$$(15.1) \quad -D_1 \Delta \psi + \Sigma_1 \psi = \varepsilon \nu \Sigma_f \varphi \quad \text{pour } x \in V$$

$$(15.2) \quad -D_2 \Delta \varphi + \Sigma_2 \varphi = p \Sigma_1 \psi \quad \text{pour } x \in V$$

$$(15.3) \quad \varphi = \psi = 0 \quad \text{sur la frontière } \Gamma$$

Il s'agit d'un système de deux équations de diffusion couplées dont la solution $\{\varphi, \psi\}$ comporte deux flux neutroniques : ψ est le flux des neutrons rapides et φ le flux des neutrons thermiques.

Pour que les calculs se fassent simplement, nous avons négligé la longueur d'extrapolation et adopté une condition aux limites plus simple, un peu plus absorbante.

Au second membre de l'équation (15.1) on voit apparaître un terme source qui modélise les neutrons rapides issus de la fission de l'Uranium.

Au second membre de l'équation (15.2) on voit apparaître un terme source qui modélise les neutrons thermiques qui étaient initialement rapides et qui ont survécu après ralentissement.

Σ_2 est donc la section efficace macroscopique d'absorption du cœur dans le domaine thermique.

Σ_1 représente la section efficace (macroscopique) de disparition du groupe rapide pour un neutron rapide.

Pour trouver l'équation critique associée à ce problème qui est (sans en avoir l'air) un problème de valeur propre, nous allons introduire le mode propre fondamental Φ_0 vérifiant :

$$(15.4) \quad \begin{aligned} -\Delta \Phi_0 &= \lambda_0 \Phi_0 \text{ dans } V \\ \Phi_0 &\geq 0 \text{ dans } V \\ \Phi_0 &= 0 \text{ sur } \Gamma \end{aligned}$$

Et nous allons chercher $\{\varphi, \psi\}$ solution de (15.1)(15.2)(15.3) sous la forme

$$\{\varphi, \psi\} = \{\alpha \Phi_0, \beta \Phi_0\}$$

où α et $\beta \in \mathbf{R}$.

En injectant $\varphi = \alpha \Phi_0$ et $\psi = \beta \Phi_0$ dans les équations

$$\begin{aligned} -\beta D_1 \Delta \Phi_0 + \Sigma_1 \beta \Phi_0 &= \varepsilon v \Sigma_f \alpha \Phi_0 \\ -\alpha D_2 \Delta \Phi_0 + \Sigma_2 \alpha \Phi_0 &= p \Sigma_1 \beta \Phi_0 \end{aligned}$$

d'où en utilisant (15.4) et en simplifiant par Φ_0 :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon v \Sigma_f & -(\Sigma_1 + D_1 \lambda_0) \\ -(\Sigma_2 + D_2 \lambda_0) & p \Sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent, le déterminant de la matrice 2x2 doit être nul, d'où

$$\varepsilon p v \Sigma_f \Sigma_1 - (\Sigma_1 + D_1 \lambda_0)(\Sigma_2 + D_2 \lambda_0) = 0$$

En divisant par $\Sigma_1 \Sigma_2$ on obtient

$$\varepsilon p v \frac{\Sigma_f}{\Sigma_2} = \left(1 + \frac{D_1}{\Sigma_1} \lambda_0\right) \left(1 + \frac{D_2}{\Sigma_2} \lambda_0\right)$$

qui est notre équation critique.

En effet

$$\varepsilon p v \frac{\Sigma_f}{\Sigma_U} \frac{\Sigma_U}{\Sigma_2} = \varepsilon p f \eta = k_\infty = \left(1 + \frac{D_1}{\Sigma_1} \lambda_0\right) \left(1 + \frac{D_2}{\Sigma_2} \lambda_0\right)$$

et si l'on pose

$$k = \frac{k_\infty}{\left(1 + \frac{D_1}{\Sigma_1} \lambda_0\right) \left(1 + \frac{D_2}{\Sigma_2} \lambda_0\right)}$$

l'équation critique nous donne tout simplement $k = 1$ et on voit que k n'est autre que le k effectif.

On retrouve ainsi la formule des 6 facteurs avec

$$\frac{1}{1 + \frac{D_1}{\Sigma_1} \lambda_0}$$

qui est le coefficient de non-fuite dans le groupe rapide et

$$\frac{1}{1 + \frac{D_2}{\Sigma_2} \lambda_0}$$

qui est le coefficient de non-fuite dans le groupe thermique.

Plus généralement, les ingénieurs de calcul neutronique travaillent avec des modèles "multigroupes" introduisant N équations de diffusion couplées les unes aux autres.

Annexe 1 : Interprétation du produit $\Sigma \cdot \Phi$

On se donne un milieu plan homogène dans lequel on envoie un faisceau de neutrons monocinétique et dirigé parallèlement à l'axe Ox : soit $\Phi(x)$ l'intensité du faisceau lorsqu'il arrive en x.

On se bornera à regarder ce qui se passe dans un cylindre de section S orthogonale à Ox.

Dans la tranche $[x, x+ dx]$ il va y avoir N. S. dx atomes dans le volume S.dx

La probabilité pour un neutron d'avoir une collision est donc $\frac{\sigma N \cdot S \cdot dx}{S} = \Sigma dx$.

Comme il y a $\Phi(x) S$ neutrons/seconde qui rentrent dans cette tranche, il va donc y en avoir

$\Sigma \cdot \Phi S \cdot dx$ qui vont avoir chaque seconde une collision dans cette tranche d'épaisseur dx.

En résumé $\Sigma \cdot \Phi$ est le nombre de collisions par cm³ par seconde.

Si $S = 1 \text{ cm}^2$, on a donc $d\Phi = -\Sigma \cdot \Phi \cdot dx$ donc $\Phi = \Phi_0 \exp(-\Sigma x)$

Pour un neutron qui est généré en $x = 0$ la probabilité que sa première collision ait lieu entre x et $x+dx$ est donc $p(x)dx = \Sigma \exp(-\Sigma x) dx$ et on bien $\int_0^\infty p(x)dx = 1$.

Dire que la probabilité de que x soit comprise entre x_0 et x_0+dx soit égale à $p(x)dx$ est précisément ce que l'on voulait.

Annexe 2 Démonstration des formules (14)   (16).

Cette annexe reste à rédiger.

Montrons tout de même comment on procède par exemple pour les formules (15) et (16).

Calculons par exemple :

$$\int_{S_2} \Omega_1 \Omega_2 d\Omega$$

Puisque $\vec{\Omega} = \{\cos \varphi \cdot \sin \theta, \sin \varphi \cdot \sin \theta, \cos \theta\}$, on a

$$\int_{S_2} \Omega_1 \Omega_2 d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \varphi \cos \varphi \cdot \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = 0$$

en effet

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} [-\cos 2\varphi]_0^{2\pi} = 0.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{S_2} (\Omega_1)^2 d\Omega &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2) d\mu = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Pour la formule (16).

$$\int_{S_2} \Omega_i \Omega_k \Omega_l d\Omega = 0$$

prenons par exemple $i = k = l = 1$.

Puisque $\vec{\Omega} = \{\cos \varphi \cdot \sin \theta, \sin \varphi \cdot \sin \theta, \cos \theta\}$, on donc

$$\Omega_i \Omega_k \Omega_l = \cos^3 \varphi \cdot \sin^3 \theta,$$

et donc

$$\int_{S_2} \Omega_i \Omega_k \Omega_l d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^3 \varphi \cdot \sin^3 \theta \sin \theta d\theta = 0$$

En effet

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^3 \varphi + \cos^3(\pi + \varphi)] d\varphi = 0$$

Les autres cas se traitent de façon similaire.