NUMÉRIQUE A L'ÉCOLE

APPORT DU NUMÉRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES NOMBRES, DU CALCUL ET DE L'ALGÈBRE

Brigitte GRUGEON ALLYS et Nadine GRAPIN

Université Paris Est Créteil

Octobre2020

le cnam
Cnesco

Centre national d'étude des systèmes scolaires

Ce rapport s'inscrit dans une série de contributions publiées par le Centre national d'étude des systèmes scolaires (Cnesco) sur la thématique : **Numérique à l'école.**

Les opinions et arguments exprimés n'engagent que les auteures du rapport.

Pour citer ce rapport :

Grugeon-Allys, B. & Grapin, N. (2020) *Apport du numérique dans l'enseignement et l'apprentissage des nombres, du calcul et de l'algèbre*. Paris : Cnesco.

Disponible sur le site du Cnesco : http://www.cnesco.fr
Publié en octobre 2020
Centre national d'étude des systèmes scolaires
41 rue Gay-Lussac 75005 Paris

Table des matières

Liste des figures

Introduction

Dans ce rapport, nous nous intéressons aux potentialités des outils numériques pour favoriser les apprentissages relevant du domaine du nombre (nombres entiers et décimaux à l'école, nombres rationnels et irrationnels au collège), du calcul (posé ou mental), de la résolution de problèmes arithmétiques et de l'algèbre au collège. Notre travail se situe donc principalement sur les cycles 2 – 3 et 4, et dans une moindre mesure sur les connaissances relevant du lycée. Nous nous sommes intéressées aux outils numériques mathématiques, logiciels ou applications, développés spécifiquement ou non pour l'enseignement des mathématiques. Nous tiendrons compte aussi des supports (tablettes, ordinateurs ou tableaux blancs interactifs) avec lesquels ils peuvent être utilisés et dans une moindre mesure des médias en général (tels que le web ou les vidéos qui permettent l'utilisation de plusieurs modes de représentation de l'information (textes, sons, images fixes ou animées)). Nous nous demandons quels sont les apports des outils numériques sur les apprentissages numériques et algébriques et quels sont leurs usages dans les classes.

Afin de structurer notre propos, nous avons repris les travaux de Lagrange et Grugeon (2003) et avons ainsi retenu quatre dimensions susceptibles d'organiser les facteurs relatifs à l'utilisation des TICE[1]:

- une première en lien avec les savoirs et les programmes prenant en compte l'effet des outils numériques sur les contenus mathématiques, notamment sur les types de tâches[2] et les techniques de résolution (en particulier dans les liens potentiels entre techniques informatisées et conceptualisation des concepts en jeu) ;
- une deuxième, portant sur les représentations des objets mathématiques afin de décrire l'influence des outils numériques sur ces dernières ;
- une troisième dimension, instrumentale, pour considérer le processus de genèse instrumentale ;
- une dernière, relative aux situations d'apprentissage et aux enseignants permettant d'aborder des questions relatives à la formation des enseignants.

Dans notre propos, les deux premières dimensions seront regroupées afin de présenter les potentialités offertes par les outils numériques en termes de représentation d'objets mathématiques, de nouveaux types de tâches et de nouvelles techniques de résolution.

Après avoir rappelé brièvement les difficultés numériques et algébriques des élèves, nous exploitons ces dimensions pour structurer l'état des recherches actuelles (nationales et internationales), pour étudier l'enseignement prescrit par les programmes et par les manuels durant ces vingt dernières années, et enfin pour observer l'usage déclaré des outils numériques dans les pratiques. Nous concluons par des développements de recherche actuels et par des perspectives.

---

[1] TICE: Technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement. Nous utilisons ce terme pour qualifier de façon générale les outils et ressources numériques utilisés pour l'enseignement.

[2] L'expression « type de tâches » est à considérer ici, et comme dans l'ensemble de notre texte, au sens de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) : par exemple le type de tâche « calculer » peut s'effectuer avec différentes techniques : calcul mental, calcul en ligne, calcul posé ou à l'aide de calculatrice ou de tableur (calcul instrumenté). Chaque technique est justifiée par des propriétés mathématiques (les techniques de calcul mental ou en ligne sont par exemple justifiées par des propriétés sur les nombres et les opérations).

Instrumentation / instrumentalisation & genèse instrumentale

Quand un individu s'est approprié un outil pour réaliser une tâche, on considère que l'outil est devenu un instrument. Le processus qui consiste à apprendre à utiliser un outil, est parfois appelé instrumentation. C'est le cas lorsqu'un élève, par exemple, apprend à utiliser sa calculatrice graphique pour tracer la courbe représentative d'une fonction. Un outil que la personne ne s'est pas encore approprié est parfois appelé artefact.

Un individu peut aussi s'approprier un outil pour résoudre des tâches qui n'étaient pas envisagées par le concepteur. Par exemple, les calculatrices graphiques peuvent être utilisées pour stocker des jeux ou des théorèmes ; dans ce cas, l'individu (ici l'élève) a adapté l'outil (ici la calculatrice) à ses besoins pour le détourner de son usage prévu initialement. Ce processus de détournement est parfois appelé instrumentalisation.

Ce double processus d'appropriation instrumentation / instrumentalisation est en général appelé genèse instrumentale (Rabardel, 1996 ; Rabardel & Pastré, 2005 ; Rabardel & Samurçay, 1998).

I. Difficultés des élèves

A. Nombres entiers décimaux et rationnels, calcul et résolution de problèmes à l'école

Une synthèse sur les acquis des élèves en fin d'école dans le domaine numérique et les difficultés relatives aux apprentissages des nombres et du calcul a été réalisée par Chesné et Fischer (2015) à l'occasion de la conférence de consensus sur les nombres et le calcul, en appui sur les travaux de différents didacticiens et sur les résultats aux évaluations nationales. Ainsi, si les élèves maîtrisent globalement l'aspect positionnel de l'écriture en chiffres (savoir que le chiffre juste à droite de la virgule est celui des dixièmes par exemple), ils maîtrisent beaucoup moins l'aspect décimal (savoir qu'une unité est égale à 10 dixièmes) aussi bien sur les écritures de nombres entiers que décimaux (Grapin, 2015). Par ailleurs, le calcul d'additions et de soustractions pour les entiers semble acquis globalement en fin d'école (Chesné, 2014 ; Dalibard & Pastor, 2015), mais il subsiste des difficultés plus importantes dans les multiplications et divisions par 10, 100, 1 000 ou dans des tâches de comparaisons de décimaux, les élèves cherchant à étendre des règles établies pour les nombres entiers aux nombres décimaux (par exemple, pour multiplier par 10, on ajoute un 0 à la fin du nombre). En ce qui concerne les nombres rationnels décimaux, les difficultés portent, entre autres, sur le passage d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule (par exemple, passer de 1/4 à 0,25) et sur la reconnaissance d'écritures différentes d'un même nombre, comme par exemple 5/10 et 50/100 ou comme 3/4 et 6/8.

Toujours en fin d'école, une proportion importante d'élèves échoue dans le calcul posé ou mental d'une soustraction ou d'une multiplication mettant en jeu des décimaux (Chesné, 2014) et il en est de même pour le calcul posé de divisions euclidiennes et décimales (Grapin, 2015). Si les techniques du calcul posé s'appuient principalement sur les propriétés de numération décimale, le calcul réfléchi demande de mobiliser les propriétés arithmétiques des nombres et des opérations, et de réécrire correctement les expressions. Par exemple, pour calculer 45×21, on peut d'abord décomposer 21 sous la forme $20 + 1$ puis calculer la somme $45 \times 20 + 45$. Les difficultés peuvent alors être liées non seulement à la maîtrise des « tables » mais aussi à la connaissance des propriétés des opérations ($45 \times 21 \neq 45 \times 20 + 1$) et à la réécriture : écrire $45 \times 21 = 45 \times 20 = 900 + 45 = 945$ est faux en mathématiques).

En ce qui concerne la résolution de problèmes « arithmétiques verbaux » (Feyfant, 2015), de nombreux travaux en didactique des mathématiques et en psychologie cognitive ont été menés pour étudier les processus cognitifs et les procédures mathématiques impliqués dans cette résolution. Les performances des élèves vont ainsi dépendre de la compréhension de l'énoncé du problème, l'interprétation qu'ils font du problème, leur capacité à mettre en relation les données sémantiques du problème avec un système de représentation (schéma ou écriture arithmétique par exemple), etc. Pour une synthèse sur ces questions, nous renvoyons le lecteur au dossier de veille de l'Institut français de l'Éducation (Ifé) rédigé par Feyfant (2015), mais nous soulignons pour conclure que, si la résolution de problèmes reste difficile pour les élèves, elle soulève aussi de nombreuses questions quant à son enseignement (Houdement, 2017).

Enfin, il est difficile de dresser un état des lieux sur la maîtrise du calcul instrumenté en fin d'école puisqu'il est peu évalué dans les évaluations nationales : en 2008, l'évaluation Cedre[3] avait montré qu'environ 85 % des élèves maîtrisaient l'usage de la calculatrice, mais en 2014, lors de la dernière passation du Cedre, l'utilisation de la calculatrice n'était pas proposée (Dossier de la Depp, 2017).

B. Calcul littéral et algèbre au collège

Les mathématiques peuvent être traumatisantes pour des élèves, en particulier en ce qui concerne l'entrée dans l'algèbre. De nombreuses recherches en didactique ont été menées et se poursuivent pour comprendre les processus de conceptualisation des nombres et du calcul dans la transition entre l'arithmétique et l'algèbre, et les difficultés rencontrées par les élèves (Kieran, 1992, 2007 ; Vergnaud *et al.,* 1987) ainsi que celles d'enseignement (Chevallard, 1985, 1989 ; Grugeon, 1997 ; Assude *et al.*, 2012). Des recherches sur la conception d'outils numériques et leur usage favorisant les apprentissages en algèbre ont été menées (Cerulli & Mariotti, 2002 ; Kieran & Yerushalmy, 2004 ; Yerushalmy, 2005).

Le calcul littéral concerne à la fois, le calcul sur les expressions littérales et les équations, en appui sur les propriétés liées à ces objets algébriques, leurs différentes représentations dans différents registres de représentation, mais aussi la résolution de différents types de problèmes. Comment amener les élèves à passer d'une activité arithmétique sur le calcul de nombres et la résolution de problèmes numériques à une activité algébrique ? Bednarz *et al.* (1996) identifient trois principales entrées :

- l'entrée par la généralisation (en France, depuis 2006), demandant de produire une expression algébrique généralisant un phénomène. Ce peut être pour montrer que deux programmes de calcul conduisent toujours à des résultats égaux quand on choisit le même nombre de départ. Par exemple, les programmes P1 « Choisir un nombre, lui ajouter 6, multiplier le résultat par le nombre choisi, soustraire 3 » et P2 « Choisir un nombre, multiplier par 2, soustraire 1, multiplier le résultat par 3, ajouter le carré du nombre choisi » aboutissent au même résultat pour un même nombre de départ. En effet, si on appelle x le nombre de départ, l'expression du résultat est $(x + 6) \times x - 3$ pour P1 et $(2x - 1) \times 3 + x^2$ pour P2 et comme $(x + 6) \times x - 3 = (2x - 1) \times 3 + x^2$, pour toutes valeurs de x, on en déduit que les programmes sont équivalents. La lettre x dans ce cas a le statut de nombre généralisé ou d'indéterminée. D'autres situations,

[3] Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon

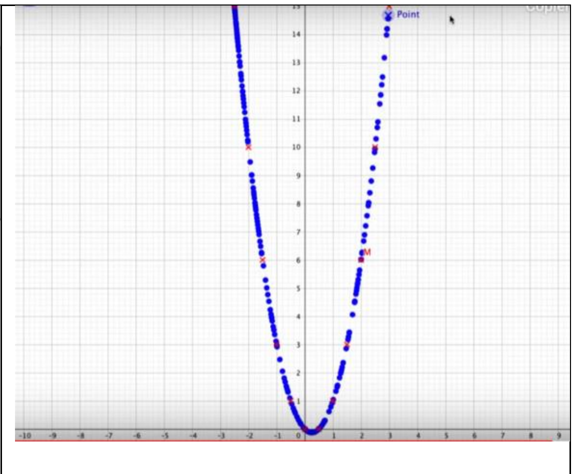
comme la recherche de *patterns*[4] dans des configurations géométriques (telles que celle des pommiers dans la partie IV du rapport) ou des suites de nombres peuvent aussi amener à la production d'expressions algébriques.

- L'entrée par la mise en équations (celle des programmes français jusqu'en 2005), comme pour la résolution du problème suivant :
« Manon et Tom choisissent un même nombre de départ. Manon multiplie ce nombre par 7 puis soustrait 11. Tom multiplie ce nombre de départ par 4 puis ajoute 15. Manon et Tom peuvent-ils trouver à la fin le même résultat ? Si oui, en ayant choisi quel nombre de départ ? ».
La résolution algébrique de ce problème passe par une mise en équation $7x - 11 = 4x + 15$, dans laquelle la lettre x a le statut d'inconnue et désigne le nombre de départ.
- L'entrée par la modélisation (co-variation, variables et fonctions), de plus en plus prégnante en fin de collège, dans laquelle la lettre prend le statut de variable : dans l'exemple suivant (Figure 1), on recherche quel nombre prendre au départ pour obtenir le plus petit nombre à l'arrivée. On peut s'appuyer sur l'usage d'un tableur puis sur une animation Geogebra avant de justifier sa réponse.

Figure 1. Exemple de problème illustrant le statut de variable pour la lettre

Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre.
- Calculer le carré du nombre choisi.
- Prendre le double du résultat obtenu.
- Soustraire le nombre de départ.



Les choix curriculaires vont avoir une influence sur la conceptualisation des concepts, chacune des trois entrées mentionnées ci-dessus privilégiant un statut des lettres : inconnue, indéterminée et variable. De nombreuses recherches en didactique ont identifié des difficultés des élèves récurrentes dans le passage entre l'activité arithmétique et l'activité algébrique ; elles sont principalement de deux ordres :

- des ruptures d'ordre épistémologique (Vergnaud *et al.*, 1987 ; Kieran, 1992) ; ces ruptures concernent d'une part, l'évolution du statut et de l'usage de symboles communs comme les lettres, le signe d'égalité, d'autre part, l'évolution des démarches de résolution, d'une démarche arithmétique du connu vers l'inconnu à une démarche algébrique s'appuyant sur la symbolisation des relations entre données et inconnues ;

[4] Le terme « pattern » renvoie à une certaine régularité qui se produit dans les situations considérées. Par exemple, dans la situation des pommiers (paragraphe V), le nombre de conifères est égal à huit fois le nombre de rangées et le nombre de pommiers est égal à son carré.

- une évolution des rapports entre syntaxe et sémantique, règle et raisonnement, lors du travail mathématique (Drouhard, 1992).

Ainsi, que ce soit sur les nombres, le calcul, la résolution de problèmes via la production d'expressions arithmétiques ou algébriques, le calcul littéral et l'utilisation des lettres en général, l'usage des outils numériques doit être interrogé. Peut-il atténuer ces difficultés, les accroître ?

II. Apports potentiels des outils numériques : état des lieux des recherches

Nous avons souhaité commencer notre propos en listant des outils numériques mathématiques à destination des élèves (sans chercher à en dresser une liste exhaustive) en nous appuyant à la fois sur les recherches, mais aussi sur les programmes, les manuels et les ressources mises à destination des enseignants ; nous poursuivons par un état des lieux des recherches selon les dimensions relatives « aux savoirs et aux représentations des objets mathématiques » et aux « situations d'apprentissage – enseignants » et la dimension instrumentale.

A. Présentation des outils numériques

Nous avons catégorisé ces outils selon le niveau scolaire de leur utilisation potentielle et, pour chaque catégorie, nous apportons quelques précisions complémentaires et citons quelques exemples d'outils existants (Figure 2). Nous présentons plus spécifiquement chacun de ces outils dans les paragraphes qui suivent en nous appuyant sur des recherches spécifiques les concernant mais aussi sur différents articles traitant de questions générales sur leur usage (Artigue, 2002, 2008, 2014 ; Trouche, 2004).

Figure 2. Liste des outils numériques mathématiques pouvant être exploités pour favoriser les apprentissages sur les nombres, le calcul et l'algèbre

Outil	Utilisation potentielle	Exemples d'outils existants et remarques complémentaires
Calculatrice	école – collège - lycée	À l'école : calculatrice avec les fonctionnalités « de base » Au collège : calculatrice scientifique Au lycée : calculatrice graphique
Tableur	école – collège - lycée	En plus des tableurs existants dans les suites *Office ou OpenOffice*[5], *GeoGebra*[6] et *XCAS*[7] intègrent aussi un tableur (avec des fonctionnalités moindres)
Solveur d'équations	collège - lycée	Les logiciels « *Thot*[8] », « Photomath[9] » et « Solumath[10] » permettent d'aider à la résolution d'équations du 1er degré (collège)
Tutoriel intelligent de calcul	collège	*Aplusix*[11]
Applets	collège - lycée	*Wisweb*[12] (Pays Bas)
Logiciels de calcul formel (Computer Algebra System)	collège - lycée	*Derive*[13], *Alnuset*[14], *GeoGebra*, *Maple*[15], *Mathematica*[16] et *XCAS* ont un module intégré de calcul formel
Logiciels de programmation	collège - lycée	*Scratch, Python, XCAS* ont un module intégré de programmation
Bases d'exercices en ligne (en particulier logiciels de calcul mental)	école – collège - lycée	*LaboMep*[17] *(Sésamath), Matoumatheux*[18] *Calcul@tice*[19]
Logiciel de diagnostic automatique	collège – début de lycée	*Pépite*, logiciel de diagnostic en algèbre, décrivant les compétences algébriques construites en fin de cycle 4

---

5 http://www.openoffice.org/fr/

6 https://www.geogebra.org/

7 https://www.xcasenligne.fr/

8 http://www.emmanuelmorand.net/thot/presentation.php

9 https://www.photomath.net/fr/

10 https://www.solumaths.com/fr/calculatrice-en-ligne/calculer/resoudre

11 https://aplusix.org/siteTemplate.php?lang=fr&page=accueil.php# La société Aristod, qui a développé ces outils, a cessé ses activités en avril 2019, du fait du très faible intérêt que ces outils ont suscité

12 http://www.wisweb.nl

13 https://www.01net.com/telecharger/windows/Loisirs/education_et_scolarite/fiches/103652.html

14 http://www.alnuset.com/fr/alnuset

15 https://fr.maplesoft.com/products/Maple/

16 https://www.wolfram.com/mathematica/

17 https://labomep.sesamath.net/

18 http://matoumatheux.mschpff.eu/accueil.html

19 https://eduscol.education.fr/cid61308/calcul@tice.html

Nous pouvons ainsi constater que les outils numériques mathématiques pouvant être exploités pour favoriser les apprentissages sur les nombres, le calcul et l'algèbre sont nombreux, et nous pourrons dans la dernière partie de ce chapitre, observer quels sont ceux qui sont effectivement utilisés par les enseignants dans leurs classes. Précisons que certains logiciels, comme *GeoGebra*, *Xcas* et *Alnuset* (Chaachoua *et al.,* 2012), par exemple, intègrent plusieurs outils, comme un tableur, un logiciel de calcul formel, et permettent d'articuler différentes représentations d'un même objet (ce que nous illustrerons par la suite avec *GeoGebra*). Étudions désormais ces outils selon les différentes dimensions présentées en introduction.

B. Dimensions relatives aux savoirs et aux représentations des objets mathématiques

Cette partie vise à décrire les influences potentielles des outils numériques sur les apprentissages des élèves et est préalable aux parties relatives aux prescriptions et aux pratiques enseignantes, même si pour certains outils, les résultats de recherches menées dans des classes expérimentales sont ici décrits. Pour autant, il y a lieu de distinguer ce qui est observé dans de tels environnements des pratiques effectives dans les classes en général (Artigue, 2008).

1. Calculatrices

Une calculatrice peut être utilisée avantageusement pour travailler la numération (Del Notaro & Floris, 2011 ; Aldon & Rabatel, 2015) et pour donner le résultat exact d'un calcul sur des nombres entiers ou décimaux, dont l'écriture mobilise un nombre de chiffres limité; son utilisation pour des sommes, différences ou produits ne posant pas de difficulté, en termes de genèse instrumentale, les démarches de recherche et de raisonnement par essais-erreurs dans la résolution de problèmes sont ainsi facilitées par son usage. Lorsqu'une calculatrice n'est pas pourvue d'une touche spécifique, donner le quotient et le reste d'une division euclidienne demande en revanche des savoirs mathématiques spécifiques. Par ailleurs, les parenthèses ou les fonctions mémoire présentes dans les calculatrices utilisées à l'école donnent la possibilité de travailler la hiérarchisation des calculs dans une suite d'opérations et de comparer différentes écritures d'un même calcul.

Afin de développer les connaissances en calcul réfléchi des élèves et de faire émerger différentes expressions arithmétiques équivalentes, Lemoyne *et al.* (2005) ont conçu un outil technologique spécifique, la « calculatrice défectueuse ». Elle est à l'image d'une calculatrice mais avec certaines touches (chiffres, signes opératoires ou parenthèses) bloquées. Par exemple, en demandant de calculer 1279×797, sans pouvoir utiliser les touches 2, 7 et 9, on amène l'élève à utiliser les parenthèses en calculant par exemple $(1300 - 30 + 8 + 1) \times (800 - 3)$ et à produire des expressions différentes mais équivalentes, comme 1279×797 et $(1300 - 30 + 8 + 1) \times (800 - 3)$.

Les calculatrices scientifiques, utilisées au collège, intègrent, entre autres, en plus des opérations et fonctions de base, la racine carrée (à partir du cycle 4), des fonctions trigonométriques, et donnent la possibilité de faire du calcul fractionnaire. Les calculatrices graphiques, utilisées plutôt à partir du lycée, permettent entre autres, de tracer la courbe représentative d'une fonction, et possèdent aussi de nombreuses autres fonctionnalités, intégrant par exemple un tableur et un CAS (Computer Algebra System).

2. Tableurs

De nombreux travaux portent sur l'utilisation du tableur dans l'apprentissage de l'algèbre (Capponi, 1992 ; Sutherland & Rojano, 1993). Un tableur permet d'abord une automatisation des calculs grâce à l'utilisation de formules, à la réactualisation des données calculées et à la recopie automatique ; il facilite ainsi des démarches de recherche par essais-erreurs en résolution de problèmes qui seraient rendues plus fastidieuses si les élèves posaient les calculs ou les traitaient de façon répétitive à la calculatrice. Par exemple, la résolution du problème des chocolats « Trois groupes d'enfants se partagent 100 chocolats. Le deuxième groupe reçoit quatre fois le nombre de chocolats du premier. Le troisième groupe reçoit 10 chocolats de plus que le deuxième groupe. Combien de chocolats chacun des trois groupes reçoit-il ? » peut être résolu par essais *via* des calculs numériques à partir de l'évaluation de formules du tableur (Figure 3) :

Figure 3. Extrait d'une feuille de calcul montrant les formules saisies dans chacune des cellules

	A	B	C	D
1	Nombre de chocolats du 1er groupe	Nombre de chocolats du 2ème groupe	Nombre de chocolats du 3ème groupe	Total
2		=A2*4	=B2+10	=A2+B2+C2

Les potentialités et usages pertinents du tableur concernent aussi la recherche de régularités en appui sur la dimension expérimentale des mathématiques et la proposition de conjectures avant la recherche de leur preuve algébrique (par exemple pour conjecturer l'équivalence ou non de programmes de calcul, préalablement à une preuve algébrique ou à l'émission d'un contre-exemple). Plus spécifiquement, le tableur peut permettre d'accompagner la transition entre une activité arithmétique et une activité algébrique *via* un monde intermédiaire : algébrique par l'organisation de la feuille et l'utilisation d'un langage symbolique, arithmétique par les stratégies de résolution. En effet, le langage symbolique du tableur relève de l'algèbre, mais les démarches utilisées dans le tableur pour résoudre des problèmes déconnectés, c'est-à-dire nécessitant l'outil algébrique via une mise en équation, relèvent de l'arithmétique, comme le montre l'exemple des « chocolats ». Nous reviendrons sur les difficultés potentielles de l'usage du tableur liées à la non équivalence entre des formules du tableur et celles du monde algébrique (Haspekian, 2005, 2012) dans le paragraphe dédié à la dimension instrumentale.

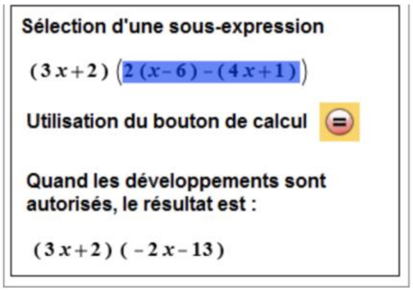
3. Logiciels de calcul formel (*Computer Algebra System – CAS*)

Les CAS sont d'abord des technologies qui ont été importées du monde professionnel (*Derive*, *Maple*, *Mathematica*) avant d'être conçues spécialement pour l'enseignement (par exemple avec XCAS ou *Alnuset* en Italie). Ces logiciels permettent de faire du calcul formel avec des objets mathématiques (nombres réels et complexes, polynômes, équations, fonctions ou séries, ...), en particulier pour résoudre des équations ou des systèmes d'équations linéaires, pour dériver, pour intégrer, etc. Ces logiciels sont essentiellement utilisés dans des classes scientifiques au lycée ou à l'université, à la différence de ceux conçus spécifiquement pour l'apprentissage du calcul algébrique au collège comme des solveurs d'équation, ou des tutoriels intelligents de calcul.

4. Tutoriels intelligents de calcul

Un tutoriel intelligent de calcul vise à faire du calcul sur des expressions algébriques ou des équations, en permettant la vérification des transformations réalisées (Artigue, 2002). *Aplusix*, par exemple, est un tutoriel intelligent développé en lien avec la recherche en EIAH (Environnements informatiques pour l'apprentissage humain) (Nicaud *et al*., 2004 ; Boudineau *et al*., 2007) ; il est fondé d'une part sur le concept d'équivalence entre expressions algébriques ou entre équations et sur la manipulation directe d'expressions respectant leur structure. Par exemple, Aplusix permet d'illustrer que les expressions algébriques 2(x-6)-(4x+1) et (-2x-13) d'écritures différentes sont égales, pour toutes valeurs de la lettre x (Figure 4).

Figure 4. Illustration d'équivalence d'expressions dans *Aplusix*

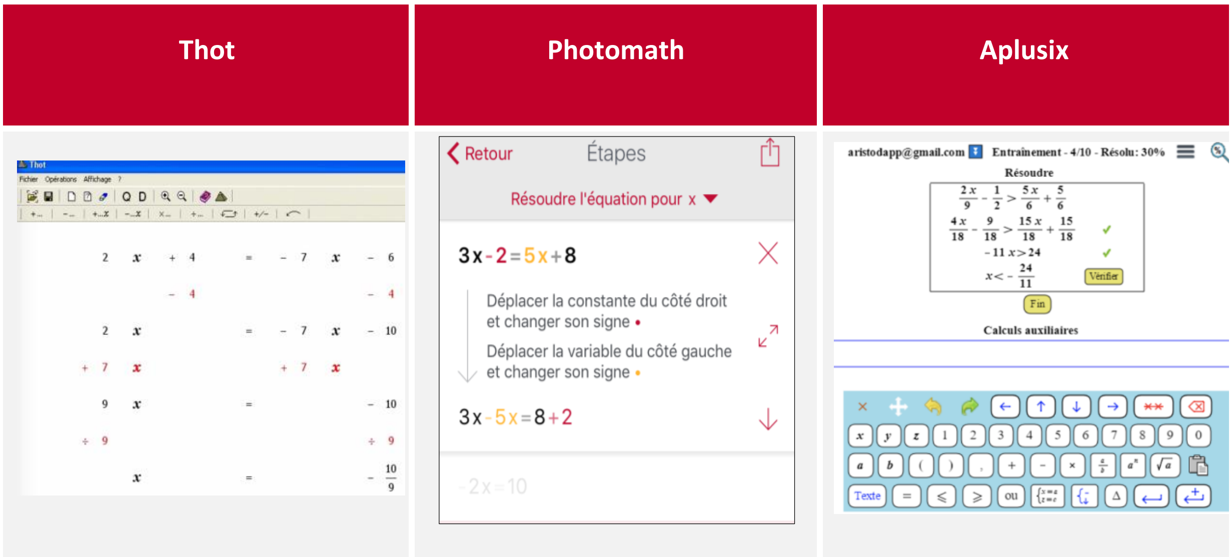


Le logiciel s'appuie sur une palette d'écriture d'expressions qui permet une écriture spatiale en deux dimensions, proche de l'écriture habituelle (voir Tableau 2). Cette palette permet de dupliquer ou créer une expression, « d'éclairer » la structure d'une expression, de déplacer des blocs sélectionnés. *AplusixNeo* est plus qu'une base d'exercices en ligne : c'est une base riche d'exercices de calcul littéral sur les expressions et les équations, qui permet un contrôle sémantique après chaque transformation, selon les propriétés correctes ou non mobilisées.

5. Solveurs d'équations

Un solveur d'équations vise à résoudre une équation en ligne en présentant les étapes du calcul (Figure 5). *Solumaths* indique ainsi les étapes de la résolution alors que *Thot* fait apparaître les propriétés mathématiques avec un graphisme spécifique afin d'apporter aux élèves des feedbacks adaptés pour qu'ils comprennent et visualisent la technique de résolution des équations du premier degré à une inconnue. D'autres solveurs, comme *Photomath,* ne s'appuient pas sur les propriétés mathématiques et utilisent un discours qui a montré des limites pour l'apprentissage en mathématiques.

Figure 5. Trois exemples de solveurs d'équations



Thot et *Aplusix* visent particulièrement à faire évoluer les rapports entre syntaxe et sémantique, règle et raisonnement.

6. Bases d'exercices en ligne et logiciels de calcul mental

Pour Cazes et Vandebrouck (2008), « une base d'exercices en ligne (BEL) pour les mathématiques est une ressource Internet [qui] a les caractéristiques suivantes :

- il s'agit d'une ressource élaborée à des fins d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques ;
- elle est disponible en ligne et seul un navigateur Internet est nécessaire ;
- elle est constituée d'exercices de mathématiques organisés selon un certain classement ;
- à chaque exercice est associé un environnement qui peut comporter des aides de différents types, des outils (graphiques, calculatrices…), du cours, mais aussi des analyses de réponses ou la solution complète de l'exercice ».

Les bases d'exercices en ligne présentent différents avantages par rapport à des listes d'exercices papier-crayon : d'une part, l'élève a la possibilité d'avoir un feedback direct sur ses réponses (correctes ou incorrectes) pour ensuite les reprendre et les modifier (avec une aide complémentaire, selon les bases d'exercices en ligne) et d'autre part l'enseignant peut adapter une liste d'exercices correspondant aux besoins de ses élèves et garder trace de leur performance (exemple de la plateforme LaboMep, développée par l'équipe de Sésamath et qui est fréquemment utilisée en collège). L'activité mathématique des élèves dépend de la sélection des exercices, de la progressivité des parcours organisés et de la qualité des feedbacks proposés, qualité liée à la prise en compte préalable des résultats des études didactiques. Nous n'avons pas cherché à dresser un inventaire exhaustif de l'ensemble des exerciseurs ou des sites qui proposaient des exercices en ligne, sur ordinateurs ou sur tablettes. Différents sites académiques de mathématiques ont recensé de telles ressources[20] ou ont conçu eux-mêmes des exercices en ligne à destination des collégiens ou des

[20] Par exemple, le site de l'académie de Nacy-Mets https://www4.ac-nancy-metz.fr/mathematiques/SPIP/spip.php?article17

lycéens (Euler dans l'académie de Versailles par exemple). Même s'il est nécessaire de conduire des recherches plus approfondies sur l'impact des bases d'exercices en ligne sur l'activité réelle des élèves, de « nouvelles tâches sont rendues possibles par le travail sur les BEL » (Cazes & Vandebrouck, 2008, p. 176) et de réels apprentissages sont constatés à condition que l'enseignant exerce « une vigilance spécifique » lors de l'utilisation de BEL (Artigue & Gueudet, 2008).

Le développement des tablettes a vu aussi l'apparition de nombreuses applications permettant de travailler différentes notions mathématiques[21] (par exemple, les applications développées par des éditeurs de manuels ou *ITroochPrimaire* ou *MyBleeMaths*) ; elles viennent en complément de sites tels que *Calcul@tice* (permettant de travailler le calcul mental) ou du *Matoumatheux*, qui propose des exercices du CP à la 2nde sur l'ensemble des domaines des programmes.

7. Logiciels de diagnostic

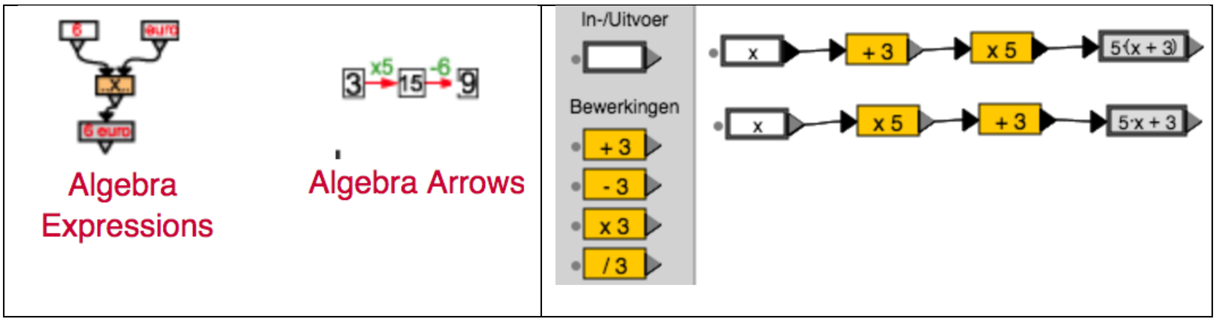
Un logiciel de diagnostic vise à évaluer les connaissances et compétences mathématiques d'un élève préalablement à un enseignement donné. Par exemple, le logiciel *Pépite*, conçu à partir d'une analyse épistémologique et didactique du domaine algébrique, vise à analyser les connaissances et compétences d'un élève en calcul littéral au cycle 4 et en début de seconde (Grugeon, 1997 ; Grugeon-Allys *et al.,* 2012). Contrairement à une évaluation des réponses en termes correct/ incorrect, *Pépite* analyse de façon automatique la procédure utilisée pour résoudre un problème ou faire un calcul littéral, en précisant le raisonnement réalisé, la catégorie d'erreurs s'il y a lieu, puis construit le profil de l'élève en indiquant le niveau de compétence algébrique relativement aux compétences Représenter, Modéliser, Raisonner, Calculer. Le logiciel propose aussi des exercices en fonction des besoins d'apprentissage de l'élève.

8. Applets *Wisweb*

Ce sont des ressources basées sur les technologies d'Internet et accessibles en ligne, développées par le laboratoire Freudenthal de l'université d'Utrecht (Pays-Bas). *Wisweb* associe par exemple plusieurs représentations pour développer la conceptualisation d'objets de l'algèbre, comme les expressions, en appui sur la visualisation et l'articulation de différents modes de représentation (Boon & Drijvers, 2006). Les nouvelles tâches proposées permettent à l'élève de construire différents systèmes entrée-sortie et d'explorer leur fonctionnement, numériquement et graphiquement par exemple, construire une expression algébrique ou vérifier l'équivalence d'expressions algébriques (Figure 6) (Boon & Drijvers, 2006). Les applets étant flexibles et facilement modifiables, l'enseignant peut construire des tâches pour ses élèves, les paramétrer et il peut suivre leur travail à distance pour l'évaluer.

[21] Le contenu mathématique des applications étant très variable d'une application à l'autre, une étude complémentaire serait nécessaire pour s'assurer *a minima* de l'adéquation entre le programme et le contenu de l'application.

Figure 6. Exemples d'applets extraites de Wisweb

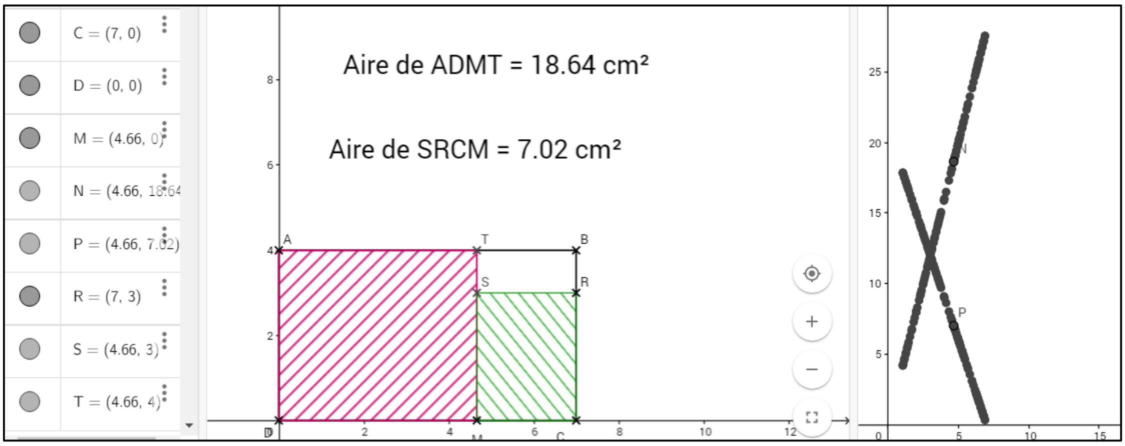


9. Logiciels intégrant un tableur, un *CAS*, un environnement dynamique de registres de représentations

Ce sont des logiciels interactifs de mathématiques destinés à l'apprentissage et à l'enseignement des mathématiques, essentiellement à partir du secondaire. Les environnements dynamiques libres *Geogebra*, *XCAS*, en sont des bons exemples. Ils intègrent un tableur, des applications interactives en algèbre élémentaire, en statistiques, en calcul formel, des grapheurs 2D ou 3D. Une de leurs fonctionnalités concerne la gestion de représentations graphiques de fonctions avec des outils pour adapter les unités du repère au problème en cours (zoom), pour appliquer d'autres outils du calcul formel (recherche d'une solution d'équation, d'un extremum...). Ces logiciels permettent de mettre en relation différentes représentations des objets mathématiques (nombres, équations, fonctions, etc.) : des écritures numériques, des expressions algébriques, des représentations graphiques, des figures géométriques (dimensions 1 à 3), des tableaux. Ces logiciels donnent accès à de nouveaux types de tâches ou de nouvelles techniques permettant de résoudre des types de tâches existants (équivalence d'expressions, résolution d'équations, etc.) et d'aborder par de nouveaux accès la conceptualisation de concepts en jeu.

Concernant la représentation graphique d'une fonction, *GeoGebr*a peut ainsi tracer la représentation graphique d'une fonction donnée à partir de son expression algébrique (aspect statique de la représentation), mais il est aussi possible de montrer un aspect dynamique, avec un tracé point par point de la fonction (Figure 7). D'autres fonctionnalités concernent l'expérimentation afin de formuler des conjectures, des interprétations de concepts à partir des visualisations nouvelles, dynamiques et interconnectées, et des moyens pour les prouver. L'utilisation d'un curseur ou comme dans l'exemple de la figure 5, du déplacement d'un point, permet de distinguer ce qui est variable de ce qui est fixé. Dans l'exemple suivant, les points A, B, C D sont fixes et l'aire de ABCD est fixe aussi ; l'abscisse du point M est variable et les aires de ADMT et SRCM varient en fonction de l'abscisse de M. Trouver la position du point M pour laquelle ces deux aires sont égales peut être résolu numériquement ou graphiquement.

Figure 7. Exemples de représentation point par point de deux fonctions à partir de la situation géométrique initiale

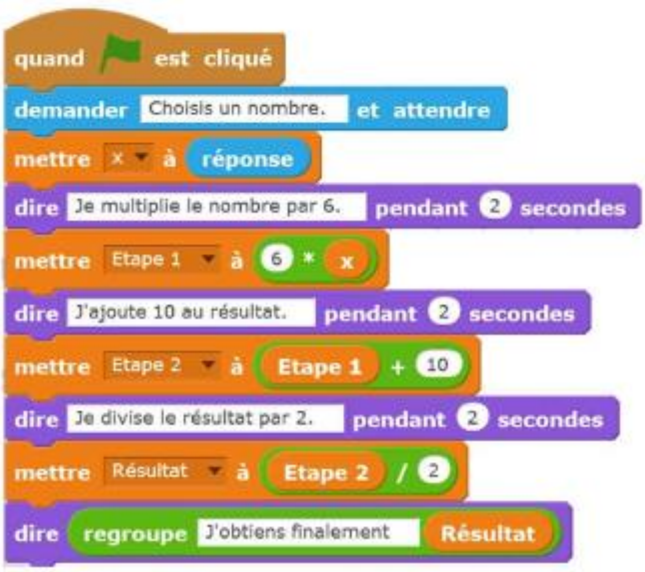


*Alnuse*t, quant à lui, est un environnement dynamique et interactif qui vise à améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, des ensembles de nombres et des fonctions dans le secondaire. Au-delà d'un calculateur algébrique et d'un grapheur, il développe des potentialités sémiotiques actuelles de la technologie, en particulier, une représentation de la variable comme point mobile sur la droite des nombres, ce qui facilite le repérage de types d'erreurs (Cerulli & Mariotti, 2002 ; Chaachoua *et al.,* 2012)

10. Logiciels de programmation

Ces logiciels visent à développer l'algorithmique et les concepts associés à travers l'écriture d'algorithmes et leur programmation. Le logiciel *Scratch*, développé par le *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), permet à des élèves de primaire et des débutants en informatique l'apprentissage de l'écriture d'algorithmes ; le principe est d'assembler des blocs afin de former des groupes d'instructions comme le montre l'exemple suivant, extrait du sujet de DNB 2017 à Pondichéry.

Figure 8. Programmation d'un programme de calcul à l'aide de Scratch



Le logiciel *Python* est un langage de programmation qui favorise la programmation en appui sur la recherche préalable d'algorithme. L'algorithmique peut ainsi être considérée comme un outil de résolution de problèmes ou comme un objet d'étude des mathématiques (Modeste, 2012, p. 59) ; plus spécifiquement, dans sa thèse, Briant (2013) a montré l'intérêt de l'algorithmique dans la reprise de l'algèbre en seconde, en particulier, pour la résolution des équations, à condition que la prise en main du logiciel de programmation soit suffisamment installée.

Pour conclure, cette revue des outils numériques éclaire les potentialités fortes des outils numériques pour l'apprentissage et l'activité arithmétique et algébrique en lien avec plusieurs axes :

- l'expérimentation en mathématiques pour conjecturer des régularités, trouver des contre-exemples, vérifier des calculs ;
- la manipulation directe pour travailler la structure des expressions et le contrôle sémantique d'un calcul ;
- le développement des raisonnements s'appuyant sur l'usage de propriétés ;
- le développement de la visualisation et de l'articulation entre registres sémiotiques ;
- l'algorithmique et la programmation ;
- et la simulation.

C. Dimension « instrumentale »

Qu'en est-il des éléments à prendre en compte pour organiser la genèse instrumentale des outils présentés précédemment ? Nous donnons deux exemples. L'usage de la calculatrice demande, pour l'enseignant et les élèves, d'appréhender les différentes fonctionnalités en lien avec les concepts travaillés (priorité opératoire et parenthèse, mémoire, etc.). Pour les calculatrices graphiques, les techniques d'interprétation d'un graphique sont différentes selon l'environnement papier-crayon ou l'environnement calculatrice (interprétation des points de la courbe, usage de fenêtre, zoom, etc.) (Guin & Trouche, 2002). L'usage d'un tableur nécessite aussi une genèse instrumentale pour mobiliser ses différentes fonctionnalités en lien avec les situations proposées : variable, formule, recopie, etc. (Haspekian, 2005). Une des difficultés concerne les notions de variable cellule et de formule tableur : elles sont différentes des variables et formules mathématiques et font ainsi que la complexité de l'usage du tableur est souvent sous-estimée (par exemple dans le cas de la figure 3, distinguer A2 + B2 + C2 et x +4 x + (4 x+10)).

D. Dimension « situation d'apprentissage – enseignants »

Nous voudrions aborder aussi des difficultés que les élèves et les enseignants peuvent rencontrer dans l'usage des outils numériques. Après des postulats optimistes quant à l'intégration des outils numériques en classe, des questions sont apparues au cours du temps, au fur et à mesure que les outils étaient utilisés dans des classes non expérimentales (Lagrange, 2000 ; Hoyles & Lagrange, 2010). Les situations intégrant des environnements dynamiques sont différentes de celles en environnement papier–crayon et mettent en jeu des types de tâches et des techniques différentes. Il apparaît vite qu'il ne suffit pas d'adapter des situations mathématiques classiques : ces nouvelles situations doivent prendre en compte les potentialités et les contraintes des nouveaux outils, par exemple, en ce qui concerne la manipulation directe, la visualisation et l'articulation entre registres sémiotiques, le développement du raisonnement et du contrôle sémantique, etc. C'est une complexité nouvelle pour les enseignants qui doivent connaître les outils numériques, concevoir de nouvelles situations à adapter fréquemment en fonction de l'évolution des interfaces, articuler les types de tâches et les techniques dans les environnements papier / crayon et numérique, mettre en place une nouvelle économie entre travail de la technique et travail conceptuel (Hoyles & Lagrange, 2010), trouver de nouvelles modalités de gestion des interactions en classe intégrant les outils numériques, en particulier à travers le processus d'orchestration instrumentale (Trouche, 2005a, 2005b).

Processus d'orchestration instrumentale (Trouche, 2005a)

« Si l'on parcourt les différents types de scénarios pédagogiques qui sont proposés dans des documents d'accompagnement de situations mathématiques, un élément apparaît transparent, comme s'il allait de soi, alors que c'est une des sources de difficulté majeure : quelle est la gestion didactique des artefacts présents dans l'environnement ? Pour mettre en évidence un manque et désigner sa nécessité, il faut un nom : j'ai nommé orchestration instrumentale cette gestion didactique […]. Elle n'est pas seulement liée à un environnement donné : elle dépend aussi de la situation que l'on veut mettre en œuvre et de ses propres intentions didactiques. »

Une orchestration instrumentale suppose plusieurs configurations et plusieurs modes d'exploitation, par exemple, lors d'une mise en commun après recherche d'un problème s'appuyant sur une calculatrice graphique, un élève « sherpa » rend compte de sa démarche et de ses résultats à partir de sa calculatrice qui est rétro-projetée.

Face à cette complexité, les enseignants se montrent résistants à l'utilisation des nouvelles technologies, que ce soit au primaire avec les calculatrices (Assude, 2007) ou au secondaire avec l'intégration d'outils numériques en général, et l'évolution de leurs pratiques se heurte par ailleurs à l'inadéquation des pratiques de formation (Trouche, 2005a). Avant de dresser un panorama des pratiques actuelles, nous étudions d'abord quelles sont les prescriptions actuelles à travers une étude des instructions officielles (programmes, documents ressources ou d'accompagnement) puis présentons une analyse de manuels.

III. État des lieux des prescriptions en France ces vingt dernières années

A. Méthodologie

Afin de dresser un état des lieux de ce qui est prescrit aux enseignants relativement à l'usage des outils numériques pour enseigner les nombres et l'algèbre, nous avons d'abord étudié les programmes de l'école et du collège, et des documents les accompagnant (quand il en existait), à partir de 1985[22]. Pour ce faire, nous avons d'abord relevé les différents outils numériques évoqués dans ces documents, puis, relativement aux dimensions d'analyse que nous avons citées en introduction, nous avons analysé si ces documents officiels mettaient en avant l'intérêt de ces outils pour travailler différentes représentations d'un même objet (dimension sémiotique) et s'ils proposaient de nouveaux types de tâches ou de nouvelles techniques de résolution permises par ces outils (dimension épistémologique et institutionnelle). Relativement à la dimension instrumentale et aux « situations », nous avons cherché si des injonctions ou des propositions étaient faites pour favoriser le processus de genèse

[22] Toutes les références bibliographiques liées aux programmes sont citées en bibliographie et nous ne les indiquons pas systématiquement dans le corps du texte.

instrumentale et plus généralement d'orchestration. Nous conclurons cette partie par une exploration des sujets du diplôme national du brevet afin de montrer l'évolution, selon les années, de la place accordée aux outils numériques.

Une deuxième partie de notre analyse a porté sur des manuels scolaires et les guides de l'enseignant les accompagnant (quand ils existent). Nous avons choisi de nous centrer sur quelques manuels de CM1 pour l'école et de 4e - 3e pour le collège et n'avons pas cherché à faire une étude exhaustive, mais plutôt à rechercher quelques traits saillants de l'utilisation prescrite des outils numériques dans des collections à profils différents (manuels écrits par des enseignants ou par des chercheurs en didactique). Nous avons aussi recherché, en lien avec les programmes, s'il y avait une évolution des prescriptions pour une même collection de manuels mais avec des années d'édition différentes. La liste des manuels étudiée figure en bibliographie.

D'un point de vue méthodologique, les grilles que nous avons utilisées nous permettent de lister les outils numériques proposés dans les manuels et de mener une analyse selon deux dimensions :

- La prescription d'utilisation d'outils numériques conduit-elle à proposer de nouveaux types de tâches et de nouvelles techniques qui leur sont associés ? En particulier, est-ce que les outils numériques proposés permettent de construire des représentations différentes des objets mathématiques étudiés ?
- Comment le processus de genèse instrumentale est-il pris en compte (s'il l'est) ? Des indications sont-elles données à l'enseignant pour concevoir et mettre en œuvre les situations intégrant les outils numériques en prenant en compte à la fois la genèse instrumentale et les contenus mathématiques ?

1. À l'école élémentaire

C'est à partir de 1995 que la calculatrice est évoquée dans les programmes[23] : son usage est ainsi prévu au cycle des approfondissements (à partir du CE2) pour pratiquer le calcul exact ou approché sur des nombres entiers naturels ou décimaux « dans les situations où son usage s'avère pertinent » (p. 39). À partir des programmes de 2002, l'utilisation de la calculatrice est prescrite systématiquement à partir du cycle 2 avec des objectifs plus ou moins explicitement formulés selon les années, mais où une utilisation « à bon escient » (programmes de 2002, 2008) est régulièrement mise en avant. Le calcul instrumenté apparaît donc comme un autre moyen de calcul (au même titre que le calcul mental et que le calcul posé), qualifié d'« ordinaire » (programmes de 2002, p. 83). Par ailleurs, il est souligné, notamment en 2002, l'intérêt de la calculatrice dans la résolution de problèmes notamment lorsque l'élève « ne dispose pas d'une méthode de calcul efficace » (p. 53) ou qu'il ne peut calculer mentalement le résultat (p. 83).

Avec l'utilisation de la calculatrice, de nouveaux types de tâche apparaissent logiquement : vérifier les résultats d'un calcul, posé ou mental, et utiliser sa calculatrice pour trouver un résultat (programmes de 2008 et document ressource de 2018 « le calcul aux cycles 2 et 3 »). Cette nouvelle technique de calcul amène à préciser, dès 2002, que les attentes relatives au calcul posé ne sont plus dans une application très experte des techniques mais sont désormais orientées vers la compréhension de ces techniques. La calculatrice peut aussi être un instrument dont on cherche à comprendre certaines fonctionnalités, un support à l'exploration de phénomènes numériques, mais aussi la source de

[23] Il n'est fait aucune mention de l'usage d'un outil numérique dans les programmes de l'école de 1985.

problèmes et d'exercices (document d'accompagnement « Utiliser les calculatrices en classe », 2002). Ainsi, dans une dimension institutionnelle, la calculatrice apparaît comme un nouvel instrument et comme un nouveau contexte pour résoudre des problèmes.

Les fonctionnalités de la calculatrice à faire travailler à l'école et explicitement mentionnées dans les programmes sont : les « touches opérations » (programmes de 2002, 2008 et 2015), les parenthèses (programmes de 2002 et 2015), les « touches mémoire » et le facteur constant (programmes de 2002). Le document ressource « Le calcul aux cycles 2 et 3 » de 2016 précise que le calcul instrumenté doit être pratiqué régulièrement pour être efficace. En revanche, quels que soient les programmes, aucune indication n'est donnée quant à la genèse instrumentale* et quant aux situations à proposer et à leur mise en œuvre en classe. Seul le document d'accompagnement des programmes de 2002 relatif à l'utilisation des calculatrices en classe apporte des précisions à l'enseignant pour utiliser les calculatrices en classe : il propose des situations d'introduction et d'utilisation « à bon escient », donne des pistes pour gérer leur utilisation au quotidien et décrit plus précisément les fonctionnalités listées dans les programmes. Les exemples d'activités proposées, accompagnées de pistes de mises en œuvre, intègrent à la fois la genèse* de l'instrument et les contenus mathématiques, et constituent par conséquent une ressource riche pour l'enseignant.

En complément de la calculatrice, les programmes de 2015 évoquent aussi d'autres outils numériques comme « les logiciels de calcul et de numération » (préambule du programme de cycle 3) et le tableur (document ressource de 2016 « Le calcul aux cycles 2 et 3 »), mais sans aucune autre précision pour l'enseignant.

2. Au collège

C'est à partir des programmes de 1985 que l'usage de l'ordinateur est prescrit, afin de « dégager progressivement les notions de codage et d'algorithme » (programmes de 5e à 3e) ; plus précisément : « C'est lorsque l'élève écrit des instructions ou l'exécution par autrui […] ou lorsqu'il programme un ordinateur pour un traitement voulu, que l'obligation de précision doit apparaître comme une évidence nécessaire ». (p. 82)

Les programmes de 1998 décrivent les potentialités des outils numériques pour prendre en compte « différentes formes d'expression autres que la langue usuelle (nombres, figures, graphiques, formules tableaux, schémas) ». En conclusion, ils indiquent que « leur mise en œuvre sera grandement facilitée par l'emploi d'instruments modernes de calcul, de dessin et de traitement (calculatrices, ordinateurs) ». Les programmes de 2008 développent un paragraphe sur « la place des technologies de l'information et de la communication » (p. 4) en lien avec le B2i (Brevet informatique et internet) en soulignant :

> *l'importance du choix du logiciel en fonction de la nature des données saisies ou capturées et de la forme du résultat souhaité (utilisation d'un tableur, expérimentation assistée par ordinateur, numérisation et traitement d'images, exploitation de bases de données, réalisation de comptes rendus illustrés). Les simulations numériques sont l'occasion d'une réflexion systématique sur les modèles qui les sous-tendent, sur leurs limites.* (p. 4)

Dans tous les programmes 1998, 2008, 2015, 2018, dans les domaines « Travaux numériques » (« Nombres et calcul » à partir de 2008), « Organisation et gestion de données. Fonctions », l'emploi de la calculatrice est prescrit systématiquement en lien avec le calcul exact ou approché, de la 6e à la

3^e. L’utilisation des ordinateurs est prévue pour apporter « une aide importante pour l’apprentissage des mathématiques » avec des logiciels d’aide à l’apprentissage du calcul (mental, manipulation d’expressions) en 6^e, des tableurs-grapheurs en statistiques (5^e à 3^e) pour donner accès à une nouvelle manière (« façon particulière » en 2008) de désigner une variable (« par l’emplacement de la cellule où elle se trouve dans le tableau » en 2008), des logiciels de calcul formel (pour le calcul du PGCD en 3^e en 1998), et des logiciels de géométrie dynamique à partir de 2008, pour faire des représentations et des simulations.

Les documents d’accompagnement des programmes précisent les attendus et proposent des exemples de situation où les outils numériques sont une plus-value. Par exemple, le document d’accompagnement « Du numérique au littéral » (1995) donne un exemple d’utilisation d’un tableur pour résoudre une équation du premier degré, ici, $26x + 22 = 6x + 149$, sans insister sur les limites. Celui sur « Fonctions – Comprendre et utiliser la notion de fonction » en 2016 précise que « l’usage du tableur est évidemment pertinent et les nouvelles possibilités offertes par l’étude de l’algorithmique et de la programmation donnent des ouvertures supplémentaires » (p. 3). Le document « Utiliser le calcul littéral » (2016) contient un paragraphe sur le rôle des logiciels et indique que « l’utilisation de logiciels, dans le cadre de la résolution de problèmes, favorise la construction progressive des notions de variable et de paramètre. (…) Les variables utilisées dans les algorithmes, en particulier dans les boucles, participent du même objectif, de même que l’utilisation d’un curseur en géométrie dynamique » (p. 7). Ce texte pointe aussi « l’utilisation raisonnée d’un logiciel de calcul formel (qui) peut aider à mettre en évidence le rôle des parenthèses dans l’expression d’une fonction » ainsi que « l’utilisation de logiciels, en classe ou en dehors de la classe, (est un) levier majeur pour la recherche et l’émission de conjectures que le calcul littéral permettra ensuite de démontrer » (p. 7).

En 2016, un nouvel enseignement de l’informatique est introduit en lien avec l’algorithmique pour « acquérir des méthodes qui construisent la pensée algorithmique et développent des compétences dans la représentation de l’information et de son traitement, la résolution de problèmes, le contrôle des résultats » (p. 369). Ce programme insiste sur « les pratiques d’investigation (essai-erreur, conjecture-validation, etc.) [qui] sont essentielles et peuvent s’appuyer aussi bien sur des manipulations ou des recherches papier-crayon, que sur l’usage d’outils numériques (tableurs, logiciels de géométrie, etc.). » (p. 368). Il en est de même en ce qui concerne « [l]es changements de registre favorisés par l’usage de logiciels polyvalents tels que le tableur ou les logiciels de géométrie dynamique » (p. 369).

Avec l’utilisation de la calculatrice, les nouveaux types de tâches introduits à l’école sont complétés : comparer les diverses modalités de fonctionnement des calculatrices pour travailler les priorités opératoires (6^e), pour choisir l’écriture appropriée d’un nombre selon la situation (3^e en 2008), pour rechercher la valeur exacte ou approchée de la racine carrée d’un nombre positif (3^e en 2008, 2016). Il en est de même pour les tableurs-grapheurs en statistiques et dans le domaine des fonctions : proposer des situations plus riches, sur des données réelles ou expérimentales, avec des grands effectifs, utiliser différents modes de représentation et passer de l’un à l’autre (numérique, graphique, algébrique) en 2008 et 2016. Les nouveaux types de tâches qui visent à faire émettre des conjectures et à donner du sens aux définitions et aux théorèmes à l’aide d’un outil numérique sont introduits pour la 3^e dans les programmes (1998 (p. 106), 2008, 2016). Les types de tâches relatifs à l’enseignement de l’informatique réapparaissent en 2016 : écrire un algorithme, mettre au point et exécuter un programme.

Quels que soient les programmes et les documents d'accompagnement, peu d'indications sont apportées en ce qui concerne la genèse et l'orchestration instrumentales*. En 1998, aucune indication n'est donnée quant au choix des situations à proposer et à leur mise en œuvre en classe. En 2008, une première référence concerne les pratiques en classe avec la possibilité d'utiliser un vidéoprojecteur ou des ordinateurs « en fond de classe » ou en salle informatique. En lien avec le thème « Algorithme et programmation », des pistes de dispositifs sont proposées pour « mettre en place des modalités d'enseignement fondées sur une pédagogie de projet, active et collaborative », mais peu d'indications explicites sont apportées sur le choix des situations, ni sur des modalités pragmatiques de gestion de classe, articulant travail autonome des élèves et gestion des interactions en classe intégrant les outils numériques, à travers le processus d'orchestration* instrumentale. Le travail personnel des élèves peut donner lieu à la recherche de documents en ligne et « lorsque les situations s'y prêtent, des échanges de messages et de données sont réalisés par l'intermédiaire des réseaux » (2008, p. 6). Le document d'accompagnement « Calcul littéral » (2016) aborde la gestion de la résolution de problèmes en classe pour le calcul littéral et distingue trois phases, de modélisation, de traitement formel et de communication de la solution. Ce texte indique que « l'utilisation d'un logiciel de calcul formel par les élèves n'ayant pas une habileté technique suffisante, peut leur permettre de différer le travail technique, si l'objectif est de mettre l'accent sur l'usage de l'algèbre comme outil de mathématisation de l'énoncé » (p. 6). Si les derniers programmes insistent sur l'utilisation de ressources multimédias en ligne pour faciliter le travail personnel, la collaboration entre élèves, en revanche, peu d'informations sont données pour accompagner l'enseignant à la mise en œuvre de situations intégrant les outils numériques.

Enfin, une analyse de l'ensemble des sujets du brevet proposés depuis ces dix dernières années montre que des exercices ayant comme support une feuille de calcul extraite d'un environnement tableur, (comme dans la Figure 2) sont régulièrement proposés depuis 2009, mais c'est à partir de 2012 qu'environ la moitié des sujets proposent un exercice impliquant un tableur et où il est en général demandé à l'élève de produire ou de reconnaître une formule à écrire dans une cellule. Nous avons par ailleurs observé que depuis 2017, la quasi-totalité des sujets proposaient un exercice avec *Scratch*.

B. Analyse de manuels

Les résultats de l'analyse de manuels (dont la liste est donnée en bibliographie) sont organisés afin de présenter d'abord les outils numériques prescrits dans les manuels en lien avec les types de tâches les mettant en jeu, les techniques de résolution et les modes de représentations que ces outils permettent ; puis, est indiquée la façon dont le processus de genèse instrumentale* est ou non pris en compte ainsi que les indications de mise en œuvre proposées à l'enseignant.

Les manuels de l'élève ont beaucoup évolué depuis 1993, que ce soit à l'école ou au collège : leur conception prenant en compte les outils numériques et les situations les mobilisant, de nouveaux supports à destination des élèves et des professeurs apparaissent. Cette évolution est visible dans les pages de présentation des manuels, avec des objectifs nouveaux. Pour les professeurs, de nouvelles ressources sont proposées à travers des CD-ROM ou des manuels numériques à vidéoprojeter, d'autres ressources multimédias comme des fiches adaptables, imprimables, des QCM interactifs, des fichiers numériques téléchargeables (par exemple, avec *Geogebra*, *Scratch*, *LibreOffice*, etc.), des vidéos de cours, des applications pour tablettes, etc. Ces dernières ressources sont aussi à destination des élèves pour favoriser leur autonomie et leur activité mathématique. C'est le cas pour l'ensemble des dernières éditions. L'évolution de ces supports et les changements de programme depuis 1993 s'accompagnent-ils d'une évolution dans les prescriptions concernant le domaine numérique, la gestion de données et les fonctions ?

1. Manuels de l'école élémentaire

Tous les manuels étudiés sont accompagnés d'un guide de l'enseignant qui décrit plus ou moins précisément les choix didactiques des auteurs sur le calcul instrumenté. Tous font référence aux programmes et soulignent la nécessité d'avoir un usage raisonné des outils numériques, mais certains guides, comme ceux des collections *Cap Maths* et *Euromaths-Opérations Maths* apportent des précisions sur l'articulation entre calcul instrumenté, réfléchi et posé en appui sur des réflexions didactiques et sur les programmes.

Quelle que soit l'année de publication, l'ensemble des manuels de CM1 étudiés propose des situations avec utilisation de la calculatrice, mais seul *Cap Math*s envisage cette dernière comme un outil possible de différenciation. Tous les manuels proposent une séance sur l'utilisation des touches ON/OFF, +, -, ×, = ou, *a minima* et ils les font fonctionner dans les exercices. Les types de tâches proposés sont dans ce cas classiques, à savoir : calculer ou vérifier un résultat. Dans *Outils pour les maths* ou *Archimaths*, ce sont d'ailleurs les deux seuls types de tâches qui sont proposés pour l'utilisation de la calculatrice. Dans les manuels *Cap Maths, Euromaths-Opération Maths* (2009 et 2016), c'est aussi l'occasion de travailler les propriétés de la numération décimale avec des tâches demandant par exemple de passer de l'affichage d'une écriture chiffrée à celui d'une autre en ajoutant ou retranchant un nombre entier de dizaines, de centaines, de dixièmes, etc. *Pour comprendre les maths* en 2008 envisage une utilisation régulière et raisonnée de la calculatrice dans la résolution de problèmes à étapes proposés en fin de chacune des périodes[24].

La première séance dédiée entièrement à un travail autour de la calculatrice est prévue dans la première période de l'année (entre septembre et les vacances d'automne) quelle que soit la collection et quelle que soit l'année (2008 ou 2016). En revanche, l'utilisation de la calculatrice est évoquée parfois dès les premières séances, pour calculer ou vérifier un résultat et sans faire l'objet d'une séance spécifique. L'intégration de la calculatrice sur l'ensemble de l'année est très variable d'un manuel à l'autre ; tous proposent de découvrir certaines fonctionnalités lors de séances spécifiques, mais deux d'entre eux seulement envisagent son utilisation de façon régulière, notamment pour calculer ou vérifier des résultats obtenus par calcul posé. Dans ce cas, il est indiqué à l'élève qu'il peut utiliser sa calculatrice soit par le biais d'une phrase dans la consigne, soit par le biais d'un pictogramme, comme dans *Pour comprendre les maths* (2011 et 2017). *Cap Maths* (2010 et 2017) précise au début du guide de l'enseignant, que c'est au professeur de juger s'il considère pertinente l'utilisation de la calculatrice et par conséquent, il est spécifié quand son usage est interdit (sur des séances de calcul notamment) et non quand elle est autorisée. Ainsi la première séance d'utilisation de la calculatrice est dédiée à l'organisation de calculs et à l'usage des parenthèses afin que l'élève puisse régulièrement exploiter cette fonctionnalité au cours de l'année.

Comme nous l'avons souligné, trouver le quotient et le reste d'une division euclidienne est plus complexe, notamment si la calculatrice ne possède pas de touche spécifique. *Euromath – Opération*

[24] La plupart des manuels de l'école élémentaire découpent l'année scolaire en cinq périodes et construisent leur progression selon ce découpage.

maths (2009 et 2016) envisage spécifiquement cet apprentissage en lien avec le calcul réfléchi, alors que d'autres manuels ne font découvrir que la touche ÷ sans expliciter comment retrouver le quotient et le reste de la division à partir du résultat produit par la calculatrice. Par exemple, dans la division euclidienne de 155 par 4, le quotient est de 38 et le reste est de 3 ; pour le calcul 155 ÷ 4, la calculatrice affiche 38,75, et ne permet de trouver directement la valeur du reste. Par ailleurs, la fonctionnalité « facteur constant » (pour répéter plusieurs fois une opération) évoquée dans les programmes de 2008 est prise en compte uniquement dans *Outils pour les maths* (2008) et *Cap Maths* (2008), mais elle ne subsiste pas dans les manuels parus après les programmes de 2016.

Les institutionnalisations autour des fonctionnalités et des usages de la calculatrice sont très variables et sont en lien avec les types de tâches proposés dans les séances dédiées. *Archimaths* (2018) ne propose pas de trace écrite. *Outils pour les maths* fait une synthèse sous la forme de « je retiens » en listant les fonctions des touches basiques (opérations, =, ON/OFF et CE) et les types de tâches (calculer et vérifier), en mettant en garde l'élève pour qu'il évalue toujours un ordre de grandeur de son résultat. *Cap Maths* dans le *Dico Math* (2010) revient en plus sur le facteur constant et sur les touches mémoire de la calculatrice, en lien avec l'usage des parenthèses (pour effectuer de longs calculs). Dans *Euromaths et Opération maths*, la synthèse de la séance dédiée à la calculatrice se fait, en plus des fonctions de base, sur la façon de calculer une division euclidienne.

Les manuels étudiés et parus après les programmes de 2015 proposent tous, pour le CM1, des situations avec tableur avec des objectifs mathématiques et de genèse instrumentale* divers, comme par exemple :

- utiliser la poignée de recopie pour écrire des nombres de 5 en 5, de 1 000 en 1 000, etc. ;
- résoudre des problèmes en apprenant à saisir des formules de calcul dans des situations de commandes ou de comparaisons de tarifs ;
- vérifier à l'aide d'une feuille de calcul et de la fonction « somme » des calculs réalisés dans un tableau ;
- insérer un diagramme.

Si l'ensemble de ces exemples montrent une plus-value des fonctionnalités du tableur sur les apprentissages mathématiques des élèves, d'autres sont davantage centrés sur l'utilisation du tableur : par exemple, demander à l'élève de colorier des cellules pour représenter 3/4 d'une unité (l'unité correspondant à quatre cellules accolées dont les contours sont surlignés) (*Nouveaux outils pour les maths* 2016, CD-Rom) n'apporte *a priori* rien de plus qu'un coloriage à la main sur l'apprentissage des fractions mais permet de découvrir certaines fonctionnalités d'un tableur et de le prendre en main.

Les synthèses proposées en conclusion des séances dédiées à l'utilisation du tableur, quand elles existent, sont du même type que celles sur la calculatrice et reprennent à la fois les fonctionnalités du tableur et les types de tâches dans lesquels il peut être utilisé. Par exemple *Les nouveaux outils pour les maths* (2016) expliquent que le tableur peut être utilisé pour calculer et résoudre des problèmes sous forme de tableaux et que, pour réaliser un calcul, l'expression dans la cellule, doit commencer par le signe « = ».

En ce qui concerne l'orchestration d'une séance intégrant une calculatrice ou un tableur, l'accompagnement de l'enseignant pour la mise en œuvre en classe en lien avec les mathématiques en jeu n'a pas la même précision dans sa description, selon la collection (cette observation n'est pas spécifique aux séances intégrant des outils numériques, la précision dans la description du déroulé de la séance est très variable d'un guide à l'autre). La difficulté liée à la gestion d'une pluralité de modèles de calculatrices au sein d'une classe n'est pas évoquée, alors qu'elle peut être un frein à leur utilisation en classe et comme nous l'avons déjà souligné, les synthèses à faire sur les fonctionnalités de la calculatrice en lien avec les savoirs en jeu ne sont pas toujours explicitées auprès des enseignants. Nous n'avons pas observé d'évolution sur ce point entre les collections parues après les programmes de 2008 et celles de 2016. Nous soulignons enfin que l'usage de la calculatrice (comme celui du tableur) est rarement évalué, quel que soit le manuel étudié.

Ce rapide panorama nous montre combien l'intégration des outils numériques est variable d'une collection à l'autre (de quelques séances dédiées sur quelques tâches de calcul ou de vérification à une utilisation plus régulière pour organiser et résoudre des problèmes). La plus-value apportée par ces deux outils (calculatrice et tableur) mériterait sûrement d'être davantage mise en avant pour que les élèves en comprennent leur utilité (au-delà de leurs fonctions de vérification) et que les enseignants soient convaincus de les intégrer régulièrement dans leur enseignement.

2. Manuels de collège

Nous avons choisi d'organiser l'analyse selon deux problématiques.

1. Pour une collection donnée de manuels, comment les auteurs ont-ils pris en compte l'évolution des programmes ? Nous avons choisi d'étudier la collection *Transmath* pour laquelle la direction de la collection n'a pas changé.
2. Pour les manuels de 2016, prenant en compte les programmes de 2015, les auteurs de manuels de collections chez différents éditeurs ont-ils défini les mêmes prescriptions ? Quels en sont les points communs ? Quelles en sont les différences ? Nous avons étudié les collections *Transmath*, *Delta*, *Kiwi*, *Indigo*.

a. Évolution des prescriptions d'une même collection de 1993 à 2016

De 1993 à 2016, les manuels de la collection *Transmath*, sont structurés pour chaque chapitre en plusieurs rubriques : une vérification des acquis, des activités d'introduction, le cours, des exercices d'entraînement ou d'approfondissement, des « TP » intégrant les outils numériques et un bilan. Même si le nom des rubriques évolue, leur organisation est stable. Qu'en est-il pour les prescriptions ?

Aucun des guides de l'enseignant qui accompagne les manuels étudiés en 4^{e} ou 3^{e} n'indique les choix didactiques des auteurs sur l'usage des outils numériques. À partir de 2003, leur usage est abordé dans l'en-tête des manuels (calculatrice, puis tableur et logiciel de géométrie dynamique), en précisant d'une façon guidée les fonctionnalités d'un tableur (cellule, variable, poignée de recopie, formules de calcul, représentation graphique, etc.) Cet usage est proposé sur des tâches mathématiques comme le calcul d'une expression pour une valeur de variable, le calcul de la somme de cinq entiers consécutifs puis la conjecture d'une propriété.

Pour l'ensemble des chapitres couvrant les domaines mathématiques étudiés, nous établissons les constats suivants. Excepté dans le manuel de 2008, les outils numériques, comme la calculatrice, le tableur, le logiciel de géométrie dynamique, etc. sont très peu mobilisés dans les situations d'introduction pour motiver l'introduction de nouveaux concepts (expressions littérales, équations, etc.) et leurs propriétés. C'est en particulier le cas, en ce qui concerne les situations de généralisation et de modélisation. Le manuel de 2008 prévoit des situations utilisant le tableur pour rechercher une longueur minimale, pour conjecturer puis aider à démontrer la proportionnalité des accroissements pour une fonction affine, utilisant *GeoGebra* pour mettre en évidence les relations entre grandeurs et leur représentation graphique. Dans la partie cours, Il est très peu fait référence à l'usage d'un outil numérique excepté pour l'usage du tableur pour déterminer le PGCD qui est pointé dans le manuel de 3^{e} de 1999. En revanche, depuis 1999, le manuel prévoit des pages spécifiques, comme des « TP », abordant l'usage d'outils numériques selon leurs fonctionnalités au regard des contenus et des types de tâches abordés, intitulées *À vos souris* en 2003, *Avec un ordinateur* en 2008, *Avec un logiciel* en 2016. Par exemple, avec un tableur, ce peut être, conjecturer avant de démontrer un résultat général, étudier une série de données, obtenir un tableau de valeurs d'une fonction et la représenter graphiquement, modéliser à partir d'une expérience, etc. Avec une calculatrice, on trouve, vérifier si un nombre est premier, décomposer un nombre en facteurs premiers et avec *GeoGebra*, modéliser des relations entre des données et variables, les représenter, conjecturer avant de prouver. Il en est de même pour l'algorithmique avec le logiciel *Scratch*, présent dans tous les chapitres du manuel de 2016. Les situations proposées ont des énoncés très guidés tout en visant à développer les compétences représenter, modéliser, raisonner. Les solveurs d'équations et logiciels de calcul formel ne sont pas pris en compte, ni pour développer le raisonnement en calcul littéral ni pour le contrôle sémantique après transformation : des animations interactives sont prévues en 2008 pour illustrer des propriétés comme celle de distributivité. Dans les différents chapitres, très peu d'exercices d'entraînement, d'approfondissement font référence à l'usage des outils numériques. On constate d'ailleurs une grande stabilité du nombre d'exercices depuis 1998 mobilisant les outils numériques, deux à trois exercices dans les rubriques exercices d'entraînement ou problèmes d'approfondissement, soit moins de 5 % du nombre total d'exercices. De 1993 à 2018, peu d'exercices mobilisent les compétences développées pendant les séances « TP » et il y a peu de référence à un usage régulier d'environnements numériques permettant de développer leurs fonctionnalités pour une activité mathématique riche.

Du côté instrumental, au-delà de l'usage de logiciels présenté dans l'entête des manuels présenté plus haut, les questions posées par la genèse instrumentale ne sont pas vraiment abordées. Aucune référence n'y est faite dans d'autres chapitres et elle semble laissée à la charge des enseignants. Peu d'informations sont données aux enseignants sur l'articulation entre types de tâches dans l'environnement papier-crayon habituel et dans l'environnement numérique, sur la gestion didactique des situations, en particulier, sur le processus d'orchestration d'une séance intégrant un outil numérique.

b. Etude des prescriptions de collections en 2016

Qu'en est-il pour les collections de 2016 ? Les collections *Transmath*, *Delta*, *Kiwi*, *Indigo*, présentent des pages concernant les fonctionnalités du tableur, de *GeoGebra*, des calculatrices TI et Casio pour ce dernier. *Transmath* met en relation cette présentation avec les activités mathématiques visées, comme la conjecture de propriétés. *Kiwi* consacre des TP pour aborder les fonctionnalités du tableur, de *GeoGebra* et de *Scratch*, en lien avec les potentialités du logiciel : l'automatisation de calculs, l'usage de fonctions prédéfinies, différentes représentations de données avec un tableur, la représentation graphique d'une fonction, la lecture graphique de points ou l'obtention d'un tableau de valeurs avec *GeoGebra*. Mais le lien avec de nouveaux types de tâches n'est pas indiqué.

Globalement, en 2016, les éditeurs ont adopté une structure de manuel organisant chaque chapitre à partir de plusieurs rubriques comme des activités d'introduction, le cours, des exercices d'entraînement ou d'approfondissement, des « TP » intégrant les outils numériques et un bilan. Dans ces rubriques, on voit apparaître de nouvelles icônes indiquant les multimédias mis en jeu, par exemple, des QCM interactifs, des vidéos de cours, l'accès à des sites, etc. On observe une évolution de l'usage de ces multimédias mis à disposition des enseignants et des élèves au cours des dernières années. Mais, qu'en est-il de la prescription d'utilisation d'outils numériques en ce qui concerne la proposition de nouveaux types de tâches et de nouvelles techniques associées, et ceci dans les différentes rubriques ?

En ce qui concerne les activités d'introduction de nouvelles notions, très peu de situations intégrant les fonctionnalités des tableurs ou des calculatrices sont proposées, alors qu'elles pourraient permettre, par exemple, de conjecturer l'équivalence de deux expressions avec un tableur, de montrer les limites de techniques numériques (calculatrice, tableur ou logiciel de programmation), de favoriser l'introduction de techniques algébriques de résolution d'une équation du premier degré à une inconnue avec un solveur, de contrôler la mise en équation d'un problème et la structure des équations ou d'articuler deux registres de représentation d'une fonction avec *GeoGebra*, etc. *Kiwi* propose des situations avec tableur ou *GeoGebra*, par exemple, pour conjecturer l'équivalence de deux programmes de calcul préalablement à la preuve.

Excepté dans les collections *Dimension* et *Kiwi*, les outils numériques sont introduits dans la résolution de types de tâches proposés dans une rubrique spécifique du manuel de l'élève. Deux à trois situations sont proposées pour aborder de nouveaux types de tâches, impliquant soit une calculatrice, soit un logiciel (Tableur ou *GeoGebra* ou *Scratch*). Par exemple, avec un tableur, il s'agit de conjecturer une propriété numérique ou si une assertion est vraie avant de la démontrer, de rechercher une stratégie pour faire un test de primalité (idem avec calculatrice), de gérer des données réelles dans différents registres de représentations, de résoudre un problème du premier degré. Dans ce dernier cas, les situations proposées conduisent à la résolution d'équations du type $ax+b = cx+d$ (avec a-c non nul) avec une solution décimale, l'usage du tableur ne pouvant pas motiver une technique algébrique. Seule une équation du type $ax+b = cx+d$ (avec a-c non nul) et avec une solution rationnelle non décimale motiverait une technique algébrique, et donc l'usage d'un solveur. Avec *GeoGebra*, les types de tâches proposés dans les manuels, même si les énoncés sont très guidés, permettent de favoriser la visualisation et la mise en relation de différentes représentations (numérique, algébrique et graphique) pour étudier des fonctions, effectuer des lectures graphiques, émettre des conjectures. Quant à la calculatrice, au-delà des situations pour faire un test de primalité, elle est essentiellement intégrée dans les exercices d'entraînement. De façon générale, les énoncés sont très guidés et détaillent souvent les fonctionnalités des outils numériques. Leurs apports potentiels pourraient davantage être mis en évidence pour les élèves, ce qui permettrait d'envisager un réinvestissement régulier et en autonomie dans la résolution d'exercices de même type.

Contrairement aux autres manuels, le manuel *Kiwi* s'appuie sur le solveur d'équations *Thot* pour la résolution d'équations du premier degré à une inconnue ; aucun manuel ne propose l'utilisation d'un logiciel de calcul algébrique pour organiser l'apprentissage du calcul algébrique, la vérification de l'usage des propriétés de distributivité pour développer, factoriser des expressions algébriques. En revanche, la majorité des manuels fait une grande place à l'algorithmique et à la programmation, majoritairement avec *Scratch*. Deux grandes stratégies sont retenues par les auteurs : soit l'usage de

Scratch dans les pages dédiées à l'usage des logiciels pour chaque chapitre, pour travailler les types de tâches mis en jeu dans les programmes en s'appuyant sur les potentialités du logiciel en lien avec l'algorithmique et la programmation, soit seulement dans la partie dédiée à l'algorithmique et à l'usage de *Scratch* pour la programmation (*Kiwi* et *Sésamath*).

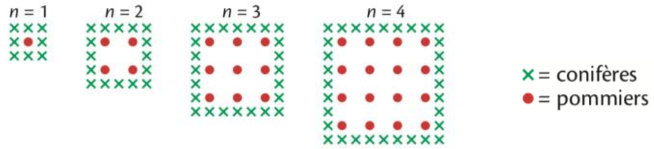
Au-delà des pages spécifiques de présentation des outils numériques, le processus de genèse instrumentale est peu pris en compte. Excepté pour *Kiwi*, peu d'indications sont données aux enseignants sur la gestion didactique des situations intégrant les outils numériques, que ce soit l'articulation avec les situations dans l'environnement papier / crayon ou le processus d'orchestration*. Dans le manuel de l'enseignant de *Kiwi*, dans la partie concernant des tâches à prise d'initiative, les auteurs proposent très souvent des pistes visant à articuler les situations dans l'environnement papier / crayon et dans l'environnement numérique. Ils précisent les objectifs visés et implicitement les potentialités mises en jeu par les logiciels proposés, même si l'analyse didactique est encore peu développée. Par exemple, pour la situation *Pommiers et conifères*[25] (empruntée à PISA), le tableur est proposé pour conjecturer le nombre pour lequel il y a même nombre de pommiers et de conifères. L'usage de *GeoGebra* vise à articuler différents registres sémiotiques, à conjecturer la valeur non nulle pour laquelle les deux courbes représentatives se coupent, et à donner des pistes pour la preuve algébrique. Le choix des auteurs de *Kiwi* peut engager les enseignants à un usage plus régulier des outils numériques pour développer l'activité mathématique. Ce qui reste encore minoritaire pour l'ensemble des collections.

Ce rapide tour d'horizon montre la prise en compte des outils numériques par les collections, mais peu d'entre elles développent un usage régulier des outils numériques en lien avec différents types de tâche visant l'expérimentation, la conjecture de régularités, la vérification de calculs et leur contrôle sémantique, la visualisation et l'articulation entre registres sémiotiques, l'algorithmique. Ce constat rejoint d'ailleurs celui que nous avons fait en étudiant les articles parus dans la revue d'interface *Mathematice*[26] : la plupart d'entre eux présentent des situations d'enseignement avec des énoncés très guidés, tant dans la réalisation de la tâche que dans la découverte des fonctionnalités de l'outil (seuls quelques articles écrits majoritairement par des didacticiens insistent davantage sur les potentialités des outils en termes d'apprentissage).

Le livre pour l'enseignant de *Kiwi* est le seul à bien mettre en l'évidence les potentialités apportées par les outils (calculatrice, tableur, *GeoGebra*) en lien avec les enjeux d'apprentissage sans toutefois complètement développer leur gestion didactique et en particulier le processus d'orchestration*. Cette approche mériterait sûrement d'être davantage mise en avant pour que l'élève comprenne

---

[25] Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. On peut voir ci-dessous un schéma présentant cette situation, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre (*n*) de rangées de pommiers :



Pour quel nombre de rangées de pommiers, le nombre de pommiers est-il égal au nombre de conifères ? Expliquer la méthode.

[26] http://revue.sesamath.net/ - *Mathematice* est une revue en ligne, ayant pour thème l'intégration des TICE dans l'enseignement.

l'utilité des outils pour une activité mathématique riche et que l'enseignant soit davantage convaincu de les intégrer régulièrement dans son enseignement.

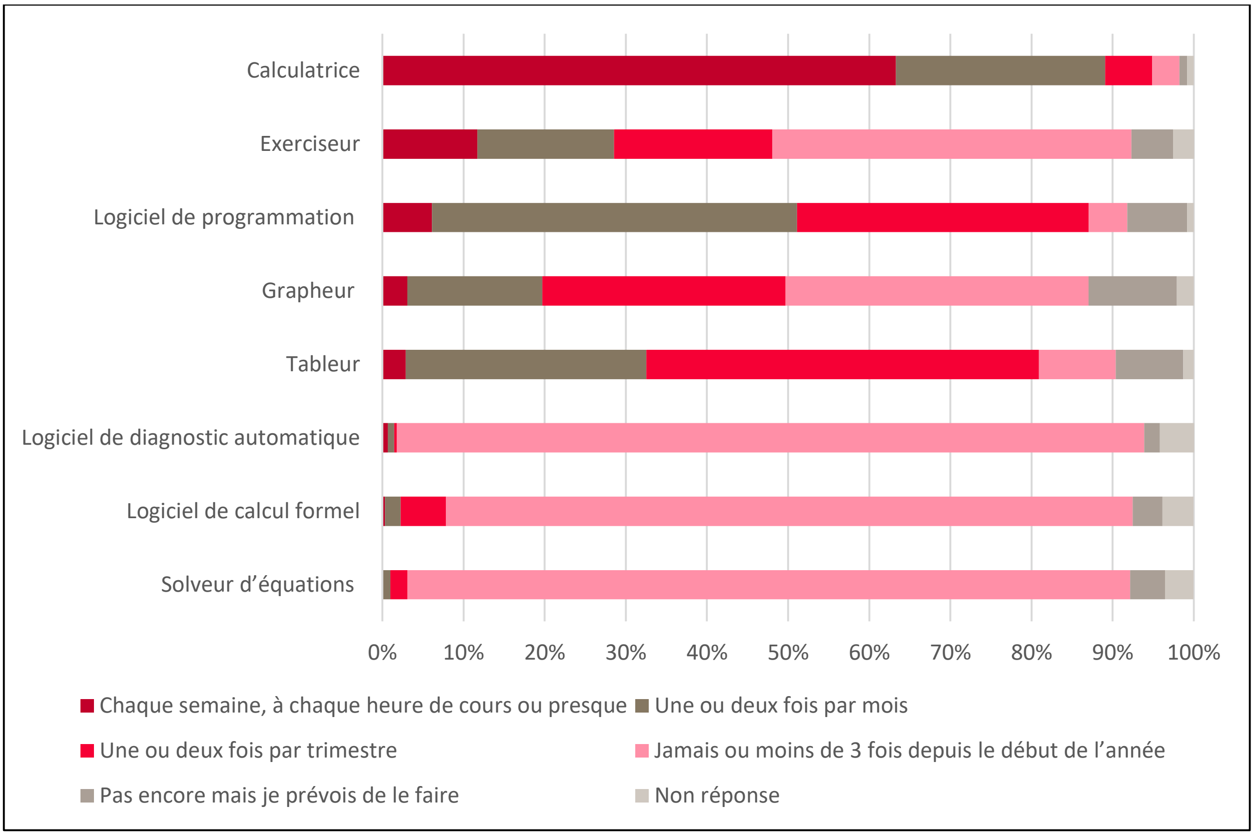
IV. Quelques éléments décrivant les pratiques des enseignants

Nous introduisons cette partie par les propos d'Artigue en 2008 : « comprendre l'influence possible ou effective des logiciels sur l'enseignement des mathématiques ne peut se faire en séparant les contenus des pratiques dans lesquelles ces contenus sont engagés » (p. 12). Ainsi, afin de compléter les prescriptions des programmes et des manuels scolaires, nous avons souhaité donner un éclairage complémentaire à notre étude en interrogeant des enseignants de collège et de lycée sur leur utilisation des outils numériques[27]. 1 119 enseignants du secondaire dont 622 de collège, 377 de lycée général et technologique et 120 de lycée professionnel ont ainsi répondu à un questionnaire en ligne au cours du printemps 2019 sur leur usage des outils numériques dans leurs classes.

En ce qui concerne le collège, si nous avons pu observer dans la première partie de ce chapitre que les outils numériques à disposition des enseignants pour faciliter les apprentissages en algèbre et calcul littéral étaient nombreux, nous constatons que peu d'entre eux sont régulièrement exploités en classe (Figure 9). Seule la calculatrice est utilisée très régulièrement, deux tiers des enseignants ayant répondu à l'enquête déclarent l'utiliser à chaque heure de cours ou presque. En revanche, les logiciels de diagnostic automatique, les solveurs ou les logiciels de calcul formel ne sont quasiment jamais utilisés. Les tableurs, comme les logiciels de programmation semblent faire l'objet de quelques séances annuelles, mais pas d'une exploitation régulière en classe ; ce qui rejoint les prescriptions que nous avions pu constater dans les manuels de collège.

[27] L'enquête a été menée en ligne, en mars 2019, via un questionnaire de 14 questions portant sur l'usage des outils numériques en lien avec l'arithmétique et l'algèbre mais aussi avec la géométrie. Les résultats obtenus ont été exploités pour ce rapport et pour celui relatif à l'utilisation des logiciels de géométrie.

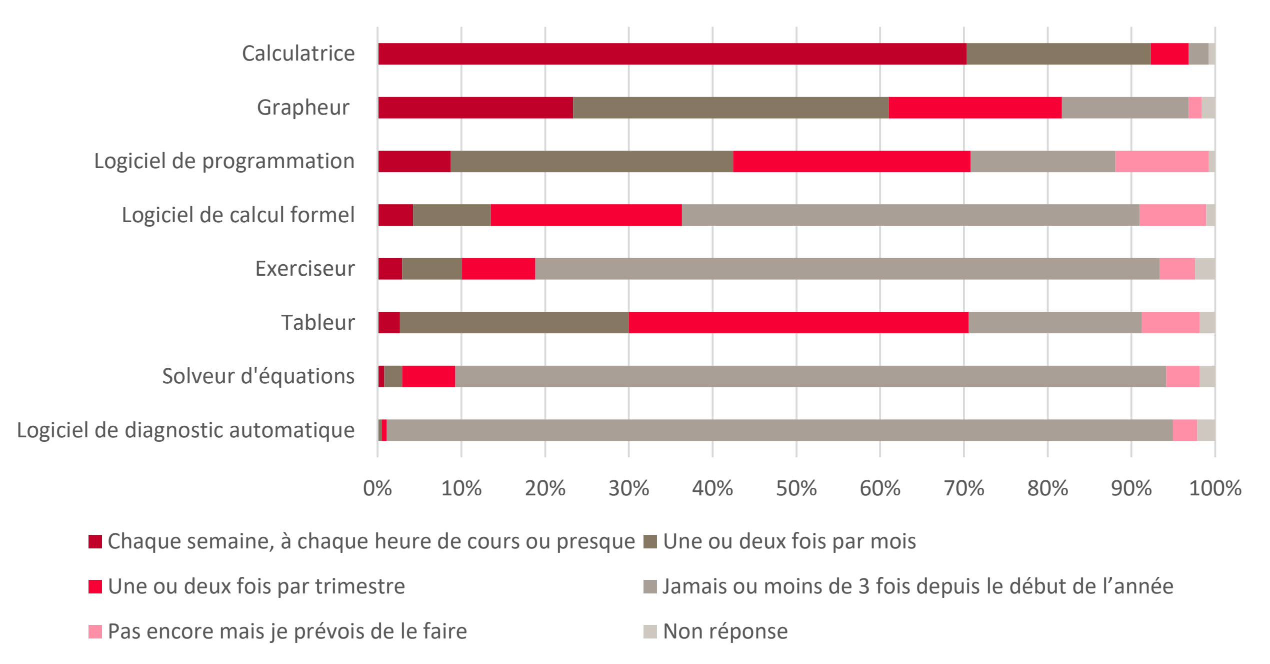
Figure 9. Fréquence d'utilisation des outils numériques au collège



Source : enquête réalisée en mars 2019 par les auteures.

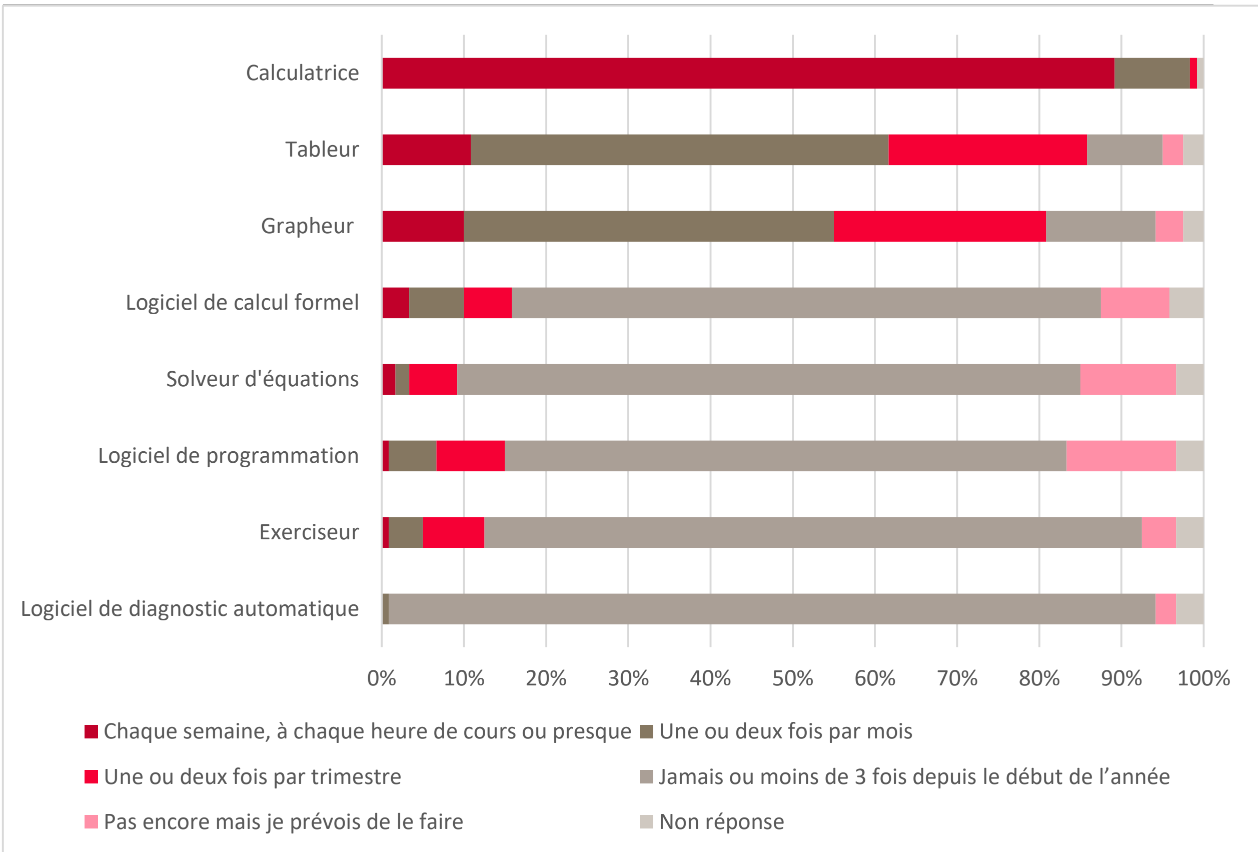
Comparativement au collège, la fréquence d'utilisation des outils numériques est similaire au lycée, sauf pour les grapheurs qui sont plus couramment utilisés au lycée général et technologique, en lien avec les programmes scolaires ; au lycée professionnel, la calculatrice est utilisée encore plus souvent qu'au collège ou au lycée général et technologique, alors que les logiciels de programmation ne le sont quasiment jamais (Figures 10 et 11).

Figure 10. Fréquence d'utilisation des outils numériques au lycée général et technologique



Source : enquête réalisée en mars 2019 par les auteures.

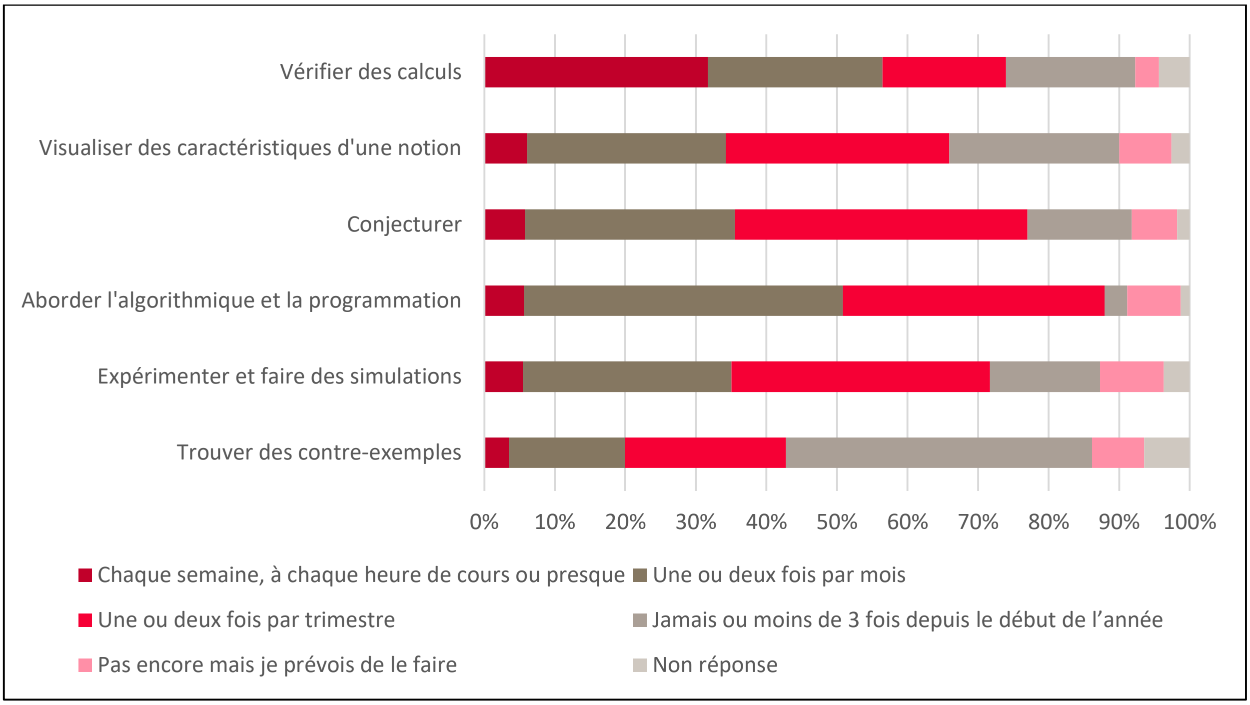
Figure 11. Fréquence d'utilisation des outils numériques au lycée professionnel



Source : enquête réalisée en mars 2019 par les auteures.

Si en collège, les élèves utilisent régulièrement une calculatrice en classe, il semble que ce soit principalement afin de vérifier des calculs (Figure 12). Cette même figure nous montre que la recherche de contre-exemples à l'aide des outils numériques est très peu pratiquée. Conjecturer, aborder la programmation et visualiser des caractéristiques de certaines notions sont travaillés avec les outils numériques au moins deux fois par trimestre pour environ trois quarts des enseignants ; ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus à la question précédente puisque les outils comme le tableur, les logiciels de programmation ou les grapheurs sont utilisés au moins une ou deux fois par trimestre par les deux tiers des enseignants.

Figure 12. Fréquence d'utilisation des outils numériques au collège selon le but d'apprentissage



Source : enquête réalisée en mars 2019 par les auteures.

Au lycée général et technologique, comme au lycée professionnel, les outils numériques sont davantage utilisés pour visualiser les caractéristiques d'une notion ; la vérification des calculs reste un but important, lié certainement à l'utilisation fréquente de la calculatrice.

Pour conclure cette partie, nous observons que, malgré une offre croissante des outils numériques mis à disposition des enseignants, leur intégration reste limitée dans la plupart des classes, que ce soit au collège comme au lycée. Nous pouvons avancer différentes hypothèses pour expliquer ce décalage entre attentes institutionnelles et pratiques effectives : l'équipement informatique des établissements ainsi que les contraintes horaires sont-ils des freins pragmatiques à l'intégration des outils numériques ? Les enseignants sont-ils convaincus de l'intérêt de l'utilisation de ces différents outils ? Toutes les dimensions liées à l'orchestration* sont-elles suffisamment maitrisées par l'enseignant ? Ce sont autant de pistes pour développer de nouvelles recherches sur les conditions d'intégration des outils numériques dans les pratiques enseignantes : comment amener les enseignants à découvrir et à prendre en compte les potentialités de ces différents outils numériques pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ? Comment amener les enseignants à développer les dimensions liées à l'orchestration* ?

Conclusion

Les outils numériques proposés dans le cadre de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, et plus particulièrement celui des nombres, du calcul et de l'algèbre, sont déjà anciens, ce qui contraste beaucoup avec de nombreuses disciplines. De nombreuses études didactiques ont été menées quant à leur conception, leurs potentialités et leurs usages, spécifiques aux mathématiques. Nous avons présenté les potentialités des outils numériques dans l'enseignement et l'apprentissage des nombres, du calcul et de l'algèbre et les modifications profondes qui affectent les processus d'apprentissage et d'enseignement. Nous avons aussi pointé les potentialités de nouvelles tâches en particulier en lien avec la représentation des concepts mathématiques mais aussi les prises de risque occasionnées chez les enseignants pour organiser les interactions en classe suite à un travail instrumenté des élèves. Nous avons donc indiqué la nécessité d'accompagnement des enseignants dans le choix des outils numériques à mobiliser et dans leur mise en œuvre selon l'objectif d'apprentissage visé et avons souligné l'importance, pour les enseignants, de travailler dans des établissements équipés de matériel informatique fonctionnel.

Si nous nous sommes intéressées aux prescriptions et aux pratiques déclarées des enseignants, nous n'avons pas dressé d'état des lieux relatif aux capacités des élèves à mobiliser les outils numériques. À notre connaissance, il n'existe pas de tels résultats en France actuellement ; si quelques questions sont posées au brevet en lien avec l'utilisation d'un tableur ou de *Scratch*, elles restent très ponctuelles et n'évaluent pas la capacité des élèves à mobiliser de façon autonome un outil numérique. L'évolution de la passation des épreuves d'évaluations standardisées à grande échelle, telles que Cedre ou PISA, sur support informatique (tablette ou ordinateur) permettra, nous l'espérons, d'apporter des réponses à cette question : non seulement de nouveaux types de tâches, différents de ceux proposés en papier-crayon jusqu'alors, pourront être proposés et la capacité des élèves à résoudre des problèmes dans un environnement informatique pourra ainsi être évaluée. De façon plus générale, les perspectives offertes par les évaluations adaptatives sur support numérique, que ce soit dans le cadre des évaluations nationales (comme Cedre mathématiques 2018) ou internationales (comme PISA 2019), mais aussi dans le développement d'outils pour les enseignants nous semblent prometteuses puisqu'elles permettent d'affiner l'évaluation des connaissances des élèves en proposant des tâches adaptées selon leurs réponses. Le développement de tels outils ne peut se faire qu'avec un partenariat avec des chercheurs afin de catégoriser les procédures au regard des contenus mis en jeu et des outils numériques utilisés ; même si nous l'avons peu abordé dans notre chapitre, l'intérêt des outils numériques pour adapter et différencier l'enseignement, en particulier les interactions ou *feedbacks*, selon les besoins d'apprentissage des élèves, conduit, dans le cadre de projets actuels de recherche, à la conception de nouvelles plateformes en ligne et outils, tels que Mindmaths (Lesnes-Cuisiniez & Grugeon-Allys, 2019).

L'évolution rapide des ressources numériques mises à disposition des enseignants doit être accompagnée de recherches émanant de plusieurs champs (Artigue & Gueudet, 2008) mais aussi de formations des enseignants prenant en compte les potentialités des outils numériques et le processus d'orchestration. Sur ce point, nous avons pu observer que les manuels et les ressources institutionnelles n'assurent pas actuellement une fonction de formation qu'ils pourraient potentiellement remplir. Nous avons aussi noté que les outils numériques développés par les chercheurs en didactique des mathématiques en lien avec les situations d'apprentissage associées peinent à vivre dans les contraintes habituelles des classes même si les potentialités qu'ils véhiculent en termes d'apprentissage sont certaines, alors que parallèlement, les ressources numériques mathématiques sous la forme d'exercices en ligne se multiplient sans qu'elles soient toujours pertinentes.

Comme le proposait déjà Artigue en 2008, c'est en pensant « la progression dans le temps des connaissances instrumentales et mathématiques ainsi que les institutionnalisations associées, les rapports à construire et à faire évoluer les liens entre techniques papier-crayon et techniques instrumentées » que les difficultés à intégrer les outils numériques pourront être surmontées. Les formations doivent donc être pensées pour que les enseignants soient non seulement convaincus des potentialités des outils numériques du point de vue des apprentissages, mais qu'ils soient aussi suffisamment armés pour gérer efficacement leur mise en œuvre en classe (Hoyles, 2018). Pour cela, il est essentiel de proposer des pistes d'enseignement et de mettre à disposition des ressources pour exploiter les potentialités des outils numériques selon les concepts mathématiques en jeu et les objectifs d'apprentissage visés. Le travail de transposition didactique et informatique n'en est qu'au début. Avec une co-construction de séances intégrant le choix de situations d'apprentissage, les outils numériques et leurs potentialités, le processus d'orchestration* pourrait aussi être envisagé sous la forme de « *lesson studies* ». Cette démarche permettrait de dépasser le développement collaboratif déjà existant de certains outils, comme les bases d'exercices en ligne, et d'intégrer des dimensions de mises en œuvre en classe, comme le proposent par exemple déjà les ressources liées au *Chiffroscope* (Rabatel & Soury-Lavergne, 2017).

Références

Aldon, G. & Rabatel, J.-P. (2015) Caprico : calculatrices en primaire et au collège, Actes du XLIIème colloque COPIRELEM Besançon.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a refection about instrumentation and the dialectics between technical et conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.

Artigue, M. (2008). L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques : contenus et pratiques. In *Actes du séminaire national « Utilisation des outils logiciels dans l'enseignement des mathématiques* », 11-25. Eduscol Formation Continue Publications http://media.education.gouv.fr/file/Formation_continue_enseignants/18/6/actes_math_et_tice_110186.pdf

Artigue, M. & Gueudet, G. (2008) Ressources en ligne et enseignement des mathématiques. Université d'été de Saint-Flour "Quelle place pour l'enseignement des mathématiques ?". https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00460364/document

Artigue, M. (2014). Enseignement et apprentissage de l'algèbre au collège : quel apport des TICE ? *APMEP*, 514, 326-340.

Assude, T. (2007) Changements et résistances à propos de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques au primaire, TICE Méditerranée 2007. http://isdm.univ-tln.fr/PDF/isdm29/ASSUDE.pdf

Assude, T., Coppé, S. & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et reduction. *In* Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), Recherche en Didactique des Mathématiques Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives. Hors-série 137–162. Grenoble : La pensée sauvage.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching*, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

Boon, P. & Drijvers, P. (2006) Chaining operations to get insight in expressions and functions, In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of European Society for research in Mathematics Education, Saint Feliu de Guixols,* Spain, 2005, 969-978.

Bouhineau D., Chaachoua H., Viudez C. & Nicaud J.-F. (2007). Introduction de nouvelles représentations dans le micromonde Aplusix : représentations sous forme mixte naturelle & arbre et sous forme graphique d'expressions algébriques, *Actes de la conférence EIAH2007*, Lausanne, 27-29 juin 2007.

Briant, N. (2013). *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français*. Thèse de doctorat. Université de Montpellier 2.

Capponi, B. (1992). Désignations dans un tableur et interaction avec les connaissances algébriques. *Petit x*, 29, 57-88.

Cazes, C. & Vandebrouck, F. (2008) Panorama sur les bases d'exercices en ligne, In *La classe de mathématiques,* p. 165-177. Toulouse : Octarès Editions.

Cerulli, M. & Mariotti, M.-A. (2002) L'Algebrista : un micromonde pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. *Science et techniques éducatives, Logiciels pour l'apprentissage de l'algèbre*, 9, 149-170

Chaachoua, H., Chiappini, G., Pedemonte, B., Croset, M.-C. & Robotti, E. (2012). Introduction de nouvelles représentations dans deux environnements pour l'apprentissage de l'algèbre : AlNuSet et APLUSIX. In L. Coulange, J. P. Drouhard, J. L. Dorier, & A. Robert (Eds), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives*. Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.

Chesné, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation des enseignants centrée sur le calcul mental*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot. Paris.

Chesné, J.-F. & Fischer, J.-P. (2015) Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire. *In Conférence de Consensus « nombres et opérations – premiers apprentissages à l'école primaire » organisée par le Cnesco.* *http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Acquis-des-%C3%A9l%C3%A8ves.pdf*

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique *Petit x* 5 51–94.

Chevallard, Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43–75.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,*19-2, p. 221 – 266.

Dalibard, E. & Pastor, J.-M. (2015). CEDRE 2014 – Mathématiques en fin d'école primaire: les élèves qui arrivent au collège ont des niveaux très hétérogènes. *Note d'information*, *18*, Paris: MEN-DEPP.

Del Notaro, L. & Floris, R. (2011) Calculatrice et propriétés arithmétiques à l'école élémentaire, *Grand N,* 87, p. 17-49.

Dossier de la Depp (2017) CEDRE 2014 : mathématiques en fin d'école, 208, http://cache.media.education.gouv.fr/file/208/89/6/depp-dossier-2017-208-cedre-2014-mathematiques-fin-ecole_847896.pdf

Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Feyfant, A. (2015). La résolution de problèmes de mathématiques au primaire. Dossier de veille de l'IFÉ, 105. Lyon : ENS de Lyon. En ligne http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA-Veille/105-novembre-2015.pdf

Grapin, N. (2015) *Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances des élèves de fin d'école.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot. Paris.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167 - 210.

Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot, F. & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et par- cours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In L. Coulange, J. P. Drouhard, J. L. Dorier, & A. Robert (Eds), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives*. Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.

Guin, D. & Trouche L. (2002) *Calculatrices graphiques, transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique.* Grenoble : La Pensée sauvage.

Haspekian, M. (2005). An « Instrumental Approach » to study the integration of a computer tool into mathematics teaching : The case of spreadsheets, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 109-141.

Haspekian, M. (2012). Apports et limites du tableur dans l'enseignement de l'algèbre. Questions d'instrumentation (chapitre 6). *In* L. Coulange, J. P. Drouhard, J. L. Dorier, & A. Robert (Eds), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives*. Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.

Houdement, C. (2017) Résolution de problèmes arithmétiques à l'école, *Grand N*, 100, 59-78.

Hoyles, C. (2018) Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology, *Research in Mathematics Education*, https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14794802.2018.1484799

Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. *The 17th ICMI Study*. New York: Springer

Kieran, C. (1992), The learning of school algebra. *In* D.A Grouws (dir.), *The Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels : Building meaning for symbols and their manipulation. In Frank K. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.707–762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kieran, C. & Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. In, K. Stacey, H. Chick and M. Kendal (eds), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study*, pp. 95-152. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lagrange, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques, *Educational Studies in Mathematics*, 43, 1-30.

Lagrange, J.-B. & Grugeon, B. (2003) Vers une prise en compte de la complexité de l'usage des TIC dans l'enseignement, *Revue Française de Pédagogie,* 143, p. 101-111.

Lemoyne, G., Giroux, J., René de Cotret, S. & Brouillet, F. (2005). Environnement informatique pour l'enseignement du calcul réfléchi : un travail orienté par la théorie des situations didactiques. *In* M.-H. Salin, P. Clanché et. Sarrazy (dir.). *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, Réponses, Ouvertures. Hommage à Guy Brousseau* (p. 279-296). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Lesnes-Cuisiniez, E. & Grugeon-Allys B. (2019). Modèle d'exercices et parcours d'apprentissage prenant en compte le raisonnement de l'élève en mathématiques au collège. In J. Broisin, E. Sanchez, A. Yessad & F. Chenevotot (eds), Actes de la 9e conférence sur les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (pp. 205-210).

Modeste, S. (2012) Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ? Histoire et perspectives sur les mathématiques. Thèse de doctorat. Université de Grenoble.

Nicaud, J.-F., Bouhineau, D. & Chaachoua, H. (2004). Mixing Microworld and CAS Features in Building Computer Systems that Help Students Learn Algebra*. International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9 (2), 169-211.

Rabardel, P. (1996). *Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : A. Colin.

Rabardel, P. & Pastré, P. (Eds.), (2005). *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement*. Toulouse : Octarès.

Rabardel, P. & Samurcay, R. (1998). De l'artefact à l'apprentissage instrumental. *In* G. Vergnaud (éd.), Actes du colloque « Qu'est-ce que la pensée ? Compétences complexes dans l'éducation et le travail ». Suresnes, juillet 1998.

Sutherland, R. & Rojano, T. (1993). A spreadshheet approach to solving Algebra Problem, *Journal of Mathematical Behaviour*, 12-4, 351-383.

Rabatel, J-P., Soury-Lavergne, S. (2017). Faire des mathématiques avec des cartes et un robot, le projet OCINAEE, *In XXXXIIIe colloque de la COPIRELEM, Le Puy-en-Velay*, p.265-278.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281-307.

Trouche, L. (2005a) Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25(1), 91-138.

Trouche, L. (2005b) Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques, *Conférence donnée à l'Université d'été du Ministère français de l'Éducation nationale, Saint Flour.* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01559831/document.

Vergnaud G., Cortes A. & Favre-Artigue P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. *In* actes du colloque de Sèvres : didactique et acquisition des connaissances scientifiques, pp. 259-288. Grenoble : La pensée sauvage.

Yerushalmy, M. (2005). Challenging known transitions: learning and teaching algebra with technology, *For the learning of mathematics*, 25, 3, 37-42.

Programmes scolaires

Bulletin Officiel de l'Education Nationale (1985) Collèges - Programmes et instructions, *44*. *Collèges, Programmes et instructions*, Paris : CNDP

Bulletin Officiel de l'Education Nationale (1995) Programmes pour chaque cycle de l'école primaire,
5, BO du 9 mars 1995.

https://mentor.adc.education.fr/exl-php/util/documents/accede_document.php

Bulletin Officiel de l'Education Nationale (1998) Programmes des classes de troisième de collège,
Hors série, BO du 15 octobre 1998.
https://www.education.gouv.fr/bo/BoAnnexes/1998/hs10/hs10vol2.pdf

Bulletin Officiel de l'Education Nationale (2002) Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire, N*uméro hors série.* https://www.education.gouv.fr/bo/BoAnnexes/2002/hs1/hs1.pdf

Bulletin Officiel de l'Education Nationale (2008) Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire, N*uméro hors série.* https://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/default.htm

Bulletin Officiel de l'Education Nationale (2008) Programmes du collège – programmes de l'enseignement de mathématiques, *6,* https://cache.media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf

Bulletin Officiel de l'Education Nationale (2015) Programmes pour les cycles 2, 3 et 4, *numéro spécial*. https://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/67/3/2015_programmes_cycles234_4_12_ok_508673.pdf

Programme du cycle 4 en vigueur à la rentrée 2018-19 (2018) http://cache.media.eduscol.education.fr/file/programmes_2018/20/4/Cycle_4_programme_consolide_1038204.pdf

Documents d'accompagnement et documents ressources

Document d'accompagnement du secondaire « Du numérique au littéral » (1995) http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

Document d'accompagnement des programmes de l'école primaire « Utiliser les calculatrices en classe » (2002) https://cache.media.education.gouv.fr/file/20172018/98/0/Utliser_la_calculatrice_C2_et_C3_827980.pdf

Ressource d'accompagnement du programme de mathématiques – cycle 3 « Calcul au cycle 3 » (2016) http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Nombres_et_calculs/00/2/RA_16_C3_MATH_calcul_ligne_c3_N.D_601002.pdf

Ressource d'accompagnement du programme de mathématiques – cycle 4 « Fonctions – Comprendre et utiliser la notion de fonction » (2016) http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fonctions/03/3/RA16_C4_MATH_doc_maitre_comprendre_et_utiliser_fonctions_N.D_551033.pdf

Ressource d'accompagnement du programme de mathématiques – cycle 4 « Utiliser le calcul littéral » (2016) http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Calcul_litteral/35/8/RA16_C4_MATH_nombres_calcul_calcul_litteral_doc_maitre_548358.pdf

Manuels étudiés

École :

Blanc, J-P, Bramand, P. Lafont, E., Peynichou, D., Vargas, A. (2011) Pour comprendre les maths CM1. Paris : Hachette.

Bramand, N., Bramand, P. Lafont, E., Maurin, C., Peynichou, D., Vargas, A. (2017) Pour comprendre les maths CM1. Paris : Hachette.

Charnay, R., Combier, G., Dussuc, MP, Madier, D (2010) Cap Maths CM1. Paris : Hatier.

Charnay, R., Combier, G., Dussuc, MP, Madier, D (2017) Cap Maths CM1. Paris : Hatier.

Peltier, M.L., Briand, J., Ngono, B., Vergnes, D. (2009) Euromaths CM1. Paris : Hatier.

Peltier, M.L., Briand, J., Ngono, B., Vergnes, D. (2016) Opération maths CM1. Paris : Hatier.

Petit-Jean, I., Rousseau, M., Carle, S (2008) Outils pour les maths CM1. Paris : Magnard.

Petit-Jean, I., Carle, S., Ginet S., Ostiz, N. (2016) Nouveaux outils pour les maths CM1. Paris : Magnard.

Mante, C., Santal-Lanternier, A., Séguy, JC., Vidal, S., Dias, T (2018) Archimaths CM1. Paris : Magnard.

Collège :

Boullis, M., Cambon, M., Danard, Y., Gallien, V., Herrmann, E., Monka, Y., Percot, S., sous la direction de Boullis, M. (2016) MYRIADE Cycle 4 [3e]. Paris : Bordas.

Galand, N., Henry, F., Laboudigue, G. Stupfler, L. Tabourin, D., sous la direction de Beltramone, J.-P. (2016) KIWI Cycle 4 [5e, 4e, 3e]. Paris : Hachette.

Braconne-Michaux, A., Freycenet, D., Freycenet, P., Huynh-Quan-Binh, P., Merlier, J.M., Pasqualini, F., Rousseau, P. (2013) Diabolo, 3e. Paris : Hachette.

Berger, H. Billa, N. Demoulin, P., Flous, A., Lafargue, M., Larrieu, M., Laulhere, A., Layan, M.C., Pollet, S., Robertou, M., Rudelle, F., Villattes, A., sous la direction de Barnet, C. (2016) Mission Indigo Cycle 4 [3e]. Paris : Hachette.

Artigalas, A.L., Béasse, C., Braun, F., Devys, A., Favero, S., Grisoni, M.D., Levi, M.C., Marduel, S., Philippe, C., Reynier, C., Rouzé, P., Trévisan, H., sous la direction de Dos Santos, R. (2016) DIMENSIONS Cycle 4 [3e]. Paris : Hatier.

Andrieu, X., Bonnet, J., Fourton, J.P., Flavier, I., Iyer, T., Perrinaud, J.C. (2016) Delta Cycle 4 [3e]. Paris : Magnard.

Barra, R. Borrion, G., Lampin, M., Malaval, J. Vallet, J. (1993) Transmath 3e. Paris : Nathan.

Malaval, J. et Courbon, M., Maze, M., Planchat, C., Puigredo, F., Sainfort, A., Serès, P. (2003)[28] Transmath 3e. Paris : Nathan.

Carlod, V. Foudakowski, M., Maze, M., Plantiveau, F., Puigredo, F., Serès, P., sous la direction de Malaval, J. et Courbon, D. (2013)[29] Transmath 3e. Paris : Nathan.

Carlod, V. Chrétien, B., Desrousseaux, P.A., Jacquemoud, D., Jorioz, A., Keller, A., Lécole, J.M., Mahé, A., Maze, M., Plantiveau, F., Puigredo, F., Verdier, F., sous la direction de Malaval, J. (2016) Transmath Cycle 4 [3e]. Paris : Nathan.

Sésamath (2013) 3e. Paris : Magnard.

Sésamath (2016) Cycle 4 [5e, 4e, 3e]. Paris : Magnard.

[28] Programmes 1999

[29] Programmes 2008

Le Centre national d'étude des systèmes scolaires (Cnesco) est un centre national d'évaluation, d'analyse et d'accompagnement des politiques, dispositifs et pratiques scolaires rattaché au Conservatoire national des arts et métiers (Cnam). Il vise à améliorer la connaissance des systèmes scolaires français et étrangers afin de créer des dynamiques de changement dans l'école.

Le Cnesco s'appuie sur un réseau scientifique de chercheurs français et étrangers issus de champs disciplinaires variés (didactique, sociologie, psychologie cognitive, économie, etc.).

Le Cnesco promeut une méthode participative originale, alliant l'élaboration de diagnostics scientifiques de haut niveau et la participation des acteurs de terrain de la communauté éducative.
Il accompagne ces acteurs grâce à des démarches de formation/action adaptées aux besoins locaux.