

---

# Application de la méthode middleman à un problème acoustique direct

---

Jean-François ABADIE\*, Florent DEWEZ†, Christophe PICARD‡

Jeudi 7 septembre 2017

## Introduction

Ce rapport présente les résultats obtenus à l'issue de la semaine d'études maths-entreprise (SEME), organisée par l'Agence pour les Mathématiques en Interaction avec les Entreprises (AMIES) et l'Institut Camille Jordan (ICJ), et s'étant déroulée à Lyon au début de l'année 2017.

Soumise par Christophe PICARD et encadrée par Thierry DUMONT<sup>1</sup>, notre étude visait à déterminer dans quelle(s) mesure(s) les techniques appelées *Fast Multipole Methods (FMM)* peuvent améliorer certains produits matrice-vecteur effectués dans les méthodes d'antennerie (résolution de problèmes acoustiques inverses) commercialisées par MicrodB. Pour ce faire, nous nous sommes restreints à l'étude d'un cas élémentaire de ces FMM, la *méthode middleman*, et à son utilisation dans un problème acoustique direct plan.

Dans ces notes, nous commençons par exposer la problématique physique étudiée et les produits matrice-vecteur que nous souhaitons accélérer. Après avoir expliqué les principes généraux de cette méthode middleman et illustré celle-ci sur un exemple analytique simple, nous nous intéresserons à sa mise en œuvre dans le cadre du problème acoustique direct considéré, et nous fournirons des simulations.

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notations et conventions</b>	<b>2</b>
<b>2 Contexte de l'étude</b>	<b>2</b>
<b>3 La méthode middleman</b>	<b>5</b>
<b>4 Application au contexte de l'étude</b>	<b>9</b>
<b>Conclusion</b>	<b>13</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>13</b>

---

\*Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, Laboratoire Jacques-Louis Lions UMR CNRS 7598, F75005 Paris, France

†Univ. Valenciennes, EA 4015 - LAMAV, FR CNRS 2956, F-59313 Valenciennes, France

‡Adjoint à la Direction Opérationnelle chez MicrodB

1. Ingénieur de Recherche de l'ICJ

## 1 Notations et conventions

**1.1 – Notations.** Dans la suite de ce document,  $i$  désignera la racine complexe de partie imaginaire strictement positive du polynôme  $X^2 + 1$ , et  $M, N$  deux entiers naturels non nuls. Sauf indication contraire,  $\alpha$  désignera un entier de l'ensemble  $\{1, \dots, N\}$  et  $\beta$  un entier de l'ensemble  $\{1, \dots, M\}$ . Si  $n, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  désignera l'ensemble des matrices complexes à  $n$  lignes et  $m$  colonnes. Dans les sections 2 et 4,  $\|\cdot\|$  désignera la norme associée au produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathbb{R}^3$ , et  $\mathbb{S}^2$  l'ensemble des vecteurs  $x \in \mathbb{R}^3$  vérifiant  $\|x\| = 1$ .

**1.2 – Conventions.** Dans ce qui suit, et sauf mention explicite du contraire, le temps sera exprimé en secondes, les distances en mètres, la pression acoustique en pascals, la fréquence d'un signal sonore en hertz, et les nombres d'onde en radians par mètre. Nous supposons en outre que les conditions environnementales garantissent une vitesse de propagation du son de 343m/s dans l'espace ambiant.

## 2 Contexte de l'étude

**2.1 –** On considère un domaine tridimensionnel fermé de forme quelconque émettant des ondes acoustiques, autrement dit produisant des sons. Par ailleurs, on dispose d'un réseau de microphones, chacun mesurant la pression acoustique ; ce réseau est appelé *antenne* (de microphones).

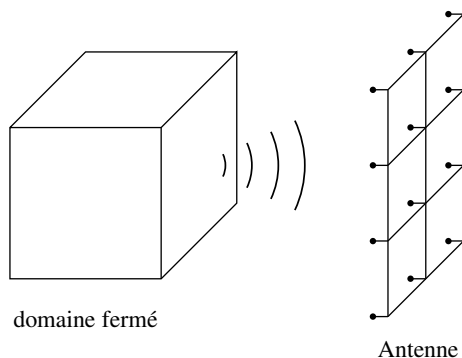


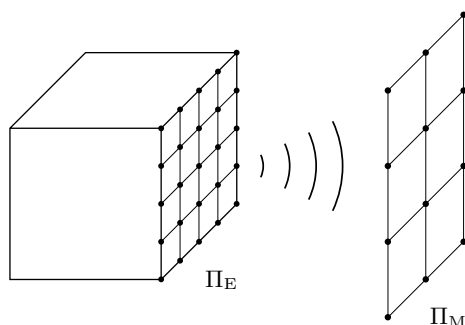
FIGURE 1 – Représentation schématique du problème physique considéré.

On cherche alors à localiser les principales sources sonores sur le domaine à partir des mesures fournies par l'antenne. La méthode consiste à déterminer le niveau sonore sur les limites du domaine : les zones où ce niveau est maximal correspondent aux principaux foyers sonores, ce qui permet en particulier leur localisation.

**2.2 –** La modélisation d'un tel problème dépend grandement de la géométrie de l'objet considéré et des propriétés physiques de l'espace ambiant, ce qui peut amener une grande complexité dans les formulations mathématiques. Pour s'affranchir de ce problème, nous allons émettre quelques hypothèses simplifiant le modèle.

Tout d'abord, nous supposons l'espace ambiant homogène et au repos. De plus, nous ferons l'hypothèse d'un espace ambiant et d'un domaine source ne pouvant réfléchir les ondes acoustiques : ils sont alors dits *absorbants*. Une telle hypothèse est admissible dans la pratique puisque, en règle générale, l'antenne est disposée dans un champ relativement proche du domaine afin de diminuer les bruits parasites pouvant exister hors du domaine d'intérêt.

Par ailleurs, pour des raisons de simplicité, nous ne chercherons pas à évaluer le niveau sonore sur les limites d'un domaine tridimensionnel à proprement parler mais plutôt sur un domaine plan. En effet, l'antenne étant généralement disposée dans un domaine plan  $\Pi_M$  pour des raisons matérielles et d'encombrement, le domaine émettant des sons peut alors être identifié à plan parallèle à l'antenne. Nous nommerons (abusivement) un tel domaine *plan d'évaluation* et nous le noterons  $\Pi_E$ .

FIGURE 2 – Représentation des plans  $\Pi_E$  et  $\Pi_M$ .

**2.3** — Soient  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  la pression acoustique dans l'espace ambiant et  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  la distribution volumique de sources, fonction que l'on cherche à déterminer sur le plan d'évaluation  $\Pi_E$ . Les différentes lois de conservation de la physique et certaines simplifications des modèles mis en jeu montrent que  $p$  et  $q$  sont reliées par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^3, \quad \Delta p(y) + \kappa^2 p(y) = q(y) ; \quad (1)$$

autrement dit la pression acoustique  $p$  satisfait à l'équation de Helmholtz avec pour terme source la distribution volumique  $q$ . On rappelle que  $\Delta$  désigne le *Laplacien*, à savoir l'opérateur qui à une fonction suffisamment régulière associe la somme de ses dérivées secondes. Par ailleurs, la quantité  $\kappa > 0$  est appelée le *nombre d'onde* : ceci provient d'une simplification du modèle qui consiste à considérer que l'onde acoustique est harmonique en temps, *i.e.* oscille à une fréquence  $f = c_0 \kappa / (2\pi)$ , où  $c_0$  est la vitesse de propagation du son dans l'espace ambiant.

À l'équation (1) ci-dessus doit être associée une condition dite *de bord* afin d'assurer l'unicité de la solution. Pour cela, nous exploitons l'hypothèse émise précédemment : l'espace ambiant étant supposé absorbant, l'infini ne peut en particulier pas produire de réflexions acoustiques. Cette hypothèse se traduit mathématiquement par :

$$\forall v \in \mathbb{S}^2, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \partial_v p(rv) - i\kappa p(rv) \right) = 0, \quad (2)$$

où  $\partial_v$  désigne l'opérateur de dérivation suivant un vecteur  $v$ . Cette condition est appelée *condition de rayonnement de Sommerfeld* ; notons que cette condition est en fait placée à l'infini. Sous certaines hypothèses d'intégrabilité sur la fonction  $q$ , le système formé des relations (1) et (2) précédentes entraîne :

$$\forall y \in \mathbb{R}^3, \quad p(y) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x, y) q(x) dx, \quad (3)$$

où la fonction  $\phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid x \neq y\} \rightarrow \mathbb{C}$ , appelée *noyau de Green*, est définie par :

$$\phi(x, y) := \frac{e^{i\kappa \|x-y\|}}{\|x-y\|}.$$

**2.4** — Comme expliqué dans le paragraphe précédent, nous cherchons à déterminer la distribution volumique de sources  $q$  sur le plan d'évaluation  $\Pi_E$ , et cela, en exploitant la formule (3) ainsi que la connaissance de la pression acoustique  $p$  mesurée sur les microphones de l'antenne. Il est important de noter que, disposant d'un nombre fini de mesures de la pression, on ne peut moralement espérer reconstituer  $q$  sur le plan d'évaluation  $\Pi_E$  tout entier. En revanche, il semble plus raisonnable de chercher les valeurs de  $q$  en un nombre fini de points sur  $\Pi_E$ , appelés *points d'évaluation* : cette démarche va naturellement nous amener à une version *discrétisée* de la relation (3). Sous réserve d'un nombre de points d'évaluation suffisamment important et/ou d'une répartition convenable de ces derniers, l'ensemble des valeurs de la distribution  $q$  déterminées aux points d'évaluation peut fournir des renseignements suffisamment précis pour localiser les principaux foyers sonores sur  $\Pi_E$  ; nous renvoyons le lecteur à la figure 2, où une répartition uniforme des micros et points d'évaluation sur les plans  $\Pi_M$  et  $\Pi_E$  est présentée. Or, de telles considérations reviennent à supposer que la distribution volumique de sources  $q$  recherchée a formellement

la forme suivante sur le plan  $\Pi_E$  :

$$\forall x \in \Pi_E, \quad q(x) = \sum_{\alpha=1}^N q(x_\alpha) \delta_{x_\alpha}(x),$$

où  $\delta_{x_\alpha}$  désigne la masse de Dirac au point  $x_\alpha$ . En injectant cette expression discrétisée de  $q$  dans la relation (3), nous obtenons :

$$\forall y \in \mathbb{R}^3, \quad p(y) = \sum_{\alpha=1}^N \phi(x_\alpha, y) q(x_\alpha),$$

d'où en particulier :

$$\forall \beta, \quad p(y_\beta) = \sum_{\alpha=1}^N \phi(x_\alpha, y_\beta) q(x_\alpha). \quad (4)$$

En posant :

$$P := \begin{pmatrix} p(y_1) \\ \vdots \\ p(y_M) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{M,1}(\mathbb{C}), \quad Q := \begin{pmatrix} q(x_1) \\ q(x_2) \\ \vdots \\ q(x_N) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{C}),$$

$$H := (\phi(x_\alpha, y_\beta))_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\kappa\|x_1-y_1\|}}{\|x_1-y_1\|} & \frac{e^{i\kappa\|x_2-y_1\|}}{\|x_2-y_1\|} & \cdots & \cdots & \frac{e^{i\kappa\|x_N-y_1\|}}{\|x_N-y_1\|} \\ \frac{e^{i\kappa\|x_1-y_2\|}}{\|x_1-y_2\|} & \frac{e^{i\kappa\|x_2-y_2\|}}{\|x_2-y_2\|} & \cdots & \cdots & \frac{e^{i\kappa\|x_N-y_2\|}}{\|x_N-y_2\|} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{e^{i\kappa\|x_1-y_M\|}}{\|x_1-y_M\|} & \frac{e^{i\kappa\|x_2-y_M\|}}{\|x_2-y_M\|} & \cdots & \cdots & \frac{e^{i\kappa\|x_N-y_M\|}}{\|x_N-y_M\|} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{C}),$$

la relation (4) se réécrit donc :

$$P = HQ. \quad (5)$$

**2.5** — La détermination des valeurs de  $q$  aux points d'évaluation repose donc sur la résolution du système linéaire (5). Or les conditions matérielles et de mise en pratique vont rendre la résolution de ce problème non triviale :

- 1) La première observation repose sur le fait que la matrice  $H$  est pleine, impliquant notamment une lenteur inhérente dans les calculs.
- 2) Deuxièmement, on remarque que, le plus souvent, la valeur de  $M$  est bien plus petite que la valeur de  $N$ . Ceci s'explique par les contraintes pratiques : le nombre  $M$  de microphones est limité (une des causes principales est le coût induit) alors que la quantité de points d'évaluation  $N$  doit être suffisamment grande afin d'avoir une certaine précision dans les résultats. Par exemple, on peut disposer de  $M = 50$  capteurs et considérer  $N = 1000$  points d'évaluation sur  $\Pi_E$ .
- 3) Suite au point précédent, la tâche consiste alors à déterminer si possible la solution la plus physiquement "réaliste", dans un sens à déterminer. Diverses méthodes basées sur des considérations mathématiques et/ou physiques existent pour calculer des approximations d'une telle solution et elles reposent en général sur plusieurs produits matrice-vecteur du type  $HV$ , où  $V$  appartient à une certaine famille de vecteurs de  $\mathbb{C}^N$ .
- 4) Cependant le calcul d'un produit entre une matrice de  $\mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{C})$  avec un vecteur-colonne de  $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{C})$  possède une complexité en  $\mathcal{O}(NM)$ , ce qui peut avoir un impact négatif dans la pratique. En effet, le système (5) détermine la distribution de sources créée par une onde acoustique oscillant temporellement à *une* fréquence  $f = \frac{c_0\kappa}{2\pi}$  donnée ; en pratique, il est donc nécessaire de résoudre ce système pour un grand nombre de fréquences  $f$  afin de tenir compte de l'influence de toutes les fréquences du bruit émis par la structure. Par ailleurs, il est parfois nécessaire de suivre l'évolution des sources au cours du temps et, pour ce faire, il est nécessaire d'effectuer des produits du type  $HV$  précédents toutes les  $\Delta t$  secondes en temps réel, où  $\Delta t$  peut être très petit ; ces calculs pour un grand nombre de fréquences  $f$  ne doivent donc pas être trop coûteux en temps de calcul.

Les différents points listés précédemment nous montrent la nécessité d'accélérer le produit entre la matrice  $H$  et n'importe quel vecteur  $Q$ , ce qui constitue en fait l'objectif de ce travail. Ainsi, dans ce qui va suivre, nous n'allons pas chercher à résoudre le système  $P = HQ$  à proprement parler, mais présenter puis mettre en œuvre une méthode censée accélérer ces produits matrice-vecteur : la *méthode middleman*.

### 3 La méthode middleman

**3.1** — Dans cette section, nous présentons la méthode dite *middleman*. Plus spécifiquement :

- $d$  y désignera un entier naturel non nul,
- $\phi$  une fonction définie sur un domaine  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ,
- $x_1, \dots, x_N$  et  $y_1, \dots, y_M$  des points de  $\mathbb{R}^d$  tels que  $(x_\alpha, y_\beta) \in \mathcal{D}$  pour tous  $\alpha, \beta$ , et,
- $(q_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$  une famille *non nulle* de nombre complexes.

**3.2** — Pour tout  $\beta$ , on s'intéresse donc au calcul de la somme :

$$\sigma_\beta := \sum_{\alpha=1}^N \phi(x_\alpha, y_\beta) q_\alpha. \quad (6)$$

D'un point de vue numérique, le calcul direct de l'une de ces sommes  $\sigma_\beta$  nécessite  $N$  multiplications ; il faut donc réaliser  $MN$  multiplications pour récupérer les valeurs de  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$  (voir figure 3). La multiplication étant une opération coûteuse en temps de calcul, il importe de trouver des techniques permettant de réduire significativement leur nombre dans le calcul des sommes  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$ .

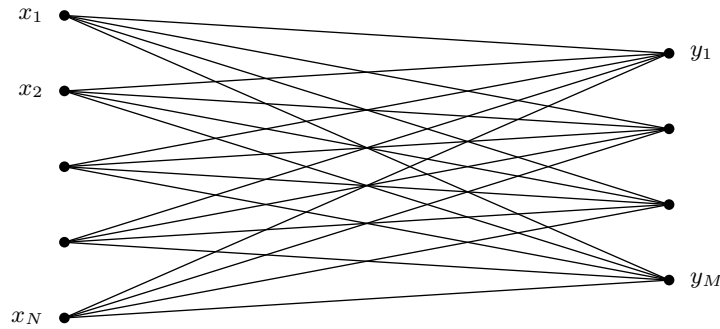


FIGURE 3 – Schéma des dépendances entre les points  $x_\alpha$  et  $y_\beta$  dans le calcul direct des sommes  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$ .

**3.3** — Dans ce paragraphe, on suppose qu'il est possible de *tensoriser* la fonction  $\phi$ , c'est-à-dire que l'on peut déterminer un point  $x^* \in \mathbb{R}^d$ , un entier  $K \in \mathbb{N}^*$  puis, pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ , des fonctions  $c_k(\cdot ; x^*)$  et  $f_k(\cdot ; x^*)$ , dépendantes de  $x^*$ , définies sur une partie de  $\mathbb{R}^d$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , tels que pour tous  $\alpha, \beta$  :

$$\phi(x_\alpha, y_\beta) = \sum_{k=1}^K c_k(x_\alpha ; x^*) f_k(y_\beta ; x^*).$$

Pour tout  $\beta$ , la relation (6) se réécrit alors :

$$\sigma_\beta = \sum_{\alpha=1}^N \left( \sum_{k=1}^K c_k(x_\alpha ; x^*) f_k(y_\beta ; x^*) \right) q_\alpha = \sum_{k=1}^K \left( \sum_{\alpha=1}^N c_k(x_\alpha ; x^*) q_\alpha \right) f_k(y_\beta ; x^*) = \sum_{k=1}^K S_k \cdot f_k(y_\beta ; x^*),$$

où, pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ , la somme :

$$S_k := \sum_{\alpha=1}^N c_k(x_\alpha; x^*) q_\alpha$$

est indépendante de l'indice  $\beta$  considéré. Pour déterminer l'ensemble des sommes  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$ , il suffit donc de :

- 1) Calculer, pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ , la valeur de la somme  $S_k$ .
- 2) Réaliser, pour tous  $k \in \{1, \dots, K\}$  et  $\beta$ , le produit  $S_k \cdot f_k(y_\beta; x^*)$ .

Tout compte fait, le calcul des sommes  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$  ne nécessite plus que  $KN + KM = K(M + N)$  multiplications (voir figure 4). On constate en outre que les calculs à mener lors des étapes 1) et 2) sont aisément parallélisables.

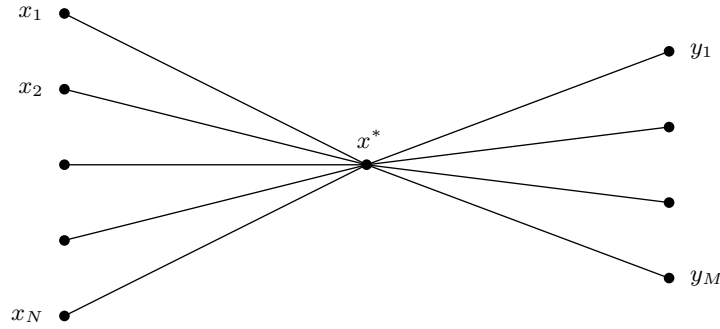


FIGURE 4 – Schéma des dépendances entre les  $x_\alpha$  et  $y_\beta$  dans le calcul de  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$  lorsque  $\phi$  est tensorisée.

**3.4** — En pratique, il n'est généralement pas possible de tensoriser la fonction  $\phi$ , mais seulement de déterminer :

- un point  $x^* \in \mathbb{R}^d$  et un entier  $K \in \mathbb{N}^*$ ,
  - pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ , des fonctions  $c_k(\cdot; x^*)$  et  $f_k(\cdot; x^*)$ , dépendantes de  $x^*$ , définies sur une partie de  $\mathbb{R}^d$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ,
  - puis une fonction  $r(\cdot, \cdot; x^*, K)$ , appelée fonction *reste*, définie sur une partie de  $\mathcal{D}$  contenant tous les couples  $(x_\alpha, y_\beta)$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ,
- tels que, pour tous  $\alpha, \beta$  :

$$\phi(x_\alpha, y_\beta) = \left( \sum_{k=1}^K c_k(x_\alpha; x^*) f_k(y_\beta; x^*) \right) + r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K). \quad (7)$$

Pour tout  $\beta \in \{1, \dots, M\}$ , on obtient alors :

$$\sigma_\beta = \sum_{\alpha=1}^N \left[ \left( \sum_{k=1}^K c_k(x_\alpha; x^*) f_k(y_\beta; x^*) \right) + r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K) \right] q_\alpha.$$

Or contrairement à ce qui a été fait en 3.3, la présence du reste  $r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K)$  ne nous permet plus, pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ , de déterminer une quantité  $S_k$  indépendante de  $\beta$  qui permette d'accélérer le calcul de  $\sigma_\beta$ . Toutefois, il semble utile de chercher à calculer, pour tout  $\beta$ , la quantité :

$$\widetilde{\sigma}_\beta := \sum_{\alpha=1}^N \left( \sum_{k=1}^K c_k(x_\alpha; x^*) f_k(y_\beta; x^*) \right) q_\alpha = \sum_{k=1}^K \left( \sum_{\alpha=1}^N c_k(x_\alpha; x^*) q_\alpha \right) f_k(y_\beta; x^*).$$

En effet, l'étude du paragraphe 3.3 montre que le calcul de  $\widetilde{\sigma}_1, \dots, \widetilde{\sigma}_M$  peut être significativement accéléré. Or, nous pouvons raisonnablement penser que  $\widetilde{\sigma}_1, \dots, \widetilde{\sigma}_M$  constituent de bonnes approximations de  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$  lorsque  $r$  prend des valeurs « suffisamment proches » de 0. C'est ce que précise le résultat du paragraphe suivant.

**3.5 — Proposition.** Soit  $\varepsilon > 0$ , et posons  $q = \max\{|q_\alpha| \mid \alpha = 1, \dots, N\} \in \mathbb{R}_+^*$ . On suppose qu'il existe :

- un point  $x^* \in \mathbb{R}^d$  et un entier  $K \in \mathbb{N}^*$ ,
- pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ , des fonctions, qui dépendent de  $x^*$ ,  $c_k(\cdot; x^*)$  et  $f_k(\cdot; x^*)$  définies sur une partie de  $\mathbb{R}^d$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ,
- une fonction  $r(\cdot, \cdot; x^*, K)$  définie sur une partie de  $\mathcal{D}$  contenant tous les couples  $(x_\alpha, y_\beta)$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , et vérifiant  $|r| < \varepsilon/(Nq)$ ,

tels que, pour tous  $\alpha, \beta$  :

$$\phi(x_\alpha, y_\beta) = \left( \sum_{k=1}^K c_k(x_\alpha; x^*) f_k(y_\beta; x^*) \right) + r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K).$$

Pour tout  $\beta$ , posons  $\widetilde{\sigma}_\beta := \sum_{k=1}^K \left( \sum_{\alpha=1}^N c_k(x_\alpha; x^*) q_\alpha \right) f_k(y_\beta; x^*)$ . Alors :

- (i) Le calcul des sommes  $\widetilde{\sigma}_1, \dots, \widetilde{\sigma}_M$  nécessite  $K(M + N)$  multiplications et est aisément parallélisable.
- (ii) Pour tout  $\beta$ , on a  $|\sigma_\beta - \widetilde{\sigma}_\beta| < \varepsilon$ .

**Preuve.**— Le point (i) résulte des propos tenus en 3.3 ; pour (ii), il suffit de remarquer que pour tout  $\beta$  :

$$|\sigma_\beta - \widetilde{\sigma}_\beta| = \left| \sum_{\alpha=1}^N r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K) q_\alpha \right| \leq Nq|r|. \quad \square$$

**3.6 —** La situation évoquée au paragraphe 3.4 se présente typiquement lorsqu'il existe un développement en série de la fonction  $\phi$  qui permet d'écrire, pour tous  $\alpha, \beta$  :

$$\phi(x_\alpha, y_\beta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x_\alpha; x^*) f_k(y_\beta; x^*), \quad (8)$$

où, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_k(\cdot; x^*)$  et  $f_k(\cdot; x^*)$  sont des fonctions définies sur une partie de  $\mathbb{R}^d$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , et qui dépendent toujours d'un point  $x^*$  de  $\mathbb{R}^d$  ayant permis de réaliser le développement en série précédent. S'il en est ainsi, pour tout  $K \in \mathbb{N}^*$  et tous  $\alpha, \beta$ , on a alors :

$$\phi(x_\alpha, y_\beta) = \sum_{k=0}^K c_k(x_\alpha; x^*) f_k(y_\beta; x^*) + r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K),$$

avec :

$$r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K) := \sum_{k=K+1}^{+\infty} c_k(x_\alpha; x^*) f_k(y_\beta; x^*).$$

Pour appliquer la proposition 3.5 et ainsi calculer des approximations  $\widetilde{\sigma}_1, \dots, \widetilde{\sigma}_M$  de  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$ , avec une précision  $\varepsilon > 0$  donnée et le plus rapidement possible, tout revient à choisir un couple  $(x^*, K) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}$  pour lequel :

- $|r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K)| < \varepsilon/(Nq)$ , afin de garantir  $|\widetilde{\sigma}_\beta - \sigma_\beta| < \varepsilon$  pour tout  $\beta$ , et,
- $K$  suffisamment petit, afin de réduire le nombre de multiplications à effectuer lors du calcul de  $\widetilde{\sigma}_1, \dots, \widetilde{\sigma}_M$ .

**3.7 — EXEMPLE.** Pour illustrer les propos tenus en 3.6, nous présentons un exemple concret de noyau  $\phi$  pour lequel des développements de la forme (7), tirés de [2], proviennent d'un développement en série ; le lecteur pourra trouver dans [1] et [2] d'autres exemples de ce type. Nous proposons ensuite une majoration explicite du reste obtenu par troncature de cette série à un certain rang  $K$ , ce qui, comme nous le verrons, nous permettra de déterminer les plus petites valeurs de  $K$  pour lequel les approximations de nos sommes auront une précision  $\varepsilon > 0$  préalablement fixée.

Pour cet exemple, nous supposons  $d = 1$ . Notons  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ,  $\mathcal{D} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \Delta$ , et soit  $\phi$  le noyau du champ gravitationnel donné par :

$$\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \frac{1}{y - x}.$$

Rappelons préalablement que pour tout  $t \in ]-1, 1[$  :

$$\frac{1}{1 - t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k.$$

À partir de ce développement en série entière, il est possible de donner deux développements du type (8). Le premier d'entre eux sera valable pour des choix de  $x^*$  tels que  $|y_\beta - x^*| < |x_\alpha - x^*|$  pour tous  $\alpha, \beta$ ; nous parlerons alors de développement en *champ proche*. À l'inverse, le second sera valable pour des choix de  $x^*$  tels que  $|y_\beta - x^*| > |x_\alpha - x^*|$  pour tous  $\alpha, \beta$ ; nous parlerons alors de développement en *champ lointain*.

- Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Étant donné un point  $x^* \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$ , on peut réaliser le développement en série entière suivant, valable pour tout  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $|y - x^*| < |x - x^*|$  :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{(y - x^*) - (x - x^*)} = \frac{-1}{(x - x^*) \left(1 - \frac{y - x^*}{x - x^*}\right)} = \frac{-1}{x - x^*} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(y - x^*)^k}{(x - x^*)^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-(y - x^*)^k}{(x - x^*)^{k+1}}. \quad (9)$$

Par suite, pour tout point  $x^* \in \mathbb{R}$  tel que  $x^* \neq x_\alpha$  et  $|y_\beta - x^*| < |x_\alpha - x^*|$  pour tous  $\alpha, \beta$ , on a :

$$\phi(x_\alpha, y_\beta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x_\alpha; x^*) f_k(y_\beta; x^*),$$

où, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_k(\cdot; x^*) : \mathbb{R} \setminus \{x^*\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto \frac{-1}{(x - x^*)^{k+1}}$  et  $f_k(\cdot; x^*) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $y \mapsto (y - x^*)^k$ .

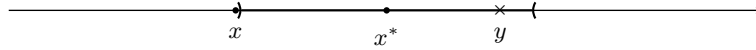


FIGURE 5 – Représentation du domaine des  $y$  admissibles dans le développement en champ proche (9).

- Fixons  $y \in \mathbb{R}$ . Étant donné un point  $x^* \in \mathbb{R} \setminus \{y\}$ , on peut réaliser le développement en série entière suivant, valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x - x^*| < |y - x^*|$  :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{(y - x^*) - (x - x^*)} = \frac{1}{(y - x^*) \left(1 - \frac{x - x^*}{y - x^*}\right)} = \frac{1}{y - x^*} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x - x^*)^k}{(y - x^*)^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x - x^*)^k}{(y - x^*)^{k+1}}. \quad (10)$$

Par suite, pour tout point  $x^* \in \mathbb{R}$  tel que  $x^* \neq y_\beta$  et  $|y_\beta - x^*| > |x_\alpha - x^*|$  pour tous  $\alpha, \beta$ , on a :

$$\phi(x_\alpha, y_\beta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x_\alpha; x^*) f_k(y_\beta; x^*),$$

où, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_k(\cdot; x^*) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto (x - x^*)^k$  et  $f_k(\cdot; x^*) : \mathbb{R} \setminus \{x^*\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $y \mapsto \frac{1}{(y - x^*)^{k+1}}$ .

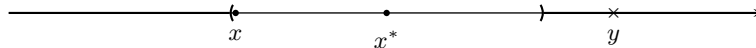


FIGURE 6 – Représentation du domaine des  $y$  admissibles dans le développement en champ lointain (10).

Appliquons à présent le principe évoqué à la fin du paragraphe 3.6 à la fonction  $\phi$  précédente; nous détaillerons seulement les calculs pour son développement (9) en champ proche, ceux que nous mènerions pour son développement (10) en champ lointain étant similaires.

Fixons donc  $K \in \mathbb{N}$  et  $x^* \in \mathbb{R}$  tel que  $x^* \neq x_\alpha$  et  $|y_\beta - x^*| < |x_\alpha - x^*|$  pour tous  $\alpha, \beta$ . Posant :

$$r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K) := -\frac{1}{x_\alpha - x^*} \sum_{k=K+1}^{+\infty} \left( \frac{y_\beta - x^*}{x_\alpha - x^*} \right)^k, \quad (11)$$

la relation (9) implique clairement :

$$\phi(x_\alpha, y_\beta) = \left( \sum_{k=0}^K \frac{-(y_\beta - x^*)^k}{(x_\alpha - x^*)^{k+1}} \right) + r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K).$$



Fixons  $\varepsilon > 0$ . Nous allons à présent déterminer une majoration du reste (11), qui dépend explicitement de  $K$  mais implicitement de la disposition des points  $x^*$ ,  $x_\alpha$  et  $y_\beta$ , et qui garantit, pour tous  $\alpha, \beta$ ,  $|r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K)| < \varepsilon$ . Rappelons tout d'abord que, pour tout  $t \in ]-1, 1[$  :

$$\sum_{k=K+1}^{+\infty} t^k = \frac{t^{K+1}}{1-t}, \quad \text{donc} \quad \left| \sum_{k=K+1}^{+\infty} t^k \right| \leq \frac{|t|^{K+1}}{1-|t|}.$$

D'après (11), pour tous  $\alpha, \beta$ , cette dernière inégalité appliquée à  $t = \frac{y_\beta - x^*}{x_\alpha - x^*}$  fournit :

$$|r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K)| \leq \left| \frac{y_\beta - x^*}{x_\alpha - x^*} \right|^{K+1} \frac{1}{|x_\alpha - x^*| - |y_\beta - x^*|}.$$

Pour tous  $\alpha, \beta$ , notant  $r_{\alpha, \beta} = \left| \frac{y_\beta - x^*}{x_\alpha - x^*} \right|$ , la relation précédente se réécrit :

$$|r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K)| \leq \frac{r_{\alpha, \beta}^{K+1}}{|x_\alpha - x^*|(1 - r_{\alpha, \beta})}. \quad (12)$$

Définissons alors :

$$m(x^*) = \min_{\alpha} |x_\alpha - x^*| \quad \text{et} \quad R(x^*) = \max_{\alpha, \beta} (r_{\alpha, \beta}).$$

Ayant d'une part  $x_\alpha \neq x^*$  pour tout  $\alpha \in \{1, \dots, N\}$ , on constate que  $m(x^*) > 0$ . D'autre part, pour tous  $\alpha, \beta$ , on a  $r_{\alpha, \beta} \in ]0, 1[$ , puisque  $|x_\alpha - x^*| < |y_\beta - x^*|$ , et par suite  $R(x^*) \in ]0, 1[$ , les  $\alpha, \beta$  étant en nombre fini. En utilisant alors la croissance de la fonction  $t \mapsto t^{K+1}/(1-t)$  sur  $]0, 1[$ , pour tous  $\alpha, \beta$ , nous déduisons de (12) :

$$|r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K)| \leq \frac{R(x^*)^{K+1}}{m(x^*)[1 - R(x^*)]}.$$

Pour garantir  $|r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K)| < \varepsilon$ , il nous suffit donc d'imposer :

$$\frac{R(x^*)^{K+1}}{m(x^*)[1 - R(x^*)]} < \varepsilon,$$

ce qui équivaut encore à :

$$K > \frac{\ln[\varepsilon \cdot m(x^*) \cdot (1 - R(x^*))]}{\ln[R(x^*)]} - 1.$$

En vertu des majorations précédentes, désignant par  $E$  la fonction partie entière, nos calculs montrent que l'entier :

$$K_\varepsilon(x^*) := E\left(\frac{\ln[\varepsilon \cdot m(x^*) \cdot (1 - R(x^*))]}{\ln[R(x^*)]}\right),$$

est le plus petit entier  $K \in \mathbb{N}$  pour lequel nous puissions garantir  $|r(x_\alpha, y_\beta; x^*, K)| < \varepsilon$ . Il est toutefois important de noter que, la valeur de  $K_\varepsilon(x^*)$  dépendant de  $x^*$ , il est possible de réduire la valeur de l'entier  $K_\varepsilon(x^*)$  en jouant sur la position de  $x^*$ . C'est là tout l'enjeu de la méthode middleman : ajuster la position du point  $x^*$  considéré pour réduire la valeur de  $K_\varepsilon(x^*)$ , et ainsi minimiser le nombre d'opérations à effectuer.

## 4 Application au contexte de l'étude

**4.1** — Dans cette section, on se propose d'appliquer la théorie de la section 3 au contexte de l'étude introduite à la section 2. Rappelons que notre étude porte sur l'équation de Helmholtz en dimension 3 couplée à la condition de rayonnement de Sommerfeld, *i.e.* :

$$\begin{cases} \Delta p(y) + \kappa^2 p(y) = q(y) & \forall y \in \mathbb{R}^3 \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \partial_\nu p(rv) - i\kappa p(rv) \right) = 0 & \forall v \in \mathbb{S}^2 \end{cases},$$

dont la solution est donnée par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^3, \quad p(y) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x-y)q(x) dx,$$

où, notant  $\Delta := \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$  puis  $\mathcal{D} = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus \Delta$  :

$$\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \frac{e^{i\kappa\|x-y\|}}{\|x-y\|}.$$

Comme nous l'avons expliqué en 2.4 et 2.5, notre objectif consiste à accélérer le calcul de sommes du type :

$$\sum_{\alpha=1}^N \phi(x_\alpha, y_\beta)q(x_\alpha),$$

pour tout  $\beta \in \{1, \dots, M\}$ , et ce donc, via une tensorisation du noyau  $\phi$ .

**4.2** — Pour nous ramener au cadre théorique de la section 3, nous devons déterminer une expression de  $\phi$  de la forme (7). Or ici, et contrairement à ce qui a par exemple été fait dans l'exemple 3.7, il est nettement plus délicat d'aboutir à telle décomposition de la fonction  $\phi$ .

Pour y parvenir, nous exploitons le fait que, d'après l'article [3], nous avons pour tout  $(x, y) \in \mathcal{D}$  :

$$\phi(x, y) = i\kappa \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i\kappa\langle s, y \rangle} T_l(s, x) ds, \quad (13)$$

où :

$$T_l(s, x) := \sum_{m=0}^l \frac{(2m+1)i^m}{4\pi} h_m^{(1)}(\kappa\|x\|) P_m[\cos(\widehat{s, x})].$$

Pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $h_m^{(1)} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  désigne la fonction de Hankel du premier type d'ordre  $m$ ,  $P_m : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  le polynôme de Legendre d'ordre  $m$  ; enfin,  $\widehat{s, x}$  désigne l'angle entre les vecteurs  $s$  et  $x$ .

**4.3** — Pour obtenir une expression de  $\phi$  de la forme souhaitée, on commence tout d'abord par approcher la limite apparaissant dans la relation (13), pour une valeur de  $L \geq 0$  suffisamment grande, par :

$$I_L := \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i\kappa\langle s, y \rangle} T_L(s, x) ds.$$

Ceci induit une première erreur  $\eta_{\text{lim}}(\cdot, \cdot ; L) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  définie, pour  $(x, y) \in \mathcal{D}$ , par :

$$\eta_{\text{lim}}(x, y ; L) := \left( \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i\kappa\langle s, y \rangle} T_l(s, x) ds \right) - I_L.$$

On utilise ensuite une formule de quadrature pour approcher l'intégrale  $I_L$  par une somme finie de la forme :

$$S_{K,L} := \sum_{k=0}^K \omega_k e^{-i\kappa\langle s_k, y \rangle} T_L(s_k, x),$$

où  $K \in \mathbb{N}$  et, pour tout  $k \in \{0, \dots, K\}$ ,  $s_k$  désigne un point de  $\mathbb{S}^2$  associé à un poids  $\omega_k \in ]0, 1[$ . Cette seconde approximation induit une erreur  $\eta_{\text{quad}}(\cdot, \cdot ; K, L) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  définie, pour  $(x, y) \in \mathcal{D}$ , par :

$$\eta_{\text{quad}}(\cdot, \cdot ; K, L) := I_L - S_{K,L}.$$

Signalons que cette erreur  $\eta_{\text{quad}}(\cdot, \cdot ; K, L)$  dépend en outre du choix de  $K$  et des couples  $[(s_k, \omega_k)]_{k \in \{0, \dots, K\}}$ .

**4.4** — Soient  $x, y \in \mathcal{D}$  et  $x^* \in \mathbb{R}^3$  tel que  $x - x^* \in \mathcal{D}$  et  $y - x^* \in \mathcal{D}$ . Alors, d'après 4.2 et 4.3 :

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \phi(x - x^*, y - x^*) \\ &= i\kappa \left[ \left( \sum_{k=0}^K \omega_k e^{-i\kappa \langle s_k, y - x^* \rangle} T_L(s_k, x - x^*) \right) + \eta_{\text{quad}}(x - x^*, y - x^*; K, L) + \eta_{\text{lim}}(x - x^*, y - x^*; L) \right]. \end{aligned}$$

Posant d'une part, pour tout  $k \in \{0, \dots, K\}$  :

$$c_k(x; x^*) := i\kappa \omega_k \cdot T_L(s_k, x - x^*), \quad f_k(y; x^*) := e^{-i\kappa \langle s_k, y - x^* \rangle},$$

et d'autre part :

$$r(x, y; x^*, K, L) := i\kappa [\eta_{\text{quad}}(x - x^*, y - x^*; K, L) + \eta_{\text{lim}}(x - x^*, y - x^*; L)],$$

on obtient :

$$\phi(x, y) = \left( \sum_{k=0}^K c_k(x; x^*) f_k(y; x^*) \right) + r(x, y; x^*, K, L),$$

ce qui rend la proposition 3.5 applicable.

REMARQUE. Il semble utile d'insister sur le fait que, contrairement à l'exemple étudié en 3.7, l'expression de  $\phi$  ainsi obtenue ne résulte pas d'un développement en série, mais de deux approximations successives :

- La première, qui dépend d'un paramètre  $L \geq 0$ , résulte de l'approximation de la limite, lorsque  $l \rightarrow +\infty$ , d'une intégrale dépendant d'un paramètre  $l$  par une intégrale  $I_L$  dépendant du paramètre  $L$  convenablement choisi.
- La seconde, qui dépend d'un paramètre  $K \in \mathbb{N}$ , consiste à approcher la valeur de cette intégrale  $I_L$  par une somme à  $(K + 1)$  termes, à l'aide d'une formule de quadrature à  $(K + 1)$  points.

**4.5** — Pour la validation numérique des éléments théoriques exposés jusqu'à présent, on considère un problème acoustique direct représenté par la figure 7. Les plan d'évaluation  $\Pi_E$  et l'antenne  $\Pi_M$  seront tous deux supposés carrés ; leur longueur, que nous appellerons *dimension caractéristique* et noterons  $D$ , est fixée à 1m. En outre, nous supposons l'antenne  $\Pi_M$  incluse dans le plan d'équation  $Y = 0$ . Les autres paramètres du problème sont ajustés de manière à respecter les règles et hypothèses théoriques d'application de la méthode middleman :

- 1) La longueur d'onde est fixée à  $D/2 = 0,5\text{m}$ , le nombre de microphones égale  $21^2 = 421$ , et le pas du maillage du plan d'observation  $\Pi_E$ , choisi uniforme et identique dans les deux directions, vaut  $D/20$ .
- 2) La distance entre le plan d'évaluation  $\Pi_E$  et l'antenne  $\Pi_M$  est fixée à  $2D$ , *i.e.* 2m.
- 3) La source sonore est supposée positionnée dans le plan  $\Pi_E$  au point de coordonnées  $(0, -2D, 0)$ .
- 4) Le point  $x^*$  est placé à un pas du plan d'évaluation  $\Pi_E$ , soit au point de coordonnées  $(0, -2D + D/20, 0)$ .

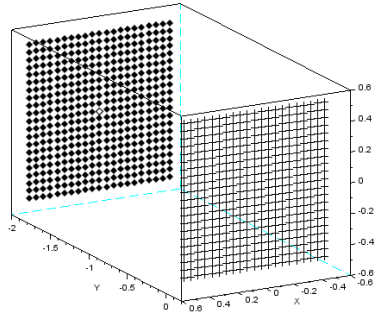


FIGURE 7 – Représentation géométrique du problème considéré.

Le champ de pression  $p$  généré sur l'antenne  $\Pi_M$ , que nous appellerons *pression de référence* dans ce qui suit, est représenté par la figure 8. Sous les conditions précédentes, cette pression de référence satisfait au système linéaire (5). Nous allons à présent tenter de recalculer cette pression  $p$  de référence par application de la méthode middleman.

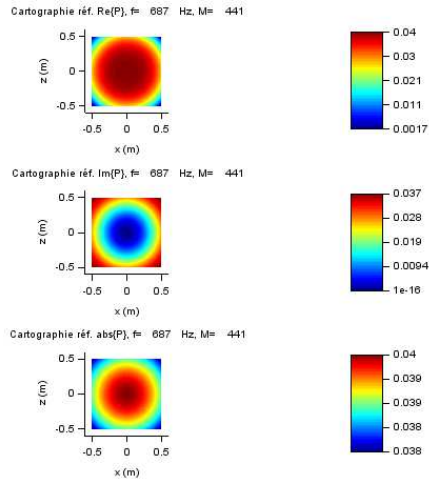


FIGURE 8 – Pression de référence générée sur l'antenne  $\Pi_M$ , à valeurs complexes.

La mise en oeuvre numérique de la méthode middleman utilisant la forme donnée dans le paragraphe 4.4 fait intervenir des techniques d'intégration numérique sur la sphère unité : ceci est un peu délicat et demande de l'attention. Dans notre travail, nous avons opté pour la méthode d'intégration Gauss-Legendre et le nombre  $K$  de points de quadrature sur la sphère unité a été fixé à 4096.

Il nous semble par ailleurs hors de propos de présenter dans ce rapport les détails de l'implémentation de la méthode middleman ; signalons seulement que ceux-ci peuvent être trouvés dans la publication [3] de DARVE. Néanmoins, précisons que la détermination de la valeur optimale du paramètre  $L$  introduit en 4.3, qui mène à la meilleure approximation du champ de pression  $p$  sur l'antenne, s'obtient au moyen de l'étude de l'erreur d'approximation du problème direct par la méthode middleman présentée dans la preuve de la proposition 3.5. Faisant varier ce paramètre  $L$  entre 0 et 63, nous avons représenté dans la figure 9 l'évolution de cette erreur d'approximation.

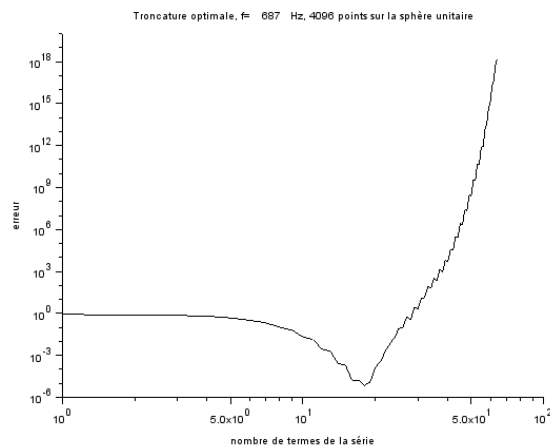


FIGURE 9 – Évolution de l'erreur d'approximation du problème direct par la méthode middleman en fonction de  $L$ .

Il est donc clair que la valeur optimale du paramètre  $L$  doit être choisie égale à 18. Signalons aussi que des estimations automatiques de ce paramètre de troncature sont proposées dans la littérature.

Sous la forme et dans les conditions choisies pour le problème acoustique direct, nous avons représenté dans la figure 10 le champ de pression obtenu par application de la méthode middleman. Au regard de la figure (8), nous pouvons donc affirmer que la méthode middleman nous permet de retrouver la pression de référence générée expérimentalement. Si cette méthode ne semble pas apporter de gain significatif en temps de calcul, dans la résolution de ce problème acoustique direct, la séparation de variables ainsi opérée possède des avantages intéressants pour les applications industrielles de MicrodB qu'il conviendra d'exploiter.

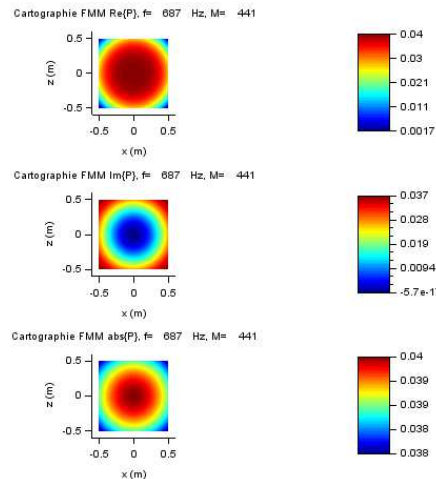


FIGURE 10 – Champ de pression calculée au moyen de la méthode middleman.

## Conclusion

Dans ce rapport, et en particulier dans la section 3, nous avons mis en avant l'intérêt de la méthode middleman qui, dans un cadre théorique, permet effectivement la réduction du coût en calculs de certains produits matrice-vecteur. Plus précisément, cette méthode s'applique à des produits dont chaque élément de la matrice est donné par un noyau pouvant être *tensorisé*, ce qui restreint en particulier son champ d'application. Par ailleurs, les études menées au paragraphe 3.7 et à la section 4 ont pu montrer que la mise en œuvre de la méthode middleman dépend fortement du problème considéré, puisque la tensorisation d'un noyau dépend grandement de son expression analytique.

Les résultats que nous avons obtenus durant cette étude prouvent que la méthode middleman peut être appliquée à un problème acoustique direct. Ce n'est pas nouveau dans la communauté acoustique, mais nous en connaissons et maîtrisons désormais le périmètre d'applicabilité. La suite du travail consistera à étudier sa mise en œuvre et ses apports dans les problèmes acoustiques inverses.

## Références

- [1] R. BEATSON, L. GREENGARD, *A short course on fast multipole methods*, disponible à partir du lien : [http://math.nyu.edu/faculty/greengar/shortcourse\\_fmm.pdf](http://math.nyu.edu/faculty/greengar/shortcourse_fmm.pdf)
- [2] V. CHANDRAKANT RAYKAR, *A short primer on the fast multipole method*, disponible à partir du lien : [http://www.umiacs.umd.edu/labs/cvl/pirl/vikas/publications/FMM\\_tutorial.pdf](http://www.umiacs.umd.edu/labs/cvl/pirl/vikas/publications/FMM_tutorial.pdf)
- [3] E. DARVE, *The Fast Multipole Method : Numerical Implementation*. *Journal of Computational Physics* **160**, 195–240 (2000)