

Université de Kinshasa
Faculté des Sciences Economiques et de Gestion
Département des Sciences Economiques
B.P. 832 Kinshasa XI

Modèles de régression non linéaires
« *Éléments de Théorie et pratiques sur Logiciel* »

Par

Jonas KIBALA KUMA

(DEA-PTC Economie/Unikin en cours)

-

Centre de Recherches Economiques et Quantitatives
(CREQ)

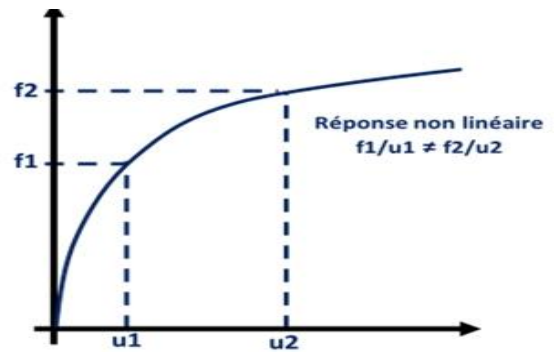
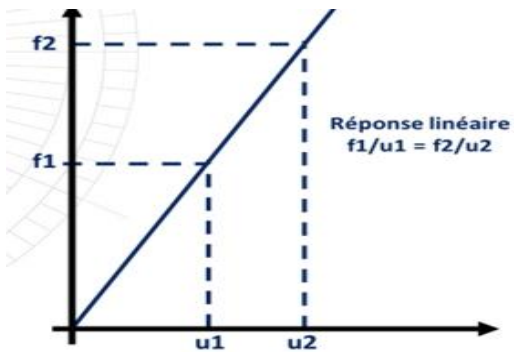
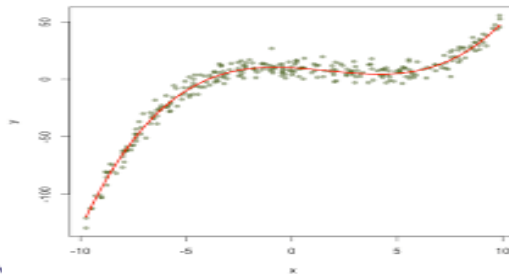
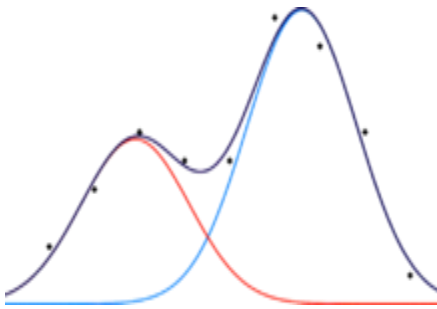
« Rien n'est trop tôt, ni trop tard, tout est à sa place ».
(Jonas Kibala)

Juillet 2019

Copyright © Jonas Kibala_juillet_2019 - Tous droits réservés.

ère Partie
Éléments de Théorie

Images illustratives



CHAPITRE VI

REGRESSIONS NON LINEAIRES (RNL)

Plan

- Introduction
- Modèles non linéaires à linéarisation facile
- Modèles non linéaires complexes (quelques cas)
- Méthodes (Procédures) d'estimation des modèles non linéaires

6.1. INTRODUCTION

Un modèle est linéaire si ses paramètres et ses variables sont linéaires, ainsi sa forme fonctionnelle sera linéaire. Un paramètre est linéaire s'il n'est pas multiplié avec un autre paramètre ou s'il n'est pas élevé à une puissance supérieure à 1. De même pour une variable, elle sera linéaire si la sensibilité d'une autre variable à la suite de sa variation est constante, c'est-à-dire indépendante de la variable à la base du changement ou d'une autre variable quelconque dans le modèle.

A titre illustratif, considérons les modèles suivants :

	équations	dérivées	Type de modèle
(1)	$Y_t = a_0 + a_1X_t + a_2Z_t + \varepsilon_t$	$\partial Y_t / \partial X_t = a_1 ; \partial Y_t / \partial Z_t = a_2$	LP
(2)	$Y_t = a_0 + [(1 - \lambda)a]^2 X_t + \varepsilon_t$		NLP (de X_t) et LV
(3)	$Y_t = a_0 + a_1(1/X_t) + a_2\sqrt{Z_t} + \varepsilon_t$	$\partial Y_t / \partial X_t = -a_1X_t^{-2} ;$ $\partial Y_t / \partial Z_t = a_2/2\sqrt{Z_t}$	NLV
(4)	$Y_t = 1/a_0 + a_1/a_0 X_t^2 + a_2Z_t + \varepsilon_t$	$\partial Y_t / \partial X_t = (2a_1/a_0)X_t ;$ $\partial Y_t / \partial Z_t = a_2$	NLP et NLV (X_t)

Avec : NLP = Non Linéaire dans les Paramètres ; NLV = Non Linéaire dans les Variables ; LP = Linéaire dans les Paramètres ; LV = Linéaire dans les Variables.

La linéarité est l'une des hypothèses fondamentales de la méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO) au point que sa violation rend inefficace l'utilisation de cette méthode d'estimation (erreurs de spécification, procédures usuelles de test non valides). Considérant les phénomènes économiques, contrairement aux expérimentations des sciences de la nature, cette hypothèse est souvent violée ; car, lesdits phénomènes sont pour la plupart illustrés par des modèles non linéaires (exemple : la relation inflation et chômage, la fonction de demande inverse, etc.). Toutefois, il est possible de passer d'un modèle non linéaire à un modèle linéaire transformé grâce à des procédures de transformation (linéarisation)⁽¹⁾, telles que :

¹ Mais, précisons que la tâche n'est pas facile si la non linéarité se pose dans les paramètres.

- Générer des nouvelles séries (variables) qui définissent les anciennes supposant que la non linéarité se pose dans les variables. Exemple : $Y^* = Y^2$ ou $X^* = X^{-1/3}$.
- Appliquer des transformations (logarithmique, différentielle,...) au modèle au cas où celui-ci se présente sous une forme non linéaire.

Notons aussi que l'on distingue :

- les modèles non linéaires à linéarisation facile appelés « *modèles de régression intrinsèquement linéaires* » (ceux qui peuvent devenir linéaires après transformation) : c'est des modèles non linéaires dans les variables, mais linéaires dans les paramètres ;
- et les modèles non linéaires complexes (difficiles à linéariser) appelés « *modèles de régression intrinsèquement non linéaires* » : c'est des modèles linéaires dans les variables ou non et non linéaires dans les paramètres.

6.2. MODELES NON LINEAIRES FACILES OU A LINEARISATION FACILE

Il s'agit des modèles dont la spécification n'est pas linéaire (NL dans les variables), mais ses paramètres sont linéaires. Ci-dessous, nous présentons quelques types de ces modèles et les procédures de transformation pour les rendre linéaires.

6.2.1. Fonctions de type exponentiel

a) Les modèles log-log ou double log

Un modèle log-log ou double log, appelé aussi « modèle à élasticité constante⁽¹⁾ », est caractérisé par la présence de logarithme dans tous les deux membres du dit modèle.

➤ **Fonction de production de type Cobb-Douglass**

Pour illustrer, nous présentons les formes non linéaire et linéaire d'une fonction de production de type Cobb-Douglass :

- Forme non linéaire : $Q = AK^{a_1}L^{a_2}e^u$
- Forme linéaire (transformation logarithmique) : $q = a_0 + a_1k + a_2l + u$

Avec : $q = \log(Q)$; $k = \log(K)$; $l = \log(L)$; $a_0 = \log(A)$; $u = \log(e^u)$; a_1 et a_2 = les élasticités (constantes). En effet :

$$a_1 = \frac{d \ln Q}{d \ln K} = \frac{dQ/Q}{dK/K} = \varepsilon_{QK} = \text{élasticité de } Q \text{ par rapport à } K$$

La fonction ainsi transformée peut être estimée par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) du fait qu'elle est linéaire.

➤ **Courbe de Phillips (relation inflation-chômage)**

- Forme non linéaire : $D = A \left(\frac{W}{P} \right)^b$

¹ Du fait que les élasticités sont constantes (indépendantes des variables du modèle).

- Forme linéaire (transformation logarithmique) : $\ln D = \ln A + b[\ln W - \ln P]$

$$\rightarrow d = a + bw - bp$$

Avec : $d = \ln D$; $a = \ln A$; $w = \ln W$; $p = \ln P$.

➤ **Fonction CES (Constant Elasticity Substitution)**

- Forme non linéaire de la fonction CES :

$$Q = b_1[b_2K^{b_3} + (1 - b_2)L^{b_3}]^{b_4}$$

Autrement, elle peut s'écrire :

$$Q = b_1[b_2K^{b_3} + (1 - b_2)L^{b_3}]^{v/b_4}$$

Avec :

- $\rho = 1/(1 - b_3)$: l'élasticité de substitution ;
 - v : les rendements d'échelle ($\hat{v} = \hat{b}_3 \times \hat{b}_4$) ;
 - $b_3 < 0$ et $b_4 < 0$;
 - b_1 ; b_2 ; b_3 et b_4 : les paramètres à estimer ;
 - Q : production ; K : facteur capital et L : facteur travail.
- Forme linéaire (transformation logarithmique) :

$$\log Q = \log(b_1) + b_4 \log[b_2K^{b_3} + (1 - b_2)L^{b_3}]$$

La fonction ainsi transformée n'est pas linéaire malgré le passage au logarithme, ainsi l'on ne peut pas recourir aux MCO pour estimer ses paramètres ; dans ce cas, l'on devra utiliser une méthode d'estimation des modèles non linéaires.

b) Les modèles semi-log (log-lin et lin-log)

Un modèle semi-log est caractérisé par la présence de logarithme dans l'un de ses membres : soit à gauche (ainsi on parle de modèle log-lin), soit à droite (on parle de modèle lin-log).

(i) Les modèles log-lin

Dans ces modèles, la variable dépendante est prise en logarithme alors que les variables explicatives sont simplement linéaires.

1^{er} exemple

- Forme non linéaire : $Y_t = e^{(a_0 + a_1X_t + u)}$
- Forme linéaire (transformation logarithmique) : $\ln Y_t = a_0 + a_1X_t + u$.

$$y_t = a_0 + a_1X_t + u \rightarrow a_1 = \frac{d(\ln Y_t)}{dX_t} = \frac{dY}{Y} * \frac{1}{X} = \frac{dY}{Y} * \frac{1}{X}$$

Avec : a_1 = taux de croissance de « Y » par rapport à la variation absolue de X (semi-élasticité).
 Si l'on multiplie « a_1 » par 100, on obtient une *semi-élasticité* de Y par rapport à X.

2^{ème} exemple

- Forme non linéaire : $Y_t = e^{(a_0+a_1t)} = e^{a_0} * e^{a_1t}$. Si $t = 0$, $Y_0 = e^{a_0} \rightarrow Y_t = Y_0 e^{a_1t}$.
- Forme linéaire (transformation logarithmique) : $\ln Y_t = \ln Y_0 + a_1 t$.

$$\rightarrow a_1 = \frac{\partial(\ln Y_t)}{\partial t} = \frac{dY_t}{dt} * \frac{1}{t} = \text{taux de croissance de } Y_t \text{ à l'instant } t$$

(ii) Les modèles lin-log

- Forme non linéaire : $e^{Y_t} = AX_t^{a_1} e^u$
- Forme linéaire (transformation logarithmique) : $\ln(e^{Y_t}) = \ln(AX_t^{a_1} e^u)$.

$$Y_t = \ln A + a_1 \ln X_t + u = a_0 + a_1 \ln X_t + u \rightarrow a_1 = \frac{dY_t}{d(\ln X_t)} = \frac{dY_t}{dX_t/X_t} = \frac{dY_t}{dX_t} * X_t$$

$$\rightarrow dY_t = a_1 \left(\frac{dX_t}{X_t} \right)$$

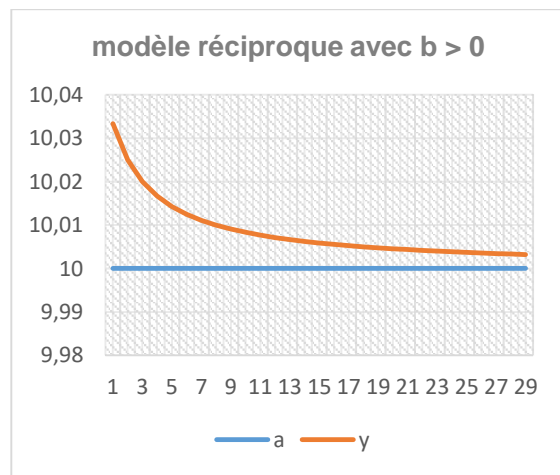
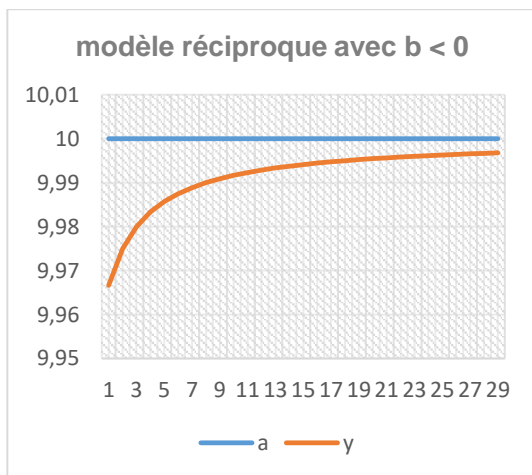
Avec : $a_0 = \ln A$; a_1 = variation absolue de « Y » par rapport à la variation relative de X (semi-élasticité).

Dans la relation « $Y_t = a_0 + a_1 \ln X_t + u$ », pour mieux interpréter le paramètre « a_1 » une fois estimé, il tient de le diviser par 100, soit le multiplier par 0,01. Pour illustrer, considérons le modèle estimé suivant : $\hat{Y}_t = 25 + 324 \ln X_t$. Selon le modèle ainsi spécifié (X_t , prise en logarithme, croît plus vite que Y_t) et estimé, lorsque X_t s'accroît de 1%, Y_t s'accroît aussi de 3,24 unités (soit 324/100).

c) Les modèles réciproques ou inverses

- Forme non linéaire : $Y_t = a + b \left(\frac{1}{X_t} \right) + u_t \rightarrow \frac{dY}{dX} = -b \left(\frac{1}{X_t^2} \right)$: non linéaire ; $\lim_{X_t \rightarrow \infty} Y_t = a$.
- Forme linéaire (transformation) : $Y_t = a_0 + a_1 X_t' + u$, avec : $X_t' = 1/X_t$.

Graphiquement, ce modèle se présente comme suit ($\forall a = 10$; $b = 0,5$; $X_t = 1,2,3 \dots$) :



Il y a aussi des modèles réciproques de la forme : $1/Y_t = a + bX_t + u_t$. La forme linéaire d'un tel modèle, après transformation, est :

$$Y'_t = a_0 + a_1X_t + u_t, \text{ avec : } Y'_t = 1/Y_t.$$

Sous forme générale, le modèle réciproque s'écrit : $(Y_t - a)(X_t - b) = c$. Ce modèle est non linéaire dans les paramètres et dans les variables, car il peut s'écrire comme suit ($u_t =$ terme d'erreur) :

$$Y_t = \frac{c}{(X_t - b)} + a \rightarrow Y_t = a + \frac{c}{(X_t - b)} \rightarrow Y_t = a + c(X_t - b)^{-1} + u_t$$

Pour obtenir la forme linéaire d'un tel modèle, l'on doit inverser l'une des variables (soit Y ou X) ; aussi, si l'on annule l'un des paramètres (soit « a » ou « b »), on retrouve les formes des modèles réciproques ci-haut présentés. En effet :

➤ Si $a = 0$, on a :

$$Y_t(X_t - b) = c \rightarrow cY_t^{-1} = X_t - b \rightarrow \frac{1}{Y_t} = \frac{-b}{c} + \frac{1}{c}X_t \rightarrow Z_t = b_0 + b_1X_t + u_t$$

Le modèle transformé ainsi obtenu (en Z_t) est linéaire sur les paramètres (b_0 et b_1) et sur la variable (X_t), et peut être estimé par les MCO, avec : $b_0 = -b/c$; $b_1 = 1/c$; et $Z_t = 1/Y_t = Y_t^{-1}$.

➤ Si $b = 0$, on a :

$$(Y_t - a)X_t = c \rightarrow Y_t = cX_t^{-1} + a \rightarrow Y_t = a + c \frac{1}{X_t} \rightarrow Y_t = b_0 + b_1Z_t + u_t$$

Le modèle transformé ainsi obtenu (en Y_t) est linéaire sur les paramètres (b_0 et b_1) et sur la variable transformée (Z_t), et peut être estimé par les MCO, avec : $b_0 = a$; $b_1 = c$; et $Z_t = 1/X_t = X_t^{-1}$.

d) Les modèles log-inverse (log-réciproque ou log-hyperbole)

- Forme non linéaire : $Y_t = e^{a-b(\frac{1}{X_t})}$; $\lim_{X_t \rightarrow 0^+} Y_t = 0$ et $\lim_{X_t \rightarrow \infty} Y_t = e^a$.
- Forme linéaire (transformation) : $\ln Y_t = a - b\left(\frac{1}{X_t}\right) \rightarrow Y'_t = a - bX'_t + u$, avec : $Y'_t = \ln Y_t$ et $X'_t = 1/X_t$. Notons aussi les caractéristiques suivantes :

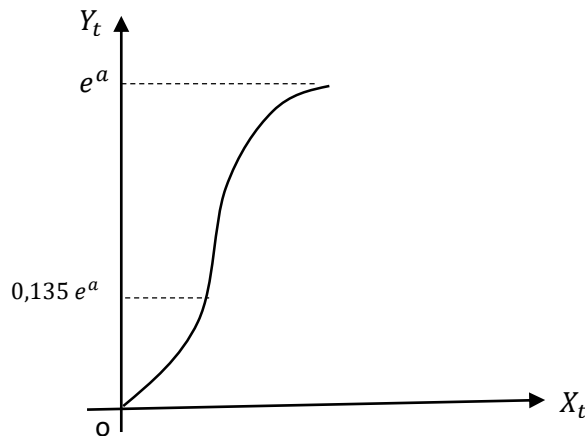
$$\frac{\partial(\ln Y_t)}{\partial X_t} = \frac{dY_t}{dX_t} * \frac{1}{Y_t} = b \left(\frac{1}{X_t^2} \right) \rightarrow \frac{dY_t}{dX_t} = \left(\frac{b}{X_t^2} \right) \exp \left[a - b \left(\frac{1}{X_t} \right) \right]$$

$$\rightarrow \frac{d^2Y_t}{dX_t^2} = \left(\frac{b^2}{X_t^4} - \frac{2b}{X_t^3} \right) \exp \left[a - b \left(\frac{1}{X_t} \right) \right]$$

$$\frac{d^2Y_t}{dX_t^2} = 0 \rightarrow b^2 - 2bX_t = 0 \rightarrow X_t = b/2 \text{ (point d'inflexion)}$$

$$X_t \text{ dans } Y_t \rightarrow Y_t = \exp \left[a - b \left(\frac{1}{b/2} \right) \right] = e^{(a-2)} = e^{-2} * e^a = 0,135e^a$$

Graphiquement, ce modèle prend la forme suivante :



6.2.2. Fonctions polynomiales ou inverses

a) *Fonctions polynomiales*

Pour ce type de fonction, nous présentons sa forme, ses caractéristiques et quelques cas illustratifs.

- Forme : $F(x) = y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_qx^q$; avec : q = degré du polynôme, et N = taille de l'échantillon. Il n'y a qu'une seule variable explicative (à droite) élevées à diverses puissances (différentes).
- Caractéristiques (conditions) : (i) c'est des fonctions linéaires dans les paramètres (par définition) ; (ii) il y a risque de multicolinéarité élevé entre les variables « x^q », bien qu'il n'y ait visiblement pas de relation linéaire entre elles. Ce risque est d'autant plus élevé que N est réduite ; (iii) « q » doit être limité (degré idéal ou maximal : $q = 4$). Notons que le cas extrême correspond au degré $q = N - 1 \rightarrow R^2 = 1$ (dans ce cas, l'ajustement est bon, mais il n'y a pas d'interprétation économique, la valeur prédictive du modèle est nulle).
- Transformation linéaire : Pour obtenir une forme linéaire d'une fonction polynomiale, il suffira de la réécrire comme suit :

$$Y_t = a_0 + a_1X_t + a_2X_t^2 + \dots + a_qX_t^q \rightarrow Y_t = a_0 + a_1X_{1t} + a_2X_{2t} + \dots + a_qX_{qt}$$

Avec : $X_{1t} = X_t$; $X_{2t} = X_t^2$; ... ; $X_{qt} = X_t^q$.

- Quelques cas (exemples courants) :
 - Série chronologique (tendance, $t = \text{temps}$) avec deux points de retournement (ruptures) :

$$F(t) = Y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + u_t$$

- Fonction de coût total (CT = coût total ; Q = production) :

$$CT(Q) = a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + u_t$$

b) Fonctions inverses

Ces fonctions prennent la forme suivante :

$$y = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{x} \right), \text{ avec : } y \rightarrow a_0 \forall x \rightarrow \infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow \infty} y = a_0$$

La relation inflation-chômage, soit la courbe de Phillips, témoigne de l'usage des fonctions inverses en économie.

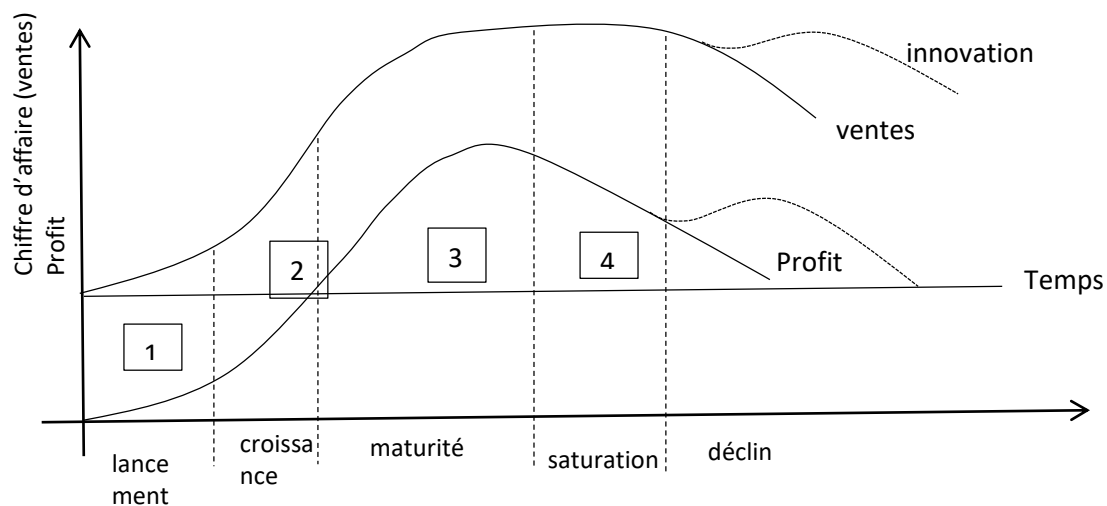
6.3. MODELES NON LINEAIRES COMPLEXES (quelques cas)

6.3.1. Notes

Au sujet des modèles non linéaires complexes, soit des modèles pour lesquels la transformation linéaire est difficile (si pas impossible), notons ce qui suit :

- Les modèles de diffusion et ceux de courbe de vie d'un produit sont une illustration des modèles non linéaires complexes (leur linéarisation n'est pas facile). Ces deux concepts, recourant aux mêmes formulations mathématiques et expliquant une même réalité (sous-jacent), se diffèrent très peu.
- Les modèles de diffusion expliquent le « cumul des ventes (d'une firme ou d'un marché) » en fonction du temps.
- Les modèles de Courbe/Cycle de vie d'un produit expliquent « les ventes d'une firme » en fonction du temps également.

Graphiquement, ces deux modèles se présentent comme suit :



Notons :

- Les ventes sont fonction du temps ;
- (1) : produit nouveau → démarrage lent → croissance rapide (exponentielle) ;
- (2) : point d'inflexion → niveau à partir duquel le rythme de croissance des ventes ralentit (baisse) ;
- (3) : phase de maturité (phase qui suit le point d'inflexion, zone où se réalise l'essentiel des profits) → fin = maximum ;

- (4) : non seulement le taux de croissance diminue, mais aussi les ventes (mesure absolue) → c'est la saturation qui mène vers le déclin en l'absence d'innovation.

Aussi, précisons qu'il y a plusieurs variétés de cycle de vie d'un produit dont les facteurs de différenciation sont notamment :

- L'innovation
- Le temps (période) total : du lancement au déclin (retrait du marché)
- La durée moyenne de chaque phase.

6.3.2. Types de modèles de diffusion (cycle de vie d'un produit)

Il y a plusieurs types de modèles de diffusion qui peuvent être regroupés sous 3 générations :

- La 1^{ère} génération : c'est des modèles qui déterminent l'évolution probable des ventes tenant compte du « seuil de saturation » connu d'avance. Dans cette lignée, l'on a : *le modèle de Gompertz et le modèle logistique*.
- La 2^{ème} génération : c'est des modèles complexes modélisant le marché total, le marché potentiel et les ventes courantes (à l'instant t).
- La 3^{ème} génération : c'est des modèles qui lèvent l'hypothèse d'un marché total constant en considérant que le marché est plutôt dynamique.

a) *Modèle logistique (courbe de VERHULST ou de PEARL)*

Pour ce modèle, nous allons présenter sa forme, ses caractéristiques et sa représentation graphique.

- Forme :

Le modèle logistique prend la forme suivante :

$$Y_t = \frac{Y_{max}}{1 + br^t}$$

Avec : **b** et **r** = les paramètres du modèle ($0 < r < 1$) ; **r** = vitesse de diffusion ($r \rightarrow 0$: plus vite on atteindra l'asymptote) ; **b** = ordonnée à l'origine ; **Y_{max}** = seuil de saturation (connu à l'avance) ; **t** = temps (période = nombre d'années, de mois, de semaines, etc.) ; **Y_t** = ventes à la semaine t.

Encadré 1 : La variable temps (tendance, taux de croissance)

Générer le temps dans le logiciel économétrique « Eviews »

Sur Eviews, la variable « temps » générée se diffère comme suit :

(i) genr t=@trend : ici, on a t = 0, 1, 2, ...

(ii) genr t=@trend+1 : ici, on a t = 1, 2, ...

Différentes formes de tendance

t = 1, 2, 3, ...

t = 2000, 2001, 2002, 2003, ...

$t = -50, -49, -48, -47, \dots$

si : $Y_t = a + bt + u_t$, avec $t = -50, -49, -48, -47, \dots$, alors : la moyenne de t est nulle ;

$$\hat{a} = \bar{Y} ; \hat{b} = \frac{\sum t Y}{\sum t^2}$$

Taux de croissance en temps discret (r constant)

$$Y_t = Y_0(1+r)^t \rightarrow \ln Y_t = \ln Y_0 + t \ln(1+r) \rightarrow \ln Y_t = a + bt ; a = \ln Y_0 ; b = \ln(1+r)$$

$$\rightarrow r = e^b - 1$$

Taux de croissance en temps continu (b constant)

$$Y_t = Y_0 e^{bt} \rightarrow \ln Y_t = \ln Y_0 + bt \rightarrow \ln Y_t = a + bt ; a = \ln Y_0.$$

$$\rightarrow b = \frac{d \ln Y_t}{dt} = \frac{dY_t/Y_t}{dt} = \frac{dY_t}{Y_t} * \frac{1}{dt} = \frac{1}{Y_t} \frac{dY_t}{dt}$$

NB : le taux de croissance en temps continue (b) est une approximation du taux en temps discret (r).
 En effet : en temps discret : $b = \ln(1+r)$; en temps continue : $b = d \ln Y_t / dt = \Delta \ln Y_t$;

$$\ln Y_t = a + bt \rightarrow \Delta \ln Y_t = d \ln Y_t / dt = b = \ln(1+r) \approx r$$

Pour mieux lire la tendance, interprétons les résultats d'estimation de deux modèles suivants ($t =$ semestre) :

(i) $\ln \hat{Y}_t = 1,5 + 0,025t$

Si la spécification était : $Y_t = Y_0 e^{bt} \rightarrow \ln Y_t = \ln Y_0 + bt \rightarrow \ln Y_t = a + bt ; a = \ln Y_0$, on dira : Y_t a progressé à un taux de 2,5% ($0,025 \times 100$) le semestre. Sur une année, le taux de croissance « b » de Y_t est de 5% ($2,5 \times 2$). On sait que : $a = \ln Y_0 \rightarrow e^{\ln Y_0} = Y_0 = e^{\hat{a}} = e^{1,5} = 4,5$. Le niveau initial Y_0 (en début de période) de Y_t est de 4,5 unités.

Par contre, si la spécification était : $\ln Y_t = \ln Y_0 + t \ln(1+r) \rightarrow \ln Y_t = a + bt ; a = \ln Y_0 ; b = \ln(1+r)$, on aura : $\log(1+\hat{r}) = 0,025$, avec « \hat{r} » = taux de croissance estimé, et : $\hat{r} = e^{0,025} - 1 = 0,02531512$. Ici, on dira : Y_t a progressé à un taux de 2,53% ($0,0253 \times 100$) le semestre. Sur une année, le taux de croissance « r » de Y_t est de 5,06% ($2,531512 \times 2$).

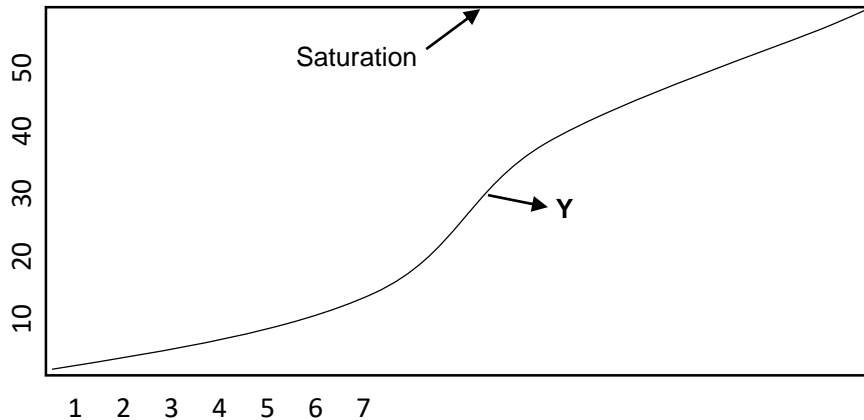
(ii) $\hat{Y}_t = 12 + 43t$

On dira : Y_t progresse, en moyenne (sur la période d'étude), au taux absolu de 43 unités par semestre ; son trend (tendance) est donc croissant.

• Caractéristiques :

- Si $t \rightarrow \infty : Y_t \rightarrow Y_{max}$ ou $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = Y_{max}$
- Si $t \rightarrow -\infty : Y_t \rightarrow 0$ ou $\lim_{t \rightarrow -\infty} Y_t = 0$
- $Y_t = \frac{Y_{max}}{2} \rightarrow$ point d'inflexion atteint (il est fixe).

• Illustrations graphiques :



• Transformation linéaire :

Pour obtenir la forme linéaire, procédons comme suit :

$$\frac{Y_{max}}{Y_t} = 1 + br^t \rightarrow \frac{Y_{max}}{Y_t} - 1 = br^t \rightarrow \ln\left(\frac{Y_{max}}{Y_t} - 1\right) = \ln(b) + t \ln(r)$$

En posant : $V_t = \ln\left(\frac{Y_{max}}{Y_t} - 1\right)$, le modèle linéaire obtenu est le suivant :

$$V_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

Avec : $\ln(b) = a_0 \rightarrow \hat{b} = e^{a_0}$ et $\ln(r) = a_1 \rightarrow \hat{r} = e^{a_1}$.

b) Modèle de GOMPertz

Le modèle de Gompertz a la forme non linéaire suivante :

$$Y_t = e^{br^t + a} = e^{br^t} * e^a$$

En logarithme (transformation linéaire), ce modèle s'écrit :

$$\ln Y_t = br^t + a$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = Y_{max} \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} Y_t = 0.$$

Avec : e = base du logarithme népérien (exponentiel) ; $e^a = Y_{max}$ = seuil de saturation ; Y_t = ventes à la semaine t ; b et r = les paramètres du modèle ($b < 0$; $0 < r < 1$) ;

Pour obtenir la forme linéaire, procédons comme suit :

$$\frac{e^a}{Y_t} = e^{-br^t} \rightarrow \ln\left(\frac{e^a}{Y_t}\right) = -br^t \rightarrow \ln\left[\ln\left(\frac{e^a}{Y_t}\right)\right] = \ln(-b) + t \ln(r)$$

En posant (à calculer) : $V_t = \ln\left[\ln\left(\frac{e^a}{Y_t}\right)\right]$; $\ln(-b) = a_0 \rightarrow \hat{b} = -e^{a_0}$ et $\ln(r) = a_1 \rightarrow \hat{r} = e^{a_1}$, le modèle linéaire simple de régression sur le temps obtenu est le suivant :

$$V_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

Autrement, l'on peut faire :

$$\ln Y_t = br^t + a \rightarrow \ln Y_t - a = br^t \rightarrow \ln[\ln Y_t - a] = \ln b + t \ln r$$
$$\rightarrow V_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t, \quad \text{avec : } V_t = \ln[\ln Y_t - a]; a_0 = \ln b; a_1 = \ln r$$

6.4. METHODES D'ESTIMATION DES MODELES NON LINEAIRES

6.4.1. Notes

Notons ce qui suit :

- Les MCO sont adaptées au modèle linéaire et ne sont pas applicables comme tel sur des modèles non linéaires.
- Pour les modèles de Gompertz ou le modèle logistique, la linéarisation est possible (et donc l'application des MCO) lorsqu'on connaît la valeur du seuil de saturation ou quand on procède à des suppositions ou postulats (ce seuil est en réalité jamais connu).
- Tout modèle n'est pas linéarisable. Il y a des spécifications de modèle dont la linéarisation peut s'avérer impossible même sous certaines hypothèses ; dans ce cas, l'on recourt aux *méthodes d'estimation des modèles non linéaires* pour estimer ces genres de modèles.

6.4.2. Méthodes d'estimation

Notons qu'il y a deux approches qui permettent d'estimer des modèles non linéaires, à savoir :

- Pour le cas du modèle logistique et celui de Gompertz, citons « les approches intuitives » ;
- Et « les approches purement mathématiques de résolution d'équations non linéaires » appelées aussi « méthodes de résolution analytique ».

a) Approches intuitives

Elles consistent à émettre des hypothèses sur les valeurs du niveau de saturation en procédant par :

- **L'analogie géographique** : comparer les produits fabriqués dans des endroits (espaces géographiques) différents ;
- **La méthode de balayage** : (i) déterminer un intervalle de saturation probable « $[S_{min}; S_{max}]$ » ; (ii) déterminer un pas « r » (généralement : $r = (S_{max} - S_{min})/10$) qui oriente les itérations de « S_{min} à S_{max} » (en général 10 itérations) ; (iii) ensuite, en procédant à des estimations du modèle linéarisé (régression sur le temps de façon itérative), comparer les sommes des carrés des résidus (SCR) des différents modèles estimés et retenir « le seuil de saturation optimal » relatif au modèle estimé qui minimise la SCR.

b) *Approches ou méthodes de résolution numérique*

Elles recourent à des procédures numériques itératives très complexes. L'idée commune à toutes ces méthodes est d'aboutir à des nouveaux coefficients qui permettent d'obtenir une forme linéaire, en procédant à un développement limité de Taylor sur base des coefficients initiaux (valeurs itératives)⁽¹⁾. Ensuite, appliquer les MCO sur la forme linéaire ainsi obtenue pour estimer les nouveaux coefficients (les itérations s'arrêtent de plus en plus que les coefficients deviennent stables). Toutefois, « la convergence des estimateurs » est un critère qui sanctionne l'efficacité de la méthode utilisée (les valeurs initiales doivent se rapprocher des valeurs optimales).

Ci-dessous, nous présentons l'une des méthodes⁽²⁾ couramment utilisée, soit « l'algorithme de Gauss-Newton ».

Algorithme de Gauss-Newton

Soit le modèle non linéaire (NL) :

$$Y_t = f(X, a) + e_t \dots \dots (1)$$

Avec : Y_t = variable dépendante ; X_t = vecteur de variables explicatives (matrice des observations des variables explicatives de dimension « $n, k + 1$ ») ; a = vecteur de paramètres à estimer (dimension « $k + 1$ »), et e_t = terme aléatoire.

L'estimateur des Moindres Carrés pour le modèle non linéaire (1) est « a » qui minimise la SCR « $S(a) = e'e = [Y_t - f(X, a)]'[Y_t - f(X, a)]$ » comme suit (on a $k+1$ conditions du 1^{er} ordre : $\partial S / \partial a = 0$) :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \frac{\partial f(X, a)}{\partial a} [Y_t - f(X, a)] = 0$$

Avec :

$$\frac{\partial f(X, a)}{\partial a} = Z(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, a)}{\partial a_0} & \dots & \frac{\partial f(x_1, a)}{\partial a_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_n, a)}{\partial a_0} & \dots & \frac{\partial f(x_n, a)}{\partial a_k} \end{bmatrix}$$

Notons : $Z(a^*)$ = matrice calculée pour les valeurs particulières de a ($a = a^*$). Grâce au développement limité de Taylor au voisinage de « a^* », nous obtenons l'approximation suivante à la « t -ième observation » :

¹ Comme le souligne Chamroukhi F. et al. (p.1), la plupart d'approches, modèles ou méthodes développées ramènent généralement le problème de régression non linéaire à des problèmes de régression linéaire simples à résoudre.

² Il y a plusieurs algorithmes de résolution (procédures numérique d'optimisation) des modèles non linéaires, notamment : l'algorithme de Gauss-Newton, Newton-Raphson ou quasi-Newton, etc. En physique, il en existe plusieurs approches, notamment : les modèles polynomiaux par morceaux, les méthodes à base de B-splines, le perceptron multi-couche (dans sa version régressive) et les méthodes à fonctions de base radiale (Chamroukhi F. et al., p.1).

$$f(x_t, a) \simeq f(x_t, a^*) + \left\{ \frac{\partial f(x_t, a)}{\partial a_0} \Big|_{a=a^*} \dots \dots \frac{\partial f(x_t, a)}{\partial a_k} \right\} (a - a^*)$$

Autrement, en notation matricielle :

$$f(X, a) \simeq f(X, a^*) + Z(a^*)(a - a^*) \dots \dots (2)$$

(2) peut s'écrire aussi : $y = f(X, a^*) + Z(a^*)(a - a^*) + e$

ou

$$y = f(X, a^*) + Z(a^*)a - Z(a^*)a^* + e \dots \dots (3)$$

En posant : $\bar{y}(a^*) = y - f(X, a^*) + Z(a^*)a^*$, alors (3) se réduit en :

$$\bar{y}(a^*) = Z(a^*)a + e \dots \dots (4)$$

L'estimateur de ce « modèle linéaire (4) » (par les MCO) est :

$$a^2 = [Z(a^*)'Z(a^*)]^{-1}Z(a^*)'\bar{y}(a^*) = a^* + [Z(a^*)'Z(a^*)]^{-1}Z(a^*)'[y - f(X, a)]$$

On aura « k+1 » nouvelles valeurs pour le vecteur « $a = a^2$ ». La convergence est atteinte lorsque « $\hat{a} = a^p \simeq a^{p-1}$ » (stabilité des coefficients à la p-ième itération).

Notons que « l'algorithme de Newton-Raphson » raffine l'algorithme de Newton en utilisant un développement de Taylor du second ordre. L'on peut se servir des logiciels Eviews, RATS et certains tableurs (fonction solveur) pour appliquer les méthodes d'estimation non linéaires.

Aussi, signalons que l'efficacité des méthodes d'estimation non linéaire est fonction des valeurs initiales compatibles avec la spécification du modèle et les données.

Note : A ce jour, pour des modèles intrinsèquement non linéaires ou modèles non linéaires complexes (difficiles à linéariser), il n'existe pas des estimateurs comme tels, l'on recourt à des algorithmes d'optimisation pour obtenir des formes linéaires.

Annexe (Théorie)

Encadré 2 : La régression non linéaire et l'algorithme de Gauss-Newton

Cet encadré est tiré de l'étude de Katell Mellac intitulée « Méthodes d'analyse de données en régression non linéaire », publiée dans HAL le 23 Août 2013 (en ligne : <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00854768>), pp. 7-8.

a) Régression non linéaire

La régression non linéaire a pour but d'ajuster un modèle non linéaire pour un ensemble de valeurs afin de déterminer la courbe qui se rapproche le plus de celle des données de Y en fonction de x.

Le modèle de régression linéaire s'écrit : $Y_i = f(x_i, \theta) + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$.

Notons que :

- * La loi de probabilité sur le terme d'erreur ε_i est une loi normale, centrée réduite et de variance finie ;
- * Les ε_i sont indépendants entre eux ;
- * Y_i représente l'observation i de la variable dépendante ;
- * θ représente un vecteur à p composantes de paramètres généralement inconnus ;
- * La fonction f est la fonction de régression, la plupart du temps non linéaire. Elle dépend d'une variable réelle x et de paramètres θ .

b) Estimation des paramètres

Comme en régression linéaire, les paramètres d'un modèle de régression non linéaire sont estimés en minimisant la somme des carrés des résidus du modèle. C'est-à-dire qu'on cherche à minimiser l'expression suivante (somme des carrés des résidus) :

$$SSR(\theta) = \sum_{i=1}^n (Y_i - f(x_i, \theta))^2$$

Pour cela, il faut dériver cette somme par rapport à chacun de ses paramètres et chercher les solutions qui annulent les dérivés.

On peut réécrire ceci « $SSR = (Y_i - f(x_i, \theta))(Y_i - f(x_i, \theta))'$ » sous forme vectorielle comme suit :

$$SSR = YY' - 2Yf(x_i, \theta)' + f(x_i, \theta)f(x_i, \theta)'$$

Si on dérive cette expression par rapport à toutes les composantes du vecteur θ à p paramètres et on annule toutes les dérivées partielles, on obtient les conditions du premier ordre qui doivent être vérifiées pour toute estimation du vecteur θ qui correspond à un minimum intérieur de $SSR(\theta)$. Ces conditions du premier ordre, ou équations normales, sont :

$$-2F(x, \hat{\theta})'Y + 2F(x, \hat{\theta})'F(x, \theta) = 0 \dots \dots (I)$$

Où la matrice $F(x, \theta)$ de dimension $n \times p$ est composée d'éléments du type :

$$F_{i,j}(x, \theta) \equiv \frac{\partial f_j(x, \theta)}{\partial \theta_j}$$

Le fait que chaque vecteur de l'équation (I) possède p éléments implique l'existence de p équations normales déterminant les p composantes de θ .

Finalement, on obtient des équations qu'on ne peut la plupart du temps pas résoudre de manière analytique. Cependant, il existe des algorithmes qui permettent d'estimer les paramètres. Nous nous intéresserons ici à l'algorithme de Gauss-Newton, qui est utilisé par défaut par la fonction « nls » de R.

c) Algorithme de Gauss-Newton

L'algorithme est basé sur un développement en série de Taylor au voisinage des valeurs initiales des paramètres, qu'on notera θ^0 .

Considérons le cas où on est amené à estimer 8 paramètres :

$$f(x_i, \theta) = f(x_i, \theta^0) + d_{1,i}(\theta_1 - \theta_1^0) + d_{2,i}(\theta_2 - \theta_2^0) + d_{3,i}(\theta_3 - \theta_3^0) + d_{4,i}(\theta_4 - \theta_4^0) \\ + d_{5,i}(\theta_5 - \theta_5^0) + d_{6,i}(\theta_6 - \theta_6^0) + d_{7,i}(\theta_7 - \theta_7^0) + d_{8,i}(\theta_8 - \theta_8^0)$$

avec :

$$d_{a,i} = \left. \frac{\partial f(x_i, \theta)}{\partial \theta_a} \right|_{\theta = \theta^0} ; a = 1, \dots, 8$$

Ce qui donne, en écriture matricielle :

$$\eta(\theta) = \eta(\theta^0) + V^0(\theta - \theta^0)$$

Où : $\eta(\theta) = f(x, \theta)$; $\eta(\theta^0) = f(x, \theta^0)$, $V^0 =$ matrice $n \times 8$ des dérivées partielles en $\theta = \theta^0$, et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Pour obtenir les premiers estimateurs, il faut calculer :

$$b_0 = [(V^0)'(V^0)]^{-1}(V^0)'[Y - \eta(\theta^0)]$$

Résoudre b_0 et prendre comme nouvel estimateur : $\theta^1 = b_0 + \theta^0$, et calculer $SSR(\theta^1)$.

Si $SSR(\theta^1) < SSR(\theta^0)$, alors on peut dire que θ^1 est un meilleur estimateur que θ^0 . Si tel est le cas, répéter ce procédé en remplaçant θ^0 par θ^1 (et V^0 par V^1) et obtenir une nouvelle série d'estimateur.

Calculer b_1 . A partir de là, calculer : $\theta^2 = b_1 + \theta^1$.

Continuer cette procédure jusqu'à la convergence.

Encadré 3 : A RETENIR (résumé) sur les modèles de régression non linéaires

➤ **Définition des modèles de régression non linéaires et Méthodes d'estimation**

- Un modèle peut être non linéaire dans les variables comme dans les paramètres. Si ses paramètres sont non linéaires et que les variables explicatives sont linéaires, on dit du modèle qu'il est intrinsèquement non linéaires (difficiles à linéariser, l'on recourt à certains algorithmes, notamment celui de Gauss-Newton). Par contre, un modèle intrinsèquement linéaire (soit un modèle non linéaire qui peut être linéarisé après certaines transformations : logarithmique, etc.) est celui où tous les paramètres sont linéaires, même si les variables explicatives sont non linéaires.
- Pour ce qui est des méthodes d'estimation, notons ce qui suit :
 - Pour les modèles intrinsèquement linéaires, l'on peut appliquer les MCO sur les formes linéaires obtenues après transformation.
 - Pour les modèles intrinsèquement non linéaires, l'on recourt à des méthodes générales de régression non linéaire qui nécessitent des procédures numériques itératives, notamment : l'algorithme de Gauss-Newton, celui de Newton-Raphson, l'algorithme de Marquard, etc.).

➤ **Différents types de modèles non linéaires et les possibilités de leur linéarisation**

Voici les différents types des modèles non linéaires :

Types des modèles non linéaires	Caractéristiques
<i>Modèles log-log ou double log</i>	Présence de logarithme dans les deux membres de l'équation (modèle). <u>Exemple</u> : Fonction de production Cobb-Douglas.
<i>Modèles semi-log</i>	Présence de logarithme dans un seul membre de l'équation si bien qu'un membre reste linéaire et un autre pris en logarithme : soit à gauche (modèle log-lin) ou à droite (modèle lin-log).
<i>Modèles réciproque</i>	Présence des termes (variables) en forme inverse ou réciproque dans le modèle. <u>Exemple</u> : relation inverse inflation et chômage.
<i>Modèles log-inverse ou log-hyperbole ou log-réciproque</i>	C'est des modèles à la fois réciproque et semi-log où la variable dépendante est prise en logarithme et une ou plusieurs variables explicatives sont prises en forme inverse.
<i>Modèles polynomiaux</i>	Présence d'une seule variable explicative dans le membre de droite qui figure avec des puissances différentes.

IIème Partie
Pratiques de régressions non linéaires sur Logiciel
(Eviews 10)

Exemple 1 : Estimation d'un modèle de diffusion de type logistique

Soit le modèle expliquant les ventes spécifié comme suit :

$$v_t = \frac{v_{max}}{1 + br^t} \dots \dots \dots [1]$$

Avec :

- v_{max} : Seuil de saturation/ventes maximales (soit, $v_{max} = 800$) ;
- b et r : les paramètres du modèle ($0 < r < 1$) ;
- r : vitesse de diffusion ($r \rightarrow 0$: plus vite on atteindra l'asymptote) ;
- b : ordonnée à l'origine ;
- t : temps (en nombre de semaines) ;
- v_t : les ventes à la semaine t.

La forme linéaire est obtenue comme ceci :

$$\frac{v_{max}}{V_t} = 1 + br^t \rightarrow \frac{v_{max}}{v_t} - 1 = br^t \rightarrow \ln\left(\frac{v_{max}}{v_t} - 1\right) = \ln(b) + t \ln(r)$$

Si l'on pose : $V_t = \ln\left(\frac{v_{max}}{v_t} - 1\right) = \ln\left(\frac{800}{v_t} - 1\right)$, le modèle linéaire s'écrit :

$$V_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t \dots \dots \dots [2]$$

Avec : $\ln(b) = a_0 \rightarrow \hat{b} = e^{a_0}$ et $\ln(r) = a_1 \rightarrow \hat{r} = e^{a_1}$.

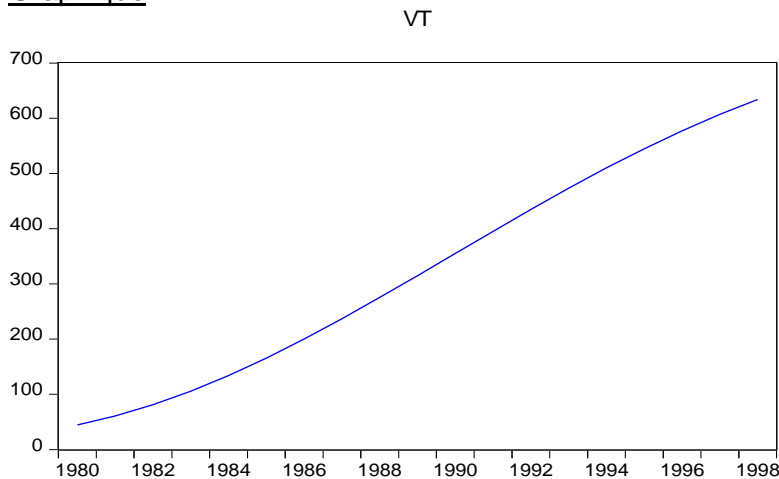
Sur base de données disponibles (l'évolution des ventes cumulées sur 19 ans, de 1980 à 1999), nous allons estimer le modèle 2 par les moindres carrés ordinaires (MCO ou OLS).

Pour ce faire, sur Eviews, les commandes sont :

```
create a 1980 1998
data vt
plot vt
genr v1=(800/vt)-1
genr V=log(v1)
genr t=@trend+1
equation eqexemple1.ls V c t
```

Les résultats sont :

Graphique



Estimation

Dependent Variable: V				
Method: Least Squares				
Date: 05/28/19 Time: 15:58				
Sample: 1980 1998				
Included observations: 19				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.788297	0.054746	50.93144	0.0000
T	-0.224566	0.004802	-46.76960	0.0000
R-squared	0.992288	Mean dependent var	0.542632	
Adjusted R-squared	0.991834	S.D. dependent var	1.268607	
S.E. of regression	0.114635	Akaike info criterion	-1.394819	
Sum squared resid	0.223402	Schwarz criterion	-1.295405	
Log likelihood	15.25079	Hannan-Quinn criter.	-1.377995	
F-statistic	2187.395	Durbin-Watson stat	0.166365	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Lecture des résultats

- Le modèle estimé s'écrit (forme linéaire) : $\hat{V}_t = 2.79 - 0.22t$
- Sous sa forme de départ, le modèle estimé s'écrit :

$$v_t = \frac{v_{max}}{1 + br^t} = \frac{800}{1 + 16.25 \times 0.7988^t}$$

Avec :

- $\ln(b) = a_0 \rightarrow \hat{b} = e^{a_0} = e^{2.788297} = 16.25$; et
- $\ln(r) = a_1 \rightarrow \hat{r} = e^{a_1} = e^{-0.224566} = 0.7988$.

Exemple 2 : Estimation d'une fonction de production Cobb-Douglas (modèle log-log)

Soit la fonction de production Cobb-Douglas spécifié comme suit :

$$Q_i = AK_i^{b_1}L_i^{b_2}e^{u_i} \dots \dots [3]$$

Avec :

- Q_i : Chiffre d'affaires en milliers de usd de l'entreprise i ;
- K_i : dépenses d'investissement en milliers de usd de l'entreprise i ;
- L_i : dépenses salariales en milliers de usd de l'entreprise i ;
- A : le niveau de technologie de l'entreprise ;
- b_1 et b_2 : les paramètres du modèle.

La forme linéaire est obtenue comme ceci :

$$\ln Q_i = \ln A + b_1 \ln K_i + b_2 \ln L_i + u_i \rightarrow q_i = b_0 + b_1 k_i + b_2 l_i + u_i \dots [4]$$

Avec : $q_i = \ln Q_i$; $k_i = \ln K_i$; $l_i = \ln L_i$; $b_0 = \ln A$ et b_1 et $b_2 = \text{élasticités}$

$$b_1 = \frac{\partial \ln Q_i}{\partial \ln K_i} = \frac{dQ/Q}{dK/K} = \frac{dQ}{dK} \frac{K}{Q} ; b_2 = \frac{\partial \ln Q_i}{\partial \ln L_i} = \frac{dQ/Q}{dL/L} = \frac{dQ}{dL} \frac{L}{Q}$$

Sur base de données disponibles, observées sur 10 entreprises, nous allons estimer le modèle 4 par les méthodes OLS (Ordinary Least Square) et NLS (Non linear Least Square).

Pour ce faire, sur Eviews, les commandes sont :

```
create u 1 10
data Q K L
genr LQ=log(Q)
genr LK=log(K)
genr LL=log(L)
```

Les résultats sont :

Estimation par les Moindres Carrés Linaires (MCO ou OLS)

Commandes Eviews : **equation eqexemple2.ls LQ C LK LL**

Dependent Variable: LQ				
Method: Least Squares				
Date: 05/28/19 Time: 16:49				
Sample: 1 10				
Included observations: 10				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.479601	0.247178	10.03163	0.0000
LK	0.196244	0.112211	1.748878	0.1238
LL	0.241892	0.065119	3.714626	0.0075
R-squared	0.868944	Mean dependent var		3.576396
Adjusted R-squared	0.831499	S.D. dependent var		0.189011
S.E. of regression	0.077587	Akaike info criterion		-2.031512
Sum squared resid	0.042138	Schwarz criterion		-1.940737
Log likelihood	13.15756	Hannan-Quinn criter.		-2.131093
F-statistic	23.20606	Durbin-Watson stat		2.386401
Prob(F-statistic)	0.000815			

Estimation par les Moindres Carrés Non linéaires (NLS)

Commande Eviews : **nls Q=c(1)*K^c(2)*L^c(3)**

Dependent Variable: Q				
Method: Least Squares (Gauss-Newton / Marquardt steps)				
Date: 05/28/19 Time: 19:39				
Sample: 1 10				
Included observations: 10				
Convergence achieved after 11 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Q=C(1)*K^C(2)*L^C(3)				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	12.45037	3.586058	3.471882	0.0104
C(2)	0.190189	0.125848	1.511253	0.1745
C(3)	0.232165	0.078957	2.940401	0.0217
R-squared	0.823231	Mean dependent var		36.30000
Adjusted R-squared	0.772726	S.D. dependent var		6.464433
S.E. of regression	3.081806	Akaike info criterion		5.332234
Sum squared resid	66.48269	Schwarz criterion		5.423009
Log likelihood	-23.66117	Hannan-Quinn criter.		5.232653
Durbin-Watson stat	2.381746			

Comparaison des résultats OLS et NLS

Résultats OLS (modèle linéaire) :

$$\ln Q_i = \ln A + b_1 \ln K_i + b_2 \ln L_i + u_i \rightarrow q_i = b_0 + b_1 k_i + b_2 l_i + u_i$$

$$\widehat{\ln Q_i} = 2,479601 + 0,196244 \ln K_i + 0,241892 \ln L_i$$

Résultats NLS (modèle non linéaire) :

$$Q_i = AK_i^{b_1} L_i^{b_2} e^{u_i}$$

$$\widehat{Q}_i = 12,45037 * K_i^{0,190189} * L_i^{0,232165}$$

Constat : l'antilogarithme de 2,479601, soit $e^{2,479601}$, est 11,936501 (proche de 12,45037) ; et, les paramètres b_1 et b_2 de ces deux modèles sont proches.

Exemple 3 : Estimation d'une courbe à taux de croissance constant « r »

Soit la fonction suivante (évolution des ventes dans le temps) :

$$Y_t = Y_0(1 + r)^t \dots \dots [5]$$

Sa forme linéaire se présente comme suit :

$$\rightarrow \ln Y_t = \ln Y_0 + t \ln(1 + r) \rightarrow \ln Y_t = a + bt ; \ln Y_0 = a ; \ln(1 + r) = b$$

$$\rightarrow r = e^b - 1 = \text{taux de croissance}$$

La forme linéaire obtenue est un modèle « log-lin ».

Sur base de données disponibles (l'évolution des ventes cumulées sur 19 ans, de 1980 à 1999), nous allons estimer le modèle 5 par les MCO.

Pour ce faire, sur Eviews, les commandes sont :

```
create a 1980 1998
data yt
genr t=@trend+1
ls log(yt) c t
```

Les résultats sont :

Dependent Variable: LOG(YT)				
Method: Least Squares				
Date: 05/28/19 Time: 20:48				
Sample: 1980 1998				
Included observations: 19				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	4.115315	0.105692	38.93675	0.0000
T	0.140869	0.009270	15.19653	0.0000
R-squared	0.931433	Mean dependent var	5.524008	
Adjusted R-squared	0.927400	S.D. dependent var	0.821375	
S.E. of regression	0.221314	Akaike info criterion	-0.079166	
Sum squared resid	0.832659	Schwarz criterion	0.020248	
Log likelihood	2.752081	Hannan-Quinn criter.	-0.062341	
F-statistic	230.9344	Durbin-Watson stat	0.149099	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Lecture des résultats

○ *Ecriture du modèle linéaire estimé* : $\ln \hat{Y}_t = 4,1153 + 0,1409 * t$

○ *Lecture* :

On a : $\log(1 + \hat{r}) = 0,1409 \rightarrow \hat{r} = e^{0,1409} - 1 = 1,1513 - 1 = 0,1513$. Ainsi, on dit que Y_t a progressé à un taux de 15,13% ($0,1513 * 100$) l'an, avec « \hat{r} » = taux de croissance estimé.

Parce que « $\ln Y_0 = a \rightarrow e^{\ln Y_0} = Y_0 = e^{\hat{a}} = e^{4.1153} = 61,27$ », alors on note que le niveau de ventes (Y_t) en début de période (Y_0 , avec $t = 0$) est de 61,27 milliers de usd.

○ Sous sa forme de départ, le modèle estimé s'écrit :

$$Y_t = 61,27 * (1 + 0,15)^t$$

Références bibliographiques

➤ Ouvrages et articles

Bourbonnais R. (2015), « *Econométrie : cours et exercices corrigés* », 9^e édition, éd. DUNOD, Paris, 392 p.

_____ (2009), « *Logiciel Eviews* », Université de Paris-Dauphine, 31 p.

Kintambu Mafuku E.G. (2004), « *Principes d'Econométrie* », Presses de l'Université Kongo, 4^e édition, 285 p.

Mignon Valérie (2008), « *Econométrie : Théorie et Applications* », éd. ECONOMICA, 236 p.

Kibala Kuma J. (2019), « L'Econométrie avec Eviews : Répertoire de quelques commandes de base », Editions Universitaires Européennes, 117 p.

Bosonga Bofeki L. JP. (2019), « Manuel d'Econométrie », PUK, Editions Terabytes, RDC, 326 p.

Danglos Grégory (2009), « Introduction à l'économétrie », PUF, Paris, 245 p.

Katell, M. (2013), « Méthodes d'analyse de données en régression non linéaire », <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00854768>, 43 p.

Chamroukhi, F. et al., « Modèle à processus latent et algorithme EM pour la régression non linéaire », 18 p.

➤ Séminaires, Rapports de recherche et Notes des cours

Mottelet, S. (2003), « Optimisation non-linéaire », Université de Technologie de Compiègne, 192 p.

Colletaz, G. et Hurlin, C. (2006), « Modèles Non linéaires et Prévisions », in Laboratoire d'Economie d'Orléans, UMR CNRS 6221, Rapport de Recherche, 106 p.

Goga, C. et Ruiz-Gazen, A. (2009), « Estimation de paramètres non-linéaires par des méthodes non-paramétriques en population finie : model-calibration et model-assisted », 48 p.

Bardet, J-M., « Cours d'Econométrie II », Master M.A.E.F, Université Paris I, Panthéon-Sorbonne, 13 p.

Sahmer, K. et al. (2015), « Utilisation d'une régression non linéaire pour des applications microbiologiques », 35 p.

Makowski, D. (2014), « Modèle non linéaire », Master Agronomie, AgroParisTEch, 38 p.

Gilles de Truchis et Dumitrescu, E. (2016), « Econométrie non-linéaire -Chapitre 1 : Introduction », 81 p.

Gilles de Truchis et Dumitrescu, E. (2016), « Econométrie non-linéaire-Chapitre 2 : Modèles à changement de régime », 84 p.