

# Une introduction au transfert de rayonnement astrophysique

Frédéric Paletou\*

Université de Toulouse, Observatoire Midi-Pyrénées, Cnrs, Cnes, Irap, F-31400 Toulouse, France

(Dated: June 19, 2020)

Ces notes sont destinées à fournir une initiation à la théorie et aux méthodes numériques du transfert de rayonnement, dans le contexte particulier de l’astrophysique. Une présentation graduelle a été envisagée pour que ce document puisse être utilisé dès le début de tout cursus à vocation astrophysique dans le supérieur, en L1-2.

## I. DE QUOI S’AGIT-IL ?

Notre connaissance des astres doit faire face à deux faits presque incontournables.

D’une part, leur *distance* fait que nous n’avons pratiquement aucun moyen pour mettre en œuvre une analyse *in situ*, comme le fait quotidiennement l’expérimentateur au laboratoire, ou encore le météorologue en lançant des ballons sondes capables de retourner des mesures effectuées dans notre propre atmosphère terrestre, par exemple. À ce jour, seules<sup>1</sup> la Lune (prélèvement d’échantillons géologiques, mesures de sismicité), Vénus (imagerie de surface), Mars (exploration et cartographie de surface, analyse spectroscopique de roches induite par ablation *laser*, ou plus récemment mesures de sismicité avec la mission *Insight*), le plus grand satellite naturel de Saturne, Titan (imagerie de surface et spectrométrie de masse) sur lequel s’est posée la sonde *Huygens* en 2005, la comète 67P/Churyumov–Gerasimenko en 2014 (imagerie et spectroscopie dans diverses bandes spectrales, tomographie radar), ainsi que l’astéroïde *Itokawa* dont la sonde japonaise *Hayabusa* a rapporté sur Terre des échantillons en 2010, font exception à cette règle (et dans l’attente du retour d’échantillons qui doit être effectué fin 2020 en fin de mission de la sonde japonaise *Hayabusa2* qui s’est posée sur l’astéroïde *Ryugu*). La mission *Stardust* a aussi ramené sur Terre, en 2006 – une première depuis l’exploration de la Lune – des échantillons de poussières interstellaires et de la queue de la comète 81P/Wild.

D’autre part, la très grande majorité des “messagers” dont nous disposons pour tenter d’effectuer quelque diagnostic, à distance, sont les *photons*, les fameux “quantum d’énergie” ou “quantum lumineux” de Planck et Einstein. L’astronomie actuelle est encore très largement “photonique” bien que d’autres “vecteurs” comme les *rayons cosmiques*, les *neutrinos* et plus récemment encore les *ondes gravitationnelles*, complètent la gamme de notre “outillage”.

La théorie du transfert de rayonnement a donc pour objectif de fournir à l’astronome un moyen de diagnostic des conditions physiques (densité, température, vitesses, composition chimique<sup>2</sup>, champ magnétique...) régnant au sein d’un astre, distant, via l’analyse détaillée de la lumière que nous en collectons.

Ainsi la théorie du transfert de rayonnement est absolument centrale en astrophysique. Cette discipline con-

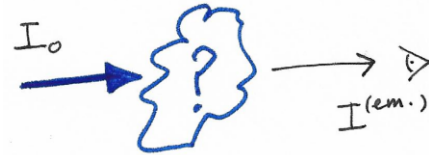


FIG. 1. Compte tenu de mesures de l’intensité émergente, à droite de la figure, et à partir d’hypothèses (ou, expérimentalement, connaissant le rayonnement incident à gauche de la figure), est-il possible de caractériser le milieu traversé par la lumière ?

stitue encore maintenant un domaine de recherche très actif, s’appuyant depuis... toujours – dès les années 1960 donc – sur les moyens *numériques* les plus puissants mis à la disposition de la communauté scientifique.

## II. LA LOI DE BEER–LAMBERT–BOUGUER

Le lycée aborde d’une certaine façon déjà un sous-problème de transfert de rayonnement à travers l’utilisation de la loi de Beer–Lambert – que nous compléterons ici du nom du physicien français Pierre Bouguer qui a légué à l’astronomie la technique de la “droite de Bouguer” (voir p. ex. Mianes 1964).

Il s’agissait de déduire la concentration d’une solution par le biais de l’analyse de la perte de “flux lumineux” à la traversée de cette dernière. À une longueur d’onde donnée (que nous omettrons par la suite, pour simplifier l’écriture), on a alors :

$$I_{\text{trans.}} = I_0 e^{-A}, \quad (1)$$

où l’absorbance  $A$  est proportionnelle à un coefficient d’absorption  $\varepsilon$  spécifique à une espèce chimique particulière, la concentration  $c$  de la solution et la longueur géométrique  $l$  parcourue à travers la solution (en tâchant de reprendre au mieux la terminologie du lycée qui invoque la loi de Beer–Lambert dans le cadre de la spectroscopie d’absorption en chimie).

On peut aussi décrire ce *même* phénomène physique d’atténuation d’une quantité de lumière à la traversée

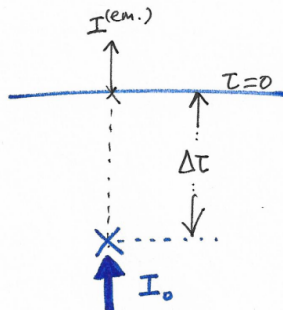


FIG. 2. Ingrédients et conventions pour le calcul de l'intensité émergente à la surface d'une portion d'atmosphère d'épaisseur  $\Delta\tau$  illuminée par un rayonnement d'intensité spécifique  $I_0$ . L'épaisseur optique est nulle à la surface, et croît dans le sens *inverse* de celui de la propagation de lumière.

d'un certain milieu, de cette façon :

$$dI = -\kappa I dx, \quad (2)$$

où ici apparaît un "coefficient d'absorption"  $\kappa$ , caractérisant le milieu traversé et homogène à  $L^{-1}$ . On peut alors aussi écrire :

$$\frac{dI}{-\kappa dx} = I. \quad (3)$$

Nous reviendrons par la suite sur la quantité  $I$  que nous nommerons alors, dans un cadre astrophysique : "intensité spécifique". Mais nous pouvons d'ores et déjà introduire une nouvelle quantité, *sans* dimension,  $\tau$  :

$$d\tau \stackrel{\text{def}}{=} -\kappa dx, \quad (4)$$

que nous appellerons "épaisseur optique"<sup>3</sup>.

Finalement, nous réécrivons désormais, pour caractériser ce problème où il n'est question *que* de l'absorption d'une quantité de lumière à la traversée d'un certain milieu :

$$\frac{dI}{d\tau} = I. \quad (5)$$

En utilisant les conventions de la Fig.(2), nous allons maintenant effectuer un calcul de l'intensité émergente  $I^{\text{em.}}$  à la surface de notre atmosphère, c'est-à-dire à  $\tau = 0$ , et compte tenu de la traversée d'une "épaisseur optique" totale  $\Delta\tau$  depuis une zone profonde illuminée par une intensité spécifique  $I_0$ . En intégrant l'Eq. (5), on a :

$$[\ln(I)]_{I_0}^{I^{\text{em.}}} = [\tau]_{\Delta\tau}^0. \quad (6)$$

On obtient alors l'expression suivante :

$$I^{\text{em.}} = I_0 e^{-\Delta\tau}, \quad (7)$$

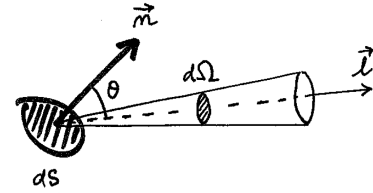


FIG. 3. L'intensité spécifique est liée à la quantité d'énergie transportée dans ce "pinceau" de rayonnement le long de  $\vec{l}$ .

que l'on pourra comparer à l'Eq. (1).

Pour conclure cette section, revenons un peu sur la *convention* adoptée à l'Eq. (4). De ce fait, nous avons donc choisi de faire croître la profondeur optique dans le sens *opposé* à celui de la propagation des photons vers l'observateur.

Enfin, la notion de profondeur *optique* est cruciale, et pas toujours aussi facile que cela à appréhender de la part des étudiants... Cette quantité particulière est, en effet, la distance adéquate permettant d'estimer les effets de la matière sur la propagation des photons. Dans un contexte astrophysique, compte tenu d'objets pouvant avoir des extensions *géométriques* extrêmement variées, c'est bien cette combinaison de la distribution de la densité de matière rencontrée le long de l'extension géométrique de l'objet/atmosphère à l'étude qui va "dimensionner", en quelque sorte, le problème de transfert de rayonnement. Quand l'épaisseur optique totale, à une longueur d'onde donnée – on reviendra plus loin sur cet aspect important du problème de transfert – reste inférieure à 1, le problème sera dit "optiquement mince" (et a priori simple à résoudre...). Au contraire, dès que l'épaisseur optique va devenir supérieure à cette valeur critique, plus le nombre d'interactions entre un photon et la matière va croître, et plus le problème de transfert de rayonnement va devenir potentiellement compliqué, voire "numériquement difficile". On parlera alors – et c'est le cas réellement intéressant pour le "transfériste" – de problème "optiquement épais".

### III. L'INTENSITÉ SPÉCIFIQUE

L'intensité spécifique,  $I$ , est une fonction qui dépend de la position dans le milieu considéré, de la fréquence  $\nu$  ou la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement considéré, de la direction de propagation et du temps. Sa définition classique est la suivante :

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)(d\vec{S} \cdot \vec{l}) dt d\nu d\Omega \quad (8)$$

où  $dE_\nu$  est la quantité d'énergie transportée le long de  $\vec{l}$ , sous l'angle solide<sup>4</sup>  $d\Omega$  (en *stéradians*), depuis la surface élémentaire  $dS$ , par *Hertz* (Hz). Elle est donc homogène à des  $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$  *en utilisant les unités encore d'usage en astrophysique*. Le "erg" est l'unité d'énergie

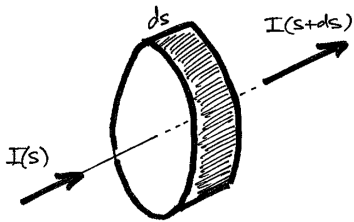


FIG. 4. Variation de l'intensité spécifique à travers un milieu à la fois absorbant et émetteur de lumière d'épaisseur infinitésimale  $ds$ .

qu'il vous sera facile d'exprimer en Joules. Dans le système international, on pourra aussi faire apparaître des *Watt*, et transformer nos centimètres en mètres.

#### IV. VERS L'ÉQUATION DE TRANSFERT

Maintenant, nous allons considérer une quantité de lumière se propageant à travers un milieu qui a non seulement une capacité d'absorption, mais aussi une capacité d'*émission propre* de lumière. C'est notamment le cas des "atmosphères" astrophysiques qui nous occuperont par la suite.

Soit le coefficient d'émission  $\eta$  caractérisant le milieu analysé. Par la suite, nous abandonnerons la variable  $x$  pour  $s$ , c'est-à-dire l'élément de longueur géométrique *le long d'une "ligne de visée" particulière*.

Le bilan des intensités entrantes et sortantes, à travers un élément d'atmosphère d'épaisseur  $ds$ , comme schématisé en Fig. (4), peut maintenant s'écrire comme :

$$dI = -\kappa I ds + \eta ds, \quad (9)$$

où l'on a maintenant une contribution supplémentaire liée à l'émissivité de ce milieu.

Compte tenu de la définition de l'épaisseur optique,  $d\tau = -\kappa ds$ , et en définissant une nouvelle quantité que nous nommerons "fonction source" telle que :

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\eta}{\kappa}, \quad (10)$$

on obtient alors une nouvelle forme de l'équation de transfert de rayonnement :

$$\frac{dI}{d\tau} = I - S. \quad (11)$$

Nous sommes alors très proches de cette fameuse "équation de transfert" (par la suite ETR) dont tous les astronomes se souviennent "par cœur" même ceux qui n'ont jamais été réellement depuis leurs études des "praticiens" de cette discipline. Il nous manque cependant un dernier élément, essentiellement géométrique, à incorporer pour y arriver.

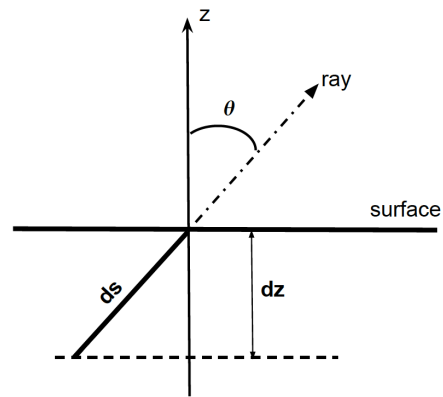


FIG. 5. Pour une atmosphère dite "plan parallèle" en géométrie cartésienne 1D, on considèrera que chaque quantité physique ne dépend *que* de la variable géométrique  $z$  ; en d'autres termes, chaque quantité physique demeure constante dans un plan donné  $z_k$ . Par contre, nous allons considérer toutes les directions possibles pour le trajet des rayons lumineux, chacune caractérisée par le cosinus directeur  $\mu$  qui est aussi le cosinus de l'angle polaire  $\theta$  fait entre la direction du rayon lumineux et la normale à la surface de l'atmosphère étudiée (d'après Lambert et al. 2016).

En effet, jusqu'à présent nous n'avons implicitement considéré *que* des trajets lumineux élémentaires, suivant une (seule) direction donnée  $ds$ . Considérons maintenant le cas de rayons lumineux ayant des directions multiples, que nous caractériserons chacune par son *cosinus directeur*  $\mu$ .

Nous nous limiterons aussi au cas de l'atmosphère dite "plan parallèle" en géométrie cartésienne monodimensionnelle (1D). Ce modèle repose sur l'hypothèse que toute quantité physique, impliquée notamment dans l'élaboration du problème de transfert, varie *uniquement* suivant la profondeur géométrique  $z$ . Autrement dit, ces mêmes quantités sont aussi *constantes* dans tout plan  $(x, y)$  de profondeur géométrique donnée  $z_k$ .

Malgré sa géométrie simplifiée, notre modèle permet toutefois de considérer des rayons lumineux d'orientations distinctes, comme schématisé sur la Fig. (5). Cependant, pour des raisons "pratiques" – et en particulier à des fins de modélisation numérique, comme nous le verrons plus loin – nous aurons besoin d'établir une *référence* commune en profondeur optique. Ainsi, nous allons maintenant définir :

$$d\tau \stackrel{\text{def}}{=} -\kappa dz, \quad (12)$$

sachant que, d'autre part et pour des raisons purement géométriques, nous avons aussi :

$$dz = \mu ds, \quad (13)$$

où  $\mu = \cos(\theta)$ , où  $\theta$  est l'angle polaire entre la direction du rayon lumineux et la normale à la surface de l'atmosphère que nous considérons.

Avec les conventions précédentes, et en reprenant l'expression donnée par l'Eq. (8), on abouti alors à la forme la plus connue de l'ETR :

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S. \quad (14)$$

Cette équation, bien que sous sa forme la plus connue, voire aussi usitée, n'est cependant pas encore une équation de transfert des photons dans sa forme la plus générale. Le premier ingrédient qui manque ici, c'est la fréquence  $\nu$  qui va traduire la "chromaticité" des phénomènes physiques, complexes, sous-jacents à l'"interaction rayonnement-matière" pour le moment largement cachée sous de (encore) simples coefficients  $\kappa$  et  $\eta$ .

Nous dévoilerons par la suite, progressivement, les détails importants associés à ces diverses grandeurs...

## V. SOLUTION FORMELLE

La "solution formelle" de l'équation de transfert est obtenue grâce à une simplification *considérable* du problème général, en faisant donc l'hypothèse que la *fonction source*,  $S$  est connue.

Dans ce cas, la résolution de l'Eq. (14) est très simple puisqu'il s'agit alors d'une équation différentielle du

premier ordre à coefficients constants. La méthode de résolution, classique, est la suivante. On commence par regrouper les termes en  $I$  à gauche, puis par multiplier l'ETR par  $e^{-\tau/\mu}$  :

$$\frac{1}{\mu} \left( \mu \frac{dI}{d\tau} - I \right) e^{-\tau/\mu} = - \left( \frac{S}{\mu} \right) e^{-\tau/\mu}, \quad (15)$$

ce qui peut se réécrire comme :

$$\frac{d}{d\tau} (I e^{-\tau/\mu}) = - \left( \frac{S}{\mu} \right) e^{-\tau/\mu}. \quad (16)$$

Maintenant nous allons *intégrer* cette expression entre deux profondeurs  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , telles que  $\tau_2 > \tau_1$  et, respectivement (i) illuminée, à  $\tau_2$ , par une intensité spécifique  $I(\tau_2, \mu)$ , et (ii) dont le rayonnement émergent à  $\tau_1$  est égal à  $I(\tau_1, \mu)$ .

On rappelle ici, encore, que la distribution spatiale de  $S$  est connue a priori – c'est l'hypothèse implicite importante sur laquelle repose ce calcul. Enfin, et on y reviendra ultérieurement, cette expression est généralisable au cas plus réaliste pour lequel  $I$  et  $\tau$  dépendent aussi de la fréquence.

Ceci nous conduit à :

$$I(\tau_1, \mu) = I(\tau_2, \mu) e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(\tau) e^{-(\tau - \tau_1)/\mu} (d\tau/\mu). \quad (17)$$

C'est la solution formelle de l'ETR pour le cas simplifié, mais indispensable à traiter, d'une atmosphère 1D plan-parallèle.

Il est alors intéressant de comparer cette expression avec la solution simple issue de la loi de Beer-Lambert-Bouguer donnée par l'Eq. (7). On retrouve bien un premier terme caractérisant l'atténuation de la lumière d'un point à un autre, mais maintenant l'émission propre du milieu ajoute un terme intégral supplémentaire dont la contribution va dépendre de la distribution spatiale de la fonction source  $S$  le long de la ligne de visée.

On peut aussi, d'ores et déjà, effectuer un calcul facile pour estimer l'intensité émergente, à  $\tau_1 = 0$  donc, résultant d'une atmosphère "semi-infinie" pour laquelle on va faire tendre  $\tau_2 \rightarrow +\infty$ . Dans ce cas, l'intensité émergente, pour les seuls  $\mu > 0$  donc, est :

$$I(0, \mu) = \int_0^{\infty} S(\tau) e^{-\tau/\mu} (d\tau/\mu). \quad (18)$$

Nous utiliserons cette expression particulière quant nous aborderons un peu plus loin les relations attribuées à

Eddington et Barbier dans la littérature spécialisée (voir aussi Paletou 2018).

L'article de Lambert et al. (2016) détaille, d'une part comment calculer cette solution formelle, en particulier en utilisant la méthode dites des "caractéristiques courtes" (Auer & Paletou 1994, Léger 2008), puis comment on l'utilise dans le cadre de diverses méthodes itératives. La lecture de cet article, annexe à ce document et en anglais, sera peut-être votre premier contact avec la "littérature scientifique".

## VI. L'INTENSITÉ MOYENNE

Il existe une grandeur associée à cette intensité spécifique,  $I$ , de grand intérêt, et à plusieurs titres. Il s'agit de l'intensité moyenne  $J$  que est définie comme l'intégrale sur *toutes* les directions, normalisée à l'"angle solide"  $4\pi$ , de l'intensité spécifique. En toute généralité, on aurait

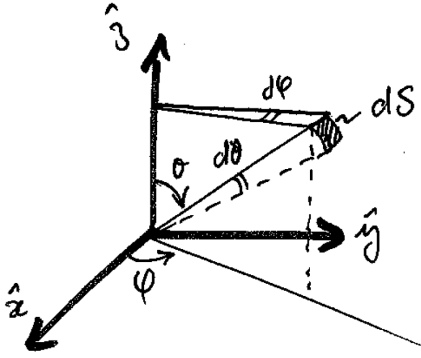


FIG. 6. Un rappel sur le système de coordonnées sphériques à l'attention de nos plus jeunes lecteurs.

donc :

$$J(\tau) = \oint_{\Omega} I(\tau, \Omega) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (19)$$

Sauf mention contraire, et probablement pas avant une section plus avancée (et future ...) de ce document, nous n'utiliserons que la "version 1D" de cette expression. De façon générale, l'élément d'angle solide  $d\Omega$  va s'écrire :

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (20)$$

en coordonnées *sphériques*, comme rappelé en Fig. (6), mais la géométrie que nous avons adopté ici conduit aussi à une symétrie azimutale nous permettant d'intégrer d'emblée sur tous les  $\varphi$  possibles, puis d'utiliser  $\mu$  au lieu de l'angle polaire  $\theta$ , soit encore :

$$d\Omega = 2\pi d\mu \quad (21)$$

Ainsi, dans ce cadre, l'intensité moyenne va être :

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu) d\mu, \quad (22)$$

si l'on n'oublie *pas* la normalisation à tout l'espace. On doit répéter ici que cette expression, très pratique en l'état, n'est qu'une forme particulière de la définition plus complète que l'on trouvera dans un certain nombre de "classiques" comme Hubeny & Mihalas (2014) ou encore l'excellent *e*-ouvrage de Rutten (2003).

Néanmoins, cette forme pour  $J$  va nous conduire à l'expression des "moments angulaires" successifs de l'intensité spécifique.

## VII. MOMENTS DE L'INTENSITÉ SPÉCIFIQUE ET DE L'ETR

On peut aussi définir :

$$H(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu) \mu d\mu, \quad (23)$$

ainsi que :

$$K(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu. \quad (24)$$

Les trois quantités  $J$ ,  $H$ , et  $K$  sont les trois "moments angulaires" successifs de l'intensité spécifique.

Ces quantités ont d'une part un intérêt "historique" et calculatoire, en nous aidant à déterminer certains résultats sans avoir recours au calcul numérique. Ils sont aussi, chacun reliés à des "observables" astrophysiques particulières. En effet, on peut relier  $H$  au *flux émergent* reçu d'une étoile, c'est-à-dire, pour la plupart d'entre elles, un objet céleste "non résolu" spatialement (on reviendra un peu plus loin sur le flux...). Pour sa part, on peut relier  $K$  à la *pression de radiation*. Une telle quantité est notamment à l'œuvre dans le phénomène de "soufflage" d'une queue cométaire par le rayonnement solaire. C'est d'ailleurs à Kepler (1619, *De cometis libelli tres*) que l'on attribue l'intuition de ce phénomène qui sera par la suite établi par Maxwell, à partir de l'observation qu'une queue cométaire pointe toujours à l'opposé du soleil.

Il est aussi possible de déterminer des moments successifs de l'ETR. Le procédé est, en faisant l'hypothèse que la fonction source  $S$  est *isotrope* – en d'autres termes, que  $S$  ne dépend pas de  $\mu$  – d'intégrer une première fois l'ETR dans son ensemble sur  $\mu$ , ce qui conduit facilement à :

$$\frac{dH}{d\tau} = J - S; \quad (25)$$

puis en multipliant l'ETR par  $\mu$  avant de l'intégrer  $d\mu$ , soit :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left( \mu \frac{dI}{d\tau} \right) \mu d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (I(\tau, \mu) - S) \mu d\mu, \quad (26)$$

et, avec une fonction source *isotrope*, pour obtenir finalement :

$$\frac{dK}{d\tau} = H. \quad (27)$$

Nous utiliserons ces deux premiers moments de l'ETR par la suite pour établir l'approximation d'Eddington,  $J = 3K$  puis, plus loin pour travailler sur le "cas gris" et enfin pour établir une solution analytique importante.

### VIII. LA MÉTHODE DES “CARACTÉRISTIQUES COURTES”

Avant d’aller plus loin, nous allons faire une première “digression numérique” puisqu’à ce stade, nous sommes déjà suffisamment “armés” pour aborder les premiers arcanes de cette discipline.

Pour ce faire, nous allons tout d’abord simplifier notre problème de transfert radiatif en ne considérant qu’une seule direction d’espace balayant l’atmosphère que nous souhaitons modéliser. C’est une approximation bien connue et très utilisée, aussi appelée *two-stream approximation* dans la littérature spécialisée. La seule direction que nous considérerons sera caractérisée par  $\mu = \pm 1/\sqrt{3}$ ; cette valeur est issue de la méthode d’intégration numérique de Gauss–Legendre, et ces valeurs de  $\mu$  sont les “noeuds” (ou racines) du polynôme de Legendre  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ . Les deux signes opposés sont là pour nous rappeler que nous devons considérer les deux sens possibles de propagation dans l’atmosphère, bien que, du point de vue de l’observateur on ne s’intéressera, in fine, qu’au rayonnement émergent t.q.  $\mu > 0$ .

De façon plus générale, avant d’émerger, la lumière est a priori susceptible de “diffuser” librement, en changeant potentiellement de direction et/ou de fréquence à chaque “interaction” avec la matière, suivant les mécanismes physiques intimes que l’on incorporera à notre problème. Les hypothèses physiques effectuées relèvent de ce que l’on nomme plus généralement les “mécanismes de redistribution”, partielle ou non, en directions et en fréquences. Dans l’immédiat, nous ne considérerons que de la “redistribution” (ou diffusion) “isotrope”, ne favorisant aucune direction particulière, ainsi que de la diffusion “cohérente”, autrement dit sans changement de fréquence.

La méthode des caractéristiques courtes permet d’effectuer numériquement la solution formelle de l’ETR de la façon suivante. Le principe général consiste en une traversée de l’atmosphère considérée, de “proche en proche”, en avançant point après point le long de la grille spatiale utilisée pour discrétiser (ou encore “échantillonner”) l’atmosphère. Ce cheminement va s’effectuer par exemple, pour un sens donné, disons  $\mu < 0$ , en partant de la surface de l’atmosphère à  $\tau = 0$  jusqu’à l’autre extrémité à  $\tau_{\max}$ , puis à rebours dans le sens opposé. À chaque extrémité de la couche, on devra aussi prendre en compte le rayonnement *incident* éventuel, c’est-à-dire les “conditions aux limites” que l’on *imposera* à notre atmosphère modèle.

Mis à part ces deux extrémités qui seront traitées de façon particulière – on y reviendra... – tous les autres points “internes” à l’atmosphère seront traités de la même façon. Elle repose sur *trois points consécutifs* auxquels nous connaissons les valeurs de la fonction source  $S_u$  au point précédemment traité,  $S_O$  au point courant puis  $S_d$  au point suivant ; voir aussi la Fig. (7). Il s’agit alors, compte tenu des étapes qui précèdent l’arrivée au point  $S_O$ , de propager l’intensité spécifique  $I_u$  qui vient d’être

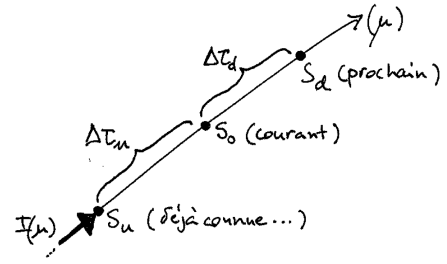


FIG. 7. La méthode des caractéristiques courtes repose sur une progression couche par couche au travers d’une atmosphère d’étendue finie. Il s’agit de transmettre l’intensité spécifique point par point, comme ici du point  $S_u$  au point  $S_O$ , et ainsi de suite, dans un sens, puis dans un autre (et, dans le cas général, d’une direction  $|\mu|$  à une autre, si l’on va au-delà de l’approximation double faisceaux).

calculée, au point courant  $I_O$ , et ainsi de suite.

Cette méthode repose sur ces trois points consécutifs, car elle se fonde sur l’hypothèse que la fonction source locale, sur cette “caractéristique courte” donc, varie de façon *quadratique* avec l’épaisseur optique, c’est à dire que :  $S(\tau) \propto \tau^2$ . En faisant cette hypothèse, on peut alors intégrer *analytiquement* la solution formelle, en y introduisant les épaisseurs optiques  $\Delta\tau_u$  et  $\Delta\tau_d$  qui “mesurent” l’absorption de  $\tau_u$  à  $\tau_O$ , et de  $\tau_O$  à  $\tau_d$  et d’en déduire une expression du type :

$$I_O = I_u e^{-\Delta\tau_u} + \Psi_u S_u + \Psi_O S_O + \Psi_d S_d, \quad (28)$$

où les  $\Psi$  dépendent des épaisseurs optiques  $\Delta\tau_{u,d}$ , ainsi que d’autres termes en  $e^{-\Delta\tau}$  de fait. Le détail de ces quantités est explicité notamment dans Paletou & Léger (2007 ; voir aussi la thèse de Léger 2008 en français ainsi que <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02546057>)

Ainsi, puisque la distribution de la fonction source,  $S$ , est connue a priori, tout comme les épaisseurs optiques d’un point à son voisin, et que nous avons déjà calculé au pas précédent  $I_u$ , on peut alors “avancer” à  $I_O$ , qui deviendra la nouvelle  $I_u$  au pas suivant, et ainsi de suite jusqu’à atteindre l’autre extrémité de l’atmosphère.

Après deux balayages de la couche, correspondant chacun à  $\pm\mu$  donc, on connaîtra tous les  $I(\tau, \mu)$ , que l’on pourra alors intégrer suivant l’Eq. (22), pour déterminer l’intensité moyenne  $J(\tau)$ . Il est d’usage de formaliser, ou de synthétiser, l’ensemble de cette “opération” par l’écriture :

$$J = \Lambda[S], \quad (29)$$

où l’application de l’opérateur  $\Lambda$  signifie donc : “effectuer une solution formelle” compte tenu d’une distribution  $S(\tau)$  donnée, pour une “géométrie” et des conditions aux limites également données.

Cette opération, qui va être répétée un “grand nombre” de fois au sein d’une méthode itérative donnée, va donc

devoir être à la fois précise et rapide. La méthode des caractéristiques courtes s’est lentement imposée depuis une trentaine d’années pour ces qualités, ainsi que pour sa relativement aisée généralisation à des problèmes en géométrie 2D et 3D, ainsi qu’en géométries sphériques ou encore cylindriques.

### IX. UNE ÉQUATION... INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELLE !

Jusqu’à présent nous ne sommes pas vraiment allés plus loin que de l’extrême simplification que  $S$  est connue *a priori* en tout point de l’atmosphère. De même, bien que la fonction source ait été justement définie comme le rapport entre émissivité  $\eta$  et coefficient d’absorption  $\kappa$ , nous ne savons pas grand’chose encore quant à la nature physique de ces quantités.

Nous aborderons plus loin (et ultérieurement...) les mécanismes complexes de l’interaction rayonnement–matière, qui reposent *a minima* sur des connaissances relevant d’un L3(-M1) de physique fondamentale (mécanique statistique, physique atomique et moléculaire, électrodynamique).

On admettra ici que la fonction source qui, d’une certaine façon découle de l’état thermodynamique détaillé de notre atmosphère, dépend *elle-même* du “champ de rayonnement”, c’est à dire de la distribution, a priori complexe, de l’intensité spécifique au sein de cette même atmosphère. Et... cette dernière est, elle aussi, dépendante de  $S$  ! Alors, de façon générale, si l’on ne connaît pas a priori la distribution de notre fonction source, l’ETR (re)devient une équation *intégré-différentielle* puisque  $S$  est elle-même une fonction de  $I$ ...

On admettra pour les quelques sections qui suivent que notre fonction source “la moins complexe possible” est plutôt de la forme :

$$S = (1 - \varepsilon)J + \varepsilon B, \quad (30)$$

où  $J$  est l’intensité moyenne déjà définie en géométrie 1D plan–parallèle,  $B$  une quantité connue a priori et  $\varepsilon$  un paramètre compris entre 0 et 1, constant aussi par soucis de simplification, et caractérisant notre atmosphère.

### X. UNE SOLUTION ANALYTIQUE

Il existe une solution *analytique* au problème précédemment décrit, en particulier par l’Eq. (30), et relativement facile à établir. C’est cependant une solution *exacte* à un problème de transfert *dégradé* car limité à la considération d’une seule direction dans l’espace caractérisée par  $\mu = \pm 1/\sqrt{3}$ .

Le fil de cette démonstration est donné en section III de Lambert et al. (2016). Cette solution analytique,  $S_{\text{Edd}}$ ,

a la forme :

$$S_{\text{Edd}}/B = 1 - (1 - \sqrt{\varepsilon})e^{-\tau\sqrt{3\varepsilon}}. \quad (31)$$

Elle va nous servir de référence, de “cible” à atteindre, nous permettant de tester la qualité et caractériser les deux premières méthodes numériques que nous allons aborder maintenant.

### XI. LA $\Lambda$ -ITERATION

La première méthode itérative à laquelle on peut penser c’est, partant d’une “devinette” (aussi “éclairée” que possible, ce que les anglo-saxons appellent un *educated guess*) consistant à estimer que  $S \simeq S^\dagger$ , d’effectuer alors une première ( $n = 1$ ) solution formelle :

$$J^{(n)} = \Lambda[S^\dagger], \quad (32)$$

puis de mettre à jour :

$$S^{(n)} = (1 - \varepsilon)J^{(n)} + \varepsilon B, \quad (33)$$

vérifier si l’écart entre la *nouvelle* estimation  $S^{(n)}$  et la précédente  $S^\dagger$  n’est “pas trop grande”, sinon repartir dans le processus de “solution formelle” décrit par l’Eq. (32), *mais* après avoir effectué :

$$S^\dagger \leftarrow S^{(n)}, \quad (34)$$

et ainsi de suite, jusqu’à ce que l’on atteigne une distribution  $S(\tau)$  “stabilisée”.

Un tel processus itératif est bien connu en mathématiques appliquées comme “méthode du point-fixe”. On appelle aussi ce procédé : méthode itérative de Picard. Mais dans le domaine du transfert de rayonnement astrophysique, c’est ce que l’on nomme la “ $\Lambda$ -itération”.

Vous êtes maintenant presque en mesure d’enchaîner sur une première utilisation du *webservice* : <http://rttools.irap.omp.eu>. Pour ce faire, nous allons par exemple fixer une épaisseur totale de la couche à  $\tau_{\text{max}} = 10^6$ , discrétisée par 4 points par décade (`npdec`), et adopter enfin  $\varepsilon = 10^{-4}$  (le paramètre `omega` est sans objet, sauf pour la méthode de Gauss–Seidel/SOR). Aussi, par défaut les opérations effectuées utilisent toutes une initialisation t.q.  $S/B = 1$ . Exécutez alors `LI`, avec des valeurs du nombre d’itérations `niter` variables et analysez le comportement de cette méthode. Pour ce faire, vous aurez besoin d’utiliser les deux termes d’“erreur” définis par les Eqs. (17–18) dans Lambert et al. (2016, section IV-A).

## XII. LA MÉTHODE ALI

Cette méthode est essentiellement basée sur le principe de la méthode de Jacobi des mathématiciens. C'est une méthode itérative qui repose sur l'utilisation d'un opérateur "approché" à l'opérateur complet, ici  $\Lambda$  donc.

Soit  $\Lambda^*$  un opérateur *approché* de  $\Lambda$ . On peut alors écrire que :

$$\Lambda = \Lambda^* + \delta\Lambda, \quad (35)$$

où  $\delta\Lambda$  est une "perturbation"... De la même façon, au cours de l'avancée de notre schéma itératif, on pourra écrire, à chaque étape que :

$$S^{(n)} = S^\dagger + \delta S, \quad (36)$$

où  $\delta S$  est l'incrément de fonction source, à actualiser à chaque itération.

Si l'on injecte maintenant ces deux relations dans l'Eq. (29), que nous réécrivons plutôt sous la forme :

$$S = (1 - \varepsilon)\Lambda[S] + \varepsilon B, \quad (37)$$

et que l'on néglige, *jusqu'à l'éliminer* le "petit terme" :  $\delta\Lambda[\delta S]$ , on obtient :

$$S^\dagger + \delta S \simeq (1 - \varepsilon)\Lambda[S^\dagger] + (1 - \varepsilon)\Lambda^*[\delta S] + \varepsilon B. \quad (38)$$

On va maintenant écrire une relation donnant  $\delta S$  en fonction de toutes les quantités déjà connues par ailleurs, c'est-à-dire :

$$[1 - (1 - \varepsilon)\Lambda^*]\delta S = (1 - \varepsilon)\Lambda[S^\dagger] + \varepsilon B - S^\dagger. \quad (39)$$

N'oubliez pas ici que  $\Lambda^*$  est un *opérateur* donc un "objet" qu'il faudra alors inverser "comme une matrice" et non pas utiliser comme un scalaire ! Alors, nous pourrions calculer, itération après itération, un nouvel incrément de la façon suivante :

$$\delta S = [1 - (1 - \varepsilon)\Lambda^*]^{-1}[(1 - \varepsilon)\Lambda[S^\dagger] + \varepsilon B - S^\dagger]. \quad (40)$$

La question se pose maintenant de la "forme" de l'opérateur approché  $\Lambda^*$  que l'on voudra utiliser pratiquement. Historiquement cette méthode d'opérateur approché à d'abord été mise en œuvre avec des opérateurs tridiagonaux, voire pentadiagonaux issus de l'opérateur complet.

C'est cependant Olson, Auer & Buchler (1986) qui ont définitivement "propulsé" ce type de méthode à leur apogée en montrant que, appuyés sur des éléments de mathématiques solides, la méthode optimale est celle qui utilisera la *diagonale* de l'opérateur complet ! Ainsi, du

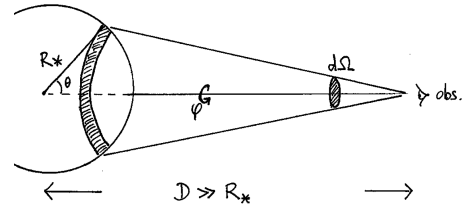


FIG. 8. Géométrie pour le calcul du flux émergent de l'ensemble de la surface visible d'une étoile de rayon  $R_*$  située à une distance  $D$  ( $D \gg R_*$ ) de l'observateur.

point de vue mathématique, la méthode dite *Accelerated Lambda Iteration* (ALI) de Olson et al. (1986) n'est autre que la méthode de Jacobi bien connue en mathématiques appliquées.

De fait, le choix d'un opérateur diagonal va non seulement réduire l'inversion explicitée dans l'Eq. (40) à une simple division scalaire (à toutes les profondeurs de l'atmosphère), ceci procurant un gain de calcul significatif, mais cette méthode est surtout *convergente*, contrairement à la  $\Lambda$ -itération qui est "pseudo-convergente".

Vous pourrez maintenant comparer l'évolution de ALI vs. LI et constater, toutefois, la sensibilité de ALI à l'échantillonnage spatial que l'on adoptera.

## XIII. FLUX ÉMERGENT

Quand nous avons établi les trois moments  $J$ ,  $H$ , et  $K$ , j'ai mentionné que  $H$  pouvait être relié à une observable importante, le "flux".

Le *flux d'Eddington*, autrement dit  $H$ , résulte d'une intégration angulaire puis d'une normalisation à l'angle solide  $4\pi$ . De façon plus générale, le flux va mesurer la quantité d'énergie radiative passant à travers une "surface orientée". On définira cette quantité comme :

$$\mathcal{F} = 2\pi \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu) \mu d\mu. \quad (41)$$

Enfin, la quantité issue pratiquement de la mesure c'est le *flux émergent*, pour lequel on ne considèrera que les  $\mu > 0$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}^{(\text{obs})} = 2\pi \int_0^{+1} I(0, \mu) \mu d\mu. \quad (42)$$

C'est cette quantité qui est effectivement mesurée, pour une longueur d'onde donnée, quand on observe l'atmosphère d'une étoile *non-résolue* spatialement. En effet, dans ce cas – le plus fréquent ! – il n'est pas possible d'isoler une ligne de visée particulière correspondant à l'émission d'une portion précise de l'atmosphère stellaire. La mesure va donc intégrer toutes les contributions du disque stellaire, sans pouvoir les distinguer.



On peut aussi facilement montrer que ce flux dépend de la distance de l'objet. En effet, à l'aide la Fig. (8), nous allons intégrer le rayonnement émergent dans l'angle solide  $d\Omega$ . Il nous faut d'abord écrire la surface élémentaire de l'anneau :  $dS = (2\pi R_* \sin \theta)(R_* d\theta)$  ce qui nous amène, par définition à ce que :

$$d\Omega = 2\pi \left( \frac{R_*^2}{D^2} \right) \sin \theta d\theta. \quad (43)$$

Ainsi, le flux qui est, de fait, l'intégrale de toutes les contributions dans cet angle solide varie bien comme  $D^{-2}$ .

Enfin, ce flux est directement relié à la *luminosité* de l'astre.

#### XIV. LES RELATIONS DE MILNE–BARBIER–UNSÖLD

Ces relations sont appelées relations d'*Eddington–Barbier* dans la plupart des ouvrages ou articles de référence. Je reprendrai ici le calcul désormais classiquement présenté, qui consiste, pour démarrer, à faire l'hypothèse d'une fonction source variant *linéairement* avec la profondeur optique, soit :

$$S = S_0 + S_1 \tau, \quad (44)$$

où  $S_0$  et  $S_1$  sont des constantes, pour lesquelles nous n'avons pas besoin de plus d'information.

Maintenant, nous allons injecter cette expression dans l'Eq.(18) qui donne l'intensité spécifique émergente à la surface d'une atmosphère, en fonction de directions d'émergence caractérisées par  $\mu$ . On rappelle une fois de plus que  $S$ , par contre ne dépend pas de  $\mu$  ici. Ainsi, on a :

$$I(0, \mu) = \int_0^\infty (S_0 + S_1 \tau) \times e^{-\tau/\mu} (d\tau/\mu), \quad (45)$$

qui s'intègre facilement, par une intégration par parties élémentaire (de niveau L1), pour donner :

$$I(0, \mu) = S_0 + S_1 \mu, \quad (46)$$

soit encore :

$$I(0, \mu) = S(\tau = \mu), \quad (47)$$

compte tenu de l'hypothèse à l'origine de ce calcul.

Il est important d'interpréter convenablement ce résultat à première vue anodin. L'intensité émergente, pour une "ligne de visée"  $\mu$  – c'est important ! –, est donc égale à la fonction source à la profondeur optique *de référence*  $\tau = \mu$ . Or rappelez-vous que nous avons convenu d'une

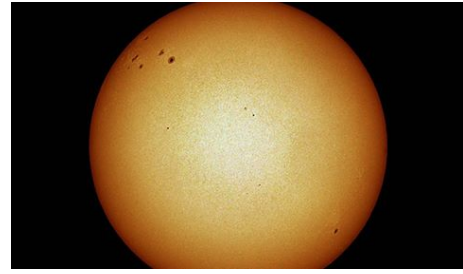


FIG. 9. Sur cette image du disque solaire en "lumière blanche" c'est-à-dire la superposition de plusieurs longueurs d'onde visibles, mises à part les fluctuations d'intensité locales associées aux taches notamment, on constate un assombrissement quand on compare les intensités émergentes du centre au bord du disque. Cette dernière "opération" consiste bien à faire varier  $\mu$  de 1 (centre) à 0 (bord).

échelle *unique*, de référence, pour l'épaisseur optique *suivant la verticale* – voir encore les relations (12–13) et la Fig. (5).

Compte tenu de cette convention et de la géométrie utilisée, cette simple relation signifie aussi, que (dans les limites des hypothèses que nous avons dû effectuer pour l'établir) : *l'intensité émergente, le long d'une ligne de visée donnée, est égale à la valeur de la fonction source à une altitude telle que l'on ait parcouru une épaisseur optique  $\tau_\mu = 1$  le long de ce trajet.*

C'est une notion très utile, même dans des situations plus complexes et, d'expérience, même nos Master-2, apprentis astrophysiciens au bagage solide, y réfléchissent souvent à deux fois. Une excellent test de votre compréhension de cette notion vous sera proposé dans le cadre de ce que l'on nomme l'"effet d'assombrissement centre–bord" qui suit.

Nous pouvons aussi établir une expression particulière pour le *flux émergent*. Il suffit de combiner le résultat précédemment établi en Eq.(46) avec le calcul du flux émergent soit :

$$\mathcal{F}^{(\text{obs})} = 2\pi \int_0^1 (S_0 + S_1 \mu) \mu d\mu. \quad (48)$$

Il est alors facile de montrer que le flux émergent est proportionnel à  $S(\tau = 2/3)$ .

Pour aller plus loin, Paletou (2018, suite à la question très pertinente d'une ancienne étudiante de Master-2 à l'issue de l'un de mes cours) a réexaminé les origines de ces relations, aussi bien sur l'intensité spécifique que sur le flux et suggéré, compte tenu de l'enchaînement des propositions historiques, de les rebaptiser relations de *Milne–Barbier–Unsöld*.

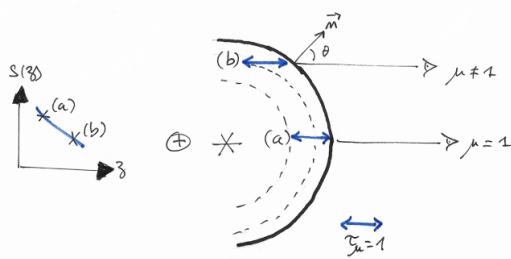


FIG. 10. Illustration de l’explication de l’assombrissement centre–bord solaire, en utilisant la relation de Milne–Barbier–Unsöld sur l’intensité spécifique.

## XV. LOI D’ASSOMBRISSEMENT CENTRE–BORD

Enfin un peu d’astronomie ! L’observation du soleil à des longueurs d’onde visibles, voire aussi en “lumière blanche”, soit le cumul de toute la lumière observable dans le domaine visible, révèle un *assombrissement* quand on déplace sa “ligne de visée” du centre au bord solaire – aussi appelé “limbe” –, comme illustré en Fig. (9). La terminologie anglo–saxonne parle alors de *limb darkening* pour cet effet.

L’application de la relation de Milne–Barbier–Unsöld sur l’intensité spécifique va nous permettre d’étayer un premier diagnostic astrophysique. L’analyse va principalement reposer sur notre résultat précédent qui dit que l’intensité spécifique, mesurée *le long d’une ligne de visée particulière* caractérisée par un cosinus directeur  $\mu$ , est égale à la fonction source  $S(\tau_\mu = 1)$ . Or, d’une ligne

de visée à une autre, soit d’une valeur de  $\mu$  à une autre, l’épaisseur optique  $\tau_\mu = 1$  ne correspond pas, a priori, à la *même* altitude *géométrique* au sein de l’atmosphère, comme illustré en Fig. (10). L’assombrissement centre–bord solaire s’explique alors par le fait que, pour des  $\mu$  décroissants, on va intercepter une altitude croissante dans l’atmosphère. L’assombrissement observé sera alors compatible avec la décroissance de la fonction source, aux longueurs d’onde observées, avec l’altitude.

C’est bien ce qui se passe au sein de la “photosphère” solaire d’où est issue la plus grande partie de la lumière du disque aux longueurs d’onde visibles.

## REMERCIEMENTS

Envisagé depuis trop longtemps, à chaque fois remis à plus tard, le contexte extraordinaire du printemps 2020 m’a finalement obligé à produire ce document. On ne saurait *nullement* remercier quelque coronavirus, responsable de la pandémie qui s’est alors abattue sur nous, en nous contraignant, pour les plus chanceux d’entre nous, à un mode de travail particulier. Cependant, et pour reprendre, très humblement, les termes du mathématicien Jean Dieudonné, c’est bien “pour l’honneur de l’esprit humain” qu’il a fallu surmonter cette épreuve et continuer à transmettre du savoir, coûte que coûte. C’est bien ces étudiant.e.s qui continuent malgré tout d’assaillir courageusement nos laboratoires qu’il faut remercier, tout en les aidant au mieux. Et puis, à la mémoire de Mme Yvette Cuny, pionnière de cette discipline, disparue pendant la rédaction de ces notes...

\* frederic.paletou@univ-tlse3.fr

<sup>1</sup> En omettant les impacts plus ou moins fructueux sur Mercure (*Messenger*), Jupiter (*Galileo*), Saturne (*Cassini*) et 9P/Tempel (*Deep Impact*) ; le cas de *Near* sur *Eros* semble litigieux, entre impact et “atterrissage” en bonne et due forme, une image étant en cours de transmission juste avant perte, préméditée, de la sonde “suicidée” sur l’astéroïde (P. Michel, OCA, communication privée ; voir aussi la version officielle de la *Nasa* quant à cette mission).

<sup>2</sup> L’astrophysicien, version “moderne” de l’astronome tout droit venu de... l’Antiquité – voire de la préhistoire –, ne manque jamais d’égrotigner le philosophe (polytechnicien) Auguste Comte quant à la connaissance de la “composition chimique des étoiles”.

<sup>3</sup> Le terme “profondeur” optique est aussi utilisé, ce qui n’est encore pas trop grave et déroutant, car malheureusement de nombreux autres abus de langage sévissent encore dans la “littérature scientifique” faisant l’amalgame entre épaisseur/profondeur optiques voire encore “opacité” ! Nous tâcherons pas la suite de définir les choses convenablement et de conserver une terminologie précise.

<sup>4</sup> Cette notion n’est vue qu’au niveau L2. Soit une surface  $S$  vue à une distance  $D$  d’un observateur que l’on associera

à un point  $O$  dans l’espace. L’angle solide  $\Omega$  qui mesure, disons l’ouverture du cône qui part de ce point  $O$  pour intercepter la surface  $S$ , c’est :  $\Omega = S/D^2$ . C’est donc une quantité *sans* dimension que l’on exprimera toutefois en *stéradians* (*sr*).

<sup>5</sup> Hubeny, I & Mihalas, D. 2014, *Theory of stellar atmospheres*, Princeton University Press

<sup>6</sup> Lambert, J., Paletou, F., Josselin, E., Glorian, J.-M., 2016, *European Journal of Physics*, 37, 1 (aussi : <https://arxiv.org/abs/1509.01158>)

<sup>7</sup> Léger, L., 2008, thèse (disponible en ligne : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00332781>)

<sup>8</sup> Mianes, P., 1964, *L’astronomie*, 78, 279

<sup>9</sup> Paletou, F., Léger, L., 2007, *JQSRT*, 103, 57 (aussi <https://hal.archives-ouvertes.fr/ccsd-00087890>)

<sup>10</sup> Paletou, F., 2018, *Open Astronomy*, 27, 76 (et en français ici : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01633633>)

<sup>11</sup> Rutten, R.J., 2003, *Radiative Transfer in Stellar Atmospheres*, Lecture Notes Utrecht University (disponible en ligne, via l’ADS : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2003rta.book.....R/abstract>)